Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

PROBLEMAS PARABÓLICOS QUASI-LINEARES E EXISTÊNCIA DE ATRATOR

Luiz Mateus Santana Santos

Orientadora: Dr$^{\text{a}}$. Simone Mazzini Bruschi

Brasília

2012

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Parabólicos Quasi-lineares e Existência de Atrator.

por

Luiz Mateus Santana Santos*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 18 de outubro de 2012.

Comissão Examinadora:

Simone Mazzini Bruschi

Profa. Dra. Simone Mazzini Brsuchi – MAT/UnB (Orientadora)

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile – UFSCAR

Luis Miranda

Prof. Dr. Luis Henrique de Miranda - MAT/UnB

* O autor foi bolsista CNPq durante a elaboração desta dissertação.

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio e carinho.
Aos meus amigos pelos momentos de descontração.
À Dr. Simone Mazzini Bruschi pela paciência, e pela orientação ao longo dos ultimos meses.
Ao CNPQ pelo apoio finaceiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de atrator global para problemas parabólicos envolvendo pertubações lipschitiziana de um operador maximal monótono.

Palavras-chave: Atratores Globais, Problema Quasi-linear, Operadores Maximais Monótonos.

Abstract

In this work we study the existence of global attractors for parabolic problems involving lipschitzian perturbations of a maximal monotone operator.

Palavras-chave: Global Attractors, Quasi-linear problems, Maximal Monotone Operator.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência de atrator para o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) + Bu(t) = 0, t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde A é um operador maximal monótono unívoco e B uma função globalmente Lipschitz. A existência de atratores globais para (1) foi demonstrada por A. N. Carvalho, J. W. Cholewa e T. Dlotko em [6].

Se $p > 2$, conforme [6], para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta_p u + \lambda u \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado com fronteira suave e $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, possui um atrator global. Observamos que, se $p = 2$ a existência de atrator global para (2) depende do valor de λ. Isto deve-se ao fato de que as propriedades dissipativas do p-laplaciano, $p > 2$, serem mais fortes do que as propriedades correspondentes ao laplaciano, $p = 2$.

Em [14] utilizando os mesmos argumentos de [6], foi provado que o problema com o $p(x)$-laplaciano possui um atrator global.

Em [7], mostra-se que o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \Delta_p u(t) + Bu(t) = 0, t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

onde B é um operador localmente Lipschitz. Sob hipóteses adequadas sob o operador B o problema (3) possui um atrator global.

O interesse em provar que um dado sistema possui atrator global reside no fato que o atrator descreve todas as possíveis dinâmicas que o dado sistema pode produzir e também que dentre todos os conjuntos limitados que atraem limitados o atrator é o menor considerada a relação de inclusão.

INTRODUÃÃO

Afim de propocionar um melhor entedimento dos assuntos abordados nessa dissertação, organizamos-a da seguinte maneira: No primeiro capítulo estudamos propriedades de operadores maximais monótonos e dirigimos uma atenção especial para a subdiferencial de uma função convexa, pois o operador p-laplaciano é subdiferencial de uma função convexa. No segundo capítulo, estudamos os conceitos de solução forte e solução fraca para inclusões diferenciais bem como resultados de existência de solução. No terceiro capítulo apresentamos um breve resumo da teoria de comportamento assintótico para sistemas dinâmicos dados por semigrupos e mostramos que um semigrupo ponto dissipativo e completamente contínuo possui um atrator global. No capítulo quatro aplicamos a teoria desenvolvida nos capítulos antecedentes para garantir a existência de solução do problema (1) e sob condições adcionais para a existência de atrator.

Capítulo 1

Operadores Maximais Monótonos

Neste capítulo estudaremos propriedades relativas ao operadores maximais monótono, veremos sob quais hipóteses podemos garantir que um operador maximal monótono é sobrejetivo e que a soma de operadores maximais monótonos é um operador maximal monótono. A principal referência para este capítulo é Brezis [5]

1.1 Definição e propriedades

Definição 1.1. *Seja* $(H, \langle . \ , . \rangle)$ *um espaço de Hilbert sobre* $\mathbb{R}$. *Um operador (multívoco)* A *é uma aplicação* $A : H \to P(H)$ *cujo o domínio é* $D(A) = \{x \in H; Ax \neq \emptyset\}$ *e a imagem* $Im(A) = \bigcup\limits_{x \in D(A)} Ax$.

Quando para todo $x \in D(A)$ o conjunto Ax contém apenas um elemento, A é chamado de operador *unívoco*. Se A e B são operadores de H e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então $\lambda A + \mu B$ é um operador de H defindo por $\lambda Ax + \mu Bx = \{\lambda u + \mu v; u \in Ax, v \in Bx\}$, e $D(\lambda A + \mu B) = D(A) \cap D(B)$.

Identificamos A com o seu gráfico em $H \times H$, isto é, $\{(x, y); y \in Ax\}$. Dessa forma podemos ordenar o conjunto dos operadores pela inclusão de gráficos, isto é,

$$A \leq B \Leftrightarrow \forall\, x \in H, Ax \subset Bx.$$

O operador A^{-1} é definido como sendo o operador cujo gráfico é simétrico ao gráfico de A, ou seja, $y \in A^{-1}x \Leftrightarrow x \in Ay$.

Definição 1.2. *Um operador* A *de* H *é monótono se para todos* $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$ *temos*

$$\Big\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \Big\rangle \geq 0. \tag{1.1}$$

Por simplicidade de notação escrevemos

$$\Big\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \Big\rangle \geq 0, \ \forall \, x_1, \ x_2 \in D(A),$$

quando a relação (1.1) é satisfeita.

Exemplo 1.1. Seja A um operador monótono, então A^{-1}, $\overline{A}$ definido como sendo o fecho de A em $H \times H_w$, onde H_w denota o espaço munido com a topologia fraca e $\tilde{A}$, dado por $\tilde{A}x = \overline{\text{conv}Ax}$, também são maximais monótonos.

Proposição 1.1. *Seja A um operador de H. A é monótono se, e somente se, o operador $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração, isto é, para todos $x_1, \ x_2 \in D(A)$ e $\lambda > 0$*

$$|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2 + \lambda(Ax_1 - Ax_2)|,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma de H.

Demonstração. De fato, sejam $x_1, \ x_2 \in D(A)$ e $\lambda > 0$. Para todos $y_1 \in Ax_1$ e $y_2 \in Ax_2$, temos

$$|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)|^2 = |x_1 - x_2|^2 + 2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \lambda^2|y_1 - y_2|^2.$$

Se A é um operador monótono, então $2\lambda\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \lambda^2|y_1 - y_2|^2 \geq 0$, logo

$$|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)| \geq |x_1 - x_2|.$$

Reciprocamente, se $|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)| \geq |x_1 - x_2|$, então

$$2\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle + \lambda|y_1 - y_2|^2 \geq 0.$$

Fazendo $\lambda \to 0^+$, concluímos que A é monótono. $\square$

Observamos que a caracterização dada na Proposição 1.1 utiliza apenas a norma do espaço H. Assim, no caso em que consideramos um espaço de Banach $(V, \|.\|_V)$ um operador $A : X \to P(X)$ é dito acretivo se,

$$\|x_1 - x_2\|_V \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(Ax_1 - Ax_2)\|_V, \ x_1, \ x_2 \in D(A).$$

A proposição acima mostra que o operador A monótono em um espaço de Hilbert é um caso particular de operador acretivo definido em espaço de Banach para mais detalhes ver [3, p. 71].

Definição 1.3. *Um operador A é maximal monótono, quando ele é monótono e é maximal no conjunto dos operadores monótonos.*

Como o conjunto dos operadores monótonos de H é indutivamente ordenado, a definição acima está bem posta.

Observação 1.1. Um operador monótono A é maximal se, e somente se, para todo par $(x, y) \in H \times H$ tal que $\langle y - A\xi, x - \xi \rangle \geq 0$ para todo $\xi \in D(A)$ então $y \in Ax$.

Exemplo 1.2. Seja A um operador maximal monótono de H, então os operadores A^{-1} e λA, para todo $\lambda > 0$, são maximais monótonos.

Teorema 1.1. *Sejam C um subconjunto convexo fechado de H e A um operador monótono de H. Então, para todo $y \in H$ existe $x \in C$ tal que*

$$\langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle, \ \forall\ (\xi, \eta) \in A.$$

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [5, p.24].

Observação 1.2. Seja $C \subset H$ um conjunto convexo fechado. Consideremos $\mathcal{F}$ o conjunto dos operadores monótonos de H cujo domínio está contido em C. Notemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois o operador identidade definido em C é monótono. Pelo Lema de Zorn existe A' elemento maximal de $\mathcal{F}$.

Vamos mostrar que $Im(I + A') = H$. Com efeito pelo Teorema 1.1, dado $y \in H$ existe $x \in C$ tal que

$$\langle \eta + x, \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle, \ \forall\ (\xi, \eta) \in A.$$

Logo, pela Observação 1.1, temos que $y - x \in A'x$. Portanto, $Im(I + A') = H$.

Proposição 1.2. *Seja A um operador de H, são equivalentes:*

(i) A é maximal monótono.

(ii) A é monótono e $Im(I + A) = H$.

(iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração de H em si mesmo.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$ (iii) Desde que A é maximal monótono, então o operador λA também o é, para todo $\lambda > 0$. Consideremos $C = H$ na observação anterior, assim $A' = \lambda A$. Logo, $Im(I + \lambda A) = H$, e pela Proposição 1.1 temos que $(I + \lambda A)^{-1}$ é uma contração.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Pela Proposição 1.1, A é monótono, fazendo $\lambda = 1$ temos $Im(I + A) = H$.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Seja B um operador monótono, tal que $A \subset B$. Se $y \in Bx$, por hipótese existe $x' \in D(A)$ tal que

$$x + y \in x' + Ax' \subset x' + Bx'.$$

Assim, $y + x - x' \in Bx'$. Considerando $(\xi, \eta) = (x, y) \in B$, pela monotonicidade de B temos que

$$0 \leq \langle y + x - x' - y, x' - x \rangle = -|x - x'|^2.$$

Logo, $x = x'$ e $y \in Ax$. □

Outra consequência do Teorema 1.1 é:

Corolário 1.1. *Seja A um operador monótono, então existe A' maximal monótono tal que A' é uma extensão de A e $D(A') \subset \overline{conv(D(A))}$.*

Para demonstrarmos o corolário acima, basta tomarmos $\mathcal{F}$, como o conjunto dos operadores monótonos cujo domínio está contido em $\overline{\mathrm{D(A)}}$ e que estende A, e proceder de maneira analoga a Observação 1.2.

O próximo exemplo mostra que operadores maximais monótonos são uma generalização de operadores maximais monótonos lineares apresentada em [4, p. 102].

Exemplo 1.3. Seja A um operador linear, não limitado, monótono. Então A é maximal monótono se, e somente se, $D(A)$ é denso em H e A é o elemento maximal no conjunto dos operadores lineares monótonos.

Proposição 1.3. *Seja A um operador unívoco com $D(A) = H$ em H. Se A é hemicontínuo, isto é, $A(\{1 - t\}x + t\xi) \to Ax$, quando $t \to 0$, para todo $\xi \in H$, então A é maximal monótono.*

Demonstração. Com efeito, seja $(x, y) \in H \times H$ tal que

$$\langle Ax' - y, x' - x \rangle \geq 0.$$

Assim, para todo $\xi \in H$ e $t \in (0, 1)$ temos

$$\langle A(\{1 - t\}x + t\xi) - y, \xi - x \rangle \geq 0.$$

Como A é hemicontínuo temos

$$\langle Ax - y, \xi - x \rangle \geq 0, \ \forall\, \xi \in H.$$

Portanto, $Ax = y$ e pela Observação 1.1 segue que A é maximal monótono. □

Exemplo 1.4. Seja $(V, \|.\|_V)$ um espaço de Banach reflexivo, tal que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ com imersões contínuas, e V é denso em H. Seja $A : V \to V^*$ unívoco, monótono, hemicontinuo e coercivo, isto é,

$$\lim_{\|u\|_V \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} = \infty,$$

onde $\langle , \rangle_{V^*,V}$ denota o produto dualidade de V e V^*. Consideremos $D(A_H) = \{v \in V; Av \in H\}$ e o operador A_H como sendo a restrição de A a $D(A_H)$, então A_H é maximal monótono em H. Com efeito, A_H é monótono. Segundo [13], a equação $x + Ax \ni y$ tem solução para todo $y \in V^*$, em particular para $y \in H$.

No Capítulo 4, estudaremos a resolução de inclusão diferencial cujo operador é A_H. A proposição a seguir será bastante utilizada, quando provarmos que um elemento está no domínio de um operador maximal monótono A.

Proposição 1.4. *Seja $\{(x_n, y_n)\} \subset A$ tal que $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ e $\limsup \langle x_n, y_n \rangle \leq \langle x, y \rangle$. Então $(x, y) \in A$ e $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.*

Demonstração. Seja $(\xi, \eta) \in A$, como A é monótono e $(x_n, y_n) \in A$, temos

$$\langle x_n - \xi, y_n - \eta \rangle \geq 0, \ \forall\, n.$$

Desde que $\limsup \langle x_n, y_n \rangle \geq \langle x, y \rangle$, $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$, concluímos que

$$0 \leq \limsup \langle x_n - \xi, y_n - \eta \rangle \leq \langle x - \xi, y - \eta \rangle.$$

Logo, pela Observação 1.1 segue que $(x, y) \in A$.

Além disso, segue da monotonicidade de A, $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightharpoonup y$ que

$$0 \leq \liminf \langle x - x_n, y - y_n \rangle = -\langle x, y \rangle + \liminf \langle x_n, y_n \rangle.$$

Assim, $\liminf \langle x_n, y_n \rangle \geq \langle x, y \rangle$. Portanto, $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$ □

Seja A um operador maximal monótono. O operador resolvente de A é definido por

$$J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x, \ \forall\, \lambda > 0, \ \forall\, x \in H.$$

Segue da Proposição 1.1 que J_λ é um operador unívoco e como consequência da Observação 1.2 $J_\lambda x \in D(A)$ para todo $x \in H$ e $\lambda > 0$. Além disso, o operador resolvente satisfaz:

$$J_\lambda(x) = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} x + (1 - \frac{\mu}{\lambda}) J_\lambda x \right).$$

Teorema 1.2. *Se $\overline{D(A)}$ é um conjunto convexo de H, então para todo $x \in H$,*

$$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = proj_{\overline{D(A)}} x.$$

Demonstração. Seja $C = \overline{\text{conv}(D(A))}$, pois $\overline{D(A)}$ é convexo e fechado. Sejam $x \in H$ e $x_\lambda = J_\lambda x$, assim,

$$x_\lambda + \lambda A x_\lambda = x \Longleftrightarrow \frac{x - x_\lambda}{\lambda} \in A x_\lambda.$$

Inicialmente provemos que $x_\lambda \rightharpoonup \text{proj}_C x$. Para isso consideremos $(\xi, \eta) \in A$, pela monotonicidade de A temos

$$0 \leq \left\langle \frac{x - x_\lambda}{\lambda} - \eta, x_\lambda - \xi \right\rangle.$$

Logo,

$$|x_\lambda|^2 \leq -\langle x, \xi \rangle + \langle x_\lambda, x + \xi \rangle + \lambda\{-\langle \eta, x_\lambda \rangle + \langle \eta, \xi \rangle\}. \tag{1.2}$$

Assim, utilizando a Desigualdade de Yöung para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
|x_\lambda|^2 &\leq |-\langle x, \xi \rangle + \langle x_\lambda, x + \xi \rangle + \lambda\{-\langle \eta, x_\lambda \rangle + \langle \eta, \xi \rangle\}| \\
&\leq |\langle x, \xi \rangle| + |x_\lambda||x + \xi| + \lambda|\eta||x_\lambda| + \lambda|\langle \eta, \xi \rangle| \\
&\leq \varepsilon|x_\lambda|^2 + |\langle x, \xi \rangle| + \lambda|\langle \eta, \xi \rangle| + \frac{|x + \xi|^2 + \lambda^2|\eta|}{2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, temos

$$|x_\lambda|^2 \leq 2\left(|\langle x, \xi \rangle| + \lambda|\langle \eta, \xi \rangle| + |x + \xi|^2 + \lambda^2|\eta|\right).$$

Logo, $\{x_\lambda\}$ é limitado quando $\lambda \to 0$. Seja $\lambda_n > 0$ uma sequência tal que $\lambda_n \to 0$, assim existe $x_0 \in C$ tal que $x_{\lambda_n} \rightharpoonup x_0$ e como $|\cdot|^2$ é uma função convexa e semicontínua inferiormente segue de (1.2) que

$$|x_0|^2 \leq \liminf_{\lambda_n \to 0} |x_{\lambda_n}|^2 \leq \langle x + \xi, x_0 \rangle - \langle x, \xi \rangle, \ \forall\, \xi \ \in D(A).$$

Como os elementos de C são limites de combinações convexas de elementos de $D(A)$ a desigualdade precedente é válida para todo $\eta \in C$. Dessa forma concluímos da desigualdade anterior que

$$\langle x - x_0, x_0 - \xi \rangle \leq 0, \ \ \forall\, \xi \in C.$$

Assim $x_0 = \text{proj}_C x$. Da unicidade da projeção concluímos que

$$\lim_{\lambda \to 0} x_\lambda = \text{proj}_C x, \text{ em } H_w.$$

Mostremos agora que o limite acima é válido na topologia de H. Pela desigualdade (1.2) e propriedades do limitte superior temos que

$$\limsup_{\lambda\to 0} |x_\lambda|^2 \leq \langle x, x_0 - \xi\rangle + \langle x_0, \xi\rangle,\ \forall\, \xi \in D(A).$$

Novamente obtemos que a desigualdade anterior permanece válida para todo $\xi \in C$, em particular para $\xi = x_0$, assim

$$\limsup_{\lambda\to 0} |x_\lambda|^2 \leq |x_0|^2.$$

Como H é um espaço de Hilbert, x_λ converge fracamente para x_0 e $\lim_{\lambda\to 0} |x_\lambda| = |x|$, concluímos que $x_\lambda \to x_0$. Como $\overline{D(A)}$ é convexo e fechado temos que $C = \overline{D(A)}$. □

Notemos que utilizamos o fato de $\overline{D(A)}$ ser um conjunto convexo para inferir que $\overline{\mathrm{conv(D(A))}} = \overline{D(A)}$. Então se $x \in D(A)$ temos que $J_\lambda x \to x$ mesmo que $\overline{D(A)}$ não seja um conjunto convexo.

Sabemos que o operador $\tilde{A}$ definido em $D(A)$, por $\tilde{A}x = \overline{\mathrm{conv}(Ax)}$, é monótono, quando A é monótono. Se A é maximal então Ax é um conjunto convexo e fechado, pois do contrário o operador $\tilde{A}$ é uma extensão de A o que contraria a maximalidade de A.

Definição 1.4. *Seja A um operador maximal monótono, definimos o operador A^0 que a cada $x \in D(A)$ associa o elemento de norma mínima de Ax, isto é, $A^0x = proj_{Ax}0$.*

Definição 1.5. *Seja A é um operador maximal monótono, então para todo $\lambda > 0$ definimos a* ***aproximação de Yosida*** *por $A_\lambda = \dfrac{I - J_\lambda}{\lambda}$.*

Notemos que a aproximação de Yosida é um operador unívoco em H, pois, J_λ é uma contração de H em H. Uma vez que A não é necessariamente unívoco temos que $A_\lambda \subset AJ_\lambda$.

Proposição 1.5. *Seja A um operador maximal monótono, então as seguinte afirmações são verdadeiras:*

(i) A_λ é um operador maximal monótono e lipschitziano de constante $\dfrac{1}{\lambda}$;

(ii) $(A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu},\ \forall\ \lambda,\ \mu > 0$;

(iii) Para todo $x \in D(A)$, $|A_\lambda x| \uparrow |A^0x|$, $A_\lambda x \to A^0x$ quando $\lambda \to 0$ e $|A_\lambda x - A^0x| \leq |A^0x|^2 - |A_\lambda x|^2$;

(iv) Para todo $x \notin D(A)$, $|A_\lambda x| \uparrow \infty$ quando $\lambda \to 0$.

Demonstração. (i) Sejam $x_1,\ x_2 \in H$, então

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2\rangle + \lambda|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2|^2 &= \langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2\rangle \\ &\leq |A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2||x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Pela definição de A_λ temos que $A_\lambda x \in A\ J_\lambda x$ para todo $x \in H$. Assim,

$$\langle A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2 \rangle \geq 0.$$

Logo, A_λ é monótono e

$$\lambda |A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2|^2 \leq |A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2||x_1 - x_2|.$$

Portanto, A_λ é monótono e lipschitziano. Mostremos agora que A_λ é hemicontínuo e pela Proposição 1.3 concluímos que é maximal. Seja $\xi \in H$, então para todo $t \in (0,1)$ temos

$$|A_\lambda(x\{1-t\} + t\xi) - A_\lambda x| \leq \frac{1}{\lambda} t|x + \xi| \to 0,\ t \to 0.$$

(ii) Observemos que $(x, y) \in A_\lambda$ se, e somente se, $(x - \lambda y, y) \in A$. Pois,

$$\begin{aligned} y = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda} \quad &\Longleftrightarrow \quad x - \lambda y = \lambda J_\lambda x \Longleftrightarrow x \in (I + \lambda A)(x - \lambda y) \\ &\Longleftrightarrow \quad -(x - \lambda y) + x \in \lambda A(x - \lambda y) \Longleftrightarrow y \in A(x - \lambda y). \end{aligned}$$

Aplicando o fato acima trocando A por A_μ o resultado segue.

(iii) Seja $x \in D(A)$, como A é monótono e $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$ temos

$$\begin{aligned} &\langle A^0 x - A_\lambda x, x - J_\lambda x \rangle \geq 0 \\ &\Longrightarrow |A_\lambda x|^2 \leq \langle A^0 x, A_\lambda x \rangle. \end{aligned}$$

Logo, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $|A_\lambda x| \leq |A^0 x|$. De maneira análoga, concluímos que

$$|A_{\lambda+\mu} x|^2 \leq \langle A_{\lambda+\mu} x, A_\lambda x \rangle \text{ e } |A_{\lambda+\mu} x| \leq |A_\lambda x|,\ \lambda,\ \mu > 0.$$

Assim, pelas desigualdades anteriores temos que

$$|A_{\lambda+\mu} x - A_\lambda x|^2 = |A_\lambda x|^2 - 2\langle A_{\lambda+\mu} x, A_\lambda x \rangle + |A_{\lambda+\mu} x|^2 \leq |A_\lambda x|^2 - |A_{\lambda+\mu} x|^2.$$

Logo, $|A_\lambda x|$ é uma sequência de Cauchy. Assim, existe $y \in H$ tal que $A_\lambda x \to y$. Por outro lado, como $|x - J_\lambda x| = \lambda |A_\lambda x|$, temos que $J_\lambda x \to x$ quando $\lambda \to 0$. Pela Proposição 1.4, temos que $(x, y) \in A$, com $|y| \leq |A^0 x|$. Portanto, $y = A^0 x$.

(iv) Suponhamos por absurdo que $|A_\lambda x|$ é limitado, quando $\lambda \to 0$ e $x \notin D(A)$. Assim, existe $y \in H$ tal que $A_\lambda x \rightharpoonup y$ quando $\lambda \to 0$. Seja $C = \overline{\text{conv}(D(A))}$. Pelo Teorema 1.2 temos,

$\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda x = \text{proj}_C x$. Assim, pela Proposição 1.4 temos $(\text{proj}_C x, y) \in A$. Por outro lado,

$$|x - \text{proj}_C x| = \min_{\xi \in C} |x - \xi| \leq \lim_{\lambda \to 0} |x - J_\lambda x| = \lim_{\lambda \to 0} \lambda |A_\lambda x| = 0.$$

Logo $x \in D(A)$, o que contradiz a suposição $x \notin D(A)$. Portanto, $|A_\lambda x| \uparrow \infty$ quando $\lambda \to 0$.

□

Definição 1.6. *Seja A um operador maximal monótono. Uma seção principal de A é um operador unívoco A', com $A' \subset A$ e $D(A') = D(A)$ tal que para todo $(x, y) \in \overline{D(A)} \times H$ com*

$$\langle A'\xi - y, \xi - x \rangle \geq 0, \ \ \forall\, \xi \in D(A).$$

Então, $y \in Ax$.

Proposição 1.6. *O operador A^0 é uma seção principal de A.*

Demonstração. Consideremos $M = \{(x, y) \in \overline{D(A)} \times H; \langle A^0\xi - y, \xi - x \rangle \geq 0, \ \forall\, \xi \in D(A)\}$. Notemos que para todo $(w, z) \in A$ temos que $\langle A^0\xi - z, \xi - w \rangle \geq 0$, pois A é monótono, logo $A \subset M$. Portanto, é suficiente mostrarmos que M é um operador monótono, pois A é maximal.

Sejam $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in M$, e $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \in \overline{D(A)}$, então para todo $\xi \in D(A)$ temos

$$\langle y_1 - A^0\xi, \frac{x_1 - x_2}{2} + x - \xi \rangle \geq 0$$

e

$$\langle y_2 - A^0\xi, \frac{-x_1 + x_2}{2} + x - \xi \rangle \geq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq\ \langle y_1 - A^0\xi, \frac{x_1 - x_2}{2} + x - \xi \rangle + \langle y_2 - A^0\xi, \frac{-x_1 + x_2}{2} + x - \xi \rangle \\ &=\ \frac{1}{2}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle + \langle y_1 + y_2 - 2A^0\xi, x - \xi \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\langle y_1 + y_2, x - \xi \rangle + 2\langle A^0\xi, x - \xi \rangle.$$

Em particular, se $\xi = J_\lambda x$ temos que $2\langle A^0 J_\lambda x, x - J_\lambda x \rangle \geq 0$. Logo,

$$\frac{1}{2}\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\langle y_1 + y_2, x - J_\lambda x \rangle.$$

Fazendo $\lambda \to 0$, temos Teorema 1.2 que $J_\lambda x \to \text{proj}_{\overline{D(A)}}\, x = x$ e assim

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Portanto, M é monótono. □

Corolário 1.2. *Sejam A e B dois operadores maximais monótonos.*

(i) Se $D(A) = D(B)$ e $A^0 = B^0$ então $A = B$.

(ii) Se $D(A) \subset D(B) \subset \overline{D(A)}$ e $A^0 \subset B$ então $A = B$.

Demonstração. (i) Sejam $\xi \in D(A) = D(B)$ e $(x, y) \in A$, então

$$0 \leq \langle A^0\xi - y, \xi - x \rangle = \langle B^0\xi - y, \xi - x \rangle.$$

Como B^0 é uma seção principal de B temos $(x, y) \in B$. Logo, $A \subset B$, como A é maximal segue que $A = B$.

(ii) Seja $(x, y) \in B$ então por hipótese para todo $\xi \in A$ temos

$$\langle A^0\xi - y, \xi - x \rangle \geq 0.$$

Como A^0 é seção principal de A temos que $(x, y) \in A$, logo $B \subset A$. Como B é maximal monótono temos que $A = B$. □

Agora, analisemos condições necessarias e suficientes para que um operador maximal monótono A seja sobrejetivo. Para isso necessitaremos de algums resuldados preliminares.

Definição 1.7. *Seja B um operador de H. Dizemos que B é limitado em uma vizinhança de $x_0 \in D(B)$, se existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\bigcup_{x \in U} Bx$ é limitado. Dizemos que B é localmente limitado, se é limitado em vizinhanças dos pontos de $\overline{D(B)}$. O operador B é dito limitado se para todo $U \subset H$ limitado, então $\bigcup_{x \in U} Bx$ é limitado.*

Lema 1.1. *Seja B um operador maximal monótono tal que B^0 seja limitado em uma vizinhança de $x_0 \in \overline{D(B)}$, então $x_0 \in D(B)$.*

Demonstração. De fato, seja $x_n \in D(B)$ tal que $x_n \to x_0$. Por hipótese B^0 é limitado em uma vizinhança de x_0, assim existem $y \in H$ e Bx_{n_k} tais que $Bx_{n_k} \rightharpoonup y$. Pela proposição 1.4 segue que $(x, y) \in B$. □

Lema 1.2. *Seja* $\{D_n\} \subset P(H)$ *uma sequência crescente de conjuntos, isto é,* $D_n \subset D_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e* $D = \bigcup_n D_n$. *Suponhamos que* $Int(conv(D)) \neq \emptyset$, *então* $Int(conv(D)) = \bigcup_n Int(\overline{conv(D_n)})$.

Demonstração. Inicialmente notemos que $\text{conv}(D) = \bigcup_n \text{conv}(D_n)$. De fato, claramente $\bigcup_n \text{conv}(D_n) \subset \text{conv}(D)$. Agora se $x \in \text{conv}(D)$, então $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ com $x_i \in D$ e $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Como $\{D_n\}$ é uma sequência crescente, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in D_{N_0}$ para $i = 1, \cdots, k$. Logo, $x \in \text{conv}(D_{N_0})$.

Consideremos $K = Int(\text{conv}(D))$, então

$$K \subset \bigcup_n \text{conv}(D_n) \subset \overline{K}.$$

Aplicando o Teorema de Baire ao espaço K e a sequência de fechados $K \cap \overline{\text{conv}(D_n)}$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Int(\overline{\text{conv}(D_{n_0})}) \neq \emptyset$. Como $D_0 \subset D_n$, para $n \geq n_0$, temos que $Int(\text{conv}(D_{n_0})) \subset Int(\text{conv}(D_n))$ logo

$$\overline{\text{conv}(D_n)} = \overline{Int(\overline{\text{conv}(D_n)})}.$$

Pela inclusão $K \subset \bigcup_n \text{conv}(D_n) \subset \overline{K}$, temos $\overline{K} = \overline{\bigcup_n Int(\text{conv}(D_n))}$. Mas o conjunto $\bigcup_n Int(\overline{\text{conv}(D_n)})$ é aberto e convexo. Portanto $K = \bigcup_n Int(\overline{\text{conv}(D_n)})$. □

O teorema a seguir será aplicado para demonstrarmos uma condição suficiente para que um operador maximal seja sobrejetivo.

Proposição 1.7. *Seja* B *um operador maximal monótono, tal que* $Int(conv(D(B))) \neq \emptyset$. *Então,* $Int(D(B))$ *é convexo,* $Int(D(B)) = Int(\overline{D(B)}) \neq \emptyset$ *e* B *é limitado em uma vizinhança de todo ponto de* $Int(D(B))$.

Demonstração. Consideremos $B_n = \{(x, y) \in B; |x| \leq n,\ |y| \leq n\}$, a sequência $\{B_n\}$ é crescente em $P(H)$ com $B = \bigcup_n B_n$. Por hipótese sabemos que $Int(\text{conv}(B)) \neq \emptyset$, assim pelo lema anterior temos que

$$Int(\text{conv}(B)) = \bigcup_n Int(\text{conv}(B_n)).$$

Afirmamos que dado $x \in Int(\text{conv}(D(B_n)))$ existe uma vizinhança V_x tal que $B|_{V_x}$ é limitado. De fato, sejam x_0 e $r > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \text{conv}(D(B_n))$, seja $(x, y) \in B$ tal que $x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Então, para todo $(\xi, \eta) \in B_n$ temos

$$0 \leq \langle \eta - y, \xi - x \rangle.$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\langle y, \xi - x \rangle \leq |\eta||\xi - x| \leq n(n+n) = 2n^2.$$

A desigualdade acima permanece válida para todo $\xi \in \overline{\text{conv}(D(B_n))}$. Consideremos ξ de modo que $\xi - x = r\dfrac{y}{2|y|}$, então $\xi \in B_r(x_0)$ e

$$\frac{r|y|}{2} = \langle y, \xi - x \rangle \leq 2n^2.$$

Assim, $|y| \leq \dfrac{4n^2}{r}$, desta forma B é limitado em $B_r(x_0)$.

Segue do Lema 1.1 que $Int(\text{conv}(D(B))) \subset D(B)$. Como $\text{conv}(D(B))$ é um conjunto convexo, temos que $Int(\text{conv}(D(B))) = Int(\overline{D(B)})$. Dessa forma concluímos que, $Int(D(B)) = Int(\overline{D(B)})$, e portanto B é limitado em uma vizinhança de todo ponto de $Int(D(B))$ $\square$

Segue imediatamente da proposição acima que, se A é um operador maximal monótono tal que $Im(A) = H$, então A^{-1} é localmente limitado, pois, $Int(conv(D(A^{-1}))) = H$ e A^{-1} é monótono maximal. O resultado a seguir também é uma consequência imediata da proposição precedente.

Corolário 1.3. *Seja B um operador monótono unívoco com $D(B) = H$, então são equivalentes:*

(i) B é maximal monótono.

(ii) B é demifechado (i.e. o gráfico de B é fechado em $H \times H_w$).

(iii) B é demicontínuo (i.e. B é contínuo de H em H_w).

(iv) B é hemicontínuo.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$ (ii) Segue da Afirmação 1.1.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Sejam $\tilde{B}$ uma extensão maximal de B, e $\{x_n\} \subset D(B)$ tal que $x_n \to x \in D(B)$. Pela proposição anterior temos que $\tilde{B}$ é localmente limitado. Logo, existe $y \in H$ tal que $\tilde{B}x_n = Bx_n \rightharpoonup y$, como por hipótese B é fechado de H em H_w temos que $y \in Im(B)$ e assim pela proposição 1.4 temos que $y \in Bx$. Pela unicidade do operador B concluímos que $y = Bx$. Portanto B é demicontínuo.

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Segue imediatamente da definição de continuidade.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Já demonstramos na Proposição 1.3. $\square$

Seja A um operador maximal monótono tal que A^{-1} é localmente limitado, dessa forma $(A^{-1})^0$ é limitado. Assim, pelo Lema 1.2 temos que $D(A^{-1}) = Im(A)$ é fechado. Nessas condições, $Im(A)$ é aberto, e portanto $Im(A) = H$. Com efeito, sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $r > 0$ tais que A^{-1} é limitado em $B_r(y_0)$, consideremos $y \in B_r(y_0)$. Como A é um operador maximal temos que, para todo $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que $x_\varepsilon = J_{\frac{1}{\varepsilon}}(\dfrac{y + \varepsilon x_0}{\varepsilon})$. Seja, $z_\varepsilon = y + \varepsilon(x_0 - x_\varepsilon) \in Ax_\varepsilon$, então pela monotonicidade de A temos

$$\langle y_0 - z_\varepsilon, x_0 - x_\varepsilon \rangle \geq 0,$$

logo,

$$\langle y_0 - z_\varepsilon, z_\varepsilon - y \rangle \geq 0.$$

Assim,

$$0 \leq \langle y_0 - z_\varepsilon, z_\varepsilon - y_0 \rangle + \langle y_0 - z_\varepsilon, y_0 - y \rangle.$$

Dessa forma,

$$|y_0 - z_\varepsilon|^2 \leq |y_0 - z_\varepsilon||y_0 - y| \Rightarrow |y_0 - z_\varepsilon| \leq |y_0 - y| < r.$$

Desde que, $x_\varepsilon \in A^{-1}z_\varepsilon$, temos que $\{x_\varepsilon\}$ é limitada, logo $z_\varepsilon = y + \varepsilon(x_0 - x_\varepsilon) \to y$, quando $\varepsilon \to 0$. Portanto $y \in \overline{Im(A)}$ como $Im(A)$ é fechado temos que $y \in Im(A)$.

Como já sabemos se A é um operador maximal monótono tal que $Im(A) = H$, então A^{-1} é localmente limitado. Temos assim, demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 1.3. *Seja A um operador maximal monótono de H. Então A é sobrejetivo se, e somente se, A^{-1} é localmente limitado.*

Como consequência temos os seguintes corolários.

Corolário 1.4. *Seja A um operador maximal monótono de H com $D(A)$ limitado, então A é sobrejetivo.*

Corolário 1.5. *Seja A um operador maximal monótono tal que*

$$\lim_{|x| \to \infty} |A^0 x| = \infty, \ x \in D(A).$$

Então A é sobrejetivo.

Demonstração. Sob essas condições o operador A^{-1} é limitado. De fato, suponhamos por absurdo que A^{-1} não é limitado, então existe $y_0 \in Im(A)$ e uma vizinhança U limitada tal que o conjunto

$\bigcup_{y\in U} A^{-1}y$, não é limitado. Seja $x_n \in A^{-1}(U)$ tal que $|x_n| \to \infty$, assim,

$$\lim_{x_n\to\infty} |A^0x_n| = \infty.$$

Obtemos assim uma contradição, pois $\{A^0x_n\} \subset U$. Portanto A é um operador sobrejetivo. □

Corolário 1.6. *Seja A um operador maximal monótono coercivo, isto é, existe $x_0 \in H$ tal que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\langle A^0x, x - x_0\rangle}{|x|} = \infty,\ x \in D(A),$$

então A é sobrejetivo.

Demonstração. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $\langle A^0x, x - x_0\rangle \leq |A^0x||x - x_0|$, logo para $x \in D(A)$ temos que

$$\lim_{|x|\to\infty} |A^0x| = \infty,$$

pelo corolário precedente temos que A é sobrejetivo. □

Sabemos que se A e B são operadores monótonos, então $A+B$ é um operador monótono. Entretanto nem sempre $A + B$ é um operador maximal monótono quando A e B são maximais monótonos, pois pode acontecer que $A \cap B = \emptyset$. Veremos a partir de agora condições para que a soma de operadores maximais monótonos seja um operador maximal monótono.

Lema 1.3. *Sejam A operador maximal monótono e B um operador lipschitziano de H em H, então $A + B$ é um operador maximal monótono.*

Demonstração. Seja l a constante de Lipschitz do operador B, suponhamos inicialmente que $l < 1$. Seja $y \in H$, então a equação

$$x + Ax + Bx \ni y,$$

é equivalente a,

$$x = (I + A)^{-1}(y - Bx).$$

Logo, a aplicação $K : H \to H$ dada por $Kx = (I + A)^{-1}(y - Bx)$ é uma contração, pois $(I + A)^{-1}$ e B são contrações. Dessa maneira, K tem um ponto fixo. Assim, pela Proposição 1.2 (ii), $A + B$ é maximal monótono.

No caso em que $l \geq 1$, consideremos os operadores maximais monótonos $\frac{A}{2l}, \frac{B}{2l}$. Pelo caso anterior $\frac{A+B}{2l}$ é maximal nonótono e portanto $A + B$ também é maximal monótono. □

Sejam A e B operadores maximais monótonos, dado $y \in H$ o Lema 1.3 garante que para todo $\lambda > 0$, existe x_λ a solução da equação,

$$x_\lambda + Ax_\lambda + B_\lambda x_\lambda \ni y, \tag{1.3}$$

uma vez que a aproximação de Yosida B_λ é um operador maximal monótono lipschitziano. Sob certas condições x_λ é uma aproximação da solução x da equação $x + Ax + Bx \ni y$.

Teorema 1.4. *Sejam $y \in H$, A e B operadores maximais monótonos. $y \in Im(I + A + B)$ se, e somente se, $B_\lambda x_\lambda$ é limitado quando $\lambda \to 0$. Neste caso, $x_\lambda \to x$ onde x é solução de $x + Ax + Bx \ni y$ e $B_\lambda x_\lambda \to \eta$, onde η é o elemento de norma mínima do convexo fechado $Bx \cap (y - x - Ax)$. Além disso, temos*

$$|x_\lambda - x| \leq \sqrt{\lambda |\eta| |B_\lambda x_\lambda - \eta|}.$$

Demonstração. Suponhamos que $y \in Im(I + A + B)$. Sejam x a solução de $y \in x + Ax + Bx$, e η o elemento de norma mínima de $Bx \cap (y - x - Ax)$. Sejam $\xi = y - x - \eta \in Ax$ e $\xi_\lambda = y - x_\lambda - B_\lambda x_\lambda \in Ax_\lambda$. Pela definição de ξ e ξ_λ temos,

$$|x_\lambda - x|^2 + \langle \xi_\lambda - \xi, x_\lambda - x \rangle + \langle B_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - x \rangle = 0, \tag{1.4}$$

Escrevendo $x_\lambda - x = x_\lambda - J_\lambda^B x_\lambda + J_\lambda^B x_\lambda - x$, onde J_λ^B é o operador resolvente de B. Segue da monotonicidade de A e da equação (1.4) que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \xi_\lambda - \xi, x_\lambda - x \rangle = -|x_\lambda - x|^2 - \langle B_\lambda x_\lambda - \xi, x_\lambda - x \rangle \\ &= -|x_\lambda - x|^2 - \{ \langle B_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - J_\lambda^B x_\lambda \rangle + \langle B_\lambda x_\lambda - \eta, J_\lambda^B x_\lambda - x \rangle \} \\ &\leq -|x_\lambda - x|^2 - \langle B_\lambda x_\lambda - \eta, x_\lambda - J_\lambda^B x_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle B_\lambda x_\lambda - \xi, J_\lambda^B x_\lambda - x \rangle \leq -|x_\lambda - x|^2. \tag{1.5}$$

De modo que,

$$\langle B_\lambda x_\lambda - \eta, J_\lambda^B x_\lambda - x \rangle = \lambda \langle B_\lambda x_\lambda - \eta, B_\lambda x_\lambda \rangle \leq 0.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que

$$|B_\lambda x_\lambda| \leq |\eta|. \tag{1.6}$$

Além disso, segue de (1.5) e (1.6) que

$$|x_\lambda - x|^2 \leq \lambda\langle B_\lambda x_\lambda - \eta, B_\lambda x_\lambda\rangle \leq 2\lambda|\eta|^2.$$

Dessa forma, temos que $x_\lambda \to x$ e $J_\lambda^B x_\lambda \to x$ quando $\lambda \to 0$.

Seja λ_n uma sequência tal que $\lambda_n \to 0$, então existe $\eta_1 \in H$ tal que $B_{\lambda_n} x_{\lambda_n} \rightharpoonup \eta_1$. Pela Proposição 1.4 temos que $(x, \eta_1) \in B$. Ademais, $\xi_{\lambda_n} \rightharpoonup \xi_1 = y - x - \eta_1$, com $\xi_1 \in Ax$, pois A demifechados, dessa maneira concluímos que

$$\eta_1 \in Bx \cap (y - x - Ax).$$

Mas $|\eta_1| \leq |\eta|$ e η é o elemento de norma mínima de $Bx \cap (y - x - Ax)$. Logo, $\eta_1 = \eta$ e pela unicidade do limite temos que $B_\lambda x_\lambda \rightharpoonup \eta$, quando $\lambda \to 0$, com $|B_\lambda x_\lambda| \leq |\eta|$. Assim, $B_\lambda x_\lambda \to \eta$. Por (1.5) e (1.6) temos que

$$|x_\lambda - x| \leq \sqrt{\lambda|\eta||B_\lambda x_\lambda - \eta|}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $B_\lambda x_\lambda$ é limitado. Para todo $\lambda > 0$ definimos

$$\xi_\lambda = y - x_\lambda - B_\lambda x_\lambda \in Ax_\lambda.$$

Então, pela definição de ξ_λ, temos

$$|x_\lambda - x_\mu|^2 + \langle \xi_\lambda - \xi_\mu, x_\lambda - x_\mu\rangle + \langle B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu, x_\lambda - x_\mu\rangle = 0.$$

Como, $x_\lambda - x_\mu = \lambda B_\lambda x_\lambda - \mu B_\mu x_\mu + J_\lambda x_\lambda - J_\mu x_\mu$, pela igualdade anterior e por A ser um operador monótono temos,

$$0 \leq \langle \xi_\lambda - \xi_\mu, x_\lambda - x_\mu\rangle = -|x_\lambda - x_\mu|^2 + \langle B_\mu x_\mu - B_\lambda x_\lambda, \lambda B_\lambda x_\lambda - \mu B_\mu x_\mu\rangle - \langle B_\lambda x_\lambda - B_\mu x_\mu, J_\lambda^B x_\lambda - J_\mu^B x_\mu\rangle.$$

Pela desigualdade precedente e monotonicidade de B temos que

$$\begin{aligned} |x_\lambda - x_\mu|^2 &\leq \langle B_\mu x_\mu - B_\lambda x_\lambda, \lambda B_\lambda x_\lambda - \mu B_\mu x_\mu\rangle \\ &\leq |B_\mu x_\mu - B_\lambda x_\lambda||\lambda B_\lambda x_\lambda - \mu B_\mu x_\mu|. \end{aligned}$$

Como $B_\lambda x_\lambda$ é limitado quando $\lambda \to 0$, temos que $\{x_\lambda\}$ é uma sequência de Cauchy quando $\lambda \to 0$. Dessa maneira, existe $x \in H$ tal que $x_\lambda \to x$ quando $\lambda \to 0$. Além disso, existem ξ_0, $\eta_0 \in H$ tais que

$$B_\lambda x_\lambda \rightharpoonup \eta_0, \ \xi_\lambda \rightharpoonup \xi_0.$$

Como A e B são fracamente fechados temos que $\xi_0 \in Ax$ e $\eta_0 \in Bx$ assim, $y = x + \xi_0 + \eta_0$. Portanto

$y \in Im(I + A + B)$. □

Lema 1.4. *Sejam A e B dois operadores maximais monótonos, com $D(A) \cap D(B) \neq \emptyset$, então para todo $y \in H$ as soluções x_λ de* (1.3) *permanecem limitadas quando $\lambda \to 0$.*

Demonstração. Com efeito, seja $x_0 \in D(A) \cap D(B)$ e $y_\lambda \in x_0 + Ax_0 + B_\lambda x_0$, como A é monótono temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle y - x_\lambda - B_\lambda x_\lambda - (y_\lambda - x_0 - B_\lambda x_0), x_\lambda - x_0 \rangle \\ &= \langle y - y_\lambda, x_\lambda - x_0 \rangle - |x_\lambda - x_0|^2 - \langle B_\lambda x_\lambda - B_\lambda x_0, x_\lambda - x_0 \rangle \\ &\leq \langle y - y_\lambda, x_\lambda - x_0 \rangle - |x_\lambda - x_0|^2, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade deve-se ao fato de B_λ ser monótono. Assim,

$$|x_\lambda - x_0|^2 \leq \langle y - y_\lambda, x_\lambda - x_0 \rangle \leq |y - y_\lambda||x_\lambda - x_0|,$$

logo, $|x_\lambda - x_0| \leq |y_\lambda - y|$ que é limitado, pois, $|B_\lambda x_0| \leq |B^0 x_0|$. Portanto, $\{x_\lambda\}$ é limitado. □

Utilizemos o lema anterior para demonstrar alguns corolários do Teorema 1.3.

Corolário 1.7. *Sejam A e B dois operadores maximais monótonos tais que B é dominado por A, isto é, $D(A) \subset D(B)$ e existe $k < 1$ e uma função contínua $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$|B^0 x| \leq k|A^0 x| + w(|x|), \ \forall\, x \in D(A).$$

Então, $A + B$ é um operador maximal monótono.

Demonstração. Dado $y \in H$, mostremos que $B_\lambda x_\lambda$, como no Teorema 1.4 é limitado para todo $\lambda > 0$. De fato, como $A^0 x$ é o elemento de norma mínima de Ax temos que

$$\begin{aligned} |A^0 x_\lambda| &\leq |y| + |x_\lambda| + |B_\lambda x_\lambda| \\ &\leq |y| + |x_\lambda| + |B^0 x_\lambda| \\ &\leq |y| + |x_\lambda| + k|A^0 x_\lambda| + w(|x_\lambda|). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|A^0 x_\lambda| \leq \frac{|y| + |x_\lambda| + w(|x_\lambda|)}{1 - k}.$$

Desde que w é contínua e $|x_\lambda|$ é limitado temos que $|A^0 x_\lambda|$ é limitado, quando $\lambda \to 0$. Logo $|B_\lambda x_\lambda|$ também é limitado quando $\lambda \to 0$, pois, pela Proposição 1.5 (iii), $|B_\lambda x_\lambda| \leq |B^0 x_\lambda|$ e

$$|B^0 x_\lambda| \leq k|A^0 x_\lambda| + w(|x_\lambda|)$$

que é limitado. Pelo Teorema 1.4, $A + B$ é maximal monótono. $\square$

Corolário 1.8. *Sejam A e B dois operadores maximais monótonos, tais que $Int(D(A)) \cap D(B) \neq \emptyset$. Então, $A + B$ é maximal monótono e*

$$\overline{D(A) \cap D(B)} = \overline{D(A)} \cap \overline{D(B)}.$$

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que $0 \in Int(D(A)) \cap D(B)$ e $0 \in B0$. Como $Int(D(A)) \neq \emptyset$, segue da Proposição 1.7 que existem $r > 0$ e $M > 0$ de modo que, $\overline{B_r(0)} \subset D(A)$ e $|\eta| \leq M$ para todo $(\xi, \eta) \in A$ tal que $|\xi| \leq r$. Assim, se $(u, v) \in A$ pela monotonicidade de A temos

$$\langle v - \eta, u - \xi \rangle \geq 0.$$

Pela bilinearidade e Desigualdade de Cauchy-Schwarz concluímos que,

$$\langle v, \xi \rangle \leq \langle v, u \rangle + M\{r + |u|\}.$$

Tomando $\xi = r\dfrac{v}{|v|}$ temos que

$$r|v| \leq \langle u, v \rangle + M\{|u| + r\}, \ \forall\ (u, v) \in A.$$

Em particular, se $u = x_\lambda$ e $v = y - B_\lambda x_\lambda - x_\lambda \in Ax_\lambda$ temos

$$r|y - B_\lambda x_\lambda - x_\lambda| \leq \langle y - B_\lambda x_\lambda - x_\lambda, x_\lambda \rangle + M\{|x_\lambda| + r\}.$$

Da monotonicidade de B_λ temos que $\langle B_\lambda x_\lambda, x_\lambda \rangle \geq 0$, pois, se $0 \in B0$ então $0 = |B^0 0| \geq |B_\lambda 0|$. Assim,

$$r|B_\lambda x_\lambda| \leq r\{|y| + |x_\lambda|\} + |y - x_\lambda||x_\lambda| + M\{|x_\lambda| + r\}$$

Como $|x_\lambda|$ é limitado, concluímos que $|B_\lambda x_\lambda|$ é limitado e pelo Teorema 1.4, obtemos que $A + B$ é maximal monótono.

Além disso, seja $x \in \overline{D(A)} \cap \overline{D(B)}$, pela Proposição 1.7 temos que $\overline{Int(D(A))} = \overline{D(A)}$, assim para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in Int(D(A))$ tal que $|x - x_0| \leq \varepsilon$. Notemos que $J_\lambda^B x_0 \to x_0$ quando $\lambda \to 0$, pois

$x_0 \in \overline{D(B)}$. Logo, para λ suficientemente pequeno $J_\lambda^B x_0 \in D(A) \cap D(B)$ como

$$|J_\lambda^B x_0 - x| \leq |J_\lambda^B x_0 - J_\lambda^B x| + |J_\lambda^B x - x| \leq |x_0 - x| + |J_\lambda^B x - x| < 2\varepsilon.$$

Assim, $\overline{D(A)} \cap \overline{D(B)} \subset \overline{D(A) \cap D(B)}$. Portanto $\overline{D(A)} \cap \overline{D(B)} = \overline{D(A) \cap D(B)}$. No caso em que $0 \notin Int(D(A)) \cap D(B)$. Fixemos $z \in Int(D(A)) \cap D(B)$, e consideremos os operadores A^1 e B^1, cujos os domínios são $D(A^1) = D(A) - z$ e $D(B^1) = D(B) - z$, definidos por

$$A^1 x = Ax_1 + B^0 z, \text{ e } B^1 w = Bw_1 - B^0 z,$$

onde $x = x_1 - z$ e $w = w_1 - z$, com $x \in D(A)$ e $w_1 \in D(B)$. Notemos que os operadores A^1 e B^1 são maximais monótonos, pois são translações de operadores maximais monótonos, $A^1 + B^1 = A + B$ e $0 \in Int(D(A)) \cap D(B)$. Portanto, segue do caso anterior que $A + B$ é maximal monótono. □

Decorre desse corolário que $A + B$ é maximal monótono, sempre que A hemi-contínuo definido em H e B é maximal monótono.

1.2 Subdiferencial

Seja $\phi : H \to]-\infty, \infty]$ uma função convexa própria, isto é, $\phi \not\equiv \infty$ e para todos $x,\ y \in H$ e $t \in]0, 1[$

$$\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y).$$

O conjunto $D(\phi) = \{x \in H; \phi(x) < \infty\}$ é um conjunto convexo. A subdiferencial $\partial\phi$, é definida por

$$y \in \partial\phi(x) \iff \phi(\xi) \geq \phi(x) + \langle y, \xi - x \rangle,\ \forall\ \xi \in H.$$

Notemos que a subdiferencial $\partial\phi$ define um operador monótono em H. Por definição de $\partial\phi$, temos que $D(\partial\phi) \subset D(\phi)$. Assim, se $y_1 \in \partial\phi(x_1)$ e $y_2 \in \partial\phi(x_2)$ então,

$$\phi(x_2) \geq \phi(x_1) + \langle y, x_2 - x_1 \rangle \quad \text{ e } \quad \phi(x_1) \geq \phi(x_2) + \langle y_2, x_1 - x_2 \rangle.$$

Logo,

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Além disso, se ϕ é semicontínua inferiormente, s.c.i., isto é, para todo $\beta > 0$ o conjunto $\{\phi \leq \beta\} = \{x \in H; \phi(x) \leq \beta\}$ é fechado. Então $\partial\phi$ é maximal monótono.

Para demonstrar esse fato, necessitamos das seguintes afirmações.

Teorema 1.5. *Seja ψ uma função convexa, s.c.i e própria em um espaço de Banach V. Então, ψ é limitada inferiormente por uma função afim, isto é, existe $x^* \in H$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\psi(x) \geq \langle x^*, x\rangle_{V^*,V} + \alpha, \forall\, x \in V.$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3, p. 51] . No caso em que $V = H$ é um espaço de Hilbert, obtemos como consequência do Teorema de Riesz que existe $y \in H$ tal que

$$\psi(x) \geq \langle y, x\rangle + \alpha, \forall\, x \in V.$$

Proposição 1.8. *Seja ψ uma função convexa, s.c.i e própria definida em um espaço de Banach reflexivo. Suponhamos que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = \infty.$$

Então, ψ atinge um valor mínimo.

A demonstração do resultado precedente pode ser encontrada em [3, p. 52].

Lema 1.5. *Seja ϕ uma função convexa, s.c.i e própria em H e $\beta > 0$. Dado $y \in H$, a função convexa $\tilde{\phi}(x) \mapsto \phi(x) + \dfrac{\beta}{2}|x-y|^2$ atinge seu elemento mínimo em x_0 se, e somente se, $\beta(y - x_0) \in \partial\phi(x_0)$.*

Demonstração. Antes de demonstrarmos esse lema, observemos que x_0 existe devido ao Teorema 1.5 e a Proposição 1.8.

Suponhamos, que $\beta(y - x_0) \in \partial\phi(x_0)$, então

$$\phi(\xi) - \phi(x_0) \geq \beta\langle y - x_0, \xi - x_0\rangle = \frac{\beta}{2}(|x_0 - y|^2 + |\xi - x_0|^2 - |\xi - y|^2).$$

Logo,

$$\phi(\xi) + \frac{\beta}{2}|\xi - y|^2 \geq \phi(x_0) + \frac{\beta}{2}|x_0 - y|^2.$$

Ou seja, x_0 é ponto de mínimo.

Reciprocamente, suponhamos que $\tilde{\phi}$ atinge seu valor mínimo em x_0. Dado $\eta \in H$, consideremos $\xi_t = (1-t)x_0 + t\eta$, para todo $t \in]\,0,1[$. Então,

$$t(\phi(\eta) - \phi(x_0)) \geq \phi(\xi_t) - \phi(x_0) \geq \frac{\beta}{2}(|x_0 - y|^2 - |(1-t)x_0 + t\eta - y|^2) = t\beta\langle \eta - x_0, x_0 - y\rangle + t^2|\eta - x_0|^2.$$

Logo,

$$\phi(\eta) - \phi(x_0) \geq \beta\langle \eta - x_0, x_0 - y\rangle + t|\eta - x_0|^2.$$

Fazendo $t \to 0$ temos que $\beta(y - x_0) \in \partial\phi(x_0)$. □

Fazendo $\beta = 1$ concluímos do lema acima que dado $y \in H$, então existe $x_0 \in D(A)$ tal que $y \in x_0 + \partial\phi(x_0)$. Portanto, se ϕ é uma função convexa, s.c.i e própria, então $\partial\phi$ é um operador maximal monótono.

Consideremos $A = \partial\phi$, é possível mostrar que $A^{-1} = \partial\phi^*$, onde ϕ^* a função conjugada de ϕ, isto é,

$$\phi^*(x) = \sup_{y \in H}\{\langle x, y - \phi(y)\}.$$

Definição 1.8. *Um operador A de H é ciclicamente monótono, se para toda sequência cíclica*

$$\{x_0,\ x_1, \cdots, x_n = x_0\} \subset\ D(A),$$

e para todos $y_i \in Ax_i$, $i = 1, \cdots, n$ então

$$\sum_{i=1}^{n}\langle x_i - x_{i-1}, y_i\rangle \geq 0.$$

Notemos que todo operador ciclicamente monótono é um operador monótono, mas a recíproca não é verdadeira.

Seja $\phi : H \to]-\infty, +\infty]$ convexa, s.c.i. e própria então $\partial\phi$ é ciclicamente monótono. Na verdade, todo operador ciclicamente monótono admite uma extensão a uma subdiferencial de uma função convexa ϕ.

Teorema 1.6. *Seja A um operador monótono. Então A é ciclicamente monótono se, e somente se, existe uma função convexa $\phi : H \to]-\infty, +\infty]$ s.c.i. e própria tal que $A \subset \partial\phi$.*

Demonstração. Se $D(A) = \emptyset$ não a nada a fazer.

Sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $x \in H$. Consideremos

$$\phi(x) = \sup\{\langle x - x_n, y_n\rangle + \langle x_n - x_{n-1}, y_{n-1}\rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, y_0\rangle\},$$

onde o supremo acima é tomado sobre todas as sequências finitas $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots,\ (x_n, y_n) \in A$. Como ϕ é o supremo de funções lineares contínuas, temos que ϕ é s.c.i. e convexa. Além disso, como A é ciclicamente monótono temos que $\phi(x_0) \leq 0$, logo ϕ é própria.

Mostremos que se $(x, y) \in A$, então $(x, y) \in \partial\phi$. Sejam $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots,\ (x_n, y_n) \in A$ e $\xi \in H$, por definição de ϕ temos

$$\phi(\xi) \geq \langle \xi - x, y\rangle + \langle x - x_n, y_n\rangle + \langle x_n - x_{n-1}, y_{n-1}\rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, y_0\rangle.$$

Assim,

$$\phi(\xi) \geq +\langle \xi - x, y\rangle + \phi(x).$$

Portanto, $y \in \partial\phi(x)$. □

Corolário 1.9. *Seja A um operador maximal monótono tal que A^0 é ciclicamente monótono. Então, A é ciclicamente monótono.*

A demonstração do corólario precedente pode ser encontrada em [5, p.39].

Notemos que se A é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i. então a aproximação de Yosida A_λ é ciclicamente monótona. De fato, seja $x_1,\ x_2,\ \cdots, x_n \in H$ como,

$$x_i - x_{i-1} = \lambda A_\lambda x_i - \lambda A_\lambda x_{i-1} + J_\lambda x_i - J_\lambda x_{i-1},$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \langle A_\lambda x_i, J_\lambda x_i - J_\lambda x_{i-1}\rangle \geq 0,$$

pois, A é ciclicamente monótono. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle A_\lambda x_i, x_i - x_{i-1}\rangle &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle A_\lambda x_i, A_\lambda x_i - A_\lambda x_{i-1}\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A_\lambda x_i, J_\lambda x_i - J_\lambda x_{i-1}\rangle \\
&\geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle A_\lambda x_i, A_\lambda x_i - A_\lambda x_{i-1}\rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Proposição 1.9. *Seja ϕ uma função s.c.i. convexa e própria, e A a sua subdiferencial com*

$$D(A) \subset D(\phi) \subset \overline{D(\phi)} = \overline{D(A)}.$$

Sejam $\lambda > 0$ e $\phi_\lambda : H \to]-\infty, +\infty]$, dada por,

$$\phi_\lambda(x) = \min_{y \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda}|y - x|^2 + \phi(y) \right\}.$$

Então, $\phi(x) = \dfrac{\lambda}{2}|A_\lambda x| + \phi(J_\lambda x)$, ϕ_λ é uma função convexa, Fréchet diferenciável com $A_\lambda = \partial\phi_\lambda$. Além disso, $\phi_\lambda(x) \uparrow \phi(x)$, para todo $x \in H$.

Demonstração. Pelo Lema 1.5 sabemos que ϕ_λ atinge o mínimo em $J_\lambda x$, pois, $A_\lambda x \in \partial\phi(J_\lambda x)$ para todo $x \in H$. Agora mostremos que ϕ é diferenciável e que $\partial\phi_\lambda = A_\lambda$. Para isso consideremos $x,\ y \in H$, então, pela definição de subdiferencial, temos que

$$
\begin{aligned}
& \phi(J_\lambda y) - \phi(J_\lambda x) \geq \langle A_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x\rangle \\
\iff\ & \phi(J_\lambda y) - \phi_\lambda(x) \quad \geq -\frac{\lambda}{2}|A_\lambda x|^2 + \langle A_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x\rangle \\
\iff\ & \phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) \quad \geq \frac{\lambda}{2}\{|A_\lambda y|^2 - |A_\lambda x|^2\} + \langle A_\lambda x, J_\lambda y - J_\lambda x\rangle \\
\iff\ & \phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) \quad \geq \frac{\lambda}{2}|A_\lambda y - A_\lambda x|^2 + \langle A_\lambda x, y - x\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) + \langle A_\lambda x, y - x\rangle \geq \frac{\lambda}{2}|A_\lambda y - A_\lambda x|^2.$$

Permutando x por y na desigualdade acima temos

$$
\begin{aligned}
& -\{\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) + \langle A_\lambda y, x - y\rangle\} \geq \frac{\lambda}{2}|A_\lambda y - A_\lambda x|^2 \\
\iff\ & \phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y - x\rangle - \langle A_\lambda y - A_\lambda x, y - x\rangle \leq -\frac{\lambda}{2}|A_\lambda y - A_\lambda x|^2 \\
\Rightarrow\ & \phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y - x\rangle \leq \langle A_\lambda y - A_\lambda x, y - x\rangle \\
\Rightarrow\ & \phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y - x\rangle \leq |A_\lambda y - A_\lambda x||y - x| \leq \frac{1}{\lambda}|y - x|^2.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$|\phi_\lambda(y) - \phi_\lambda(x) - \langle A_\lambda x, y - x\rangle| \leq \frac{1}{\lambda}|y - x|^2.$$

Portanto, ϕ_λ é Fréchet diferenciável e $\partial\phi_\lambda = A_\lambda$.

Sejam $t_0,\ t_1 \in \mathbb{R}$ com $t_0 < t_1$. Para todos $x, y \in H$, segue da monotonicidade de A_λ que

$$\langle A_\lambda(t_1 x + (1 - t_1)y) - A_\lambda(t_0 x + (1 - t_0)y), t_1 x + (1 - t_1)y - (t_0 x + (1 - t_0))y\rangle \geq 0.$$

Assim,

$$\langle A_\lambda(t_1 x + (1 - t_1)y) - A_\lambda(t_0 x + (1 - t_0)y), (t_1 - t_0)(x - y)\rangle \geq 0.$$

Logo, a função $t \mapsto \dfrac{d}{dt}\phi_\lambda(tx + (1 - t)y) = \langle A_\lambda(tx + (1 - t)y), x - y\rangle$ é crescente em t, dessa forma, temos ϕ_λ é uma função convexa.

Resta mostrarmos que $\phi_\lambda(x) \uparrow \phi(x)$ quando $\lambda \downarrow 0$. Por definição de ϕ_λ temos que $\phi_\lambda(x)$ cresce quando $\lambda \downarrow 0$ e que $\phi_\lambda(x) \leq \phi(x)$, já que

$$\phi_\lambda(x) = \min_{y \in H}\left\{\frac{|y - x|^2}{2\lambda} + \phi(x)\right\} \leq \frac{|x - x|^2}{2\lambda} + \phi(x) = \phi(x).$$

Por outro lado, seja $x \in \overline{D(A)}$ então $\phi_\lambda(x) \geq \phi(J_\lambda x)$. Pelo Teorema 1.2 $J_\lambda x \to x$, quando $\lambda \downarrow 0$ e como ϕ é s.c.i. temos $\phi(x) \leq \liminf_{\lambda\downarrow 0} \phi(J_\lambda x)$, dessa forma

$$\phi(x) \leq \liminf_{\lambda\downarrow 0} \phi(J_\lambda x) \leq \liminf_{\lambda\downarrow 0} \phi_\lambda(x) \leq \limsup_{\lambda\downarrow 0} \phi_\lambda(x) \leq \phi(x).$$

Logo, $\phi_\lambda \uparrow \phi(x)$ quando $\lambda \downarrow 0$ e $x \in D(A)$. Agora, se $x \notin \overline{D(A)}$, então

$$\lambda|A_\lambda x|^2 = |A_\lambda x||x - J_\lambda x| \to \infty,$$

já que, $|A_\lambda x| \uparrow \infty$ quando $\lambda \downarrow 0$ e $|x - J_\lambda x| \geq dist(x, \overline{D(A)})$ com e $D(\phi) \subset \overline{D(A)}$. Portanto $\phi_\lambda(x) \uparrow \phi(x)$ quando $\lambda \downarrow 0$ para todo $x \in H$, e $\overline{D(\phi)} = \overline{D(A)}$. □

Corolário 1.10. *Sejam ϕ e ψ funções convexas, s.c.i. e próprias. Se $\partial\phi = \partial\psi$ então existe uma constante c tal que $\psi = \phi + c$.*

Demonstração. Como $\partial\phi = \partial\psi$, então pela definição de aproximação de Yosida $\partial\phi_\lambda = \partial\psi_\lambda$, para cada $\lambda > 0$. Como ϕ_λ e ψ_λ são funções Frechet diferenciável, existe uma constante c_λ tal que $\phi_\lambda - \psi_\lambda = c_\lambda$. Seja $x \in D(\phi) = D(\psi)$, seja $c = \phi(x) - \psi(x)$ então $c_\lambda \to c$ quando $\lambda \to 0$, pois, $\psi_\lambda(x) \to \psi(x)$ e $\phi_\lambda(x) \to \phi(x)$.

No caso em que $x \notin D(\phi)$ temos que $\phi_\lambda(x) \to \infty$ e assim, $\psi(x) = \infty$. Portanto, $\phi = \psi + c$. □

A proposição abaixo ilustra como as propriedades da subdiferencial estão relacionadas com aquelas da função que a origina. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [5, p. 40] .

Proposição 1.10. *Seja ϕ uma função convexa s.c.i propria. Então $Int(D\phi) = Int(\partial\phi)$ e ϕ é contínua em $x \in D(\phi)$ se, e somente se, $x \in Int(D(\phi))$.*

Corolário 1.11. *Sejam ϕ ψ funções convexas, s.c.i. e próprias, com $D(\phi) \cap Int(D(\psi)) \neq \emptyset$. Então, $\partial(\phi + \psi) = \partial\phi + \partial\psi$.*

Demonstração. Como $D(\phi) \cap D(\psi) \neq \emptyset$, então $\phi + \psi$ é convexa, s.c.i e própria. Pela Proposição anterior temos que $Int(D(\psi)) = Int(D(\partial\psi))$ e por hipótese temos $D(\phi) \cap Int(D(\partial\psi)) \neq \emptyset$, dessa forma concluímos que $D(\partial\phi) \cap Int(D(\partial\psi)) \neq \emptyset$. Assim, pelo Corolário 1.7 temos que $\partial\phi + \partial\psi$ é maximal monótono.

Além disso, se $(x, y) \in (\partial\phi + \partial\psi)$, então, para todo $\xi \in H$ temos

$$(\phi + \psi)(\xi) \geq (\phi + \psi)(x) + \langle y, \xi - x\rangle.$$

Assim, $\partial\phi + \partial\psi \subset \partial(\phi + \psi)$. Portanto, $\partial\phi + \partial\psi = \partial(\phi + \psi)$. □

Proposição 1.11. *Seja ϕ uma função convexa, s.c.i. e própria. Então $\partial\phi$ é sobrejetiva se, e somente se,*

$$\lim_{|y|\to\infty}\{\phi(y)-\langle x,y\rangle\}=\infty,\ \forall\, x\in H.$$

Demonstração. A condição é suficiente, pois dado $x\in H$, consideremos $\phi_x(y)=\phi(y)-\langle x,y\rangle$ é convexa, s.c.i e própria. Pela Proposição 1.8, existe $y_0\in H$ tal que $\phi_x(y_0)\leq\phi(y)$ para todo $y\in H$, dessa forma

$$\begin{aligned} &\phi(y_0)-\langle x,y_0\rangle\leq\phi(y)-\langle x,y\rangle,\ \forall\, y\in H\\ \Rightarrow\quad &\phi(y_0)+\langle x,y-y_0\rangle\leq\phi(y),\ \forall\, y\in H.\end{aligned}$$

Assim, $x\in\partial\phi(y_0)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\partial\phi$ é sobrejetivo e que para todo $M>0$, existe uma sequência $\{y_n\}\subset H$ com $|y_n|\to\infty$ tal que

$$\phi(y_n)-\langle x,y_n\rangle\leq M.$$

Consideremos a sequência $\{z_n=y_n/|y_n|\}$, z_n é limitada, então existe $z\in H$ tal que $z_n\rightharpoonup z$. Mas $\langle z,y_n\rangle$ é não limitado, pois

$$\lim\langle z,y_n\rangle=\lim\langle z,z_n\rangle|y_n|=\infty.$$

Como $\partial\phi$ é sobrejetivo, existe $\xi\in H$ tal que $x+z\in\partial\phi(\xi)$, assim

$$\phi(y_n)\geq\phi(\xi)\langle x+z,y_n-\xi\rangle$$

isto é,

$$\langle z,y_n\rangle\leq\phi(y_n)-\langle x,y_n\rangle-\phi(\xi)+\langle x+z,\xi\rangle\leq M+-\phi(\xi)+\langle x+z,\xi\rangle.$$

Absurdo, pois $\langle z,y_n\rangle$ é não limitado. Portanto,

$$\lim_{|y|\to\infty}\{\phi(y)-\langle x,y\rangle\}=\infty,\ \forall\, x\in H.$$

□

A resultado a seguir é consequência proposição anterior e do Teorema 1.3.

Proposição 1.12. *Seja ϕ uma função convexa s.c.i. própria e $A=\partial\phi$. As propriedades abaixo são equivalentes:*

(i) Para $x\in D(\phi)$, temos $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\phi(x)}{|x|}=+\infty.$

(ii) Para todo $x_0\in D(\phi)$, $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\langle y,x-x_0\rangle}{|x|}=+\infty,\ (x,y)\in A.$

(iii) *Existe* $x_0 \in D(\phi)$ *tal que* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\langle A^0x, x-x_0\rangle}{|x|} = \infty$ $x_{\in}D(A)$

(iv) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |A^0x| = +\infty,\ x \in D(A).$

(v) A^{-1} *é um operador limitado.*

(vi) *Existe um operador unívoco limitado* B *com* $D(B) = H$*, tal que* $B \subset A^{-1}$.

Utilizaremos o próximo resultado no Capítulo 2 para obter uma regularização de solução de inclusão diferencial no caso em que o operador A será dado por uma subdiferencial.

Proposição 1.13. *Sejam* A *um operador maximal monótono de* H *e* ϕ *uma função convexa s.c.i própria. Supondo que existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$\phi(J_\lambda x) \leq \phi(x) + c\lambda,\ \forall\ x_{\in}H,\ \forall\lambda > 0.$$

Então, $A + \partial\phi$ *é maximal monótono e*

$$|A^0x| \leq |(A+\partial\phi)^0x| + \sqrt{c},\ \forall x \in D(A)\cap D(\partial\phi).$$

Além disso,

$$\overline{D(A+\partial\phi)} = \overline{D(A)\cap D(\partial\phi)} = \overline{D(A)} \cap \overline{(D(\partial\phi)}.$$

Demonstração. Com efeito, seja $y \in H$. Como o operador A_λ é lipschitziano com $D(A_\lambda) = H$, temos pelo Lema 1.3 que existe x_λ solução de

$$y \in x_\lambda + \partial\phi(x_\lambda) + A_\lambda x_\lambda.$$

Pela definição de subdiferencial temos

$$\langle y - A_\lambda x_\lambda - x_\lambda, \xi - x_\lambda\rangle \leq -\phi(x_\lambda) + \phi(\xi),\ \forall\ \xi \in H.$$

Em particular, para $\xi = J_\lambda x_\lambda$. Como por hipótese vale que $\phi(J_\lambda x_\lambda) - \phi(x) \leq c\lambda$, temos

$$\langle y - A_\lambda x_\lambda x_\lambda, -\lambda A_\lambda x_\lambda\rangle = \langle y - A_\lambda x_\lambda - x_\lambda, J_\lambda x_\lambda - x_\lambda\rangle \leq c\lambda.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$|A_\lambda x_\lambda|^2 \leq |y - x_\lambda||A_\lambda x_\lambda| + c,$$

e completando quadrados obtemos que

$$|A_\lambda x_\lambda| \leq |y - x_\lambda| + \sqrt{c}.$$

Mostremos agora que $|x_\lambda|$ é limitado. Seja $\xi_0 \in D(A) \cap D(\phi)$, então

$$\phi(\xi_0) \geq \phi(x_\lambda) + \langle y - A_\lambda x_\lambda - x_\lambda, \xi_0 - x_\lambda\rangle = \langle A_\lambda \xi_0 - A_\lambda x_\lambda, \xi_0 - x_\lambda\rangle + \langle y - A_\lambda \xi_0 - x_\lambda, \xi_0 - x_\lambda\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(\xi_0) - \phi(x_\lambda) &\geq \langle y - A_\lambda \xi_0 - x_\lambda, \xi_0 - x_\lambda\rangle = |x_\lambda|^2 - \langle A_\lambda \xi_0 + y - \xi_0, x_\lambda\rangle + \langle y - A_\lambda \xi_0, \xi_0\rangle \\
&\geq |x_\lambda|^2 - |A_\lambda \xi_0 + y - \xi_0||x_\lambda| + \langle y - A_\lambda \xi_0, \xi_0\rangle \\
&\geq |x_\lambda|^2 - \frac{|x_\lambda|^2}{2} - \frac{|A_\lambda \xi_0 + y - \xi_0|^2}{2} - \langle y - A_\lambda \xi_0, \xi_0\rangle \\
&= \frac{|x_\lambda|^2}{2} - \frac{|A_\lambda \xi_0 + y - \xi_0|^2}{2} - \langle y - A_\lambda \xi_0, \xi_0\rangle,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\phi(\xi_0) - \phi(x_\lambda) + \langle y - x_\lambda - A_\lambda \xi_0, \xi_0\rangle + \frac{|A_\lambda \xi_0 + y - \xi_0|^2}{2} \geq \frac{|x_\lambda|^2}{2}. \tag{1.7}$$

Por outro lado, como ϕ é convexa e s.c.i, existe $w \in H$ e $c' \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\phi(\xi) \geq \langle w, \xi\rangle + c', \ \forall\, \xi \in H.$$

Assim,

$$-\phi(x_\lambda) \leq \langle -w, x_\lambda\rangle - c' \leq |-w||x_\lambda| - c' \leq \frac{1}{2\varepsilon}|w|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|x_\lambda|^2 - c', \forall\, \varepsilon > 0. \tag{1.8}$$

Escolhendo-se $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e substituindo (1.8) em (1.7) temos,

$$\limsup_{\lambda \to 0} |x_\lambda| \leq 4\{\phi(\xi_0) + \langle y - A^0\xi_0, \xi_0\rangle + \frac{|A^0\xi_0 + y - \xi_0|^2}{2} + |w|^2 - c'\},$$

isto é, $|x_\lambda|$ é limitado quando $\lambda \to 0$. Dessa forma, concluímos que $|A_\lambda x_\lambda|$ é limitado quando $\lambda \to 0$. Pelo Teorema 1.3 temos que $A + \partial\phi$ é maximal monótono.

Agora, para todo $x \in D(\partial\phi)$ e $z \in \partial\phi(x)$ temos,

$$\phi(J_\lambda x) - \phi(x) \geq \langle z, J_\lambda x - x\rangle = \langle z, -\lambda A_\lambda x\rangle.$$

Dessa forma, se $x \in D(A) \cap D(\partial\phi)$ sabemos que $A_\lambda x \to A^0 x$ quando $\lambda \to 0$. Logo, $\langle A^0 x, z\rangle \geq -c$, para todo $z \in \partial\phi(x)$. Além disso, existem $u \in Ax$ e $v \in \partial\phi(x)$ tais que $(A+\partial\phi)^0 x = u + v$, assim,

$$\begin{aligned}\langle A^0 x, (A+\partial\phi)^0 x\rangle &= \langle A^0 x, u\rangle + \langle A^0 x, v\rangle = \frac{1}{2}\{|A^0 x|^2 + |u|^2 - |A^0 x - u|^2\} + \langle A^0 x, v\rangle \\ &\geq |A^0 x|^2 - c.\end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$|A^0 x|^2 \leq |A^0 x||(A+\partial\phi)^0 x| + c.$$

Completando quadrados, obtemos $|A^0 x| \leq |(A+\partial\phi)^0 x| + c$.

Resta mostrarmos que $\overline{D(A)\cap D(\partial\phi)} = \overline{D(A)} \cap \overline{D(\phi)}$. Claramente $\overline{D(A)\cap D(\partial\phi)} \subset \overline{D(A)} \cap \overline{D(\phi)}$. Em primeiro lugar mostremos que $\overline{D(A)} \cap \overline{D(\phi)} \subset \overline{D(A)\cap D(\phi)}$, para isso consideremos $x \in \overline{D(A)} \cap \overline{D(\phi)}$ e $u_\varepsilon \in D(\phi)$ tal que $u_\varepsilon \to x$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Seja $y_\varepsilon = J_\varepsilon u_\varepsilon$, então por hipótese $\phi(y_\varepsilon) \leq \phi(u_\varepsilon) + c$, dessa maneira, $y_\varepsilon \in D(A) \cap D(\phi)$ e satisfaz

$$|y_\varepsilon - x| \leq |y_\varepsilon - J_\varepsilon x| + |J_\varepsilon x - x|.$$

Como J_ε é uma contração para todo ε e $J_\varepsilon x \to x$ quando $\varepsilon \downarrow 0$, obtemos $y_\varepsilon \to x$, quando $\varepsilon \to 0$.

Além disso, $D(A)\cap D(\phi) \subset \overline{D(A)\cap D(\partial\phi)}$. De fato, seja $x \in D(A)\cap D(\phi)$, como $A+\partial\phi$ é maximal monótono, para cada $\varepsilon > 0$ existe x_ε a solução da equação

$$x \in x_\varepsilon + \varepsilon(Ax_\varepsilon + \partial\phi(x_\varepsilon)).$$

Asim,

$$\begin{aligned}\phi(x) - \phi(x_\varepsilon) &\geq \left\langle \frac{x - x_\varepsilon}{\varepsilon} - z_\varepsilon, x - x_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon}|x - x_\varepsilon|^2 - \langle A^0 x, x - x_\varepsilon\rangle + \langle A^0 x - z_\varepsilon, x - x_\varepsilon\rangle \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon}|x - x_\varepsilon|^2 - \langle A^0 x, x - x_\varepsilon\rangle \geq \frac{1}{2\varepsilon}|x - x_\varepsilon|^2 - \frac{\varepsilon}{2}|A^0 x|\end{aligned}$$

Pela desigualdade acima, $x_\varepsilon \to x$ quando $\varepsilon \to 0$. □

A hipótese feita no teorema precedente permanece válida por adição, isto é:

Proposição 1.14. *Seja ϕ uma função convexa s.c.i própria, e A^1 e A^2 dois operadores maximais tais que $A^1 + A^2$ é maximal monótono. Seja J^1_λ, J^2_λ e J_λ os resolventes associados ao operadores A^1, A^2 e $A^1 + A^2$, respectivamente, supondo que*

$$\phi(J^1_\lambda x) \leq \phi(x) + c_1\lambda,\ \phi(J^2_\lambda x) \leq \phi(x) + c_2\lambda.$$

Então, $\phi(J_\lambda x) \leq \phi(x) + (c_1 + c_2)\lambda$ para todo $x \in H$ e todo $\lambda > 0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [5, p. 50]. O exemplo a seguir será utilizado no Capítulo 2 para garantir a existência de solução de inclusão diferencial homogênea.

Exemplo 1.5. Sejam $(S, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida positiva, com $\mu(S) < \infty$, A um operador maximal monótono de H.

Consideremos $\mathcal{H} = L^2(S, H)$ então o operador $\mathcal{A}$ definido por,

$$v \in \mathcal{A}u \Longleftrightarrow v(t) \in Au(t), \text{ q.t.p em } S.$$

O operador $\mathcal{A}$ é maximal monótono de $\mathcal{H}$.

Além disso, se A é a subdiferencial de uma função convexa, própria e s.c.i ϕ, então o operador $\mathcal{A}$ é a subdiferencial da função

$$\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_S \phi(u(s))d\mu(S), \ \phi(u) \in L^1(S) \\ \infty, \ \ \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Capítulo 2

Inclusões Diferenciais

Seja $(H, \langle , \rangle)$ um espaço de Hilbert, e A um operador maximal monótono em H. Dada $f \in L^1(0, T; H)$ e $u_0 \in H$, estamos interessados em encontrar soluções de:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t), \\ \qquad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.1. *Dizemos que uma função $u \in C([0, T]; H)$ é solução forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ se, u é absolutamente contínua em todo subconjunto compacto de $]0, T[$, $u(t) \in D(A)$ e $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ q.t.p. em $]0, T[$.*

Dizemos que $u \in C([0, T]; H)$ é solução fraca se existem sequências $f_n \in L^1(0, T; H)$ e $u_n \in C([0, T], H)$, tal que u_n é solução forte de $\frac{du_n}{dt} + Au_n \ni f_n$, $u_n \to u$ uniformemente em $[0, T]$ e $f_n \to f$ em $L^1(0, T; H)$.

Lembramos que uma função $g : [a, b] \to H$ é absolutamente contínua, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$\sum_n |g(a_n) - g(b_n)| < \varepsilon.$$

sempre que $\sum_n |a_n - b_n| < \delta$, $]a_n, b_n[\cap]a_m, b_m[= \emptyset$, se $n \neq m$, onde, $]a_n, b_n[$ são intervalos arbitrários contidos em $[a, b]$. Além disso, toda função absolutamente contínua em $[0, T]$ é diferenciável q.t.p. (Ver [16], [3]).

Veremos que o problema de valor inicial sempre tem uma solução fraca, quando u_0 pertence ao fecho do domínio de A. A principal referência deste capítulo é [5].

2.1 Inclusão Homogênea

Teorema 2.1. *Seja $u_0 \in D(A)$, então existe uma única função $u : [0,\infty[\to H$, tal que*

(i) $u(t) \in D(A)$, para todo $t > 0$ e $u(0) = u_0$.

(ii) A função u é Lipschitz em $[0,\infty[$, isto é, $\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(0,\ \infty;\ H)$ (no sentido das distribuições) e

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^\infty(0,\ \infty;\ H)} \leq |A^0 u_0|.$$

(iii) $\dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni 0$ em quase todo ponto de $]0,\ \infty[$, isto é, $-\dfrac{du}{dt}(t) \in Au(t)$ q.t.p em $]0,\ \infty[$.

Além disso, u satisfaz as seguintes propriedades:

(iv) u é derivável à direita de todo ponto $t \in [0,\ \infty[$ e

$$\frac{d^+u}{dt}(t) + A^0 u(t) = 0.$$

(v) A função $t \mapsto A^0 u(t)$ é contínua à direita e a função $t \mapsto |A^0 u(t)|$ é decrescente.

(vi) Se u e $\tilde{u}$ são duas funções satisfazendo (i), (ii) e (iii) com condições iniciais u_0 e $\tilde{u}_0$, então $|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq |u(0) - \tilde{u}(0)|$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Inicialmente mostremos a propriedade (vi), que tem como consequência imediata a unicidade. Sejam $u,\ \tilde{u} : [0,\infty[\to H$ satisfazendo (i), (ii) e (iii). Segue de (iii) que $Au(t) \ni \frac{-du(t)}{dt}$ para quase, todo $t > 0$, assim pela monotonicidade de A temos

$$\left\langle -\frac{du}{dt}(t) + \frac{d\tilde{u}}{dt}(t), u(t) - \tilde{u}(t) \right\rangle \geq 0,\ q.t.p.\ t \in [0,\infty[.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - \tilde{u}(t)|^2 = \left\langle \frac{du}{dt}(t) - \frac{d\tilde{u}}{dt}(t), u(t) - \tilde{u}(t) \right\rangle \leq 0.$$

Assim, a função $t \mapsto |u(t) - \tilde{u}(t)|^2$ é decrescente. Portanto, $|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq |u(0) - \tilde{u}(0)|$, para todo $t > 0$.

Mostraremos que para cada $t_0 > 0$ existe uma única função $u \in C([0,t_0], H)$ solução satisfazendo (i), (ii) e (iii), pois dessa forma pela unicidade concluímos que $u : [0,\infty[\to H$.

Para mostrar que dado $t_0 > 0$ existe uma única solução, dado $\lambda > 0$ o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = 0, \quad t \in \;]0, t_0[\\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Conforme os resultados apresentados na Seção 1.3 de [5], existe uma única solução u_λ do problema anterior, u_λ é de classe C^1 e satisfaz

$$|A_\lambda u_\lambda(t)| = \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| \leq \left|\frac{du}{dt}(0)\right| = |A_\lambda u_\lambda(0)| \leq |A^0 u_0|. \tag{2.3}$$

A sequência u_λ é de Cauchy em $C([0, t_0], H)$ quando $\lambda \to 0$. Com efeito, sejam $\lambda,\ \mu > 0$, então por (2.2) temos que

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda - \frac{du_\mu}{dt} - A_\mu u_\mu = 0.$$

Multiplicando a igualdade acima por $u_\lambda - u_\mu$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 = -\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle. \tag{2.4}$$

Como,

$$u_\lambda - u_\mu = u_\lambda - J_\lambda u_\lambda - u_\mu + J_\mu u_\mu + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu = \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu,$$

segue que,

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle &= \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\rangle + \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\rangle \\ &\geq \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\rangle \\ &= \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu|A_\mu u_\mu|^2 - (\lambda+\mu)\langle A_\lambda u_\lambda, A_\mu u_\mu\rangle \\ &\geq \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu|A_\mu u_\mu|^2 - (\lambda+\mu)|A_\lambda u_\lambda||A_\mu u_\mu|. \end{aligned}$$

Completando quadrados obtemos,

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle &\geq \lambda(|A_\lambda u_\lambda| - \frac{1}{2}|A_\mu u_\mu|)^2 + \mu(|A_\mu u_\mu| - \frac{1}{2}|A_\lambda u_\lambda|)^2 - \frac{\lambda}{4}|A_\mu u_\mu|^2 - \frac{\mu}{4}|A_\lambda u_\lambda|^2 \\ &\geq -\frac{\lambda}{4}|A_\mu u_\mu|^2 - \frac{\mu}{4}|A_\lambda u_\lambda|^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade acima e (2.3) temos

$$\langle A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\rangle \geq -\frac{\lambda}{4}|A^0 u_0|^2 - \frac{\mu}{4}|A^0 u_0|^2.$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.4), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq \frac{(\lambda+\mu)}{4}|A^0u_0|^2.$$

Integrando em $]0,t[\subset]0,t_0[$, obtemos

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq \frac{\lambda+\mu}{2}|A^0u_0|^2 t,$$

isto é,

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda+\mu}{2}t}|A^0u_0|, \ \forall\, t \in]0,t_0[.$$

Dessa forma temos que u_λ é uma sequência de Cauchy em $C([0,t_0],H)$. Portanto existe $u:[0,t_0]\to H$ tal que $u_\lambda \to u$ quando $\lambda \to 0$. Além disso, concluímos, pela desigualdade anterior, que a convergência é uniforme em $[0,t_0]$, pois,

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda}{2}t_0}|A^0u_0|.$$

Logo, $u \in C([0,t_0],H)$. Ademais, u é absolutamente contínua, pois, se $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_0$, temos pelo Teorema do Valor Médio e (2.3) temos

$$|u_\lambda(t_1) - u_\lambda(t_2)| \leq |A^0u_0|(t_2 - t_1),$$

dessa forma,

$$|u(t_1) - u(t_2)| = \lim_{\lambda\to 0}|u_\lambda(t_1) - u_\lambda(t_2)| \leq |A^0u_0|(t_2 - t_1).$$

Notemos também que $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ uniformemente, já que

$$|J_\lambda u_\lambda(t) - u_\lambda(t)| \leq \lambda|A_\lambda u_\lambda(t)| \leq \lambda|A^0u_0|.$$

Seja $\lambda_n > 0$, tal que $A_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t) \rightharpoonup z(t)$ e $J_{\lambda_n}u_{\lambda_n}(t) \to u(t)$, quando $\lambda_n \to 0$, segue pela Proposição 1.4 que $(u(t),\ z(t)) \in A$. Por (2.3) temos que $z \in L^2(0,t_0;H)$.

Mostremos que $z(t) = -\dfrac{du}{dt}(t)$ no sentido das distribuições, para isso consideremos uma função teste α, isto é $\alpha \in \mathcal{D}(0,t_0)$ (ver [3, p.18]), então

$$\left|u_{\lambda_n}(t)\frac{d\alpha}{dt}(t)\right| \leq (|A^0u_0|t_0 + |u_0|)\max_{t\in[0,t_0]}\left|\frac{d\alpha}{dt}(t)\right|,$$

e

$$\left|\frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t)\alpha(t)\right| \leq |A^0u_0|\max_{t\in[0,t_0]}|\alpha(t)|.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}\left\langle w, \int_0^{t_0} u(t)\frac{d\alpha}{dt}(t)dt\right\rangle &= \int_0^{t_0} \lim_{\lambda_n\to 0}\left\langle w, u_{\lambda_n}(t)\frac{d\alpha}{dt}(t)dt\right\rangle = -\int_0^{t_0} \lim_{\lambda_n\to 0}\left\langle w, \frac{du_{\lambda_n}}{dt}(t)\alpha(t)dt\right\rangle \\ &= \left\langle w, -\int_0^{t_0} -z(t)\alpha(t)dt\right\rangle,\end{aligned}$$

para todo $w \in L^2(0,t_0;H)$. Logo,

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^\infty(0,t_0;H)} \le |A^0u_0|.$$

Consideremos agora o operador $\mathcal{A}$, dado no Exemplo 1.5, então, pela Proposição 1.4, temos que $(u,z)\in\mathcal{A}$, já que, $J_\lambda u_\lambda \to u$ uniforme em $C([0,t_0];H)$, $A_\lambda u_\lambda \rightharpoonup z$ em $L^2(0,t_0;H)$ e $(J_\lambda u_\lambda,\ A_\lambda u_\lambda)\in\mathcal{A}$. Portanto,

$$\frac{du}{dt} + Au \ni 0 \text{ q.t.p. em }]0,t_0[$$

Seja $t_1 > 0$, então por (i), (ii), (iii) e (vi) a função $t \mapsto u(t_1+t)$ é solução da equação

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + Av(t) \ni 0 \\ v(0) = u(t_1). \end{cases}$$

Dessa forma temos que $|A^0u(t+t_1)| \le |A^0u(t_1)|$, para todo $t_1 > 0$. Assim, a função $t \mapsto |A^0u(t)|$ é decrescente.

Para mostrarmos que a função $t \mapsto A^0u(t)$ é contínua à direita, observemos que se ela é contínua à direita em um ponto então por translação ela é contínua à direita em todo ponto. Consideremos $\{t_n\}\subset [0,\infty[$ tal que $t_n \to 0$ e $A^0u(t_n) \rightharpoonup \xi$, como A é maximal monótono $\xi \in Au_0$. Segue da desigualdade (2.3), que $|\xi| \le |A^0u_0|$, assim $\xi = A^0u_0$. Logo, $A^0u(t)\to A^0u_0$, quando $t\to 0$.

Seja $E = \{t \in]0,\infty[;\ \frac{du}{dt} + Au(t) \ni 0\}$. Por (ii) temos que $|u(t_1+h)-u(t_1)| \le h|A^0u(t_1)|$ para todo $t_1 > 0$ e $h > 0$ (u é absolutamente contínua). Portanto, se $t_1 \in E$ então $\frac{du}{dt}(t_1) + A^0u(t_1) = 0$, pois $\left|\frac{du}{dt}(t_1)\right| \le |A^0u(t_1)|$. Integrando em $E\cap]0,t[$ temos que

$$\frac{u(t)-u(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t A^0u(s)ds = 0.$$

Como $t \mapsto A^0u(t)$ é contínua à direita, temos que u é derivável à direita em $t=0$ e que $\frac{d^+u}{dt}(0) + A^0u(0) = 0$. Por translação obtemos que u é diferenciável à direita em todo ponto $t \in [0,\infty[$. $\square$

Para cada $t \ge 0$, consideremos a aplicação $T(t): D(A) \to D(A)$, definida por $T(t)u_0 = u(t)$, onde

u é a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au \ni 0 \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.1 (vi), $\{T(t), t \geq 0\}$ é uma contração, assim podemos estendê-la continuamente até $\overline{D(A)}$. A família $T(t)$ é um semigrupo contínuo de contrações, isto é,

(i) Para todos $t,\ s \geq 0$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ e $T(0) = I$.

(ii) Para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$, $\lim\limits_{t \to 0} |T(t)u_0 - u_0| = 0$.

(iii) Para todo $u_0,\ v_0 \in \overline{D(A)}$ e todo $t \geq 0$ temos

$$|T(t)u_0 - T(t)v_0| \leq |u_0 - v_0|.$$

Dizemos que o semigrupo $T(t)$ é gerado por $-A$. No Capítulo 3, analisaremos com mais detalhes as propriedades dos semigrupos. No caso em que A é a subdiferencial de uma função convexa, este operador tem efeito regularizante sobre o semigrupo $T(t)$, a saber:

Teorema 2.2. *Sejam ϕ uma função convexa, s.c.i. e própria em H e $A = \partial\phi$. Seja $T(t)$ o semigrupo gerado por $-A$ em $\overline{D(A)}$. Então, para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$ e todo $t > 0$, temos $T(t)u_0 \in D(A)$ e*

$$|A^0 T(t)u_0| \leq |A^0 v| + \frac{1}{t}|u_0 - v|,\ \forall\ v \in D(A),\ \forall t > 0.$$

Isto é, para todo $u_0 \in \overline{D(A)}$, existe uma única função $u \in C([0, \infty[; H)$ tal que

(i) $u(0) = u_0$ e $u(t) \in D(A)$, para todo $t > 0$.

(ii) u é lipschitziana em $[\delta, \infty[$ para todo $\delta > 0$, com

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^\infty(\delta,\infty;H)} \leq |A^0 v| + \frac{1}{\delta}|u_0 - v|, \forall v \in D(A), \forall \delta > 0.$$

(iii) A função $t \mapsto \phi(u(t))$ é convexa, decrescente e lipschitziana em todo intervalo $[\delta, \infty[$ e satisfaz

$$\frac{d^+}{dt}\phi(u(t)) = -\left| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right|^2,\ \forall\ t > 0.$$

Demonstração. Dado $u_0 \in \overline{D(A)}$, assim como na demonstração do Teorema 2.1, para todo $\lambda > 0$ consideremos $u_\lambda : [0, \infty[\to H$ solução de

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Conforme visto na Proposição 1.9, $A_\lambda = \partial\phi_\lambda$, para todo $\lambda > 0$. Assim, fixado $v \in H$ temos

$$\phi_\lambda(u) - \phi_\lambda(v) \geq \langle A_\lambda v, u - v\rangle, \ \forall u \in H.$$

Consideremos a função $\psi_\lambda : H \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi_\lambda(u) = \phi_\lambda(u) - \phi_\lambda(v) - \langle A_\lambda v, u - v\rangle.$$

A função ψ_λ é própria, convexa, s.c.i., não-negativa e Fréchet diferenciável com

$$\partial\psi_\lambda(u) = \partial\phi_\lambda(u) - A_\lambda v.$$

Logo, a equação (2.5) pode ser reescrita como

$$\frac{du_\lambda}{dt} + \partial\psi_\lambda(u_\lambda) = -A_\lambda v. \tag{2.6}$$

Por outro lado,

$$\psi_\lambda(v) - \psi_\lambda(u_\lambda) \geq \langle \partial\psi_\lambda(u_\lambda), v - u_\lambda\rangle.$$

Como $\psi_\lambda(v) = 0$, obtemos pela desigualdade precedente e (2.6)

$$\psi_\lambda(u_\lambda) \leq \left\langle \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda v, v - u_\lambda \right\rangle.$$

Logo,

$$\int_0^{t_0} \psi_\lambda(u_\lambda(t))dt \leq \frac{1}{2}|u_0 - v|^2 - \frac{1}{2}|u_\lambda(t_0) - v|^2 + \int_0^{t_0} \langle A_\lambda v, v - u_\lambda(t)\rangle dt. \tag{2.7}$$

Calculando o produto interno em ambos os lados de (2.6) por $t\dfrac{du_\lambda}{dt}$ e lembrando que $\dfrac{d}{dt}\psi_\lambda(u_\lambda) = \left\langle \partial\psi_\lambda, \dfrac{du_\lambda}{dt} \right\rangle$ obtemos

$$t\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 + t\frac{d}{dt}\psi_\lambda(u_\lambda) = -\left\langle A_\lambda v, t\frac{du_\lambda}{dt}\right\rangle.$$

Integrando em $]0, t_0[$, obtemos

$$\int_0^{t_0} t\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 dt + t_0\psi_\lambda(u_\lambda(t_0)) - \int_0^{t_0} \psi_\lambda(u_\lambda(t))dt = -t_0 \langle A_\lambda v, u_\lambda(t_0) - v\rangle + \int_0^{t_0} \langle A_\lambda v, u_\lambda(t) - v\rangle \, dt.$$

Como $\psi_\lambda \geq 0$ e por (2.7) temos

$$\int_0^{t_0} t \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 dt \leq \frac{1}{2}|u_0 - v|^2 - \frac{1}{2}|u_\lambda(t_0) - v|^2 - t_0 \left\langle A_\lambda v, u_\lambda(t_0) - v \right\rangle. \tag{2.8}$$

Aplicando a Desigualdade de Yöung em $t_0|A_\lambda v||u_\lambda(t_0) - v|$, temos

$$\int_0^{t_0} t \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|^2 dt \leq \frac{1}{2}|u_0 - v|^2 + \frac{1}{2}|t_0 A_\lambda v|^2.$$

Pelo Teorema 2.1, temos

$$\left| \frac{du_\lambda}{dt}(t_0) \right| \leq \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right|, \ t \leq t_0,$$

e por (2.8) temos

$$\frac{t_0^2}{2} \left| \frac{du_\lambda}{dt}(t_0) \right|^2 \leq \frac{1}{2}|u_0 - v|^2 + \frac{t_0^2}{2}|A_\lambda v|^2.$$

Portanto, se $v \in D(A)$, então pelo item (iii) da Proposição 1.5, que $|A^0 v| \geq |A_\lambda v|$ para todo $\lambda > 0$ e assim,

$$\left| \frac{du_\lambda}{dt}(t_0) \right| \leq \frac{1}{t_0}|u_0 - v| + |A_\lambda v|. \tag{2.9}$$

Mostremos agora que $u_\lambda(t_0) \to T(t_0)u_0$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\tilde{u_0} \in D(A)$ tal que

$$|u_0 - \tilde{u_0}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Segue da demonstração do Teorema 2.1, $\tilde{u}_\lambda(t) \to T(t)\tilde{u}_0$ quando $\lambda \to 0$. Além disso, pelo item (vi) do Teorema 2.1 temos

$$|u_\lambda(t) - \tilde{u}_\lambda(t)| \leq |u_0 - \tilde{u}_0|,$$

onde $\tilde{u}_\lambda$ é a solução do problema (2.5) com problema valor inicial $\tilde{u}_0$. Dessa forma,

$$|u_\lambda(t_0) - T(t_0)u_0| < \varepsilon,$$

para λ suficientemente pequeno. Como $\frac{du_\lambda}{dt}(t_0)$ é limitada e $u_\lambda(t_0) \to T(t_0)u_0$ temos pela Proposição 1.4 que $T(t_0)u_0 \in D(A)$.

De maneira análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 2.1 concluímos por (2.9) que

$$|A^0 T(t_0)u_0| \leq \frac{1}{t_0}|u_0 - v| + |A_\lambda v|, \ \forall t_0 > 0.$$

Por fim consideremos a função $u : [0, \infty[\to H$, dada por, $u(t) = T(t)u_0$. Pelo que foi mostrado acima $u(t)$ satisfaz (i) e (ii).

Para verificarmos (iii) fixemos $\delta > 0$ e consideremos $t \in]0, \delta]$ e $h > 0$, então

$$\phi(u(t+h)) - \phi(u(t)) \geq -\left\langle \frac{d^+u}{dt}(t), u(t+h) - u(t) \right\rangle \tag{2.10}$$

e

$$\phi(u(t)) - \phi(u(t+h)) \geq -\left\langle \frac{d^+u}{dt}(t+h), u(t+h) - u(t) \right\rangle. \tag{2.11}$$

Como

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t+h)\right| \leq \left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leq \left|\frac{d^+u}{dt}(\delta)\right| \text{ e } |u(t+h) - u(t)| \leq h\left|\frac{d^+u}{dt}(\delta)\right|,$$

segue de (2.10), (2.11) e das desigualdades precedentes que

$$|\phi(u(t+h)) - \phi(u(t))| \leq h\left|\frac{d^+u}{dt}(\delta)\right|^2.$$

Logo, $\phi(u)$ é lipschitiziana em $[\delta, \infty[$. Ademais,

$$\lim_{h\to 0}\left\langle \frac{d^+u}{dt}(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = \left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right|^2$$

e

$$\lim_{h\to 0}\left\langle \frac{d^+u}{dt}(t+h), \frac{u(t+h) - u(t)}{dt} \right\rangle = \left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right|^2,$$

pois, pelo Teorema 2.1 a função $t \mapsto \dfrac{d^+u}{dt}(t)$ é contínua à direita. Logo, segue de (2.10) e (2.11) que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(u(t+h)) - \phi(u(t))}{h} = -\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right|^2.$$

Portanto, a função $t \mapsto \phi(u(t))$ é decrescente. Pelo Teorema 2.1 (iv) e (v), $\left|\dfrac{d^+u}{dt}\right| = |A^0u(t)|$ o qual é decrescente. Logo, $\dfrac{d^+\phi}{dt}(u)$ é crescente e assim a função $t \mapsto \phi(u(t))$ é convexa. □

Sob as hipóteses do teorema anterior pode-se mostrar que

Proposição 2.1. *Seja $u_0 \in \overline{D(A)}$, então $\phi(u) \in L^p(0,\delta)$ e $\sqrt{t}\dfrac{du}{dt}(t) \in L^2(0,\delta;H)$. Além disso, $u_0 \in D(A)$ se, e somente se, $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,\delta;H)$, para todo $\delta > 0$. Neste caso, u satisfaz*

$$\phi(u(0)) - \phi(u(t)) = \int_0^t \left|\frac{du}{dt}(s)\right|^2 ds, \ \forall\, t > 0.$$

Em particular se $u_0 \in D(A)$, então $\phi(u(t)) \uparrow \phi(u_0)$ quando $t \downarrow 0$ e para todo $t > 0$ temos

$$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leq \sqrt{\frac{\phi(u_0) - \phi(u(t))}{t}} \qquad e \qquad \frac{|u(t) - u_0|}{\sqrt{t}} \leq \sqrt{\phi(u_0) - \phi(u(t))}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [5, p.61].

2.2 Inclusão não-Homogênea

Antes de demonstrarmos que dado $u_0 \in \overline{D(A)}$ o problema (2.1) tem uma única solução fraca, demonstraremos propriedades importantes no estudo das inclusões não-homogêneas.

Lema 2.1. *Sejam A um operador maximal monótono, $f,\ g \in L^1(0,t;H)$, u e v soluções fracas de*

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \qquad e \qquad \frac{dv}{dt} + Av \ni g.$$

Então para todo $0 \leq s \leq t \leq T$ temos

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(s) - v(s)| + \int_s^t |f(w) - g(w)|dw \tag{2.12}$$

e

$$\langle u(t) - u(s), u(s) - x\rangle \leq \frac{1}{2}|u(t) - x|^2 - \frac{1}{2}|u(s) - x|^2 \leq \int_s^t \langle f(w) - y, u(w) - x\rangle dw,\ \forall\ (x,y) \in A. \tag{2.13}$$

Demonstração. Inicialmente notemos que é suficiente estabelecermos (2.12) e (2.13), no caso em que u e v são soluções fortes de

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f \qquad \text{e} \qquad \frac{dv}{dt} + Av \ni g.$$

respectivamente; pois uma solução fraca é por definição limite uniforme de soluções fortes em $C([0,T],H)$.

Segue da monotonicidade de A, que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2 = \left\langle \frac{du}{dt}(t) - \frac{dv}{dt}(t), u - v\right\rangle \leq \langle f(t) - g(t), u(t) - v(t)\rangle,\ \text{q.t.p. em }]0,T[.$$

Como, $|u - v|^2$ é absolutamente contínua em todo compacto de $]0,T[$, integrando em $]s,t[\subset [0,T]$ obtemos

$$\frac{1}{2}|u(t) - v(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s) - v(s)|^2 \leq \int_s^t \langle f(w) - g(w), u(w) - v(w)\rangle dw. \tag{2.14}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s)-v(s)|^2 + \int_s^t |f(w)-g(w)||u(w)-v(w)|dw.$$

Pela desigualdade de Grownwall temos,

$$|u(t)-v(t)| \leq |u(s)-v(s)| + \int_s^t |f(w)-g(w)|dw.$$

Fazendo $v(t) = x$ e $g(t) = y$ em (2.14), obtemos

$$\frac{1}{2}|u(t)-x|^2 - \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 \leq \int_s^t \langle f(w)-y, u(w)-x\rangle dw,$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}|u(t)-u(s)|^2 = \frac{1}{2}|u(t)-x|^2 + \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 - \langle u(t)-x, u(s)-x\rangle \\ &= \frac{1}{2}|u(t)-x|^2 - \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 - \langle u(t)-u(s), u(s)-x\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\langle u(t)-u(s), u(s)-x\rangle \leq \frac{1}{2}|u(t)-x|^2 - \frac{1}{2}|u(s)-x|^2 \leq \int_s^t \langle f(w)-y, u(w)-x\rangle dw.$$

□

Teorema 2.3. *Se $u_0 \in \overline{D(A)}$, A um operador maximal monótono e $f \in L^1(0,T;H)$, então (2.1) tem uma única solução fraca.*

Demonstração. Notemos que se u e v são soluções de (2.1), então, por (2.12), $u = v$.

Para demonstrarmos a existência, consideremos inicialmente f uma função do tipo escada, isto é, $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = T$, com $f|_{[a_n-1,n[} = y_n$ para $n = 1, \cdots, k$.

Primeiramente consideremos a equação

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} + Au_1 - y_1 \ni 0 \\ u_1(0) = u_0. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.1, sabemos que existe $u_1 \in C([0,\infty[;H)$ solução da equação acima, pois o operador $A - y_1$ sendo a translação do operador maximal monótono A por y_1 também é maximal monótono.

Em seguida, consideremos a equação

$$\begin{cases} \dfrac{du_2}{dt} + Au_2 - y_2 \ni 0 \\ u_2(0) = u_1(a_1). \end{cases}$$

Como $u_1(a) \in D(A)$ novamente pelo Teorema 2.1, sabemos que existe uma solução $u_2 \in C([0,\infty[;H)$ tal que $u_2(0) = u_1(a_1)$.

Prosseguindo desta maneira temos que existe $u_n \in C([0,\infty[;H)$ com $n = 1, \cdots, k-1$ tal que u_n é solução de

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n - y_n \ni 0 \\ u_n(0) = u_{n-1}(a_{n-1}). \end{cases}$$

Seja $u : [0,T] \to H$ dada por $u(t)|_{[a_{n-1},a_n]} = u_n(t - a_{n-1})$. A função, u é absolutamente contínua e satisfaz (2.1), portanto u é solução forte de (2.1).

No caso em que $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{D(A)}$, sabemos que existe uma sequência de funções escadas f_j tal que $f_j \to f$ em $L^1(0,T;H)$ (ver [16]). Seja $\{u_j^0\} \subset D(A)$ tal que $u_j^0 \to u_0$ quando $j \to \infty$. Pelo caso anterior, sabemos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe u_j solução forte de

$$\begin{cases} \dfrac{du_j}{dt} + Au_j \ni f_j \\ u_j(0) = u_j^0. \end{cases}$$

Por (2.12) temos,

$$|u_m(t) - u_j(t)| \leq |u_m^0 - u_j^0| + \int_0^t |f_m(s) - f_j(s)|ds, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Logo, $u_j(t)$ é uma sequência de Cauchy em H. Seja $u = \lim_{j\to\infty} u_j(t)$, pela desigualdade acima temos que $u_j \to u$ em $C([0,T];H)$, com $u(0) = u_0$ e que u satisfaz (2.1). Portanto, u é solução fraca de (2.1). $\square$

Lema 2.2. *Sejam A um operador monótono de H, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u \in C([0,T];H)$ uma solução fraca de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$. Sejam α, $\beta \in H$ e $\{t_n\} \subset [0,T]$ satisfazendo*

(i) $t_n \to t_0$ *e* $t_n \neq t_0$;

(ii) $\dfrac{u(t_n) - u(t_0)}{t_n - t_0} \rightharpoonup \alpha$;

(iii) $\dfrac{1}{t_n - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds \rightharpoonup \beta$;

(iv) $\dfrac{1}{t_n - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t} |f(s)|ds$ *é limitado.*

Então, $u(t_0) \in D(A)$ *e* $\beta - \alpha \in Au(t_0)$.

Demonstração. Sabemos que

$$\frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} \langle f(w) - y, u(w) - x \rangle dw \to \langle \beta - y, u(t_0) - x \rangle, \text{ quando } t \to t_0.$$

Se $t_n > t_0$ e $(x, y) \in A$, segue da desigualdade (2.13) que

$$\left\langle \frac{u(t_n) - u(t_0)}{t_n - t_0}, u(t_0) - x \right\rangle \leq \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} \langle f(w) - y, u(w) - x \rangle dw.$$

Caso $t_n < t_0$, segue novamente pela desigualdade (2.13) que

$$\left\langle \frac{u(t_0) - u(t_n)}{t_0 - t_n}, u(t_n) - x \right\rangle \leq \frac{1}{t_0 - t_n} \int_{t_n}^{t_0} \langle f(w) - y, u(w) - x \rangle dw.$$

Em ambos os casos, quando $t \to t_0$ temos

$$\langle \alpha, u(t_0) - x \rangle \leq \langle \beta - y, u(t_0) - x \rangle.$$

Isto é,

$$\langle \beta - \alpha - y, u(t_0) - x \rangle \geq 0, \ \forall \ (x, y) \in A.$$

Como A é maximal monótono temos que $(u(t_0), \beta - \alpha) \in A$. $\square$

Definição 2.2. *Seja* $t_0 \in [0, T[$. *Dizemos que* t_0 *é um ponto de Lebesgue a direita de* f *se existe o limite*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0 + h} f(s) ds.$$

Se t_0 *é um ponto de Lebesgue a direita, denotemos por* $f(t_0 + 0)$ *o limite anterior.*

Conforme [16], se $f \in L^1(0, T; H)$ então $f(t + 0) = f(t)$ q.t.p em $[0, T[$.

Teorema 2.4. *Sejam* A *um operador maximal monótono,* $f \in L^1(0, T; H)$, $u \in C([0, T]; H)$ *solução fraca de* $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ *e* t_0 *um ponto de Lebesgue a direita de* t_0 *de* f. *Então, as seguintes propriedades são equivalentes*

(i) $u(t_0) \in D(A)$;

(ii) $\displaystyle\liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} |u(t_0 + h) - u(t_0)| < \infty$;

(iii) u é derivável à direita em t_0 e

$$\frac{d^+u}{dt} = (f(t_0+0) - Au(t_0))^0 = f(t_0+0) - proj_{Au(t_0)} f(t_0+0).$$

Demonstração. É claro que se u é derivável à direita, então (ii) é válida.

Se (ii) é verdade, consideremos $\{h_n > 0\}$ com $h_n \to 0$, tal que

$$\frac{u(t_0+h_n) - u(t_0)}{h_n} \rightharpoonup \eta,\ \eta \in H.$$

Como t_0 é ponto de Lebesgue, segue do Lema 2.2 que $u(t_0) \in D(A)$.

Supondo que $u(t_0) \in D(A)$, apliquemos (2.12) com respeito a $g(t) = f(t_0+0) - (f(t_0+0) - Au(t_0))^0$ e $v(t) = u(t_0)$, para obter

$$|u(t_0+h) - u(t_0)| \leq \int_{t_0}^{t_0+h} |f(s) - f(t_0+0) + (f(t_0+0) - Au(t_0))^0| ds.$$

Logo, como t_0 é ponto de lebesgue à direita de f temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}|u(t_0+h) - u(t_0)| &\leq \limsup_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} |f(s) - f(t_0)| ds + (f(t_0+0) - Au(t_0))^0 \\ &= (f(t_0+0) - Au(t_0))^0. \end{aligned}$$

Seja $h_n \downarrow 0$ tal que $\frac{1}{h_n}|u(t_0+h_n) - u(t_0)| \rightharpoonup \alpha$. Pelo Lema 2.2, temos que $f(t+0) - \alpha \in Au(t_0)$, pela desigualdade precedente

$$|\alpha| \leq |(f(t_0+0) - Au(t_0))^0|.$$

Dessa maneira, concluímos que $\alpha = (f(t_0+0) - Au(t_0))^0$. Portanto, u é derivável à direita de t_0 e

$$\frac{d^+u}{dt}(t_0) = (f(t_0+0) - Au(t_0))^0.$$

Seja $z = \text{proj}_{Au(t_0)} f(t_0+0)$, então para todo $v \in Au(t_0)$ temos

$$\langle f(t_0+0) - z, v - z\rangle \leq 0.$$

Por outro lado,

$$\langle 0 - \{f(t_0+0) - z\}, \{f(t_0+0) - v\} - \{f(t_0+0) - z\}\rangle = \langle f(t_0+0) - z, v - z\rangle,$$

portanto,

$$(f(t_0+0) - Au(t_0))^0 = f(t_0+0) - \text{proj}_{Au(t_0)} f(t_0+0).$$

□

Teorema 2.5. *Sejam A um operador maximal monótono, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u \in C([0,T];H)$. Então, são equivalentes:*

(i) u é solução forte da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$.

(ii) u é absolutamente contínua em todo compacto de $]0,T[$ e u é solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$.

(iii) u é absolutamente contínua em todo compacto de $]0,T[$ e para todo $(x,y) \in A$, u verifica

$$\langle u(t) - u(s), u(s) - x\rangle \leq \int_s^t \langle f(w) - y, u(w) - x\rangle dw, \ \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.15}$$

Demonstração. Por definição de solução forte, temos que (i) implica (ii). Notemos que se (ii) é verdade, então por (2.13) temos que (2.15) é válida.

Para mostrarmos que (iii) implica (i), consideremos $t_0 \in]0,T[$ tal que u é diferenciável e $f(t_0+0) = f(t_0)$. Então por (2.15)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{h}\langle u(t_0+h) - u(t_0), u(t_0) - x\rangle \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \langle f(w) - y, u(w) - x\rangle dw.$$

Logo,

$$0 \leq \langle f(t_0) - \frac{du}{dt}(t_0) - y, u(t_0) - x\rangle, \ \forall (x,y) \in A.$$

Portanto, $(u(t_0), f(t_0) - \frac{du}{dt}(t_0)) \in A$ q.t.p. em $]0,T[$. Logo, u é solução forte de $\frac{du}{dt} + Au \ni f$. □

O próximo resultado mostra que quanto mais regular a função f for, mais regular será a solução fraca u de (2.1).

Proposição 2.2. *Seja A um operador maximal monótono, f uma função de variação limitada de $[0,T]$ em H e $u \in C([0,T];H)$ uma solução fraca de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$. Então as propriedades são equivalentes.*

(i) $u(0) \in D(A)$;

(ii) u é lipschitiziana em $[0,T]$.

Neste caso, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0,T]$ e

$$\frac{d^+u}{dt}(t) = (f(t+0) - Au(t_0))^0, \ \forall\, t \in [0,T[.$$

Além disso, se $f \in W^{1,1}(0,T;H)$, *então* $\dfrac{d^+u}{dt}$ *é contínua à direita em todo* $t \in [0,T[$, *e* $\dfrac{du}{dt}$ *é contínua em* $t \in]0,T[$ *se, e somente se,* $\left|\dfrac{du}{dt}\right|$ *é contínua em* $t \in]0,T[$.

Se A *é unívoco e* f *for contínua, então* u *é fracamente diferenciável em* $]0,T[$ *e* $\dfrac{du}{dt}$ *é fracamente contínua em* $]0,T[$.

Demonstração. (ii)$\Longrightarrow$(i).

Desde que f tem variação limitada, então f admite limite à direita de todo ponto $t \in [0,T[$. Assim, $f(t+0)$ existe para todo $t \in [0,T[$. Além disso, seja L a constante de Lipschitz de u, então

$$\liminf_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}|u(t+h)-u(t)| \leq L, \ \forall\, t \in [0,T[.$$

Pelo Teorema 2.4, temos que $u(t) \in D(A)$ e $\dfrac{d^+u}{dt} = (f(t+0) - Au(t))^0$ para todo $t \in [0,T[$, em particular $u(0) \in D(A)$. Ademais, decorre diretamente da Proposição 1.4, que $u(T) \in D(A)$, pois, $\dfrac{d^+u}{dt}(t)$ é limitado.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Reciprocamente, suponhamos que $u(0) \in D(A)$, então, pelo Teorema 2.4, temos que u é derivável à direita do zero. Considerando $g(t) = f(t+h)$ e $v(t) = u(t+h)$ em (2.12) obtemos

$$|u(t+h)-u(t)| \leq |u(h)-u(0)| + \int_0^t |f(w+h)-f(w)|dw, \ \forall t \in]0,T-h[.$$

Logo,

$$|u(t+h)-u(t)| \leq |u(h)-u(0)| + h\mathrm{Var}(f;[0,T]).$$

Como u é diferenciável à direita, para h suficientemente pequeno temos

$$|u(t+h)-u(t)| \leq Ch,$$

assim concluímos que u é lipschitziana.

Supondo que $f \in W^{1,1}(0,T;H)$, então f é absolutamente contínua e

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|f(w+h)-f(w)|}{h} = \left|\frac{df}{dt}(t)\right|, \ \text{q.t.p. em }]0,T[. \tag{2.16}$$

Consideremos $g(t) = f(t+h)$ e $v(t) = u(t+h)$ em (2.12) obtemos,

$$|u(t+h)-u(t)| \leq |u(s+h)-u(s)| + \int_s^t |f(w+h)-f(w)|dw, \forall\ 0 \leq s \leq t < T.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade anterior por h e fazendo $h \downarrow 0$, concluímos pelo Teorema da

Convergência Dominada e por (2.16), que

$$\Big|\frac{d^+u}{dt}(t)\Big| \leq \Big|\frac{d^+u}{dt}(s)\Big| + \int_s^t \Big|\frac{df}{dt}(w)\Big|dw.$$

Dessa forma fixando $t_0 \in [0,T[$, temos

$$\Big|\frac{d^+u}{dt}(t)\Big| \leq \Big|\frac{d^+u}{dt}(t_0)\Big| + \int_{t_0}^t \Big|\frac{df}{dt}(w)\Big|dw.$$

Logo,

$$\limsup_{t\downarrow t_0}\Big|\frac{d^+u}{dt}(t)\Big| \leq \Big|\frac{d^+u}{dt}(t_0)\Big|. \tag{2.17}$$

Sejam $\eta \in H$ e $t_n \downarrow t_0$, tal que $\dfrac{d^+u}{dt}(t_n) \rightharpoonup \eta$. Como, $u(t_n) \in D(A)$ e $f(t_n) - \dfrac{d^+u}{dt}(t_n) \in Au(t_n)$, para todo n e

$$f(t_n) - \frac{d^+u}{dt}(t_n) \rightharpoonup f(t_0) - \eta,$$

logo pela Proposição 1.4 temos que $f(t_0) - \eta \in Au(t_0)$.

Além disso, segue de (2.17) que $|\eta| \leq \Big|\dfrac{d^+u}{dt}(t_0)\Big| = |(f(t_0) - Au(t_0))^0|$, daí, $\eta = \dfrac{d^+u}{dt}(t_0)$. Portanto, a função $t \mapsto \dfrac{d^+u}{dt}$ é contínua à direita.

Agora, suponhamos que a função $t \mapsto \Big|\dfrac{du}{dt}(t)\Big|$ seja contínua em $t_0 \in]0,T[$, então $\Big|\dfrac{du}{dt}(t)\Big|$ é limitada em uma vizinhança de t_0. Dessa forma, existe $\eta_0 \in H$ e $t_n \uparrow t_0$, tal que $\dfrac{du}{dt}(t_n) \rightharpoonup \eta_0$, com

$$|\eta_0| \leq \Big|\frac{d^+u}{dt}(t_0)\Big|.$$

Como,

$$f(t_n) - \frac{d^+u}{dt} \in Au(t_n),$$

segue da Proposição 1.4 que $\eta_0 \in f(t_0) - Au(t_0)$, logo $\eta_0 = \dfrac{d^+u}{dt}(t_0)$. Notemos ainda que, se $\dfrac{d^+u}{dt}$ é contínua em t_0 temos

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^t \frac{d^+u}{dt}(w)dw.$$

Portanto, u é diferenciável em t_0.

Suponhamos agora que A seja um operador unívoco e f contínua. Então a função $t \mapsto Au(t)$ é contínua de $[0,T]$ em H_w pois $|Au(t)|$ é limitado. Logo, $t \mapsto \dfrac{d^+u}{dt} - Au(t)$ é contínua de $[0,T]$ em H_w. Assim, u é fracamente diferenciável em $]0,T[$. $\square$

Proposição 2.3. *Seja A um operador maximal monótono tal que $D(A)$ é fechado e A^0 limitado em conjuntos compactos de $D(A)$. Seja, $f \in L^p(0,T;H)$, $1 \leq p \leq \infty$, $u_0 \in D(A)$, então existe uma única função $u \in W^{1,p}(0,T;H)$, tal que $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ q.t.p. em $]0,T[$ e $u(0) = u_0$.*

Demonstração. Seja $u \in C([0,T];H)$ a solução fraca de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ com $u(0) = u_0$. Mostremos que $\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;H)$, para isso, consideremos o conjunto compacto $K = u([0,T])$. Pela Proposição 2.2, temos que $K \subset D(A)$. Por hipótese, A^0 é limitado em K, assim existe $M > 0$ tal que $|A^0 u(t)| \leq M$, para todo $t \in [0,T]$.

Seja $s \in]0,T[$, tal que u é diferenciável em s. Consideremos $g(t) = A^0 u(s)$ e $v(t) = u(s)$ em (2.14) temos

$$|u(t) - u(s)| \leq |u(s) - u(s)| + \int_s^t |f(w) - A^0 u(s)| dw \leq \int_s^t |f(w)| dw + M(t-s).$$

Logo,

$$\frac{|u(t) - u(s)|}{t-s} \leq \|f\|_{L^p(0,T;H)} + M.$$

Assim, $\dfrac{du}{dt} \in L^\infty(0,T;H)$. Portanto, $u \in W^{1,p}(0,T;H)$. □

Antes de enunciarmos mais resultados sobre solução de (2.1), necessitamos do seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em [5, p. 146].

Lema 2.3. *Sejam $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ e*

$$\delta(t) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}.$$

Então, temos as seguintes implicações:

(i) Se existe, $\gamma \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $g(t) - g(s) \leq \displaystyle\int_s^t \gamma(w) dw$, para todo $0 \leq s \leq t \leq T$;

(ii) g é de variação limitada e $g(t) - g(s) \leq \displaystyle\int_s^t \frac{dg}{dt}(w) dw$;

(iii) $\delta \in L^1(0,T;H)$;

(iv) existe $\tilde{\delta} \in L^1(0,T;H)$, tal que $\tilde{\delta}(t) \geq \delta(t)$.

Proposição 2.4. *Sejam A um operador maximal monótono, com $D(A)$ fechado, $f \in C([0,T];H)$ e $u_0 \in D(A)$. Então existe uma única função $u \in C([0,T];H)$,com $u(0) = u_0$, u diferenciável à direita em $[0,T[$ e $\dfrac{d^+u}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$ em todo $t \in [0,T[$. Além disso, u coincide com a solução fraca da $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ e $u(0) = u_0$.*

Demonstração. Seja u a solução fraca de $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$. Como f é contínua, segue da Proposição 2.2 que u é diferenciável à direita de todo ponto $t \in [0,T[$ e

$$\frac{d^+u}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t).$$

Suponhamos, que exista $v \in C([0,T];H)$ tal que $\dfrac{d^+v}{dt}(t) + Av(t) \ni f(t)$, para todo $t \in [0,T[$. Então, pela monotonicidade de A temos

$$\left\langle \frac{d^+u}{dt} - \frac{d^+v}{dt}, u(t) - v(t) \right\rangle \leq \langle f(t) - f(t), u(t) - v(t) \rangle = 0, \ \forall\, t \in [0,T[.$$

Isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d^+}{dt}|u(t) - v(t)| \leq 0.$$

Logo, $|u(t) - v(t)| \leq 0$ para todo $t \in [0,T]$. Portanto, $u = v$. $\square$

Agora, estamos em condições de caracterizarmos uma solução fraca de (2.1).

Proposição 2.5. *Seja A um operador maximal monótono, $u \in C([0,T];H$ e $f \in L^1(0,T;H)$. Então, u é solução fraca da equação $\dfrac{du}{dt} + Au \ni f$ se, e somente se, para todo $(x,y) \in A$, para todo $0 \leq s \leq t \leq T$ temos*

$$\frac{1}{2}|u(t) - x|^2 \leq \frac{1}{2}|u(s) - x|^2 + \int_s^t \langle f(w) - y, u(w) - x \rangle dw. \tag{2.18}$$

Demonstração. Suponhamos que u satisfaça (2.18). Inicialmente mostremos que $u_0 = u(0) \in \overline{D(A)}$. Fazendo $x = J_\lambda u(0)$ e $y = A_\lambda u_0$ em (2.18) temos

$$\frac{1}{2}|u(t) - J_\lambda u_0|^2 + \int_0^t \langle A_\lambda u_0, u(w) - J_\lambda u_0 \rangle dw \leq \frac{1}{2}|u(0) - J_\lambda u_0|^2 + \int_0^t \langle f(w), u(w) - J_\lambda u_0 \rangle dw.$$

Como, $A_\lambda u_0 = \dfrac{u_0 - J_\lambda u_0}{\lambda}$ temos

$$\int_0^t \left\langle u_0 - J_\lambda u_0, u(w) - J_\lambda u_0 \right\rangle dw \leq \lambda \left\{ \frac{1}{2}|u(0) - J_\lambda u_0|^2 + \int_0^t \left\langle f(w), u(w) - J_\lambda u_0 \right\rangle dw \right\}.$$

Pelo Teorema 1.1, $\lim_{\lambda \to 0^+} J_\lambda u_0 \to \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}} u_0$. Assim,

$$\int_0^t \left\langle u_0 - \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}} u_0, u(w) - \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}} u_0 \right\rangle dw \leq 0.$$

Logo,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left\langle u_0 - \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}} u_0, u(w) - \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}} u_0 \right\rangle dw = |u_0 - \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}} u_0|^2 = 0.$$

Dessa forma, $u_0 \in \overline{D(A)}$.

Agora, consideremos $v_0 \in D(A)$ e $g \in W^{1,1}(0,T;H)$, então a solução fraca v da equação

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av \ni g \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

é solução forte. Pois, pela Proposição 2.2 v é lipschitziana em $[0,T]$ e satisfaz $\dfrac{d^+v}{dt}(t) + Av(t) \ni g(t)$ para todo $t \in [0,T[$, portanto v é absolutamente contínua e $\dfrac{dv}{dt} \in L^\infty(0,T;H)$. Consideremos, $x = v(s)$ e $y = g(s) - \dfrac{d^+v}{dt}(s)$ em (2.18) obtemos,

$$\frac{1}{2}|u(t) - v(s)|^2 - \frac{1}{2}|u(s) - v(s)|^2 \leq \int_s^t \langle f(w) - g(s) + \frac{d^+v}{dt}(s), u(w) - v(s)\rangle dw.$$

Como,

$$|u(t) - v(s)|^2 = |u(t) - v(t)|^2 + |v(t) - v(s)|^2 - 2\langle v(s) - v(t), u(t) - v(t)\rangle,$$

temos

$$\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)-v(s)|^2 \leq \langle v(s)-v(t), u(t)-v(t)\rangle + \int_s^t \langle f(w) - g(s) + \frac{d^+v}{dt}(s), u(w) - v(s)\rangle dw. \tag{2.19}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_s^t \langle -g(s) + \frac{d^+v}{dt}(s), u(w) - v(s)\rangle dw \quad &\leq \quad \left(\left\| \frac{d^+v}{dt} \right\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|g\|_{L^\infty([0,T];H)} \right) \\ &\quad \left(\|v\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u\|_{L^\infty([0,T];H)} \right)(t-s). \end{aligned}$$

e

$$\langle v(s) - v(t), u(t) - v(t)\rangle \leq (t-s)\left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^\infty(0,T;H)} \left(\|v\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u\|_{L^\infty([0,T];H)} \right)$$

Assim,

$$\frac{1}{2}|u(t) - v(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s) - v(s)|^2 \leq C_1(t-s) + C_2 \int_s^t |f(w)|dw,$$

onde, $C_2 = \|v\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u\|_{L^\infty([0,T];H)}$ e

$$C_1 = \left(2 \left\| \frac{d^+v}{dt} \right\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|g\|_{L^\infty([0,T];H)} \right) \left(\|v\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u\|_{L^\infty([0,T];H)} \right).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\limsup_{t\to s}\frac{|u(t)-v(t)|^2-|u(s)-v(s)|^2}{t-s}<\infty, \forall s\in[0,T[.$$

Pelo Lema 2.3, temos que a função $t\mapsto\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2$ é diferenciável q.t.p. em $]0,T[$, com $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|^2\in L^1(0,T)$ e

$$\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2\leq\frac{1}{2}|u(s)-v(s)|^2+\int_s^t\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(w)-v(w)|^2dw,\ 0\leq s\leq t\leq T.$$

Segue de (2.19)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(s)-v(s)|^2 &\leq \left\langle-\frac{d^+v}{dt}(s),u(s)-v(s)\right\rangle+\left\langle f(s)-g(s)+\frac{d^+v}{dt}(s),u(s)-v(s)\right\rangle\\ &= \langle f(s)-g(s),u(s)-v(s)\rangle,\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2\leq\frac{1}{2}|u(0)-v(0)|^2+\int_0^t\langle f(s)-g(s),u(s)-v(s)\rangle,\forall\, t\in[0,T]. \tag{2.20}$$

Agora, sejam $g_n\in W^{1,1}(0,T;H)$, $v_{0n}\in D(A)$ tais que $g_n\to f$ em $L^1(0,T;H)$ e $v_{0n}\to u(0)$ em H. Consideremos v_n solução forte da equação,

$$\begin{cases}\dfrac{dv_n}{dt}+Av_n\ni g_n\\ v_n(0)=v_{0n}.\end{cases}$$

e $\tilde{u}$ solução fraca de,

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{u}}{dt}+A\ni f\\ \tilde{u}(0)=u_0.\end{cases}$$

Por (2.12), temos que v_n converge uniformemente para $\tilde{u}$, e por (2.20) temos

$$\frac{1}{2}|u(t)-\tilde{u}(t)|^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}|u(t)-v_n(t)|^2\leq 0.$$

Portanto, $u=\tilde{u}$ para todo $t\in[0,T]$.

Reciprocamente, se u é solução fraca (2.1) segue do Lema 2.1 que u satisfaz (2.18). □

Assim como no caso homogêneo, quando A á a subdiferencial de uma função convexa, sob certas condições a solução fraca de (2.1) é na realidade solução forte. Nos resultados a seguir, consideramos uma função ϕ convexa s.c.i. própria e $A=\partial\phi$ com $\min_{x\in H}\{\phi(x)\}=0$ e $K=\{v\in H;\phi(v)=0\}$.

Lema 2.4. *Seja $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ tal que $u(t) \in D(A)$ q.t.p em $]0,T[$. Supondo que existe $g \in L^2(0,T;H)$ tal que $g(t) \in Au(t)$ q.t.p em $]0,T[$. Então a função $\phi(u(\cdot))$ é absolutamente contínua em $[0,T]$.*

Seja D o conjunto dos pontos $t \in]0,T[$ tal que u e $\phi(u)$ são diferenciaveis. Então, para todo $t \in D$ temos

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t)) = \left\langle h, \frac{du}{dt}(t) \right\rangle, \ \forall\, h \in Au(t).$$

Demonstração. Seja $g_\lambda(t) = A_\lambda u(t)$. Então,

$$|g_\lambda(t)| \leq |A^0 u(t)| \leq |g(t)| \text{ e } g_\lambda(t) \to A^0 u(t) \text{ q.t.p em }]0,T[.$$

Como, $\displaystyle\int_0^T |g_\lambda(t)|^2 dt \leq \int_0^T |g(t)|^2 dt$ segue do Teorema da Convergência Dominada que $g_\lambda(t) \to A^0 u(t)$ em $L^2(0,T;H)$. Por outro lado, temos que

$$\frac{d}{dt}\phi_\lambda(u) = \left\langle A_\lambda u, \frac{du}{dt} \right\rangle \text{ q.t.p }]0,T[$$

e

$$\phi_\lambda(u(t_2)) - \phi_\lambda(u(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle A_\lambda u, \frac{du}{dt} \right\rangle dt.$$

Como $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ e $A_\lambda u \to A^0$ em $L^2(0,T;H)$, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \left\langle A_\lambda u, \frac{du}{dt} \right\rangle dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle A^0 u, \frac{du}{dt} \right\rangle dt.$$

Logo,

$$\phi(u(t_2)) - \phi(u(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle A^0 u, \frac{du}{dt} \right\rangle dt, \forall t_1,\ t_2 \in [0,T].$$

Dessa forma concluímos que a função $t \mapsto \phi(u(t))$ é absolutamente contínua.

Agora, consideremos $t \in D$ e $h \in Au(t)$, pela definição de subdiferencial temos

$$\phi(v) - \phi(u(t)) \geq \langle h, v - u(t) \rangle, \forall\, v \in H. \tag{2.21}$$

Tomando $v = u(t+\varepsilon)$ em (2.21), com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\frac{\phi(u(t+\varepsilon)) - \phi(u(t))}{\varepsilon} \geq \langle h, \frac{u(t+\varepsilon) - u(t)}{\varepsilon} \rangle,$$

fazendo $\varepsilon \to 0$ temos

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t)) \geq \left\langle h, \frac{du}{dt}(t) \right\rangle.$$

Tomando $v = u(t-\varepsilon)$ em (2.21), concluímos de maneira análoga que

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t)) \leq \left\langle h, \frac{du}{dt}(t) \right\rangle.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t)) = \left\langle h, \frac{du}{dt}(t) \right\rangle, \ \forall\, h \in Au(t).$$

□

Teorema 2.6. *Seja $f \in L^2(0,T;H)$, então toda solução fraca da equação $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ é uma solução forte e $\sqrt{t}\frac{du}{dt}(t) \in L^2(0,T;H)$, e são válidas as seguintes estimativas:*

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 t dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T |f(t)|^2 t dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^T |f(t)|dt + \frac{1}{\sqrt{2}} dist(u(0),K), \tag{2.22}$$

e

$$\left(\int_\delta^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\int_0^\delta |f(t)|dt + \frac{1}{\sqrt{2\delta}} dist(u(0),K), \ \forall\, \delta \in]0,T[. \tag{2.23}$$

Além disso, a função $t \mapsto \phi(u(t))$ pertence a $L^1(0,T)$ e é absolutamente contínua em $[\delta,T]$ para todo $\delta \in]0,T[$ com $\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + \frac{d}{dt}\phi(u) = \left\langle f, \frac{du}{dt}\right\rangle$. q.t.p. em $]0,T[$. E se $u(0) \in D(\phi)$, então $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$, com

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right| dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2(0,T;H)} + (\phi(u(o)))^{\frac{1}{2}},$$

e a função $t \mapsto \phi(u(t))$ é absolutamente contínua em $[0,T]$.

Demonstração. Inicialmente suponhamos que $u(0) \in D(\phi)$. Consideremos $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ e o operador B definido em $\mathcal{H}$, dado por, $Bu = \frac{du}{dt}$ com $D(B) = \{u \in W^{1,2}(0,T;H);\ u(0) = u_0\}$. Definido dessa forma o operador B é maximal monótono De fato, sejam $u, v \in D(B)$, como

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}|u(t)-v(t)|^2 = \left\langle \frac{du}{dt}(t) - \frac{dv}{dt}(t), u(t)-v(t)\right\rangle, \text{q.t.p. em }]0,T[.$$

Integrando de 0 a T temos,

$$0 \leq |u(T)-v(T)|^2 = \left\langle \frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt}, u-v \right\rangle_{L^2(0,T;H)}.$$

Logo, B é monótono.

Para provarmos que B é maximal, pela Proposição 1.2 é suficiente mostrarmos que $Im(B+I) = \mathcal{H}$, isto é, dada $f \in L^2(0,T;H)$ queremos encontrar uma solução para

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + u \ni f \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Como o operador identidade é maximal monótono e limitado em conjunto compactos, segue da Proposição 2.3 que a solução u de (2.24) pertence a $W^{1,2}(0,T;H)$.

Procedendo de maneira análoga a resolução de equações diferenciais de primeira ordem mostramos que o resolvente de B, J_λ, é dado por

$$J_\lambda u(t) = u_0 e^{-t/\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t u(s)e^{\frac{s-t}{\lambda}}ds.$$

Consideremos, a função $\Phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \phi(u(t))dt, \phi(u) \in L^1(0,T) \\ \qquad \infty, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sabemos pelo Exemplo 1.5, que Φ é convexa, s.c.i. e própria. Como Φ é convexa e s.c.i. temos que

$$\phi(J_\lambda u(t)) \leq e^{-\frac{t}{\lambda}}\phi(u_0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \phi(u(s))e^{\frac{s-t}{\lambda}}ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Phi(J_\lambda u(t)) &= \int_0^T \phi(J_\lambda u(t))dt \leq \int_0^T e^{-\frac{t}{\lambda}}\phi(u_0)dt + \int_0^T \frac{1}{\lambda}\left(\int_0^t \phi(u(s))e^{\frac{s-t}{\lambda}}ds\right)dt \\ &= \lambda(1-e^{\frac{-T}{\lambda}})\phi(u_0) + \frac{1}{\lambda}\int_0^T\int_s^T \phi(u(s))e^{\frac{s-t}{\lambda}}dtds \\ &= \lambda(1-e^{\frac{-T}{\lambda}})\phi(u_0) + \int_0^T \left(1-e^{\frac{s-T}{\lambda}}\right)\phi(u(s))ds \\ &\leq \lambda\phi(u_0) + \int_0^T \phi(u(s))ds = \lambda\phi(u_0) + \Phi(u). \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.13, temos que o operador $B + \Phi$ é maximal monótono de $\mathcal{H}$, com

$$\|Bu\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|((B+\partial\Phi)u)^0\|_{L^2(0,T;H)} + \sqrt{\phi(u_0)},\ \forall\, u \in D(B)\cap D(\partial\Phi).$$

Dessa forma, se $f \in \mathcal{H}$ e $f \in \dfrac{du}{dt} + \partial\phi(u)$ q.t.p em $]0,T[$, então

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H)} \leq \|f\|_{L^2(0,T;H)} + \sqrt{\phi(u_0)}.$$

Assim, concluímos que o operador $(B+\partial\Phi)^{-1}$ é limitado e pelo Teorema 1.3 que $B+\Phi$ é sobrejetivo em $\mathcal{H}$. Portanto, u é solução forte da equação $f \in \dfrac{du}{dt} + \partial\phi(u)$.

Agora suponhamos que $u_0 \in \overline{D(\phi)}$, seja $\{u_{0n}\} \subset D(\phi)$ tal que $u_{0n} \to u_0$. Consideremos $u_n \in C([0,T];H)$ solução forte de

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni f \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Segue de (2.12) que $u_n \to u$ uniformemente, e u é solução fraca de (2.1). Como $u_n \in W^{1,2}(0,T;H)$ segue do Lema 2.4

$$\frac{d}{dt}\phi(u_n) = \left\langle -\frac{du_n}{dt} + f, \frac{du_n}{dt}\right\rangle, \text{ q.t.p. em }]0,T[,$$

isto é,

$$\left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 + \frac{d}{dt}\phi(u_n) = \left\langle f, \frac{du_n}{dt}\right\rangle. \tag{2.25}$$

Multiplicando (2.25) por t e integrando em $]0,T[$, obtemos

$$T\phi(u_n(T)) - \int_0^T \phi(u_n)dt + \int_0^T \left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 tdt = \int_0^T \left\langle f, \frac{du_n}{dt}\right\rangle tdt.$$

Aplicando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, obtemos

$$\int_0^T \left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 tdt \leq \int_0^T \phi(u_n)dt + \left(\int_0^T |f|^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Completando quadrados na desigualdade anterior, obtemos

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du_n}{dt}\right|^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T \phi(u_n(t))dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T |f|^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.26}$$

Por outro lado,

$$\phi(v) - \phi(u_n(t)) \geq \left\langle f(t) - \frac{du_n}{dt}(t), v - u_n(t)\right\rangle, \text{ q.t.p. em }]0,T[.$$

Assim, se $v \in K$ temos

$$\phi(u_n(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t) - v|^2 \leq |f(t)||u_n(t) - v|.$$

Integrando em $]0,t[$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(|u_n(t)-v|^2+2\int_0^t \phi(u_n(s))ds\right) &\leq \frac{1}{2}|u_{0n}-v|^2+\int_0^t |f(s)||u_n(s)-v|ds \\
&\leq \frac{1}{2}|u_{0n}-v|^2+\int_0^t |f(s)|\left(|u_n(s)-v|^2+2\int_0^s \phi(u_n(\sigma))d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall temos,

$$\left(|u_n(s)-v|^2+2\int_0^t \phi(u_n(s))ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq |u_{0n}-v|+\int_0^t |f(s)|ds.$$

Assim,

$$\left(\int_0^t \phi(u_n(s))ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_{0n}-v|+\int_0^t |f(s)|ds\right). \tag{2.27}$$

Substituindo a desigualdade precedente em (2.26) e fazendo $n\to\infty$, concluímos

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T |f|^2 tdt\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_0-v|+\int_0^t |f(s)|ds\right).$$

Como a desigualdade anterior é valida para todo $v\in K$, temos que (2.22) é verdade.

Dado $\delta\in]0,T[$, pelo Teorema da Média existe $t_n\in]0,\delta[$ tal que

$$\phi(u_n(t_n))=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \phi(u_n(s))ds.$$

Segue de (2.27) que,

$$\phi(u_n(t_n))\leq \frac{1}{2\delta}\left(|u_{0n}-v|+\int_0^\delta |f(s)|ds\right)^2. \tag{2.28}$$

Integrando (2.25) em $]t_n,T[$ e usando o fato de $\phi\geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^T \left|\frac{du_n}{dt}(s)\right|^2 ds &\leq \phi(u_n(t_n))+\int_{t_n}^T |f|\left|\frac{du}{dt}\right|dt \\
&\leq \phi(u_n(t_n))+\left(\int_{t_n}^T |f|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_n}^T \left|\frac{du}{dt}\right|dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Completando quadrados,

$$\left(\int_{t_n}^{T}\left|\frac{du_n}{dt}(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\phi(u_n(t_n))} + \|f\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Substituindo (2.28) na desigualdade precedente, obtemos

$$\left(\int_{t_n}^{T}\left|\frac{du_n}{dt}(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\left(|u_{0n}-v| + \int_0^{\delta}|f(s)|ds\right) + \|f\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Como, $\delta \geq t_n$ temos que

$$\left(\int_{\delta}^{T}\left|\frac{du_n}{dt}(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{t_n}^{T}\left|\frac{du_n}{dt}(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, fazendo $n \to \infty$ temos,

$$\left(\int_{\delta}^{T}\left|\frac{du_n}{dt}(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2(0,T;H)} + \frac{1}{\sqrt{2\delta}}\left(|u_0-v| + \int_0^{\delta}|f(s)|ds\right), \forall\, v \in K.$$

□

Capítulo 3

Semigrupos e Atratores Globais

Neste capítulo estudamos propriedades básicas de semigrupos e veremos um críterio que garante a existência de atratores globais para um semigrupo contínuo. A principal referência deste capítulo é Hale [9].

Definição 3.1. *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma família de funções $\{T(t),\ t \geq 0\}$, $T(t) : X \to X$ é um semigrupo se para todo $x \in X$:*

(i) T(0)x=x;

(ii) $T(t+s)x = T(t)T(s)x$, para todos $t,\ s \geq 0$.

Se, além disso $T(t)x$ é contínuo em t e em x dizemos que o semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo contínuo.

Definição 3.2. *Seja $\{T(t),\ t \geq 0\}$. Para todo $x \in X$ definimos*

(i) A órbita positiva $\gamma^+(x)$ através de x é definida por

$$\gamma^+(x) = \{T(t)x; t \geq 0\}.$$

(ii) Uma órbita negativa através de x é uma função $\phi :]-\infty, 0] \to X$, tal que $\phi(0) = x$ e $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$ para todo $s < 0$ e $0 \leq t \leq -s$.

(iii) Uma órbita completa através de x é uma função $\phi : \mathbb{R} \to X$, tal que $\phi(0) = x$ e $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para todos $s \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.

(iv) A órbita negativa $\gamma^-(x)$ através de x é definida por

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \geq 0} H(t, x),$$

onde

$$H(t,x) = \{y \in X;\ \textit{existe uma órbita negativa } \phi :]-\infty, 0] \to X,\ \ \textit{tal que } \phi(0) = x \textit{ e } \phi(-t) = y\}.$$

(v) A órbita completa $\gamma(x) = \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Seja $B \subset X$, definimos a órbita positiva, negativa e completa de B respectivamente por

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x), \ \ \gamma^-(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x), \ \ \gamma(B) = \bigcup_{x \in B} \gamma(x).$$

Para todo $B \subset X$, definimos o ω-limite, $\omega(B)$, e o α-limite de B, $\alpha(B)$, por

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \ \ \alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t,B)}.$$

Lema 3.1. *Sejam $B \subset X$ e $y \in X$. Então $y \in \omega(B)$ se, e somente se, existem $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{y_n\} \subset B$ tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)y_n \to y$, quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Definimos o conjunto $B_s = \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$. É claro que B_s é fechado e $B_s \subset B_t$ sempre que $t \leq s$.

Suponhamos que existam $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{y_n\} \subset B$ tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)y_n \to y$, quando $n \to \infty$. Então $y \in B_{t_k}$ para todo k, pois $\{T(t_n)y_n, n \geq k\} \subset B_{t_k}$. Como, $t_n \to \infty$ concluímos que $y \in B_t$ para todo $t \geq 0$. Portanto, $y \in \omega(B)$.

Se $y \in \omega(B)$, então $y \in B_s$ para todo $s \geq 0$. Assim, para $n = 1$ consideremos $t_1 > 0$ e $y_1 \in B$ tais que, $T(t_1)y_1 \in B_1$ e $d(T(t_1)y_1, y) < 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideremos $t_n > 0$ e $y_n \in B$ tais que $T(t_n)y_n \in B_{t_{n-1}+1}$ e $d(T(t_n)y_n, y) < \frac{1}{n}$. Claramente $t_n \to \infty$ e $T(t_n)y_n \to y$, quando $n \to \infty$. □

Um conjunto $B \subset X$ atrai um conjunto $C \subset X$ sob $T(t)$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que $T(t)C \subset O_\varepsilon(B)$, $t \geq t_0$, onde $O_\varepsilon(B) = \bigcup_{x \in B} B_\varepsilon(x)$ e $B_\varepsilon(x)$ é a bola com centro em x e raio ε.

É possível mostrar que o conjunto B é atrator para C se, e somente se, $\delta(T(t)C, B) \to 0$, quando $t \to \infty$, onde

$$\delta(Y,Z) = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in Z} d(y,x).$$

Definição 3.3. *Um conjunto $C \subset X$ é invariante sob $T(t)$ se, $T(t)C = C$ para todo $t \geq 0$.*

Uma classe importante de conjuntos invariantes são os conjuntos ω-limites e o α-limites,

Lema 3.2. *Para todo conjunto $B \subset X$, se $\omega(B)$ é compacto e $\omega(B)$ atrai B. Então, $\omega(B)$ é invariante. Além disso, se B é conexo então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Seja $y \in \omega(B)$, segue do Lema 3.1 que existem $y_n \in B$ e $t_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)y_n \to y$ quando $n \to \infty$. Logo,

$$T(t + t_n)y_n = T(t)T(t_n)y_n \to T(t)y, \ n \to \infty.$$

Assim, concluímos pelo Lema 3.1 que $T(t)y \in \omega(B)$, para todo $t \geq 0$. Portanto $T(t)B \subset \omega(B)$.

Para mostramos que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$, consideremos $y \in \omega(B)$. Pelo Lema 3.1, $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)y_n$. Seja $H_t = \{T(t_n - t)y_n; t_n \geq t\}$. Notemos que $\omega(B)$ atrai H_t, pois $\omega(B)$ atrai B. Logo, existe uma sequência $\{z_{n_j}\} \subset \omega(B)$ e $z \in \omega(B)$ tais que $z_{n_j} \to z$. Dessa forma, existe uma subsequência $\{T(t_{n_j} - t)x_{n_j}\} \subset H_t$ convergindo para z. Como $T(t)$ é uma aplicação contínua temos que $T(t)z = y$.

Portanto, $T(t)\omega(B) = \omega(B)$ e assim $\omega(B)$ é invariante.

Suponhamos por absurdo que $\omega(B)$ não é conexo, então $\omega(B) = K_1 \cup K_2$, onde $K_1 \neq \emptyset$ e $K_2 \neq \emptyset$ são subconjuntos compactos de X e $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, que distam uma distância $\varepsilon > 0$. Como, $\omega(B)$ atrai B existe um $t_0 \geq 0$ tal que ou $T(t)B \subset O_{\frac{\varepsilon}{4}}(K_1)$ ou $T(t)B \subset O_{\frac{\varepsilon}{4}}(K_2)$, para $t \geq t_0$, pois sendo B um conjunto conexo $T(t)B$ é conexo para todo $t \geq 0$, já que $T(t)$ é contínuo. Se $T(t)B \subset O_{\frac{\varepsilon}{4}}(K_1)$ então dado qualquer $y \in K_2$ não existem $y_n \in B$ e $t_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $T(t_n)y_n \to y_2$, absurdo pois $\omega(B) = K_1 \cup K_2$ atrai B. De forma análoga, concluímos que o outro caso também é um absurdo. $\square$

Observamos que de maneira análoga podemos demonstrar o seguinte lema:

Lema 3.3. *Se $\alpha(B)$ é compacto, $\gamma^-(B) = \bigcup_{t\geq 0} H(t,B)$ e $\delta(H(t,B), \alpha(B)) \to 0$ quando $t \to \infty$. Então, $\alpha(B)$ é invariante. Além disso, se $H(t,B)$ é conexo para todo $t \geq 0$ então $\alpha(B)$ também é conexo.*

Lema 3.4. *Seja B um conjunto não vazio, tal que $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto. Então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante, e $\omega(B)$ atrai B.*

Demonstração. Mostremos que $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B e pelo Lema 3.2 concluímos $\omega(B)$ é invariante.

Desde que B é não vazio então $\gamma^+(B) \neq \emptyset$. Sejam $x_n \in B$ e $t_n \geq 0$ tal que $t_n \to \infty$. Como $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto existem $x \in X$ e $T(t_{n_j})x_{n_j}$ tais que $T(t_n)x_n \to x$. Pelo Lema 3.1, $x \in \omega(B)$.

Consideremos agora, $\{x_n\} \subset \omega(B) \subset \overline{\gamma^+(B)}$ limitada. Sem perda de generalidade, podemos considerar que $x_n \to x \in \overline{\gamma^+(B)}$. Como, para cada x_n existe uma sequência $T(t_{nm})y_{nm}$ tal que $T(t_{nm})y_{nm} \to x_n$, quando $m \to \infty$, então considerando um argumento de diagonal, temos uma sequência $T(t_{nm_n})y_{nm_n} \to x$ quando $n \to \infty$. Logo, $x \in \omega(B)$.

Agora, suponhamos por absurdo que $\omega(B)$ não atrai B. Então, existe ε_0 e existem $t_n > 0$ e $y_n \in B$ tais que

$$d(T(t_n)y_n, \omega(B)) \geq \varepsilon_0.$$

Como $\{T(t_n)y_n\} \subset \overline{\gamma^+(B)}$ e $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, existem $y \in \overline{\gamma^+(B)}$ e $T(t_{n_j})y_{n_j}$ tais que $T(t_{n_j})y_{n_j} \to y$. Pelo Lema 3.1, $y \in \omega(B)$. Logo, $y \in \omega(B)$, absurdo. Portanto, $\omega(B)$ atrai B. $\square$

Definição 3.4. *Um semigrupo contínuo $\{T(t), t \geq 0\}$ é dito assintoticamente suave, se para qualquer conjunto $B \subset X$ não vazio, fechado, limitado com $T(t)B \subset B$ existe um compacto $J \subset B$ tal que J atrai B.*

Lema 3.5. *Um contínuo semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ é assintoticamente suave se, e somente se, para qualquer conjunto $B \subset X$ não vazio, fechado, limitado existe um conjunto compacto $J = J(B) \subset X$ tal que J atrai o conjunto*

$$L(B) = \{x \in B; T(t)B \in B, \forall t \geq 0\}.$$

Demonstração. Inicialmente suponhamos que $T(t)$ seja assintoticamente suave e $B \subset X$ não vazio, fechado e limitado. Seja $L = L(B)$ então $T(t)L \subset L$, para todo $t \geq 0$ e $T(t)\overline{L} \subset \overline{L}$ existe $J \subset \overline{L}$ tal que J atrai $\overline{L}$ e consequentemente J atrai L.

Reciprocamente, seja $B \subset X$ não vazio, fechado, limitado $T(t)B \subset B$ então $L(B) = B$. Logo, existe um conjunto compacto J não vazio que atrai B. Logo, $T(t)$ é assintoticamente suave. $\square$

Lema 3.6. *Se $T(t)$ é assintoticamente suave e $B \subset X$ não vazio, limitado tal que $\gamma^+(B)$ é limitado. Então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, atrai B e é invariante. Se além disso, B é conexo então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Novamente mostremos que $\omega(B)$ satisfaz as hipóteses do Lema 3.2. Observamos que por definição $T(t)(\gamma^+(B)) \subset c$, para todo $t \geq 0$. Assim $\gamma^+(B)$ satisfaz as hipóteses do Lema 3.5 e como $T(t)$ é assintoticamente suave, existe um conjunto compacto J tal que J atrai $\overline{\gamma^+(B)}$. Assim, J atrai B. Consideremos $\varepsilon_j > 0$ com $\varepsilon_j \to 0$, como J atrai B, existe t_j tal que $T(t)B \subset O_{\varepsilon_j}(J)$ quando $t \geq t_j$, com $t_j \leq t_{j+1}$.

Assim, se $y \in \omega(B)$ então, pelo Lema 3.1, existem $y_n \in B$ e $t_n > 0$ tais que $t_n \to \infty$ e $T(t_n)y_n \to y$. Como $T(t_n)y_n \in O_{\varepsilon_j}(J)$ para $t_n \geq t_j$ temos que $y \in J$. Logo, $\omega(B) \subset J$. Assim, $\omega(B)$ é compacto, pois é um subconjunto fechado de um conjunto compacto em um espaço métrico.

Suponhamos por absurdo que $\omega(B)$ não atrai B. Então, existe $\varepsilon > 0$ existem $t_k \to \infty$, $y_k \in B$ tais que $T(t_k)y_k \notin O_\varepsilon(B)$. Como J atrai B, temos que $T(t_k)y_k \in O_\varepsilon(J)$. Logo, existe $z \in J$ tal que $T(t_k)y_k \to z$. Mas pelo Lema 3.1 temos que $z \in \omega(B)$, absurdo. Portanto, $\omega(B)$ atrai B.

Desde que provamos que $T(t)$ e B satisfazem as hipóteses do Lema 3.2 temos que $\omega(B)$ é invariante.

$\square$

Definição 3.5. *Um semigrupo $(T(t), t \geq 0)$ é dito condicionalmente completamente contínuo para $t \geq t_1$ se para cada $t \geq t_1$ e cada conjunto limitado $B \subset X$ para o qual $\{T(s)B;\ 0 \leq s \leq t\}$ é limitado o conjunto $T(t)B$ é pré-compacto.*

Um semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ é completamente contínuo se é condicionamente completamente contínuo para cada $t \geq 0$ e o conjunto $\{T(s)B;\ 0 \leq s \leq t\}$ é limitado.

Conforme [9], todo semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ condicionamente completamente contínuo para $t \geq t_0$ é assintoticamente suave.

Definição 3.6. *Seja $T(t)$ um semigrupo contínuo para algum $r \geq 0$ e $J \subset X$ um conjunto invariante. O conjunto J é estável se para qualquer vizinhança V de J existe um vizinhança U de J tal que $T(t)U \subset V$, para todo $t \geq 0$.*

Lema 3.7. *Um conjunto J é estável se, e somente se, para toda vizinhança V de J existe uma vizinhança V' de J tal que $T(t)V' \subset V'$.*

Demonstração. Se para toda vizinhança V de J existe uma vizinhança U de J, tal que $T(t)U \subset V$ para todo $t \geq 0$. Consideremos $V' = \bigcup_{t \geq 0} T(t)U$, então $J \subset V' \subset V$ e $T(t)V' \subset V'$.

Reciprocamente, se para toda vizinhança V de J existe uma vizinhança $V' \subset V$ de J tal que $T(t)V' \subset V' \subset V$, para todo $t \geq 0$. Então J é estável. □

Definição 3.7. *(i) Dizemos que um conjunto $J \subset X$ atrai localmente pontos, se existe uma vizinhança V de J tal que J atrai pontos de V, isto é,*

$$\lim_{t \to \infty} \delta(T(t)x, V) = 0,\ \forall\, x \in V.$$

(ii) Um conjunto $J \subset X$ é assintoticamente estável (a.e.) se é estável e atrai localmente pontos.

(iii) O conjunto J é uniformemente assintoticamente estável (u.a.e.) se é estável e existe V vizinhança de J tal que J atrai V.

Lema 3.8. *Se J é um conjunto compacto, invariante e estável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) J atrai localmente pontos.

(ii) Existe uma vizinhança V de J tal que $T(t)V \subset V$, para todo $t \geq 0$ e J atrai conjuntos compactos de V.

Demonstração. Inicialmente supomos que existe uma vizinhança V de J tal que J atrai pontos de V. Como J é compacto e estável, podemos assumir sem perda de generalidade que V é limitado e que $T(t)V \subset V$, para todo $t \geq 0$. Sejam U uma vizinhança aberta de J tal que $U \subset Int(V)$ e K um subconjunto compacto de V. Então para todo $x \in K$, existe um $t_0 = t_0(x, U)$ tal que $T(t)x \in U$, $t \geq t_0$. Pela continuidade de $T(t)$ existe uma vizinhança O_x tal que $T(t_0)O_x \subset U$. A família $\{O_x\}_{x \in K}$ é uma cobertura aberta de K. Logo, existem $x_1, \cdots, x_n$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$. Seja $T_0 = \max_{1 \leq i \leq n} t_0(x_i, U)$ e $V(K,U) = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$. Então,

$$T(t)V(K,U) \subset U, \ \forall\, t \geq T_0.$$

Agora, mostremos que J atrai K. Para isso, consideremos uma sequência $U_n \subset V$ de vizinhanças abertas tal que $U_1 \supset U_2 \supset U_3, \cdots$ tal que $\bigcap_{i=1} U_i = J$. Assim, $\omega(K) \subset J$, pois $T(t)V(K, U_n) \subset U_n$ para todo t.

Reciprocamente, se existe V tal que $T(t)V \subset V$ e J atrai compactos de V então J atrai o compacto $\{x\}$, para todo $x \in V$. □

Teorema 3.1. *Se $T(t)$ é assintoticamente suave e J um conjunto compacto, invariante que atrai localmente pontos, então são equivalentes*

(i) Existe uma vizinhança limitada V de J tal que $T(t)V \subset V$ e J atrai conjuntos compactos de V.

(ii) J é estável.

(iii) J é u.a.e.

Demonstração. (i)$\Longrightarrow$ (ii)

Suponhamos que exista uma vizinhança V de J satisfazendo (i) e que J não seja estável. Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que $O_\varepsilon(J) \subset V$ e para toda vizinhança $W \subset O_\varepsilon(J)$ existem $y \in W$ e $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $T(t_0)y \notin W$. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $W_n = O_{\frac{1}{n}}(J) \subset O_\varepsilon$, então existem $y_n \in W_n$ e $t_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $T(t)y_n \in W_n$ para $0 \leq t < t_n$, $T(t_n)y_n \notin W_n$ e $t_n \to \infty$. Como J é compacto existem $\{y_{n_j}\} \subset \{y_n\}$ e $y \in J$ tais que $y_{n_j} \to y$.

Fixado $s_0 > 0$, seja $K = \{y, y_{n_j}; t_{n_j} \geq s_0\} \subset V$ é compacto. Como J atrai subconjuntos compactos V, então J atrai K e $\omega(K) \subset J$. Assim, existe $z \in J$ tal que $T(t_{n_j} - s_0)y_{n_j} \to z$ quando $n_j \to \infty$.

Desde que J é invariante $T(s_0)z \in J$, mas por construção $T(s_0)z \notin O_\varepsilon(J)$. Portanto J é estável.

(ii)$\Longrightarrow$(i)

Suponhamos que J é estável. Desde que J atrai localmente pontos, pelo Lema 3.8 sabemos que existe um vizinhança V de J tal que $T(t)V \subset V$ e J atrai compactos de V.

Usaremos a equivalência entre (i) e (ii), para mostrarmos que (ii) implica (iii).

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

Suponhamos que J é estável. Desde que J atrai localmente pontos, pelo Lema 3.8 sabemos que existe um vizinhança V de J tal que $T(t)V \subset V$ e J atrai compactos de V, concluímos assim que (ii) implica (i) usaremos este fato para mostrarmos que (ii) implica (iii).

Fixada $U \subset V$ vizinhança de J. Pelo Lema 3.7 podemos assumir que $T(t)U \subset U$ para todo $t \geq 0$. Seja K um conjunto compacto de U, como J atrai K existe um $t_0 = t_0(K, U)$ tal que $T(t)K \subset U$ para

$t \geq t_0$. Desde que $T(t_0)$ é contínuo e K é compacto existe uma vizinhança K_1 tal que $T(t_0)K_1 \subset U$. Logo, $T(t)K_1 \subset U$ para $t \geq t_0$. Desde que $T(t)$ é assintoticamente suave existe um compacto H de U tal que H atrai U. Desde que J atrai H temos que J atrai U. Em particular J atrai K_1. Tomando $K = J$ existe uma vizinhança J_1 tal que J atrai J_1. Portanto, J é u.a.e.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Desde que J u.a.e. segue diretamente do Lema 3.8 que existe V satisfazendo (i). $\square$

Corolário 3.1. *Se $T(t)$, $t \geq 0$ é assintoticamente suave então um conjunto compacto e invariante J é u.a se, e somente se, J é u.a.s.*

Definição 3.8. *Um semigrupo $T(t)$, $t \geq 0$ é ponto dissipativo (compacto dissipativo) (limitado dissipativo) se existe um conjunto limitado $B \subset X$ tal que B atrai cada ponto de X (cada compacto de X) (cada conjunto limitado de X) sobre $T(t)$.*

Um conjunto compacto, invariante A é dito maximal compacto e invariante se todo compacto invariante pertence a A.

Definição 3.9. *Um conjunto invariante A é um atrator global se A é maximal compacto invariante e atrai cada conjunto limitado $B \subset X$.*

Notemos que se existe um atrator global A, dado um conjunto limitado $B \subset X$ então $\omega(B) \subset A$, pois A atrai B.

Lema 3.9. *Se X é um espaço de Banach e J é um conjunto maximal compacto invariante para um semigrupo $T(t)$ que atrai conjuntos compactos então J é conexo.*

Demonstração. Seja $K = \overline{\text{conv}(J)}$, como J é compacto temos que K é compacto, conexo e J atrai K. Suponhamos que J não seja conexo, então existem aberto U e V satisfazendo:

$$U \cap J \neq \emptyset, \;\; V \cap J \neq \emptyset, \;\; J \subset U \cup V, \;\; U \cap V = \emptyset.$$

Desde que J é invariante temos que $J \subset T(t)K$ para todo $t \geq 0$. Logo,

$$U \cap T(t)K \neq \emptyset, \;\; V \cap T(t)K \neq \emptyset, \forall t \geq 0.$$

Como $T(t)$ é contínuo, o conjunto $T(t)K$ é conexo para todo $t \geq 0$, existe $x_t \in T(t)K \backslash U \cup V$. Consideremos $t_n \geq 0$ tal que $t_n \to \infty$ e o conjunto $B = \{x_{t_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Como $B \subset K$ e J atrai K temos que B é um cojunto compacto e assim J á atrator para B Portanto, existe $x \in J$ tal que $x_{t_n} \to x$. Logo, $x \in U \cup V$. Absurdo pois, $U \cup V$ é aberto e $x_{t_n} \notin U \cup V$. $\square$

Os resultados as seguir estabelecem condições para que exista um atrator global para um semigrupo contínuo $T(t)$.

Teorema 3.2. *Seja $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, um semigrupo contínuo. Se existe um conjunto compacto $K \neq \emptyset$ que atrai subconjuntos compactos de X e $A = \bigcap_{t \geq 0} T(t)K$. Então:*

(i) A independe de K, e se X é um espaço de Banach então A é conexo.

(ii) A é maximal, compacto, invariante.

(iii) A é estável e atrai subconjuntos compactos.

Se $T(t)$ é assintoticamente suave, então:

(iv) Para qualquer conjunto compacto $J \subset X$ existe uma vizinhança J_1 de J tal que $\gamma^+(J_1)$ é limitado e A atrai J_1. Em particular A é u.a.e.

(v) Se $C \subset X$ é um subconjuto com $\gamma^+(C)$ limitado. Então A atrai C. Finalmente se $T(t)$ é bijetivo em A, então $T(t)$ restrito a A é um C^r grupo.

A demonstração do Teorema precedente pode ser encontrada [9, Teorema 2.4.2, p.17] para o caso discreto.

Lema 3.10. *Se o semigrupo $\{T(t),\ t \geq 0\}$ é assintoticamente suave e compacto dissipativo então existe um conjunto compacto e invariante $J \subset X$ que atrai subconjuntos compactos de X.*

A demonstração do lema anterior é análoga a demonstração do lema 2.4.4 p.18 de [**?**, Hale]

Observação 3.1. Notemos que nas condições do lema anterior, segue do Teorema 3.2 que existe um atrator global A para o semigrupo $T(t)$.

Lema 3.11. *Suponhamos que o semigrupo contínuo $\{T(t),\ t \geq 0\}$ seja assintoticamente suave e ponto dissipativo. Se as órbitas positivas de cada conjunto limitado são limitada, então $T(t)$ é limitado dissipativo.*

A demonstração do lema precedente é análoga a demonstração do lema 2.4.5 p.18 de [**?**, Hale]

Teorema 3.3. *Se existe um $t_1 \geq 0$ tal que o semigrupo contínuo $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$ é completamente contínuo para $t > t_1$ e ponto dissipativo. Então existe um atrator global A.*

Demonstração. Mostremos que se B é um conjunto limitado, então a órbita positiva de B é limitada e pelo Lema 3.11 é limitado dissipativo e portanto compacto dissipativo. Assim, $T(t)$ satisfaz as hipóteses do Lema 3.10 segue da Observação 3.1 que existe um atrator global A para o semigrupo $T(t)$.

Desde que $T(t)B$ é pré-compacto, pois $T(t)$ é completamente contínuo para $t \geq t_1$, é necessário mostrar que a órbita de conjuntos compactos é limitada. Seja $K \subset X$ um conjunto compacto. Desde que $T(t)$ é ponto dissipativo, existe um conjunto aberto limitado C tal que para todo $x \in K$ existe

$t_0 = t_0(x, C)$ tais que $T(t)x \in C$ para $t \geq t_0$, pois caso contrário podemos considerar o conjunto $\tilde{C} = O_\varepsilon(C)$, para $\varepsilon > 0$ fixo, como atrai C pontos de X temos que $\tilde{C}$ também atrai pontos de X. Como $T(t_0)$ é contínuo, para cada $x \in K$ existe uma vizinhança O_x de x tal que $T(t_0)O_x \subset C$. A família $\{O_x\}$ é uma cobertura aberta de K, como K é compacto existem $x_1, \cdots, x_n \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$. Seja $t_0(K) = \max_{0 \leq i \leq n} t_0(x_i, C)$, podemos assumir que $t_0(K) \geq t_1$.

Como $T(t)$ é completamente contínuo o conjunto $H = \overline{T(t_1)}$ é compacto e $\tilde{H} = \bigcup_{t \geq 0}^{t_0(H)} T(t)C$ é limitado. Assim, $T(t)C \subset \tilde{H}$ para $t \geq 0$. Logo $T(t)K \subset \tilde{H}$ para $t \geq t_0(K)$ portanto $\gamma^+(K)$ é limitado. □

No próximo capítulo usaremos o teorema precedente para mostrar que o semigrupo associado ao Problema 2 possui um atrator global.

Capítulo 4

Problemas Quasi-lineares

Neste capítulo analisamos a existência e o comportamento das soluções para o problema:

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + Bu = 0, \text{q.t.p. em }]0,\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Sob as seguintes hipóteses:

H.1 V é um espaço de Banach reflexivo e $(H, \langle , \rangle)$ um espaço de Hilbert tal que V é denso em H, satisfazendo:

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*,$$

com constantes de imersão η_1 e η_2, respectivamente.

H.2 $A : V \to V^*$ denota um operador monótono unívoco, não linear, hemicontínuo e coercivo.

H.3 $B : H \to H$ é um operador lipschitziano, com constante de Lipschitz l.

Sejam $D(A_H) = \{x \in V; Ax \in H\}$ e $A_H : D(A_H) \subset H \to H$, dado por, $A_H x = Ax$. Conforme o Exemplo 1.4 o operador A_H é um operador maximal monótono de H.

Neste capítulo denotaremos por $\overline{D(A_H)}$ o fecho de $D(A_H)$ na topologia usual do espaço H.

Teorema 4.1. *Sob as hipóteses H.1, H.2 e H.3, para todo $u_0 \in \overline{D(A_H)}$ existe uma única solução fraca u de (P). No caso em que $u_0 \in D(A_H)$, a função u é lipschitziana, e portanto solução forte de (P).*

A demonstração deste teorema é consequência imediata do seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Seja A_1 um operador maximal monótono, $w > 0$, $f \in L^1(0,T;H)$ e $u_0 \in \overline{D(A_1)}$. Então existe uma única solução fraca $u \in C([0,T];H)$ para o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_1 u - wu \ni f, \text{ q.t.p. em }]0,T[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Demonstração. Inicialmente mostremos que a solução é única, para isso suponhamos que u e v são soluções fracas de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_1 u \ni f + wu, \text{q.t.p. em }]0,T[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Fazendo, $f_1 = f + wu$ e $f_2 = f + wv$ em (2.12), obtemos

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(0) - v(0)| + \int_0^t w|u(\sigma) - v(\sigma)|d\sigma, \forall\, t \in [0,T].$$

Pela Desigualdade de Gronwall-Bellman, temos que

$$|u(t) - v(t)| = e^{wt}|u(0) - v(0)| = 0.$$

Logo, $u = v$.

Para demonstrarmos a existência, consideremos $u_0(t) = u_0$ e $g_n = f + wu_{n-1} \in L^1(0,T;H)$ então pelo Teorema 2.3 existe uma única solução fraca $u_n \in C([0,T];H)$ do problema

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n \ni g_n \\ u_n(0) = u_0. \end{cases}$$

Aplicando (2.12), obtemos

$$|u_2(t) - u_1(t)| \leq |u_2(0) - u_1(0)| + w\int_0^t |u_1(s) - u_1(s)|ds \leq wt \left\|u_1 - u_0\right\|_{L^\infty(0,T;H)}, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Aplicando novamente (2.12) e a desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} |u_3(t) - u_2(t)| &\leq |u_3(0) - u_2(0)| + w\int_0^t |u_2(s) - u_1(s)|ds \leq w^2 \int_0^t \left\|u_1 - u_0\right\|_{L^1(0,T;H)} ds \\ &= \frac{w^2t^2}{2}\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,T;H)}, \ \forall\, t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Procedendo desta maneira obtemos

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| &\leq \frac{(wt)^n}{n!}\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,T;H)} \\ &\leq \frac{(wT)^n}{n!}\|u_1 - u_0\|_{L^\infty(0,T;H)}, \ \forall\, t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Logo, existe $u \in C([0,T];H)$ tal que $u_n \to u$ uniformemente em $u \in C([0,T];H)$ e u satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_1 u - wu \ni f, \text{q.t.p. em }]0,T[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Como para cada solução fraca u_n, existem u_{nm} e f_{nm} tais que u_{nm} converge uniformemente para u_n em $C([0,T];H)$, f_{nm} converge para g_n em $L^1(0,T;H)$ e u_{nm} é solução forte de $\dfrac{du_{nm}}{dt} + Au_{nm} \ni f_n m$ q.t.p. em $[0,T]$. Assim considerando um argumento de diagonal existem u_{nm_n} e f_{nm_n} tais que $u_{nm_n} \to u$ uniformemente em $C([0,T];H)$ e $f_{nm_n} \to f$ em $L^1(0,T;H)$. Portanto, u é solução fraca do problema (P)**Demonstração Teorema 4.1** □

O operador $A_1 = A + B + lI$ é maximal monótono. De fato, o operador $B + lI$ é monótono e contínuo com $D(B + lI) = H$, segue da Proposição 1.3 que o operador $B + lI$ é maximal monótono. Como A é maximal monótono e $Int(D(B + lI)) \cap D(A_H) = D(A_H) \neq \emptyset$ então, pelo Corolário 1.8, A_1 é um operador maximal monótono.

Como, $A+B = A_1 - lI$ segue do Teorema 4.2 que, para todo $T > 0$ existe uma única $u \in C([0,T];H)$ solução fraca de

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + Bu = 0, \text{ q.t.p. em }]0,T[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Portanto, u é solução de (P).

Se $u_0 \in D(A_H)$, consideremos u solução de fraca do problema (P). Claramente u é solução fraca de

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = -Bu \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Então pela Teorema 2.4 u é diferenciável à direita de $t = 0$. Aplicando (2.12) para $f(t) = -Bu(t)$ e $g(t) = -B(t+h)$ obtemos

$$\begin{aligned} |u(t+h) - u(t)| &\leq |u(h) - u(0)| + \int_0^t |Bu(s+h) - Bu(s)| ds \\ &\leq |u(h) - u(0)| + l \int_0^t |u(s+h) - u(s)| ds. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gronwall-Bellman temos que

$$|u(t+h) - u(t)| \leq e^{lT} |u(h) - u(0)| \leq C(u_0, T)h.$$

Portanto u é lipschitziana.

□

Para cada $t \geq 0$, consideremos a aplicação $T(t) : \overline{D(A_H)} \to \overline{D(A_H)}$, definida por $T(t)u_0 = u(t)$, onde u é a solução do problema (P) com condição inicial u_0. A familia $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo contínuo.

De fato, (i) e (ii) da definição de semigrupo são automaticamente satisfeitas pela definição de $T(t)$. Resta verificar a continuidade na variável u_0 pois, pelo Teorema 4.1 $T(\cdot)$ é contínua na variável t. Para isso, consideremos $u_0, v_0 \in D(A_H)$ e u, v soluções de (P) com condições iniciais u_0 e v_0, respectivamente. Dado $t_0 > 0$, segue da monotonicidade de A

$$\left\langle \frac{du}{dt}(t) - \frac{dv}{dt}(t), u(t) - v(t) \right\rangle \leq \langle -Bu(t) + Bv(t), u(t) - v(t) \rangle \text{ q.t.p em }]0, t_0[.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t) - v(t)|^2 \leq |Bu(t) - Bv(t)||u(t) - v(t)| \leq l|u(t) - v(t)|^2.$$

Integrando em $[0, s]$ obtemos

$$\frac{1}{2}|u(s) - v(s)|^2 \leq \frac{1}{2}|u(0) - v(0)|^2 + l\int_0^{t_0} |u(t) - v(t)|^2 dt.$$

Pela desigualdade de Gronwall-Bellman, concluímos que

$$\frac{1}{2}|u(s) - v(s)|^2 \leq \frac{1}{2}|u_0 - v_0|^2 e^{lt_0}.$$

A desigualdade acima é válida se $u_0, v_0 \in \overline{D(A)}$. Portanto o semigrupo $\{T(t) \geq 0\}$ é contínuo.

Afim de obtermos mais propriendades do semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$, é necessário que o operador A possua mais propriedades. Tais propriedades permitem demonstrar que o semigrupo $T(t)$ é compacto, limitado dissipativo e que $D(A_H)$ é denso na topologia usual de H.

H.4 Sejam $w_1,\ w_2 > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e $p \geq 2$ tais que para todo $v \in V$ sejam satisfeitas:

$$\langle Av, v \rangle_{V^*,V} \geq w_1\|v\|_V^p + c_1 \tag{4.1}$$

e

$$\|Av\|_{V^*} \leq w_2(1 + \|v\|_V^{p-1}). \tag{4.2}$$

Lema 4.1. *Se as hipóteses H.1, H.2 e H.4 são válidas, então $D(A_H)$ é denso em H.*

Demonstração. Consideremos $u \in H$ e $\varepsilon \in (0, 1)$, desde que A_H é um operador maximal monótono existe $u_\varepsilon \in H$ tal que

$$u_\varepsilon + \varepsilon A_H u_\varepsilon = u.$$

Mostremos que $u_\varepsilon \to u$, quando $\varepsilon \to 0$. Calculando o produto interno da igualdade anterior por u_ε obtemos,

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \langle A_H u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle_H = \langle u, u_\varepsilon\rangle_H.$$

Substituindo (4.1) na igualdade precedente, temos que

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon\Big(w_1\|u_\varepsilon\|_V^p + c_1\Big) \leq \langle u, u_\varepsilon\rangle.$$

Logo,

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \varepsilon w_1\|u_\varepsilon\|_V^p \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H + \varepsilon|c_1|. \tag{4.3}$$

Assim,

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 \leq \|u\|_H\|u_\varepsilon\|_H + \varepsilon|c_1|.$$

Completando quadrados obtemos

$$\|u_\varepsilon\|_H \leq \|u\|_H + \sqrt{\varepsilon|c_1|}. \tag{4.4}$$

Portanto, $\|u_\varepsilon\|_H$ é limitado por $\|u\|_H + \sqrt{|c_1|}$. Desde que, H é um espaço de Hilbert existem $\tilde{u} \in H$ e $\varepsilon_n > 0$ tais que $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \tilde{u}$ quando $\varepsilon_n \to 0$.

Mostremos agora que $\tilde{u} = u$. Por (4.3), temos que

$$\varepsilon\|u_\varepsilon\|_V^p \leq k, \ \forall\, \varepsilon \in (0,1),$$

onde $k = (\|u\|_H + \sqrt{|c_1|})\|u\|_H + |c_1|$. Por outro lado, aplicando (4.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u\|_{V^*} &= \varepsilon\|A_H u_\varepsilon\|_{V^*} = w_2\varepsilon(1 + \|u_\varepsilon\|_V^{p-1}) \\
&\leq w_2\varepsilon\left(1 + \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right) = w_2\left(\varepsilon + k^{\frac{p-1}{p}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}\right)
\end{aligned}$$

Logo, $u_\varepsilon \to u$ em V^*. Como $u_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{u}$ em H e $u_\varepsilon \to u$ em V^* temos que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ em H.

Segue de (4.4) que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_H \leq \|u\|_H.$$

Portanto, $u_\varepsilon \to u$ em H. $\square$

Lema 4.2. *Seja K uma função contínua em um espaço métrico (X,d) e W um subconjunto denso de*

X. Então são equivalentes:

(i) Para cada $x_0 \in X$ e $r > 0$, $K(B_r(x_0) \cap W)$ é pré-compacta em X.

(ii) Para cada conjunto limitado J, $K(J)$ é pré-compacta em X.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que a condição (i) seja verdadeira e consideremos J um conjunto limitado de X. Sejam $d(J)$ o diâmetro de J e $x_0 \in J$, considerando $r = d(J) + 1$ então $J \subset B_r(x_0)$. Como W é um conjunto denso temos $J \subset \overline{B_r(x_0) \cap W}$ pela continuidade de K segue que

$$K(J) \subset K(\overline{B_r(x_0) \cap W}) \subset \overline{K(B_r(x_0) \cap W)}.$$

Por hipótese, $\overline{K(B_r(x_0) \cap W)}$ é compacto. Assim, $\overline{K(J)}$ também é compacto, pois é um subconjunto fechado de um conjunto compacto em um espaço métrico.

Reciprocamente, se a imagem de todo conjunto limitado é pré-compacto. Então para toda $x_0 \in X$ e $r > 0$ o conjunto $J = B_r(x_0) \cap W$ é limitado e por hipótese, $K(J)$ é pré-compacto. □

Como consequência dos Lema 4.1 e 4.2 para mostrarmos que $T(t)$ é compacto na topologia de H, é suficiente considerarmos os conjuntos $B_H(r) \cap D(A_H)$, onde $B_H(r)$ é a bola de centro na origem e raio r.

Antes de prosseguirmos para verificação de que o semigrupo $T(t)$ é compacto necessitamos de um lema cuja demonstração pode ser encontrada em [3, p.140]

Lema 4.3. *Se as hipóteses H.1 a H.4 são válidas, então para todo $u_0 \in H$ e $f \in L^{p'}(0, t_0; V^*)$ existe uma única função u a qual é V^*-absolutamente contínua em $[0, t_0]$ e satisfaz*

$$u \in C(0, t_0; H) \cap L^{p'}(0, t_0; V), \ \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0, t_0; V^*)$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), \quad q.t.p. \ \text{em } t \in \,]0, t_0[\\ \qquad\qquad u(0) = u_0. \end{cases}$$

Lema 4.4. *Se as hipóteses H.1 a H.4 são satisfeitas e $p > 2$, então para todo $u_0 \in D(A_H)$ e $t_0 > 0$ temos*

$$\int_0^{t_0} \|u(s)\|_V^p ds \leq \mathcal{C}_1(|u_0|, t_0), \tag{4.5}$$

e

$$\int_0^{t_0} \left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{V^*}^{p'} ds \leq \mathcal{C}_2(|u_0|, t_0), \tag{4.6}$$

onde $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são funções localmente limitadas e p' é o conjungado de p.

Demonstração. Segundo o Teorema 4.1 existe u solução forte do problema (P) com valor inicial $u_0 \in D(A_H)$. Assim, como no Teorema 4.2 consideremos $u_0(t) = u_0$, então $u_0 \in C([0,t_0];H)$ para todo $t_0 > 0$. Consideremos também a função $f : [0,t_0] \to H$ definida por, $f(t) = B(u(t))$. Como u é contínua e B um operador globalmente Lipschitiz

$$f \in C([0,t_0];H) \subset L^{p'}(0,t_0;V^*)$$

e assim, segue do Lema 4.3 que a função u satisfaz:

$$u \in C(0,t_0;H) \cap L^{p'}(0,t_0;V), \ \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,t_0;V^*).$$

Passemos agora a demonstração de (4.5). Como u é solução de (P), então

$$\frac{du}{dt}(t) = -Au(t) - Bu(t), \quad \text{q.t.p. em }]0,t_0[. \tag{4.7}$$

Calculando o produto interno em ambos os lados de (4.7) por $u(t)$ e utilizando (4.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 &= -\langle Au(t), u(t)\rangle - \langle Bu(t), u(t)\rangle \\
&\leq -w_1\|u(t)\|_V^p - c_1 + (\|Bu(t) - B0\|_H + \|B0\|_H)\|u(t)\|_H \\
&\leq -w_1\|u(t)\|_V^p - c_1 + l\|u(t)\|_H^2 + \|B0\|_H\|u(t)\|_H \\
&\leq -w_1\|u(t)\|_V^p + \left(l + \frac{1}{2}\right)\|u(t)\|_H^2 + \frac{\|B0\|_H^2}{2} - c_1 \\
&\leq -w_1\|u(t)\|_V^p + \eta_1\left(l + \frac{1}{2}\right)\|u(t)\|_V^2 + \frac{\|B0\|_H^2}{2} - c_1 \\
&\leq (-w_1 + \frac{2}{p}\varepsilon^{p/2})\|u(t)\|_V^p + \frac{1}{(p/2)'}\left(\frac{\eta_1\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\varepsilon}\right)^{(p/2)'} + \frac{\|B0\|_H^2}{2} - c_1,
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Fazendo $\varepsilon = \left(\frac{w_1 p}{4}\right)^{2/p}$ e

$$k_1 = \frac{1}{(p/2)'}\left(\frac{\eta_1\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\varepsilon}\right)^{(p/2)'} + \frac{\|B0\|_H^2}{2} + |c_1|.$$

Obtemos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 \leq -\frac{w_1}{2}\|u\|_V^p + k_1, \tag{4.8}$$

Como u é absolutamente contínua em H, temos

$$\|u(t_0)\|_H^2 + w_1 \int_0^{t_0} \|u(s)\|_V^p ds \leq \|u_0\|_H^2 + 2k_1 t_0. \tag{4.9}$$

Assim,

$$\int_0^{t_0} \|u(s)\|_V^p ds \leq \mathcal{C}_1(\|u_0\|_H, t_0),$$

onde $\mathcal{C}_1(\|u(t)\|_H, t_0) = \dfrac{\|u_0\|_H^2 + k_1 t_0}{w_1}$.

Antes de prosseguimos para a obtenção de (4.6), notemos que decorre de (4.9)

$$\|u\|_{L^\infty(0,t_0;H)} \leq \mathcal{C}_3(\|u_0\|_H, t_0),$$

onde $\mathcal{C}_3(\|u_0\|_H, t_0) = \sqrt{\|u_0\|_H^2 + k_1 t_0}$.

Agora segue de (4.7)

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_{V^*}^{p'} &\leq 2^{p'-1}(\|Au(t)\|_{V^*}^{p'} + \|Bu(t)\|_{V^*}^{p'}) \\
&\leq 2^{p'-1}(w_2(1 + \|u(t)\|_V^{p-1})^{p'} + \eta_2^{p'}\|Bu(t)\|_H^{p'}) \\
&\leq 2^{p'-1}(w_2 2^{p'-1}(1 + \|u(t)\|_V^p) + 2^{p'-1}\eta_2^{p'}(l^{p'}\|u(t)\|_H^{p'} + \|B0\|_H)) \\
&\leq k_2(1 + \|u(t)\|_V^p + \|u(t)\|_H^{p'}),
\end{aligned}$$

onde $k_2 = 2^{2p'-2}\max\{w_2 + \eta_2^{p'}|B(0)|, \eta_2 l^{p'}\}$. Integrando em $]0, t_0[$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_0} \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_{V^*}^{p'} dt &\leq k_2 t_0 + \int_0^{t_0} \|u(t)\|_V^p dt + \int_0^{t_0} \|u(t)\|_H^{p'} dt \\
&\leq k_2 t_0 + \mathcal{C}_1(\|u_0\|_H, t_0) + \mathcal{C}_3^{p'}(\|u_0\|_H, t_0) =: \mathcal{C}_2(\|u_0\|_H, t_0).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.5. *Seja $\{T(t), t \geq 0\}$ o semigrupo associado a (P) em $\overline{D(A_H)}$. Supondo que H.1, (4.5) e (4.6) sejam válidas para todo $t_0 > 0$, $p > 1$ e que a imersão de V em H é compacta. Então, $T(t) : \overline{D(A_H)} \to \overline{D(A_H)}$ é compacta para cada $t > 0$.*

Demonstração. Sejam $r > 0$ e $t_0 > 0$. Consideremos $J = B_H(r) \cap D(A_H)$ e

$$\tilde{J} = \{T(t)u_0; u_0 \in J,\ t \in [0, t_0]\}.$$

Pelo Teorema 4.1 temos $\tilde{J} \subset C([0,t_0];H)$. Consideremos

$$W = \left\{ v \in L^p(0,t_0;V);\ \frac{dv}{dt} \in L^{p'}(0,t_0;V^*) \right\},$$

munido com, a norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^p(0,t_0;V)} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^p(0,t_0;V^*)}.$$

Claramente $\|\cdot\|_W$ define uma norma em W. Mostremos agora que W munido com essa norma é completo. Dado $\{v_n\} \subset W$ uma sequência de Cauchy, então existem $v \in L^p(0,t_0;V)$ e $v' \in L^{p'}(0,t_0;V^*)$ tais que $v_n \to v$ em $L^p(0,t_0;V)$ e $\dfrac{dv_n}{dt} \to v'$ em $L^{p'}(0,t_0;V^*)$. É facil ver que $\dfrac{dv}{dt} = v'$, assim $v \in W$.

Conforme [11, Teorema 5.1, p. 58], $W \hookrightarrow L^p(0,t_0;H)$ compactamente. Segue de (4.5) e (4.6) que $\tilde{J}$ é limitado em W, logo, $\tilde{J}$ é pré-compacto em $L^p(0,t_0;H)$.

Consideremos $\{u_n\} \subset J$, então $\{T(\cdot)u_n\} \subset W$. Assim existe $\{T(\cdot)u_{n_k}\} \subset \{T(\cdot)u_n\}$ e $v \in L^p(0,t_0;H)$ tal que

$$\int_0^{t_0} \|T(s)u_{n_k} - v(s)\|_H^p ds \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Logo, existe uma subsequência $\{T(\cdot)u_{n_{k_j}}\} \subset \{T(\cdot)u_{n_k}\}$ tal que

$$\|T(s)u_{n_{k_j}} - v(s)\|_H \to 0, \text{ q.t.p em }]0,t_0[.$$

Dessa forma, para todo $t \in]0,t_0[$ existe $t_1 \in]0,t[$ tal que

$$T(t_1)u_{n_{k_j}} \to v(t_1) \in H, \text{ quando } j \to \infty.$$

Logo,

$$T(t)u_{n_{k_j}} = T(t-t_1)T(t_1)u_{n_{k_j}} \to T(t-t_1)v(t_1) \in H.$$

Como $t_0 > 0$ é qualquer, seque que $T(t)$ é um semigrupo compacto. $\square$

Notemos que se as hipótesses $H.1$ a $H.3$ são válidas, (4.1), (4.6) são válidas $p > 2$ e V é imerso compactamente em H, então o semigrupo $T(t)$ é completamente contínuo em $\overline{D(A)}$. Pois nessas condições, dado $t_0 \geq 0$ e $W \subset D(A_H)$ limitado, segue da desigualdade (4.9) que o conjunto $\{T(t)W, t \in [0,t_0]\}$ é limitado e pelo Lema 4.5 $T(t_0)W$ é pré-compacto.

Para aplicarmos o Teorema 3.3, resta mostrarmos que o semigrupo $T(t)$ é ponto dissipativo. Mostremos que o semigrupo $\{T(t), t \geq 0\}$ é limitado dissipativo, para isso consideremos o lema a seguir cuja demonstração pode ser encontra em [15, p.168].

Lema 4.6. *Seja* $y : [0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ *uma função absolutamente contínua satisfazendo:*

$$y' + \beta y^j \leq a,$$

onde $j > 1$, $\beta > 1$ *e* $a \geq 0$. *Então para todo* $t \geq 0$ *temos*

$$y(t) \leq \left(\frac{a}{\beta}\right)^{\frac{1}{j}} + (\beta(j-1)t)^{\frac{-1}{j-1}}.$$

Lema 4.7. *Suponhamos que H.1 a H.3 e* (4.5) *são válidas e* $p > 2$, *Então o semigrupo* $\{T(t)\}$ *associado a (P) é limitado dissipativo em* $cl_H(D(A_H))$.

Demonstração. Consideremos $u_0 \in D(A_H)$ e u a solução de (P) com condição inicial u_0. Por (4.8) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 &\leq -\frac{w_1}{2}\|u\|_V^p + k_1 \\ &\leq -\frac{w_1}{2}\eta_1^{-p}\|u(t)\|_H^p + k_1. \end{aligned}$$

Fazendo $y(t) = \|u(t)\|_H^2$, temos que y satisfaz a seguinte inequação diferencial

$$y'(t) \leq -w_1 l^{-p} y^{p/2}(t) + 2k_1.$$

Pelo Lema 4.6 segue que

$$y(t) = \|u(t)\|_H^2 \leq \left(\frac{2k_1}{w_1 l^{-p}}\right)^{2/p} + \left(w_1\left(\frac{p}{2}-1\right)t\right)^{\dfrac{-2}{p-2}}.$$

Então, para todo

$$r \geq \left(\frac{2k_1}{w_1 l^{-p}}\right)^{2/p},$$

concluímos que o conjunto $\{u_0 \in \overline{D(A_H)}; \|u_0\|_H \leq r\}$ atrai conjuntos limitados de $\overline{D(A_H)}$. Portanto $\{T(t)\}$ é um semigrupo limitado dissipativo. □

Teorema 4.3. *Se H.1, H.2, H.3,* (4.1) *e* (4.6) *são satisfeitas para* $p > 2$ *e* $V \hookrightarrow H$ *é compacta. Então o semigrupo* $\{T(t)\}$ *associado a* (P) *tem um atrator global em* $\overline{D(A_H)}$.

Demonstração. Já sabemos que o semigrupo $T(t)$ é completamente contínuo, pelo Lema anterior o semigrupo é ponto dissipativo. Segue do Teorema 3.3 que existe um atrator global para $T(t)$. □

Agora iremos aplicar o Teorema 4.3 para mostrar a existência de atrator global para um problema quasi-linear.

Exemplo 4.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $H = L^2(\Omega)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalmente Lipschitz. Consideremos a equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - |u|^{\rho-1}u + f(u), \ t > 0, \ x \in \Omega \\ u = 0, \ x \in \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{4.10}$$

com $p > 2$ e $\rho > 1$.

Afim de mostramos que o problema acima tem um atrator global em $L^2(\Omega)$ descrevemos a formulação abstrata deste problema.

Consideremos $W_0^{1,p}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{1/p},$$

e $V = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\rho+1}(\Omega)$ munido com norma

$$\|v\|_V := \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}, \ \forall \ v \in V.$$

O espaço $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach. De fato, claramente $\|\cdot\|_V$ define uma norma em V. Seja $\{v_n\} \subset V$ uma sequência de Cauchy, então existem $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v' \in L^{\rho+1}(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ e $v_n \to v'$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^{\rho+1}(\Omega)$, respectivamente. Como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H$ e $L^{\rho+1}(\Omega) \hookrightarrow H$, pois $|\Omega| < \infty$, temos que $v' = v$.

Ademais, conforme a caracterização de V^* dada em [10] o espaço V é reflexivo.

Além disso, $V \subset H \subset V^*$, com imersões contínuas e V é denso em H. De fato, como $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^{\rho+1}(\Omega)$ são imersos continuamente em H, pois $|\Omega| < \infty$. Pela definição de $\|.\|_V$ temos que V é imerso continuamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^{\rho+1}(\Omega)$. Logo, $V \hookrightarrow H$.

Para verificarmos que $H \subset V^*$ é contínua, observamos que se $u \in H$ e $v \in V$, segue da desigualdade de Hölder

$$\left|\int_\Omega uv dx\right| \leq \|u\|_H \|v\|_H \leq c_1 \|u\|_H \|v\|_V,$$

onde c_1 é a constante de imersão de V em H. Portanto, $H \hookrightarrow V^*$.

Desde que Ω é um aberto de fronteira suave, segue do Teorema de Rellich-Kondrachov (Ver [1, p.168]) que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é imerso compactamente em H. Como a composição de uma imersão contínua com uma imersão compacta é uma imersão compacta temos que V está imerso compactamente em H. Para mostramos que V é denso em H, lembramos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em H, e como $C_0^\infty(\Omega) \subset V$.

concluímos que V é denso em H.

Seja $A : V \to V^*$ definido por

$$\langle Au, v\rangle_{V^*,V} = -\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) v dx + \int_\Omega |u|^{\rho-1} uv dx.$$

Pelo teorema da divergência temos que

$$\langle Au, v\rangle_{V^*,V} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{\rho-1} uv dx.$$

Afirmação 4.1. O operador A é monótono, coercivo e hemicontínuo.

De fato, para mostrarmos que A é monótono consideremos a desigualdade de Tartar cuja demonstração pode ser encontrada em [8, p.13]: Dados $a,\ b \in \mathbb{R}$ e $\gamma \geq 2$, existe $\gamma_0(n,\gamma) > 0$ tal que

$$(a|a|^{\gamma-2} - b|b|^{\gamma-2})(a-b) \geq \gamma_0(n,\gamma)|a-b|^\gamma,$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla u - \nabla v))\, dx + \int_\Omega \left(|u|^{\rho-1}u - |v|^{\rho-1}v\right)(u-v)\, dx \\
&\geq \gamma_0(n,p)\|u-v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \gamma_0(n,\rho+1)\|u-v\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, A é monótono.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle Au, u\rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u dx + \int_\Omega |u|^{\rho-1} uu dx \\
&= \frac{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)}}{\|u\|_V} \geq \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)^p} + \|u\|^\rho_{L^\rho(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $p-1 > 1$ e $\rho > 1$, concluímos pela desigualdade anterior que

$$\lim_{\|u\|_V \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_{V^*,V}}{\|u\|_V} = \infty.$$

Para mostrarmos que o operador que A é hemicontínuo, notemos que A pode ser escrito como

$$A(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(\nabla u)) + b(u),$$

onde $a_i(x) = |x|^{p-2}x_i$ e $b(x) = |x|^{\rho-1}x$. Como,

$$\nabla((1-t)u + tv) = (1-t)\nabla u + t\nabla v \to \nabla u,$$

$\dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x))$ e b são contínuas, o operador A é hemicontínuo.

É possivel mostrar que o operador A é a subdiferencial de uma função convexa $\phi : H \to \mathbb{R}$, definida por

$$\phi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \dfrac{1}{1+\rho}\displaystyle\int_\Omega |u|^{\rho+1}dx, u \in V \\ \infty, \text{ caso contrário }. \end{cases}$$

Consideremos também o operador $B : H \to H$, dado por, $Bu = -f(u)$. Como f é globalmente Lipschitz em $\mathbb{R}$, o operador B é globalmente Lipschitz em H.

Dessa maneira o problema (4.10) é reescrito como,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + Bu = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Assim o operador A_H é maximal monótono em H, com $C_0^\infty(\Omega) \subset D(A_H)$.

Mostremos agora que o operador A satisfaz (4.1). Suponhamos que $p \leq \rho + 1$, então

$$2^{p-1}\|v\|^p_{L^{\rho+1}(\Omega)} \leq \frac{p}{\rho+1}\|v\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + (2^{p-1})^{\frac{\rho+1-p}{\rho+1}}\frac{\rho+1}{\rho+1-p}.$$

Assim, se $k_1 = \max\left\{2^{p-1}, \dfrac{p}{\rho+1}\right\}$ e $k = (2^{p-1})^{\frac{\rho+1-p}{\rho+1}}\dfrac{\rho+1}{\rho+1-p}$, temos

$$\begin{aligned} \|u\|^p_V &\leq 2^{p-1}\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + 2^{p-1}\|v\|^p_{L^{\rho+1}(\Omega)} \\ &\leq k_1(\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)}) + k = k_1\langle Au, u\rangle_{V,V^*} + k. \end{aligned}$$

O cálculo anterior mostra que

$$\langle Au, u\rangle_{V,V^*} \geq \gamma_1\|u\|^\eta_V + \gamma_2,$$

onde $\eta = \min\{p, \rho+1\}$, e $\gamma_1 > 0$ $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ são constantes que dependem de η.

Para verificarmos que (4.6) é válida, consideremos $u_0 \in D(A_H)$, e u a solução forte de (4.11). Então,

$$\frac{du}{dt}(t) = -Au(t) - Bu(t), \text{ q.t.p em }]0, \infty[.$$

Calculando o produto interno por u em ambos os lados na igualdade acima temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 &= -\langle Au,u\rangle - \langle Bu,u\rangle \leq -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u dx - \int_\Omega |u|^{\rho-1}uudx + \|B(0)\|_H\|u\|_H + l\|u\|_H^2 \\
&\leq -\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \frac{\|B(0)\|_H^2}{2} + (l+1/2)\|u\|_H^2 \\
&\leq -\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + (l+1/2)c_2\|u\|^2_{L^{\rho+1}(\Omega)} + \frac{\|B(0)\|_H^2}{2} \\
&\leq -\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \left(1-\frac{2}{\rho+1}\right)\|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)} + c_3 \\
&\leq -\left(1-\frac{2}{\rho+1}\right)(\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)}) + \ c_3,
\end{aligned}
$$

onde c_2 é a constante de imersão de $L^{\rho+1}(\Omega)$ em H e $c_3 = \dfrac{\|B(0)\|_H^2}{2} + \dfrac{\rho-1}{\rho+1}((l+1/2)c_2)^{(\rho+1)/(\rho-1)}$. Fixando $t_0 > 0$, e integrando em $]0,t_0[$ obtemos

$$
\frac{1}{2}\|u(t_0)\|_H^2 + \left(1-\frac{2}{\rho+1}\right)\int_0^{t_0}\|u(t)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}dt + \int_0^{t_0}\|u(t)\|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega)}dt \leq c_3t_0 + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2. \tag{4.12}
$$

Por outro lado, para todos $v,\ w \in V$, com $v \neq 0$ temos

$$
\begin{aligned}
|\langle Aw,v\rangle_{V^*,V}| &\leq \left|\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla v dx\right| + \left|\int_\Omega |w|^{\rho-1}wvdx\right| \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla w|^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |w|^{\rho+1}dx\right)^{\rho/(\rho+1)}\left(\int_\Omega |v|^{\rho+1}dx\right)^{1/(\rho+1)} \\
&\leq (\|w\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|w\|^{\rho+1}_{L^\rho(\Omega)})\|v\|_V,
\end{aligned}
$$

dessa forma,

$$
\|Aw\|_{V^*} \leq \|w\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|w\|^{\rho+1}_{L^\rho(\Omega)},\ \forall\, w \in V.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V^*} &= \|-Au - Bu\|_{V^*} \leq \|Au\|_{V^*} + \|Bu\|_{V^*} \\
&\leq \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho+1}_{L^\rho(\Omega)} + c_1l\|u\|_H + \|B(0)\|_H \\
&\leq c(\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^{\rho+1}_{L^\rho(\Omega)} + 1),
\end{aligned}
$$

onde $c = \max\left\{\dfrac{\rho}{(\rho+1)}(c_1l)^{(\rho+1)/\rho} + \|B(0)\|_H, \dfrac{1}{\rho+1}\right\}$ e c_1 é a constante de imersão de H em V^*. Seja

$\eta' = \min\left\{\dfrac{p}{p-1}, \dfrac{\rho+1}{\rho}\right\}$, então

$$\int_0^{t_0} \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{V^*}^{\theta} dt \leq \tilde{c} \int_0^{t_0} \left(\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{(p-1)\theta} + \|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho\theta} + 1\right) dt < \infty.$$

Aplicando (4.12) na desigualdade acima, obtemos que a solução u de (4.10) satisfaz (4.6). Portanto as condições do Teorema 4.3 são satisfeitas e assim temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 4.4. *O problema (4.10) tem um atrator global em* $L^2(\Omega)$.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] BABIN, A. V. and VISHIK M. I. *Attractors of Evolution Equations*, North Holland, Amsterdam, 1992.

[3] BARBU, V. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations*, Noordhoff International Publish, 1976.

[4] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[5] BREZIS, H.*Operateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contraciones dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.

[6] CARVALHO, A. N., CHOLEWA, J.W., DLOTKO, T. *Global Attractors for Problems with Monotone Operators*, Bolletino U.M.I., (8),2-B, 1999, 693-706.

[7] CARVALHO, A. N. and GENTILE, C. B, *Asymptotic behaviour of non-linear parabolic equations with monotone principal part.* Journal of Mathematical Analysis and Applications v. 280, n.02, p. 252-272, 2003.

[8] DIBENEDETTO, E. *Degenerate Parabolic Equations*Springer-Verlag, New York, 1993.

[9] HALE, J. K. *Asymptotic Behavoir of Dissipative Systems*, AMS, Providence, R.I., 1988.

[10] GAJEWSKI, H., GRÖGER, K., ZACHARIAS, K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie-Verlag, Berlin, (1974).

[11] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[12] LIONS, J. L. and MAGENES, E. *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, Vol.1, Dunod, Paris, 1968.

[13] MINTY, G. *On a Monotonicity Method for the Solution of Nonlinear Equations in Banach Spaces.* USA: Proc. Nat. Acad. Sci., (1963).

[14] SIMSEN, J. *Global attractors for a $p(x)$-Laplacian parabolic problem*, Nonlinear Analisys. 73 (2010) n^{o}10, 3278-3283.

[15] TEMAN, R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer- Verlag, New York, 1988.

[16] YOSIDA, K. *Functional Analysis*, 4^o ed., Springer Verlag, 1974.