Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre transformações de Ribaucour e hipersuperfícies de Dupin em formas espaciais

por

Anyelle Nogueira de Souza

Brasília
2012

Resumo

Caracterizamos uma transformação de Ribaucour de uma hipersuperfície na esfera ou no espaço hiperbólico, através de uma transformação de Ribaucour de uma hipersuperfície no espaço euclidiano. Demonstramos um teorema de comutatividade da transformação de Ribaucour com a projeção estereográfica. Fornecemos condições necessárias e suficientes para que uma transformação de Ribaucour preserve a propriedade de ser hipersuperfície de Dupin, em formas espaciais, estendendo o resultado já conhecido no espaço euclidiano. Apresentamos um teorema semelhante sobre a comutatividade da transformação de Ribaucour com a projeção estereográfica, restrito às hipersuperfícies de Dupin. Aplicações da teoria fornecem novas famílias de hipersuperfícies de Dupin cujas curvaturas de Lie e de Möebius não são constantes.

Abstract

We characterize a Ribaucour transformation of a hypersurface of the unit sphere or of the hyperbolic space using a Ribaucour transformation of a hypersurface of the euclidean space. We prove that the Ribaucour transformation commutes with the stereographic projection. We give necessary and sufficient conditions for a Ribaucour transformation to preserve the property of being a Dupin hypersurface. Similarly, we prove that the Ribaucour transformation restricted to Dupin hypersurface commutes with the stereographic projection. Aplications of the theory provide new families of Dupin hypersurfaces whose Lie curvature and Möebius curvature are not constant.

Aos meus pais, Adenir
e Maria Marlene, com todo
amor e carinho.

Agradecimentos

Agradeço:

- A Deus pelo dom da vida e por todas as bênçãos que Ele tem derramado sobre mim.

- À minha orientadora, Keti Tenenblat, pela sua orientação na realização deste trabalho. Em especial pela paciência e dedicação em todo meu trajeto na pós-graduação.

- Aos professores, Armando Corro, Rosa Chaves, Luciana Ávila, Pedro Roitman e Kellcio Araújo, que aceitaram participar da banca.

- Ao meu noivo, Walter, por todo amor, dedicação e companheirismo.

- À minha querida família, pelas orações e pelo apoio desde o início da minha vida acadêmica.

- Aos professores, funcionários, amigos e colegas do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, por todo apoio e incentivo.

- Aos professores e colegas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás pelo apoio e pela liberação no último semestre para a conclusão da tese. Em especial, ao professor Armando Corro, por sua colaboração desde a minha graduação.

- A todos os meus amigos "não-matemáticos"e ao Movimento dos Focolares pelas orações e amizade. Em especial, à Raimundinha, pela generosidade de me acolher em sua casa nestes anos.

- Finalmente, ao CNPq pelo apoio financeiro durante todo o doutorado.

Sumário

Introdução

Transformações de Ribaucour foram inicialmente estudadas por Ribaucour e Bianchi no início do século passado. Os resultados clássicos mostram que estas transformações quando satisfazem condições adicionais, permitem obter novas superfícies de curvatura Gaussiana constante ou curvatura média constante a partir de uma superfície que também possui a mesma curvatura constante.

Em [5], Corro-Ferreira-Tenenblat, reformularam a teoria clássica para uma hipersuperfície no espaço euclidiano, utilizando formas diferenciais e usaram as transformações de Ribaucour para obter novas famílias de hipersuperfícies de Dupin. Neste trabalho eles mostraram que a transformação de Ribaucour não é uma transformação de Lie, pois ela não preserva a propriedade de ser hipersuperfície de Dupin própria. Com isto, os estudos sobre transformações de Ribaucour entre hipersuperfícies de Dupin se tornaram mais interessantes, pois tal transformação pode gerar classes de hipersuperfícies de Dupin, que não são Lie equivalentes à inicial.

Os mesmos autores, em [6], construiram famílias de superfícies mínimas, utilizando a transformação de Ribaucour. Eles aplicaram tal transformação na superfície de Enneper e no catenóide e encontraram novas famílias de superfícies mínimas completas de gênero zero, no espaço euclidiano. Embora a transformação de Ribaucour para superfícies mínimas seja um resultado clássico, até então não tinha sido usado na construção de superfícies mínimas. Lemes e Tenenblat em [11], aplicaram a transformação de Ribaucour a uma classe especial de superfícies mínimas que inclui a superfície de Enneper, o catenóide e o helicóide.

Em [7], Corro, Ferreira e Tenenblat, estabeleceram a teoria de transformações de Ribaucour entre superfícies linear Weingarten em $\mathbb{R}^3$ estendendo a teoria clássica de superfície de curvatura Gaussiana ou curvatura média constante. No mesmo trabalho, obtiveram famílias de superfícies completas com curvatura média constante e superfícies completas linear Weingarten, aplicando a teoria ao cilindro e à superfície de Delaunay.

Em [24], Tenenblat-Wang estenderam a teoria de transformações de Ribaucour para subvariedades da esfera e do espaço hiperbólico, generalizando o trabalho de Corro, Ferreira e Tenenblat em [5]. Além disso, elas estenderam os resultados de [7] fornecendo um método para construir superfícies linear Weingarten na esfera tridimensional $\mathbb{S}^3$ e no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$. Também construíram superfícies completas a um parâmetro com curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$, associadas ao toro plano por uma transformação de Ribaucour. Em [25], as autoras aplicaram a teoria obtida em [24] para as superfícies com curvatura média constante igual a 1 no espaço hiperbólico tridimensional, em particular para a prima da superfície de Enneper.

Em [12], Lemes-Roitman-Tenenblat-Tribuzy provaram que a transformação de Darboux (transformação de Ribaucour conforme) comuta com a correspondência de Lawson (transformação entre superfícies com curvaturas médias constante distintas contidas em formas espaciais). Eles também mostraram que a propriedade de completude é preservada por esta comutatividade. Em geral, a transformação de Ribaucour entre superfícies linear Weingarten não é uma transformação de Darboux, porém os autores mostraram que as transformações de Ribaucour entre superfícies linear Weingarten que são conformes (portanto são transformações de Darboux) são precisamente essas transformações para superfícies de curvatura média constante.

Motivados pelo trabalho de Lemes, Roitman, Tenenblat e Tribuzy, investigamos a comutatividade da transformação de Ribaucour com a projeção estereográfica em formas espaciais e suas aplicações. Consideramos uma hipersuperfície orientável $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e a hipersuperfície da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ (respectivamente do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$) $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$, obtida pela aplicação inversa da projeção estereográfica quando $\bar{k} = 1$ (respectivamente projeção estereográfica hiperbólica quando $\bar{k} = -1$). A partir das transformações de Ribaucour de M em $\mathbb{R}^{n+1}$, fornecemos transformações de Ribaucour para $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 1$ ou -1. Em seguida, provamos que estas transformações de Ribaucour comutam com a projeção estereográfica.

Também fornecemos condições necessárias e suficientes para que uma transformação de Ribaucour preserve a propriedade de ser hipersuperfície de Dupin, em formas espaciais, estendendo assim, os resultados obtidos no espaço euclidiano, em [5]. Apresentamos resultados análogos sobre a comutatividade da transformação de Ribaucour com a projeção estereográfica, para hipersuperfícies de Dupin, ou seja, obtemos um teorema de existência de transformações de Ribaucour para hipersuperfícies de Dupin que comutam com a projeção estereográfica. Em seguida, aplicamos os resultados obtidos na construção de novas famílias de hipersuperfícies de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$.

Uma hipersuperfície de Dupin é uma hipersuperfície cujas curvaturas principais são constantes ao longo de linhas de curvatura correspondentes. Tais hipersuperfícies foram inicialmente estudadas por Dupin em 1822, no entanto nos últimos 50 anos muitos autores têm se dedicado a este assunto. Uma hipersuperfície de Dupin é dita própria se o número g de curvaturas principais distintas é constante. Um importante passo na teoria de hipersuperfícies de Dupin, foi o trabalho de Pinkal ([17]-[20]) que estudou as hipersuperfícies de Dupin no contexto da geometria das esferas de Lie. Ele mostrou que a propriedade de ser de Dupin própria é invariante sob o grupo das transformações das esferas de Lie, que contém o grupo das transformações de Möebius como um subgrupo. As superfícies de Dupin em $\mathbb{R}^3$ já são conhecidas, a menos de transformações de Lie, elas são partes de um cilindro circular, ou de um toro de revolução, ou de um cone de revolução. Contudo, a classificação de hipersuperfícies de Dupin em dimensões maiores está longe de ser completa.

Thorbergsson em [26], mostrou que para hipersuperfícies de Dupin próprias, compactas, mergulhadas no espaço euclidiano ou na esfera, o número g de curvaturas principais distintas pode ser $g = 1, 2, 3, 4$ ou 6. Cecil e Ryan, em [4] conjecturaram que toda hipersuperfície de Dupin, própria, compacta, mergulhada na esfera ou no espaço euclidiano é Lie equivalente a uma hipersuperfície isoparamétrica na esfera. Para o caso $g \leq 3$ a conjectura é verdadeira (veja por exemplo [4],[1],[2],[14]). Porém, já existem contra exemplos para esta conjectura no caso de quatro e seis curvaturas principais ([21], [15]).

Estes contra exemplos envolvem uma análise das curvaturas de Lie de uma hipersuperfície de Dupin própria. Tais curvaturas foram primeiramente estudadas por Miyaoka [16]. Ela provou que as curvaturas de Lie são invariantes por transformações de Lie. Os contra exemplos de Pinkall-Thorbergsson em [21] e Miyaoka-Ozawa em [15], são ambos baseados na construção de hipersuperfícies de Dupin próprias que não possuem curvaturas de Lie constantes. Isto leva a uma revisão da conjectura [3], que diz que toda hipersuperfície de Dupin, própria, compacta e conexa na esfera com $g = 4$ ou 6 curvaturas principais e curvaturas de Lie constantes são Lie equivalentes a uma hipersuperfície isoparamétrica na esfera. Esta conjectura revisada é ainda um importante problema em aberto, apesar de já ter mostrado ser verdadeira em alguns casos com certas condições adicionais.

Já em [13], os autores introduziram o conceito de hipersuperfície isoparamétrica de Möebius. Eles mostraram que, no espaço euclidiano, tal conceito coincide com uma hipersuperfície isoparamétrica, assim uma hipersuperfície isoparamétrica de Möebius deve ser uma hipersuperfície própria de Dupin. Depois Rodrigues-Tenenblat, em [22], mostraram que se uma hipersuperfície na esfera, possui o número g de curvaturas principais distintas constante, com $g \geq 3$, então tal hipersuperfície é isoparamétrica de Möebius se, e somente se, ela é de Dupin com curvatura de Möebius constante. Recentemente, vários progressos têm sido feitos na classificação de hipersuperfícies isoparamétricas de Möebius, como é o casso dos trabalhos de H. Li, Lui, Wang e Zhao [13], depois Hu e H. Li em [8], e ainda, Hu, H. Li e Wang em [9] e Hu e D. Li em [10].

Aplicar a transformação de Ribaucour em uma hipersuperfície em formas espaciais, não é uma tarefa fácil, pois encontrar explicitamente famílias de hipersuperfícies associadas, por uma transformação de Ribaucour, a uma hipersuperfície dada, é equivalente a resolver um sistema de equações diferenciais. Por outro lado, vários estudos têm sido feitos sobre a classificação de hipersuperfície de Dupin. Apesar de algumas classificações parciais terem sido obtidas, ver [3], o problema ainda permanece em aberto para $g > 3$.

Aplicando a teoria obtida nesta tese a um cone em $\mathbb{R}^4$, encontramos uma nova família de hipersuperfícies próprias de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$ com curvatura de Möebius não constante. Vale ressaltar que este cone é, a menos de transformação de Möebius, a única hipersuperfície de Dupin em $\mathbb{R}^4$, de curvatura de Möebius constante, parametrizada por linhas de curvatura, veja [23]. Analogamente, aplicando os resultados obtidos em uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$, encontramos uma nova família de hipersuperfícies próprias de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$ com curvatura de Lie não constante.

No Capítulo 1, apresentamos resultados gerais sobre hipersuperfícies em formas espaciais. Também relembramos a definição de transformação de Ribaucour e alguns teoremas sobre tal transformação, obtidos por Corro-Ferreira-Tenenblat em [5], no espaço euclidiano e por Tenenblat-Wang em [24], na esfera e no espaço hiperbólico.

No capítulo 2, provamos os dois resultados principais deste trabalho. Consideramos uma hipersuperfície orientável $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, e a hipersuperfície da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ (respectivamente do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$) $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$, obtida pela aplicação inversa da projeção estereográfica quando $\bar{k} = 1$ (respectivamente projeção estereográfica hiperbólica quando $\bar{k} = -1$). No primeiro teorema (Teorema 2.1), a partir das transformações de Ribaucour de M em $\mathbb{R}^{n+1}$, fornecemos transformações de Ribaucour para $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 1$ ou -1. Em seguida, estudamos a comutatividade da transformação de Ribaucour com a projeção estereográfica, provando no segundo teorema (Teorema 2.2) que as transformações de Ribaucour, dadas no primeiro teorema, comutam com a projeção estereográfica. Esses teoremas mostram que as famílias de hipersuperfícies que são transformações de Ribaucour de M e $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ comutam com a projeção estereográfica, isto é, dada uma hipersuperfície associada a M existe uma hipersuperfície da família associada a $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ que comuta com a projeção estereográfica.

No capítulo 3, estudamos hipersuperfícies de Dupin em formas espaciais, parametrizadas por linhas de curvatura ortogonais. Fornecemos condições necessárias e suficientes para que a transformação de Ribaucour leve hipersuperfície de Dupin em hipersuperfície de Dupin, estendendo o resultado obtido no espaço euclidiano, em [5]. Além disso, provamos um resultado análogo ao Teorema 2.2, restrito às hipersuperfícies de Dupin, isto é, obtemos um teorema de existência de transformações de Ribaucour para hipersuperfícies de Dupin que comutam com a projeção estereográfica.

No capítulo 4, apresentamos duas aplicações dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Estudamos as transformações de Ribaucour de uma esfera $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e de um cone tridimensional em $\mathbb{R}^4$, cuja curvatura de Möebius é constante. Utilizamos alguns teoremas, obtidos em [5] e em [24], para fornecer as transformações de Ribaucour localmente associadas à esfera e ao cone. Em seguida, usamos um teorema obtido no capítulo 3 para caracterizar quais dessas transformações são hipersuperfícies de Dupin. Utilizamos os teoremas de comutatividade para obter as correspondentes hipersuperfícies em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$. Obtemos novas famílias de hipersuperfícies de Dupin. Mostramos que, genericamente, as que são associadas à esfera não têm curvatura de Lie constante e as que são associadas ao cone não têm curvatura de Möebius constante.

Dada uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e a inversa de sua projeção estereográfica

$\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, as transformações de Ribaucour de M e de $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ fornecem famílias de hipersuperfícies associadas. O teorema de comutatividade (Teorema 2.2) prova que estas famílias comutam com a projeção estereográfica, isto é, dada uma hipersuperfície da família associada a M, existe uma hipersuperfície da família associada a $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ que comuta com a projeção estereográfica. No capítulo 4, mostramos que isto não ocorre se considerarmos quaisquer hipersuperfícies das duas famílias.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fornecemos algumas definições e apresentamos alguns resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Hipersuperfícies em Formas Espaciais

Nesta seção apresentamos alguns resultados obtidos sobre as hipersuperfícies em formas espaciais, parametrizadas por linhas de curvatura ortogonais.

Considere o espaço $\mathbb{L}^{n+2} = \{x = (x_1, ..., x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ munido do produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} x_j y_j - x_{n+2} y_{n+2}. \tag{1.1}$$

Um modelo para o espaço hiperbólico é a subvariedade

$$\mathbb{H}^{n+1} = \left\{ x \in \mathbb{L}^{n+2} / \langle x, x \rangle = -1 \right\}.$$

Considere uma hipersuperfície orientável $M^n \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, onde $\bar{M}^{n+1}(\bar{k}) = \mathbb{R}^{n+1}$ se $\bar{k} = 0$, $\bar{M}^{n+1}(\bar{k}) = \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ se $\bar{k} = 1$ e $\bar{M}^{n+1}(\bar{k}) = \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$, se $\bar{k} = -1$. Seja e_i, $1 \leq i \leq n$, um referencial ortonormal tangente a M e N um campo de vetores unitários e normais, localmente definido em M. Denotaremos por ω_i as $1-$formas duais aos campos de vetores e_i e por ω_{ij}, $1 \leq i \leq n$, as formas de conexão determinadas por

$$d\omega_i = \sum_{j\neq i} \omega_j \wedge \omega_{ji}, \qquad\qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{1.2}$$

Considerando a conexão normal $\omega_{in+1} = -\omega_{n+1i} = \langle de_i, N\rangle$, temos que as equações de Gauss e Codazzi são dadas, respectivamente, por

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} - \bar{k}\omega_i \wedge \omega_j \tag{1.3}$$

e

$$d\omega_{in+1} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1}. \tag{1.4}$$

Considere as conexões Riemannianas em $\bar{M}(\bar{k})$ e M, dadas respectivamente por $\bar{\nabla}$ e ∇. Seja B a segunda forma fundamental de M e S o operador linear e auto-adjunto associado a B, definido por: $S : T_pM \to T_pM$, $p \in M$, de forma que

$$\langle S(x), y\rangle = \langle B(x, y), N(p)\rangle\,, \quad \forall x, y \in T_pM.$$

Chamamos de curvaturas principais de M os autovalores de $-S$ e de direções principais os autovetores correspondentes.

Supondo que a hipersuperfície $M^n \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, é parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y(u_1, ..., u_n)$, a primeira forma fundamental de M é a $1-$forma $I = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$, onde $\omega_i = a_i du_i$ e $a_i = |Y_{,i}|$, sendo $Y_{,i}$ a derivada parcial com respeito a u_i. As direções principais são os campos de vetores $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i}$. Desta forma, temos que

$$\omega_{ij} = \frac{1}{a_i a_j}\left(-a_{i,j}\omega_i + a_{j,i}\omega_j\right), 1 \leq i, j \leq n, \tag{1.5}$$

e que os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \Gamma_{ij}^i = \frac{a_{i,j}}{a_i}, \quad \Gamma_{ii}^j = -\frac{a_i a_{i,j}}{(a_j)^2}, \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{a_{i,i}}{a_i}, \tag{1.6}$$

para i, j, k distintos.

De fato, para mostrar (1.5), observe que ω_{ij} é uma 1-forma, então

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ij}^k \omega_k, \tag{1.7}$$

onde $A_{ij}^k \in \mathbb{R}$. Porém, de (1.2) segue que

$$A_{ij}^k = -A_{ji}^k, \quad 1 \leq k, i, j \leq n. \tag{1.8}$$

O que implica

$$A_{ii}^k = 0 \quad 1 \leq k, i \leq n.$$

Além disso, substituindo (1.7) na expressão de $d\omega_i$ em (1.2) e aplicando a um par de vetores e_i, e_s, $i \neq s$, segue que $d\omega_i(e_i, e_s) = A_{is}^i$. Por outro lado, como $\omega_i = a_i du_i$, temos que $d\omega_i = da_i \wedge du_i$, logo, $d\omega_i(e_i, e_s) = -\dfrac{a_{i,s}}{a_i a_s}$. Assim,

$$A_{is}^i = -\frac{a_{i,s}}{a_i a_s}, \quad i \neq s.$$

Analogamente, como $d\omega_i(e_t, e_s) = 0$, $\forall s \neq i, t \neq i$, segue que $A_{ti}^s = A_{si}^t$, $\forall s \neq i, t \neq i$. Porém, usando (1.8) temos que

$$A_{ti}^s = 0, \quad \text{para } i, s, t \text{ distintos.}$$

Portanto, substituindo as expressões de A_{ij}^k, obtidas acima, em (1.7), concluímos que vale (1.5).

A expressão (1.6), segue diretamente da definição dos símbolos de Christoffel, dada por

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}\right) g^{kl},$$

onde $g_{ij} = a_i^2\delta_{ij}$ e (g^{kl}) é a matriz inversa de (g_{kl}).

Como as curvas coordenadas são linhas de curvatura, temos também que

$$dN(e_i) = \lambda_i e_i, \qquad\qquad \omega_{in+1} = -\lambda_i\omega_i. \tag{1.9}$$

Sendo assim, as equações de Codazzi (1.4) se reduzem a

$$d\lambda_i(e_j) = (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij}(e_i), \qquad i \neq j.$$

A proposição seguinte nos dá uma propriedade sobre as hipersuperfícies em $\bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, parametrizadas por linhas de curvatura ortogonais, que será muito utilizada nos próximos capítulos.

Proposição 1.1. *Seja $M^n \subset \bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, uma hipersuperfície orientável parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, com $a_i = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $-\lambda_i$ curvaturas principais e N um campo de vetores unitários normais a M. Então,*

(i) $\displaystyle \left(\frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right)_{,s} = \frac{a_{i,s}}{a_i}\left(\frac{a_{s,j}}{a_s a_j} - \frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right)$, *$i$, j, s distintos,*

(ii) $\displaystyle \sum_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \frac{a_{i,k}}{a_i a_k}\frac{a_{j,k}}{a_j a_k} + \frac{1}{a_i a_j}\left(\frac{a_{i,j}}{a_j}\right)_{,j} + \frac{1}{a_i a_j}\left(\frac{a_{j,i}}{a_i}\right)_{,i} + \lambda_i\lambda_j + \bar{k} = 0$, *$i$, j distintos.*

Demonstração: ***(i)*** Aplicando a equação de Gauss (1.3) a um par de vetores e_i, e_s e considerando a equação (1.5), obtemos

$$d\omega_{ij}(e_i, e_s) = \frac{a_{i,s}}{a_i a_s}\frac{a_{s,j}}{a_s a_j}, \qquad i, j, s \text{ distintos.} \tag{1.10}$$

Por outro lado, calculando a diferencial de ω_{ij} em (1.5), temos que

$$d\omega_{ij} = -d\left(\frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right) \wedge \omega_i - \frac{a_{i,j}}{a_i a_j} d\omega_i + d\left(\frac{a_{j,i}}{a_i a_j}\right) \wedge \omega_j + \frac{a_{j,i}}{a_i a_j} d\omega_j, \tag{1.11}$$

o que implica que

$$d\omega_{ij}(e_i, e_s) = \frac{1}{a_s}\left(\frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right)_{,s} + \frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\frac{a_{i,s}}{a_i a_s}, \qquad i, j, s \text{ distintos.} \tag{1.12}$$

Assim, igualando as expressões (1.10) e (1.12) obtemos o desejado.

(ii) Aplicando a equação de Gauss (1.3) a um par de vetores e_i, e_j e considerando a equação (1.5), obtemos

$$d\omega_{ij}(e_i, e_j) = -\sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \frac{a_{i,k}}{a_i a_k}\frac{a_{j,k}}{a_j a_k} - (\lambda_i \lambda_j + \bar{k}). \tag{1.13}$$

Por outro lado, da equação (1.11), temos

$$d\omega_{ij}(e_i, e_j) = d\left(\frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right)(e_j) - \frac{a_{i,j}}{a_i a_j} d\omega_i(e_i, e_j) + d\left(\frac{a_{j,i}}{a_i a_j}\right)(e_i) + \frac{a_{j,i}}{a_i a_j} d\omega_j(e_i, e_j).$$

Porém, aplicando a equação (1.2) ao mesmo par de vetores e_i, e_j e usando a equação (1.5) novamente, segue que

$$d\omega_i(e_i, e_j) = -\frac{a_{i,j}}{a_i a_j} \quad e \quad d\omega_j(e_i, e_j) = \frac{a_{j,i}}{a_i a_j},$$

logo,

$$d\omega_{ij}(e_i, e_j) = \frac{1}{a_j}\left(\frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right)_j + \left(\frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right)^2 + \frac{1}{a_i}\left(\frac{a_{j,i}}{a_i a_j}\right)_i + \left(\frac{a_{j,i}}{a_i a_j}\right)^2. \tag{1.14}$$

Assim, igualando as equações (1.13) e (1.14) e usando o fato que

$$\left(\frac{a_{i,j}}{a_i a_j}\right)_{,j} = \frac{1}{a_i}\left(\frac{a_{i,j}}{a_j}\right)_{,j} - \frac{a_{i,j}^2}{a_i^2 a_j}, \text{ para } i \neq j,$$

concluímos a demonstração.

■

Observação 1.1. A expressão (ii) da Proposição anterior, poderia ser obtida também usando a expressão da Equação de Gauss em termos dos símbolos de Christoffel, dados por (1.6), para uma parametrização por linhas de curvatura ortogonais.

O resultado abaixo, segue diretamente das expressões dos símbolos de Christoffel, dados em (1.6). O colocamos em forma de Lema por utilizá-lo com frequência nos capítulos seguintes.

Lema 1.1. *Seja M^n uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $a_i = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i}$ direções principais, $-\lambda_i$ curvaturas principais correspondentes e N um campo de vetores unitários normais a M. Então,*

(i) $\langle Y, Y_{,ij}\rangle = \dfrac{a_{i,j}}{a_i}\langle Y, Y_{,i}\rangle + \dfrac{a_{j,i}}{a_j}\langle Y, Y_{,j}\rangle,$

(ii) $\displaystyle\sum_{k\neq i} \frac{1}{a_k}\frac{a_{i,k}}{a_i a_k}\langle Y, Y_{,k}\rangle + \frac{1}{a_i}\left(\frac{1}{a_i}\langle Y, Y_{,i}\rangle\right)_{,i} + \lambda_i \langle Y, N\rangle = 1,$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\langle Y, Y_{,k}\rangle\right)^2 + \langle Y, N\rangle^2 = |Y|^2.$

Demonstração: ***(i)*** Pelas expressões dos símbolos de Christoffel, dadas em (1.6), temos que

$$\begin{aligned} Y_{,ij} &= \sum_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} \Gamma_{ij}^{k} Y_{,k} + \Gamma_{ij}^{i} Y_{,i} + \Gamma_{ij}^{j} Y_{,j} \\ &= \frac{a_{i,j}}{a_i} Y_{,i} + \frac{a_{j,i}}{a_j} Y_{,j}. \end{aligned}$$

O resultado segue, fazendo o produto interno de $Y_{,ij}$ por Y.

(ii) Pelas expressões dos símbolos de Christoffel, dadas em (1.6), temos que

$$\begin{aligned} Y_{,ii} &= \sum_{k\neq i} \Gamma_{ii}^{k} Y_{,k} + \Gamma_{ii}^{i} Y_{,i} - \lambda_i a_i^2 N \\ &= -\sum_{k\neq i} \frac{a_i a_{i,k}}{a_k^2} Y_k + \frac{a_{i,i}}{a_i} Y_i - \lambda_i a_i^2 N, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \sum_{k\neq i} \frac{1}{a_k}\frac{a_{i,k}}{a_i a_k} \langle Y, Y_{,k}\rangle \quad &+ \quad \frac{1}{a_i}\left(\frac{1}{a_i}\langle Y, Y_{,i}\rangle\right)_{,i} + \lambda_i \langle Y, N\rangle \\ &= \sum_{k\neq i} \frac{a_{i,k}}{a_i a_k^2}\langle Y, Y_k\rangle - \frac{a_{i,i}}{a_i^3}\langle Y, Y_{,i}\rangle + \frac{1}{a_i^2}\langle Y_i, Y_i\rangle + \frac{1}{a_i^2}\langle Y, Y_{,ii}\rangle + \lambda_i\langle Y, N\rangle \\ &= -\frac{1}{a_i^2}\langle Y, Y_{,ii}\rangle + 1 + \frac{1}{a_i^2}\langle Y, Y_{,ii}\rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

(iii) Imediato, basta observar que a imersão Y pode ser escrita como combinação linear dos vetores $e_{,1}, ..., e_{,n}, N$.

■

1.2 Transformação de Ribaucour em Formas Espaciais

Nesta seção fornecemos a definição de transformada de Ribaucour de uma hipersuperfície $M^n \subset \bar{M}(\bar{k})$, $k = 0, \pm 1$, e em seguida apresentamos alguns resultados obtidos por A. Corro, W. Ferreira e K. Tenenblat em [5] e por K. Tenenblat e Q. Wang em [24], que utilizaremos com frequência nos capítulos seguintes.

Definição 1.1. ***(i)*** Uma *congruência de esferas geodésicas* em $\bar{M}(\bar{k})$ é uma família a $n-$parâmetros de esferas geodésicas em $\bar{M}(\bar{k})$, tal que o conjunto de centros das esferas geodésicas é uma hipersuperfície de $\bar{M}(\bar{k})$ e o raio das esferas geodésicas é uma função diferenciável definida na hipersuperfície.

(ii) Uma *involuta de uma congruência de esferas geodésicas* é uma subvariedade $n-$dimensional M de $\bar{M}(\bar{k})$, tal que cada ponto de M é tangente a uma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

(iii) Sejam M e $\tilde{M}$ hipersuperfícies em $\bar{M}(\bar{k})$. Dizemos que M e $\tilde{M}$ *estão associadas por uma congruência de esferas geodésicas*, se existe um difeomorfismo $l : M \to \tilde{M}$ tal que, nos pontos correspondentes p e $l(p)$, M e $\tilde{M}$ são tangentes à mesma esfera geodésica da congruência de esferas geodésicas.

Um caso especial importante do item ***(iii)*** é quando dl aplica n campos vetoriais ortonormais principais de M em n campos vetoriais ortogonais principais de $\tilde{M}$.

Definição 1.2. Seja M uma hipersuperfície orientável em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$. Suponha que existam n campos vetoriais principais ortonormais $e_1, ..., e_n$ definidos em M. *Uma hipersuperfície orientável $\tilde{M} \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$ está associada a M por uma transformação de Ribaucour l*, com respeito a $e_1, ..., e_n$, se existem uma função diferenciável $h : M \to \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $l : M \to \tilde{M}$ e campos vetoriais normais unitários N e $\tilde{N}$ de M e $\tilde{M}$, respectivamente, tais que

(a) $\exp_p h(p)N(p) = \exp_{l(p)} h(p)\tilde{N}(l(p))$, para todo $p \in M$;

(b) O subconjunto $S = \{\exp_p h(p)N(p)/p \in M\}$ é uma subvariedade $n-$dimensional de $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$;

(c) $dl(e_i)$, $i = 1, ..., n$, são direções principais ortogonais em $\tilde{M}$.

Observação 1.2. A condição a) da definição acima, equivale a dizer que

$$p + h(p)N(p) = l(p) + h(p)\tilde{N}(l(p)), \quad \forall p \in M, \quad \text{se } \bar{k} = 0,$$
$$p + tg(h(p))N(p) = l(p) + tg(h(p))\tilde{N}(l(p)), \quad \forall p \in M, \quad \text{se } \bar{k} = 1,$$
$$p + tgh(h(p))N(p) = l(p) + tgh(h(p))\tilde{N}(l(p)), \quad \forall p \in M, \quad \text{se } \bar{k} = -1,$$

Observação 1.3. A transformação de Ribaucour acima é inversível no sentido que existem n campos vetoriais principais ortonormais $\tilde{e_1}, ..., \tilde{e_n}$ definidos em $\tilde{M}$, tal que M está associada a $\tilde{M}$ com respeito a $\tilde{e_1}, ..., \tilde{e_n}$.

Podemos considerar uma definição local.

Definição 1.3. Seja M uma hipersuperfície orientável em $\bar{M}(\bar{k})$, $k = 0, \pm 1$. Suponha que existam n campos vetoriais principais ortonormais $e_1, ..., e_n$ definidos em M. Dizemos que uma hipersuperfície $\tilde{M} \subset \bar{M}(\bar{k})$ está *localmente associada* a M por uma transformação de Ribaucour l, com respeito a $e_1, ..., e_n$, se para qualquer $\tilde{q} \in \tilde{M}$, existem uma vizinhança $\tilde{V}$ de $\tilde{q}$ em $\tilde{M}$ e um subconjunto aberto $V \subset M$ tal que $\tilde{V}$ está localmente associada a V por uma transformação de Ribaucour l, com respeito a $e_1, ..., e_n$.

Teorema 1.1. *Seja M^n uma hipersuperfície orientável em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, onde $a_i = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i}$ direções principais, $-\lambda_i$ curvaturas principais correspondentes e N um campo de vetores unitários normais a M. Uma hipersuperfície $\tilde{M}^n \subset \bar{M}(\bar{k})$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour l, com respeito a $e_1, ..., e_n$ se, e somente se, existem funções diferenciáveis $W, \Omega, \Omega_i : V \subset U \to \mathbb{R}$ que são soluções do sistema de Ribaucour:*

$$\begin{cases} \Omega_{i,j} & = & \dfrac{a_{j,i}}{a_i}\Omega_j, \qquad j \neq i, \\ \Omega_{,i} & = & a_i \Omega_i, \\ W_{,i} & = & -\lambda_i a_i \Omega_i, \end{cases} \tag{1.15}$$

satisfazendo

$$WS(W + \lambda_i \Omega)(S - \Omega T_i) \neq 0, \tag{1.16}$$

e $\tilde{Y} : V \subset \mathbb{R}^n \to \tilde{M}$, *uma parametrização de* $\tilde{M}$, *dada por*

$$\tilde{Y} = \left(1 - \frac{2\bar{k}\Omega^2}{S}\right) Y - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_k \Omega_k e_k - WN\right), \tag{1.17}$$

onde

$$S = \sum_k \Omega_k^2 + W^2 + \bar{k}\Omega^2. \tag{1.18}$$

Neste caso, o campo normal unitário a $\tilde{M}$ *é dado por*

$$\tilde{N} = N + \frac{2W}{S}\left(\sum_k \Omega_k e_k - WN + \bar{k}\Omega X\right). \tag{1.19}$$

Observação 1.4. A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [5] e em [24].

Observação 1.5. Nas hipóteses do teorema acima, considerando M e $\tilde{M}$ localmente associadas por uma transformação de Ribaucour l, com respeito a $e_1, ..., e_n$, dizemos também que $\tilde{M}$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour l^Y de Y, ou que $\tilde{Y}$ dada por (1.17) é uma transformação de Ribaucour l^Y de Y.

Teorema 1.2. *Seja M^n uma hipersuperfície em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$ parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, onde $a_i = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i}$ direções principais, $-\lambda_i$ curvaturas principais correspondentes. Considere $\tilde{M}^n \subset \bar{M}(\bar{k})$ uma hipersuperfície, localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour l^Y de Y. Então, os coeficientes da primeira forma fundamental e as curvaturas principais de $\tilde{M}$, para cada $1 \leq i \leq n$, são dados por:*

$$\tilde{a}_i = \frac{S - \Omega T_i}{S} a_i \quad e \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{W T_i + \lambda_i S}{S - \Omega T_i}, \tag{1.20}$$

onde Ω, Ω_i e W satisfazem o sistema (1.15) e

$$T_i = 2\left\{ \frac{\Omega_{i,i}}{a_i} + \sum_{k \neq i} \frac{a_{i,k}}{a_i a_k} \Omega_k - W\lambda_i + \bar{k}\Omega \right\}. \tag{1.21}$$

Observação 1.6. A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [5] e em [24].

Capítulo 2

Transformação de Ribaucour e Projeção Estereográfica

Neste capítulo, provamos os dois resultados principais deste trabalho. Consideramos uma hipersuperfície orientável $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e a hipersuperfície da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ (respectivamente do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$) $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$, obtida pela aplicação inversa da projeção estereográfica quando $\bar{k} = 1$ (respectivamente projeção estereográfica hiperbólica quando $\bar{k} = -1$). No primeiro teorema (Teorema 2.1), a partir das transformações de Ribaucour de M em $\mathbb{R}^{n+1}$, fornecemos transformações de Ribaucour para $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$. Em seguida, estudamos a comutatividade da transformação de Ribaucour com a projeção estereográfica, provando no segundo teorema (Teorema 2.2) que as transformações de Ribaucour dadas no primeiro teorema comutam com a projeção estereográfica. Esses teoremas mostram que existem transformações de Ribaucour de M e $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ que comutam com a projeção estereográfica.

2.1 Projeção Estereográfica e Projeção Estereográfica Hiperbólica

Nesta seção estudamos as aplicações inversas $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ da projeção estereográfica, quando $\bar{k} = 1$ e da projeção estereográfica hiperbólica, quando $\bar{k} = -1$. Consideramos uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e descrevemos as primeira e segunda formas fundamentais de $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M) \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, em termos das primeira e segunda formas fundamentais de M.

A partir desta seção vamos considerar parametrizações de várias hipersuperfícies simultaneamente. Para tanto, vamos introduzir a notação a_i^Y, $-\lambda_i^Y$, N^Y, a_i^X, $-\lambda_i^X$, N^X, com índice superior Y ou X, para denotar a primeira forma fundamental, as curvaturas principais e o campo normal das hipersuperfícies parametrizadas por Y ou X respectivamente.

Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, com $a_i^Y = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $-\lambda_i^Y$ curvaturas principais e N^Y um campo de vetores unitários normais a M. Considere $\pi_{\bar{k}}$, $\bar{k} = \pm 1$, a projeção estereográfica quando $\bar{k} = 1$ e a projeção estereográfica hiperbólica quando $\bar{k} = -1$. Seja $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$. Nosso objetivo nesta seção é descrever a_i^X e λ_i^X em função de a_i^Y e λ_i^Y.

Considere a seguinte notação

$$\langle , \rangle_{\bar{k}}\,, \qquad \bar{k} = \pm 1,$$

que representa o produto interno euclidiano, quando $\bar{k} = 1$ e o produto interno hiperbólico, quando $\bar{k} = -1$ dado por (2.1). Isto é, para $x, y \in \bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, temos,

$$\langle x, y \rangle_{\bar{k}} = \sum_{k=1}^{n+1} x_i y_i + \bar{k} x_{n+2} y_{n+2}. \tag{2.1}$$

Lema 2.1. *Considere a aplicação inversa da projeção estereográfica, quando $\bar{k} = 1$ e a aplicação inversa da projeção estereográfica hiperbólica, quando $\bar{k} = -1$,*

$$\pi_{\bar{k}}^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \to S^{n+1} & , \quad se\ \bar{k} = 1, \\ \mathbb{R}^{n+1} - S^n(1) \to H^{n+1} & , \quad se\ \bar{k} = -1. \end{cases}$$

Então

$$\pi_{\bar{k}}^{-1}(y) = \frac{2}{1 + \bar{k}|y|^2} \left(y + \frac{|y|^2 - \bar{k}}{2} \xi_{n+2} \right). \tag{2.2}$$

onde $\xi_{n+2} = (\vec{0}, 1)$*, com* $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$*. Além disso,*

(i) *a aplicação* $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ *é conforme com fator de conformidade*

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} & , \quad se\ \bar{k} = 1 \\ \mathbb{R}^{n+1} \setminus S^n(1) \to \mathbb{R} & , \quad se\ \bar{k} = -1 \end{cases}, \quad onde\ \ \gamma(y) = \frac{2}{1 + \bar{k}|y|^2}. \tag{2.3}$$

(ii) *Se* $u \in T_y\mathbb{R}^{n+1}$*, temos*

$$d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(u) = \gamma(y) \left\{ -\bar{k} \langle y, u \rangle \pi_{\bar{k}}^{-1}(y) + u + \langle y, u \rangle \xi_{n+2} \right\}. \tag{2.4}$$

Demonstração: ***(i)*** Considere as aplicações $\Gamma : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+2}$, dadas por

$$\Gamma(y) := \frac{2}{1 + \bar{k}|y|^2} \qquad \text{e} \qquad f(y) := y + \frac{|y|^2 - \bar{k}}{2}\xi_{n+2}.$$

Então, para todo $u \in T_y\mathbb{R}^{n+1}$, temos

$$d\Gamma_y(u) = -\bar{k}\Gamma^2(y) \langle y, u \rangle \qquad \text{e} \qquad df_y(u) = u + \langle y, u \rangle \xi_{n+2}.$$

Como $\pi_{\bar{k}}^{-1}(y) = \Gamma(y) f(y)$, obtemos

$$\begin{aligned} d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(u) &= d\Gamma_y(u) f(y) + \Gamma(y) df_y(u) \\ &= -\bar{k}\Gamma^2(y) \langle y, u \rangle \left(y + \frac{|y|^2 - \bar{k}}{2}\xi_{n+2} \right) + \Gamma(y) \left(u + \langle y, u \rangle \xi_{n+2} \right) \\ &= \Gamma(y) \left(-\bar{k} \langle y, u \rangle \pi_{\bar{k}}^{-1}(y) + u + \langle y, u \rangle \xi_{n+2} \right). \end{aligned}$$

Logo, para todos $u, v \in T_y\mathbb{R}^{n+1}$, segue que

$$\begin{aligned}
&\left\langle d\pi_y^{-1}(u), d\pi_y^{-1}(v)\right\rangle_{\bar{k}} \\
&= \Gamma^2(y)\left[\langle y,u\rangle\langle y,v\rangle\bar{k} - \Gamma(y)\bar{k}\langle y,u\rangle\left(\langle y,v\rangle + \bar{k}\langle y,v\rangle\frac{|y|^2-\bar{k}}{2}\right)\right] \\
&+ \Gamma^2(y)\left[-\Gamma(y)\bar{k}\langle y,v\rangle\left(\langle y,u\rangle + \langle y,u\rangle\frac{|y|^2-\bar{k}}{2}\right) + \langle u,v\rangle + \bar{k}\langle y,u\rangle\langle y,v\rangle\right].
\end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned}
&\left\langle d\pi_y^{-1}(u), d\pi_y^{-1}(v)\right\rangle_{\bar{k}} \\
&= \Gamma^2(y)\langle u,v\rangle + \Gamma^2(y)\bar{k}\langle y,u\rangle\langle y,v\rangle\left[2 - 2\Gamma(y)\left(1+\bar{k}\frac{|y|^2-\bar{k}}{2}\right)\right] \\
&= \left(\frac{2}{1+\bar{k}|y|^2}\right)^2\langle u,v\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é uma aplicação conforme e seu fator de conformidade é $\gamma(y) = \dfrac{2}{1+\bar{k}|y|^2}$.

(ii) Segue diretamente do fato que $\gamma(y) = \Gamma(y)$ e da expressão de $d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(u)$, obtida anteriormente, concluindo a demonstração.

■

Observação 2.1. Seja M^n uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$. Considere $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, onde $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é dada em (2.2). A partir de agora, quando $\bar{k} = -1$ consideraremos apenas os pontos de M^n onde a aplicação inversa da projeção estereográfica hiperbólica π_{-1}^{-1} está definida, isto é, os pontos de M^n tais que $|Y(u)| \neq 1$. Neste caso, $X = \pi_{-1}^{-1} \circ Y$ poderá ter duas componentes conexas, $X(u) \in H_{+}^{n+1}$, se $|Y(u)| < 1$ e $X(u) \in H_{-}^{n+1}$, se $|Y(u)| > 1$, onde

$$H_{+}^{n+1} = \{x = (x_1, ..., x_{n+2}) \in H^{n+1}; x_{n+2} > 0\}, \quad H_{-}^{n+1} = \{x \in H^{n+1}; x_{n+2} < 0\}. \quad (2.5)$$

Lema 2.2. *Seja M^n uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, com $a_i^Y = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $-\lambda_i^Y$ curvaturas principais e N^Y um campo de vetores unitários normais a M. Considere a aplicação $\pi_{\bar{k}}^{-1}$, dada em (2.2), cujo fator de conformidade é γ, dado em (2.3). Seja $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$ e defina*

$$\gamma^Y(u) = \frac{2}{1 + \bar{k}|Y(u)|^2}, \qquad u = (u_1, ..., u_n) \in U. \tag{2.6}$$

onde $u \in U$, se $\bar{k} = 1$ e $u \in U$ com $|Y(u)| \neq 1$, se $\bar{k} = -1$. Então

(i) $\langle X_{,i}, X_{,j} \rangle_{\bar{k}} = (\gamma^Y)^2 (a_i^Y)^2 \delta_{ij}$,

(ii) $N^X = \dfrac{d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y (N^Y)}{\gamma^Y}$ *é um campo vetorial unitário, normal à imersão X.*

Demonstração: (i) Como $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, temos que $X_{,i} = d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y (Y_{,i})$. Além disso, pelo Lema 2.1, a aplicação $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é conforme, logo

$$\begin{aligned}
\langle X_{,i}, X_{,j} \rangle_{\bar{k}} &= \left\langle d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y (Y_{,i}), d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y (Y_{,j}) \right\rangle_{\bar{k}} \\
&= (\gamma^Y)^2 \langle Y_{,i}, Y_{,j} \rangle \\
&= (\gamma^Y)^2 (a_i^Y)^2 \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

(ii) Devemos mostrar que $\left\langle N^X, X\right\rangle_{\bar{k}} = \left\langle N^X, X_{,i}\right\rangle_{\bar{k}} = 0$ e $\left\langle N^X, N^X\right\rangle_{\bar{k}} = 1$. Como a aplicação $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é conforme, segue que

$$\begin{aligned}
\left\langle N^X, N^X\right\rangle_{\bar{k}} &= \frac{1}{(\gamma^Y)^2}\left\langle d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(N^Y), d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(N^Y)\right\rangle_{\bar{k}} \\
&= \left\langle N^Y, N^Y\right\rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Temos também que,

$$\begin{aligned}
\left\langle N^X, X_{,i}\right\rangle_{\bar{k}} &= \frac{1}{\gamma^Y}\left\langle d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(N^Y), d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(Y_{,i})\right\rangle_{\bar{k}} \\
&= \gamma^Y\left\langle N^Y, Y_{,i}\right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observe que da equação (2.4),

$$\begin{aligned}
N^X &= \frac{d(\pi_{\bar{k}})_y^{-1}(N^Y)}{\gamma^Y} \\
&= -\bar{k}\left\langle Y, N^Y\right\rangle \gamma^Y\left(Y + \frac{|Y|^2 - \bar{k}}{2}\xi_{n+2}\right) + N^Y + \left\langle Y, N^Y\right\rangle \xi_{n+2},
\end{aligned}$$

e da equação (2.2),

$$X = \gamma^Y\left(Y + \frac{|Y|^2 - \bar{k}}{2}\xi_{n+2}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left\langle N^X, X\right\rangle_{\bar{k}} &= -\bar{k}\left\langle Y, N^Y\right\rangle\left\langle X, X\right\rangle_{\bar{k}} + \gamma^Y\left\langle N^Y + \left\langle Y, N^Y\right\rangle\xi_{n+2}, Y + \frac{|Y|^2 - \bar{k}}{2}\xi_{n+2}\right\rangle_{\bar{k}} \\
&= -\left\langle Y, N^Y\right\rangle + \gamma^Y\left\langle N^Y, Y\right\rangle + \bar{k}\gamma^Y\left\langle Y, N^Y\right\rangle\frac{|Y|^2 - \bar{k}}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos o fato que γ^Y é dado por (2.6). Finalizando a demonstração.

■

Finalizamos esta seção com o próximo teorema, que caracteriza as primeira e segunda formas fundamentais da inversa da projeção estereográfica $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ aplicada a uma hipersuperfície, em função das primeira e segunda formas fundamentais de tal hipersuperfície.

Proposição 2.1. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, com $a_i^Y = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $-\lambda_i^Y$ curvatura principais e N^Y um campo de vetores unitários normais a M. Considere a aplicação inversa da projeção estereográfica $\pi_{\bar{k}}^{-1}$, $\bar{k} = \pm 1$, dada em (2.2) . Sejam $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$ e γ^Y dada por (2.6). Então, as primeira e segunda formas fundamentais da imersão X são dadas, respectivamente, por:*

(i) $a_i^X = \gamma^Y a_i^Y$,

(ii) $\lambda_i^X = \dfrac{\lambda_i^Y}{\gamma^Y} - \bar{k}\left\langle Y, N^Y \right\rangle$.

Demonstração: ***(i)*** Segue do Lema 2.2 (i) que

$$\begin{aligned} \left(a_i^X\right)^2 &:= \langle X_{,i}, X_{,i} \rangle_{\bar{k}} \\ &= \left(\gamma^Y a_i^Y\right)^2, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

(ii) Pelo Lema 2.1 (ii) temos

$$
\begin{aligned}
X_{,i} &:= d(\pi_{\bar{k}}^{-1})_y(Y_{,i}) \\
&= \gamma^Y \left\{ -\bar{k} \langle Y, Y_{,i} \rangle X + Y_{,i} + \langle Y, Y_{,i} \rangle \xi_{n+2} \right\}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pelos Lemas 2.2 (ii) e 2.1 (ii),

$$
N^X = -\bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle X + N^Y + \left\langle Y, N^Y \right\rangle \xi_{n+2}.
$$

Derivando esta expressão com respeito à variável u_i e usando (1.9), segue que

$$
\begin{aligned}
N^X_{,i} &= -\bar{k} \left\langle Y, N^Y_{,i} \right\rangle X - \bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle X_{,i} + N^Y_{,i} + \left\langle Y, N^Y_{,i} \right\rangle \xi_{n+2} \\
&= -\bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle X_{,i} + \lambda_i^Y \left(-\bar{k} \langle Y, Y_{,i} \rangle X + Y_{,i} + \langle Y, Y_{,i} \rangle \xi_{n+2} \right) \\
&= \left(\frac{\lambda_i^Y}{\gamma^Y} - \bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle \right) X_{,i}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\lambda_i^X = \frac{\lambda_i^Y}{\gamma^Y} - \left\langle Y, N^Y \right\rangle.
$$

Concluindo a demonstração.

■

2.2 Comutatividade

Nesta seção, estudamos a transformação de Ribaucour de hipersuperfícies parametrizadas em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$. Caracterizamos uma tranformação de Ribaucour em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, em termos de uma transformação de Ribaucour em $\mathbb{R}^{n+1}$. Em seguida, demonstramos o teorema de comutatividade da transformação de Ribaucour com a projeção estereográfica.

Iniciamos com um lema que será necessário para a demonstração dos resultados principais desta seção.

Lema 2.3. *Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura ortogonais em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde $a_i = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i}$ direções principais, $-\lambda_i$ curvaturas principais correspondentes e N um campo de vetores unitários normais a Y. Sejam Ω, W e $\Omega_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ...n$, funções diferenciáveis,*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Omega_k^2 + W^2$$

e

$$T_i = 2\left\{\frac{\Omega_{i,i}}{a_i} + \sum_{k\neq i} \frac{a_{i,k}}{a_i a_k}\Omega_k - W\lambda_i\right\}.$$

Defina

$$A^Y = \frac{2}{S}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\langle Y, Y_{,k}\rangle \Omega_k - W\langle Y, N\rangle - \Omega\right\}. \tag{2.7}$$

Considere $\bar{k} = \pm 1$ e defina as funções

$$\begin{cases} \bar{\Omega} & = & \gamma^Y \Omega, \\ \bar{W} & = & W + \bar{k}\gamma^Y \langle Y, N\rangle \Omega, \\ \bar{\Omega}_i & = & \Omega_i - \dfrac{\gamma^Y}{a_i}\left(\dfrac{1}{\gamma^Y}\right)_{,i}\Omega, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\gamma^Y} - \bar{k}\langle Y, N\rangle \qquad e \qquad \bar{a}_i = \gamma^Y a_i,$$

onde a função γ^Y é dada por (2.6). Sejam

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\Omega}_k^2 + \bar{W}^2 + \bar{k}(\bar{\Omega})^2$$

e

$$\bar{T}_i = 2\left\{ \frac{\bar{\Omega}_{i,i}}{a_i} + \sum_{k \neq i} \frac{\bar{a}_{i,k}}{\bar{a}_i \bar{a}_k} \bar{\Omega}_k - \bar{W}\bar{\lambda}_i + \bar{k}\bar{\Omega} \right\}.$$

Então, seguem as seguintes relações algébricas:

i) $\bar{S} = S(1 - \bar{k}\gamma^Y \Omega A^Y)$;

ii) $\bar{T}_i = \dfrac{1}{\gamma^Y} T_i - \bar{k} A^Y S$;

iii) $\bar{S} - \bar{\Omega}\bar{T}_i = S - \Omega T_i$;

iv) $\bar{W} + \bar{\lambda}_i \bar{\Omega} = W + \lambda_i \Omega$.

Demonstração: ***i)*** Pela definição de $\bar{S}$, temos que

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\bar{\Omega}_k\right)^2 + \left(\bar{W}\right)^2 + \bar{k}\left(\bar{\Omega}\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\Omega_k - \frac{\gamma^Y}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,k} \Omega \right]^2 + \left[W + \bar{k}\gamma^Y \langle Y, N \rangle \Omega\right]^2 + \bar{k}\left(\gamma^Y \Omega\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\Omega_k\right)^2 + (W)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,k} \right]^2 \left(\gamma^Y \Omega\right)^2 - 2\gamma^Y \Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,k} \Omega_k \\
&+ \langle Y, N \rangle^2 \left(\gamma^Y \Omega\right)^2 + 2W \langle Y, N \rangle \bar{k}\gamma^Y \Omega + \bar{k}\left(\gamma^Y \Omega\right)^2.
\end{aligned}$$

O que implica

$$
\begin{aligned}
\bar{S} &= S + \left(\gamma^Y \Omega\right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,k} \right]^2 + \langle Y, N \rangle^2 + \bar{k} \right\} - 2\bar{k}\gamma^Y (\Omega)^2 \\
&- 2\gamma^Y \Omega \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,k} \Omega_k - \bar{k} W \langle Y, N \rangle - \bar{k}\Omega \right\}.
\end{aligned}
$$

Porém, sabendo que $\gamma^Y = \dfrac{2}{1+\bar{k}|Y|^2}$, temos

$$
\left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,i} = \bar{k} \langle Y, Y_{,i} \rangle . \tag{2.9}
$$

Usando este fato, o Lema 1.1 (iii) e a definição de A^Y dada por (2.7), segue o desejado.

ii) Pela definição de $\bar{T}_i$, usando a Proposição 2.1 e em seguida o Lema 2.1, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{T}_i}{2} &= \frac{\bar{\Omega}_{i,i}}{\bar{a}_i} + \sum_{k \neq i} \frac{\bar{a}_{i,k}}{\bar{a}_i \bar{a}_k} \bar{\Omega}_k - \bar{W}\bar{\lambda}_i + \bar{k}\bar{\Omega} \\
&= \frac{1}{\gamma^Y a_i} \left[\Omega_i - \frac{\gamma^Y}{a_i} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,i} \Omega \right]_{,i} + \sum_{k \neq i} \left[-\frac{1}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,k} + \frac{1}{\gamma^Y} \frac{a_{i,k}}{a_i a_k} \right] \left[\Omega_k - \frac{\gamma^Y}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,k} \Omega \right] \\
&- \left(\frac{\lambda_i}{\gamma^Y} - \bar{k} \langle Y, N \rangle \right) \left(W + \bar{k} \langle Y, N \rangle \gamma^Y \Omega \right) + \bar{k}\gamma^Y \Omega. \\
&= \frac{1}{\gamma^Y} \frac{T_i}{2} + 2\bar{k}\Omega - \Omega \left\{ \sum_{k \neq i} \frac{1}{a_k} \frac{a_{i,k}}{a_i a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,k} + \frac{1}{a_i} \left[\frac{1}{a_i} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,i} \right]_{,i} + \bar{k}\lambda_i \langle Y, N \rangle \right\} \\
&- \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,k} \Omega_k - \bar{k} W \langle Y, N \rangle - \bar{k}\Omega \right\} - \bar{k}\Omega.
\end{aligned}
$$

O que implica

$$\frac{\bar{T}_i}{2} \;=\; \frac{1}{\gamma^Y}\frac{T_i}{2} - \frac{\bar{k}A^Y}{2}S.$$

Na última igualdade, usamos o Lema 1.1 (ii) e a definição de A^Y.

A demonstração de ***iii)*** e ***iv)*** segue diretamente da definição (2.8) e das relações ***i)*** e ***ii)***.

■

O teorema a seguir, fornece funções diferenciáveis que satisfazem o sistema de Ribaucour para hipersuperfícies na esfera e no espaço hiperbólico, a partir de funções que satisfazem tal sistema para hipersuperfícies no espaço euclidiano. Mais especificamente, considere $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície parametrizada em $\mathbb{R}^{n+1}$ e seja $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$ uma hipersuperfície parametrizada em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, o teorema nos fornece transformações de Ribaucour l^X de X em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, a partir das transformações de Ribaucour l^Y de Y em $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
Y(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} \arrow[r, "\pi_{\bar{k}}^{-1}"] \arrow[d, "l^Y"'] & X(U) \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k}) \arrow[d, "l^X"] \\
\tilde{Y}(U) \subset \mathbb{R}^{n+1} & \tilde{X}(U) \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.1. *Seja* $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície orientável, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais,* $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$*, onde* $a_i^Y = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i^Y}$ *direções principais,* $-\lambda_i^Y$ *curvaturas principais correspondentes e* N^Y *um campo de vetores unitários normais a* M*. Suponha* $\tilde{M}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície, localmente associada a* M *por uma transformação de Ribaucour, onde* $\Omega^Y, W^Y, \Omega_i^Y : V \subset U \to \mathbb{R}$ *são funções diferenciáveis satisfazendo o sistema de Ribaucour* (1.15) *e a condição* (1.16) *para a imersão* Y*. Considere a aplicação inversa da projeção estereográfica* $\pi_{\bar{k}}^{-1}$, $\bar{k} = \pm 1$*, dada em* (2.2)*. Sejam* $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$ *e* γ^Y*, dada por* (2.6)*. Considere* A^Y *definida por* (2.7) *e*

$$\bar{V} = \left\{(u_1, ..., u_n) \in V / \left(W^Y + \bar{k}\gamma^Y \left\langle Y, N^Y \right\rangle \Omega^Y\right)\left(1 - \bar{k}\gamma^Y \Omega^Y A^Y\right) \neq 0\right\}. \tag{2.10}$$

Seja $\tilde{X} : \bar{V} \to \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$ *a hipersuperfície parametrizada dada por* (1.17)*, isto é,*

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{2\bar{k}(\Omega^X)^2}{S^X}\right) X - \frac{2\Omega^X}{S^X}\left(\sum_k \Omega_k^X \frac{X_{,k}}{a_k^X} - W^X N^X\right), \tag{2.11}$$

onde as funções diferenciáveis $\Omega^X, W^X, \Omega_i^X : \bar{V} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *são definidas por*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Omega^X & = & \gamma^Y \Omega^Y, \\ W^X & = & W^Y + \bar{k}\gamma^Y \left\langle Y, N^Y \right\rangle \Omega^Y, \\ \Omega_i^X & = & \Omega_i^Y - \dfrac{\gamma^Y}{a_i^Y}\left(\dfrac{1}{\gamma^Y}\right)_{,i} \Omega^Y. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

e $S^X = \sum_k (\Omega_k^X)^2 + (W^X)^2 + \bar{k}(\Omega^X)^2$.

Então, $\tilde{X}$ *é uma transformação de Ribaucour* l^X *de* X*.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.1, devemos mostrar que as funções definidas em (2.12) satisfazem o sistema de Ribaucour (1.15) e a condição (1.16) para a imersão X.

Por hipótese, Ω^Y, W^Y e Ω_i^Y, satisfazem o sistema de Ribaucour (1.15) para a imersão Y, então derivando Ω^X com respeito à variável u_i e usando a Proposição 2.1(i) obtemos,

$$\begin{aligned}
\Omega^X_{,i} &= \gamma^Y_{,i}\Omega^Y + \gamma^Y a^Y_i \Omega^Y_i \\
&= \gamma^Y a^Y_i \left(\Omega^Y_i + \frac{\gamma^Y_{,i}}{\gamma^Y a^Y_i}\Omega^Y \right) \\
&= a^X_i \Omega^X_i. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Derivando W^X com respeito à variável u_i e usando a Proposição 2.1 novamente, temos

$$\begin{aligned}
W^X_{,i} &= -\lambda^Y_i \Omega^Y_{,i} + \left(\bar{k}\gamma^Y_{,i} \left\langle Y, N^Y \right\rangle - \lambda^Y_i \frac{\gamma^Y_{,i}}{\gamma^Y} \right) \Omega^Y + \bar{k}\gamma^Y \left\langle Y, N^Y \right\rangle \Omega^Y_{,i} \\
&= -\gamma^Y \Omega^Y_{,i} \left(\frac{\lambda^Y_i}{\gamma^Y} - \bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle \right) - \gamma^Y_{,i}\Omega^Y \left(\frac{\lambda^Y_i}{\gamma^Y} - \bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle \right) \\
&= -\lambda^X_i \left(\gamma^Y \Omega^Y_{,i} + \gamma^Y_{,i}\Omega^Y \right) \\
&= -\lambda^X_i a^X_i \Omega^X_i.
\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a equação (2.13). Por fim, derivando Ω^X_i com respeito à variável u_j, $j \neq i$, obtemos usando (2.12) e a Proposição 2.1 que

$$\begin{aligned}
\Omega^X_{i,j} &= \frac{a^Y_{j,i}}{a^Y_i}\Omega^Y_j + \frac{\gamma^Y_{,i}}{\gamma^Y a^Y_i} a^Y_j \Omega^Y_j - \left[\frac{\gamma^Y}{a^Y_i} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,i} \right]_{,j} \Omega^Y \\
&= \frac{\left(\gamma^Y a^Y_j\right)_{,i}}{\gamma^Y a^Y_i} \left(\Omega^Y_j - \frac{\gamma^Y}{a^Y_j} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,j} \Omega^Y \right) + \frac{\left(\gamma^Y a^Y_j\right)_{,i}}{\gamma^Y a^Y_i} \frac{\gamma^Y}{a^Y_j} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,j} \Omega^Y - \left[\frac{\gamma^Y}{a^Y_i} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,i} \right]_{,j} \Omega^Y \\
&= \frac{a^X_{j,i}}{a^X_i}\Omega^X_j + \left\{ \frac{\left(\gamma^Y a^Y_j\right)_{,i}}{\gamma^Y a^Y_i} \frac{\gamma^Y}{a^Y_j} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,j} - \left[\frac{\gamma^Y}{a^Y_i} \left(\frac{1}{\gamma^Y} \right)_{,i} \right]_{,j} \right\} \Omega^Y. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Observamos que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\gamma^Y a_j^Y\right)_{,i}}{\gamma^Y a_i^Y}\frac{\gamma^Y}{a_j^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,j} - \left[\frac{\gamma^Y}{a_i^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,i}\right]_{,j} \\
&= \frac{1}{a_j^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,j}\frac{\gamma^Y_{,i} a_j^Y}{a_i^Y} + \frac{1}{a_j^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,j}\frac{\gamma^Y a^Y_{j,i}}{a_i^Y} - \frac{\gamma^Y_{,j}}{a_i^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,i} + \frac{\gamma^Y a^Y_{i,j}}{(a_i^Y)^2}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,i} - \frac{\gamma^Y}{a_i^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,ij} \\
&= -\frac{\gamma^Y}{a_i^Y}\left[\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,ij} - \frac{a^Y_{j,i}}{a_j^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,j} - \frac{a^Y_{i,j}}{a_i^Y}\left(\frac{1}{\gamma^Y}\right)_{,i}\right] \\
&= -\frac{\bar{k}\gamma^Y}{a_i^Y}\left[\langle Y, Y_{,ij}\rangle - \frac{a^Y_{j,i}}{a_j^Y}\langle Y, Y_{,j}\rangle - \frac{a^Y_{i,j}}{a_i^Y}\langle Y, Y_{,i}\rangle\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Onde na penúltima igualdade usamos (2.9) e na última, usamos o item i) do Lema 1.1. Voltando em (2.14), concluímos que as funções definidas em (2.12) satisfazem o sistema de Ribaucour (1.15) para a imersão X.

Ainda falta mostrar que tais funções satisfazem a equação (1.16) para a imersão X, isto é,

$$W^X S^X (W^X + \lambda_i^X \Omega^X)(S^X - \Omega^X T_i^X) \neq 0 \text{ em } \bar{V}.$$

Pelo Lema 2.3,

$$
\begin{aligned}
S^X &= S^Y(1 - \bar{k}\gamma^Y \Omega^Y A^Y), \\
S^X - \lambda_i^X \Omega^X &= S^Y - \lambda_i^Y \Omega^Y, \\
W^X + \lambda_i^X \Omega^X &= W^Y + \lambda_i^Y \Omega^Y.
\end{aligned}
$$

Observe que, como Ω^Y, Ω_i^Y e W^Y satisfazem a condição (1.16) em V e

$$\bar{V} = \left\{(u_1, ..., u_n) \in V / \left(W^Y + \bar{k}\gamma^Y \left\langle Y, N^Y\right\rangle \Omega^Y\right)\left(1 - \bar{k}\gamma^Y \Omega^Y A^Y\right) \neq 0\right\} \subset V,$$

segue de (2.12) que Ω^X, Ω_i^X e W^X satisfazem a condição (1.16) em $\bar{V}$. Concluindo a demonstração do teorema.

$\blacksquare$

No próximo teorema vamos considerar a propriedade de comutatividade da transformação de Ribaucour em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, com a projeção estereográfica.

Teorema 2.2. *Seja M^n uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, com $a_i^Y = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i^Y}$ direções principais, $-\lambda_i^Y$ curvaturas principais correspondentes e N^Y um campo de vetores unitários normais a M. Considere $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour l^Y de Y e seja $\tilde{Y}$ a parametrização de $\tilde{M}$ dada em* (1.17), *onde as funções diferenciáveis $\Omega^Y, W^Y, \Omega_i^Y$ satisfazem o sistema de Ribaucour* (1.15) *e a condição* (1.16) *para a imersão Y. Seja $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, $\bar{k} = \pm 1$, onde $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é a aplicação inversa da projeção estereográfica dada em* (2.2). *Então existe uma transformação de Ribaucour l^X de X tal que*

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l^Y)(Y) = (l^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Demonstração: Sendo $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, com $\gamma^Y = \dfrac{2}{1 + \bar{k}|Y|^2}$, considere $\tilde{X}$ definida em (2.11), onde as funções Ω^X, Ω_i^X e W^X são dadas em (2.12). Desta forma, o Teorema 2.1 nos garante que $\tilde{X}$ é localmente uma transformação de Ribaucour l^X de X.

Considere ainda, a hipersuperfície parametrizada em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, dada por

$$Z := \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ \tilde{Y},$$

onde o fator de conformidade é $\gamma^{\tilde{Y}} = \dfrac{2}{1+\bar{k}|\tilde{Y}|^2}$.

Para provar o teorema, é preciso mostrar que as primeiras e segundas formas fundamentais de Z e $\tilde{X}$ coincidem, isto é, devemos mostrar que $a_i^{\tilde{X}} = a_i^Z$ e que $\lambda_i^{\tilde{X}} = \lambda_i^Z$.

Primeiro vamos obter uma relação entre γ^Y e $\gamma^{\tilde{Y}}$.

Sabemos que a imersão $\tilde{Y}$ é dada por (1.17) onde $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, então

$$\tilde{Y} = Y - \frac{2\Omega^Y}{S^Y}\left(\sum_k \Omega_k^Y \frac{Y_{,k}}{a_k^Y} - W^Y N^Y\right). \tag{2.15}$$

Assim, usando o fato de que $S^Y = \displaystyle\sum_{k=1}^n (\Omega_k^Y)^2 + (W^Y)^2$, temos

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}|^2 &= |Y|^2 - \frac{4\Omega^Y}{S^Y}\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^Y}\left\langle Y_{,k}, Y\right\rangle \Omega_k^Y - W^Y \left\langle Y, N^Y\right\rangle - \Omega^Y\right] \\ &= |Y|^2 - 2\Omega^Y A^Y, \end{aligned}$$

onde usamos (2.7) na última igualdade. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^{\tilde{Y}}} &= \frac{1+\bar{k}|\tilde{Y}|^2}{2} \\ &= \frac{1+\bar{k}|Y|^2}{2} - \bar{k}\Omega^Y A^Y \\ &= \frac{1-\bar{k}\gamma^Y\Omega^Y A^Y}{\gamma^Y}. \end{aligned}$$

O que implica que

$$\gamma^{\tilde{Y}} = \frac{\gamma^Y}{1-\bar{k}\gamma^Y\Omega^Y A^Y}. \tag{2.16}$$

Agora observe que, como $\tilde{X}$ é uma transformação de Ribaucour l^X de X e $\tilde{Y}$ é uma transformação de Ribaucour l^Y de Y, pelo Teorema 1.2, temos que

$$a_i^{\tilde{X}} = \frac{S^X - \Omega^X T_i^X}{S^X} a_i^X, \quad e \quad a_i^{\tilde{Y}} = \frac{S^Y - \Omega^Y T_i^Y}{S^Y} a_i^Y.$$

Por outro lado, sabemos que $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$ e $Z = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ \tilde{Y}$, então, pela Proposição 2.1(i) segue que

$$a_i^X = \gamma^Y a_i^Y, \quad e \quad a_i^Z = \gamma^{\tilde{Y}} a_i^{\tilde{Y}}.$$

Logo, diante da afirmação (2.16) e usando o Lema 2.3 e a Proposição 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} a_i^{\tilde{X}} &= \frac{S^X - \Omega^X T_i^X}{S^X} a_i^X \\ &= \frac{S^Y - \Omega^Y T_i^Y}{S^Y \dfrac{\gamma^Y}{\gamma^{\tilde{Y}}}} \gamma^Y a_i^Y \\ &= \gamma^{\tilde{Y}} a_i^{\tilde{Y}} \\ &= a_i^Z. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração do teorema, ainda falta mostrar que $\lambda_i^{\tilde{X}} = \lambda_i^Z$. Pelo Teorema 1.2,

$$\lambda_i^{\tilde{X}} = \frac{W^X T_i^X + \lambda_i^X S^X}{S^X - \Omega^X T_i^X} \quad e \quad \lambda_i^{\tilde{Y}} = \frac{W^Y T_i^Y + \lambda_i^Y S^Y}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y},$$

e a Proposição 2.1 (ii), nos diz que

$$\lambda_i^X = \frac{\lambda_i^Y}{\gamma^Y} - \bar{k}\left\langle Y, N^Y \right\rangle \quad e \quad \lambda_i^Z = \frac{\lambda_i^{\tilde{Y}}}{\gamma^{\tilde{Y}}} - \bar{k}\left\langle \tilde{Y}, N^{\tilde{Y}} \right\rangle.$$

Por outro lado, sabemos pela equação (1.19) que

$$N^{\tilde{Y}} = N^Y + \frac{2W^Y}{S^Y}\left(\sum_k \Omega_k^Y \frac{Y_{,k}}{a_k^Y} - W^Y N^Y\right).$$

Então, considerando o produto interno de $N^{\tilde{Y}}$ com $\tilde{Y}$, dado em (2.15) e usando (2.7), obtemos

$$\left\langle \tilde{Y}, N^{\tilde{Y}} \right\rangle = \left\langle Y, N^{Y} \right\rangle + W^{Y} A^{Y}.$$

Portanto, usando a definição (2.12), a afirmação (2.16), o Lema 2.3 e as considerações acima, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_i^{\tilde{X}} &= \frac{W^X T_i^X + \lambda_i^X S^X}{S^X - \Omega^X T_i^X} \\
&= \frac{1}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y} \left(W^Y + \bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle \gamma^Y \Omega^Y \right) \left(\frac{T_i^Y}{\gamma^Y} - \bar{k} A^Y S^Y \right) \\
&+ \frac{1}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y} \left(\frac{\lambda_i^Y}{\gamma^Y} - \bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle \right) S^Y \left(1 - \bar{k} \gamma^Y \Omega^Y A^Y \right) \\
&= \frac{1}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y} \left\{ \frac{W^Y T_i^Y + \lambda_i^Y S^Y}{\gamma^Y} \left(1 - \bar{k} \gamma^Y \Omega^Y A^Y \right) + W^Y T_i^Y \bar{k} \Omega^Y A^Y - W^Y \bar{k} A^Y S^Y \right\} \\
&- \frac{\bar{k} \left\langle Y, N^Y \right\rangle}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y} \left(S^Y - \Omega^Y T_i^Y \right) \\
&= \frac{W^Y T_i^Y + \lambda_i^Y S^Y}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y} \frac{1}{\gamma^{\tilde{Y}}} - \bar{k} \left(\left\langle Y, N^Y \right\rangle + W^Y A^Y \right) \\
&= \frac{\lambda_i^{\tilde{Y}}}{\gamma^{\tilde{Y}}} - \bar{k} \left\langle \tilde{Y}, N^{\tilde{Y}} \right\rangle \\
&= \lambda_i^Z.
\end{aligned}$$

Concluindo assim, a demonstração do teorema.

■

Observação 2.2. Dada uma hipersuperfície $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e a inversa de sua projeção estereográfica $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, as transformações de Ribaucour de M e de

$\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ fornecem famílias de hipersuperfícies associadas. O teorema de comutatividade (Teorema 2.2) prova que estas famílias comutam com a projeção estereográfica, isto é, dada uma hipersuperfície da família associada a M, existe uma hipersuperfície da família associada a $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ que comuta com a projeção estereográfica. Isto não ocorre se considerarmos quaisquer hipersuperfícies das duas famílias. Este fato será mostrado através de um exemplo no capítulo 4.

Antes de finalizar esta seção veremos que, de modo análogo ao que foi feito neste capítulo, a partir das transformações de Ribaucour de hipersuperfícies em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, podemos obter as transformações de Ribaucour de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, como detalhamos na observação a seguir.

Observação 2.3. Considere $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, uma hipersuperfície em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$ e seja $Y = \pi_{\bar{k}} \circ X$ uma hipersuperfície parametrizada em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde $\pi_{\bar{k}}$ é a projeção estereográfica quando $\bar{k} = 1$ (ou projeção estereográfica hiperbólica quando $\bar{k} = -1$).

Seja $\tilde{X}$ uma transformação de Ribaucour l^X de X, em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, dada por (1.17), isto é

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{2\bar{k}(\Omega^X)^2}{S^X}\right) X - \frac{2\Omega^X}{S^X}\left(\sum_k \Omega_k^X \frac{X_{,k}}{a_k^X} - W^X N^X\right),$$

onde $\Omega^X, W^X, \Omega_i^X$ são funções diferenciáveis satisfazendo o sistema de Ribaucour (1.15) e a condição (1.16) para a imersão X. Seja $\tilde{Y}$ uma hipersuperfície parametrizada em $\mathbb{R}^{n+1}$, dada por (1.17), isto é,

$$\tilde{Y} = Y - \frac{2\Omega^Y}{S^Y}\left(\sum_k \Omega_k^Y \frac{Y_{,k}}{a_k^Y} - W^Y N^Y\right),$$

onde $\Omega^Y, W^Y, \Omega_i^Y$ são funções diferenciáveis dadas por

$$\begin{cases} \Omega^Y &= \gamma^X \Omega^X, \\ W^Y &= W^X - \bar{k}\gamma^X N_0^X \Omega^X, \\ \Omega_i^Y &= \Omega_i^X - \dfrac{\gamma^X}{a_i^X}\left(\dfrac{1}{\gamma^X}\right)_{,i} \Omega^X. \end{cases}$$

onde $\gamma^X = \dfrac{1}{1-\bar{k}X_0}$, $X_0 = \bar{k}\left\langle X, \xi_{n+2}\right\rangle_{\bar{k}}$, $N_0^X = \bar{k}\left\langle N^X, \xi_{n+2}\right\rangle_{\bar{k}}$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{n+2}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^{n+2}$ e o produto interno $\langle , \rangle_{\bar{k}}$ é dado por (2.1). Então $\tilde{Y}$ é uma transformação de Ribaucour l^Y de Y.

Além disso, vale o teorema de comutatividade para estas transformações de Ribaucour, l^X e l^Y, com a projeção estereográfica, ou seja,

$$(\pi_{\bar{k}} \circ l^X)(X) = (l^Y \circ \pi_{\bar{k}})(X).$$

As demonstrações dos fatos acima, são semelhantes as demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2.

Capítulo 3

Hipersuperfícies de Dupin

Neste capítulo, estudamos hipersuperfícies de Dupin em formas espaciais, parametrizadas por linhas de curvatura ortogonais. Fornecemos condições necessárias e suficientes para que a transformação de Ribaucour leve hipersuperfície de Dupin em hipersuperfície de Dupin, estendendo o resultado obtido no espaço euclidiano, por Corro, Ferreira e Tenenblat, em [5]. Além disso, provamos um resultado análogo ao Teorema 2.2, restrito às hipersuperfícies de Dupin, isto é, obtemos um teorema de existência de transformações de Ribaucour para hipersuperfícies de Dupin que comutam com a projeção estereográfica.

3.1 Transformação de Ribaucour entre Hipersuperfícies de Dupin

Nesta seção, fornecemos a definição de hipersuperfície de Dupin em $\bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, em seguida caracterizamos uma transformação de Ribaucour que leva hipersuperfícies de Dupin em hipersuperfícies de Dupin em $\bar{M}(\bar{k})$, estendendo assim, o resultado contido em [5]. Observamos que transformações de Ribaucour não são transformações de Lie, portanto as hipersuperfícies de Dupin obtidas por tais transformações não são Lie equivalentes (ver [5]).

Definição 3.1. Seja $M^n \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$. Dizemos que M^n é uma hipersuperfície de Dupin se suas curvaturas principais são constantes ao longo de suas linhas de curvatura correspondentes.

Observação 3.1. Se $M^n \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, é uma hipersuperfície de Dupin, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, onde $a_i = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i}$ direções principais, $-\lambda_i$ curvaturas principais correspondentes, então

$$\lambda_{i,i} = 0,$$

para cada $1 \leq i \leq n$.

Teorema 3.1. *Seja M^n uma hipersuperfície de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, orientável, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, com $a_i = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i}$ direções principais, $-\lambda_i$ curvaturas principais correspondentes e N um campo de vetores unitários normais a M. Considere $\tilde{M}$ localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour l^Y de Y. Então $\tilde{M}$ é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se, as funções Ω_i, Ω e W dadas em (1.15), satisfazem a seguinte condição adicional para cada $1 \leq i \leq n$,*

$$T_{i,i} = 0, \tag{3.1}$$

onde T_i é dada por (1.21).

Demonstração: Considere S dada em (1.18), isto é, $S = \sum_k \Omega_k^2 + W^2 + \bar{k}\Omega^2$. Derivando tal expressão em relação à variável u_i, para cada $1 \leq i \leq n$ e sabendo que Ω, Ω_i e W são funções que satisfazem (1.15), temos

$$
\begin{aligned}
S_{,i} &= 2\left\{\sum_{k\neq i}\Omega_k\Omega_{k,i}+\Omega_i\Omega_{i,i}+WW_{,i}+\bar{k}\Omega\Omega_{,i}\right\}\\
&= 2a_i\Omega_i\left\{\frac{\Omega_{i,i}}{a_i}+\sum_{k\neq i}\frac{a_{i,k}}{a_ia_k}\Omega_k-W\lambda_i+\bar{k}\Omega\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, por (1.21)

$$
S_{,i}=a_i\Omega_iT_i. \tag{3.2}
$$

Logo, derivando a expressão da curvatura principal de $\tilde{Y}$, dada por (1.20), usando (1.15), (3.2) e a hipótese que M é uma hipersuperfície de Dupin, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_{i,i} &= \frac{\left(W_{,i}T_i+WT_{i,i}+\lambda_iS_{,i}\right)\left(S-\Omega T_i\right)-\left(WT_i+\lambda_iS\right)\left(S_{,i}-\Omega_{,i}T_i-\Omega T_{i,i}\right)}{\left(S-\Omega T_i\right)^2}\\
&= \frac{\left(S-\Omega T_i\right)WT_{i,i}+\left(WT_i+\lambda_iS\right)\Omega T_{i,i}}{\left(S-\Omega T_i\right)^2}\\
&= \frac{S\left(W+\lambda_i\Omega\right)T_{i,i}}{\left(S-\Omega T_i\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Pela Observação 3.1, $\tilde{M}$ é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se, $\tilde{\lambda}_{i,i}=0$. Além disso, pelo Teorema 1.1, $S\left(W+\lambda_i\Omega\right)\neq 0$. Logo $\tilde{M}$ é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se, $T_{i,i}=0$, concluindo a demonstração do teorema.

■

Observação 3.2. Se $M^n\subset\bar{M}(\bar{k})$ é uma hipersuperfície de Dupin, denotaremos por l_D uma transformação de Ribaucour de M que satisfaz (3.1), isto é, uma transformação de Ribaucour que preserva a propriedade de ser Dupin.

3.2 Comutatividade restrita a hipersuperfícies de Dupin

Nesta seção demonstramos um teorema sobre a comutatividade da transformação de Ribaucour com a aplicação inversa da projeção estereográfica, restrito às hipersuperfícies de Dupin.

Teorema 3.2. *Seja M^n uma hipersuperfície de Dupin orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais, $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$, com $a_i^Y = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, $e_i = \dfrac{Y_{,i}}{a_i^Y}$ direções principais, $-\lambda_i^Y$ curvaturas principais correspondentes e N^Y um campo de vetores unitários normais a M. Suponha que exista uma transformação de Ribaucour l_D de Y tal que as funções diferenciáveis $\Omega^Y, W^Y, \Omega_i^Y : V \subset U \to \mathbb{R}$ satisfaçam o sistema de Ribaucour* (1.15) *e a equação* (1.16) *para a imersão Y. Seja $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, a hipersuperfície de Dupin em $\bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, obtida pela aplicação inversa da projeção estereográfica $\pi_{\bar{k}}^{-1}$, dada em* (2.2). *Então existe uma transformação de Ribaucour l_D^X de X tal que*

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l_D^Y)(Y) = (l_D^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Demonstração: Sabemos pelo Teorema 2.2, que existe uma transformação de Ribaucour, l^X de X, dada por

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{2\bar{k}(\Omega^X)^2}{S^X}\right) - \frac{2\Omega^X}{S^X}\left(\sum_k \Omega_k^X \frac{X_{,k}}{a_k^X} - W^X N^X\right), \tag{3.3}$$

onde Ω^X, Ω_k^X e W^X, são dados por (2.12) e S^X é dada por (1.18), com $\bar{k} = \pm 1$, de forma que

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l^Y)(Y) = (l^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Então, a demonstração do Teorema 3.2 se reduz a mostrar que l^X satisfaz a equação (3.1), para a imersão X. O Lema 2.3 (ii) diz que

$$T_i^X = \frac{T_i^Y}{\gamma^Y} - \bar{k} A^Y S^Y.$$

Por hipótese, $T_{i,i}^Y = 0$. Logo, derivando a expressão acima em relação a variável u_i, e usando (2.9), temos que,

$$T_{i,i}^X = \bar{k}\left(\langle Y, Y_{,i} \rangle T_i^Y - (A^Y S^Y)_{,i} \right). \tag{3.4}$$

Porém, de (2.7) segue que

$$A^Y S^Y = 2\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^Y} \langle Y, Y_{,k} \rangle \Omega_k^Y - W^Y \left\langle Y, N^Y \right\rangle - \Omega^Y \right\}.$$

Derivando a expressão acima , com respeito à variável u_i, obtemos

$$\begin{aligned}
(A^Y S^Y)_{,i} &= 2\left\{ \sum_{k\neq i} \left[\frac{1}{a_k^Y} \langle Y, Y_{,k} \rangle \right]_{,i} \Omega_k^Y + \sum_{k\neq i} \frac{1}{a_k^Y} \langle Y, Y_{,k} \rangle \Omega_{k,i}^Y \right\} \\
&+ 2\left\{ \left[\frac{1}{a_i^Y} \langle Y, Y_{,i} \rangle \right]_{,i} \Omega_i^Y + \frac{1}{a_i^Y} \langle Y, Y_{,i} \rangle \Omega_{i,i}^Y - W_{,i}^Y \left\langle Y, N^Y \right\rangle - W^Y \left\langle Y, N_{,i}^Y \right\rangle - \Omega_{,i}^Y \right\} \\
&= 2a_i^Y \Omega_i^Y \left\{ \sum_{k\neq i} \frac{1}{a_k^Y} \langle Y, Y_{,k} \rangle \frac{a_{i,k}^Y}{a_i^Y a_k^Y} + \frac{1}{a_i^Y} \left[\frac{1}{a_i^Y} \langle Y, Y_{,i} \rangle \right]_{,i} + \lambda_i^Y \left\langle Y, N^Y \right\rangle - 1 \right\} \\
&+ 2\sum_{k\neq i} \left[\frac{1}{a_k^Y} \langle Y, Y_{,k} \rangle \right]_{,i} \Omega_k^Y + 2\langle Y, Y_{,i} \rangle \left\{ \frac{\Omega_{i,i}^Y}{a_i^Y} - \lambda_i^Y W^Y \right\} \\
&= 2\sum_{k\neq i} \left[\frac{1}{a_k^Y} \langle Y, Y_{,k} \rangle \right]_{,i} \Omega_k^Y + \langle Y, Y_{,i} \rangle T_i^Y - 2\langle Y, Y_{,i} \rangle \sum_{k\neq i} \frac{a_{i,k}^Y}{a_i^Y a_k^Y} \Omega_k^Y.
\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a definição de T_i^Y dada em (1.21) e o Lema 1.1(ii). Substituindo a equação acima em (3.4), segue que

$$
\begin{aligned}
T_{i,i}^X &= -2\bar{k}\sum_{k\neq i}\left\{-\frac{a_{k,i}^Y}{(a_k^Y)^2}\langle Y, Y_{,k}\rangle + \frac{1}{a_k^Y}\langle Y, Y_{,ki}\rangle - \frac{a_{i,k}^Y}{a_i^Y a_k^Y}\langle Y, Y_{,i}\rangle\right\}\Omega_k^Y \\
&= -2\bar{k}\sum_{k\neq i}\frac{\Omega_k^Y}{a_k^Y}\left\{\langle Y, Y_{,ki}\rangle - \frac{a_{k,i}^Y}{a_k^Y}\langle Y, Y_{,k}\rangle - \frac{a_{i,k}^Y}{a_i^Y}\langle Y, Y_{,i}\rangle\right\} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Na última igualdade usamos o Lema 1.1(i). Concluindo a demonstração do teorema.

■

Observação 3.3. Seja Y uma hipersuperfície parametrizada de Dupin em $\mathbb{R}^{n+1}$, então $X = \pi_{\bar{k}}^{-1}\circ Y$, $\bar{k} = \pm 1$, é uma hipersuperfície de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, obtida pela inversa da projeção estereográfica. A demonstração do Teorema 3.2 prova que, se $\tilde{Y}$ é uma hipersuperfície de Dupin obtida a partir de Y por uma transformação de Ribaucour que preserva a propriedade de ser Dupin, então a hipersuperfície $\tilde{X}$ obtida no Teorema 2.1 é uma hipersuperfície de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, obtida a partir de X por este tipo de transformação de Ribaucour.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, apresentamos duas aplicações dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Estudamos as transformações de Ribaucour da esfera $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e de um cone tridimensional em $\mathbb{R}^4$, cuja curvatura de Möebius é constante. O cone é, a menos de transformações de Möebius, a única hipersuperfície de Dupin parametrizada por linhas de curvatura em $\mathbb{R}^4$, cuja curvatura de Möebius é constante. Tal resultado foi obtido por Riveros-Rodrigues-Tenenblat em [23]. Utilizando os Teoremas 1.1 e 1.2 obtidos por Corro-Ferreira-Tenenblat em [5] e por Tenenblat-Wang em [24], obtemos as transformações de Ribaucour localmente associadas à esfera e ao cone. Usamos o Teorema 3.1 para caracterizar quais dessas transformações são hipersuperfícies de Dupin. Utilizamos os teoremas de comutatividade (Teoremas 2.2 e 3.2) para obter as correspondentes hipersuperfícies em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$. Obtemos novas famílias de hipersuperfícies de Dupin. Mostramos que, genericamente, as que são associadas à esfera não têm curvatura de Lie constante e as que são associadas ao cone não têm curvatura de Möebius constante.

4.1 Transformação de Ribaucour aplicada à esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$

Nesta seção, vamos aplicar os resultados dos capítulos anteriores à esfera $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais. Obtemos as transformações de Ribaucour localmente associadas à esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$. Usamos o Teorema 3.1 para caracterizar as transformações que são hipersuperfícies de Dupin. Em seguida, utilizamos os teoremas de comutatividade para construir as hipersuperfícies correspondentes em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$. Obtemos novas famílias de hipersuperfícies de Dupin cujas curvaturas de Lie são, genericamente, não constantes. Concluímos esta seção mostrando através de um exemplo a seguinte observação: A família de hipersuperfícies associadas a M, por uma transformação de Ribaucour, comuta com a família associada a $\pi_{\bar{k}}^{-1}(M)$ (Teorema 2.2). Entretanto, nem toda hipersuperfície da primeira família comuta com qualquer hipersuperfície da segunda.

O lema a seguir, será demonstrado usando a teoria de equações diferenciais.

Lema 4.1. *Considere $h_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, funções diferenciáveis satisfazendo o sistema de equações*

$$h_{i,j} = \frac{b_{j,i}}{b_i} h_j, \qquad \forall j \neq i, \tag{4.1}$$

onde

$$U = \left\{ (u_1, ...u_n); 0 < u_1 < \pi, -\frac{\pi}{2} < u_i < \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{4.2}$$

$$b_i = \prod_{j=i+1}^{n} \cos u_j, \qquad 1 \leq i \leq n-1, \qquad b_n = 1. \tag{4.3}$$

Então,

$$h_i = -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}} \sum_{k<i} b_k f_k + f_i^{'},$$

onde $f_i = f_i(u_i)$ são funções diferenciáveis.

Demonstração: A demonstração do Lema 4.1 será feita por indução. De (4.1) para $i = 1$, usando (4.3), temos que

$$h_{1,j} = 0, \;\; j \neq 1.$$

Logo,

$$h_1 = f_1^{'},$$

onde $f_1 = f_1(u_1)$. Substituindo a expressão de h_1 em (4.1), para $i = 2$, segue que

$$h_{2,j} = 0, \text{ para } j > 2 \qquad \text{e}$$

$$h_{2,1} = \frac{b_{1,2}}{b_2} h_1 = -\frac{\text{sen} u_2}{\cos u_2} \frac{b_1}{b_2} h_1 = -\text{sen} u_2 h_1 = -\text{sen} u_2 f_1^{'}.$$

Logo,

$$h_2 = -\sin u_2 f_1 + f_2^{'},$$

onde $f_2 = f_2(u_2)$. Também podemos escrever h_2 da seguinte forma,

$$h_2 = -\frac{\sin u_2}{b_1} \sum_{j<2} b_j f_j + f_2^{'}.$$

Sendo asssim, suponha por indução que

$$h_i = -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}} \sum_{j<i} b_j f_j + f_i^{'}, \quad \forall i \leq k-1,$$

e vamos mostrar que tal igualdade também vale para $i = k$. De (4.1), para $i = k$, temos que

$$h_{k,j} = 0, \text{ para } j > k \quad \text{e} \quad h_{k,j} = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} b_j h_j, \text{ para } j < k. \tag{4.4}$$

Então, para $j = 1$ e $k > 1$, temos

$$h_{k,1} = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} b_1 f_1',$$

Integrando a expressão acima, em relação à variável u_1, segue que

$$h_k = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} b_1 f_1 + H(u_2, ..., u_i).$$

O que implica

$$\begin{aligned} h_{k,2} &= -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} b_{1,2} f_1 + H_{,2}(u_2, ..., u_i) \\ &= \frac{\sin u_k}{b_{k-1}} \sin u_2 b_2 f_1 + H_{,2}(u_2, ..., u_i) \end{aligned}$$

Porém, em (4.4), para $j = 2$, temos

$$h_{k,2} = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} b_2(-\sin u_2 f_1 + f_2').$$

Logo,

$$H(u_2, ..., u_i) = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} b_2 f_2 + H(u_3, ..., u_i).$$

Portanto,

$$h_k = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} \sum_{l<3} b_l f_l + H(u_3, ..., u_i).$$

Novamente por indução, podemos supor que

$$h_k = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} \sum_{l<k-1} b_l f_l + H(u_{k-1}, u_k). \tag{4.5}$$

Derivando tal expressão com respeito à variável u_{i-1}, segue que

$$h_{k,k-1} = \frac{\sin u_k \sin u_{k-1}}{b_{k-2}} \sum_{l<k-1} b_l f_l + H_{,k-1}(u_{k-1}, u_k).$$

Porém, em (4.4), para $j = k-1$, temos

$$h_{k,k-1} = -\sin u_k \left(-\frac{\sin u_{k-1}}{b_{k-2}} \sum_{l<k-1} b_l f_l + f_{k-1}^{'} \right).$$

Logo,

$$H(u_{k-1}, u_k) = -\sin u_k f_{k-1} + f_k^{'}.$$

Voltando em (4.5), concluímos que

$$h_k = -\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} \sum_{l<k} b_l f_l + f_k^{'}.$$

■

O lema seguinte nos fornece relações algébricas sobre as funções b_i definidas em (4.3), que serão utilizadas nos próximos resultados.

Lema 4.2. *Sejam b_i, $1 \leq i \leq n$, funções dadas por* (4.3)*, definidas no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dado por* (4.2)*. Então seguem as seguintes identidades,*

(i)

$$b_i = b_{i+1} \cos u_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \tag{4.6}$$

(ii)

$$b_1^2 \cos^2 u_1 + \sum_{j=1}^{i} b_j^2 \sin^2 u_j = b_i^2, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4.7}$$

(iii)

$$\sum_{k>i} \frac{sen^2 u_k}{b_{k-1}^2} + 1 = \frac{1}{b_i^2}, \quad 1 \leq i < n. \tag{4.8}$$

Demonstração: **(i)** Imediato.

(ii) A identidade (4.7) vale para $i = 1$. Por indução, suponha que (4.7) vale para $i = k - 1$, então para $i = k$, temos

$$\begin{aligned} b_1^2 \cos^2 u_1 + \sum_{j=1}^{k} b_j^2 \sin^2 u_j &= b_1^2 \cos^2 u_1 + \sum_{j=1}^{k-1} b_j^2 \sin^2 u_j + b_k^2 \sin^2 u_k \\ &= b_{k-1}^2 + b_k^2 \sin^2 u_k \\ &= b_k^2. \end{aligned}$$

Portanto a identidade (4.7), vale para $1 \leq i \leq n$.

(iii) Observe que, para $i = n - 1$,

$$\frac{\text{sen}^2 u_n}{b_{n-1}^2} + 1 = \frac{\text{sen}^2 u_n + \cos^2 u_n}{\cos^2 u_n} = \frac{1}{b_{n-1}^2}.$$

Então, suponha por indução que (4.8) vale para $i = j + 1$. Logo, para $i = j$ segue que,

$$\begin{aligned} \sum_{k>j} \frac{\text{sen}^2 u_k}{b_{k-1}^2} + 1 &= \frac{\text{sen}^2 u_{j+1}}{b_j^2} + \left(\sum_{k>j+1} \frac{\text{sen}^2 u_k}{b_{k-1}^2} + 1 \right) \\ &= \frac{\text{sen}^2 u_{j+1}}{b_j^2} + \frac{1}{b_{j+1}^2} \\ &= \frac{1}{b_j^2}. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos (4.6), o que finaliza a demonstração.

■

O próximo lema apresenta uma parametrização por linhas de curvaturas ortogonais da esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ e fornece as primeira e segunda formas fundamentais de tal parametrização.

Lema 4.3. *Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ a parametrização de uma hipersuperfície, dada por*

$$Y(u_1, ..., u_n) = \frac{\alpha}{1-\beta}\left\{ b_1 \cos u_1 \xi_1 + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin u_j \xi_{j+1} \right\}, \tag{4.9}$$

onde U é dado por (4.2), $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{n+1}$ base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$ e b_i, $1 \leq i \leq n$, são dados por (4.3). Então, Y é uma parametrização da esfera por linhas de curvatura ortogonais e as primeira e segunda formas fundamentais de Y são dadas por

$$a_i^Y = \frac{\alpha}{1-\beta} b_i, \qquad \lambda_i^Y = -\frac{1-\beta}{\alpha}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4.10}$$

Demonstração: Inicialmente verificamos que Y é a parametrização de uma esfera. De fato, segue de (4.3) e (4.7) que

$$\langle Y, Y \rangle = \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2} b_n^2 = \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}.$$

Derivando Y em relação à variável u_i, temos que

$$Y_{,1} = \frac{\alpha}{1-\beta} b_1 \left\{ -\sin u_1 \xi_1 + \cos u_1 \xi_2 \right\},$$

$$Y_{,i} = \frac{\alpha}{1-\beta}\left\{ b_{1,i} \cos u_1 \xi_1 + \sum_{j=1}^{n} b_{j,i} \sin u_j \xi_{j+1} + b_i \cos u_i \xi_{i+1} \right\}, i \geq 2.$$

Observe que $b_{i,j} = 0$, para $j \leq i$ e $b_{i,j} = -\dfrac{\sin u_j}{\cos u_j} b_i$, para $j > i$. Logo,

$$Y_{,i} = \frac{\alpha}{1-\beta}\left\{ -\frac{\mathrm{sen} u_i}{\cos u_i}\left[b_1 \cos u_1 \xi_1 + \sum_{j<i} b_j \sin u_j \xi_{j+1} \right] + b_i \cos u_i \xi_{i+1} \right\}, i \geq 2.$$

Usando (4.7), os fatos acima e considerando $1 < i < k$, segue que

$$\begin{aligned}
\langle Y_{,i}, Y_{,k}\rangle &= \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}\left\{\frac{\mathrm{sen}u_i}{\cos u_i}\frac{\mathrm{sen}u_k}{\cos u_k}\left[b_1^2\cos^2 u_1 + \sum_{j<i} b_j^2 \mathrm{sen}u_j^2\right] - b_i^2 \mathrm{sen}u_i \cos u_i \frac{\mathrm{sen}u_k}{\cos u_k}\right\}\\
&= \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}\frac{\mathrm{sen}u_k}{\cos u_k}\left\{\frac{\mathrm{sen}u_i}{\cos u_i}b_{i-1}^2 - b_i^2\cos u_i \mathrm{sen}u_i\right\}\\
&= \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}\frac{\mathrm{sen}u_k}{\cos u_k}b_i^2\left\{\mathrm{sen}u_i\cos u_i - \cos u_i \mathrm{sen}u_i\right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle Y_{,i}, Y_{,k}\rangle = 0, \quad i,k \neq 1, \text{ distintos.}$$

Além disso,

$$\langle Y_{,1}, Y_{,k}\rangle = \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}\left\{b_1^2\mathrm{sen}u_1\cos u_1\frac{\mathrm{sen}u_k}{\cos u_k} - b_1^2\cos u_1 \mathrm{sen}u_1\frac{\mathrm{sen}u_k}{\cos u_k}\right\}, \quad k > 1.$$

Portanto, Y é uma parametrização por curvas ortogonais.

Agora, observe que, para $i \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\langle Y_{,i}, Y_{,i}\rangle &= \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}\left\{\frac{\mathrm{sen}^2 u_i}{\cos^2 u_i}\left[b_1^2\cos^2 u_1 + \sum_{j<i} b_j^2\mathrm{sen}^2 u_j\right] + b_{i-1}^2\right\}\\
&= \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}b_{i-1}^2\frac{1}{\cos^2 u_i}\\
&= \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}b_i^2,
\end{aligned}$$

onde usamos (4.6) e (4.7). Para $i = 1$,

$$\langle Y_{,1}, Y_{,1}\rangle = \frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}b_1^2.$$

Como $a_i^Y = |Y_{,i}|$, $1 \leq i \leq n$, segue que

$$a_i^Y = \frac{\alpha}{1-\beta} b_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Para obter as curvaturas principais, como a imagem de Y descreve a esfera de raio $\dfrac{\alpha}{1-\beta}$ com centro na origem, o vetor normal a Y pode ser dado por $N^Y = -\dfrac{Y}{|Y|}$. Como $N_{,i}^Y = -\dfrac{Y_{,i}}{\frac{\alpha}{1-\beta}}$, então Y é uma hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura ortogonais e $N_{,i}^Y = \lambda_i^Y Y_{,i}$, $1 \leq i \leq n$, onde

$$\lambda_i^Y = -\frac{1-\beta}{\alpha}, \ \ 1 \leq i \leq n.$$

■

A proposição a seguir, nos fornece famílias de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^{n+1}$, associadas à esfera por uma transformação de Ribaucour e também nos apresenta novas famílias de hipersuperfícies de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$. Mais adiante, veremos que essas hipersuperfícies de Dupin têm curvaturas de Lie não constantes.

Proposição 4.1. *Seja $Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ a parametrização da esfera dada por* (4.9)*. Então, $\tilde{Y}$ é uma hipersuperfície parametrizada, localmente associada a Y por uma transformação de Ribaucour l^Y se, e somente se, $\tilde{Y}$ é dada por*

$$\tilde{Y} = Y - \frac{2\Omega^Y}{S^Y}\left(\sum_k \Omega_k^Y \frac{Y_{,k}}{a_k^Y} - W^Y N^Y\right), \tag{4.11}$$

onde,

$$\Omega^Y = \frac{\alpha}{1-\beta}\sum_{k=1}^{n} b_k f_k, \quad W^Y = \sum_{k=1}^{n} b_k f_k + c, \quad \Omega_i^Y = -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\sum_{k<i} b_k f_k + f_i', \tag{4.12}$$

onde $f_i = f_i(u_i)$ são funções diferenciáveis arbitrárias, $i = 1, ..., n$ e $c \neq 0$. Considere

$X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, onde $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é a aplicação inversa da projeção estereográfica, dada em (2.2), *e a transformação de Ribaucour l^X de X, dada por* (3.3), *onde*

$$\Omega^X = \frac{2\alpha}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)} \sum_{k=1}^{n} b_k f_k, \qquad W^X = -\frac{\bar{k}(1+\beta)-(1-\beta)}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)} \sum_{k=1}^{n} b_k f_k + c,$$

$$\Omega_i^X = -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}} \sum_{k<i} b_k f_k + f_i'. \tag{4.13}$$

Então l^X e l^Y comutam com a projeção estereográfica, isto é,

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l^Y)(Y) = (l^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Além disso, se

$$f_i = A_i \cos u_i + B_i \sin u_i + C_i, \qquad i = 1, ..., n, \tag{4.14}$$

onde $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$, temos que $\tilde{Y}$ é de Dupin e é localmente associada a Y por uma transformação de Ribaucour l_D^Y e, existe uma transformação de Ribaucour l_D^X de X tal que

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l_D^Y)(Y) = (l_D^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Demonstração: Sejam Ω^Y, Ω_i^Y e $W^Y : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funções satisfazendo o sistema de Ribaucour (1.15), em relação à imersão Y, Como a_i^Y e λ_i^Y são dadas por (4.10), segue que

$$\Omega_{i,j}^Y = \frac{b_{j,i}}{b_i} \Omega_j^Y, j \neq i, \tag{4.15}$$

$$\Omega_{,i}^Y = \frac{\alpha}{1-\beta} b_i \Omega_i^Y, \tag{4.16}$$

$$W^Y_{,i} = b_i \Omega^Y_i. \tag{4.17}$$

De (4.17), (4.16) e (4.10) segue que

$$W^Y = \frac{1-\beta}{\alpha}\Omega^Y + c,$$

De (1.16), devemos ter $W^Y + \lambda_i^Y \Omega^Y \neq 0$, portanto $c \neq 0$. Como Ω^Y_i, $1 \leq i \leq n$, satisfazem as equações (4.15), pelo Lema 4.1, temos que

$$\Omega^Y_i = -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}} \sum_{k<i} b_k f_k + f_i^{'}. \tag{4.18}$$

De (4.16), temos

$$\Omega^Y_{,1} = \frac{\alpha}{1-\beta} b_1 f_1^{'}.$$

Integrando tal expressão em relação à variável u_1, segue que

$$\Omega^Y = \frac{\alpha}{1-\beta} b_1 f_1 + G(u_2, ..., u_n).$$

Agora, derivando a expressão obtida, em relação à variável u_2, obtemos

$$\Omega^Y_{,2} = -\frac{\alpha}{1-\beta} b_2 \sin u_2 f_1 + G_{,2}(u_2, ..., u_n).$$

Por outro lado, de (4.16), com i=2, temos

$$\Omega^Y_{,2} = \frac{\alpha}{1-\beta} b_2(-\sin u_2 f_1 + f_2^{'}),$$

o que implica

$$G(u_2, ..., u_n) = \frac{\alpha}{1-\beta} b_2 f_2 + G(u_3, ..., u_n).$$

Logo,

$$\Omega^Y = \frac{\alpha}{1-\beta}\sum_{l\leq 2} b_l f_l + G(u_3, ..., u_n).$$

Usando a prova por indução obtemos que

$$\Omega^Y = \frac{\alpha}{1-\beta}\sum_{l\leq n-1} b_l f_l + G(u_n). \tag{4.19}$$

Derivando tal expressão com respeito à variável u_n, segue que

$$\Omega^Y_{,n} = \frac{\alpha}{1-\beta}\sum_{l\leq n-1} b_{l,n} f_l + G'(u_n).$$

Porém, por (4.16), temos

$$\Omega^Y_{,n} = -\frac{\alpha}{1-\beta}\left(\frac{\sin u_n}{b_{n-1}}\sum_{l<n} b_{l,n} f_l + f_n'\right),$$

logo,

$$G(u_n) = f_n.$$

Então, voltando em (4.19), segue que

$$\Omega^Y = \frac{\alpha}{1-\beta}\sum_{l=1}^{n} b_l f_l.$$

Portanto, pelo Teorema 1.1 na página 17, concluímos que $\tilde{Y}$ é uma transformação de Ribaucour l^Y de Y, se e somente se, $\tilde{Y}$ é dada por (2.15), onde Ω^Y, W^Y e Ω^Y_i são funções dadas por (4.12) e f_i são funções diferenciáveis, $1 \leq i \leq n$.

Consideremos a hipersuperfície em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, dada por $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$. Vamos usar o Teorema 2.1 da página 31. Observamos que $\langle Y, Y\rangle = \dfrac{\alpha^2}{(1-\beta)^2} = \dfrac{1+\beta}{1-\beta}$, já que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Portanto segue de (2.6) que

$$\gamma^Y = \frac{2(1-\beta)}{1-\beta+\bar{k}(1+\beta)}.$$

De (2.12) obtemos Ω^X, Ω_i^X e W^X dados por (4.13). Concluímos do Teorema 2.1 da página 31, que a hipersuperfície parametrizada $\tilde{X}$ dada por (3.3) é uma transformação de Ribaucour l^X de X. Além disso, segue do Teorema 2.2 da página 34 que

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l^Y)(Y) = (l^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Para obtermos hipersuperfícies de Dupin associadas a X, primeiro vamos encontrar as hipersuperfícies de Dupin associadas a Y. Consideremos a função T_i^Y para a hipersuperfície $Y(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dada por (1.21), com $\bar{k} = 0$, isto é

$$\begin{aligned} T_i^Y &= 2\left(\frac{1}{a_i^Y}\Omega_{i,i}^Y + \sum_{k\neq i}\frac{a_{i,k}^Y}{a_i^Y a_k^Y}\Omega_k^Y - \lambda_i^Y W^Y\right) \\ &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha b_i}\left(\Omega_{i,i}^Y + \sum_{k>i}\frac{b_{i,k}}{b_k}\Omega_k^Y + \frac{1-\beta}{\alpha}b_i\Omega^Y + b_i c\right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde usamos as expressões (4.10). Segue do Teorema 3.1 da página 41, que $\tilde{Y}$ é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se, a condição (3.1) é satisfeita, isto é $T_{i,i}^Y = 0$. Isto equivale às funções f_i serem dadas por (4.14). De fato, usando (4.15),(4.16) e (4.18),

$$\begin{aligned} T_{i,i}^Y &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha b_i}\left\{\Omega_{i,ii}^Y + \sum_{k>i}\left(\frac{b_{i,k}}{b_k}\right)^2\Omega_i^Y + b_i^2\Omega_i^Y\right\} \\ &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha b_i}\left\{f_i' + f_i''' + \Omega_i^Y\left[\sum_{k>i}\left(\frac{b_{i,k}}{b_k}\right)^2 + b_i^2 - 1\right]\right\} \\ &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha b_i}\left\{f_i' + f_i'''\right\}. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos o fato que $b_{i,k} = -\dfrac{\operatorname{sen} u_k}{\cos u_k}b_i$, para $k > i$ e a identidade (4.8).

Desta forma, $\tilde{Y}$ é uma hipersuperfície de Dupin e é uma transformação de Ribaucour l_D^Y de Y.

Segue da Observação 3.3 da página 45, que $\tilde{X}$ é uma transformação de Ribaucour l_D^X de X, de modo que

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l_D^Y)(Y) = (l_D^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

■

Observação 4.1. A proposição anterior nos fornece famílias de hipersuperfícies de Dupin, próprias, em $\bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, com curvaturas de Lie não constantes, dadas por

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{2\bar{k}(\Omega^X)^2}{S^X}\right) - \frac{2\Omega^X}{S^X}\left(\sum_k \Omega_k^X \frac{X_{,k}}{a_k^X} - W^X N^X\right),$$

onde Ω^X, Ω_i^X e W^X são dadas por (4.13).

Vamos mostrar tal fato através de um corolário, porém antes, vamos lembrar a definição de curvatura de Lie de uma hipersuperfície.

Definição 4.1. Seja $M^n \subset \bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, com pelo menos quatro curvaturas principais distintas, λ_i, λ_j, λ_k e λ_l. Então as curvaturas de Lie de M são definidas por

$$\Psi_{ijkl} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}\frac{\lambda_k - \lambda_l}{\lambda_i - \lambda_l}. \tag{4.21}$$

Lema 4.4. *Seja Y a hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura dada por* (4.9)*. Considere a transformação de Ribaucour l^Y de Y, dada por* (4.11)*, onde Ω^Y, Ω_i^Y e W^Y são dadas por* (4.12)*, com as f_i dadas por* (4.14)*. As curvaturas principais* *de* $\tilde{Y}$ *são* $-\lambda_i^{\tilde{Y}}$, $1 \leq i \leq n$ *dadas por* (1.20), *isto é*

$$\lambda_i^{\tilde{Y}} = \frac{W^Y T_i^Y + \lambda_i^Y S^Y}{S^Y - \Omega T_i^Y},$$

onde,

$$T_i^Y = 2\left\{\frac{\Omega_{i,i}^Y}{a_i^Y} + \sum_{k\neq i} \frac{a_{i,k}^Y}{a_i^Y a_k^Y}\Omega_k^Y - W^Y \lambda_i^Y\right\}.$$

Então, supondo $i > j$, *temos que* $\lambda_i^{\tilde{Y}} - \lambda_j^{\tilde{Y}} \neq 0$ *se, e somente se,*

$$\sum_{s=j}^{i-1} \frac{C_s + A_{s+1}}{b_s} \neq 0, \tag{4.22}$$

onde C_s, A_s *são os coeficientes da função* f_s *e* b_s *são dados por* (4.3).

Demonstração: Substituindo W^Y e de λ_i^Y, obtidas por (4.12) e (4.10), na expressão de $\lambda_i^{\tilde{Y}}$, segue que

$$\lambda_i^{\tilde{Y}} = -\frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{cT_i^Y}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y}.$$

Portanto,

$$\lambda_i^{\tilde{Y}} - \lambda_j^{\tilde{Y}} = \frac{cS^Y(T_i^Y - T_j^Y)}{(S^Y - \Omega^Y T_i^Y)(S^Y - \Omega^Y T_j^Y)}. \tag{4.23}$$

Como $c \neq 0$, $S^Y \neq 0$, temos que $\lambda_i^{\tilde{Y}} - \lambda_j^{\tilde{Y}} \neq 0$ se, e somente se, $T_i^Y - T_j^Y \neq 0$.

Da expressão de T_i^Y e de (4.12), temos que

$$\begin{aligned} T_i^Y &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha}\left[\frac{\Omega_{i,i}^Y}{b_i} + \sum_{k>i}\frac{b_{i,k}}{b_i b_k}\Omega_k^Y + \frac{1-\beta}{\alpha}\Omega^Y + c\right] \\ &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha}\left[\frac{\Omega_{i,i}^Y}{b_i} + \sum_{k>i}\left(\frac{\sin^2 u_k}{b_{k-1}^2}\sum_{l<k} b_l f_l\right)\right] \\ &- \frac{2(1-\beta)}{\alpha}\left[\sum_{k>i}\frac{\sin u_k}{b_{k-1}} f_k' - \frac{1-\beta}{\alpha}\Omega^Y - c\right]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Por outro lado, usando a identidade (4.8) segue que,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k>i}\left(\frac{\sin^2 u_k}{b_{k-1}^2}\sum_{l<k} b_l f_l\right)\\
= \;& \frac{\sin^2 u_{i+1}}{b_i^2}(b_1 f_1 + ... + b_i f_i) + \frac{\sin^2 u_{i+2}}{b_{i+1}^2}(b_1 f_1 + ... + b_i f_i + b_{i+1} f_{i+1})\\
+ \;& ... + \frac{\sin^2 u_n}{b_{n-1}^2}(b_1 f_1 + ... + b_i f_i + b_{i+1} f_{i+1} + ... + b_{n-1} f_{n-1})\\
= \;& b_1 f_1 \sum_{l>i}\frac{\sin^2 u_l}{b_{l-1}^2} + ... + b_i f_i \sum_{l>i}\frac{\sin^2 u_l}{b_{l-1}^2} + b_{i+1} f_{i+1}\sum_{l>i+1}\frac{\sin^2 u_l}{b_{l-1}^2}\\
+ \;& b_{i+2} f_{i+2}\sum_{l>i+2}\frac{\sin^2 u_l}{b_{l-1}^2} + ... + b_{n-1} f_{n-1}\frac{\sin^2 u_n}{b_{n-1}^2}\\
= \;& \sum_{k\le i}\left(b_k f_k \sum_{l>i}\frac{\mathrm{sen}^2 u_l}{b_{l-1}^2}\right) + \sum_{k>i}\left(b_k f_k \sum_{l>k}\frac{\mathrm{sen}^2 u_l}{b_{l-1}^2}\right)\\
= \;& \sum_{k\le i} b_k f_k\left(\frac{1}{b_i^2} - 1\right) + \sum_{k>i} b_k f_k\left(\frac{1}{b_k^2} - 1\right)\\
= \;& -\frac{1-\beta}{\alpha}\Omega^Y + \frac{1}{b_i^2}\sum_{k\le i} b_k f_k + \sum_{k>i}\frac{1}{b_k} f_k.
\end{aligned}
$$

Na última igualdade usamos que a expressão de Ω^Y é dada por (4.12). Derivando Ω^Y_i, dada em (4.12), com respeito à variável u_i, tendo em vista que f_i, $1 \le i \le n$, são dadas por (4.14), obtemos

$$\Omega^Y_{i,i} = -\frac{1}{b_i}\sum_{k\le i} b_k f_k + C_i.$$

Considerando tal fato, segue que

$$\sum_{k>i}\left(\frac{\sin^2 u_k}{b_{k-1}^2}\sum_{l<k} b_l f_l\right) = -\frac{1-\beta}{\alpha}\Omega^Y - \frac{1}{b_i}(\Omega^Y_{i,i} - C_i) + \sum_{k>i}\frac{1}{b_k} f_k.$$

Substituindo a expressão acima em (4.24), e lembrando que as funções f_i são dadas por (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} T_i^Y &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha}\left[\frac{C_i}{b_i} + c + \sum_{k>i}\left(\frac{1}{b_k} f_k - \frac{\sin u_k}{b_{k-1}} f_k'\right)\right] \\ &= \frac{2(1-\beta)}{\alpha}\left(\sum_{k=i}^{n-1}\frac{C_k + A_{k+1}}{b_k} + C_n + c\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$T_i^Y - T_j^Y = \frac{2(1-\beta)}{\alpha}\sum_{k=j}^{i-1}\frac{C_k + A_{k+1}}{b_k}. \tag{4.25}$$

Portanto, $\lambda_i^{\tilde{Y}} - \lambda_j^{\tilde{Y}} \neq 0$ se, e somente se, a condição (4.22) é satisfeita.

$\blacksquare$

Corolário 4.1. *Seja Y a parametrização da esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$, dada por (4.9). Considere a transformação de Ribaucour l^Y de Y, dada por (4.11). Sejam $\lambda_i^{\tilde{Y}}$, $\lambda_j^{\tilde{Y}}$, $\lambda_k^{\tilde{Y}}$ e $\lambda_l^{\tilde{Y}}$, com $i > j > k > l$, quatro curvaturas principais de $\tilde{Y}$ distintas, isto é, tal que a condição (4.22) seja satisfeita para cada par de índices distintos. Considere $\tilde{X} = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ \tilde{Y}$, $\bar{k} = \pm 1$. Então as curvaturas de Lie, Ψ_{ijkl}, de $\tilde{Y}$ e de $\tilde{X}$, são dadas por*

$$\Psi_{ijkl} = \frac{\left(\displaystyle\sum_{s=j}^{i-1} \frac{C_s + A_{s+1}}{b_s}\right) \left(\displaystyle\sum_{s=l}^{k-1} \frac{C_s + A_{s+1}}{b_s}\right)}{\left(\displaystyle\sum_{s=l}^{j-1} \frac{C_s + A_{s+1}}{b_s}\right) \left(\displaystyle\sum_{s=k}^{i-1} \frac{C_s + A_{s+1}}{b_s}\right)}. \tag{4.26}$$

Demonstração: Como as curvaturas de Lie são invariantes por transformações conformes, (veja [16]), a curvaturas de Lie das imersões $\tilde{Y}$ e $\tilde{X} = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ \tilde{Y}$, $\bar{k} = \pm 1$, consideradas na Proposição 4.1, são as mesmas. Portanto, vamos encontrar as curvaturas de Lie de $\tilde{Y}$.

Substituindo as diferenças das curvaturas principais de $\tilde{Y}$, dadas em (4.23), na expressão da curvatura de Lie, dada por (4.21), obtemos

$$\Psi_{ijkl} = \frac{T_i^Y - T_j^Y}{T_k^Y - T_j^Y} \frac{T_k^Y - T_l^Y}{T_i^Y - T_l^Y}. \tag{4.27}$$

Substituindo (4.25), com indices apropriados, na expressão acima, concluímos a demonstração do corolário.

■

Observação 4.2. Como as curvaturas de Lie são dadas por (4.26), e b_i, $1 \leq i \leq n$, são dados por (4.3), o corolário anterior fornece famílias de hipersuperfícies de Dupin em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, parametrizadas por linhas de curvatura, com curvaturas de Lie não constantes .

Observação 4.3. Seja $Y \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície parametrizada, $X \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, tal que $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$. O teorema de comutatividade (Teorema 2.2) fornece famílias associadas a Y e a X por uma transformação de Ribaucour que comutam com a projeção estereográfica. Isto não ocorre se considerarmos quaisquer hipersuperfícies das duas famílias, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. Considere Y e $\tilde{Y}$, dadas por (4.9) e (4.11) respectivamente, com as funções f_i, $1 \leq i \leq n$, dadas por (4.14). Segue da Proposição 4.1 que $\tilde{X}$ é uma hipersuperfície de Dupin. Seja $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, onde $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é a aplicação inversa da projeção estereográfica, dada em (2.2) e considere $\tilde{X} \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, dada por (3.3), isto é,

$$\tilde{X} = \left(1 - \frac{2\bar{k}(\Omega^X)^2}{S^X}\right) - \frac{2\Omega^X}{S^X}\left(\sum_k \Omega_k^X \frac{X_{,k}}{a_k^X} - W^X N^X\right),$$

onde,

$$\Omega^X = \frac{2\alpha}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)} \sum_{k=1}^{n} b_k u_k, \qquad W^X = -\frac{\bar{k}(1+\beta)-(1-\beta)}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)} \sum_{k=1}^{n} b_k u_k + 1,$$

$$\Omega_i^X = -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}} \sum_{k<i} b_k u_k + 1.$$

Então vamos provar que $\tilde{X}$ é uma hipersuperfície parametrizada, localmente associada a X por uma transformação de Ribaucour l^X de X. Além disso vamos verificar que, neste caso, $\tilde{X}$ não comuta com a projeção estereográfica, provando que $\tilde{X}$ não é uma hipersuperfície de Dupin.

De fato, pela proposição acima, $\tilde{Y}$ é uma transformação de Ribaucour, l_D^Y de Y. Por outro lado, para que $\tilde{X}$ seja uma transformação de Ribaucour, l^X de X, devemos verificar que as funções Ω^X, W^X e Ω_i^X, definidas acima, satisfazem o sistema (1.15) para a imersão X. Como $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, pela Proposição 2.1, as primeira e segunda formas fundamentais da imersão X são dadas por

$$a_i^X = \frac{2\alpha}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)} b_i, \qquad \lambda_i^X = \frac{\bar{k}(1+\beta)-(1-\beta)}{2\alpha}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\Omega^X_{,i} &= \frac{2\alpha}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}u_k + b_i\right)\\
&= \frac{2\alpha}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)} b_i \left(-\frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\sum_{k<i} b_k u_k + 1\right)\\
&= a^X_i \Omega^X_i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W^X_{,i} &= -\frac{\bar{k}(1+\beta)-(1-\beta)}{\bar{k}(1+\beta)+(1-\beta)}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}u_k + b_i\right)\\
&= -\frac{\bar{k}(1+\beta)-(1-\beta)}{2\alpha}\Omega^X_{,i}\\
&= -\lambda^X_i a^X_i \Omega^X_i,
\end{aligned}
$$

Para $j > i$,

$$
\begin{aligned}
\Omega^X_{i,j} &= \left(-\frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\sum_{k<i} b_k u_k + 1\right)_{,j}\\
&= b_{i-1,j}\frac{\sin u_i}{b^2_{i-1}}\sum_{k<i} b_k u_k - \frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\sum_{k<i} b_{k,j} u_k\\
&= -\frac{\sin u_j}{\cos u_j}\frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\sum_{k<i} b_k u_k + \frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\sum_{k<i}\frac{\sin u_j}{\cos u_j} b_k u_k\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue do fato de que $a^X_{j,i} = 0$ quando $j \geq i$ que vale

$$
\Omega^X_{i,j} = \frac{a^X_{j,i}}{a^X_i}\Omega^X_j.
$$

Para $j < i$, temos

$$\begin{aligned}
\Omega^X_{i,j} &= -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\left(\sum_{k<i} b_{k,j}u_k + b_j\right)\\
&= -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}}\left(-\frac{\sin u_j}{\cos u_j}\sum_{k<j} b_k u_k + b_j\right)\\
&= -\frac{\sin u_i}{b_{i-1}} b_j \Omega^X_j\\
&= \frac{a^X_{j,i}}{a^X_i}\Omega^X_j .
\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{X}$ é uma transformação de Ribaucour, l^X de X. Porém, observe que

$$\begin{aligned}
T^X_i &= 2\left(\frac{1}{a^X_i}\Omega^X_{i,i} + \sum_{k\neq i}\frac{a^X_{i,k}}{a^X_i a^X_k}\Omega^X_k - \lambda^X_i W^X + \bar{k}\Omega^X\right)\\
&= \frac{\bar{k}(1+\beta)+((1-\beta))}{\alpha b_i}\left(\Omega^X_{i,i} + \sum_{k>i}\frac{b_{i,k}}{b_k}\Omega^X_k + \frac{\bar{k}(1+\beta)+((1-\beta))}{2\alpha} b_i \Omega^X\right)\\
&+ -\frac{\bar{k}(1+\beta)-((1-\beta))}{2\alpha} c.
\end{aligned}$$

Derivando tal expressão com respeito a variável u_i, segue que

$$\begin{aligned}
T^X_{i,i} &= \frac{\bar{k}(1+\beta)+((1-\beta))}{\alpha b_i}\left\{\Omega^X_{i,ii} + \sum_{k>i}\left(\frac{b_{i,k}}{b_k}\right)^2\Omega^X_i + b_i^2\Omega^X_i\right\}\\
&= \frac{\bar{k}(1+\beta)+((1-\beta))}{\alpha b_i}\left\{1 + \Omega^Y_i\left[\sum_{k>i}\left(\frac{b_{i,k}}{b_k}\right)^2 + b_i^2 - 1\right]\right\}\\
&= \frac{\bar{k}(1+\beta)+((1-\beta))}{\alpha b_i}.
\end{aligned}$$

Portanto a transformação de Ribaucour l^X de X, não satisfaz a condição (3.1) e portanto $\tilde{X}$ não é uma hipersuperfície de Dupin. Como $\tilde{Y}$ é Dupin, concluímos então que, neste caso, a projeção estereográfica não comuta com a transformação de Ribaucour.

4.2 Transformação de Ribaucour aplicada a um cone em $\mathbb{R}^4$

Nesta seção, aplicamos a transformação de Ribaucour a um cone em $\mathbb{R}^4$, cuja curvatura de Möebius é constante. Obtemos as transformações de Ribaucour localmente associadas ao cone em $\mathbb{R}^4$. Usamos o Teorema 3.1, para caracterizar as transformações que são hipersuperfícies de Dupin. Em seguida, mostramos que estas novas hipersuperfícies de Dupin, genericamente, têm curvatura de Möebius não constante. Os teoremas de comutatividade dos capítulos anteriores fornecem as hipersuperfícies correspondentes em $\bar{M}^4(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$.

Antes da próxima proposição, vamos relembrar a definição de curvatura de Möbius de uma hipersuperfície em $\bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$.

Definição 4.2. Seja $M^n \subset \bar{M}(\bar{k})$, $\bar{k} = 0, \pm 1$, com pelo menos três curvaturas principais distintas, λ_i, λ_j e λ_k. Então as curvaturas de Möbius de M são definidas por

$$\Phi_{ijk} = \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}. \tag{4.28}$$

A proposição seguinte aplica os Teoremas 2.2 e 3.2, das páginas 34 e 43 respectivamente, a um cone em $\mathbb{R}^4$, cuja curvatura de Möbius (4.28) é constante.

Proposição 4.2. *Considere o cone em $\mathbb{R}^4$, parametrizado por:*

$$Y(u_1, u_2, u_3) = u_3 \left(\alpha \cos u_1, \alpha \sin u_1, \beta \cos u_2, \beta \sin u_2\right),$$

onde $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha \neq 0, 1$ e $u_3 > 0$. Então a hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura $\tilde{Y}$, é localmente uma transformação de Ribaucour l^Y de Y, se, e somente *se, $\tilde{Y}$ é dada por* (1.17)*, isto é*

$$\tilde{Y} = Y - \frac{2\Omega^Y}{S^Y}\left(\sum_k \Omega_k^Y \frac{Y_{,k}}{a_k^Y} - W^Y N^Y\right), \tag{4.29}$$

onde

$$\Omega_i^Y = f_i^{'}, \quad i = 1,2 \quad \Omega_3^Y = \alpha f_1 + \beta f_2 + f_3^{'}, \tag{4.30}$$
$$\Omega^Y = \alpha u_3 f_1 + \beta u_3 f_2 + f_3, \quad W^Y = \beta f_1 - \alpha f_2 + c,$$

onde f_i, $1 \leq i \leq 3$, são funções diferenciáveis. Considere $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, onde $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é a aplicação inversa da projeção estereográfica, dada em (2.2)*. Então existe uma transformação de Ribaucour l^X de X tal que*

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l^Y)(Y) = (l^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Além disso, se

$$f_i = A_i \cos u_i + B_i \sin u_i + C_i, \quad i = 1,2, \quad f_3 = A_3 u_3^2 + B_3 u_3 + C_3, \tag{4.31}$$

onde $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{R}$, temos que $\tilde{Y}$ é localmente associada a Y por uma transformação de Ribaucour l_D^Y e, existe uma transformação de Ribaucour l_D^X de X tal que

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l_D^Y)(Y) = (l_D^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Observação 4.4. No caso em que $\bar{k} = -1$, pela Observação 2.1 da página 23, devemos considerar os pontos do cone onde $u_3 \neq 1$, isto é, onde a aplicação inversa da projeção estereográfica hiperbólica está definida. Portanto $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$ terá uma componente conexa em H_-^4, correspondendo a $0 < u_3 < 1$ e outra componente conexa em H_+^4, correspondendo a $u_3 > 1$.

Demonstração: Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por $a_i^Y = |Y_{,i}|$, logo

$$a_1^Y = \alpha u_3, \quad a_2^Y = \beta u_3, \quad a_3^Y = 1.$$

Considere $N^Y = (-\beta \cos u_1, -\beta \sin u_1, \alpha \cos u_2, \alpha \sin u_2)$, o vetor normal unitário a Y. Como Y é uma parametrização por linhas de curvatura ortogonais, temos que $N_{,i}^Y = \lambda_i^Y Y_{,i}$, então

$$\lambda_1^Y = -\frac{\beta}{\alpha u_3}, \quad \lambda_2^Y = \frac{\alpha}{\beta u_3}, \quad \lambda_3^Y = 0. \tag{4.32}$$

Seja $\Omega^Y, W^Y, \Omega_i^Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, funções satisfazendo o sistema de Ribaucour (1.15), em relação à imersão Y, isto é,

$$\Omega_{i,j}^Y = \frac{a_{j,i}^Y}{a_i^Y} \Omega_j^Y, \quad j \neq i, \tag{4.33}$$

$$\Omega_{,i}^Y = a_i^Y \Omega_i^Y, \tag{4.34}$$

$$W_{,i}^Y = -\lambda_i^Y a_i^Y \Omega_i^Y. \tag{4.35}$$

De (4.33), para $i = 1, 2$, temos

$$\Omega_{i,j}^Y = 0, \quad j \neq i,$$

Logo,

$$\Omega_i^Y = f_i'.$$

De (4.33), para $i = 3$ e $j = 1, 2$, temos

$$\Omega_{3,1}^Y = \alpha f_1', \qquad \Omega_{3,2}^Y = \beta f_2'$$

Logo,

$$\Omega_3^Y = \alpha f_1 + \beta f_2 + f_3'.$$

De (4.34), para $i = 1$ e $i = 2$, obtemos

$$\Omega_{,1}^Y = \alpha u_3 f_1', \qquad \Omega_{,2}^Y = \beta u_3 f_2'.$$

Portanto

$$\Omega^Y = \alpha u_3 f_1 + \beta u_3 f_2 + G_3,$$

onde $G_3 = G_3(u_3)$. Derivando a expressão obtida e comparando com (4.34), para $i = 3$, segue que $G_3 = f_3$. Logo,

$$\Omega^Y = \alpha u_3 f_1 + \beta u_3 f_2 + f_3.$$

De (4.35), para $i = 1, 2, 3$, temos

$$W_{,1}^Y = \beta f_1', \quad W_{,2}^Y = -\alpha f_2', \quad W_{,3}^Y = 0.$$

Logo,

$$W^Y = \beta f_1 - \alpha f_2 + c.$$

Portanto, pelo Teorema 1.1 da página 17, concluímos que $\tilde{Y}$ é uma transformação de Ribaucour l^Y de Y, se e somente se, $\tilde{Y}$ é dada por (4.29), onde Ω^Y, W^Y e Ω_i^Y são funções dadas por (4.30) e f_i são funções diferenciáveis, $1 \leq i \leq n$.

Além disso, considerando $X = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ Y$, onde $\pi_{\bar{k}}^{-1}$ é a projeção estereográfica, dada por (2.2), temos por (2.3), que

$$\gamma = \frac{2}{1+\bar{k}u_3^2}.$$

Logo, pelo Teorema 2.1 da página 31, a hipersuperfície parametrizada $\tilde{X}$ dada por (1.17), onde Ω^X, W^X e Ω_i^X são dadas por (2.12), isto é,

$$\Omega^X = \frac{2}{1+\bar{k}u_3^2}\left(\alpha u_3 f_1 + \beta u_3 f_2 + f_3\right), \qquad W^X = \beta f_1 - \alpha f_2 + c$$

$$\Omega_i^X = f_i', \quad i = 1, 2, \qquad \Omega_3^X = \frac{(1-\bar{k}u_3^2)(\alpha f_1 + \beta f_2) + (1+\bar{k}u_3^2)f_3' - 2\bar{k}u_3 f_3}{1+\bar{k}u_3^2},$$

é uma transformação de Ribaucour l^X de X, de forma que

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l)(Y) = (l \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

Para obtermos hipersuperfícies de Dupin associadas a X, primeiramente vamos encontrar as hipersuperfícies de Dupin associadas a Y. Consideremos T_i^Y, $1 \leq i \leq 3$, dada por (1.21), com $\bar{k} = 0$. Então,

$$T_1^Y = \frac{2}{\alpha u_3}\left\{f_1'' + f_1 + \alpha f_3' + \beta c\right\}, \quad T_2^Y = \frac{2}{\beta u_3}\left\{f_2'' + f_2 + \beta f_3' - \alpha c\right\}, \tag{4.36}$$

$$T_3^Y = 2f_3''. \tag{4.37}$$

Segue do Teorema 3.1 da página 41, que $\tilde{Y}$ é uma hipersuperfície de Dupin se, e somente se, a condição (3.1) é satisfeita, isto é $T_{i,i}^Y = 0$, o que equivale às funções f_i serem dadas por (4.31).

Portanto, da Observação 3.3 da página 45, concluímos que $\tilde{X}$ é uma transformação de Ribaucour l_D de X, de modo que

$$(\pi_{\bar{k}}^{-1} \circ l_D^Y)(Y) = (l_D^X \circ \pi_{\bar{k}}^{-1})(Y).$$

■

No próximo corolário, vamos provar que as curvaturas de Möebius das hipersuperfícies $\tilde{Y} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\tilde{X} \subset \bar{M}^{n+1}(\bar{k})$, $\bar{k} = \pm 1$, obtidas na proposição anterior com f_i dadas por (4.31), não são constantes.

Corolário 4.2. *Seja $\tilde{Y}$ a hipersuperfície parametrizada por linhas de curvatura, dada por* (4.29)*, onde Ω^Y, Ω_i^Y e W^Y são dadas por* (4.30) *e f_i, dadas por* (4.31)*. Considere um aberto de $\mathbb{R}^3$, onde*

$$(E - 2Df_2)(\bar{E} + 2Df_1) \neq 0,$$
$$(\bar{A}\alpha\beta u_3 + 2f_1u_3\bar{G} - 2\bar{B}\beta f_3)(\bar{A}\alpha\beta u_3 + 2f_2u_3G - 2B\alpha f_3) \neq 0.$$

com a notação,

$$A := \sum_{k=1}^{2}(A_k^2 + B_k^2 - C_k^2) + c^2 + B_3^2 - 4A_3C_3, \quad \bar{A} := A - (B_3^2 - 4A_3C_3), \tag{4.38}$$
$$B := \alpha B_3 + C_1 + \beta c, \quad \bar{B} := \beta B_3 + C_2 - \alpha c, \quad D := B_3 + \alpha C_1 + \beta C_2, \tag{4.39}$$
$$E := 2cB - \beta A, \quad \bar{E} := 2c\bar{B} + \alpha A, \quad G := \alpha D - B, \quad \bar{G} := \beta D - \bar{B}, \tag{4.40}$$

onde A_i, B_i, C_i são os coeficientes de f_i. Então as curvaturas de Möbius de $\tilde{Y}$, $\tilde{X} = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ \tilde{Y}$, $\bar{k} = \pm 1$, são funções não constantes, dadas por

$$\Phi_{132} = \frac{\beta(E - 2Df_2)}{\alpha(\bar{E} + 2Df_1)} \frac{(\bar{A}\alpha\beta u_3 + 2f_1u_3\bar{G} - 2\bar{B}\beta f_3)}{(\bar{A}\alpha\beta u_3 + 2f_2u_3G - 2B\alpha f_3)}, \tag{4.41}$$

Demonstração: Como as curvaturas de Möebius são invariantes por transformações conformes, a curvatura de Möbius das imersões $\tilde{Y}$, $\tilde{X} = \pi_{\bar{k}}^{-1} \circ \tilde{Y}$, $\bar{k} = \pm 1$, consideradas na Proposição 4.2, são as mesmas. Portanto, vamos encontrar as curvaturas de Möebius de $\tilde{Y}$.

Considere $\lambda_1^{\tilde{Y}}$, $\lambda_2^{\tilde{Y}}$ e $\lambda_3^{\tilde{Y}}$, as três curvaturas principais de $\tilde{Y}$. Como $\tilde{Y}$ é localmente uma transformação de Ribaucour de Y, pelo Teorema 1.2 da página 18, temos que

$$\lambda_i^{\tilde{Y}} = \frac{W^Y T_i^Y + \lambda_i^Y S^Y}{S^Y - \Omega^Y T_i^Y},$$

para $i = 1, 2, 3$. Então,

$$\lambda_i^{\tilde{Y}} - \lambda_j^{\tilde{Y}} = \frac{S^Y \left[W^Y (T_i^Y - T_j^Y) + \lambda_i^Y (S^Y - \Omega^Y T_j^Y) - \lambda_j^Y (S^Y - \Omega^Y T_i^Y) \right]}{(S^Y - \Omega^Y T_i^Y)(S^Y - \Omega^Y T_j^Y)}.$$

Logo, da definição (4.28) e de (4.32), como $\lambda_3^Y = 0$, segue que

$$\Phi_{132} = \frac{(S^Y - \Omega^Y T_2^Y) \left[W(T_1^Y - T_3^Y) + \lambda_1^Y (S^Y - \Omega^Y T_3^Y) \right]}{(S^Y - \Omega^Y T_1^Y) \left[W(T_2^Y - T_3^Y) + \lambda_2^Y (S^Y - \Omega^Y T_3^Y) \right]}. \tag{4.42}$$

Porém, de (1.18) temos que

$$S^Y = \sum_{k=1}^{3} (\Omega_k^Y)^2 + (W^Y)^2.$$

Substituindo na equação acima, as funções Ω_K^Y e W^Y dadas por (4.30) e f_k dadas por (4.31), obtemos

$$\begin{aligned} S^Y &= \sum_{k=1}^{2} (f_k')^2 + (\alpha f_1 + \beta f_2 + f_3')^2 + (\beta f_1 - \alpha f_2 + c)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{2} (A_k^2 + B_k^2 - C_k^2 + 2C_k f_k) + c^2 + (f_3')^2 + 2f_3'(\alpha f_1 + \beta f_2) + 2c(\beta f_1 - \alpha f_2) \\ &= A + 2C_1 f_1 + 2C_2 f_2 + c^2 + (f_3')^2 + 2f_3'(\alpha f_1 + \beta f_2) + 2c(\beta f_1 - \alpha f_2). \end{aligned} \tag{4.43}$$

onde na última igualdade usamos a notação (4.38). Por outro lado, substituindo as funções f_i nas expressões de T_i^Y, dadas em (4.44) e (4.37), segue que

$$T_1^Y = \frac{2}{\alpha u_3}(\alpha f_3' + C_1 + \beta c), \quad T_2^Y = \frac{2}{\beta u_3}(\beta f_3' + C_2 - \alpha c), \quad T_3^Y = 4A_3. \tag{4.44}$$

Logo, sabendo que Ω^Y é dada por (4.30) e usando as equações (4.43) e (4.44), obtemos

$$
\begin{aligned}
S^Y - \Omega^Y T_1^Y &= \bar{A} + 2f_2\left(C_2 - \frac{c+\beta C_1}{\alpha}\right) - \frac{2f_3}{\alpha u_3}\left(\alpha f_3' + C_1 + \beta c\right) + (f_3')^2 \\
&= A + \frac{2Gf_2}{\alpha\beta} - \frac{2Bf_3}{\alpha u_3}. \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^Y - \Omega^Y T_2^Y &= \bar{A} + 2f_1\left(C_1 + \frac{c-\alpha C_2}{\alpha}\right) - \frac{2f_3}{\beta u_3}\left(\beta f_3' + C_2 - \alpha c\right) + (f_3')^2 \\
&= A + \frac{2\bar{G}f_2}{\alpha\beta} - \frac{2\bar{B}f_3}{\beta u_3}. \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^Y - \Omega^Y T_3^Y &= \bar{A} + 2f_1\left(\alpha B_3 + \beta c + C_1\right) + 2f_2\left(\beta B_3 - \alpha c + C_2\right) + (f_3')^2 - 4A_3 f_3 \\
&= A + 2Bf_1 + 2\bar{B}f_2. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

$$
T_1^Y - T_3^Y = \frac{2}{\alpha u_3}B, \quad T_2^Y - T_3^Y = \frac{2}{\beta u_3}\bar{B}. \qquad (4.48)
$$

Para finalizar, substituimos as equações obtidas acima, (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48), na expressão de Φ_{132} dada por (4.42) e lembrando que W^Y e λ_k^Y são dadas por (4.30) e (4.32), concluímos que Φ_{132} é dada por (4.41).

■

Referências Bibliográficas

[1] Cecil, T. and Ryan, P. *Focal sets, taut embeddings and the cyclides of Dupin*, Math. Ann. 236 (1978), 177-190.

[2] Cecil, T. and Ryan, P. *Conformal geometry and the cyclides of Dupin*, Canad. J. Math. 32 (1980), 767-782.

[3] Cecil, T., Chi Q.-S., Jensen G., *Classifications of Dupin hypersurfaces, in Pure and Applied Differential Geometry*, PADGE 2007, Editors F. Dillen and I. van de Woestyne, Shaker Verlag, Aachen, 2007, 48-56.

[4] Cecil, T., Ryan, P. *Tight and Taut immersions of manifolds*, Research Notes in Math. Vol. 107, Pitman, London, 1985.

[5] Corro, A.V., Ferreira,W., Tenenblat, K., *On Ribaucour Transformations for Hypersurfaces*, Matemática Contemporânea, Vol 17, 137-160 (1999).

[6] Corro, A.V., Ferreira,W., Tenenblat, K., *Minimal surfaces obtained by Ribaucour Transformation*, Geometriae Dedicata 96, 117-150 (2003).

[7] Corro, A.V., Ferreira, W., Tenenblat, K., *Ribaucour Transformations for constant mean curvature and linear Weingarten surfaces*, Pacific J. Math. 212, 265-296 (2003).

[8] Hu Z., Li H.-Z., *Classification of Mobius isoparametric hypersurfaces in S^4*, Nagoya Math. J. 179 (2005), 147-162.

[9] Hu Z., Li, H.-Z., Wang C.-P., *Classification of Mobius isoparametric hypersurfaces in S^5*, Monatsh. Math. 151 (2007), 201-222.

[10] Hu Z., Li D., *Möbius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures*, Pacific J. Math. 232 (2007), 289-311.

[11] Lemes, M.V., Tenenblat, K., *On Ribaucour transformations and minimal surfaces*, Mat. Contemp. 29 (2005), 13-40.

[12] Lemes, M.V., Roitman, P., Tenenblat, K., Tribuzi, R., *Lawson Correspondence and Ribaucour Transformation*, Transactions of the American Mathematical Society.

[13] Li H.-Z., Liu H.-L., Wang C.-P., Zhao G.-S., *Möbius isoparametric hypersurfaces in S^{n+1} with two distinct principal curvatures*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 18 (2002), 437-446.

[14] Miyaoka R., *Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures*, Math. Z. 187 (1984), 433-452.

[15] Miyaoka R., Ozawa T., *Construction of taut embeddings and Cecil-Ryan conjecture, in Geometry of Manifolds*, Editor K. Shiohama, Perspect. Math., Vol. 8, Academic Press, Boston, 1989, 181-189.

[16] Miyaoka R., *Dupin hypersurfaces and a Lie invariant*, Kodai Math. J. 12 (1989), 228-256.

[17] Pinkall U., *Dupin'sche Hyperflachen*, Dissertation, Univ. Freiburg, 1981.

[18] Pinkall U., *Dupin Hypersurfaces*, Math. Ann. 270, 427-440 (1985).

[19] Pinkall U., *Letter to T. Cecil*, December 5, 1984.

[20] Pinkall U., *Dupin'sche Hyperflachen in E^4*, Manuscripta Math. 51 (1985), 89-119.

[21] Pinkall U., Thorbergsson G., *Deformations of Dupin hypersurfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1989), 1037-1043.

[22] Rodrigues, L.A., Tenenblat,K., *A characterization of Moebius isoparametric hypersurfaces of the sphere*, Monatsh. Math. 158, n^o 3, 321-327 (2009).

[23] Riveros, C.M.C., Rodrigues, L.A., Tenenblat, K., *Dupin hypersurfaces with constant Möbius curvature*, Pacific J. Math. 236, n^o 1, 89-103 (2008).

[24] Tenenblat, K., Wang, Q., *Ribaucour Transformations for Hypersurfaces in Space Forms*, Annals of Global Analysis and Geometry 29:157-185 (2006).

[25] Tenenblat, K., Wang, Q., *New constant mean curvature surfaces in the hyperbolic space*, Illinois J. Math. 53 (2009), n^o 1, 135-161.

[26] Thorbergsson G., *Dupin hypersurfaces*, Bull. London Math. Soc. 15, 493-498 (1983).