

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Soluções Globais Uniformemente Limitadas para a
Equação do Calor Semilinear**

por

Gilberto de Assis Pereira

Brasília

2012

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de matemática

Soluções Globais Uniformemente Limitadas para a Equação do Calor Semilinear

por

Gilberto de Assis Pereira *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 19 de abril de 2012

Comissão Examinadora:

Dra. Liliane de Almeida Maia - UnB - Orientadora

Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - UFJF - Examinador

Dra. Simone Mazzini Bruschi - UnB - Examinadora

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

*"Se pude enxergar mais longe foi porque
estava sobre os ombros de gigantes"*
Isaac Newton

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus todo poderoso, que se humilha, toma a forma de servo, e nos pergunta: ‘O que queres que Eu te faça?’. Ele busca atender às nossas necessidades, mesmo sendo maior que nós.

Aos meus familiares, a minha eterna gratidão por suas presenças em todos os momentos de minha vida, dando-me força, auxiliando-me, compreendendo-me e me fortalecendo nas horas difíceis.

À minha orientadora, *Prof^a. Liliane*, agradeço pela paciência, pela atenção e, principalmente, pela sua sabedoria, que muito contribuíram para concluir uma grande e importante etapa de minha vida.

Obrigado aos professores do Departamento de Matemática da UnB com os quais convivi, especialmente aos professores Luis Henrique de Miranda, Ricardo Ruviano e Simone Mazzini Bruschi, pelas sugestões e atenção durante todo o trabalho.

Obrigado aos professores do Departamento de Matemática da UFV. Em especial ao professor Paulo Tadeu, pela amizade, pelos ensinamentos e pelo exemplo de ser humano. Ao professor Olímpio Hiroshi Miyagaki pelos conselhos, atenção e amizade.

Aos amigos que fiz nesta etapa e que nunca esquecerei, Edimilson dos Santos da Silva, Clodomir Neto e Aristóteles Júnior, que muitas vezes deixavam de estudar para me ajudar com problemas computacionais.

Sou eternamente grato ao meu amigo Artur Fassoni pelos quatro anos de convivência na graduação, pelas conversas, por ser meu irmão de consideração, e aos meus colegas do apartamento 1911 por tudo de bom que passamos juntos.

Um agradecimento especial gostaria de fazer a duas pessoas: José Geraldo Teixeira, que me acolheu como filho em Viçosa, dando-me moradia, conselhos, sabedoria, tornando-se um modelo ideal de pessoa a ser seguido, e a meu professor do ensino fundamental e médio, Cláudio, que sempre me ajudou.

Agradeço ao *CNPq* pelo apoio financeiro a este trabalho.

Enfim, agradeço a todos que rezaram por mim e peço desculpas a todos que não pude citar, pois são tantas as pessoas especiais que meus agradecimentos seriam a maior parte de minha dissertação...

Resumo

Apresentamos a teoria de semigrupos de operadores lineares, com objetivo de estudar o comportamento da equação do calor homogênea, linear e semilinear. Consideramos o problema para a Equação do Calor semilinear

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + mu = g(u), & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{em } [0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, limitado e regular, $N \geq 3$, $m > -\lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ espaço de Hilbert com produto interno (\cdot, \cdot) . A função $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é tal que

$$|g(x)| \leq C_1 |x| + C_2 |x|^p, \quad (2)$$

com $1 < p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, C_1 e C_2 constantes positivas; g satisfaz também

$$(g(u), u) \geq (2 + \varepsilon)G(u), \quad (3)$$

para algum $\varepsilon > 0$.

Mostramos que existe solução para o problema e que ela é uniformemente limitada no tempo $t \geq \delta$, para qualquer $\delta > 0$.

Palavras-Chaves: Semigrupos de operadores; Equação do Calor Semilinear; Operador m -acretivo; Operador Maximal Monótono; Bootstrap.

Abstract

We present the theory of semigroups of linear operators with the aim of studying the behavior of the homogeneous, linear and semilinear heat equation. We consider the problem of the semilinear heat equation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + mu = g(u), & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{in } [0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is an open, bounded regular domain, $N \geq 3$, $m > -\lambda_1$, λ_1 the first eigenvalue of the $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ the Hilbert space with scalar product (\cdot, \cdot) . The function $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is such that

$$|g(x)| \leq C_1 |x| + C_2 |x|^p, \quad (5)$$

with $1 < p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, C_1 and C_2 positive constants ; g also satisfies

$$(g(u), u) \geq (2 + \varepsilon)G(u), \quad (6)$$

for some $\varepsilon > 0$. We show that there exists a solution for the problem and this solution is uniformly bounded for all time $t \geq \delta$, for any $\delta > 0$.

Key-Words: Semigroups of operators; Semilinear Heat Equation; Operator m -accretive; Maximal Monotone Operator; Bootstrap.

Sumário

Introdução	1
Notações	3
1 Semigrupos de Classe C_0	5
1.1 Equação do Calor Homogênea	19
2 Caso Linear da Equação do Calor	22
3 Existência de solução da Equação do Calor não-linear	37
3.1 Aplicação dos Resultados	43
4 Estimativa uniforme para a solução da Equação do Calor não-linear	47
A Resultados Auxiliares	63
Bibliografia	67

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$, $N \geq 1$, consideramos o seguinte problema: encontrar uma função $u : [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \text{em } (0, \infty) \times \bar{\Omega}, \\ u = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

onde $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denota o Laplaciano nas variáveis espaciais x , t é a variável tempo e $u_0(x)$ é uma função dada, chamada dado inicial de Cauchy ver [4] a equação diferencial em (7) é chamada Equação do Calor porque modela a distribuição de temperatura u no domínio Ω e no tempo t .

O principal objetivo deste trabalho é apresentar estimativas globais uniformes no tempo, ou seja

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\delta)$$

para $t \geq \delta$. Os resultados se baseiam do clássico e importante artigo de Cazenave e Lions em C.P.D.E 1984 dado em [8]. Neste artigo, os autores consideraram o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + mu = g(u), & \text{em } (0, \infty) \times \bar{\Omega}, \\ u = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

se $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e verifica

(i) $|g(x)| \leq A|x| + B|x|^p$, com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $xg(x) \geq (2 + \varepsilon)G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $G(x) = \int_0^x g(s)ds$,

os mesmos afirmaram que problema possui solução uniformemente limitada em $C^2(\bar{\Omega})$ para todo $t \geq \delta$, sendo $\delta > 0$ arbitrário.

Neste trabalho nosso objetivo principal será obter uma estimativa uniforme em t na norma $L^\infty(\Omega)$, obedecendo as hipóteses apresentadas em [8], fato este obtido sem o uso do espaço de Lorentz, apenas utilizando um argumento do tipo Bootstrap.

Nosso trabalho está organizado como segue.

Um bloco de notações que serão uteis para a compreensão desta dissertação.

No primeiro capítulo definiremos o conceito de semigrupos de classe C_0 e exploraremos as suas propriedades. Em seguida, apresentaremos alguns resultados de caracterização de semigrupos de contração. E no final do mesmo faremos uma aplicação ao problema da Equação do Calor no caso homogêneo.

No segundo capítulo estudaremos a teoria de semigrupos de contração gerado por um operador, com intuito de obter uma solução da equação do calor no caso linear não homogêneo. Além disso apresentaremos estimativas L^p e estimativas de Schauder para o problema parabólico.

No terceiro capítulo estudaremos operadores monótonos maximais, bem como a existência de solução para a equação do calor no caso não linear. A seguir desenvolveremos alguns resultados sobre operadores monótonos e monótonos maximais como em [5].

No quarto capítulo estudaremos propriedades dos operadores monótonos maximais, com o objetivo de provarmos uma limitação uniforme da solução da equação do calor não-linear, como apresentada no capítulo 3.

Notações

- I intervalo da reta.
- 1_X é a função definida por

$$1_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X. \end{cases}$$

- $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensuráveis ; } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$
- $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) ; \text{ para todo multiíndice } |\alpha| \leq k, D^\alpha u \text{ existe e } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}, 1 \leq p \leq \infty.$
- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$
- $H^1_0(\Omega)$ é o fecho de $C^\infty_0(\Omega)$ na norma do espaço $H^1(\Omega)$.
- $\lambda_1 = \inf_{u \in H^1_0(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2}$
- $\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y ; T \text{ é linear e limitada}\}.$
- $\mathcal{L}(X) = \{T : X \rightarrow X ; T \text{ é linear e limitada}\}.$ Dotado com a seguinte norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \in X: \|x\|_X=1} \|T(x)\|_X = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_X}{\|x\|_X}$$

- $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω .
- ∇ é o operador gradiente.
- Δ é o operador laplaciano.
- $\|\cdot\|$ denota a norma do espaço H^1_0 .
- $\|\cdot\|_X$ denota a norma do espaço X .
- $X^\perp = \{x; \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in X\}$

- $C(I, X) = \{u : I \rightarrow X ; u \text{ é contínua}\}$ com a norma do supremo, dada por

$$\|u\|_\infty = \sup_I \|u(t)\|_X$$

- $C(X, X) = \{u : X \rightarrow X ; u \text{ é contínua}\}$
- $C^1(X, X) = \{u : X \rightarrow X ; u' \in C(X, X)\}$
- $B[I, X] = \{u : I \rightarrow X ; u \text{ é limitada}\}$ com a norma do supremo, dada por

$$\|u\|_\infty = \sup_I \|u(t)\|_X$$

- $0 < \alpha < 1$, $C^\alpha(I, X) = \left\{ u : I \rightarrow X ; [u]_{C^\alpha(I, X)} = \sup_{s, t \in I \setminus \{s \neq t\}} \frac{\|u(t) - u(s)\|_X}{|t - s|^\alpha} < \infty \right\}$, é o conjunto das funções α -Hölder contínuas com a norma dada por

$$\|u\|_{C^\alpha(I, X)} = \|u\|_\infty + [u]_{C^\alpha(I, X)}.$$

- $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ operador setorial, $0 < \alpha < 1$ e $D_A(\alpha, \infty) = \left\{ x \in X ; [x]_\alpha = \sup_{0 < t \leq 1} \|t^{1-\alpha} A T(t)x\|_X < \infty \right\}$ com a norma

$$\|x\|_{D_A(\alpha, \infty)} = \|x\|_X + [x]_\alpha$$

e

$$D_A(1 + \alpha, \infty) = \{x \in D(A); Ax \in D_A(\alpha, \infty)\}$$

- $C_b(\mathbb{R}^n) = \{u \in C(\mathbb{R}^n) ; u \text{ é limitada}\}$
- $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega) ; u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$
- $0 < \alpha < 1$, $C^{\frac{\alpha}{2}, \theta}(I, \mathbb{R}^n) = \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{R}^n ; u(\cdot, x) \in C^{\frac{\alpha}{2}}(I), \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } u(t, \cdot) \in C^\theta(\mathbb{R}^n) \forall t \in I \right\}$
- $u^+ = \max\{u(x), 0\}$
- $u^- = \min\{u(x), 0\}$
- $A \subset\subset B$ significa que A está compactamente contido em B , isto é A é compacto e $A \subset B$.
- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt}$
- X^* o dual topológico do espaço X .
- $L^p(I, X)$ espaço de Banach das funções mensuráveis $u : I \rightarrow X$ tal que $\int_I \|u(s)\|_X^p ds < \infty$ se $1 \leq p < \infty$, ou $\sup_I \|u(t)\|_X < \infty$ se $p = \infty$. $L^p(I, X)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_I \|u(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p < \infty; \\ \sup_I \|u(t)\|_X, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Semigrupos de Classe C_0

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos da teoria de semigrupos, com o objetivo da resolução do problema do calor no caso homogêneo.

Inicialmente definiremos o conceito de semigrupos de classe C_0 e exploraremos as suas propriedades. Em seguida, apresentaremos os resultados de caracterização de semigrupos de contração, Teorema de Hille-Yosida de Lumer-Phillips. Finalmente faremos uma aplicação ao problema da Equação do Calor no caso homogêneo.

Definição 1.1. *Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X . Diz-se que uma aplicação $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$.

ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Observação 1.1. *O espaço $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$. Por simplicidade, denotaremos a sua norma também por $\|\cdot\|$.*

Definição 1.2. *Dizemos que o semigrupo T é de classe C_0 se:*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T(t) - I)x\| = 0, \quad \forall x \in X. \quad (1.1)$$

Definição 1.3. *Diz-se que o semigrupo T é de contração quando $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 1.4. *Um semigrupo de operadores lineares limitado $T(t)$ é uniformemente contínuo se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0. \quad (1.2)$$

Observação 1.2. *Observe que na Definição 1.4, a continuidade independe do ponto $x \in X$.*

Definição 1.5. *O operador $A : D(A) \rightarrow X$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(A) \quad (1.3)$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo T .

Proposição 1.1. *O conjunto $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.*

Demonstração. Segue direto da definição 1.3. □

Teorema 1.1. *Se $A \in \mathcal{L}(X)$ então A é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.*

Demonstração. Tomemos

$$T(t) = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \quad (1.4)$$

Para cada $t \geq 0$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, pois A é operador limitado e pelo teste de comparação de Weierstrass. Assim, T é uma aplicação de \mathbb{R}^+ em $\mathcal{L}(X)$, satisfazendo

$$T(0) = I \text{ e } T(t+s) = T(t)T(s).$$

Estimando a série de potência, temos:

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\ &= \left\| tA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\ &\leq t \|A\| e^{t\|A\|} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - A \right\| \\ &\leq \|A\| \|T(t) - I\|. \end{aligned}$$

Tomando o limite $t \rightarrow 0^+$, obtemos (1.3) e (1.2). Isso implica que $T(t)$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados e que A é o seu gerador infinitesimal. □

Proposição 1.2. *Se $T(t)$ é um semigrupo de classe C_0 , então existem $M \geq 1$ e $w > 0$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{wt}, \quad t > 0.$$

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que existe $\alpha > 0$ de modo que $\|T(t)\|$ é limitado para todo $t \in [0, \alpha]$. Supondo que o resultado não aconteça, então existe uma sequência (t_n) , $t_n \rightarrow 0^+$ tal que $\|T(t_n)\| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema da Limitação Uniforme, $\|T(t_n)x\|$ é ilimitada, para pelo menos um $x \in X$, o que configura uma contradição, pelo fato de $\lim_{t_n \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Assim, $\|T(t)\| \leq M$ para $0 \leq t \leq \alpha$. Como $\|T(0)\| = \|I\| = 1$, tem-se que $M \geq 1$. Seja $w = \alpha^{-1} \log M \geq 0$. Dado $t \geq 0$, temos $t = n\alpha + \delta$, onde $0 \leq \delta \leq \alpha$ e, portanto, pela propriedade de

semigrupo temos que

$$\|T(t)\| = \|T(n\alpha + \delta)\| = \|T(\delta)T(\alpha)^n\| \leq M^{n+1} \leq M \cdot M^{\frac{t}{\alpha}} = Me^{wt}.$$

□

Corolário 1.1. *Se $T(t)$ é um semigrupo de classe C_0 , então $t \mapsto T(t)x$, para todo $x \in X$, é uma função contínua de \mathbb{R}^+ em X .*

Demonstração. Devemos mostrar que $\lim_{s \rightarrow t} T(s)x = T(t)x, \forall x \in X$. Com efeito, sejam $t \geq 0$ e $h > 0$. Assim, tomando $h \rightarrow 0$, temos que

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)(T(h) - I)x\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(h) - I\| \|x\| \\ &\leq Me^{wt} \|T(h)x - x\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, para $t \geq h \geq 0$ e $h \rightarrow 0$, temos que

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t-h)x\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{wt} \|x - T(h)x\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $t \mapsto T(t)x$ é contínua.

□

Proposição 1.3. *Seja $T(t)$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal, então:*

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x, \text{ para } x \in X,$

b) $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e $A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x, \text{ para } x \in X,$

c) $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \text{ para } x \in D(A). \quad (1.5)$$

d) $T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(r)x dr, \text{ para } x \in D(A),$

Demonstração. a) Segue da continuidade da aplicação $t \mapsto T(t)x$, donde que a continuidade segue do Corolário 1.1.

b) Dados $x \in X$ e $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)x ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x) ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^t T(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} T(r)x dr - \frac{1}{h} \int_0^t T(s)x ds \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(r)x dr - \frac{1}{h} \int_0^t T(r)x dr - \frac{1}{h} \int_0^h T(r)x dr \\
&= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(r)x dr - \frac{1}{h} \int_0^h T(r)x dr
\end{aligned} \tag{1.6}$$

tomando $h \rightarrow 0^+$ em (1.6), e usando a continuidade da aplicação $t \mapsto T(t)x$, temos pela definição de A em (1.3) que

$$A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x ds = T(t)x - x.$$

c) Dados $x \in D(A)$ e $h > 0$, então pela propriedade (ii) da Definição 1.1, da linearidade de $T(t)$ e da definição de A , obtemos:

$$\frac{T(h) - I}{h} T(t)x = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x \rightarrow T(t)Ax, \text{ quando } h \rightarrow 0^+.$$

Assim,

$$T(t)x \in D(A), AT(t)x = T(t)Ax \text{ e } \frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

além disso

$$\frac{d^-}{dt} T(t)x = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) = T(t)Ax.$$

Note que nessa demonstração, usamos a continuidade de $t \mapsto T(t-h)x$ e a identidade (1.3). Além disso, a comutatividade em (1.5) é válida se $x \in D(A)$. Entretanto, não é possível se $x \notin D(A)$.

d) Se $x \in D(A)$, sabemos pelo item anterior que

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{1.7}$$

Assim, integrando (1.7) de s a t obtemos:

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{dt} T(r)x dr = \int_s^t AT(r)x dr. \tag{1.8}$$

□

Corolário 1.2. *Se A é um gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ de classe C_0 , então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Para todo $x \in X$, tomemos $x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds$. Pelo item (b) da Proposição 1.3, $x_t \in D(A)$ para todo $t > 0$, e pelo item (a) da mesma proposição, temos que $x_t \rightarrow x$ quando $t \rightarrow 0^+$. Desta

forma, $\overline{D(A)} = X$.

A linearidade de A segue da definição de gerador infinitesimal. Para provar que A é fechado, seja $x_n \in D(A)$, tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow +\infty$. Pelo item (d) da proposição 1.3, inferimos que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \quad (1.9)$$

O integrando em (1.9) converge para $T(s)y$ uniformemente, no intervalo limitado $[0, t]$, pois

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \|Ax_n - y\|.$$

Assim, por (1.8) temos:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y ds. \quad (1.10)$$

Agora, dividindo a expressão dada em (1.10) por $t > 0$, obtemos que

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y ds.$$

Dessa forma, fazendo $t \rightarrow 0^+$ e usando o item (a) da Proposição 1.3, temos que $x \in D(A)$ e $Ax = y$. \square

Proposição 1.4. *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ semigrupos de classe C_0 com o mesmo gerador infinitesimal A , então $T(t) = S(t)$.*

Demonstração. Suponhamos que A seja gerador infinitesimal dos semigrupos T_1 e T_2 de classe C_0 . Se $0 \leq s \leq t < +\infty$, para cada $x \in D(A)$, então a função $\phi(s) = T_1(t-s)T_2(s)x$ é diferenciável no intervalo $0 \leq s < +\infty$, e

$$\begin{aligned} \phi'(s) &= -AT_1(t-s)T_2(s)x + T_1(t-s)AT_2(s)x \\ &= -AT_1(t-s)T_2(s)x + AT_1(t-s)T_2(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\phi(s)$ é constante para $0 \leq s \leq t$. Temos então

$$T_1(t)x = \phi(0) = \phi(t) = T_2(t)x, \forall x \in D(A).$$

Por densidade, concluímos que

$$T_1(t)x = T_2(t)x, \forall x \in X.$$

\square

Definição 1.6. *Seja A um operador linear em X , não necessariamente limitado. O conjunto dado por $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ é invertível}\}$ é chamado o resolvente de A . Dizer que $\lambda \in \rho(A)$ é equivalente a $(\lambda I - A)^{-1}$ ser um operador linear em X e limitado. Denotamos por $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$.*

Teorema 1.2. *(Hille-Yosida) Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contração $T(t)$, $t \geq 0$ se, e somente, se:*

i) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.

ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém \mathbb{R}^+ e para cada $\lambda > 0$, tem-se $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Demonstração. (Condição necessária) Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ de classe C_0 de contração, pelo Corolário 1.2 A é fechado e $\overline{D(A)} = X$. Agora, para cada $\lambda > 0$ e $x \in X$, seja

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt. \quad (1.11)$$

Uma vez que $t \mapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada, então a integral existe como uma integral de Riemann, definindo assim um operador linear limitado. Logo,

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \|x\| dt = \frac{1}{\lambda} \|x\|.$$

Além disso, para $h > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (T(t+h)x - T(t)x) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} R(\lambda)x - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Quando $h \rightarrow 0^+$, a equação (1.12) converge para $\lambda R(\lambda)x - x$. Pela definição de A , segue que para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ e $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, ou seja,

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \quad (1.13)$$

Para $x \in D(A)$, usando o item (c) da Proposição 1.3 e o fechamento de A , temos

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)Ax dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AT(t)x dt \\ &= A \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt \right) \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Das equações (1.13) e (1.14), segue que

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \forall x \in D(A).$$

Então, para todo $\lambda > 0$ satisfazendo (i) e (ii), temos que existe o inverso de $\lambda I - A$ dado por $R(\lambda)$. \square

Por outro lado, para demonstrar que as condições (i) e (ii) são suficientes para que A seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0 , provaremos os seguintes lemas.

Lema 1.1. *Sejam A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 1.2 e $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \forall x \in X. \quad (1.15)$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que $x \in D(A)$. Então

$$\| \lambda R(\lambda : A)x - x \| = \| AR(\lambda : A)x \| = \| R(\lambda : A)Ax \| \leq \frac{1}{\lambda} \| Ax \| \rightarrow 0$$

se $\lambda \rightarrow +\infty$. Mas $D(A)$ é denso em X e $\| \lambda R(\lambda : A) \| \leq 1$. Portanto,

$$\lambda R(\lambda : A)x \rightarrow x,$$

quando $\lambda \rightarrow +\infty$, para todo $x \in X$. \square

Definimos agora, para todo $\lambda > 0$, a aproximação de Yosida de A , que é dada por

$$A_\lambda := \lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I \quad (1.16)$$

onde A_λ é uma aproximação de A no seguinte sentido:

Lema 1.2. *Seja A satisfazendo (i) e (ii) do Teorema 1.2. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax$, para $x \in D(A)$.*

Demonstração. Para $x \in D(A)$, temos pelo Lema 1.2 e a definição de A_λ , que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

\square

Lema 1.3. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 1.2. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contração e^{tA_λ} . Além disso, para todo $x \in X$, $\lambda, u > 0$, temos*

$$\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_u} x \| \leq t \| A_\lambda x - A_u x \|. \quad (1.17)$$

Demonstração. Por (1.16), temos que

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I,$$

além disso A_λ é um operador linear e limitado.

Assim, pelo Teorema 1.1, A_λ é um gerador infinitesimal de um semigrupo e^{tA_λ} uniformemente contínuo de operadores lineares limitados.

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}\| &= \left\| e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A) - \lambda I)} \right\| \\
&= e^{-t\lambda} \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \right\| \\
&\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda:A)\|} \\
&\leq e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t \frac{1}{\lambda}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

e portanto e^{tA_λ} é um semigrupo de contração.

É claro das definições de e^{tA_λ} , e^{tA_u} , A_λ e A_u que os mesmos comutam entre si. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_u}x\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_u} x \right) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 \left(tA_\lambda e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_u} x + e^{tsA_\lambda} (-t)A_u e^{t(1-s)A_u} x \right) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 t \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_u} (A_\lambda x - A_u x) \right) ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 t \left\| e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_u} (A_\lambda x - A_u x) \right\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \|A_\lambda x - A_u x\| ds \\
&= t \|A_\lambda x - A_u x\|
\end{aligned}$$

e a desigualdade (1.17) está provada. □

Agora exibiremos a demonstração da condição suficiente do Teorema 1.2.

Demonstração. (Condição Suficiente). Seja $x \in D(A)$. Então

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_u}x\| &\leq t \|A_\lambda x - A_u x\| \\
&\leq t \|A_\lambda x - Ax\| + t \|Ax - A_u x\|.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Da equação (1.18) e do Lema 1.2 segue que para $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge quando $\lambda \rightarrow +\infty$ e a convergência é uniforme em intervalos limitados. Visto que $\overline{D(A)} = X$ e $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$, segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \forall x \in X.$$

O limite acima é sempre uniforme em intervalos limitados. Assim, $T(t)$ satisfaz as propriedades de semigrupo, uma vez que $T(0) = I$ e $\|T(t)\| \leq 1$. Além disso, $t \mapsto T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$, pois é limite uniforme de funções contínuas $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$. Assim, $T(t)$ é semigrupo de contração de classe C_0 em X .

Para concluirmos a prova, mostraremos que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Seja $x \in D(A)$.

Usando que $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x$ e a Proposição 1.3, temos que

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Ax ds. \end{aligned} \tag{1.19}$$

A equação (1.19) segue da convergência uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ para $T(t)Ax$ em intervalos limitados. Sejam B o gerador infinitesimal de $T(t)$ e $x \in D(A)$, então

$$\frac{T(x) - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds.$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$, temos $Bx = Ax$, ou seja, $D(A) \subset D(B)$. Como B é o gerador infinitesimal de $T(t)$, segue da condição necessária que $1 \in \rho(B)$. Por outro lado, assumimos a hipótese (ii) do Teorema 1.2 assegurando que $1 \in \rho(A)$. Uma vez que $D(A) \subset D(B)$, temos

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X,$$

o que implica $D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$, e portanto $A = B$. □

Um outra maneira de caracterizar os geradores infinitesimais dos semigrupos de contrações lineares de classe C_0 , pode ser visto no Teorema de Lumer e Phillips, contudo, antes de enunciá-lo faremos algumas considerações.

Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^* . Tomemos para cada $x \in X$,

$$J(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \rightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$. Note que $\|j(x)\| = \|x\|$.

Definição 1.7. i) Diz-se que o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j ,

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0, \forall x \in D(A).$$

ii) Diz-se que A é m -dissipativo se for dissipativo e $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$ para algum $\lambda > 0$.

Teorema 1.3. (Lumer-Phillips). A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração se, e somente se, A é m -dissipativo e densamente definido.

Demonstração. Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contração, pelo teorema de Hille - Yosida, temos que A é densamente definido, fechado e que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$, donde dados $\lambda > 0$ e $f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $\lambda u - Au = f$, isto é, $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$. Além disso, para cada aplicação dualidade j , tem-se

$$\operatorname{Re} \langle T(t)x, j(x) \rangle \leq |\langle T(t)x, j(x) \rangle| \leq \|T(t)x\| \|j(x)\| \leq \|x\|^2,$$

visto que, por hipótese, $\|T(t)x\| \leq \|x\|$, para todo $x \in D(A)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle T(t)x - x, j(x) \rangle &= \operatorname{Re} \langle T(t)x, j(x) \rangle - \langle x, j(x) \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle T(t)x, j(x) \rangle - \|x\|^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde, dividindo (1.20) por $t > 0$ e passando ao limite quando $t \rightarrow 0^+$ tem-se

$$\operatorname{Re} \langle Ax, j(x) \rangle \leq 0$$

para todo $x \in D(A)$ e, assim, A é dissipativo e portanto A é m-dissipativo.

Reciprocamente, se A é m-dissipativo e densamente definido, então $\overline{D(A)} = X$. Assim devemos mostrar que A é fechado, $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ e usar o Teorema de Hille-Yosida. Para isto faremos algumas afirmações.

Afirmção 1.1. *Se A é dissipativo, então*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

para todo $\lambda > 0$ e para todo $x \in D(A)$.

Com efeito, se $\lambda > 0$, A é dissipativo e $x \in D(A)$, e então de

$$\langle (\lambda I - A)x, j(x) \rangle = \lambda \langle x, j(x) \rangle - \langle Ax, j(x) \rangle = \lambda \|x\|^2 - \langle Ax, j(x) \rangle$$

segue que

$$\begin{aligned} \lambda \|x\|^2 &\leq \operatorname{Re} \langle (\lambda I - A)x, j(x) \rangle \\ &\leq |\langle (\lambda I - A)x, j(x) \rangle| \\ &\leq \|(\lambda I - A)x\| \|j(x)\| \\ &= \|(\lambda I - A)x\| \|x\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$. Como $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$ são arbitrários, segue a afirmação.

Provaremos que A é fechado e que $(0, +\infty) \cap \rho(A) \neq \emptyset$.

Seja $(x_n) \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow +\infty$. Como A é m-dissipativo, existe $\lambda > 0$ tal que a imagem do operador $\lambda I - A$ é X .

Assim, pela afirmação 1.1, temos que

$$\|x\| = \|(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\| \geq \lambda \|(\lambda I - A)^{-1}x\|$$

ou seja,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x\|.$$

Logo,

$$\lambda \in \rho(A)$$

e

$$x_n = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)(x_n) = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda x_n - Ax_n),$$

agora tomando o limite se $n \rightarrow +\infty$, como $(\lambda I - A)^{-1}$ é contínua, temos

$$x = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda x - y).$$

Assim, $\lambda x - Ax = \lambda x - y$, ou seja $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Portanto, segue que A é fechado.

Finalmente, provaremos que $(0, +\infty) \subset \rho(A)$. Sabemos que $B = (0, +\infty) \cap \rho(A)$ é não vazio. Além disso, B é um conjunto aberto em $(0, +\infty)$ já que $\rho(A)$ é aberto em $(0, +\infty)$, (ver Kreyszig - [19] Teorema 7.3-2). Mostraremos que B é também fechado em $(0, +\infty)$. Seja $(\lambda_n) \subset B$ com $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\lambda \in (0, +\infty)$. Para n suficientemente grande temos que $|\lambda_n - \lambda| < \frac{\lambda}{4}$, e então,

$$\|(\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - A)^{-1}\| = |\lambda_n - \lambda| \|(\lambda_n - A)^{-1}\| \leq \frac{|\lambda_n - \lambda|}{\lambda_n} \leq \frac{1}{3}.$$

Assim, $I + (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - A)^{-1}$ é um isomorfismo em X , pois é a soma de dois isomorfismos. Então

$$\lambda I - A = \{I + (\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - A)^{-1}\} (\lambda_n - A)$$

leva $D(A)$ sobre X e logo $\lambda \in \rho(A)$, verificando assim todas as hipóteses do Teorema de Hille-Yosida. Portanto A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contração. □

Observação 1.3. *Da Proposição 1.3 item c), temos que se $x \in D(A)$ então $T(t)x \in D(A), \forall t \geq 0$. Portanto, $T(t)D(A) \subset D(A), \forall t \geq 0$. Essa propriedade não é, em geral, válida para todo $x \in X$, porque de $T(t)x \in D(A), \forall t \geq 0$, temos $X = IX = T(0)X \subset D(A)$, isto é, $D(A) = X$ e, assim, de acordo com o Teorema do Gráfico Fechado, A é um operador linear limitado, recaindo-se no caso particular da convergência uniforme, já estudado no Teorema 1.1. Isto não acontece, contudo, se $T(t)X \subset D(A)$ apenas para $t > 0$ e, de um modo mais geral, apenas para $t > t_0 \geq 0$. É esse caso particular que vamos considerar agora.*

Definição 1.8. *Seja semigrupo $T(t)$ de classe C_0 em um espaço de Banach X . O semigrupo $T(t)$ é dito diferenciável para $t > t_0$, se para todo $x \in X$, $t \rightarrow T(t)x$ é diferenciável para $t > t_0$. $T(t)$ é dito diferenciável se é diferenciável para $t > 0$.*

Proposição 1.5. *Se A é um operador m -dissipado e auto-adjunto de um espaço de Hilbert H , então o semigrupo $T(t)$ de classe C_0 , gerado por A , é diferenciável.*

Antes de iniciarmos a demonstração da Proposição 1.5, provaremos a seguinte afirmação, que será de fundamental importância para a prova da mesma.

Afirmação 1.2. *Seja A um operador dissipativo e auto-adjunto de um espaço de Hilbert H , e $u \in C^2([0, +\infty), H)$ uma função que satisfaz as condições*

$$\frac{du}{dt} = Au \quad e \quad \frac{d^2u}{dt^2} = A^2u. \quad (1.21)$$

Então,

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| < \frac{1}{t} \| u(0) \|. \quad (1.22)$$

De fato, como $\left(\frac{du}{dt}, u \right) = (Au, u)$ e $Re \left(\frac{du}{dt}, u \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u \|^2$, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u \|^2 = Re(Au, u). \quad (1.23)$$

Integrando (1.23) de s a t , com $0 \leq s \leq t$, tem-se que

$$\frac{1}{2} \| u(t) \|^2 - \frac{1}{2} \| u(s) \|^2 = \int_s^t Re(Au(r), u(r)) dr \leq 0, \quad (1.24)$$

onde a desigualdade (1.24) segue de A ser dissipativo. Então deduzimos a validade da desigualdade $\| u(t) \| \leq \| u(s) \|. Assim, \| u \| é decrescente.$

Agora, repetindo o mesmo argumento acima, provamos que $\left\| \frac{du}{dt} \right\| é decrescente. Além disso, dado \tau temos que$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left(Au, \frac{du}{dt} \right) t dt &= \int_0^\tau \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 t dt \\ &\geq \int_0^\tau \left\| \frac{du}{dt}(\tau) \right\|^2 t dt \\ &= \frac{\tau^2}{2} \left\| \frac{du}{dt}(\tau) \right\|^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Entretanto, como A é auto-adjunto e $\left(Au, \frac{du}{dt} \right)$ é um número real, de acordo com as hipóteses temos que

$$\frac{d}{dt} (Au, u) = \left(A \frac{du}{dt}, u \right) + \left(Au, \frac{du}{dt} \right) = 2 \left(Au, \frac{du}{dt} \right). \quad (1.26)$$

Usando integração por partes e (1.26), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \left(Au, \frac{du}{dt} \right) t dt &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} (Au, u) t dt \\ &= \frac{1}{2} (Au(\tau), u(\tau)) \tau - \frac{1}{2} \int_0^\tau (Au, u) dt. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Novamente, como A é auto-adjunto, da igualdade $\left(\frac{du}{dt}, u \right) = (Au, u)$ em (1.21), deduzimos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u \|^2 = (Au, u),$$

e assim

$$\frac{1}{2} \| u(\tau) \|^2 - \frac{1}{2} \| u(0) \|^2 = \int_0^\tau (Au, u) dt. \quad (1.28)$$

Portanto, de (1.25), (1.27) e (1.28) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\tau^2}{2} \left\| \frac{du}{dt}(\tau) \right\|^2 &\leq \int_0^\tau \left(Au, \frac{du}{dt} \right) t dt \\
&= \frac{1}{2} (Au(\tau), u(\tau)) \tau - \frac{1}{4} \|u(\tau)\|^2 + \frac{1}{4} \|u(0)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|Au(\tau)\| \tau \|u(\tau)\| - \frac{1}{4} \|u(\tau)\|^2 + \frac{1}{4} \|u(0)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\left\| \frac{du}{dt}(\tau) \right\|^2 \tau^2 + \|u(\tau)\|^2}{2} \right) - \frac{1}{4} \|u(\tau)\|^2 + \frac{1}{4} \|u(0)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \left\| \frac{du}{dt}(\tau) \right\|^2 \tau^2 + \frac{1}{4} \|u(0)\|^2.
\end{aligned}$$

Mas isso implica que

$$\frac{\tau^2}{4} \left\| \frac{du}{dt}(\tau) \right\|^2 \leq \frac{1}{4} \|u(0)\|^2,$$

e portanto

$$\left\| \frac{du(\tau)}{dt} \right\| \leq \frac{1}{\tau} \|u(0)\|.$$

A afirmação está provada.

A seguir daremos a prova da Proposição 1.5.

Demonstração. Dado $x \in H$, como $D(A^2)$ é denso em H ver [21], existe $(x_n) \subset D(A^2)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Entretanto,

$$\|T(t)x_n - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \|x_n - x\|,$$

pois o operador é linear e limitado. Além disso, pela afirmação 1.2, temos que

$$\|AT(t)x_n - AT(t)x_m\| \leq \frac{1}{t} \|x_n - x_m\|.$$

Logo, quando $n \rightarrow +\infty$, $T(t)x_n$ converge para $T(t)x$ e $AT(t)x_n$ converge em todo intervalo $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$. Como A é um operador fechado, $T(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq \delta > 0$ e, portanto, para todo $t > 0$. Logo T é um semigrupo diferenciável, o que conclui a demonstração da proposição. \square

Teorema 1.4. *Sejam A um operador m -dissipado e auto-adjunto de um espaço de Hilbert H e $T(t)$ o semigrupo de classe C_0 gerado por A . Então, para todo $x \in H$ e inteiros não negativos n e k , concluímos que*

$$T(t)x \in C^n((0, +\infty); D(A^k)).$$

Para a demonstração deste teorema, precisaremos provar alguns lemas.

Lema 1.4. *Seja $T(t)$ um semigrupo diferenciável para $t > t_0$ e $T^{(n)}(t)$ o operador definido por $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$, $A^0 = I$, $n = 0, 1, 2, \dots$, então*

- i) *o operador $T^{(n)}(t)$ tem a seguinte propriedade: para $t > (n+1)t_0$ e todo s tal que $t - t_0 > s > nt_0$, tem-se $T^{(n)}(t)x = T(t-s)T^{(n)}(s)x$, para todo $x \in X$, $n = 0, 1, \dots$*

ii) $T^{(n)}(t)$ é limitado para todo $t > nt_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração. (i) De $t > t_0$ e $t - t_0 > s > 0$, temos $t - s > t_0$. Como, $t_0 \geq 0$, $t - s > 0$, temos então

$$T^{(0)}(t)x = T(t)x = T(t-s)T(s)x = T(t-s)T^{(0)}x, \forall x \in X.$$

Portanto, a afirmação é válida para $n = 0$. Suponhamos válida para n e sejam $t > (n+2)t_0$ e $t - t_0 > s > (n+1)t_0$. Observemos que se $r > (n+1)t_0$, então da hipótese de indução, resulta que $T^{(n)}(r)x \in D(A)$, $\forall x \in X$. Logo, como $s > (n+1)t_0$, temos que $T^{(n)}(s)x \in D(A)$, $\forall x \in X$.

Assim, pelo item (c) da Proposição 1.3, deduzimos que

$$T(t-s)T^{(n)}(s)x \in D(A)$$

e

$$AT(t-s)T^{(n)}(s)x = T(t-s)AT^{(n)}(s)x, \quad \forall x \in X.$$

Entretanto, sabemos que

$$t > (n+2)t_0 > (n+1)t_0 \quad \text{e} \quad t - t_0 > s > (n+1)t_0 > nt_0.$$

Pela hipótese de indução, segue-se então que

$$T^{(n)}(t)x = T(t-s)T^{(n)}(s)x, \quad \forall x \in X,$$

donde

$$\begin{aligned} T^{(n+1)}(t)x &= AT^{(n)}(t)x = AT(t-s)T^{(n)}(s)x = T(t-s)AT^{(n)}(s)x \\ &= T(t-s)T^{(n+1)}(s)x, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Em outras palavras, temos o resultado para $n+1$. Portanto, a afirmação é válida para $n = 0, 1, 2, \dots$

(ii) Para $n = 0$, temos (ii) trivialmente. Suponhamos (ii) válida para n e seja $t > (n+1)t_0$. Disso, temos $t > nt_0$ e, pela hipótese de indução, segue que $T^{(n)}(t)$ é um operador limitado de X e, portanto, fechado. Analogamente, A é fechado, pois é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 . Logo $T^{(n+1)}(t)$ é fechado, pois $T^{(n+1)}(t) = AT^{(n)}(t)$. Além disso, como $t > (n+1)t_0$ temos que $T^{(n)}(t)x \in D(A)$, $\forall x \in X$, e então $T^{n+1}(t)$ é definido em todo o espaço X . Pelo Teorema do Gráfico Fechado, segue que $T^{(n+1)}(t)$ é um operador limitado. □

Lema 1.5. *Seja $T(t)$ diferenciável para $t > t_0$, então para todo $t > nt_0$ a função $T(t)x$ é n vezes continuamente diferenciável e*

$$\frac{d^n}{dt}T(t)x = T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x, \quad n = 1, \dots, \quad t > nt_0.$$

Demonstração. Por hipótese, se $t > t_0$ então $T(t)x \in D(A)$, $\forall x \in X$. Portanto, se $t > t_0$, existe o limite de

$$A_h T(t)x = \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h},$$

quando $h \rightarrow 0^+$, e $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h T(t)x = AT(t)x$, $\forall x \in X$, isto é, $T(t)x$ é derivável à direita em todo $t > t_0$ e

$$\frac{d^+}{dt} T(t)x = AT(t)x, \forall x \in X.$$

Seja $t > s > t_0$. Então pela afirmação anterior, $AT(s)$ é um operador linear limitado e, como $AT(t) = AT(s)T(t-s)$ temos que para $|h| < t-s$

$$\begin{aligned} \| AT(t+h)x - AT(t)x \| &= \| AT(s)T(t+h-s)x - AT(s)T(t-s)x \| \\ &\leq \| AT(s) \| \| T(t+h-s)x - T(t-s)x \| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0$, visto que T é contínuo em $\mathcal{L}(X)$. Logo, $AT(t)x$ é contínua em todo $t > t_0$, $\forall x \in X$. Segue-se que $T(t)x$ é continuamente diferenciável em $t > t_0$, $\forall x \in X$, e

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T^{(1)}(t)x.$$

Isso demonstra o caso $n = 1$.

Suponhamos que a afirmação é válida para n e sejam $t > (n+1)t_0$ e $t-t_0 > s > nt_0$. Assim, pelo Lema 1.4 item (i), temos que

$$T^{(n)}(t)x = T(t-s)T^{(n)}(s)x, \forall x \in X.$$

Agora, como $t-s > t_0$, então $T(t-s)T^{(n)}(s)x$ é continuamente diferenciável, pois a afirmação é válida para $n = 1$.

Logo, para todo $x \in X$, $T^{(n)}(t)x$ é continuamente diferenciável para $t > (n+1)t_0$, donde, pela hipótese de indução, $T(t)x$ é $n+1$ vezes continuamente diferenciável para $t > (n+1)t_0$, $\forall x \in X$, e

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} T(t)x = \frac{d}{dt} T^{(n)}(t)x = AT(t-s)T^{(n)}(s)x = AT^{(n)}(t)x = T^{(n+1)}(t)x$$

Isso completa a demonstração do Lema 1.5. □

Agora faremos a prova do Teorema 1.4.

Demonstração. Pela Proposição 1.5, T é um semigrupo diferenciável. Além disso, pelo Lema 1.5, para todo $x \in H$ e $m = 1, 2, \dots$, $T(t)$ é m vezes continuamente diferenciável em $(0, +\infty)$ e $\frac{d^m}{dt^m} T(t)x = A^m T(t)x$. Portanto, para todo $x \in H$, a função

$$T(t)x : [0, +\infty) \rightarrow H$$

satisfaz a condição $\frac{d^j}{dt^j} T(t)x \in D(A^k)$, $j, k = 0, 1, \dots$, e as funções $A^j \frac{d^j}{dt^j} T(t)x$, $i, j = 0, 1, \dots$, são contínuas. Logo, $T(t)x \in C^n((0, \infty), [D(A^k)])$, $k, n = 0, 1, \dots$ □

Vamos utilizar o resultado acima para encontrar uma solução da Equação do Calor. Porém, para tanto é necessário lembrar que o operador Δ é auto-adjunto.

1.1 Equação do Calor Homogênea

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado, regular e $N \geq 2$. Considere o problema.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \Delta u = 0, & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (1.29)$$

A seguir aplicaremos a teoria de semigrupo, para obter alguns resultados referentes ao problema (1.29).

Teorema 1.5. *Seja $u_0 \in L^2(\Omega)$. Então existe uma única função $u \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, +\infty); L^2(\Omega))$, satisfazendo o problema (1.29).*

Demonstração. (Existência). Tomemos

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad Au = \Delta u, \quad \forall u \in D(A),$$

pela Proposição 1.5, o semigrupo infinitesimal gerado pelo laplaciano é diferenciável, pois Δ é auto-adjunto e $D(\Delta^2)$ é denso em $L^2(\Omega)$. Logo,

$$u(t) = T(t)u_0$$

satisfaz o problema (1.29), onde T é o gerado por A .

Pelo Teorema 1.4, temos que

$$u(t) = T(t)u_0 \in C^n((0, +\infty), [D(A^k)]), \quad \forall k, n \in \mathbb{N},$$

onde

$$D(A^k) = \{u \in H^{2k}(\Omega) \mid u = \Delta u = \dots = \Delta u^{k-1} = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Logo,

$$u(t) = T(t)u_0 \in C^n((0, +\infty); H^{2k}(\Omega)), \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

O Teorema das Imersões de Sobolev nos diz que se $2k > N$, então

$$H^{2k}(\Omega) \hookrightarrow C^{2k - [\frac{N}{2}] - 1, \gamma}(\bar{\Omega}),$$

onde

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{2}] + 1 - \frac{N}{2}, & \text{se } \frac{N}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \text{qualquer número pertencente a } (0, 1), & \text{se } \frac{N}{2} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como $C^{2k - [\frac{N}{2}] - 1, \gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega})$ para $2k - [\frac{N}{2}] - 1 \geq k$, então

$$u(t) = T(t)u_0(x) \in C^n((0, +\infty), C^m(\bar{\Omega})), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

(Unicidade) Seja $v : [0, +\infty] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo o problema (1.29), tal que

$$v \in C([0, +\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0, +\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0, +\infty); L^2(\Omega)).$$

Assim, dado $t > 0$, definimos

$$w(s) = T(t-s)v(s), \text{ com } 0 \leq s \leq t.$$

Assim, usando a Proposição 1.3 item (c), com $A = \Delta$, temos

$$\begin{aligned} w'(s) &= -T'(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= -\Delta T(t-s)v(s) + T(t-s)(\Delta v)(s) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $w = c$, onde c é uma constante. Além disso,

$$w(0) = T(t)v(0) = T(t)u_0 = u(t) \quad \text{e} \quad w(t) = T(0)v(t) = v(t)$$

Portanto, $v(t) = u(t)$.

□

Caso Linear da Equação do Calor

Neste capítulo desenvolveremos a teoria de semigrupos de contração gerado por um operador m -acretivo, com intuito de obter algumas propriedades da equação do calor no caso linear. Além disso apresentaremos estimativas L^p e estimativas de Schauder para o problema parabólico.

Definição 2.1. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que A é acretivo se*

$$\|u + \lambda Au\| \geq \|u\|,$$

para $u \in D(A)$ e todo $\lambda > 0$.

Definição 2.2. *Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que A é m -acretivo se*

- (i) A é acretivo;
- (ii) Para todo $\lambda > 0$ e $f \in X$, existe $u \in D(A)$ tal que $u + \lambda Au = f$.

Denotamos por $T(t)$ o semigrupo das contrações gerado por $-A$.

Considere $T > 0$, $u_0 \in X$ e $f \in C([0, T], X)$, desejamos resolver o seguinte problema de Cauchy linear:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f, & \text{para todo } t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Definição 2.3. *Sejam $f : [0, T] \rightarrow X$ uma função contínua e $u_0 \in X$, então*

- (i) $u \in C^1([0, T]; X) \cap C([0, T]; D(A))$ é uma solução estrita de (2.1) em $[0, T]$, se $\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t)$ para todo $t \in [0, T]$ e $u(0) = u_0$.
- (ii) $u \in C^1((0, T]; X) \cap C((0, T]; D(A)) \cap C([0, T]; X)$ é uma solução clássica de (2.1) em $[0, T]$, se $\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t)$ para todo $t \in [0, T]$ e $u(0) = u_0$.

Teorema 2.1. *Sejam $T > 0$, $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0, T], X)$. Se u é uma solução estrita do problema (2.1), então*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad (2.2)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Note primeiramente que a aplicação $s \mapsto T(t-s)f(s)$ é contínua em $[0, t] \rightarrow X$ pelo Corolário 1.1 e composição de funções contínuas; e assim, a fórmula dada em (2.2) está bem definida. Considere agora $t \in (0, T]$, e seja $\omega(s) = T(t-s)u(s)$ para $0 \leq s \leq t$. Dado $s \leq s+h \leq t$, temos

$$\frac{\omega(s+h) - \omega(s)}{h} = T(t-s-h) \left\{ \frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{T(h) - I}{h} u(s) \right\}.$$

Se $h \rightarrow 0^+$, temos que

$$\frac{\omega(s+h) - \omega(s)}{h} \rightarrow T(t-s)(u'(s) + Au(s)) = T(t-s)f(s).$$

Desde que $T(t-\cdot)f(\cdot) \in C([0, t], X)$, segue que $\omega \in C^1([0, t], X)$ (ver Teorema A.1) e que $\omega'(s) = T(t-s)f(s)$. Integrando sobre $[0, t]$ obtemos (2.2) para $t \in (0, T]$. Por outro lado, é claro que (2.2) é verificada para $t = 0$, concluindo assim a prova. \square

Corolário 2.1. *Considere $T > 0$, $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0, T], X)$. Então, o problema (2.1) tem ao menos uma solução estrita, dada pela fórmula (2.2).*

Dado $T > 0$, $u_0 \in X$ e $f \in C([0, T], X)$, assim a fórmula (2.2) define uma função $u \in C([0, T], X)$. Vamos agora estabelecer condições suficientes em u_0 e f para que u seja uma solução estrita de (2.1). Note que é necessário que $u_0 \in D(A)$. Contudo, isto não é suficiente. De fato, se $T(t)$ é a restrição de um grupo de isometrias $u(t)$, tomamos $u_0 = 0 \in D(A)$, $y \in X$, e consideramos $f(t) = T(t)y$. Assim segue que a solução estrita de (2.2) é $u(t) = tT(t)y$. Portanto, se $y \notin D(A)$, isto segue da observação A.1 que $u \notin C([0, T], D(A))$. Em particular, u não satisfaz (2.1).

Lema 2.1. *Sejam $T > 0$, $u_0 \in X$ e $f \in L^1((0, T), X)$. Então a fórmula (2.2) define uma função $u \in C([0, T], X)$. Além disso,*

$$\|u\|_{C([0, T], X)} \leq \|u_0\| + \|f\|_{L^1((0, T), X)},$$

para todo $u_0 \in X$ e $f \in L^1((0, T), X)$.

Demonstração. O resultado é imediato se $f \in C([0, T], X)$ pelo Teorema 2.1. Caso geral segue fazendo-se um argumento de aproximação de f em L^1 por funções contínuas. \square

Proposição 2.1. *Sejam $T > 0$, $f \in C^1([0, T]; X)$ e*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad \text{para } 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Então, as seguintes propriedades ocorrem:

- (i) $v \in C^1([0, T], X)$;
- (ii) $v'(t) = f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds$, para todo $t \in [0, T]$;
- (iii) $v \in C([0, T], D(A))$;
- (iv) $v'(t) + Av(t) = f(t)$, para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Note que

$$v(t) = \int_0^t T(s)f(t-s)ds, \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

As propriedades (i) e (ii) são imediatas. Seja agora $0 \leq t \leq T$, e $0 < h \leq T-t$. Aplicando (2.3), obtemos que

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{T(h) - I}{h}v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \quad (2.4)$$

Fazendo $h \rightarrow 0$ e usando o fato que $v \in C^1([0, T], X)$, isto segue que $v(t) \in D(A)$ e que $v'(t) = -Av(t) + f(t)$. Assim, $f - v' \in C([0, T], X)$ e o gráfico $G(A)$ é fechado, isto mostra que $v(T) \in D(A)$ e que $Av(T) = f(T) - v'(T)$. Provando assim (iii) e (iv). \square

Proposição 2.2. *Sejam $T > 0$, $f \in C([0, T]; D(A))$ e v como em (2.3). Então, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

- (i) $v \in C([0, T], D(A))$;
- (ii) $Av(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$, para todo $t \in [0, T]$;
- (iii) $v \in C^1([0, T], X)$;
- (iv) $v'(t) + Av(t) = f(t)$, para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. (i) segue do Teorema 2.1 e da Proposição 1.3 (b) e (ii) segue da Proposição 1.3 (b) e (d) e os itens (iii) e (iv) seguem da Proposição 2.1 \square

Corolário 2.2. *Sejam $T > 0$, $u_0 \in D(A)$, $f \in C([0, T]; X)$ e seja u definida pela fórmula dada em (2.2). Se $f \in C^1([0, T], X)$ ou $f \in C([0, T]; D(A))$, então, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

- (i) u é solução estrita do problema (2.1);
- (ii) se $f \in C^1([0, T], X)$, então $u'(t) = -T(t)Au_0 + f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)$, para todo $t \in [0, T]$;
- (iii) se $f \in C([0, T], D(A))$, então $Au(t) = T(t)Au_0 + \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$, para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Note que $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$, em que $v(t)$ é definida por (2.3). Portanto, o resultado segue das Proposições (1.3), (2.1) e (2.2) \square

Teorema 2.2. *Sejam $T > 0$, $u_0 \in D(A)$, $f \in C([0, T], X)$ e seja u dada pela fórmula integral em (2.2). Se uma das seguintes propriedades ocorrem:*

- (i) $f \in L^1((0, T), D(A))$;
- (ii) $f \in W^{1,1}((0, T), X)$;

então u é uma solução estrita do problema (2.1).

Demonstração. Assumimos primeiramente que (i) ocorra. Seja $(f_n)_{n \geq 0} \subset C^1([0, T], D(A))$ converge para $f \in L^1((0, T), D(A))$, e seja $(u_n)_{n \geq 0}$ as correspondentes soluções de (2.2). Segue-se do Lema 2.1 que $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ em $C([0, T], X)$. Além disso, segue do Lema 2.1 e Corolário 2.2 (iii) que $(u_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0, T], D(A))$. Portanto, $u \in C([0, T], D(A))$ e $u_n \rightarrow u$ quando

$n \rightarrow \infty$ em $C([0, T], D(A))$. Por outro lado, desde que, u_n é solução estrita de (2.1), u'_n é uma sequência de Cauchy em $C([0, T], X)$; e assim, $u'_n \rightarrow u'$ quando $n \rightarrow \infty$ em $C([0, T], X)$ (ver Corolário A.2). Isto segue que u é solução estrita do problema (2.1).

Se (ii) ocorra, $(f_n)_{n \geq 0} \subset C^1([0, T], X)$ converge para f em $W^{1,1}((0, T), X)$, e seja $(u_n)_{n \geq 0}$ as correspondentes soluções de (2.2). Aplicando o Lema 2.1, mostramos que $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ em $C([0, T], X)$. Por outro lado, segue do Lema 2.1 e Corolário 2.2 (iii) que $(u_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência de Cauchy em $C^1([0, T], X)$. Portanto, $u \in C^1([0, T], X)$ e $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ em $C^1([0, T], X)$. Além disso, como u_n é solução estrita de (2.1), Au_n é uma sequência de Cauchy em $C([0, T], X)$. Pelo fechamento do gráfico $G(A)$, segue que $u \in C([0, T], D(A))$, e que $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$ em $C([0, T], D(A))$. Assim segue que u é solução estrita do problema (2.1). Isto completa a prova. \square

Corolário 2.3. *Sejam $T > 0$ e $u_0 \in D(A)$. Considere uma função Lipschitz contínua $f : [0, T] \rightarrow X$, e seja u dada pela fórmula integral em (2.2). Se X é reflexivo, então u é uma solução estrita do problema (2.1).*

Demonstração. O resultado segue do Teorema 2.2 e do Corolário A.1 \square

Observação 2.1. *Note que é essencial que X seja reflexivo no Corolário 2.3, como mostra o seguinte exemplo. Sejam $X = L^1(\mathbb{R})$, A o operador m -acretivo e $T(t)$ o grupo de isometrias gerado por $-A$. Seja $f(t) = T(t)1_{(0,1)}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto segue que $f(t) = 1_{(t,t+1)}$. Em particular, $\|f(t) - f(s)\| \leq 2|t - s|$, para todo t, s ; e assim, f é uma função Lipschitz contínua. A função u definida por (2.2) com $u_0 = 0$ é*

$$u(t) = \int_0^t T(t)1_{(0,1)} ds = tT(t)1_{(0,1)} = t1_{(t,t+1)}.$$

Note que $D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$. Portanto, $u(t) \notin D(A)$, se $t \neq 0$. Em particular, u não é solução estrita de (2.1).

Proposição 2.3. *Sejam $T > 0$, $u_0 \in X$, $f \in C([0, T], X)$ e $u \in C([0, T], X)$ como definida em (2.2). Se assumirmos uma das seguintes hipóteses:*

(i) $u \in C([0, T], D(A))$

(ii) $u \in C^1([0, T], X)$;

então u é solução estrita do problema (2.1).

Demonstração. Seja $v(t)$ como dada em (2.3). Desde que $u(t) = v(t) + T(t)u_0$, deduzimos por (2.4) que

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{T(h) - I}{h} u(t) + \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s) ds.$$

Agora a prova segue como nas provas das Proposições 2.1 e 2.2. \square

Até agora quase sempre assumimos que f é contínua. Contudo, note que a fórmula (2.2) faz sentido se assumir apenas que $f \in L^1((0, T), X)$. Nós temos resultados semelhantes neste caso de f em L^1 , que descrevemos abaixo

Lema 2.2. *Sejam $T > 0$, $u_0 \in X$ e $f \in L^1((0, T), X)$. Se u satisfaz o seguinte problema:*

$$\begin{cases} u \in L^1([0, T], D(A)) \cap W^{1,1}((0, T), X); \\ \frac{du}{dt} + Au = f, \text{ para quase todo } t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0; \end{cases} \quad (2.5)$$

então u é dada por (2.2) para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Note primeiramente que $u \in W^{1,1}((0, T), X) \hookrightarrow C([0, T], X)$; e assim, a condição $u(0) = u_0$ faz sentido. Além disso, segue do Lema 2.1 que (2.2) faz sentido. Dado $t \in (0, T]$, seja $\omega(s) = T(t-s)u(s)$ para $0 \leq s \leq t$. Se $0 \leq s \leq t-h$, temos

$$\frac{\omega(s+h) - \omega(s)}{h} = T(t-s-h) \left\{ \frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{T(h) - I}{h} u(s) \right\}. \quad (2.6)$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, temos que

$$T(t-s-h) \frac{T(h) - I}{h} u(s) \rightarrow -T(t-s)Au(s) \in L^1((0, t), X),$$

e

$$\left\| T(t-s-h) \frac{T(h) - I}{h} u(s) \right\| \leq \|Au(s)\| \in L^1(0, T),$$

para quase todo s , segue do teorema da convergência dominada que

$$T(t-\cdot-h) \frac{T(h) - I}{h} u \rightarrow -T(t-\cdot)Au,$$

em $L^1((\varepsilon, t-\varepsilon), X)$ para todo $\varepsilon > 0$. Por outro lado, temos também que

$$T(t-\cdot-h) \frac{u(\cdot+h) - u(\cdot)}{h} \rightarrow T(t-\cdot)u'(\cdot),$$

em $L^1((\varepsilon, t-\varepsilon), X)$. Portanto,

$$\frac{\omega(\cdot+h) - \omega(\cdot)}{h} \rightarrow T(t-\cdot)(u' + Au) = T(t-\cdot)f,$$

em $L^1((\varepsilon, t-\varepsilon), X)$ para todo $\varepsilon > 0$. Segue que $\omega \in W^{1,1}((\varepsilon, t-\varepsilon), X)$ e que $\omega' = T(t-\cdot)f$. Assim $T(t-\cdot)f \in L^1((0, t), X)$, implicando que $\omega \in W^{1,1}((0, t), X)$ e que $\omega' = T(t-\cdot)f$. Integrando a última identidade entre 0 e t , obtemos (2.2). \square

Corolário 2.4. *Consideramos $T > 0$, $u_0 \in X$ e $f \in L^1((0, T), X)$. Então, o problema (2.5) tem ao menos uma solução, dada como na fórmula (2.2).*

Lema 2.3. *Sejam $T > 0$, $u_0 \in D(A)$, $f \in L^1((0, T), D(A))$ e u como definida em (2.2). Então $u \in C([0, T], D(A))$ e u é solução de (2.5).*

Demonstração. Decorre do Lema 2.1, aplicado ao espaço $D(A)$, que $u \in C([0, T], D(A))$. Considere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, T], D(A))$ tal que $f_n \rightarrow f$, quando $n \rightarrow \infty$, em $L^1((0, T), D(A))$, e seja u_n definida como em (2.2) relativa à f_n . Segue do Lema 2.1 que $u_n \rightarrow u$, quando $n \rightarrow \infty$ em $C([0, T], D(A))$. Por outro

lado, segue do Teorema 2.2 que u_n é solução estrita (2.1). Portanto,

$$u'_n = -Au_n + f_n \rightarrow -Au + f,$$

quando $n \rightarrow \infty$ em $L^1((0, T), X)$. Assim, segue da Observação A.2 que $u \in W^{1,1}((0, T), X)$ e que u resolve (2.5). \square

Até agora vimos que o problema não homogêneo $u_t + Au = f$ pode ser resolvido, sobre certas hipóteses sobre A e f . Vamos agora investigar algumas estimativas específicas de u , u_t e Au . No exemplo da equação do calor. Consideremos Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^N e o operador A definido em L^2 por

$$\begin{cases} D(A) &= \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}, \\ Au &= -\Delta u, \text{ para todo } u \in D(A). \end{cases} \quad (2.7)$$

Sendo assim, segue que $-A$ é o gerador de um semigrupo de contração em $L^2(\Omega)$.

De fato,

$$C_0^\infty(\Omega) \subset D(A) \subset L^2(\Omega),$$

assim, o Δ é densamente definido. Note que

$$(u, \Delta u)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot \Delta u = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \quad \forall u \in D(A).$$

Logo A é dissipativo.

Agora, sejam $\lambda > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. Considere o problema

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u &= f, \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

Defina $B[u, v] = \lambda \int_{\Omega} u \cdot v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$. Assim $B[\cdot, \cdot]$ é bilinear. Utilizando as desigualdades de Hölder e de Poincaré temos.

$$|B[u, v]| \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$B[u, u] \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Logo pelo Teorema de Lax-Milgram existe uma única $u_f \in H_0^1(\Omega)$ que é solução do problema (2.8). Como f é arbitrária, segue que $\text{Im}(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. Assim, A é m-dissipativo. Pelo Teorema de Lumer-Phillips o resultado segue. Denotamos por $T(t)$ o semigrupo gerado por $-A$. Além disso, $T(t)$ é analítico e verifica a estimativa $\|T(t)\varphi\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^p}$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Portanto, para todo $T > 0$, $1 \leq p < \infty$ e para toda $f \in L^1((0, T), L^p(\Omega))$ a função

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad (2.9)$$

pertence à $C([0, T], L^p(\Omega))$ e é uma solução fraca para o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Agora, na sequência temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *Consideramos $T > 0$, $1 < p, q < \infty$ e $f \in L^q((0, T), L^p(\Omega))$. Se u é definido como em (2.9), então $u \in W^{1,q}((0, T), L^p(\Omega))$ e $\Delta u \in L^q((0, T), L^p(\Omega))$. Além disso, existe uma constante C tal que*

$$\|u_t\|_{L^q((0, T), L^p)} + \|\Delta u\|_{L^q((0, T), L^p)} \leq C \|f\|_{L^q((0, T), L^p)},$$

para toda $f \in L^q((0, T), L^p(\Omega))$.

Demonstração. Este resultado é uma consequência do Teorema abstrato a seguir. \square

Teorema 2.4. *Sejam Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^N , $T(t)$ um semigrupo das contrações em $L^2(\Omega)$ e $-A$ o seu gerador. Suponhamos ainda que*

(i) *$T(t)$ é um semigrupo analítico;*

(ii) *para todo $1 \leq p \leq \infty$, $\|T(t)\varphi\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^p}$ para todo $t \geq 0$ e toda $\varphi \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.*

Seja $1 < p, q < \infty$ e $T > 0$. Para toda $f \in L^q((0, T), L^p(\Omega))$, a função

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

está bem definida, $u \in C([0, T], L^p(\Omega))$. Além disso, $u \in W^{1,q}((0, T), L^p(\Omega))$, $Au \in L^q((0, T), L^p(\Omega))$ e existe uma constante C tal que

$$\|u_t\|_{L^q((0, T), L^p)} + \|Au\|_{L^q((0, T), L^p)} \leq C \|f\|_{L^q((0, T), L^p(\Omega))},$$

para toda $f \in L^q((0, T), L^p(\Omega))$.

Demonstração. Para a provar ver [16]. \square

Lema 2.4. *Sejam $0 < \alpha < 1$, $f \in C^\alpha([0, T]; X)$, $u_0 \in X$, e u a função definida em (2.2). Então, se $u \in C^\alpha([\varepsilon, T]; D(A)) \cap C^{1+\alpha}([\varepsilon, T]; X)$ para todo $\varepsilon \in (0, T)$, as seguintes afirmações são válidas:*

(i) *Se $u_0 \in X$, então u é uma solução clássica de (2.1);*

(ii) *Se $u_0 \in D(A)$, então u é uma solução estrita de (2.1), e existe $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{C^1([0, T]; X)} + \|u\|_{C([0, T]; D(A))} \leq c (\|f\|_{C^\alpha([0, T]; X)} + \|u_0\|_{D(A)}); \quad (2.11)$$

(iii) *Se $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 + f(0) \in D_A(\alpha, +\infty)$, então u' e Au pertencem a $C^\alpha([0, T]; X)$, $u' \in B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))$, e existe C tal que*

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{1+\alpha}([0, T]; X)} + \|Au\|_{C^\alpha([0, T]; X)} + \|u'\|_{B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))} \\ & \leq C [\|f\|_{C^\alpha([0, T]; X)} + \|u_0\|_{D(A)} + \|Au_0 + f(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)}]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Demonstração. Mostraremos que se $u_0 \in X$ então $u \in C((0, T]; D(A))$, e que se $u_0 \in D(A)$, então $u \in C([0, T]; D(A))$. As demonstrações (i) e (ii) seguirão da Proposição 2.3. Definamos

$$\begin{cases} u_1(t) = \int_0^t T(t-s)[f(s) - f(t)]ds, & 0 \leq t \leq T \\ u_2(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.13)$$

de modo que $u = u_1 + u_2$, u como definido em (2.2).

Assim, notemos que $u_1(t), u_2(t) \in D(A)$ para $t > 0$. Em relação a $u_1(t)$, a estimativa

$$\|AT(t-s)[f(s) - f(t)]\|_X \leq \frac{M_1}{t-s}(t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha} \quad (2.14)$$

implica que a função $s \mapsto T(t-s)[f(s) - f(t)]$ é integrável com valor em $D(A)$, de onde $u_1(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, T]$ (O mesmo é, naturalmente, para $t = 0$ também, pois $u_1(0) = 0$). Em relação $u_2(t)$, sabemos que $T(t)u_0 \in D(A)$ para $t > 0$ e que $\int_0^t T(t-s)f(s)ds \in D(A)$, pela Proposição 1.3. Além disso, temos

$$Au_1(t) = \int_0^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.15)$$

e

$$Au_2(t) = AT(t)u_0 + (T(t) - I)f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.16)$$

Se $u_0 \in D(A)$, então a equação (2.16) vale para $t = 0$ também. Vamos mostrar que Au_1 é Hölder contínua em $[0, T]$. Para $0 \leq s < t \leq T$, temos

$$\begin{aligned} Au_1(t) - Au_1(s) &= \int_0^s \left(AT(t-r)[f(r) - f(t)] - AT(s-r)[f(r) - f(s)] \right) dr \\ &+ \int_s^t AT(t-r)[f(r) - f(t)]dr \\ &= \int_0^s [AT(t-r) - AT(s-r)][f(r) - f(s)]dr \\ &+ \int_0^s AT(t-r)[f(s) - f(t)]dr + \int_s^t AT(t-r)[f(r) - f(t)]dr \\ &= \int_0^s \left(\int_{s-r}^{t-r} A^2T(z)[f(r) - f(s)]dz \right) dz \\ &+ [T(t) - T(t-s)][f(s) - f(t)] \\ &+ \int_s^t AT(t-r)[f(r) - f(t)]dr. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para provarmos finalmente que Au_1 é Hölder contínua em $[0, T]$, definimos

$$M_k := \sup_{0 \leq t \leq T+1} \|t^k A^k T(t)\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned}
\|Au_1(t) - Au_1(s)\|_X &\leq M_2[f]_{C^\alpha} \int_0^s \left[(s-r)^\alpha \int_{s-r}^{t-r} z^{-2} dz \right] dr \\
&+ 2M_0[f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha + M_1[f]_{C^\alpha} \int_s^t (t-r)^{\alpha-1} dr \\
&\leq M_2[f]_{C^\alpha} \int_0^s \left[\int_{s-r}^{t-r} z^{\alpha-2} dz \right] dr \\
&+ (2M_0 + M_1\alpha^{-1})[f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha \\
&\leq \left(\frac{M_2}{\alpha(1-\alpha)} + 2M_0 + \frac{M_1}{\alpha} \right) [f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde M_k , $k = 0, 1, 2$ são constantes como definidas em (2.18). Para $\varepsilon < s < t \leq T$, temos

$$\begin{aligned}
Au_2(t) - Au_2(s) &= AT(t)u_0 - AT(s)u_0 + T(t)f(t) - T(s)f(s) + f(t) - f(s) \\
&= \int_s^t A^2T(z)u_0 dz + (T(t)f(t) - T(s)f(s)) \\
&+ (T(s)f(t) - T(s)f(s)) + f(t) - f(s) \\
&= \int_s^t A^2T(z)u_0 dz + \int_s^t T(z)f(t) dz \\
&+ T(s)(f(t) - f(s)) + f(t) - f(s).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|Au_2(t) - Au_2(s)\|_X &\leq \int_s^t \|A^2T(z)u_0\|_X dz + \int_s^t \|T(z)f(t)\|_X dz \\
&+ \|f(t) - f(s)\|_X \\
&\leq \int_s^t \frac{M_2}{z^2} \|u_0\|_X dz + \int_s^t \frac{M_1}{z} \|f\|_\infty dz \\
&+ [f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha \\
&\leq \|u_0\|_X M_2 \int_s^t \frac{1}{\varepsilon^2} dz + M_1 \|f\|_\infty \int_s^t \frac{1}{\varepsilon} dz \\
&+ [f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha \\
&= \|u_0\|_X M_2 (t-s) + M_1 \|f\|_\infty (t-s) \\
&+ [f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha.
\end{aligned}$$

Assim, Au_2 é α -Hölder contínua em $[\varepsilon, T]$ para todo $\varepsilon \in (0, T)$, e portanto $Au \in C^\alpha([\varepsilon, T]; X)$.

Uma vez que $u \in C^\alpha([\varepsilon, T]; X)$, (porque $t \mapsto T(t)u_0 \in C^\infty((0, T]; X)$) assim $\int_0^t T(t-s)f(s)ds \in C^\alpha([0, T]; X)$, logo segue que $u \in C^\alpha([\varepsilon, T]; D(A))$. Como ε é arbitrário, temos que $u \in C^\alpha((0, T]; D(A))$.

Quanto ao comportamento quando $t \rightarrow 0^+$, se $u_0 \in D(A)$, então $t \mapsto T(t)u_0 \in C([0, T]; X)$ desta forma $u \in C([0, T]; X)$. Provando o item (i).

Se $u_0 \in D(A)$, podemos escrever $Au_2(t)$ na forma

$$Au_2(t) = T(t)(Au_0 + f(0)) + T(t)(f(t) - f(0)) - f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.20)$$

então $\lim_{t \rightarrow 0^+} Au_2(t) = Au_0$. Portanto Au_2 é contínua em $t = 0$ e $u = u_1 + u_2 \in C([0, T]; D(A))$ é uma solução estrita de (2.1). Da estimativa (2.14), segue o resultado, facilmente, uma vez que $u' = Au + f$,

$$\|Au_1(t)\|_X \leq M_1 [f]_{C^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{M_1}{\alpha} [f]_{C^\alpha} t^\alpha$$

e

$$\|Au_2(t)\|_X \leq M_0 \|Au_0\|_{D(A)} + (M_0 + 1) \|f\|_\infty,$$

pois

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^1([0, T]; X)} + \|u\|_{C([0, T]; D(A))} \\ &= \|u\|_{C^1([0, T]; X)} + \|u'\|_{C([0, T]; X)} + \|u\|_{C([0, T]; D(A))} \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right\|_X + \sup_{0 \leq t \leq T} \|Au_2(t) + Au_2(t) + f(t)\|_X \\ &+ \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \right\|_X \\ &\leq \|u_0\|_{D(A)} + T\|f\|_\infty + \sup_{0 \leq t \leq T} \|Au_2(t)\|_X \\ &+ \sup_{0 \leq t \leq T} \|Au_2(t)\|_X + \|f\|_\infty + \|u_0\|_X \|f\|_\infty T \\ &\leq 2(\|f\|_\infty \|u_0\|_{D(A)} + T\|f\|_\infty) + \frac{M_1}{\alpha} [f]_{C^\alpha} + M_0 \|Au_0\|_X + (M_0 + 1) \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Tomando $C = \max \left\{ 2, T, \frac{M_1}{\alpha}, M_0 + 1 \right\}$, temos

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^1([0, T]; X)} + \|u\|_{C([0, T]; D(A))} \\ &\leq C (\|u_0\|_X + \|f\|_\infty + [f]_{C^\alpha} + \|Au_0\|) \\ &= C (\|u_0\|_{D(A)} + \|f\|_{C^\alpha([0, T]; X)}), \end{aligned}$$

concluindo a demonstração de (ii).

Se $Au_0 + f(0) \in D_A(\alpha, +\infty)$, sabemos que $t \mapsto T(t)(Au_0 + f(0)) \in C^\alpha([0, T]; X)$, com norma C^α estimada por $C \|Au_0 + f(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)}$, para alguma constante $C > 0$. Além disso, $f \in C^\alpha([0, T]; X)$, por hipótese. Por isso, temos apenas que mostrar que $t \mapsto T(t)(f(t) - f(0))$ é α -Hölder contínua.

Para $0 \leq s \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned}
& \|T(t)(f(t) - f(0)) - T(s)(f(s) - f(0))\|_X \\
& \leq \|(T(t) - T(s))(f(s) - f(0))\|_X + \|T(t)(f(t) - f(0))\|_X \\
& \leq s^\alpha [f]_{C^\alpha} \left\| A \int_s^t T(r) dr \right\|_{\mathcal{L}(X)} + M_0(t-s)[f]_{C^\alpha} \\
& \leq M_1[f]_{C^\alpha} s^\alpha \int_s^t \frac{dr}{r} + M_0[f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha \\
& \leq M_1[f]_{C^\alpha} \int_s^t r^{\alpha-1} dr + M_0[f]_{C^\alpha} (t-s)^\alpha \\
& \leq \left(\frac{M_1}{\alpha} + M_0 \right) (t-s)^\alpha [f]_{C^\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Por isso, Au_2 é α -Hölder contínua, bem como segue a estimativa

$$\begin{aligned}
& \|u\|_{1+\alpha}([0, T]; X) + \|Au\|_{C^\alpha([0, T]; X)} \\
& \leq C(\|f\|_{C^\alpha([0, T]; X)} \|u_0\|_X + \|Au_0 + f(0)\|_{D_A(\alpha, +\infty)}),
\end{aligned}$$

uma vez que $u = Au + f$ e $u = u_1 + u_2$. Agora, vamos estimar $[u'(t)]_{D_A(\alpha, \infty)}$. Para $0 \leq t \leq T$, temos

$$u'(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s) - f(t)) ds + T(t)(Au_0 + f(0)) + T(t)(f(t) - f(0)),$$

de modo que, para $0 < \xi \leq 1$, deduzimos

$$\begin{aligned}
\|\xi^{-1} AT(\xi) u'(t)\|_X & \leq \left\| \xi^{1-\alpha} \int_0^t A^2 T(t+\xi-s)(f(s) - f(t)) ds \right\|_X \\
& + \|\xi^{1-\alpha} AT(t+\xi)(Au_0 + f(0))\|_X \\
& + \|\xi^{1-\alpha} AT(t+\xi)(f(t) - f(0))\|_X \\
& \leq M_2[f]_{C^\alpha} \xi^{1-\alpha} \int_0^t (t-s)^\alpha (t+\xi-s)^{-2} ds \\
& + M_0[Au_0 + f(0)]_{D_A(\alpha, +\infty)} + M_1[f]_{C^\alpha} \xi^{1+\alpha} (t+\xi)^{-1} t^\alpha \\
& \leq M_2[f]_{C^\alpha} + \int_0^{+\infty} r^\alpha (r+1)^{-2} dr \\
& + M_0[Au_0 + f(0)]_{D_A(\alpha, +\infty)} + M_1[f]_{C^\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Então, $[u'(t)]_{D_A(\alpha, +\infty)}$ é limitada em $[0, T]$ e a demonstração está completa! \square

Observação 2.2. A prova do Lema 2.4 implica que a condição $Au_0 + f(0) \in D_A(\alpha, +\infty)$ é necessária a fim de que $Au \in C^\alpha([0, T]; X)$. Uma vez que esta condição é satisfeita, é preservada durante todo o intervalo $[0, T]$, no sentido de que $Au(t) + f(t) = u'(t)$ pertence a $D_A(\alpha, +\infty)$ para todo $t \in [0, T]$.

Para o próximo resultado, faremos uso das seguintes constantes

$$M_{k, \alpha} = \sup_{0 < t \leq T+1} \|t^{k-\alpha} A^k e^{tA}\|_{\mathcal{L}(D_A(\alpha, +\infty); X)} \quad k = 1, 2. \tag{2.23}$$

Teorema 2.5. *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $f \in C([0, T]; X) \cap B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))$. Então a função*

$$v(t) = \int_0^t T(s)f(t-s)ds \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X),$$

e é solução estrita de

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), & 0 < t \leq T \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Além disso, $v' + Av \in B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))$, $Av \in C^\alpha([0, T]; X)$ e existe c tal que

$$\begin{aligned} \|v'\|_{B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))} &+ \|Av\|_{B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))} \\ &+ \|Av\|_{C^\alpha([0, T]; X)} \\ &\leq C\|f\|_{B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Demonstração. Vamos provar que v é uma solução estrita de (2.24), e que (2.25) acontece. Para $0 \leq t \leq T$, $v(t) \in D(A)$, e, denotando por $|f|$ a norma de f em $B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))$, temos

$$\begin{aligned} \|Av(t)\|_X &< \left\| \int_0^t AT(t-s)f(s)ds \right\|_X \\ &\leq M_{1,\alpha}|f| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\alpha} M_{1,\alpha}|f|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Além disso, para $0 < \xi \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} \|\xi^{1-\alpha} AT(\xi)Av(t)\|_X &< \xi^{1-\alpha} \left\| \int_0^t A^2 T(t+\xi-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq M_{2,\alpha} \xi^{1-\alpha} |f| \int_0^t (t+\xi-s)^{\alpha-2} ds \\ &\leq M_{2,\alpha} \frac{\xi^{1-\alpha} |f|}{1-\alpha}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

de modo que Av é limitada com valores em $D_A(\alpha, +\infty)$. Vamos provar que Av é Hölder contínua com

valores em X . Para $0 \leq s \leq t \leq T$, temos

$$\begin{aligned}
\|Av(t) - Av(s)\|_X &\leq \left\| A \int_0^s (T(t-r) - T(s-r))f(r)dr \right\|_X + \left\| A \int_s^t T(t-r)f(r)dr \right\|_X \\
&\leq \left\| A \int_0^s \left(\int_{s-r}^{t-r} AT(z)f(r)dz \right) dr \right\|_X + \int_s^t \|AT(t-r)f(r)\|_X dr \\
&\leq M_{2,\alpha}|f| \int_0^s \left(\int_{s-r}^{t-r} z^{\alpha-2} dz \right) dr + M_{1,\alpha}|f| \int_s^t (t-r)^{\alpha-1} dr \\
&\leq M_{2,\alpha}|f| \int_0^s \left[\frac{1}{1-\alpha}(s-r)^{\alpha-1} - \frac{(t-r)^{\alpha-1}}{1-\alpha} \right] dr + \frac{M_{1,\alpha}}{\alpha}|f|(t-s)^\alpha \\
&\leq M_{2,\alpha}|f| \left[-\frac{(s-r)}{\alpha(1-\alpha)} \Big|_{r=0}^s + \frac{(t-r)^\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \Big|_{r=0}^s \right] + \frac{M_{1,\alpha}}{\alpha}|f|(t-s)^\alpha \\
&\leq M_{2,\alpha}|f| \left[\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}(s^\alpha - t^\alpha) \right] + \frac{M_{1,\alpha}}{\alpha}|f|(t-s)^\alpha \\
&\leq \left(\frac{M_{2,\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{M_{1,\alpha}}{\alpha} \right) (t-s)^\alpha |f|. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Portanto, Av é α -Hölder contínua em $[0, T]$. A estimativa (2.25) segue de (2.26), (2.27) e (2.28).

A diferenciabilidade de v e a equação $v'(t) = Av(t) + f(t)$ seguem da Proposição 2.3. □

Corolário 2.5. *Sejam $\alpha \in (0, 1)$, $u_0 \in X$, $f \in C([0, T]; X) \cap B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))$ e u satisfazendo (2.2). Então $u \in C^1([0, T]; X) \cap C([0, T]; D(A))$ e $u \in B([\varepsilon, T]; D_A(\alpha + 1, +\infty))$ para todo $\varepsilon \in (0, T)$. Além disso, as seguintes condições são verdadeiras*

- i) *Se $u_0 \in X$, então u é solução clássica de (2.1);*
- ii) *Se $u_0 \in D(A)$, $Au_0 \in D(A)$, então u é uma solução estrita de (2.1);*
- iii) *Se $u_0 \in D_A(\alpha + 1, +\infty)$, então u e Au pertencem a $B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty)) \cap C([0, T]; X)$, Au pertence a $C^\alpha([0, T]; X)$ e existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
&\|u'\|_{B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))} + \|Au\|_{B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))} + \|Au\|_{C^\alpha([0, T]; X)} \\
&\leq C (\|f\|_{B([0, T]; D_A(\alpha, +\infty))} + \|u_0\|_{D_A(\alpha, +\infty)}). \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Demonstração. Se $u_0 \in D(A)$, então a função $t \mapsto T(t)u_0$ é solução estrita de $w' = Aw$, $t > 0$, $w(0) = u_0$. Se $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 \in X$ é de fato uma solução estrita; se $u_0 \in D_A(\alpha + 1, +\infty)$, então é uma solução estrita e também pertence $C^1([0, T]; X) \cap B([0, T]; D_A(1 + \alpha, +\infty))$. O resultado segue do Teorema 2.5. □

Vamos aplicar o Lema 2.4 e o Corolário 2.5 num resultado de Ladyzhenskaya-Solonnikov-Ural'ceva. Contudo, antes de enunciá-lo introduziremos alguns conceitos e definições.

Lembramos que, para $0 < \theta < 1$, o espaço parabólico de Hölder, $C^{\frac{\theta}{2}, \theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, é o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|f\|_{C^{\frac{\theta}{2}, \theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)} := \|f\|_\infty + \sup_{x \in \mathbb{R}^N} [f(\cdot, x)]_{C^{\frac{\theta}{2}}([0, T])} + \sup_{t \in [0, T]} [f(t, \cdot)]_{C_b^\theta(\mathbb{R}^N)} < +\infty,$$

e $C^{1+\frac{\theta}{2},\theta+2}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções limitadas u tais que u_t , $D_{ij}u$ existe para todo $i, j = 1, \dots, N$ e pertence a $C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. A norma é

$$\|u\|_{C^{1+\frac{\theta}{2},2+\theta}([0,T] \times \mathbb{R}^N)} := \|u\|_{\infty} + \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{\infty} + \|u_t\|_{C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0,T] \times \mathbb{R}^N)} + \sum_{j,i=1}^N \|D_{ij}u\|_{C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0,T] \times \mathbb{R}^N)}.$$

Notemos que $f \in C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $t \mapsto f(t, \cdot)$ pertence a $C^{\frac{\theta}{2}}([0, T]; C_b(\mathbb{R}^N)) \cap B([0, T]; C_b^{\theta}(\mathbb{R}^N))$.

Corolário 2.6. (*Ladyzhenskaya-Solonnikov-Ural'ceva*) *Sejam $0 < \theta < 1$, $T > 0$ e $u_0 \in C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)$, $f \in C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. Então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \Delta u(t, x) + f(t, x), & 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (2.30)$$

tem uma única solução $u \in C^{1+\theta,2+\theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, e existe $C > 0$, independente de u_0 e f , tal que

$$\|u\|_{C^{1+\frac{\theta}{2},2+\theta}([0,T] \times \mathbb{R}^N)} \leq C(\|u_0\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0,T] \times \mathbb{R}^N)}).$$

Demonstração. Definimos $X = C_b(\mathbb{R}^N)$, $A : D(A) \rightarrow X$, $A\phi = \Delta\phi$, $T(t)$ o semigrupo gerado pelo A . A função $t \mapsto f(t, \cdot)$ pertence a

$$C^{\frac{\theta}{2}}\left([0, T]; X \cap B([0, T]; D_A\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right))\right).$$

Além disso, o dado inicial u_0 em $D(A)$, e ambos Au_0 e $f(0, \cdot)$ estão em $D\left(\frac{\theta}{2}, +\infty\right)$. Então podemos aplicar o Teorema 2.4 e o Corolário 2.5 com $\alpha = \frac{\theta}{2}$. Eles implicam que a função dada pela fórmula da variação das constantes (2.2) é a única solução estrita do problema (2.1), com u_0 dado inicial e com $f(t) = f(t, \cdot)$.

Portanto, a função

$$u(t, x) := u(t)(x) = (T(t)u_0)(x) + \int_0^t (T(t-s)f(s, \cdot))(x)ds$$

é a única solução clássica de (2.30). Além disso, o Teorema 2.4 implica que

$$u' \in C^{\frac{\theta}{2}}([0, T]; X \cap B([0, T]; C_b^{\theta}(\mathbb{R}^N))),$$

de modo que $u_t \in C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, com norma limitada por

$$C \left[\|u_0\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{C^{\frac{\theta}{2},\theta}([0,T] \times \mathbb{R}^N)} \right],$$

para algum $c > 0$. O Corolário 2.5 implica que u é limitada com valores $D_A\left(\frac{\theta}{2} + 1, +\infty\right)$, de modo que

$u(t, \cdot) \in C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)$ para todo t , e

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} \leq c \left[\|u_0\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{C_{\frac{\theta}{2}, \theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)} \right]$$

para algum $C > 0$, pela estimativa (2.29).

Para finalizar a prova, vamos mostrar que $D_{ij}u$ é $\frac{\theta}{2}$ - Hölder contínua com respeito a t . Para este objetivo, usamos a desigualdade de interpolação

$$\|D_{ij}\phi\|_{\infty} \leq C \left[\left(\|\phi\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} \right)^{1-\frac{\theta}{2}} \left(\|\phi\|_{C_b^{\theta}(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{\theta}{2}} \right],$$

que é válida para toda $\phi \in C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)$, $i, j = 1, \dots, N$.

Aplicando para a função $\phi = u(t, \cdot) - u(s, \cdot)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \|D_{ij}u(t, \cdot) - D_{ij}u(s, \cdot)\|_{\infty} \\ & \leq C \left(\|u(t, \cdot) - u(s, \cdot)\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} \right)^{1-\frac{\theta}{2}} \left(\|u(t, \cdot) - u(s, \cdot)\|_{C_b^{\theta}(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{\theta}{2}} \\ & \leq C \left(2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} \right)^{1-\frac{\theta}{2}} \left(|t - s| \sup_{0 \leq t \leq T} \|u_t(t, \cdot)\|_{C_b^{\theta}(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{\theta}{2}} \\ & \leq C' |t - s|^{\frac{\theta}{2}} \left(\|u_0\|_{C_b^{2+\theta}(\mathbb{R}^N)} + \|f\|_{C_{\frac{\theta}{2}, \theta}([0, T] \times \mathbb{R}^N)} \right) \end{aligned}$$

e segue o resultado. □

Observação 2.3. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, este resultado do Corolário (2.6) é válido fazendo $X = C(\bar{\Omega})$ e assim obteremos estimativas do tipo Schauder para solução da Equação do Calor Linear.

Existência de solução da Equação do Calor não-linear

Neste capítulo, estudaremos operadores monótonos maximais, bem como a existência de solução para a equação do calor no caso não linear. A seguir desenvolveremos alguns resultados sobre operadores monótonos e maximais monótonos como em [5]. Obtendo desta forma algumas propriedades que estes operadores satisfazem, como por exemplo ser operadores fechados e densamente definidos.

Definição 3.1. *Sejam H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador ilimitado. Dizemos que A é monótono se satisfaz*

$$(Av, v) \geq 0, \quad \forall v \in D(A).$$

Chama-se maximal monótono se, em adição, $\text{Im}(I + A) = H$, isto é,

$$\forall f \in H \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f.$$

Proposição 3.1. *Seja A um operador monótono maximal. Então*

- a) $D(A)$ é denso em H .
- b) A é um operador fechado.
- c) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ é bijetor de $D(A)$ em H , $(I + \lambda A)^{-1}$ é um operador linear, e

$$\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

Demonstração. a) Seja $f \in H$ tal que $(f, v) = 0$ para todo $v \in D(A)$. Provaremos que $f = 0$. De fato, como A é monótono maximal, existe algum $v_0 \in D(A)$ tal que $v_0 + Av_0 = f$. Assim, temos

$$0 = (f, v_0) = (v_0 + Av_0, v_0) = (v_0, v_0) + (Av_0, v_0) \geq (v_0, v_0).$$

Então $v_0 = 0$, e portanto $f = 0$. Mas isto implica $\overline{D(A)}^\perp = 0$, e portanto $\overline{D(A)} = H$.

- b) Primeiramente, observe que dado algum $f \in H$, existe um único $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$. Uma vez que \bar{u} também satisfaz $\bar{u} + A\bar{u} = f$, temos

$$u - \bar{u} + A(u - \bar{u}) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= (0, u - \bar{u}) = (u - \bar{u} + A(u - \bar{u}), u - \bar{u}) \\ &= (u - \bar{u}, u - \bar{u}) + (A(u - \bar{u}), u - \bar{u}) \\ &\geq (u - \bar{u}, u - \bar{u}). \end{aligned}$$

logo $u = \bar{u}$, ou seja, $(I + A)$ de $D(A)$ em H é uma bijeção.

Afirmção 3.1. *Se $u + Au = f$, então $\|f\| \geq \|u\|$.*

De fato,

$$\|f\|\|u\| \geq (f, u) = (u + Au, u) = (u, u) + (Au, u) \geq (u, u) = \|u\|^2.$$

Logo, $\|f\| \geq \|u\|$.

Defina a função $f \mapsto u$, dada por $u = (I + A)^{-1}f$. Assim,

$$\|(I + A)^{-1}f\| = \|u\| \leq \|f\|.$$

Logo $(I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Agora, provaremos que A é um operador fechado. Seja $(u_n) \subset D(A)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e $Au_n \rightarrow f$. Temos que mostrar que $u \in D(A)$ e que $Au = f$. Como $u_n + Au_n \rightarrow u + f$ e

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n),$$

segue que,

$$u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) = (I + A)^{-1}(u + f).$$

Portanto, $u = (I + A)^{-1}(u + f)$, isto é, $u \in D(A)$ e $Au = u$.

- c) Provaremos que se $Im(I + \lambda_0 A) = H$, para algum $\lambda_0 > 0$, então

$$Im(I + \lambda A) = H, \text{ para todo } \lambda > \frac{\lambda_0}{2}.$$

Observemos que analogamente à parte (b), para cada $f \in H$ existe um único $u \in D(A)$ tal que $u + \lambda_0 A u = f$. Além disso, a função $f \mapsto u$, denotada por $(I + \lambda_0 A)^{-1}$, é um operador linear limitado com $\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

O nosso objetivo é resolver a seguinte equação:

$$u + \lambda Au = f, \text{ com } \lambda > 0. \tag{3.1}$$

A equação dada em (3.1) pode ser reescrita como

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

ou, alternativamente,

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} = \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) u \right].$$

Se $\left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| < 1$, isto é, $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, temos

$$\begin{aligned} & \left\| (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) u \right] - (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) v \right] \right\| \\ &= \left\| (I + \lambda_0 A)^{-1} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) (u - v) \right\| \leq \left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| \|u - v\| < \|u - v\|. \end{aligned}$$

Assim, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, concluímos que

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) u \right]$$

tem solução. Dessa forma, o item (c) segue facilmente por indução uma vez que $(I + A)$ é bijetiva, $I + \lambda A$ é bijetiva para cada $\lambda > \frac{1}{2}$, e assim, para $\lambda > \frac{1}{4}$, e repetindo o processo, concluímos a prova, bem como a demonstração da proposição. \square

Observação 3.1. *Pela Proposição 3.1 temos que em um espaço de Hilbert, um operador maximal monótono é m-acretivo. Usando a definição de m-acretivo, prova-se o contrário. Logo em espaço Hilbert m-acretivo equivale maximal monótono .*

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(u) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, m-acretivo, densamente definido no espaço de Banach X , com norma $\| \cdot \|$, f é uma função não-linear, e u_0 é o valor inicial. No que segue, apresentaremos resultados existência de solução do problema (3.2) como em [6]

Definição 3.2. *Uma solução suave de (3.2) é uma função $u \in C([0, +\infty); X)$ e que satisfaz (3.2).*

Definição 3.3. *Uma solução clássica de (3.2) é uma função u que satisfaz (3.2) e $u \in C^1([0, +\infty]; X) \cap C([0, +\infty), D(A))$.*

Observação 3.2. *Suponhamos que $T(t)$ o semigrupo gerado por $-A$ e $T(t-s)f(u(s)) \in L^1([0, t], X)$. Então uma solução de (3.2) é dada por*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds.$$

De fato, dado $t > 0$, definimos $g(s) = T(t-s)u(s)$, e então

$$\begin{aligned} g'(s) &= T(t-s)u'(s) - T'(t-s)u(s) \\ &= T(t-s)(-Au(s) + f(u(s))) + AT(t-s)u(s) \\ &= T(t-s)f(u(s)). \end{aligned}$$

Assim,

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds.$$

Mas $g(t) = u(t)$ e $g(0) = T(t)u_0$. Logo,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds. \quad (3.3)$$

Teorema 3.1. *Assumamos que $f : X \rightarrow X$ é globalmente Lipschitz, isto é, existe uma constante $L > 0$ tal que $\|f(u) - f(v)\| \leq L\|u - v\|$. Dado $u_0 \in X$, existe uma única solução suave de (3.2) dada por*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds,$$

para todo $t \geq 0$. Além disso, existe uma dependência contínua com respeito a u_0 ,

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{Lt}\|u_0 - v_0\|,$$

para todo $t > 0$, onde v é uma solução de (3.2) com o valor inicial v_0 .

Demonstração. A demonstração será feita em três passos.

Passo 1 (Unicidade): Assumamos que u e v são soluções de (3.2). Então

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \int_0^t \|T(t-s)[f(u(s)) - f(v(s))]\|ds \leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\|ds,$$

e, assim, pela desigualdade de Gronwall (ver Lema A.1),

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(0) - v(0)\|e^{tL} = 0.$$

Passo 2 (Existência): A prova é feita usando o princípio da contração no espaço

$$E = \left\{ u \in C([0, +\infty); X) : \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| < \infty \right\},$$

com $k > 0$ a ser escolhido. Seja E espaço normado com a norma

$$\|u\|_E = \sup_{t \geq 0} e^{-kt}\|u(t)\|$$

que é um espaço de Banach. Dado $u \in E$, definimos

$$\phi(u)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Notemos que $\phi(u) \in C([0, +\infty); X)$ e

$$\|\phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(u(s))\| ds.$$

Porém,

$$\|f(u(s))\| \leq \|f(u(s)) - f(0)\| + \|f(0)\| \leq L\|u(s)\| + \|f(0)\|,$$

e assim

$$\begin{aligned} \|\phi(u)(t)\| &\leq \|u_0\| + \int_0^t (\|f(0)\| + L\|u(s)\|) ds \\ &\leq \|u_0\| + t\|f(0)\| + L\|u\|_E \int_0^t e^{ks} ds \\ &= \|u_0\| + t\|f(0)\| + L \frac{e^{kt} - 1}{k} \|u\|_E. \end{aligned}$$

Portanto, $\phi(u) \in E$ e

$$\begin{aligned} e^{-kt}\|\phi(u)\| &\leq \frac{\|u_0\|}{e^{kt}} + \frac{t}{e^{kt}}\|f(0)\| + \frac{L}{k} \frac{e^{kt} - 1}{e^{kt}} \|u\|_E \\ &\leq \|u_0\| + \frac{1}{ek}\|f(0)\| + \frac{L}{k}\|u\|_E. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi(u)\|_E \leq \|u_0\| + \frac{1}{ek}\|f(0)\| + \frac{L}{k}\|u\|_E.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\| &\leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \\ &\leq L\|u - v\|_E \int_0^t e^{ks} ds \\ &= \frac{L}{k} \frac{e^{kt} - 1}{k} \|u - v\|_E \\ &\leq \frac{L}{k} e^{kt} \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\phi(u) - \phi(v)\|_E \leq \frac{L}{k} \|u - v\|_E.$$

Escolhendo $k > L$, concluímos pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach que ϕ tem um ponto fixo $u \in E$.

Passo 3 (Dependência contínua): Assumamos que u e v são duas soluções de (3.2) associadas aos valores iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Assim, temos

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &= \left\| T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds - \left(T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(v(s))ds \right) \right\| \\ &\leq \|T(t)(u_0 - v_0)\| + \int_0^t \|T(t-s)[f(u(s)) - f(v(s))]\| ds \\ &\leq \|u_0 - v_0\| + L \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gronwall (ver Lema A.1),

$$\|u(t) - v(t)\| \leq e^{Lt} \|u_0 - v_0\|.$$

□

Observação 3.3. Considerando f não globalmente Lipschitz, mas apenas Lipschitz em cada conjunto limitado, estabelecemos que (3.2) tem uma solução definida em um intervalo de tempo máximo $[0, T_m]$ e, além disso, se $T_m < +\infty$, $u(t)$ “explode” quando $t \uparrow T_m$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\| = +\infty$.

Teorema 3.2. Assumamos que $f : X \rightarrow X$ é globalmente Lipschitz e $f \in C^1(X, X)$. Dada $u_0 \in D(A)$, então existe uma solução global clássica de (3.2), isto é, $u \in C^1([0, +\infty); X) \cap C([0, +\infty); D(A))$.

Demonstração. Consideremos o problema (3.1), na forma diferenciável com respeito a t . Assim, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + A \frac{du}{dt} = f'(u) \frac{du}{dt}.$$

Portanto, $v = \frac{du}{dt}$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av &= f'(u).v \\ v(0) &= f(u_0) - Au_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Até agora não sabemos se $\frac{du}{dt}$ realmente existe, mas, por outro lado, a existência de v satisfazendo (3.4) no sentido fraco decorre da observação (3.1). Portanto, definimos v dada por (3.3) solução fraca de (3.4), e nosso objetivo é provar que $u \in C^1([0, +\infty); X)$, com $v = \frac{du}{dt}$.

Pelo Teorema 3.1, temos

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s))ds.$$

Assim, sabemos que

$$\begin{aligned} u(t+h) &= T(t+h)u_0 + \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(u(s))ds \\ &= T(t+h)u_0 + \int_0^{t+h} T(t-(s-h))f(u(s))ds \\ &= T(t+h)u_0 + \int_{-h}^t T(t-z)f(u(z+h))dz \\ &= T(t+h)u_0 + \int_0^t T(t-z)f(u(z+h))dz + \int_{-h}^0 T(t-z)f(u(z+h))dz \\ &= T(t+h)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(u(s+h))ds + \int_0^h T(t+h-s)f(u(s))ds. \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \frac{T(t+h) - T(t)}{h} u_0 + \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s) [f(u(s+h)) - f(u(s))] ds \\ &+ \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s) f(u(s)) ds. \end{aligned}$$

Como $u_0 \in D(A)$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} u_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t) \frac{T(h) - I}{h} u_0 = -T(t)A(u_0)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s) f(u(s)) ds = T(t)f(u_0).$$

Agora, usando o fato que $f \in C^1(X, X)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s) [f(u(s+h)) - f(u(s))] ds &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^t T(t-s) \left[\frac{f(u(s+h)) - f(u(s))}{h} \right] ds \\ &= \int_0^t T(t-s) f'(u(s)) \frac{d^+ u(s)}{dt} ds. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$v(t) = T(t) [f(u_0) - Au_0] + \int_0^t T(t-s) f'(u(s)) v(s) ds.$$

Logo, $\frac{d^+ u}{dt} = v(t)$. Uma vez que $v \in C([0, +\infty); X)$, segue do Teorema A.1 que $u \in C^1([0, +\infty); X)$. Mas isso implica que $f(u) \in C([0, +\infty); X)$.

Como $u_0 \in D(A)$, pela Proposição 1.3, temos que

$$\int_0^t T(t-s) f(u(s)) ds \in D(A).$$

Portanto, $u \in C([0, +\infty); D(A))$. □

3.1 Aplicação dos Resultados

Seja $\Omega \subset R^N$, aberto e regular. Considere o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + mu = g(u), & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0, & \text{em } [0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.5)$$

sendo $g \in C^1(R, R)$, $m > -\lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e

$$|g(x)| \leq C_1 |x| + C_2 |x|^p, \quad (3.6)$$

com $1 < p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, C_1 e C_2 constantes positivas.

O operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definido por

$$\begin{cases} D(A) &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au &= -\Delta u + m, \end{cases}$$

satisfaz as seguintes propriedades

- (i) A é monótono.
- (ii) A é maximal monótono, ou seja, a equação

$$u + (-\Delta u + mu) = f$$

tem uma única solução em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, para toda $f \in L^2(\Omega)$.

- (iii) A é autoadjunto.

Demonstração. (i) Para todo $u \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned} (Au, u)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (-\Delta u u + m u^2) dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + m \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pois $m > -\lambda_1$.

(ii) Dada $f \in L^2(\Omega)$, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (m+1)u &= f, & \text{em } \Omega \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Definimos a seguinte forma bilinear

$$B[u, v] := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + (m+1) \int_{\Omega} u \cdot v.$$

Pelas desigualdades de Hölder e Poincaré, temos que

$$\begin{aligned} |B[u, v]| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |m+1| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |m+1| C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + (m+1) \int_{\Omega} |u|^2.$$

Analisaremos dois casos:

i) se $m+1 \geq 0$, então $B[u, u] \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$;

ii) se $m+1 < 0$. Como

$$m > -\lambda_1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} |u|^2},$$

assim dada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ temos que,

$$(m+1) \int_{\Omega} |u|^2 \geq \frac{(m+1)}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

implicando em

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + (m+1) \int_{\Omega} |u|^2 \geq \left(1 + \frac{(m+1)}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

como $m > -\lambda_1$ e $m+1 > m$, segue que $1 + \frac{(m+1)}{\lambda_1} > 0$. Tomando $C = \min\{1, 1 + \frac{(m+1)}{\lambda_1}\}$ tem-se que

$$B[u, u] \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Portanto pelo Teorema de Lax-Milgram existe $u_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que u_f é solução do problema (3.7). Logo $\text{Im}(I + (-\Delta + m)) = L^2(\Omega)$.

(iii) Uma vez que $D(A)$ é denso em $L^2(\Omega)$, basta verificarmos que é simétrico.

De fato, sejam $u, v \in D(A)$. Então, temos

$$\begin{aligned} (Au, v)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (-\Delta u + mu)v \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta u)v + m \int_{\Omega} uv \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + m \int_{\Omega} uv. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} (u, Av)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (-\Delta v + mv)u \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta v)u + m \int_{\Omega} uv \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + m \int_{\Omega} uv. \end{aligned}$$

Portanto, $(Au, v)_{L^2(\Omega)} = (u, Av)_{L^2(\Omega)}$. □

Agora, caso g fosse de Lipschitz e $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, poderíamos aplicar o Teorema 3.1, com $X = L^2(\Omega)$, e assim obteríamos uma solução clássica de (3.4).

No entanto, consideremos o Problema (3.4) na forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = & fu \\ u & = & 0 \\ u(0) & = & u_0, \end{cases}$$

onde $f(t, x) = \frac{g(u(t, x))}{u(t, x)} - m$. Pelas hipóteses de crescimento da função g , segue que a equação tem solução no sentido das distribuições $D'((0, \infty) \times \Omega)$ (ver [8] Cazenave e Lions página 1962).

Se $f : [t_0, T] \times X \rightarrow X$ é contínua em $t \in [t_0, T]$ e uniformemente Lipschitz contínua no espaço de Banach X , então o problema com $u_0 \in X$ tem solução única $u \in C([t_0, T]; X)$ (Ver [21] página 184 Teorema 1.2 e Teorema 1.4 página 185). Se f é continuamente diferenciável de $[t_0, T] \times X$ em X então a solução do problema é clássica (ver [21] Teorema 1.5).

Estimativa uniforme para a solução da Equação do Calor não-linear

Estudaremos propriedades dos operadores maximais monótonos, com o objetivo de provarmos uma limitação uniforme em t na norma $L^\infty(\Omega)$ da solução da equação do calor não-linear, como dada no capítulo 3, sob as hipóteses do artigo [8], utilizando apenas um argumento do tipo Bootstrap inspirada em [18], sem nos preocuparmos com as propriedades do espaço de Lorentz.

Seja H um espaço de Hilbert. Denotemos por $\|\cdot\|$ sua norma, e (\cdot, \cdot) o seu produto escalar. Consideremos $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador maximal monótono e auto-adjunto, verificando

$$(Au, u) \geq \beta \|u\|^2,$$

para todo $u \in D(A)$ e algum $\beta > 0$.

Além disso, consideremos $G \in C^1(D(A), H)$ tal que $g(s) = G'(s)$ e $g \in C(D(A), H)$. Quanto ao crescimento de g , assumimos a hipótese de crescimento superquadrático de G dada por Ambrosetti e Rabinowitz em [2], isto é, suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $u \in D(A)$, temos

$$(g(u), u) \geq (2 + \varepsilon)G(u). \quad (4.1)$$

Sob essas hipóteses, podemos enunciar o seguinte lema, que nos dá estimativas para a solução da equação do calor semilinear.

Lema 4.1. *Se $u \in C([0, +\infty), D(A)) \cap C^1([0, +\infty), H)$ é uma solução da equação*

$$u_t + Au = g(u), \quad (4.2)$$

onde $u = u(t)$, então

(i) $\frac{1}{2}(Au(t), u(t)) - G(u(t)) \geq 0$, para todo $t \geq 0$;

(ii) $\|u(t)\|^2 \leq \frac{2(2 + \varepsilon)}{\beta\varepsilon} \left\{ \frac{1}{2}(Au(0), u(0)) - G(u(0)) \right\}$, para todo $t \geq 0$;

- (iii) $\int_0^\infty \|u_t(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{2}(Au(0), u(0)) - G(u(0));$
- (iv) $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} (Au(s), u(s))^2 ds \leq C$, em que C é uma constante;
- (v) $\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} (g(u(s)), u(s))^2 ds \leq C$, em que C é uma constante.

Demonstração. Fazendo o produto interno da equação (4.2) por u temos,

$$\begin{aligned} (u_t + Au, u) &= (g(u), u) \iff \\ (u_t, u) + (Au, u) - (g(u), u) &= 0 \iff \\ (u_t, u) + (Au - g(u), u) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Além disso, observando que $\frac{d}{dt}\|u\|^2 = 2(u_t, u)$ implica

$$(u_t, u) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2,$$

substituindo em (4.3) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + (Au - g(u), u) = 0. \tag{4.4}$$

Por outro lado, tomando o produto interno da equação (4.2) por u_t , obtemos

$$\begin{aligned} (u_t + Au, u_t) &= (g(u), u_t) \iff \\ (u_t, u_t) + (Au, u_t) - (g(u), u_t) &\iff \\ \|u_t\|^2 + (Au, u_t) - (g(u), u_t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Notemos que

$$\frac{d}{dt} A(u(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(u(t+h)) - A(u(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A\left(\frac{(u(t+h) - u(t))}{h}\right).$$

Como A é fechado pela Proposição 3.1, segue que

$$\frac{d}{dt} A(u(t)) = A(u_t). \tag{4.6}$$

Assim, substituindo (4.6) e usando o fato de A que é auto-adjunto, isto é $(Au, u_t) = (A(u_t), u)$, temos que

$$\frac{d}{dt} (Au, u) = \left(\frac{d}{dt} Au, u \right) + (Au, u_t) = (A(u_t), u) + (Au, u_t) = 2(Au, u_t),$$

logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (Au, u) = (Au, u_t). \tag{4.7}$$

Agora note que pela regra da cadeia $\frac{d}{dt} G(u) = (g(u), u_t)$. Deste modo, substituindo está igualdade e (4.6) em (4.5) obtemos

$$\|u_t\|^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(Au, u) - G(u) \right\} = 0. \quad (4.8)$$

No que se segue, denotaremos

$$E = E(0) = \left\{ \frac{1}{2}(Au(0), u(0)) - G(u(0)) \right\}. \quad (4.9)$$

Usando (4.4) e (4.8), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) + (Au(t), u(t)) - (g(u(t)), u(t)) \\ &= (2 + \varepsilon) \int_0^t 0 \, ds \\ &= (2 + \varepsilon) \int_0^t \left(\|u_t\|^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(Au(s), u(s)) - G(u(s)) \right\} \right) ds \\ &= (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t\|^2 ds + (2 + \varepsilon) \int_0^t \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(Au(s), u(s)) - G(u(s)) \right\} ds \\ &= (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t\|^2 ds + (2 + \varepsilon) \left\{ \frac{1}{2}(Au(t), u(t)) - G(u(t)) \right\} - (2 + \varepsilon)E, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) &= (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + (2 + \varepsilon) \left\{ \frac{1}{2}(Au(t), u(t)) - G(u(t)) \right\} \\ &\quad - (2 + \varepsilon)E - (Au(t), u(t)) + (g(u(t)), u(t)) \\ &= (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2} (Au(t), u(t)) + (g(u(t)), u(t)) \\ &\quad - (2 + \varepsilon)G(u(t)) - (2 + \varepsilon)E. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Utilizando a hipótese $(g(u(t)), u(t)) - (2 + \varepsilon)G(u(t)) \geq 0$ em (4.10), temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) \geq (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2} (Au(t), u(t)) - (2 + \varepsilon)E. \quad (4.11)$$

Usando o fato de que $(Au(t), u(t)) \geq \beta \|u(t)\|^2$, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) \geq (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \frac{\varepsilon\beta}{2} \|u(t)\|^2 - (2 + \varepsilon)E. \quad (4.12)$$

Agora, denotando

$$h(t) = \frac{\varepsilon\beta}{2} \|u(t)\|^2 - (2 + \varepsilon)E,$$

segue de (4.12) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(t) = \frac{\varepsilon\beta}{2} \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 &\geq \varepsilon\beta \left[(2+\varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \frac{\varepsilon\beta}{2} \|u(t)\|^2 - (2+\varepsilon)E \right] \\ &\geq \varepsilon\beta \left[\frac{\varepsilon\beta}{2} \|u(t)\|^2 - (2+\varepsilon)E \right] = \varepsilon\beta h(t). \end{aligned}$$

Portanto, se existir $t_0 > 0$ tal que $h(t_0) > 0$, deduzimos que $\|u(t)\|$ tem crescimento exponencial até o infinito. De fato,

$$\frac{d}{dt}h(t_0) \geq \varepsilon\beta h(t_0) > 0,$$

Como h é contínua, então existe $\delta > 0$ tal que $h(t) > 0$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, assim h é estritamente crescente em $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Por continuidade, temos $h(t_0 + \delta) > 0$ e repetindo o argumento para $t_0 + \delta$ conseguiremos um intervalo centrado em $t_0 + \delta$ tal que h é crescente, e assim sucessivamente. Logo se $t \geq t_0$ temos $h(t) > 0$ e

$$\int_{t_0}^t \frac{h'(s)}{h(s)} ds \geq \int_{t_0}^t \varepsilon\beta ds,$$

implicando que,

$$\ln \frac{h(t)}{h(t_0)} \geq \varepsilon\beta(t - t_0),$$

assim,

$$\frac{h(t)}{h(t_0)} \geq e^{\varepsilon\beta(t-t_0)},$$

logo,

$$h(t) \geq e^{\varepsilon\beta(t-t_0)}h(t_0),$$

portanto,

$$h(t) = \frac{\varepsilon\beta}{2} \|u(t)\|^2 - (2+\varepsilon)E \geq e^{\varepsilon\beta(t-t_0)}h(t_0).$$

Seja $f(t) = \int_0^t \|u(s)\|^2 ds$.

Afirmção 4.1. $f''(t) \geq 2(2+\varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds$, para t suficientemente grande.

De fato, como $f'(t) = \|u(t)\|^2$, então temos

$$f''(t) = \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \geq 2(2+\varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \varepsilon\beta\|u(t)\|^2 - 2(2+\varepsilon)E.$$

Além disso, pelo crescimento exponencial de $\|u(t)\|$, para t suficientemente grande, temos que

$$\frac{\varepsilon\beta}{2} \|u(t)\|^2 - (2+\varepsilon)E \geq 0.$$

Logo,

$$f''(t) \geq 2(2+\varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds. \quad (4.13)$$

Agora, multiplicando $f''(t)$ por $f(t)$ e utilizando (4.13) temos

$$\begin{aligned}
f''(t)f(t) &\geq 2(2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \int_0^t \|u(s)\|^2 ds \geq 2(2 + \varepsilon) \left[\int_0^t \|u_t(s)\| \|u(s)\| ds \right]^2 \\
&\geq 2(2 + \varepsilon) \left[\int_0^t (u(s), u_t(s)) ds \right]^2 = 2(2 + \varepsilon) \left[\int_0^t \frac{1}{2} (\|u(s)\|^2)' ds \right]^2 \\
&= 2(2 + \varepsilon) \frac{1}{4} (\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2)^2 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (f'(t) - f'(0))^2 \\
&\geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) (f'(t) - f'(0))^2.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|^2 = +\infty$, então para t suficientemente grande temos

$$f''(t)f(t) \geq \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) (f'(t))^2. \quad (4.14)$$

Considere a derivada da função $f^{-\frac{\varepsilon}{8}}(t)$

$$(f^{-\frac{\varepsilon}{8}}(t))' = \frac{-\varepsilon}{8} f^{-\frac{\varepsilon}{8}-1}(t) f'(t),$$

assim por (4.14)

$$\begin{aligned}
(f^{-\frac{\varepsilon}{8}}(t))'' &= \frac{\varepsilon}{8} \left(\frac{\varepsilon}{8} + 1\right) f^{-\frac{\varepsilon}{8}-2}(t) (f'(t))^2 - \frac{\varepsilon}{8} f^{-\frac{\varepsilon}{8}-1}(t) f''(t) \\
&= \frac{\varepsilon}{8} f^{-\frac{\varepsilon}{8}-2}(t) \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) (f'(t))^2 - f(t) f''(t) \right] \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Segue que $f^{-\frac{\varepsilon}{8}}$ é côncava para t grande. Mas isto é impossível pela afirmação a seguir, já que $f^{-\frac{\varepsilon}{8}}(t) \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^{-\frac{\varepsilon}{8}}(t) = 0$. Esta contradição garante que $h(t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$. Assim,

$$\frac{\varepsilon\beta}{2} \|u(t)\|^2 - (2 + \varepsilon)E \leq 0, \text{ para todo } t \in [0, +\infty),$$

e então

$$\|u(t)\|^2 \leq \frac{2(2 + \varepsilon)}{\varepsilon\beta} E. \quad (4.15)$$

Isto conclui a demonstração de (ii) do Lema 4.1.

Afirmção 4.2. Não existe uma função $g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ côncava positiva tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

De fato, suponhamos que exista uma função g satisfazendo a condição acima. Fixemos $x \in [a, +\infty)$ e $t \in (0, 1)$. Assim, $g((1-t)x + ty) \geq (1-t)g(x) + tg(y)$ (isto é válido para todo $y \in [a, +\infty)$).

Deste modo, temos

$$0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} g((1-t)x + ty) \geq \lim_{y \rightarrow +\infty} ((1-t)g(x) + tg(y)) = (1-t)g(x).$$

Absurdo, pois g é assumida função positiva, logo a afirmação é verdadeira.

Observação 4.1. Temos por (4.15) que $E = \frac{1}{2}(Au(0), u(0)) - G(u(0)) \geq 0$, e repetindo o argumento de

(4.9) a (4.15) com $t_0 > 0$ no lugar de 0 e $t \geq t_0 > 0$, chegamos a

$$\|u(t)\|^2 \leq \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon\beta} \left\{ \frac{1}{2}(Au(t_0), u(t_0)) - G(u(t_0)) \right\}.$$

Mas isso implica $\frac{1}{2}(Au(t_0), u(t_0)) - G(u(t_0)) \geq 0$. Logo, podemos concluir que

$$\frac{1}{2}(Au(t), u(t)) - G(u(t)) \geq 0,$$

para todo $t \geq 0$, o que demonstra (i) do Lema 4.1.

Agora, deduziremos a condição (iii) do Lema 4.1.

De fato, como de (4.8)

$$\|u_t(t)\|^2 = -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(Au(t), u(t)) - G(u(t)) \right\},$$

então temos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \|u_t(s)\|^2 ds &= \frac{1}{2}(Au(0), u(0)) - G(u(0)) - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{2}(Au(t), u(t)) - G(u(t)) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2}(Au(0), u(0)) - G(u(0)) \\ &= E, \end{aligned}$$

pois $\frac{1}{2}(Au(t), u(t)) - G(u(t)) \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Assim, obtemos (iii).

Além disso, utilizando (4.11) provaremos que

$$(Au(t), u(t)) \leq \frac{2}{\varepsilon} \|u(t)\| \|u_t(t)\| + \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon} E.$$

De fato, sabemos de (4.11) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) &\geq (2+\varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \frac{\varepsilon}{2} (Au(t), u(t)) - (2+\varepsilon)E \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} (Au(t), u(t)) - (2+\varepsilon)E. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos,

$$\|u(t)\| \|u_t(t)\| \geq (u_t(t), u(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) \geq \frac{\varepsilon}{2} (Au(t), u(t)) - (2+\varepsilon)E.$$

Então temos

$$(Au(t), u(t)) \leq \frac{2}{\varepsilon} \|u(t)\| \|u_t(t)\| + \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon} E. \quad (4.17)$$

Assim, integrando a desigualdade (4.17) de t a $t+1$, usando desigualdade de Cauchy-Schwarz e (4.15)

obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+1} (Au(s), u(s))^2 ds &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 \|u_t(s)\|^2 ds \\
&+ \frac{8(2+\varepsilon)}{\varepsilon^2} E \int_t^{t+1} \|u(s)\| \|u_t(s)\| ds + \frac{4(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} E^2 \\
&\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon\beta} E \int_t^{t+1} \|u_t(s)\|^2 ds \\
&+ \frac{8(2+\varepsilon)}{\varepsilon^2} E \left(\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{t+1} \|u_t(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{4(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} E^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_t^{t+1} \|u_t(s)\|^2 ds \leq \int_0^{+\infty} \|u_t(s)\|^2 ds \leq E, \quad (4.18)$$

segue que

$$\int_t^{t+1} (Au(s), u(s))^2 ds \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon\beta} E^2 + \frac{2(2+\varepsilon)}{\varepsilon\beta} \frac{8(2+\varepsilon)}{\varepsilon^2} E^2 + \frac{4(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon^2} E^2 \quad (4.19)$$

provando (iv) do Lema 4.1.

Finalmente, como

$$\begin{aligned}
(g(u(s)), u(s)) &= (u_t(s) + Au(s), u(s)) \\
&= (Au(s), u(s)) + (u_t(s), u(s)),
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e (4.15) obtemos

$$\begin{aligned}
(g(u(s)), u(s))^2 &= [(Au(s), u(s)) + (u_t(s), u(s))]^2 \\
&\leq 2(Au(s), u(s))^2 + 2(u_t(s), u(s))^2 \\
&\leq 2(Au(s), u(s))^2 + 2\|u(s)\|^2 \|u_t(s)\|^2 \\
&\leq 2(Au(s), u(s))^2 + 4\frac{(2+\varepsilon)}{\varepsilon\beta} E \|u_t(s)\|^2.
\end{aligned} \quad (4.20)$$

Assim, de (4.18), (4.19) e (4.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+1} (g(u(s)), u(s))^2 ds &\leq 2 \int_t^{t+1} (Au(s), u(s))^2 ds \\
&+ 4\frac{(2+\varepsilon)}{\varepsilon\beta} E \int_t^{t+1} \|u_t(s)\|^2 ds \\
&\leq 2 \int_t^{t+1} (Au(s), u(s))^2 ds + 4\frac{(2+\varepsilon)}{\varepsilon\beta} E^2 \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

em que C é uma constante que depende de E . Logo segue a condição (v), e assim concluímos a prova do lema. \square

A partir do Lema 4.1, obteremos uma estimativa uniforme para a solução da equação (3.5) usando uma certa regularidade.

Agora, denotando $B = \{t > 0; \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 > 1\}$, temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{med}(B \cap [t, +\infty)) = 0. \quad (4.21)$$

De fato, da condição (iii) do Lema 4.1 temos que

$$\int_0^{+\infty} \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < +\infty,$$

então dado $\varepsilon > 0$, existe T tal que $\int_T^{+\infty} \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{med}(B \cap [T, +\infty)) &= \int_{B \cap [T, +\infty)} 1 ds \\ &\leq \int_{B \cap [T, +\infty)} \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq \int_T^{+\infty} \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue pela definição de limite que, $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{med}(B \cap [t, +\infty)) = 0$

Agora tomando $A = -\Delta + m$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} &\geq (u(t), u_t(t))_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (-\Delta u(t)u(t) + mu^2(t)) dx - (2 + \varepsilon)E \\ &= (2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\varepsilon m}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - (2 + \varepsilon)E. \end{aligned}$$

Mas isso implica

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2(2 + \varepsilon)E + 2\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} - 2(2 + \varepsilon) \int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq 2(2 + \varepsilon)E + 2\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

assim

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \frac{(2+\varepsilon)}{\varepsilon} E + \frac{2}{\varepsilon} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.22)$$

Logo, se $t \notin B$ e por (ii) do Lema 4.1 existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0.$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, temos que existe uma constante $C \geq 0$, tal que

$$\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C, \forall t \notin B. \quad (4.23)$$

Por outro lado, denotemos por $T(t)$ o semigrupo gerado por $A = -\Delta + m$. Estamos assumindo que u é solução clássica da equação $u_t + Au = g(u)$, então por Pazy [21] (página - 183) a solução u é dada por

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds, \quad (4.24)$$

e se $\alpha > 0$ obtemos

$$u(t+\alpha) = T(t+\alpha)u_0 + \int_0^{t+\alpha} T(t+\alpha-s)g(u(s))ds. \quad (4.25)$$

Logo, por (4.24), (4.25) e mudança de variável, temos que

$$\begin{aligned} T(\alpha)u(t) &+ \int_0^\alpha T(\alpha-s)g(u(t+s))ds \\ &= T(\alpha) \left[T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds \right] + \int_0^\alpha T(\alpha-s)g(u(t+s))ds \\ &= T(\alpha)T(t)u_0 + T(\alpha) \int_0^t T(t-s)g(u(s))ds + \int_0^\alpha T(\alpha-s)g(u(t+s))ds \\ &= T(t+\alpha)u_0 + \int_0^t T(t+\alpha-s)g(u(s))ds + \int_0^\alpha T(\alpha-s)g(u(t+s))ds \\ &= T(t+\alpha)u_0 + \int_0^t T(t+\alpha-s)g(u(s))ds + \int_t^{t+\alpha} T(t+\alpha-s)g(u(s))ds \\ &= T(t+\alpha)u_0 + \int_0^{t+\alpha} T(t+\alpha-s)g(u(s))ds \\ &= u(t+\alpha). \end{aligned}$$

Portanto, se $t \geq 0$ e $\alpha \geq 0$, segue que

$$u(t+\alpha) = T(\alpha)u(t) + \int_0^\alpha T(\alpha-s)g(u(t+s))ds. \quad (4.26)$$

Utilizaremos (4.26) e o fato de que

$$\|T(\alpha)u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C\alpha^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|u(t)\|_{L^r(\Omega)}, \quad \text{quando } 1 \leq r \leq q \leq +\infty, \quad (4.27)$$

para obtermos uma estimativa uniforme de $u(t) \in L^{2^*}(\Omega)$. No que segue retornaremos ao problema (3.5) com g satisfazendo (3.6), (4.1) e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

Afirmação 4.3. Se $u \in L^q(\Omega)$, $q \geq p$ então

$$\|g(u)\|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)} \leq K \left(1 + \|u\|_{L^q(\Omega)}\right)^p \quad \text{sendo } K \text{ uma constante} \quad (4.28)$$

Demonstração. Por hipótese, $|g(x)| \leq C_1|x| + C_2|x|^p$. Assim, considerando $\beta = \frac{q}{p} \geq 1$, temos

$$\|g(u)\|_{L^\beta(\Omega)}^\beta = \int_{\Omega} |g(u)|^\beta dx \leq \int_{\Omega} (C_1|u| + C_2|u|^p)^\beta dx \leq C(\beta) \int_{\Omega} (C_1^\beta|u|^\beta + C_2^\beta|u|^{p\beta}) dx.$$

Como Ω é limitado, $L^{p\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^\beta(\Omega)$, segue que existe $C(\Omega) > 0$ tal que $\int_{\Omega} |u|^\beta dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |u|^{p\beta} dx$. Agora, tomando $M = \max\{C_1^\beta, C_2^\beta\}$ temos que

$$\|g(u)\|_{L^\beta(\Omega)}^\beta \leq MC(\beta)C(\Omega) \int_{\Omega} |u|^{p\beta} dx = MC(\beta)C(\Omega) \|u\|_{L^{p\beta}(\Omega)}^{p\beta}.$$

Além disso, considerando $K = (MC(\beta)C(\Omega))^{\frac{1}{\beta}}$, obtemos

$$\|g(u)\|_{L^\beta(\Omega)} \leq K \|u\|_{L^{p\beta}(\Omega)}^p \leq K (1 + \|u\|_{L^{p\beta}(\Omega)})^p.$$

Logo, substituindo o valor de β , concluímos a afirmação. \square

A afirmação foi provada para um q arbitrário, pois precisaremos usar esse resultado várias vezes. Primeiramente, o resultado é válido para $q = 2^*$, pois $u(t) \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ para todo $t \geq 0$.

Agora, definamos

$$h(\tau) := \sup_{s \in [t, t+\tau]} \{1 + \|u(s)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\}. \quad (4.29)$$

Lembremos que por (4.26)

$$u(t + \alpha) = T(\alpha)u(t) + \int_0^\alpha T(\alpha - s)g(u(t + s))ds.$$

O nosso objetivo agora é conseguir uma estimativa uniforme para $\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)}$ para todo $t \geq \delta$ com δ dado.

Para $\alpha \in [0, \tau]$, temos que $T(\alpha) \in \mathcal{L}(L^{2^*}(\Omega))$ e usando (4.27) e (4.28) obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t + \alpha)\|_{L^{2^*}(\Omega)} &\leq \|T(\alpha)u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + \int_0^\alpha \|T(\alpha - s)g(u(t + s))\|_{L^{2^*}(\Omega)} ds \\ &\leq C\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*})} \|g(u(t + s))\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)} ds \\ &\leq C\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*})} K (1 + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)})^p ds \\ &\leq C\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + CK \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*})} (h(\tau))^p ds \\ &\leq C\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + CK \frac{\alpha^{1-\theta}}{1-\theta} (h(\tau))^p \\ &\leq C\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + CK \frac{\tau^{1-\theta}}{1-\theta} (h(\tau))^p, \end{aligned} \quad (4.30)$$

em que $\theta = \frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*} \right) \in (0, 1)$, pois $p > 1$ assim $\frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*} \right) > 0$ e

$$\frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*} \right) < 1 \Leftrightarrow \frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*} < \frac{2}{N} \Leftrightarrow p - 1 < \frac{2}{N} 2^* = \frac{2}{N} \frac{N+2}{N-2} = \frac{4}{N-2} \Leftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2}.$$

Seja $K_1 = \max \left\{ 1, C, \frac{CK}{1-\theta} \right\}$. Então pela definição de h em (4.30), temos

$$1 + \|u(t + \alpha)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq K_1 h(0) + K_1 \tau^{1-\theta} (h(\tau))^p, \quad \forall \alpha \in [0, \tau]. \quad (4.31)$$

Assim, se $0 \leq \alpha \leq \tau$ então $t \leq t + \alpha \leq t + \tau$, pela definição de h em (4.29) e (4.31) obtemos

$$h(\tau) \leq K_1 h(0) + K_1 \tau^{1-\theta} (h(\tau))^p. \quad (4.32)$$

A função h é contínua e não-decrescente; precisamos agora analisar dois casos

Caso 1) Se existe $\sigma_0 \in (0, 1]$ tal que $h(\sigma_0) = 2K_1 h(0)$, podemos aplicar σ_0 na equação (4.32) e obter

$$K_1 h(0) = h(\sigma_0) - K_1 h(0) \leq K_1 \sigma_0^{1-\theta} (h(\sigma_0))^p.$$

Mas isso implica

$$\sigma_0^{1-\theta} \geq \frac{h(0)}{(h(\sigma_0))^p} = \frac{1}{2K_1} \frac{h(\sigma_0)}{(h(\sigma_0))^p}.$$

Assim, obtemos

$$\sigma_0 \geq \frac{1}{(2K_1)^{\frac{1}{1-\theta}}} (h(\sigma_0))^{\frac{-(p-1)}{1-\theta}} := \sigma^*.$$

Mas isso significa que para todo $\sigma \leq \sigma^*$ temos

$$h(\sigma) \leq h(\sigma^*) \leq h(\sigma_0) = 2K_1 h(0)$$

e como $\|u(s + \sigma)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq h(\sigma)$ então

$$\|u(s + \sigma)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq 2K_1 \{1 + \|u(s)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\}. \quad (4.33)$$

Além disso, se $s \notin B$ por (4.23) temos que $\|u(s)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C$ e substituindo em (4.33) segue que

$$\|u(s + \sigma)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_2.$$

Caso 2) Se $h(\sigma) < 2K_1 h(0)$ para todo $\sigma \in (0, 1]$, pelo mesmo argumento anterior temos

$$\|u(s + \sigma)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq 2K_1 \{1 + \|u(s)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\},$$

e novamente, se $s \notin B$, segue que $\|u(s + \sigma)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_2$.

Até aqui conseguimos uma estimativa para $\|u(s + \sigma)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_2$ para $s \notin B$ e $\sigma \leq \min\{1, \sigma^*\}$.

Tome $s^* = \min\{1, \sigma^*\} > 0$ e por (4.21) escolha T tal que $\text{med}\{B \cap [T, +\infty)\} < \frac{1}{2}s^*$.

Afirmção 4.4. *Dado T acima, se $t \in [T + \frac{1}{2}s^*, +\infty)$, então $[t - \frac{1}{2}s^*, t] \cap B^c \neq \emptyset$.*

Assumindo a afirmação verdadeira, isto é, existe $s \notin B$, $s \in [t - \frac{1}{2}s^*, t]$, o que implica $t \in [s, s + s^*]$, assim $t = s + \sigma$, onde $0 \leq \sigma \leq s^*$. Como

$$\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} = \|u(s + \sigma)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq h(\sigma) \leq h(s^*) \leq 2K_1 h(0)$$

assim

$$\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq 2K_1 \{1 + \|u(s)\|_{L^{2^*}(\Omega)}\} \leq C_2.$$

Portanto, se $t \in B \cap [T + \frac{1}{2}s^*, +\infty)$ então $\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_2$.

A seguir faremos a prova da Afirmação 4.4

Demonstração. Suponha agora que $[t - \frac{1}{2}s^*, t] \cap B^c = \emptyset$.

Logo $[t - \frac{1}{2}s^*, t] \subset B$ implicando que

$$\frac{1}{2}s^* = \text{med}\{[t - \frac{1}{2}s^*, t]\} \leq \text{med}\{[T, +\infty) \cap B\} < \frac{1}{2}s^*.$$

O que é um absurdo.

Se $t \in [0, T + \frac{1}{2}s^*]$ como $u(t) \in C((0, \infty), D(A))$, assim $u(t)$ é contínua em $H_0^1(\Omega)$, logo $\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_3$ para todo $t \in [0, T + \frac{1}{2}s^*]$, e assim, $\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_4$ para todo $t \in [0, T + \frac{1}{2}s^*]$. Logo

$$\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (4.34)$$

□

Para obtermos uma estimativa uniforme em s para $\|u(s)\|_{L^\infty(\Omega)}$, recorreremos novamente à desigualdade (4.27)

$$\|T(\alpha)u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C\alpha^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|u(t)\|_{L^r(\Omega)}, \quad \text{para } 1 \leq r \leq q \leq +\infty,$$

e a um argumento do tipo bootstrap.

Por hipótese, $p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$. Então temos

$$\frac{p-1}{2^*} < \frac{2^*-2}{2^*} = 1 - \frac{2}{2^*} = 1 - \frac{2(N-2)}{2N} = \frac{2N - (2N-4)}{2N} = \frac{2}{N}.$$

Logo,

$$\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} < \frac{1}{2^*}. \quad (4.35)$$

i) Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} < 0$, então $\frac{N}{2} \frac{p}{2^*} < 1$. Assim, tomando $r = \frac{p}{2^*}$ e $q = +\infty$ em (4.27) e usando (4.26) e se $\alpha > 0$, temos

$$\begin{aligned} \|u(t + \alpha)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|T(\alpha)u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^\alpha \|T(\alpha - s)g(u(t + s))\|_{L^\infty(\Omega)} ds \\ &\leq C\alpha^{-\frac{N}{2} \frac{1}{2^*}} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2} \frac{p}{2^*}} \|g(u(t + s))\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Agora, por (4.28) segue que

$$\|u(t + \alpha)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\alpha^{-\frac{N}{2} \frac{1}{2^*}} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2} \frac{p}{2^*}} K (1 + \|u(t + s)\|_{L^{2^*}(\Omega)})^p ds.$$

De (4.34) sabemos que $\|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)}$ é limitado uniformemente para $t \geq 0$. Assim fazendo $\alpha = \delta$ e usando que $\frac{N}{2} \frac{p}{2^*} < 1$, temos

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\delta) < +\infty, \text{ para } \delta > 0.$$

ii) Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} = 0$, isto é, $\frac{pN}{2^*2} = 1$, fazendo $q = 2 \cdot 2^*$ temos que

$$\frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{q} \right) = \frac{N}{2} \frac{2p - 1}{2^*} < \frac{N}{2} \frac{2p}{q} = 1.$$

Deste modo, usando (4.26) e $r = \frac{p}{2^*}$ em (4.27), obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t + \alpha)\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|T(\alpha)u(t)\|_{L^q(\Omega)} + \int_0^\alpha \|T(\alpha - s)g(u(t + s))\|_{L^q(\Omega)} ds \\ &\leq C\alpha^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q} \right)} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{\frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{q} \right)} \|g(u(t + s))\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)} ds \\ &\leq C\alpha^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q} \right)} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\quad + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{q} \right)} K (1 + \|u(t + s)\|_{L^{2^*}(\Omega)})^p ds. \end{aligned}$$

Usando (4.34) e $\frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{q} \right) \in (0, 1)$, segue que

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\delta) < +\infty, \text{ para } \delta > 0$$

Como $\frac{p}{q} - \frac{2}{N} < 0$, fazemos da mesma forma que no item (i), e assim obtemos que

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\delta) < +\infty, \text{ para } \delta > 0.$$

iii) Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} > 0$, sabendo por (4.35) que $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} < \frac{1}{2^*}$, definamos

$$\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} < \frac{1}{q_1} := \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} + \frac{1}{2^*} \right) < \frac{1}{2^*}.$$

Utilizando estas duas desigualdade e a definição de q_1 , temos que

$$q_1 > 2^* \text{ e } \frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{q_1} \right) = \frac{N}{4} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{2^*} \right) + \frac{1}{2} \in (0, 1).$$

Novamente, usando (4.26) com $r = \frac{2^*}{p}$ e $q = q_1$ em (4.27)

$$\begin{aligned} \|u(t + \alpha)\|_{L^{q_1}(\Omega)} &\leq \|T(\alpha)u(t)\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \int_0^\alpha \|T(\alpha - s)g(u(t + s))\|_{L^{q_1}(\Omega)} ds \\ &\leq C \left[\alpha^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q_1} \right)} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} + \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q_1} \right)} \|g(u(t + s))\|_{L^r(\Omega)} ds \right]. \end{aligned}$$

Além disso por (4.28), também temos que

$$\|g(u)\|_{L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)} \leq K (1 + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)})^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u(t + \alpha)\|_{L^{q_1}(\Omega)} &\leq C \alpha^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q_1} \right)} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\quad + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q_1} \right)} K (1 + \|u(t + s)\|_{L^{2^*}(\Omega)})^p ds. \end{aligned}$$

Usando (4.34) para $t + \alpha \geq \delta > 0$, e $\frac{N}{2} \left(\frac{p}{2^*} - \frac{1}{q_1} \right) \in (0, 1)$, segue que $u(t) \in L^{q_1}(\Omega)$ é limitada uniformemente em t , isto é,

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^{q_1}(\Omega)} \leq C(\delta), \quad \text{para } \delta > 0. \quad (4.36)$$

Agora, como $p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, temos $p - 1 < 2^* - 2$ e como $q_1 > 2^*$,

$$\frac{p-1}{q_1} < \frac{2^*-2}{q_1} < \frac{2^*-2}{2^*} = \frac{2}{N} \quad (4.37)$$

Consequentemente, temos $\frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} < \frac{1}{q_1}$. Procedemos da mesma forma anteriormente, com q_1 na posição de 2^* :

i') Se $\frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} < 0$, procedemos da mesma forma quando $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} < 0$, e assim obtemos que

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\delta) < +\infty, \quad \text{para } \delta > 0.$$

ii') Se $\frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} = 0$, repetimos o mesmo procedimento para (ii), ou seja, escolhemos $q_2 = 2q_1$ e então obtemos

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\delta) < +\infty, \quad \text{para } \delta > 0.$$

iii') Se $\frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} > 0$, definimos q_2 tal que

$$\frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} < \frac{1}{q_2} := \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} + \frac{1}{q_1} \right) < \frac{1}{q_1}.$$

Assim, temos $q_2 > q_1$ e $\frac{p}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{2}{N}$, isto é,

$$\frac{N}{2} \left(\frac{p}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right) < 1.$$

De fato $\frac{p}{q_1} - \frac{1}{q_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{p}{q_1} > \frac{1}{q_2} \Leftrightarrow \frac{q_1}{p} < q_2$ e $\frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} < \frac{1}{q_2} \Leftrightarrow \frac{p}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{2}{N} \Leftrightarrow \frac{N}{2} \left(\frac{p}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right) < 1$, portanto $\frac{N}{2} \left(\frac{p}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right) \in (0, 1)$.

Desta maneira usando (4.26), escolhendo $r := r_1 = \frac{q_1}{p}$ e $q := q_2 > q_1$, em (4.27), temos

$$\begin{aligned} \|u(t + \alpha)\|_{L^{q_2}(\Omega)} &\leq C \|T(\alpha)u(t)\|_{L^{q_2}(\Omega)} + \int_0^\alpha \|T(\alpha - s)g(u(t + s))\|_{L^{q_2}(\Omega)} ds \\ &\leq C \alpha^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q_2} \right)} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\quad + C \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q_2} \right)} \|g(u(t + s))\|_{L^{r_1}(\Omega)} ds \end{aligned}$$

Além disso, por (4.28) temos que

$$\|g(u)\|_{L^{\frac{q_1}{p}}(\Omega)} \leq K (1 + \|u\|_{L^{q_1}(\Omega)})^p,$$

e assim

$$\begin{aligned} \|u(t + \alpha)\|_{L^{q_2}(\Omega)} &\leq C \alpha^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q_2} \right)} \|u(t)\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^\alpha (\alpha - s)^{-\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q_2} \right)} K (1 + \|u(t + s)\|_{L^{q_1}(\Omega)})^p ds. \end{aligned}$$

Usando (4.36) para $t + \alpha > \delta > 0$ e $\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{q_2} \right) \in (0, 1)$, segue que $u(t) \in L^{q_2}(\Omega)$ é limitada uniformemente em t , isto é,

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^{q_2}(\Omega)} \leq C(\delta), \quad \text{para } \delta > 0.$$

Agora, repetimos o argumento acima com $r_{i-1} := \frac{q_{i-1}}{p}$, $q_i > q_{i-1}$ e $\frac{1}{q_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q_{i-1}} - \frac{2}{N} + \frac{1}{q_{i-1}} \right)$, de tal forma que $\frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{q_i} \right) \in (0, 1)$.

Afirmção 4.5. $r_i > \frac{N}{2}$, para um número finito de passos.

Demonstração. Suponhamos que o resultado não seja verdade. Assim, construímos uma sequência q_n tal que

$$\frac{1}{q_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q_{n-1}} - \frac{2}{N} + \frac{1}{q_{n-1}} \right), \quad q_n > q_{n-1} \geq 2^* \quad \text{e} \quad q_{n-1} \leq \frac{N}{2} p, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com isto, a sequência é monótona, crescente e limitada, e então existe $\bar{q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$.

Como $q_n > q_{n-1} \geq 2^*$, segue que $\bar{q} > 2^*$. Assim,

$$\frac{1}{\bar{q}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q_{n-1}} - \frac{2}{N} + \frac{1}{q_{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\bar{q}} - \frac{2}{N} + \frac{1}{\bar{q}} \right).$$

Mas isso nos dá que

$$\frac{1}{\bar{q}} = \frac{p}{\bar{q}} - \frac{2}{N},$$

ou seja,

$$1 = p - \frac{2}{N}\bar{q},$$

isto é,

$$\frac{2}{N}\bar{q} = p - 1,$$

e assim, como $\bar{q} > 2^*$,

$$p = 1 + \frac{2}{N}\bar{q} > 1 + \frac{2}{N}2^* = 1 + \frac{2}{N} \frac{2N}{N-2} = 1 + \frac{4}{N-2} = \frac{N+2}{N-2}.$$

Absurdo!

Dessa maneira, seguimos o argumento um número finito de passos e obtemos

$$\sup_{t \geq \delta} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\delta) < +\infty, \text{ para } \delta > 0.$$

□

Observação 4.2. Em [8] e em [22] os autores garantem que é possível obter uma estimativa $C^2(\bar{\Omega})$ uniforme em $t > \delta$ do problema (3.5), contudo, a mesma não se encontra detalhada, no nosso trabalho tivemos como objetivo principal obter uma estimativa uniforme em t na norma $L^\infty(\Omega)$, obedecendo fielmente as hipóteses apresentadas em [8], fato este obtido sem o uso do espaço de Lorentz, apenas utilizando um argumento do tipo *Bootstrap*.

Observação 4.3. Se considerarmos $g(s) = s^p$, com $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ o artigo dado em [20] garante a existência de uma solução, com $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$.

Resultados Auxiliares

Teorema A.1. *Sejam X espaço de Banach, $T > 0$ e $f \in C([0, T], X)$. Assume que f é diferenciável a direita para todo $t \in [0, T)$. Se $\frac{d^+f}{dt} \in C([0, T], X)$, então $f \in C^1([0, T], X)$ e $\frac{df}{dt} = \frac{d^+f}{dt}$.*

Demonstração. Seja

$$g(t) = f(t) - f(0) = \int_0^t \frac{d^+f}{dt},$$

para todo $t \in [0, T)$. Segue que $g \in C([0, T], X)$, $g(0) = 0$, g é diferenciável a direita para todo $t \in [0, T)$ e $\frac{d^+g}{dt} = 0$. Seja agora $\xi \in X^*$, e defina $h(t) = \langle \xi, g(t) \rangle_{X^*, X}$. Temos que $h \in C([0, T])$, $h(0) = 0$, h é diferenciável a direita para todo $t \in [0, T)$ e $\frac{d^+h}{dt} = 0$. Mostraremos que $h \equiv 0$. Para ver isto, seja $\varepsilon > 0$, defina $h_\varepsilon(t) = h(t) - \varepsilon t$, e vamos mostrar que $h_\varepsilon \leq 0$. Caso contrário, existe $t \in [0, T)$ tal que $h_\varepsilon(t) > 0$. Seja $\gamma = \inf \{t \in [0, T); h_\varepsilon(t) > 0\}$. Temos que $h_\varepsilon(\gamma) = 0$, e existe $t_n \downarrow \gamma$ tal que $h_\varepsilon(t_n) > 0$. Segue que

$$\limsup_{t \downarrow \gamma} \frac{h_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(\gamma)}{t - \gamma} \geq 0.$$

Por outro lado, temos $\frac{d^+h_\varepsilon}{dt} = -\varepsilon$, que é contradição. Portanto, $h_\varepsilon \leq 0$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos $h \leq 0$. Aplicando o mesmo argumento para $-h$, obtemos também $h \geq 0$, logo $h \equiv 0$. Portanto, dado $t \in [0, T)$, temos $\langle \xi, g(t) \rangle_{X^*, X} = 0$, para todo $\xi \in X^*$; e assim, $g(t) \equiv 0$. E o resultado segue. \square

Teorema A.2. *Sejam A um operador auto-adjunto, acretivo em X , e $T(t)$ o semigrupo de contração gerado por $-A$. Para todo $u_0 \in X$, a função*

$$u(t) = T(t)u_0 \quad \text{para } t \geq 0,$$

tem as seguintes propriedades

(i) $u \in C([0, \infty), X) \cap C((0, +\infty), D(A)) \cap C^1((0, \infty), X)$ e u é a única função que satisfaz o problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & \text{para todo } t > 0; \\ u(0) = u_0; \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

(ii) $\|Au(t)\| \leq \frac{1}{t\sqrt{2}}\|u_0\|$, para todo $t > 0$. Além disso, a função

$t \mapsto \sqrt{t}\|Au(t)\|$ pertence a $L^2(0, \infty)$ e

$$\int_0^\infty s\|A(s)\|ds \leq \frac{1}{4}\|u_0\|^2;$$

(iii) $(Au(t), u(t)) \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2$, para todo $t > 0$. Além disso,

$t \mapsto (Au(t), u(t))$ pertence a $L^2(0, \infty)$ e

$$\int_0^\infty (Au(s), u(s))ds \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2;$$

(iv) se $u_0 \in D(A)$, então $\|Au(t)\|^2 \leq \frac{1}{2t}(Au(t), u(t))$, para todo $t > 0$. Além disso, $Au \in L^2((0, \infty), X)$ e $\|Au(t)\|_{L^2((0, \infty), X)}^2 \leq \frac{1}{2}(Au_0, u_0)$.

Assumimos que A é m -acretivo com domínio denso, e seja $T(t)$ o semigrupo de contração gerado por $-A$. Uma vez que A é \mathbb{C} -linear, segue facilmente que $T(t) \subset \mathcal{L}(X)$, com X considerado como um espaço complexo de Banach. Dado $0 < \theta \leq \pi$, definimos o setor C_θ por

$$C_\theta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; -\theta < \arg z < \theta\},$$

de modo que $\overline{C_\theta} = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; -\theta < \arg z < \theta\}$.

Definição A.1. Seja $T(t)$ como acima. Dizemos que $T(t)$ é um semigrupo analítico se existem $0 < \theta \leq \pi$ e uma função $\tilde{T} : \overline{C_\theta} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ com as seguintes propriedades:

- (i) $T(t) = \tilde{T}(t)$ para todo $t \geq 0$.
- (ii) $\tilde{T}(z_1 + z_2) = \tilde{T}(z_1) \tilde{T}(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in C_\theta$;
- (iii) $\lim_{z \in \overline{C_\theta}, z \rightarrow 0} \tilde{T}(z)x = x$ para todo $x \in X$;
- (iv) $z \mapsto \tilde{T}(z)$ é holomorfa em $C_\theta \mapsto \mathcal{L}(X)$.

Teorema A.3. Sejam A ser um \mathbb{C} -linear, m -acretivo, densamente definido e $T(t)$ o semigrupo de contração gerado por $-A$. As seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) $T(t)$ é um semigrupo analítico;
- (ii) a função $t \mapsto T(t)$ é diferenciável em $(0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ e existe uma constante C tal que

$$\|tT'(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$$

para todo $t \in (0, 1]$.

Observação A.1. Segue em particular dos Teoremas (A.3) e (A.2) que se A é um operador auto-adjunto, acretivo no espaço complexo Hilbert X , então o semigrupo de contrações gerado por $-A$ é analítico. (Note que tem uma extensão canônica \mathbb{C} -linear, auto-adjunto e m -acretivo).

Teorema A.4. *Assume X reflexivo e $f \in L^p(I, X)$. Então $f \in W^{1,p}(I, X)$ se e somente se existe $\varphi \in L^p(I)$ e um conjunto N de medida zero tal que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq \left| \int_s^t \varphi(\sigma) d\sigma \right|, \quad \text{para todo } t, s \in I \setminus N. \quad (\text{A.2})$$

Em adição,

$$\|f'\|_{L^p(I, X)} \leq \|\varphi\|_{L^p(I)}, \quad (\text{A.3})$$

quando f verifica (A.2).

Corolário A.1. *Assume X reflexivo. E $f : I \rightarrow X$ é Lipschitz contínua e limitada, então $f \in W^{1,\infty}(I, X)$ e $\|f'\|_{L^\infty(I, X)} \leq L$, onde L é a constante de Lipschitz de f .*

Corolário A.2. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $W^{1,p}(I, X)$ e $f : I \rightarrow X$ tal que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ em X , para quase todo $t \in I$. Se X é reflexivo e $p > 1$, então $f \in W^{1,p}(I, X)$ e*

$$\|f\|_{L^p(I, X)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^p(I, X)},$$

e

$$\|f'\|_{L^p(I, X)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f'_n\|_{L^p(I, X)}.$$

Em particular,

$$\|f\|_{W^{1,p}(I, X)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{W^{1,p}(I, X)}.$$

Em adição,

$$\int_I f_n(t) \varphi(t) dt \rightarrow \int_I f(t) \varphi(t) dt, \quad (\text{A.4})$$

e

$$\int_I f'_n(t) \varphi(t) dt \rightarrow \int_I f'(t) \varphi(t) dt, \quad (\text{A.5})$$

quando $n \rightarrow \infty$, para todo $\varphi \in C_c(I)$.

Definição A.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que $f \in W^{1,p}(I, X)$, se $f \in L^p(I, X)$ e se existe $g \in L^p(I, X)$ tal que*

$$\int_I g(t) \varphi(t) dt = - \int_I f(t) \varphi'(t) dt,$$

para todo $\varphi \in C_c^1(I)$. Como g é única, definimos $f' = \frac{df}{dt} = g$. Para $f \in W^{1,p}(I, X)$, definimos

$$\|f\|_{W^{1,p}(I, X)} = \|f\|_{L^p(I, X)} + \|f'\|_{L^p(I, X)}.$$

Quando não houver risco de confusão, denotaremos $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I, X)}$ por $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$ ou $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$.

Observação A.2. *O espaço $W^{1,p}(I, X)$ possui a maioria das propriedades do espaço $W^{1,p}(I) = W^{1,p}(I, \mathbb{R})$, essencialmente com as mesmas provas. Em particular, obtém-se facilmente os resultados.*

- (i) $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I,X)}$ é uma norma em $W^{1,p}(I,X)$. O espaço $W^{1,p}(I,X)$ dotado com a norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I,X)}$ é um espaço de Banach.
- (ii) Se $f \in W^{1,p}(I,X)$ e $J \subset I$, então $f|_J \in W^{1,p}(J,X)$.
- (iii) Se $f \in W^{1,p}(I,X) \cap f \in W^{1,q}(I,X)$ com $p < q$, então para todo $r \in [p,q]$ temos $f \in W^{1,r}(I,X)$.
- (iv) Se I é limitado e $p \leq q$, então $W^{1,q}(I,X) \hookrightarrow W^{1,p}(I,X)$.
- (v) Suponhamos $f \in L^p(I,X)$. Se $f \in W^{1,q}(J,X)$ para todo $J \subset\subset I$ e se $\|f'\|_{L^p(J,X)} \leq C$ para algum C independente de J , então $f \in W^{1,q}(I,X)$ e $\|f'\|_{L^p(I,X)} \leq C$.
- (vi) Se Y é um espaço de Banach e se $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, então para toda $f \in W^{1,p}(I,X)$, $Af \in W^{1,p}(I,X)$ e

$$\|Af\|_{W^{1,p}(I,Y)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|f\|_{W^{1,p}(I,X)}.$$

Em particular, se $X \hookrightarrow Y$ e se $f \in W^{1,p}(I,X)$, então $f \in W^{1,p}(I,Y)$ (A tomada como imersão).

- (vii) Se $p < \infty$, então $C_0^\infty(\mathbb{R}, X)$ é denso em $W^{1,p}(I, \mathbb{R})$. (Isso decorre do truncamento clássico e do procedimento de regularização).
- (viii) Se $(f_n)_{n \geq 1} \subset W^{1,p}(I,X)$ é tal que $f_n \rightarrow f$ e $f'_n \rightarrow g$ em $L^p(I,X)$ quando $n \rightarrow \infty$ para algumas $f, g \in L^p(I,X)$, então $f \in W^{1,p}(I,X)$ e $f' = g$.

Lema A.1. (Desigualdade de Gronwall) Sejam u e v duas funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\beta \geq 0$ satisfazem a

$$u(t) \leq \beta + \int_a^t u(x)v(x)dx \quad t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leq \beta e^{\int_a^t v(x)dx}.$$

Em particular, se $\beta = 0$ então $u = 0$.

Lema A.2. Seja $T(t)$ o semigrupo gerado por Δ . Dados $1 \leq \beta \leq \gamma \leq \infty$. Então

$$\|T(t)\varphi\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma})} \|\varphi\|_{L^\beta(\Omega)},$$

para todo $t > 0$ e para toda $\varphi \in L^\beta(\Omega)$.

Lema A.3. Seja $T_1(t)$ o semigrupo gerado por $\Delta - m$. Assim $T_1(t) = e^{mt}T(t)$, onde $T(t)$ é o semigrupo gerado Δ . Dados $1 \leq \beta \leq \gamma \leq \infty$. Então

$$\|T_1(t)\varphi\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma})} \|\varphi\|_{L^\beta(\Omega)},$$

para todo $0 < t \leq 1$ e para toda $\varphi \in L^\beta(\Omega)$.

Teorema A.5. (Teorema do Ponto Fixo de Banach). Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma função tal que existe $k \in [0, 1)$ satisfazendo, $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Então existe um único $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A., *Sobolev spaces.*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications.*, J. Functional Analysis **14** (1973), 349–381.
- [3] Brézis, H., *Operateurs maximaux monotones.*, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1973.
- [4] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* New York, Springer, 2010.
- [5] Brezis, H. and Cazenave, T., *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. Anal. Math. **68** (1996), 277-304.
- [6] Brezis, H. and Cazenave, T., *Linear semigroups of contractions, the Hille Yosida theory and some applications*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numerique, Université Pierre et Marie Curie, A92004, 1993.
- [7] Cazenave T., *Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations*, J. Funct. Anal. **60** (1985), no. 1, 36–55.
- [8] Cazenave, T. and Lions, P. L., *Solutions globales d'équations de la chaleur semi lineaires*, Comm. Partial Differential Equations, 9(1984), **no. 10**, 955-978.
- [9] de Carvalho, A. N., *Equações Parabólicas Semilineares Notas de aula*, (2001)- icmc-USP. São Carlos.
- [10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations.* Vol. **19**, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.
- [11] Giga, Y., *A bound for global solutions of semilinear heat equations*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), 415–421.
- [12] Gilbard, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Berlin: Springer-Verlag, **2** ed, (1983).
- [13] Gomes, A. M., *Semigrupos de operadores lineares e aplicações ás equações de de evolução.* Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.

-
- [14] Haraux, A. and Kirane M., *Estimations C^1 pour des problèmes paraboliques non-linéaires*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **5** (1983), 265–280.
- [15] Ladyzhenskaya, O. A, Solonnikov, V.A. Ural'ceva, N.N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Transl. Math. Monogr. vol. 23, Providence, R.L: Am. Math. Soc. 1968.
- [16] Lamberton, D., *Equations d'évolutions linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces L^p* J. Funct. Anal **72** (1987), 252–262.
- [17] Lorenzi, L., Lunard, A., Metafuno, G. and Pallara, D., *Analytic Semigroups and Reaction-Diffusion*. 2004–2005
- [18] Kavian, O., *Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire **4** (1987), 423-452.
- [19] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications.*, John Wiley, New York, 1989.
- [20] Ni, W.M, Sacks, P.E., and Tavantzis J.: *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear equation of parabolic type*, J. Differ. Equations **54**(1984), 97-120.
- [21] Pazy, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sci. **44**, Springer-Verlag, New York 1983.
- [22] Quittner, P., *A priori bounds for global solutions of a semilinear parabolic problem*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 68 (1999), **no. 2**, 195-203.