



Universidade de Brasília

Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da  
Informação e Documentação

Departamento de Economia

# **Análise da Estabilidade Financeira e Contágio em Redes Heterogêneas de Bancos e Firms Usando um Modelo Baseado em Agentes**

Sergio Rubens Stancato de Souza

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Economia  
do Departamento de Economia da UnB como requisito parcial  
para obtenção do título de Doutor em Economia

Orientador: Prof. Dr. Daniel Oliveira Cajueiro

Brasília  
Maio de 2012



Sergio Rubens Stancato de Souza

# **Análise da Estabilidade Financeira e Contágio em Redes Heterogêneas de Bancos e Firms Usando um Modelo Baseado em Agentes**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Economia do Departamento de Economia da Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação da UnB como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Economia.

**Prof. Dr. Daniel Oliveira Cajueiro**

Orientador

Departamento de Economia - UnB

**Prof. Dr. Benjamin Miranda Tabak**

Banco Central do Brasil

**Prof. Dr. Gilberto Tadeu Lima**

Universidade de São Paulo

**Prof. Dr. Luciano Martins Costa Póvoa**

Departamento de Economia - UnB

**Prof. Dr. Ricardo Silva Azevedo Araújo**

Departamento de Economia - UnB

Brasília, 10 de Maio de 2012



Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Ficha Catalográfica

Souza, Sergio Rubens Stancato de

Análise da Estabilidade Financeira e Contágio em Redes Heterogêneas de Bancos e Firmas Usando um Modelo Baseado em Agentes / Sergio Rubens Stancato de Souza; orientador: Dr. Daniel Oliveira Cajueiro. — Brasília : UnB, Departamento de Economia, 2012.

v., 236 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Universidade de Brasília, Departamento de Economia.

Inclui referências bibliográficas.

1. Economia – Tese. 2. Modelo Baseado em Agentes. 3. Estabilidade Financeira. 4. Crise. 5. Contágio. 6. Redes Heterogêneas. i. Cajueiro, Daniel Oliveira. ii. Universidade de Brasília. Departamento de Economia. iii. Título.

CDD: XXX



## Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, por me sustentar em todo o tempo e me dar as condições necessárias à realização deste trabalho, ainda mais levando em conta que a utilidade deste trabalho é, no máximo, terrena. Meus agradecimentos a Ele, em especial, em um momento crítico quando tive a impressão que eu não deveria, nem desistir, nem atrasar a entrega.

Ao Banco Central do Brasil, pelo patrocínio do curso, através do Programa de Pós-Graduação, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

Ao meu orientador, Daniel Oliveira Cajueiro, pelo apoio, incentivo, orientação e disponibilidade em todo o tempo, mesmo antes do início do curso. Do mesmo modo, agradeço a Benjamin Miranda Tabak pelo apoio e incentivo, de longa data, e pela apresentação de *papers*, ainda antes da realização do curso, que foram fundamentais ao trabalho.

Agradeço também a Rodrigo Andrés de Souza Peñaloza pelo incentivo, pelas aulas inspiradoras e pelo tempo gasto tirando dúvidas; a Emanuel Werner Kohlscheen e a Gilberto Tadeu Lima pela generosidade de examinar cuidadosamente esta tese e sugerir idéias e aperfeiçoamentos, tanto durante a elaboração como ao final; a Ricardo Silva Azevedo pela parceria em um artigo e pela disponibilidade para tirar dúvidas ao longo da elaboração da tese, nos mais variados horários; a Helmar Nunes Moreira pela atenção dada às minhas dúvidas; a Luciano Martins Costa Póvoa pela participação na banca e pelas sugestões apresentadas; a José Luís da Costa Oreiro, pelas aulas e pela parceria na publicação de um artigo; a Fabiano Rodrigues Bastos pelo apoio e pela carta de recomendação ao início do curso e a Joanílio Rodolpho Teixeira, José Guilherme Lara Resende e Roberto de Góes Ellery Júnior pelas aulas inspiradoras e bem preparadas.

Por fim, agradeço à minha família e amigos, que me apoiaram e sustentaram nesse período de presença ausente, me fortalecendo e complementando como pessoa.

## Resumo

Souza, Sergio Rubens Stancato de; Cajueiro, Daniel Oliveira. **Análise da Estabilidade Financeira e Contágio em Redes Heterogêneas de Bancos e Firms Usando um Modelo Baseado em Agentes**. Brasília, 2012. 236p. Tese de Doutorado — Departamento de Economia, Universidade de Brasília.

Neste trabalho, é desenvolvido um modelo baseado em agentes de uma economia fechada para ser utilizado em análises de comportamento da economia e na investigação de mecanismos associados a crises.

As principais características deste modelo são a interligação das firmas em cadeias produtivas formando redes heterogêneas, o relacionamento destas com os bancos como tomadoras de crédito e como correntistas, a utilização de um algoritmo de compensação condicional na realização dos pagamentos, e a circulação de bens e moeda em circuito fechado. Para a implementação deste modelo, foi desenvolvido um algoritmo de compensação condicional de sistemas de pagamentos.

Foram obtidos resultados que concordam com afirmações feitas na literatura de que os choques individuais sofridos pelas firmas não se cancelam, influenciando a economia em nível agregado; registrou-se contágio em crises, tanto pelo canal financeiro quanto pela cadeia produtiva e foram obtidas medidas de contágio entre firmas e bancos e vice-versa. Com relação à análise de crises, verificou-se que, mesmo que um aperto de política monetária tenha originado uma crise, a operação inversa, usualmente, não a contém.

### Palavras-chave

Modelo Baseado em Agentes. Estabilidade Financeira. Crise. Contágio. Redes Heterogêneas.



# Abstract

Souza, Sergio Rubens Stancato de; Cajueiro, Daniel Oliveira. **Financial Stability and Contagion Analysis in Banks' and Firms' Heterogeneous Networks Using an Agent-Based Model**. Brasília, 2012. 236p. PhD Thesis — Department of Economia, Universidade de Brasília.

In this thesis, it is developed an agent-based model of an economy for use both in economy's behavior analysis and in crisis process investigation.

The main features of this model are the firms' supply chain structured as an heterogeneous network, their relationship with banks both as borrowers and as current account owners, the adoption of a conditional payments' clearing system and the flow of goods and money into a closed system. Another result of this work was the development of a conditional clearing system algorithm, used for clearing firms' payments through banks.

The thesis' results agree with statements in the literature that the firms' individual shocks don't cancel out in the aggregate. In crisis analysis, it was found contagion both through financial channel and productive chain channel. The inter-sector contagion occurred from banks to firms and *vice-versa*. Finally, when a monetary policy strengthening was due to have started a crisis, the reverse policy wasn't able to stop it.

## Keywords

Agent-based Model. Financial Stability. Crisis. Contagion. Heterogeneous Networks.



# Sumário

<b>Lista de Variáveis</b>	<b>xvi</b>
<b>Notação Utilizada</b>	<b>xxv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão de Literatura</b>	<b>11</b>
2.1 Considerações Metodológicas em ACE	11
2.1.1 Critérios para a elaboração de um modelo	14
2.1.2 Validação Empírica de Modelos Baseados em Agentes	15
2.2 ACE: Programas de Pesquisa em Macroeconomia	18
2.2.1 Microfundamentação da Macroeconomia em ACE	18
2.2.2 Mesofundamentação da Macroeconomia	20
2.3 Modelos Baseados em Agentes	23
2.3.1 Risco Sistêmico em Bancos	23
2.3.2 Dinâmica Industrial	26
2.3.3 Replicação de Fatos Estilizados	30
2.3.4 Crescimento Endógeno e Ciclos de Negócios	32
<b>3 Descrição do Modelo</b>	<b>39</b>
3.1 Descrição Geral	40
3.2 Interações por Tipo de Agente	44
3.3 Linha do Tempo do Modelo	51
3.4 Redes Heterogêneas de Firms: Impacto no Modelo	52
3.5 Informação Limitada	52
3.6 Regras Sujeitas a Restrições Políticas	52
3.7 Fatores de atenuação	53
3.8 Demanda de Bens por Famílias e Governo	53
3.9 Definição de Taxas - Crédito Comercial	54
3.10 Definição das Taxas de Empréstimo - Crédito Bancário	55
3.11 Metas de Produção e Demandas das Firms	55
3.12 Mercado de Bens	59
3.13 Demanda por Crédito Bancário	60
3.14 Alocação de Crédito Bancário pelos Bancos	60
3.15 Remuneração de Depósitos de Firms em Conta-corrente	61
3.16 Abertura do Mercado Interbancário	62
3.17 Definição de Taxas - Crédito Interbancário	63
3.18 Negociação e Registro de Operações Interbancárias	63
3.19 Mercado de Trabalho	64
3.20 Produção e Cálculo do Imposto das Firms	64
3.21 Definição de Preços dos Bens no Período Seguinte	65
3.22 Compensação de Pagamentos e Registro de Perdas	65
3.23 Recolhimento de Imposto de Renda das Famílias	71

3.24	Resultado de Firms e Pagamento de Dividendos	71
3.25	Resultado de Bancos e Pagamento de Dividendos	73
3.26	Intervenção em Firms	74
3.27	Intervenção em Bancos	76
3.28	Recomposição de Reservas de Socorro (Firms e Bancos)	77
<b>4</b>	<b>Análises e Resultados</b>	<b>79</b>
4.1	Considerações Iniciais	79
4.2	Parametrização do Modelo	81
4.3	Medidas Realizadas	83
4.4	Validação do modelo	86
4.4.1	Fatos Estilizados	87
4.5	Estudos de Sensibilidade	93
4.5.1	Dependência Histórica	93
4.5.2	Número de Agentes da Economia	94
4.5.3	Conectividade entre firms	96
4.5.4	Conectividade no Mercado Interbancário	97
4.6	Estudos de caso	97
4.6.1	Economia sem Intervenção Externa	97
4.6.2	Aumento da taxa de juros	103
4.6.3	Crises	110
4.6.3.1	Importância das Reservas de Socorro	111
4.6.3.2	Análise de Contágio	114
4.6.3.3	Socorro pelo Governo	122
4.6.3.4	Socorro a Agentes Específicos	129
4.7	Comentários Finais do Modelo	131
4.7.1	Representação Alternativa da Macroestrutura do Modelo	131
4.7.2	Equilíbrio Inicial como Regra de Ouro	132
4.7.3	Equilíbrio de Economias Descentralizadas	132
4.7.4	Crescimento da Economia	133
4.7.4.1	Fatores Associados ao Crescimento	133
4.7.4.2	O Papel do Governo no Crescimento	134
4.7.4.3	Progresso Tecnológico Exógeno	134
4.7.4.4	Progresso Tecnológico como Produto	135
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>137</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>143</b>
<b>A</b>	<b>Tabelas - Estudos de Sensibilidade</b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Existência e Positividade Estrita do Vetor de Preços</b>	<b>167</b>
<b>C</b>	<b>A Economia em Equilíbrio: Duas Abordagens</b>	<b>171</b>
C.1	O Equilíbrio como o Ponto Fixo de um Mapa	172
C.1.1	Especificação do Mapa de Preços	173
C.1.2	Especificação do Mapa de Quantidades	175
C.2	O Equilíbrio como Solução de um Problema de Equilíbrio Geral	178
C.3	Descrição do Cálculo do Equilíbrio	180
C.3.1	Equilíbrio de Preços e Demandas Ótimas Unitárias	182

C.3.2	Equilíbrio Global entre Oferta e Demanda de Bens	184
<b>D</b>	<b>Demandas Ótimas das Firms Individuais</b>	<b>187</b>
<b>E</b>	<b>Demandas por Bens em Competição Monopolística</b>	<b>189</b>
<b>F</b>	<b>Compensação do Sistema de Pagamentos</b>	<b>193</b>
F.1	Compensação de um Sistema de Pagamentos	194
F.2	Compensação de dois Sistemas de Pagamentos	196
F.2.1	Abordagem Inicial	197
F.2.2	Formulação do Processo de Compensação	198
F.2.3	Existência e Unicidade dos Vetores de Pagamento	204
F.2.4	Algoritmo: dois Sistemas de Pagamento	207
F.3	Impedindo Violações do Requerimento de Reservas Bancárias	209
F.3.1	Definições Iniciais	209
F.3.2	Detalhamento do Processo de Compensação	211
F.3.3	Existência e Unicidade dos Vetores de Pagamento	216
F.3.4	Algoritmo: sem Violação de Reservas Bancárias	217
<b>G</b>	<b>Existência e Unicidade - Taxas de Recuperação</b>	<b>221</b>
G.1	Contração	221
G.2	Decomponibilidade de Sistemas	222
G.3	Unicidade do Ponto Fixo para os Subsistemas Individuais	223
G.4	Unicidade do Ponto Fixo para o Sistema Completo	226
G.5	Otimalidade do Volume de Pagamentos no Ponto Fixo	228
<b>H</b>	<b>Cálculo de Perdas e Recuperações após a Compensação</b>	<b>231</b>
H.1	Recuperação de Pagamentos Atrasados de Firms	231
H.2	Perdas Totais de Firms:	231
H.2.1	Crédito Comercial	233
H.2.2	Crédito Bancário Tomado	233
H.2.3	Salários e Custos Fixos Atrasados	233
H.2.4	Impostos	234
H.3	Perdas Totais de Famílias	234
H.4	Impostos Não-Pagos dos Bancos	234
H.5	Perdas do Governo	234
H.6	Bancos	234
H.6.1	Crédito Interbancário	235
H.6.2	Crédito Bancário Concedido	235
H.6.3	Perdas Totais de Bancos:	235

## Lista de figuras

3.1	Visão geral do modelo: fluxos nominais e fluxos reais	43
3.2	Fluxos nominais e fluxos reais associados a uma firma	44
3.3	Fluxos nominais associados a um banco	46
3.4	Fluxos nominais associados ao governo	47
3.5	Fluxos nominais associados às famílias	49
3.6	Fluxos nominais associados aos investidores	50
4.1	Tamanhos de firmas: economia com 1000 firmas e 100 bancos	91
4.2	Tamanhos de firmas: economia com 2000 firmas e 200 bancos	91
4.3	Tamanhos de bancos: economia com 1000 firmas e 100 bancos	91
4.4	Tamanhos de bancos: economia com 2000 firmas e 200 bancos	92
4.5	Sem política monetária: Indicadores macroeconômicos	100
4.6	Sem política monetária: Indicadores bancários	101
4.7	Sem política monetária: Perdas	102
4.8	Aumento de taxa de juros: Indicadores macroeconômicos	105
4.9	Aumento de taxa de juros: Indicadores bancários	106
4.10	Aumento de taxa de juros: Perdas	107
4.11	Crise: Indicadores macroeconômicos	117
4.12	Crise: Indicadores bancários	118
4.13	Crise: Perdas	119
4.14	Reservas de socorro: bancos $\times$ firmas	120
4.15	Perdas financeiras: contágio	120
4.16	Perdas no setor real: contágio	121
4.17	Crise (socorro pelo governo): Indicadores macroeconômicos	126
4.18	Crise (socorro pelo governo): Indicadores bancários	127
4.19	Crise (socorro pelo governo): Perdas	128
4.20	PIB: comparação entre critérios de socorro a firmas	131
F.1	Pagamentos Interbancários	193
F.2	Sistema de pagamentos com firmas e bancos	197
F.3	Sistema separado em subsistemas	197
G.1	Processo de Convergência para o Ponto Fixo	227

## Lista de tabelas

2.1	Usos das abordagens de calibração	17
4.1	Firmas com produção suspensa (período 569)	109
4.2	Períodos em a firma 672 não produziu	109
4.3	PIB - Firma 672 com produção suspensa	109
A.1	Dependência histórica de indicadores econômicos	153
A.2	Dependência histórica de indicadores bancários	154
A.3	Dependência histórica de indicadores de default	154
A.4	Dependência histórica de indicadores de perdas	155
A.5	Número de agentes: indicadores econômicos	156
A.6	Número de agentes: indicadores bancários	157
A.7	Número de agentes: default	157
A.8	Número de agentes: perdas	158
A.9	Número de agentes (sem intervenção): indicadores econômicos	159
A.10	Número de agentes (sem intervenção): default	160
A.11	Conectividade entre firmas: indicadores econômicos	161
A.12	Conectividade entre firmas: indicadores bancários	161
A.13	Conectividade entre firmas: default	162
A.14	Conectividade entre firmas: perdas	163
A.15	Conectividade no interbancário: indicadores econômicos	164
A.16	Conectividade no interbancário: indicadores bancários	164
A.17	Conectividade no interbancário: default	165
A.18	Conectividade no interbancário: perdas	166

# Lista de Variáveis

## Parâmetros

Os parâmetros adotados no modelo, definidos exogenamente, são relacionados a seguir:

<i>DEPR<sub>i</sub></i>	Taxa de depreciação de cada bem <i>i</i>
<i>DPCN</i>	Distribuição de probabilidades das conexões de fornecimento (compra) na cadeia produtiva: uniforme ou diferente de uniforme
<i>FXCu</i>	Custo fixo inicial unitário das firmas
<i>EM</i>	Parcela dos trabalhadores inicialmente empregada
<i>FBK</i>	Número de bens de capital / número total de bens
<i>FCII</i>	Saldo em caixa inicial
<i>IR</i>	Fator de cálculo do excedente a ser mantido em estoque
<i>KSB</i>	Multiplicador de acumulação de reservas de socorro a bancos
<i>KSF</i>	Multiplicador de acumulação de reservas de socorro a firmas
<i>MPROD</i>	Fração mínima da meta a ser produzida em cada período
<i>NI</i>	Número de firmas da economia
<i>NB</i>	Número de bancos da economia
<i>NBCB</i>	Número de bancos para pesquisa de taxa de crédito bancário
<i>NBCI</i>	Número de bancos para pesquisa de taxa de crédito interbancário
<i>NC</i>	Número de perfis de consumo dos consumidores
<i>NCG</i>	Número de perfis de consumo do governo
<i>NWTI</i>	Número total inicial de trabalhadores da economia
<i>PCN</i>	Probabilidade de uma conexão existir
<i>PMB</i>	Margem de lucro dos bancos na captação e crédito bancário
<i>PMI</i>	Margem de lucro inicial das firmas
<i>PPB</i>	Probabilidade de um bem estar em uma cesta de consumo
<i>SOCORRO</i>	Origem dos recursos para socorro a firmas e a bancos (investidores ou governo)
<i>T</i>	Número de períodos da simulação
<i>T<sub>b</sub></i>	Alíquota do imposto sobre o lucro (bancos)
<i>T<sub>w</sub></i>	Alíquota do imposto sobre a renda (trabalhadores)
<i>T<sub>y</sub></i>	Alíquota do imposto sobre o lucro (firmas)
<i>TALC_DEMANDA</i>	Tipo de cálculo de demanda: permitindo ou não a substituição de bens cuja produção está suspensa
<i>TALC_PRECO</i>	Tipo de cálculo de preço de equilíbrio: com ou sem taxa de juros



$W$	Salário (numerário)
$\alpha$	Expoente da função de produção das firmas
$\beta$	Expoente do fator de ajuste dos preços dos produtos
$\gamma$	Razão mínima adequada de capital (Capital total/Ativos ponderados ao risco)
$\delta$	Requerimento de reservas compulsórias (Caixa / Depósitos)
$\delta_{max}$	Requerimento de reservas compulsórias máximo na geração de dados
$\varepsilon$	Multiplicador limitador de ajuste dos preços
$\varepsilon_B$	Imprecisão admissível na convergência das taxas de recuperação na compensação do subsistema de bancos.
$\varepsilon_F$	Imprecisão admissível na convergência das taxas de recuperação na compensação do subsistema de firmas.
$\eta$	Margem de segurança de disponibilidades da firma (Caixa/Pagamentos a efetuar)
$\eta_{max}$	Margem de segurança de disponibilidades da firma máxima na geração de dados
$\eta_{min}$	Margem de segurança de disponibilidades da firma mínima na geração de dados
$\mu$	Margem de segurança sobre reservas compulsórias requeridas
$\nu$	Margem de segurança sobre o capital requerido
$\xi$	Multiplicador para introdução de ruído nas alocações de demanda
$\rho$	Expoente da função de cálculo da demanda
$\varphi_0$	Taxa básica de juros
$\varphi_1$	Expoente dos termos utilizados nos cálculos de taxas de juros - créditos comercial e bancário
$\varphi_2$	Multiplicador dos termos utilizados nos cálculos de taxas de juros - créditos comercial e bancário
$\varphi_1^I$	Expoente dos termos utilizados nos cálculos de taxas de juros - crédito interbancário
$\varphi_2^I$	Multiplicador dos termos utilizados nos cálculos de taxas de juros - crédito interbancário
$\psi_1$	Expoente do fator de ajuste da meta de produção a variações de mercado
$\psi_2$	Expoente do fator de ajuste da meta de produção a variações de estoque

## Variáveis

As variáveis com o subscrito  $t$  se referem ao período  $t$ .

### a) Economia

#### Características Gerais

$NI$  - número de firmas da economia

$NB$  - número de bancos da economia

$W$  - salário (numerário)

$T$  - número de períodos da simulação

## b) Firms

### Tecnologia

$A_i$  - constante de proporcionalidade insumo-  
produto na produção do bem  $i$

$XW_i$  - quantidade de trabalho utilizado na  
produção pela firma  $i$  (empregados em um  
período)

$QX_{i,j}$  - produtividade do bem  $j$  na produção  
do bem  $i$

$X_{i,j}$  - quantidade do bem produzido pela  
firma  $j$  utilizado na produção pela firma  $i$

$J_i$  - conjunto dos fornecedores da firma  $i$

$QW_i$  - produtividade do trabalho na produção  
do bem  $i$

### Produção

$Y_{i,t}$  - produto da firma  $i$  (produto  $i$ ) - unidades

$YI_{i,t}$  - produto da firma  $i$  em estoque - unida-  
des

$XS_{i,j}$  - quantidade do bem de capital  $j$  no  
estoque da firma  $i$

$DYF_{i,t}$  - demanda inicial de todas as firmas  
pelo produto  $i$

$DYW_{i,t}$  - demanda do produto  $i$  (consumido-  
res)

$NWF_{i,t}$  - número de empregados na firma  $i$

$P_{i,t}$  - preço unitário do produto  $i$

$YG_{i,t}$  - meta de produção da firma  $i$

$DY_{i,t}$  - demanda total do produto  $i$

$DYG_{i,t}$  - demanda inicial do governo pelo  
produto  $i$

$W$  - salário (sempre igual a 1 neste modelo)

$PM_{i,t}$  - margem de lucro da firma  $i$

### Vendas

$SG_{i,t}$  - receita de vendas do produto  $i$  ao  
governo

$SW_{i,t}$  - receita de vendas do produto  $i$  aos  
consumidores

$YS_{i,t}$  - produto  $i$  - total vendido

$XBG_{i,t}$  - produto  $i$  vendido ao governo

$XBW_{i,t}$  - produto  $i$  vendido aos consumidores

$XB_{i,j}$  - quantidade do produto  $j$  comprada  
pela firma  $i$

### Crédito Comercial

$BC_{i,j}$  - valor do crédito tomado da firma  $j$   
pela firma  $i$

$RC_{i,j}$  - taxa de juros que a firma  $i$  (tomadora)  
paga à firma  $j$  pelo empréstimo

$IBC_{i,j}$  - valor do crédito tomado da firma  $j$   
pela firma  $i$  (juros)

## Relacionamento Bancário

$RB_i$  - taxa de juros cobrada da firma  $i$  pelo seu banco, pelo empréstimo

$BB_i$  - crédito bancário tomado pela firma  $i$  do seu banco (principal)

$DBBF_i$  - demanda de crédito bancário adicional pela firma  $i$  ao seu banco (principal)

$NUMBCO_i$  - número do banco com o qual a firma  $i$  se relaciona (conta-corrente e empréstimo)

$IBB_i$  - crédito bancário tomado pela firma  $i$  do seu banco (juros)

## Acompanhamento de Perdas

$TNPF_{i,t}$  - valor total não pago pela firma  $i$

$TNPF_{i,t}$  - valor total não pago pela firma  $i$  - default por contágio de firmas

$TNRF_{i,t}$  - valor total não recebido pela firma  $i$

$TNRF_{i,t}$  - valor total não recebido pela firma  $i$  - default por contágio de firmas

$FXCD_{i,t}$  - custo fixo a pagar da firma  $i$  em atraso (não pagos em  $t$ )

$TFD_{i,t}$  - impostos a pagar da firma  $i$  em atraso (não pagos em  $t$ )

$WD_{i,t}$  - salários a pagar da firma  $i$  em atraso (não pagos em  $t$ )

$BCPID_{i,t}$  - crédito comercial tomado pela firma  $i$  com pagamento atrasado (não pago em  $t$ ) - Principal + Juros

$LCPID_{i,t}$  - crédito comercial cedido pela firma  $i$  com pagamento atrasado (não pago em  $t$ ) - Principal + Juros

$BBPID_{i,t}$  - crédito bancário tomado pela firma  $i$  (principal+juros) com pagamento atrasado

$TNPF_{i,t}$  - valor total não pago pela firma  $i$  - default próprio

$TNPF_{i,t}$  - valor total não pago pela firma  $i$  - default por contágio de bancos

$TNRF_{i,t}$  - valor total não recebido pela firma  $i$  - cálculo inicial

$TNRF_{i,t}$  - valor total não recebido pela firma  $i$  - default por contágio de bancos

$FXCNP_{i,t}$  - custo fixo a pagar da firma  $i$  - perda definitiva (não serão pagos)

$TFNP_{i,t}$  - impostos a pagar da firma  $i$  - perda definitiva (não serão pagos)

$WNP_{i,t}$  - salários a pagar da firma  $i$  - perda definitiva (não serão pagos)

$BCPINP_{i,t}$  - perda definitiva de crédito comercial tomado pela firma  $i$  (valor não será pago) - Principal + Juros

$LCPINP_{i,t}$  - perda definitiva de crédito comercial cedido pela firma  $i$  (valor não será pago) - Principal + Juros

$BBPINP_{i,t}$  - perda definitiva de crédito bancário tomado pela firma  $i$  (valor não será pago) - Principal + Juros

## Finanças e Contabilidade

$FC_{i,t}$ - caixa - firma $i$	$FIC_{i,t}$ - juros sobre depósitos recebidos pela firma $i$
$FBB_{i,t}$ - crédito bancário tomado - firma $i$	$FIBB_{i,t}$ - crédito bancário tomado - firma $i$ (juros)
$FBC_{i,t}$ - crédito comercial tomado - firma $i$	$FIBC_{i,t}$ - crédito comercial tomado - firma $i$ (juros)
$FLCF_{i,t}$ - crédito comercial cedido - firma $i$	$FILCF_{i,t}$ - crédito comercial cedido - firma $i$ (juros)
$FW_{i,t}$ - salários a pagar - firma $i$	$FTFG_{i,t}$ - impostos a pagar - firma $i$
$FXC_i$ - custo fixo - firma $i$	$FKG_{i,t}$ - valor dos bens de capital - firma $i$
$FP_{i,t}$ - lucro - firma $i$	$FDF_{i,t}$ - dividendos - firma $i$
$FLT_{i,t}$ - perdas da firma $i$ (atrasos e default)	$FLR_{i,t}$ - perdas da firma $i$ no período anterior recuperadas em $t$
$FAA_{i,t}$ - aporte de capital recebido - firma $i$	$FA_{i,t}$ - valor líquido - firma $i$ (Patrimônio líquido)
$STF_{i,t}$ - status da firma $i$ (normal, pagamento em atraso, liquidada ou produção suspensa)	

### c) Bancos

#### Operações Interbancárias e de Crédito

$RIB_{b,c}$ - taxa de juros cobrada do banco $b$ pelo banco $c$ pelo empréstimo interbancário	$DIB_{b,t}$ - demanda de crédito interbancário do banco $b$
$BI_{b,c}$ - valor do crédito tomado do banco $c$ pelo banco $b$	$IBI_{b,c}$ - valor do crédito tomado do banco $c$ pelo banco $b$ (juros)
$BIPP_{b,c}$ - valor do crédito tomado do banco $c$ pelo banco $b$ a ser resgatado	$IBIPP_{b,c}$ - valor do crédito tomado do banco $c$ pelo banco $b$ (juros) a ser resgatado
$IBCAND_{b,j}$ - bancos candidatos a emprestadores ao banco $b$ no mercado interbancário no período por ordem $j$ de preferência	$DBB_{b,t}$ - demanda de crédito bancário adicional ao banco $b$ (todas as firmas)
$B_b$ - conjunto das firmas correntistas do banco $b$	$NFB_b$ - número de firmas correntistas do banco $b$
$FB_{b,t}$ - fração do crédito bancário solicitado a ser atendida	$RBD_{b,t}$ - taxa de juros sobre depósitos paga pelo banco $b$

## Acompanhamento de Perdas

$BIPINP_{b,t}$  - perda definitiva de crédito interbancário tomado pelo banco  $b$  na data-fim (valor não será pago) - Principal + Juros

$BISPNP_{b,t}$  - crédito interbancário tomado pelo banco  $b$  e não recebido na data de início - Principal

$LBPID_{b,t}$  - crédito bancário cedido pelo banco  $b$  (principal+juros) com pagamento atrasado

$TNPB_{i,t}$  - valor total não pago pelo banco  $b$

$TNPBB_{i,t}$  - valor total não pago pelo banco  $b$  - default por contágio de bancos

$TNRB_{i,t}$  - valor total não recebido pelo banco  $b$

$TNRBB_{i,t}$  - valor total não recebido pelo banco  $b$  - originado por default de bancos

$LIPINP_{b,t}$  - perda definitiva de crédito interbancário cedido pelo banco  $b$  na data-fim (valor não será recebido) - Principal + Juros

$LISPNP_{b,t}$  - crédito interbancário cedido pelo banco  $b$  e não pago na data de início - Principal

$LBPINP_{b,t}$  - perda definitiva de crédito bancário cedido pelo banco  $b$  (valor não será pago) - Principal + Juros

$TNPBO_{i,t}$  - valor total não pago pelo banco  $b$  - default próprio

$TNPBF_{i,t}$  - valor total não pago pelo banco  $b$  - originado por default de firmas

$TBNP_{b,t}$  - impostos a pagar do banco  $b$  - perda definitiva (não serão pagos)

$TNRBO_{i,t}$  - valor total não recebido pelo banco  $b$  - cálculo inicial

$TNRBF_{i,t}$  - valor total não recebido pelo banco  $b$  - originado por default de firmas

## Finanças e Contabilidade

$FCB_{b,t}$  - Caixa do banco  $b$

$FDE_{b,t}$  - Depósitos em conta-corrente do banco  $b$

$FLI_{b,t}$  - Empréstimos interbancários concedidos pelo banco  $b$

$FBI_{b,t}$  - Empréstimos interbancários tomados pelo banco  $b$

$FLCB_{b,t}$  - Crédito bancário concedido pelo banco  $b$

$FTBG_{b,t}$  - impostos a pagar - banco  $b$

$FPB_{b,t}$  - lucro do banco  $b$

$FLTB_{b,t}$  - perdas do banco  $b$  (atrasos e default)

$FAAB_{b,t}$  - aporte de capital recebido pelo banco  $b$

$STB_{b,t}$  - status do banco  $b$  (normal ou liquidado)

$FIDE_{b,t}$  - Depósitos em conta-corrente do banco  $b$  (juros pagos)

$FILL_{b,t}$  - Empréstimos interbancários concedidos pelo banco  $b$  (juros)

$FIBI_{b,t}$  - Empréstimos interbancários tomados pelo banco  $b$  (juros)

$FILCB_{b,t}$  - Crédito bancário concedido pelo banco  $b$  (juros)

$FDB_{b,t}$  - dividendos do banco  $b$

$FLRB_{b,t}$  - perdas do banco  $b$  no período anterior recuperadas em  $t$

$FAB_{b,t}$  - valor líquido do banco  $b$  (Patrimônio líquido)

d) Trabalhadores/Consumidores

Perfis de Consumo

$NC$  - número de perfis de consumo

$XCB_{b,i}$  - quantidade do produto  $i$  na cesta de consumo com o perfil  $b$

$NWB_{b,t}$  - número de trabalhadores / consumidores com o perfil  $b$

Trabalho

$NW_t$  - número total de trabalhadores empregados

$NWT_t$  - Número total de trabalhadores da economia

Acompanhamento de Perdas

$TWD_t$  - salários totais a receber em atraso (não pagos em  $t$ )

$TWNP_t$  - perda definitiva de salários totais a receber (não serão recebidos) - firmas e bancos

$TFXCD_t$  - custos fixos totais a receber em atraso (não pagos em  $t$ )

$TFXCNP_t$  - perda definitiva de custos fixos totais a receber - firmas e bancos

Finanças e Contabilidade

$FCW_t$  - caixa das famílias

$FTW_t$  - salários totais a receber

$FFXC_t$  - custos fixos totais a receber

$FSW_t$  - gastos totais de consumo das famílias

$FTWG_t$  - impostos a pagar das famílias

e) Governo

Perfis de Consumo

$NCG$  - número de perfis de consumo - governo

$XCBG_{b,i}$  - quantidade do produto  $i$  na cesta de consumo com o perfil  $b$  - governo

Acompanhamento de Perdas

$TGD_t$  - impostos totais a receber em atraso (não pagos em  $t$ )

$TGNP_t$  - perda definitiva de impostos totais a receber (não serão recebidos) - firmas e bancos

Finanças e Contabilidade

$FCG_t$  - caixa do governo

$FTG_t$  - impostos totais a receber

$FSG_t$  - gastos de consumo do governo

f) Investidores

Finanças

$FCI_t$  - caixa dos investidores

$TAF_t$  - total de aportes de capital realizados em firmas

$TRBF_t$  - total de reservas para socorro a firmas

$TD_t$  - total de dividendos recebidos

$FSI_t$  - total transferido para os consumidores no período

$TAB_t$  - total de aportes de capital realizados em bancos

$TRBB_t$  - total de reservas para socorro a bancos

g) Sistema de Pagamentos

Subsistema de Bancos

$LBNF$  - matriz de pagamentos de bancos que não foram motivados por ações das firmas (agente-linha deve para agente-coluna).

$LB$  - matriz de dívidas do subsistema de bancos.

$DB$  - vetor de dívidas dos agentes.

$KB$ ,  $KBR$  - vetores de taxas de recuperação dos agentes do subsistema, levando em conta os pagamentos e transferências de reservas disponíveis.

$LBR$  - matriz de transferência de reservas disponíveis devidas do subsistema de bancos.

$PBR$  - vetor de reservas disponíveis transferidas pelos agentes.

$RDBR$  - vetor de reservas recebidas por bancos em default quando impossibilitados de realizar pagamentos de firmas correntistas na sua totalidade.

$RBR$  - vetor com o total de reservas recebidas.

$LBF$  - matriz de pagamentos de bancos motivados por ações das firmas (agente-linha deve para agente-coluna).

$EB$  - vetor de dotações iniciais dos agentes participantes do subsistema de bancos.

$PB$  - vetor de pagamentos dos agentes do subsistema.

$ER$  - reservas disponíveis iniciais dos agentes do subsistema de bancos.

$DBR$  - vetor de dívidas de reservas disponíveis dos agentes.

$RCBR$  - vetor de reservas recebidas das firmas - juros e amortização de empréstimos bancários.

$RBRA$  - vetor de recebimentos de reservas decorrentes de pagamentos realizados por agentes do subsistema de bancos.

## Subsistema de Firmas

$LFNF$  - matriz de pagamentos de firmas que não motivam pagamentos entre um banco e outras entidades (agente-linha deve para agente-coluna).

$LF$  - matriz de dívidas do subsistema de firmas.

$MP$  - matriz de relacionamento entre os agentes do subsistema de bancos e os agentes do subsistema de firmas.

$DF$  - vetor de dívidas dos agentes.

$KF$  - vetor de taxas de recuperação dos agentes do subsistema.

$LFF$  - matriz de pagamentos de firmas que motivam pagamentos entre um banco e outras entidades (agente-linha deve para agente-coluna).

$EF$  - vetor de dotações iniciais dos agentes participantes do subsistema de firmas.

$M$  - matriz de relacionamento bancos x firmas.

$PF$  - vetor de pagamentos dos agentes do subsistema

$KBF$  - vetor de recuperação dos pagamentos das firmas realizados pelos bancos.



## Notação Utilizada

São seguidas as seguintes convenções (exemplos entre parêntesis):

- a) Variáveis escalares são apresentadas em tipo normal ( $NI$ ).
- b) Vetores e matrizes são apresentados em negrito ( $\mathbf{FXC}$ ,  $\mathbf{P}$ ).
- c) Matrizes são representadas por letras maiúsculas e vetores podem ser representadas por letras maiúsculas ou minúsculas ( $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{FXC}$ ,  $\mathbf{y}$ ).
- d) Vetores, se não especificado, são vetores-coluna ( $\mathbf{FXC}_{[NI \times 1]}$ ).
- e) Elemento de vetores ou matrizes são representados pelo nome da variável, em tipo normal, com o subscrito ( $P_{i,t}$ ).
- f) O identificador  $\cdot$  representa todos os elementos da dimensão em que está ( $\mathbf{A}_{\cdot,t}$  representa os elementos de todas as linhas da coluna  $t$  de  $\mathbf{A}$ ).
- g) Os operadores  $'$  ou  $T$  representam transposição ( $\mathbf{A}'$  ou  $\mathbf{A}^T$  são transposições de  $\mathbf{A}$ ).
- h) O operador  $\cdot$  em  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  representa o produto elemento a elemento entre  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Caso esse operador seja colocado antes de outro operador, tal como  $/$  ou  $\wedge$ , formando os operadores  $\cdot /$  ou  $\cdot \wedge$ , a divisão ou exponenciação a realizar será elemento a elemento.
- i) O operador  $\text{diag}(\mathbf{v})$  forma uma matriz diagonal a partir do vetor  $\mathbf{v}$
- j) Vetores-coluna de zeros e de uns são representados por  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{1}$



# 1 Introdução

Uma das características básicas do ser humano e de sociedades em geral é a capacidade de organizar os recursos de que dispõem com a finalidade de atender as suas necessidades. Uma das estruturas que resultam dessa organização é o que se chama usualmente de economia, que poderia ser definida, de forma simplificada, como a organização de um conjunto de firmas produtoras, bancos, consumidores, administradores e instituições, criado e mantido como resultado de um esforço que visa o fornecimento de produtos para o atendimento de necessidades relacionadas ao bem-estar da sociedade a que serve. Este trabalho irá tratar da estabilidade desse tipo de estrutura, quando submetida a variações aleatórias nas demandas por produtos e a variações de fatores que afetam o funcionamento dessa estrutura, decorrentes, por exemplo, de decisões políticas. O interesse nesse assunto não é novo, uma vez que crises que perturbam a estabilidade da economia podem prejudicar seriamente a sociedade, devido à escassez de recursos, e são fenômenos recorrentes.

Essas crises podem ter origem na escassez de recursos naturais, ou em catástrofes, como secas, terremotos, maremotos, guerras, revoluções etc, que afetam a estrutura do processo produtivo em si, mas também podem ter origem nos fluxos monetários associados ao processo produtivo. Isso acontece porque operações de comercialização de bens usualmente têm contrapartida financeira, de modo que crises no setor produtivo são associadas a turbulências no fluxo de pagamentos, podendo ocasionar crises no sistema financeiro. Da mesma forma, crises no sistema financeiro podem prejudicar o setor produtivo quando impedem que seus agentes recebam os recursos necessários à continuidade de suas atividades. Dado esse casamento entre fluxos de bens e fluxos financeiros, conhecer melhor os mecanismos de deflagração e propagação de crises financeiras pode ajudar a evitar oscilações e interrupções no funcionamento do setor produtivo e no fornecimento de bens à sociedade.

Muitos trabalhos têm abordado a relação entre crises financeiras e perdas no setor real que resultam desse casamento. Hoggarth et al. (2002) analisaram crises bancárias ocorridas em diversos países, desenvolvidos e emergentes, e identificaram uma perda cumulativa do PIB, durante o período da crise, da ordem de 15 a 20% do valor anual. Trabalhos mais recentes estudaram o relacionamento entre a ocorrência de crises financeiras (especificamente, crises bancárias) e impacto no setor real da economia, medido

pela variação da taxa de crescimento do PIB. Kroszner et al. (2007) usaram dados de 38 países desenvolvidos e em desenvolvimento que experimentaram crises financeiras durante o último quarto de século, encontrando que os setores mais dependentes de financiamento externo (financiamento com recursos de terceiros) tendem a experimentar uma contração substancialmente maior de valor adicionado durante uma crise bancária em países com sistema financeiro mais aprofundado do que em países com sistema financeiro menos aprofundado. DellAriccia et al. (2008) questionaram se problemas no setor bancário realmente contribuem para o declínio do produto, pois os mesmos choques exógenos adversos que causam problemas bancários podem também causar declínio na demanda agregada, levando firmas a reduzir o investimento e o capital de giro e, por fim, a demanda por crédito bancário. Usando dados de painel de 41 países, de 1980 a 2000, testaram se indústrias mais dependentes financeiramente experimentaram maior redução no crescimento durante períodos de crises bancárias do que indústrias menos dependentes financeiramente, depois de controlar efeitos fixos de indústria-ano, país-ano e indústria-país. Os resultados obtidos confirmaram a hipótese conjunta de que crises bancárias têm efeitos reais, e que ao menos parte desse efeito se dá através do canal de crédito. Serwa (2010) propôs um método para calcular os custos macroeconômicos de crises bancárias que controla o impacto negativo de recessões na atividade bancária. Os resultados, baseados no método utilizado em dados de mais de 100 crises bancárias, sugeriram que é o tamanho da crise que importa para o crescimento econômico, e que o crescimento do PIB sofre uma desaceleração devido à menor disponibilidade de crédito durante as crises.

Esses trabalhos mostraram empiricamente que o canal de crédito é um importante canal de contágio de crises bancárias para o setor real, amplificando os custos da crise para a sociedade. Tendo em vista esse custo, DellAriccia et al. (2008) sugerem que a postura dos formuladores de política, de socorrer preferencialmente bancos, comparativamente a firmas, tem fundamento.

Este trabalho pretende estudar esse assunto construindo um modelo baseado em agentes de uma economia e simulando seu funcionamento, buscando identificar as condições associadas à estabilidade ou instabilidade financeira.

A escolha da modelagem baseada em agentes como abordagem metodológica foi feita com base na compreensão de que heterogeneidade de agentes e interação (ver Kirman (2006), Colander et al. (2008) e Gatti et al. (2010)<sup>1</sup>) são aspectos importantes a serem considerados no estudo de estabilidade financeira e contágio. Como será visto na próxima seção, trata-se de uma abordagem relativamente nova e com necessidades de aperfeiçoamentos, no que se refere à validação e calibragem (ver Fagiolo et al. (2007)), o que pode dificultar a sua utilização na previsão de crises (LeBaron e Tesfatsion (2008)). No entanto, no estágio em que se encontra, pode ser utilizada na obtenção de *insights* de

---

<sup>1</sup>Gatti et al. (2010) afirmam que essência da macroeconomia é a emergência de resultados e estruturas agregados como conseqüências não-planejadas de ações humanas individuais e interações dispersas.

mecanismos em macroeconomia.

As investigações em estabilidade financeira e crises têm seguido diversas abordagens:

a) Modelos de equilíbrio geral

Uma linha de pesquisa na área tem se baseado em modelos de equilíbrio geral, com agentes representativos. Nesses trabalhos, são formulados os modelos de equilíbrio, usualmente intertemporais e de estados contingentes, e depois são atribuídos valores aos parâmetros, representando as situações de interesse. Feito isso, os equilíbrios são analisados. Em alguns trabalhos, esses modelos são calibrados e os equilíbrios obtidos são confrontados com dados empíricos.

Um trabalho que abordou o problema do contágio em uma rede simples foi Allen e Gale (2000)<sup>2</sup>. Esse trabalho estudou a fragilidade financeira motivada por choques regionais de liquidez em mercados incompletos, em um modelo com quatro bancos. O trabalho mostrou que a possibilidade de contágio é maior quando os mercados são incompletos, e que sistemas com mercados completos são mais robustos do que aqueles com mercados incompletos. Depois desse trabalho, foram elaborados diversos trabalhos incorporando os resultados obtidos por Allen e Gale (2000), a maioria deles possibilitando que se analise os equilíbrios do ponto-de-vista da regulação bancária. Tsomocos (2003) propôs um modelo de equilíbrio com mercados incompletos e agentes heterogêneos, dinheiro e *default* que reuniu em um mesmo modelo bancos comerciais, consumidores / investidores e banco central / regulador (não trata produção), identificando um equilíbrio monetário no qual a instabilidade financeira e o *default* surgem endogenamente. Goodhart et al. (2006a)<sup>3</sup> incorporaram ao modelo de Tsomocos (2003) a possibilidade de violação de requerimentos de capital e conseqüentes penalizações, e fizeram outras modificações, com a finalidade de definir um modelo microfundamentado suficientemente detalhado e, ao mesmo tempo, suficientemente simples para ser computável e, assim, se prestar à análise da estabilidade financeira que surge como parte do processo de equilíbrio. Goodhart et al. (2004) simplificaram o modelo de Goodhart et al. (2006a). Os autores verificaram que podem ocorrer crises no comportamento do equilíbrio modelado. Goodhart et al. (2005) também trabalharam sobre uma versão simplificada de Goodhart et al. (2006a), definindo um modelo de equilíbrio com mercados incompletos, moeda, *default*, agentes heterogêneos, banco central e agente regu-

---

<sup>2</sup>Esse trabalho utilizou, como ponto de partida, o modelo de Diamond e Dybvig (1983). Diamond e Dybvig (1983) estudaram a demanda por liquidez e analisaram a função de transformação de maturidades dos bancos utilizando um modelo cuja estrutura foi utilizada por Allen e Gale (2000) e por trabalhos posteriores, com as seguintes características básicas: a) três períodos no tempo; b) bancos, que podiam investir em um ativo líquido livre de risco ou em um ativo ilíquido arriscado, de longo prazo e maior retorno; e c) consumidores, dos quais uma parte valorizava o consumo no curto prazo, com probabilidade  $\pi$ , e os demais preferiam consumir no longo prazo, com probabilidade  $1 - \pi$ .

<sup>3</sup>Trabalho (mais complexo) elaborado em 2003 e citado por trabalhos anteriores à sua publicação.

lador do sistema financeiro para servir como ferramenta de análise para Bancos Centrais e agentes reguladores. Goodhart et al. (2006b) estenderam o modelo de Goodhart et al. (2005) para levar em conta um horizonte multi-período para maximização do retorno esperado. Os autores concluíram que o modelo se comportava satisfatoriamente e que permitia a avaliação da propagação e amplificação dos efeitos de contágio entre bancos ao longo do tempo. Tsomocos et al. (2007), por sua vez, desenvolveram um modelo de equilíbrio geral multi-período com mercados de depósitos, crédito e empréstimos interbancários nos quais os bancos inicialmente se especializam nas escolhas de seus devedores, levando à sub-diversificação e formando conjuntos de bancos interdependentes, que afetam os lucros e taxas de default uns dos outros de maneira seqüencial e, por fim, Walque et al. (2010) desenvolveram um modelo DSGE com um setor bancário heterogêneo, e introduziram probabilidades de *default* endógenas para firmas e bancos, permitindo regulação bancária e injeções de liquidez no mercado interbancário. Estudaram as interações entre o setor bancário e o restante da economia e a importância das autoridades de supervisão e monetárias para a restauração da estabilidade financeira.

b) Estudos de flutuações econômicas

Outra linha de estudos relacionados à estabilidade financeira é a relacionada à origem das flutuações econômicas. A identificação da origem das flutuações permite que se conheçam possíveis causas de crises. A explicação que a teoria de ciclos reais de negócios dá para essas flutuações, é a de que resultam de choques agregados, por exemplo, guerras, catástrofes e mudanças de governo. De acordo com essa explicação, se unidades menores da economia, por exemplo, firmas, são sujeitas a choques idiossincráticos independentes, o efeito agregado tende a desaparecer, quanto maior for o número dessas unidades, de acordo com o teorema do limite central. Outra explicação é a dada por Jovanovic (1987), que afirmou que a presença de conexões entre firmas faz com que os teoremas de limite central não se apliquem, tendo como consequência o não-desaparecimento de flutuações agregadas. Bak e Chen (1993) forneceram uma explicação para as flutuações da atividade econômica agregada, como resultantes de muitos pequenos choques independentes. Mostraram que esses choques não se cancelam na agregação devido à presença de duas hipóteses não-padrão: interação local entre unidades produtivas, ligadas por relações de fornecimento, e tecnologia não-convexa. Gabaix (2009) propôs que choques idiossincráticos em nível de firma podem explicar uma parte importante dos movimentos agregados e fornecer microfundamentação para os choques agregados. O trabalho mostrou que choques nas firmas individuais não se cancelam no nível agregado se a distribuição dos tamanhos das firmas tiver cauda pesada, conforme é verificado empiricamente. Ao final, ele montou um modelo econométrico que permitiu que concluísse que os choques idiossincráticos nas 100 maiores firmas

dos EUA podem explicar um terço das flutuações do PIB. Adotando como ponto de partida uma economia multi-setor interligada por uma rede heterogênea de fornecimento, Acemoglu et al. (2010) mostraram como as propriedades estruturais da rede de fornecimentos determinam se a volatilidade agregada desaparece em grandes economias (o que ocorre quando a lei dos grandes números é válida) e quando isso acontece, a taxa com que isso acontece. Ao final do trabalho, foi feita, a título de exemplo, uma análise da economia americana a partir da matriz insumo-produto de 2002. Os cálculos realizados sugeriram que os tipos de interconexões analisados podem gerar significativas flutuações agregadas a partir de choque setoriais.

c) Quantificação do risco sistêmico do setor bancário

Outra área de estudo tem sido a quantificação do risco enfrentado por um sistema bancário interligado. Esses trabalhos têm se apoiado no mecanismo de compensação de pagamentos proposto por Eisenberg e Noe (2001). Esses autores propuseram um mecanismo de compensação de sistemas financeiros que possui um resultado único, especificando as condições a serem atendidas para isso. Além disso, propuseram uma métrica de exposição ao risco sistêmico de um componente do sistema. Dois dos trabalhos nessa linha são Elsinger et al. (2006) e Alessandri et al. (2009). Elsinger et al. (2006) propõem uma nova metodologia para estimar a ocorrência de default e taxas de recuperação, modelando a rede interbancária explicitamente. O modelo é composto de 3 partes: sistema de compensação de empréstimos interbancários, usando o algoritmo de Eisenberg e Noe (2001), análise das dívidas interbancárias e geração de cenários econômicos. A geração de cenários econômicos utiliza ferramentas de gerenciamento de risco padrão. Alessandri et al. (2009), por sua vez, propõem uma estrutura semelhante à proposta por Elsinger et al. (2006). É realizada uma simulação de Monte Carlo da evolução de uma rede de bancos, em períodos trimestrais, por 3 anos. A simulação utiliza dados contábeis de cada classe de ativos e passivos, um modelo de risco para gerar as variáveis e o algoritmo de compensação de pagamentos de Eisenberg e Noe (2001).

d) Modelos baseados em agentes

A seguir, são apresentados alguns trabalhos que utilizam modelos baseados em agentes. Os trabalhos estão classificados assim: i) Trabalhos que visam identificar as características básicas de modelos macroeconômicos simples que produzem fatos estilizados de dinâmica industrial, financeiros e de ciclos econômicos; ii) Trabalhos que estudam o risco sistêmico em sistemas bancários, e iii) Trabalhos que estudam flutuações macroeconômicas.

i) Estudos que visam a replicação de fatos estilizados a partir de modelos macroeconômicos baseados em agentes

Gatti et al. (2003) utilizaram um modelo baseado em agentes com um banco

e firmas heterogêneas para estudar a dinâmica do processo de entrada e saída de firmas em um contexto em que as condições financeiras afetam a acumulação de capital; Gatti et al. (2005) estudaram as flutuações econômicas, do ponto de vista da escalagem, utilizando um modelo com firmas heterogêneas não interligadas e conectadas a um banco por contratos de crédito bancário; Gatti et al. (2006) mostraram como as escolhas de crédito por bancos e firmas são inter-relacionadas, utilizando um modelo de uma economia com 3 setores: firmas produtoras de bens finais, firmas produtoras de bens intermediários e bancos; Gatti et al. (2007) apresentaram e discutiram um modelo simples com acelerador financeiro, cujo núcleo conceitual era a interação de firmas heterogêneas e o sistema bancário, por meio de crédito bancário, com taxa de juros endógena, e Gatti et al. (2007) mostraram que um modelo simples com agentes heterogêneos financeiramente frágeis consegue replicar um grande número de fatos estilizados com precisão considerável: de dinâmica industrial a fatos financeiros, e de ciclos econômicos à escalagem. Por fim, Battiston et al. (2007) procuraram identificar o conjunto mínimo de mecanismos que reproduzem qualitativamente, no modelo baseado em agentes proposto, (firmas dispostas em camadas ao longo da cadeia produtiva), os principais fatos estilizados da demografia industrial.

Em todos os modelos acima, as firmas vendem toda a sua produção a preços estocásticos (distribuição uniforme), o que os caracteriza como modelos abertos, com fluxos financeiros e de bens sujeitos a menos restrições, com maior número de graus de liberdade.

ii) Estudos de risco sistêmico no setor bancário usando modelos baseados em agentes

Iori et al. (2006) utilizaram um modelo baseado em agentes, com bancos interligados por crédito interbancário, em uma rede dinâmica, para estudar o impacto de exposições entre instituições financeiras na propagação de crises de liquidez. Nier et al. (2007), por sua vez, investigaram como o risco sistêmico é afetado pela estrutura do sistema financeiro, utilizando um modelo de bancos em rede. Foi verificada a dependência entre o risco sistêmico medido nas simulações e parâmetros estruturais da rede.

iii) Estudos de flutuações econômicas usando modelos baseados em agentes

Dosi et al. (2006) apresentam um modelo evolucionário de dinâmica industrial, que possui um setor de firmas desenvolvedoras de tecnologia de máquinas-ferramenta pelo qual a inovação tecnológica produz choques de produtividade endógenos. Esse modelo é capaz de exibir padrões auto-sustentáveis de crescimento caracterizados pela presença de ciclos de negócios endógenos e também replica os fatos estilizados mais importantes referentes a dinâmicas micro e



macroeconômicas. Dosi et al. (2008) modificaram o modelo acima para capturar explicitamente, nas suas hipóteses comportamentais, algumas das micro-regularidades empiricamente detectadas em análises micro e macroeconômicas e em economia comportamental. Esse modelo também exibe ciclos de negócios endógenos e replica fatos estilizados referentes a dinâmicas micro e macroeconômicas. Dosi et al. (2010) propuseram um modelo baseado em agentes de crescimento endógeno e ciclos de negócios e exploraram suas propriedades sob diferentes políticas públicas que impactavam oferta, demanda e os fundamentos da economia. Eles descobriram profundas complementaridades entre fatores que influenciam a demanda agregada e fatores de mudança tecnológica que afetam, tanto flutuações de curto prazo, quanto padrões de crescimento de longo prazo.

Este trabalho propõe um modelo fechado a ser utilizado no estudo de flutuações econômicas e crises, financeiras ou originadas no setor real. Por ser fechado<sup>4</sup>, o modelo impõe restrições adicionais aos fluxos de bens produzidos e financeiros, se comparados às restrições impostas em modelos abertos, como Gatti et al. (2006), originando padrões de contágio que não ocorreriam nesses modelos. Neste trabalho, os bancos são modelados de modo mais simples do que em Iori et al. (2006) e as conexões entre eles têm a mesma flexibilidade. Com relação às firmas, a cadeia produtiva é estruturada em redes heterogêneas; o trabalho que mais se aproxima dessa abordagem é Battiston et al. (2007), que trata um sistema de firmas com cadeia produtiva estruturada em camadas sequenciais (Battiston et al. (2007) não trata bancos). Tratar um sistema de firmas estruturado em redes heterogêneas, em um contexto de racionalidade limitada, exige complexidade extra em pelo menos dois aspectos: a) na definição de metas de produção, com base na expectativa de demanda, e b) na compensação de pagamentos. No caso da definição de metas de produção, este trabalho utilizou expectativas adaptativas com uma regra simples de extrapolação<sup>5</sup>. Com relação à compensação de pagamentos, a estrutura de firmas em redes heterogêneas obriga que se use um processo de compensação como o definido em Eisenberg e Noe (2001), uma vez que os pagamentos não seguem alguma ordem pré-definida; eles precisam ser realizados simultaneamente, respeitando-se a disponibilidade de recursos de cada agente pagador. No que se refere ao relacionamento entre firmas e bancos, a ênfase na literatura tem sido modelar relacionamentos através de crédito bancário, dado que o crédito bancário é um canal pelo qual uma firma com poucos recursos próprios obtém recursos adicionais, sendo um fator importante para a definição do nível de produção da firma. Além disso, trabalhos como DellAriccia et al. (2008) mostram que o

---

<sup>4</sup>Por ser este um modelo fechado, somente são consumidos bens já produzidos (em estoque), e a quantidade de moeda na economia é constante.

<sup>5</sup>Dosi et al. (2006) testaram algumas formulações de expectativas adaptativas envolvendo diferentes habilidades de cálculo e rotinas de extrapolação

crédito bancário é um canal importante de contágio do setor real por crises bancárias. No entanto, decidiu-se tratar uma forma a mais de relacionamento: a do banco como agente pagador de firmas correntistas (não foi descoberto na literatura nenhum modelo incluindo essa forma de relacionamento). A intenção da modelagem desse tipo de relacionamento é permitir uma forma de contágio adicional entre firmas e bancos: se um banco está em dificuldades, as firmas credoras das firmas correntistas desse banco receberão pagamentos incompletos; se uma firma está em dificuldades, os bancos das firmas credoras dessa firma receberão pagamentos menores do que os recebidos em situação de equilíbrio. A modelagem dessa modalidade adicional de relacionamento exigiu o desenvolvimento de um sistema de compensação condicional de pagamentos, estendido a partir do processo de compensação de Eisenberg e Noe (2001). Para permitir estudos de restrições ao socorro a firmas e bancos, foram modeladas reservas de recursos para socorro a esses agentes, via aporte (não foi identificado na literatura nenhum trabalho com esse tratamento). Por fim, foi incluído no modelo um setor público arrecadador / consumidor sem, no entanto, tratar déficits fiscais<sup>6</sup>. Neste modelo, o governo é utilizado para, exogenamente contrair ou expandir a base monetária por meio da redução ou aumento dos seus dispêndios.

Com base nas informações de que este autor dispõe, o modelo proposto neste trabalho apresenta as seguintes inovações com relação à literatura:

- É um modelo fechado, o que impõe restrições aos fluxos de bens e de fluxos financeiros que não existiriam em modelos abertos, possibilitando a evidenciação de formas adicionais de contágio.
- Modela firmas em redes heterogêneas, o que é mais próximo da realidade e permite a propagação de choques de forma irregular ao longo das cadeias produtivas e dos bancos.
- Modela bancos conectados a firmas por dois canais: canal de crédito e relacionamento correntista  $\times$  banco, o que permite maior número de canais de propagação de choques entre a rede de bancos e a rede de firmas.
- Utiliza um processo de compensação condicional de pagamentos, desenvolvido neste trabalho, e que pode ser útil em trabalhos nos quais os bancos fazem seus próprios pagamentos e fazem pagamentos de clientes.
- Permite o controle das ações de socorro a firmas e a bancos em estudos de propagação de crises.
- Permite o estudo dos efeitos de contração ou expansão da base monetária através dos dispêndios do governo.

Este modelo pode ser utilizado para responder às seguintes perguntas, entre outras:

---

<sup>6</sup>o modelo de Dosi et al. (2010) também inclui um setor público

- Como variações nos fluxos monetários afetam os fluxos de bens? Variações na base monetária afetam o produto? A moeda é neutra?
- As flutuações macroeconômicas que surgem a partir de flutuações do produto de firmas individuais tendem a se cancelar quando aumenta o número de firmas da economia?
- Flutuações na produção de grandes firmas afetam o PIB de modo relevante?
- Neste tipo de modelo, o que é mais importante: a estrutura da economia ou o histórico de choques na demanda? Se uma dada estrutura / configuração da economia for submetida a diferentes sequências de choques, o comportamento macroeconômico permanece qualitativamente o mesmo?
- Que parâmetros da economia no modelo (que representam características de economias reais), a tornam mais susceptíveis a crises?
- Havendo ameaça de crise, ou no início de uma crise, existe uma alocação preferencial de recursos de socorro que pode surtir mais efeito na sua mitigação ou controle?
- Que eventos ou condições são mais frequentemente associados ao início de uma crise?
- Existe alguma regularidade ou padrão inesperado que se tornará evidente durante as simulações e que facilitará a compreensão de algum fenômeno?

Os principais resultados obtidos com este modelo foram:

- O baixo decaimento da amplitude das flutuações agregadas do produto na economia, com o aumento do número de firmas incluídas no modelo, foi confirmado nas simulações realizadas para estudar esse tópico.
- A identificação de pelo menos uma situação em que, consistentemente, problemas enfrentados por uma firma grande se refletiam no PIB de dois períodos após (exemplo de efeito granular, segundo Gabaix (2009)).
- Foram identificados processos de contágio de bancos para firmas e de firmas para bancos.
- Verificou-se, em uma simulação na qual ocorreu uma crise no setor real acompanhada de crise no setor bancário, que o socorro exclusivo ao setor bancário não resolveu a crise do setor real. Nesse caso, a solução da crise no setor real exigiria o aporte de recursos (ou crédito) ao setor e, possivelmente, a solução de problemas estruturais (tecnológicos, organizacionais).
- Verificou-se, em todas as simulações realizadas, que o nível de produção, emprego, índice de preços são sensíveis ao volume (quantidade) de moeda em circulação. Expansão / contração na base monetária provocam aumento / diminuição do PIB, podendo, inclusive iniciar crises.

- Em todas as simulações de crise, verificou-se que crises se iniciam se o fluxo de aportes para firmas ou bancos em *default* se torna insuficiente para manter esses agentes ativos. Quando firmas ficam inativas ou bancos funcionam de maneira deficiente, isso prejudica os agentes vizinhos, espalhando a crise. Do ponto-de-vista dos fluxos financeiros, para restabelecer a continuidade e o equilíbrio dos fluxos de pagamentos, o recomendável seria aumentar a disponibilidade de reservas para aportes. No entanto, no mundo real, isso não solucionaria o problema: se uma firma ou banco precisa, recorrentemente de aportes para quitar suas dívidas é porque se tornou consistentemente deficitária(o). Nesse caso, os investidores não teriam interesse em socorrer esse agente, a não ser que ele passasse por mudanças estruturais.

O presente trabalho está organizado como se segue: o capítulo 2 apresenta uma revisão de literatura com foco em modelos baseados em agentes, o capítulo 3 descreve o modelo, o capítulo 4 apresenta as análises realizadas com o modelo e o capítulo 5 conclui.

## 2 Revisão de Literatura

Neste capítulo, são apresentados com mais detalhe trabalhos que forneceram elementos que subsidiaram a elaboração deste trabalho. O capítulo está dividido em três seções. Na primeira, são discutidos pontos fortes e questões em aberto relacionadas à utilização da metodologia *ACE* (*Agent-based computational economics*) em pesquisas em Economia. São também feitas recomendações de critérios a observar na elaboração de modelos e na sua validação e calibração. Na segunda seção, são apresentados programas de pesquisa em macroeconomia usando modelos baseados em agentes. A última seção apresenta trabalhos que formularam modelos ou se apoiaram em proposições importantes para este trabalho.

### 2.1 Considerações Metodológicas em ACE

De acordo com Epstein e Axtell (1996), e Tesfatsion e Judd (2006), Agent-based Computational Economics (ACE) é uma abordagem metodológica na qual são realizadas simulações em computador de processos econômicos modelados como sistemas dinâmicos de agentes interativos.

Na ACE, agentes são entidades que residem em um mundo construído computacionalmente, sendo, tipicamente, implementados por coleções encapsuladas de dados e métodos, definidos em linguagens de programação orientadas a objeto. Em uma simulação ACE, uma vez que as condições iniciais tenham sido especificadas, todos os eventos subsequentes irão resultar das interações dos agentes. Essas interações são determinadas dinamicamente (durante a execução da simulação), pelas estruturas internas dos agentes: variáveis de estado e métodos de processamento dessas variáveis. Os agentes podem ser encapsulados, organizando-se hierarquicamente em grupos de grupos de agentes.

Fagiolo et al. (2007) apresentaram uma relação com os 10 ingredientes básicos que tendem a diferenciar os modelos baseados em agentes dos demais tipos de modelo e que, ao mesmo tempo, descrevem as situações em que se recomenda esse tipo de abordagem:

- a) *Perspectiva bottom-up*: uma representação satisfatória de uma economia descentralizada deve ser obtida a partir dessa perspectiva porque as propriedades agregadas são decorrentes das micro-dinâmicas envolvendo as entidades básicas (agentes) (Tesfatsion (2002)).
- b) *Heterogeneidade*: agentes são, ou poderiam ser, heterogêneos em quase todas as

suas características, como, por exemplo, dotações iniciais, regras de comportamento e racionalidade.

- c) *Abordagem de sistema complexo em evolução (ECS)*: os agentes vivem em sistemas complexos que evoluem com o tempo (Kirman (1997b) e Kirman (1997a)). Portanto, as propriedades agregadas devem emergir de repetidas interações das entidades simples, em vez de surgirem de requisitos de consistência provenientes da racionalidade e equilíbrio impostos pelo modelista. De acordo com Kirman (1989) e Kirman (1992), não se pode deduzir o comportamento macro a partir do comportamento de um indivíduo médio ou representativo. Da mesma forma, não se pode derivar racionalidade coletiva em fenômenos econômicos, como a formação de alianças estratégicas, através da construção de agentes representativos abstratos. Ao contrário, fenômenos macro são um produto de interações de agentes heterogêneos. Surge dinâmica complexa na estrutura macro mesmo que cada indivíduo siga regras comportamentais simples.
- d) *Não-linearidade*: as interações que ocorrem nos modelos baseados em agentes são inerentemente não-lineares (Silverberg et al. (1988)), e ocorre retroalimentação não-linear entre níveis micro e macro. O foco é colocado sobre as propriedades de auto-organização que emergem desses *loops* de retroalimentação. Como Silverberg et al. (1988) observam, em economia, observa-se a evolução de sistemas dinâmicos complexos se desdobrando no tempo histórico, isto é, irreversível. As decisões de agentes econômicos agora são confrontadas mais tarde, em interações com outras decisões e com variáveis agregadas. A emergência de propriedades é ligada à presença de efeitos multi-escala em modelos baseados em agentes.
- e) *Interações diretas endógenas*: as decisões tomadas por um agente dependem, através de expectativas adaptativas, de escolhas passadas feitas por outros agentes da população (Fagiolo (1998)).
- f) *Racionalidade limitada*: assume-se que os agentes se comportam como entidades com expectativas adaptativas e racionalidade limitada.
- g) *Natureza da aprendizagem*: os modelos neoclássicos são interessados em aprendizagem que leva à eficiência alocativa. Modelos baseados em agentes realizam uma busca aberta de ambientes em mudanças dinâmicas. Os agentes não possuem uma compreensão da estrutura subjacente do ambiente em que atuam, mas precisam desenvolvê-la. Além disso, a busca é aberta devido à complexidade das interações dos agentes.
- h) *Dinâmica verdadeira*: o estado do sistema evolui de maneira irreversível, de uma maneira *path-dependent* (Marengo e Willinger (1997)).

- i) *Novidades endógenas e persistentes*: sistemas sócio-econômicos são inerentemente não-estacionários: existe uma permanente introdução de novidades em sistemas econômicos e a geração de novos padrões de comportamento, que é um direcionador de aprendizado e adaptação. Como conseqüência, os agentes enfrentam a difícil tarefa de aprender e se adaptar a ambientes turbulentos e endogenamente mutáveis.
- j) *Mecanismos de mercado baseados em seleção*: agentes tipicamente passam por mecanismo de seleção (Nelson e Winter (1982)).

Segundo LeBaron e Tesfatsion (2008), na ACE os modelos não precisam restringir as interações dos agentes a priori, através da imposição de condições de equilíbrio, hipóteses de homogeneidade ou outros instrumentos externos de coordenação que não sejam derivados de fatos do mundo real. Devido a essa liberdade característica dessa abordagem metodológica, a ACE é particularmente útil no estudo de problemas em que heterogeneidade de agentes e interação sejam essenciais à compreensão da matéria em estudo. Gatti et al. (2010) afirmam que essência da macroeconomia é a emergência de resultados e estruturas agregados como conseqüências não-planejadas de ações humanas individuais e interações dispersas. Assim, uma das maiores contribuições potenciais da ACE à teoria macroeconômica é permitir a exploração construtiva de efeitos de escala sem a imposição de instrumentos de coordenação artificiais.

Apesar das vantagens que essa abordagem metodológica traz, alguns obstáculos ainda impedem que seja adotada de uma forma mais ampla. Um dos motivos de insegurança associados à utilização de modelos baseados em agentes é uma percebida falta de robustez dos modelos (essa dificuldade é admitida, inclusive, pelos pesquisadores da área), o que ameaça essa linha de pesquisa como um todo. Fagiolo et al. (2007) apontam quatro focos de problemas identificados na modelagem baseada em agentes:

- a) A comunidade de economistas neoclássicos consistentemente tem desenvolvido um núcleo de modelos teóricos e aplicado a diversas áreas de pesquisa. A comunidade de pesquisadores que usa modelos baseados em agentes não tem feito isso. Há uma grande diversidade de modelos baseados em agentes, mas com pouca ou nenhuma compreensão da conexão entre os modelos altamente heterogêneos que têm sido desenvolvidos<sup>1</sup>.
- b) Falta de comparabilidade entre os modelos desenvolvidos. Os modelos não só têm diferentes conteúdos teóricos, como também procuram explicar fenômenos completamente diferentes. Quando procuram explicar fenômenos similares, pouco

---

<sup>1</sup>Tome-se, como exemplo, os tipos de modelos desenvolvidos para explicar difusão tecnológica. Não se consegue identificar as relações fundamentais entre modelos *sand pile*, modelos de urna de Polya e modelos de aprendizagem dinâmica, como, por exemplo, algoritmos genéticos, jogos evolucionários e modelos de rede.

ou nenhuma pesquisa em profundidade foi feita para comparar e avaliar o poder explicativo deles.

- c) Falta de técnicas-padrão para construir e analisar modelos baseados em agentes. Tem sido recomendado o desenvolvimento de protocolos, para serem comumente aceitos, para a construção de modelos baseados em agentes (Leombruni (2002)).
- d) O relacionamento problemático entre os modelos baseados em agentes e os dados. Há grandes diferenças na maneira pelas quais pesquisadores conduzem a validação empírica, quando o fazem. Áreas-chave para debate são: É apropriada uma metodologia realista? Por que a validação empírica deveria ser a base fundamental para a aceitação ou rejeição de um modelo? Existem outros testes de validação de modelo além da reprodução de fatos estilizados?

Fagiolo et al. (2007), afirmam que, apesar da existência dessas áreas problemáticas, os modelos baseados em agentes têm sido bem-sucedidos na explicação de fenômenos macroeconômicos. No entanto, a consolidação dessa abordagem metodológica está atrelada à solução de questões em aberto nas seguintes áreas: 1) estratégias alternativas para a construção de modelos baseados empiricamente; 2) problemas devidos à sobre-parametrização; 3) contra factuais e seu uso em análise de políticas; 4) definição de testes empíricos suficientemente fortes, e 5) problemas devidos à disponibilidade, qualidade e viés das bases de dados disponíveis, sugerindo que se intensifique a pesquisa relativa a questões metodológicas.

### **2.1.1 Critérios a serem atendidos na elaboração de um modelo ACE**

LeBaron e Tesfatsion (2008) apontam três critérios a serem atendidos para que um modelo ACE facilite a compreensão da macroeconomia do mundo real: a) O modelo deve incluir uma taxonomia de agentes apropriada, baseada empiricamente; b) A escala do modelo deve ser apropriada ao propósito da análise, e c) As especificações do modelo devem estar sujeitas à validação empírica, de forma a permitir insights dos mecanismos estudados.

#### **a) Taxonomia**

Taxonomia é a classificação dos fenômenos em categorias ou grupos ordenados. Facilita a recuperação de informação e estabelece as fundações da pesquisa comparativa (ver Mayr (1997, Cap. 7)). No processo de modelagem de um processo econômico utilizando a abordagem metodológica ACE, é necessário definir as categorias de agentes e os papéis estes que desempenharão nas interações modeladas. Essa definição deve ser baseada em categorias do mundo real.



b) Escala do modelo

Com relação à escala do modelo (número de agentes), devem ser construídos modelos tão simples quanto possível, mas não ao ponto de a simplicidade prejudicar o estudo.

c) Validação empírica

A validação empírica é importante tanto para os modelos macroeconômicos mais tradicionais como para os modelos ACE. No entanto, a metodologia ACE possui problemas de validação específicos dessa metodologia:

- Graus de liberdade: o pesquisador inteligente pode manipular os muitos graus de liberdade dos parâmetros e configurações do modelo para obter qualquer característica empírica, por exemplo, ele pode prever dados utilizando redes neurais ou modelos de regressão linear.
- Algumas propriedades de muitos modelos ACE não são bem compreendidas nem fundamentadas pelo comportamento humano observado.

A validação de um modelo ACE pode ser feita através da obtenção de resultados coerentes com fatos estilizados. Espera-se que um modelo, mais do que gerar uma série temporal, gere uma dinâmica distribucional para a economia, por exemplo, distribuição de riqueza e tamanhos de firmas.

Quanto à estimação desses modelos, podem ocorrer dificuldades, devido às flexibilidades desses modelos, por exemplo, a existência de não-linearidades nas interconexões dos agentes.

### 2.1.2 Validação Empírica de Modelos Baseados em Agentes

Fagiolo et al. (2007) apresentam uma taxonomia de modelos baseados em agentes que captura as dimensões mais evidentes da diversidade desse tipo de modelo. As dimensões são estas: a) a natureza do objeto em estudo, b) o objeto da análise, c) a natureza das hipóteses principais de modelagem, e d) o método de análise de sensibilidade.

Estas quatro dimensões influenciam fortemente a escolha do procedimento de validação empírica usado. O foco em fenômenos quantitativos ou qualitativos, em fenômenos micro ou macro, e em transientes ou impactos de longo-prazo determinam o tipo de dados requeridos para a validação empírica, os procedimentos estatísticos a serem seguidos e a habilidade de gerar implicações testáveis empiricamente. Adicionalmente, a extensão na qual a análise de sensibilidade (análise da robustez dos resultados obtidos face a variações nos parâmetros) é realizada, antes da validação empírica, tem importantes implicações na universalidade dos resultados da simulação obtidos. Diferentes abordagens de coleta e análise de dados também surgem, dependendo de a análise ser descritiva (dentro da amostra), ou preditiva (fora da amostra). Análises fora da amostra requerem que o pesquisador calibre parâmetros e condições iniciais.

a) Abordagem de calibração indireta

Com base em uma combinação de fatos estilizados e uma combinação de conjuntos de dados empíricos, muitos construtores de modelos baseados em agentes têm desenvolvido uma abordagem pragmática de quatro passos para a validação empírica. A calibração indireta inicialmente valida o modelo e depois o calibra indiretamente, focando nos parâmetros consistentes com a validação dos resultados. No primeiro passo, o modelista identifica um conjunto de fatos estilizados que ele está interessado em reproduzir ou explicar com o modelo. Fatos estilizados, tipicamente, são relacionados ao nível macro, mas também podem ser relacionadas a regularidades *cross-section*. No segundo passo, juntamente com as prescrições do procedimento de calibração empírica, o pesquisador constrói o modelo, de modo que mantenha a descrição microeconômica a mais próxima possível da evidência empírica e experimental sobre comportamento microeconômico e interações. Esse passo envolve reunir toda a evidência possível sobre os princípios subjacentes que dão forma aos comportamentos do mundo real, de modo que o nível microeconômico seja modelado de uma forma não tão irreal. No terceiro passo, a evidência empírica dos fatos estilizados é usada para restringir o espaço (graus de liberdade) dos parâmetros e as condições iniciais, se o modelo se tornar não-ergódico. No último passo, o pesquisador deveria aprofundar seu entendimento dos mecanismos causais subjacentes aos fatos estilizados que estão sendo estudados e / ou explorar a emergência de fatos estilizados novos que o modelo possa validar *ex-post*.

b) Abordagem Werker-Brenner

A calibração empírica de modelos baseados em agentes foi proposta por Werker e Brenner (2004), e aplicada em Brenner e Murmann (2003) e Brenner (2006). A abordagem Werker-Brenner é um procedimento de calibração empírica de três passos. Os dois primeiros passos são consistentes com todos os exercícios de calibração. O terceiro passo é diferente. O primeiro passo usa o conhecimento empírico existente para calibrar as condições iniciais e as faixas de variação dos parâmetros do modelo. Werker-Brenner propõem que, onde dados apropriados não estejam disponíveis, o modelo seja deixado tão genérico quanto possível, isto é, faixas amplas deveriam ser especificadas para parâmetros para os quais não existem dados confiáveis suficientes. O segundo passo envolve a validação empírica dos produtos para cada especificação dos parâmetros do modelo derivadas do primeiro passo. Nessa validação, são atribuídas probabilidades de aceitação a cada especificação, através de procedimentos de inferência Bayesianos. Na validação empírica, o conjunto plausível de dimensões dentro do espaço dimensional inicial dos parâmetros é mais reduzido. O terceiro passo envolve mais uma rodada de calibração, que usa o conjunto de especificações de parâmetros de modelo sobreviventes e, quando aplicável, recorre ao testemunho de especialistas. O que se está procurando fazer

é identificar um modelo estrutural subjacente a partir das propriedades compartilhadas e características das especificações de parâmetros de modelo sobreviventes. Os autores afirmam que essas características compartilhadas devem ser verdadeiras também para os sistemas reais.

c) Abordagem *History-Friendly*

Da mesma forma que as outras abordagens de calibração discutidas anteriormente, esta abordagem procura conseguir que a modelagem seja mais alinhada à evidência empírica. A diferença-chave é que esta abordagem usa estudos-de-caso históricos específicos de uma indústria para modelar parâmetros, interações e regras de decisão de agentes. É uma abordagem de calibração que usa trajetórias particulares históricas para calibrar um modelo.

A abordagem history-friendly é fortemente qualitativa e foca os transientes microeconômicos. De acordo com esta abordagem, um bom modelo é o que pode replicar múltiplos fatos estilizados observados em uma indústria. Referências-chave para esta abordagem são Malerba et al. (1999) e Malerba e Orsenigo (2001).

A tabela 2.1 apresenta uma comparação dos usos dos processos de calibração descritos acima:

Tabela 2.1: Usos das abordagens de calibração

Abordagem	Domínio Empírico	Tipos de Dados	Uso dos Dados	Ordem de Aplicação
<b>Calibração Indireta</b>	Micro (indústrias, mercados) Macro (países, economia mundial)	Dados empíricos	Assistência na construção do modelo Validação dos resultados da simulação	1) Validar 2) Calibrar indiretamente
<b>Werker-Brenner</b>	Micro (indústrias, mercados); Macro (países, economia mundial)	Dados empíricos Conhecimento histórico	Assistência na construção do modelo Validação dos resultados da simulação; Calibração de condições iniciais e parâmetros	1) Calibrar 2) Validar
<b>History-Friendly</b>	Micro (indústrias, mercados)	Dados empíricos Conhecimento casual, anedótico e histórico	Assistência na construção do modelo; Validação dos resultados da simulação; Calibração de condições iniciais e parâmetros	1) Calibrar 2) Validar

## 2.2 Programas de Pesquisa em Macroeconomia Usando Modelos Baseados em Agentes

### 2.2.1 Microfundamentação da Macroeconomia em ACE

A elaboração de modelos econômicos baseados em agentes tem sido proposta como uma alternativa aos modelos macroeconômicos de equilíbrio geral com agentes representativos, aceitos como o padrão científico na moderna macroeconomia (Gaffeo et al. (2008)). Nos últimos anos, e, particularmente após a crise de 2008, que motivou questionamentos mais profundos sobre as práticas adotadas e sobre a profissão de economista (Colander et al. (2009), Kirman (2009), Kirman (2010)), a adequação desses modelos ao estudo de fenômenos macroeconômicos tem sido colocada em dúvida. Os principais questionamentos se referem à abordagem da heterogeneidade (ver, por exemplo, Kirman (2006)), racionalidade dos agentes (Colander et al. (2009)), interação dos agentes (Battiston et al. (2007)), desconsideração da dinâmica fora do equilíbrio (Battiston et al. (2007), Gaffeo et al. (2008), Kirman (2009)) e aspectos ligados ao equilíbrio em si, como a existência, unicidade local, e processo pelo qual o equilíbrio é atingido (Gaffeo et al. (2008)).

Gaffeo et al. (2008) relacionam alguns problemas que afetam a microfundamentação dos modelos baseados na tradição de Arrow-Debreu:

- a) A teoria convencional de equilíbrio geral tem dificuldade de encontrar um papel para a moeda.
- b) O equilíbrio não é único nem localmente estável sob condições gerais.
- c) A introdução de um agente representativo é feita sem atenção a falácias de composição e agregação<sup>2</sup>.
- d) Qualquer processo de *tâtonnement* ocorre fora do tempo, e implica que a formação de preços precede o processo de troca, em vez de ser resultado dele.

Quanto às soluções do equilíbrio, só podem ser obtidas mediante as hipóteses:

- a) Cada agente tem conhecimento completo do problema
- b) Eles são capazes de calcular a solução
- c) Existe um conhecimento comum entre os agentes de que eles estão atuando de acordo com os pressupostos anteriores.

---

<sup>2</sup>No problema de agregação de Sonnenschein (1972), Mantel (1974) e Debreu (1974), a agregação de comportamentos individuais não herda, geralmente, as propriedades dos comportamentos individuais.

Dados esses problemas, Gaffeo et al. (2008) propõem que um método para construir e analisar questões macroeconômicas com microfundamentação baseada em processos de tomada de decisão individuais, descentralizados, adaptativos e heterogêneos não somente é factível, mas também produz modelos com poder explanatório que rivaliza com modelos DSGE<sup>3</sup>.

As bases que propõem são as seguintes:

- a) Qualquer economia, especialmente as maiores, com milhões de entidades individuais deveria ser descrita como um sistema dinâmico, complexo, adaptativo (Arthur et al. (1997)). Nesse sistema a complexidade surge a partir de interações dispersas, não-lineares, localizadas de um grande número de agentes heterogêneos.
- b) Os processos de decisão individual são adaptativos: são ajustados à luz de resultados passados.
- c) A busca de ações com a finalidade de aumentar a performance individual pára tão logo uma solução de *satisficing* tenha sido encontrada (Simon (1987)).
- d) A adaptação é *backwardlooking*, sequencial e *path-dependent*. e ocorre de acordo com *error-correction procedures*.
- e) As expectativas são tomadas sobre horizontes finitos e modificadas à luz de resultados passados.
- f) A racionalidade limitada deve ser a regra, não a exceção.
- g) Em economias complexas, o principal direcionador da evolução é a seleção, e não a otimização. Toda vez que a imposição de contratos for custosa e a negociação ocorrer face-a-face, o comportamento maximizador poderá ser menos lucrativo do que a cooperação e reciprocidade.
- h) A complexidade em macroeconomia também lida com a prática comum de se fechar modelos através da imposição exógena de uma solução de equilíbrio geral por meio de teoremas de ponto fixo. A imposição de um leiloeiro walrasiano inibe a busca de uma explicação para o fato de como parceiros de negociação auto-interessados conseguem, na maioria das vezes, se coordenar em um mercado descentralizado.
- i) Economias complexas adaptativas tendem a se auto-organizar em configurações agregadas estáveis, ocasionalmente sujeitas a mudanças bruscas. Emerge ordem espontânea no processo de compra e venda individual, sem a necessidade de coordenação central. Comportamentos adaptativos e imitativos resultam em configurações

---

<sup>3</sup>Dynamic Stochastic General Equilibrium Models

agregadas predizíveis e estáveis, uma vez que estabilidade implica predizibilidade, e vice-versa.

- j) O abandono do leiloeiro walrasiano implica que os resultados dos mercados devem ser obtidos de cálculos paralelos de um grande número de indivíduos adaptativos, interativos e heterogêneos, em vez de ser uma solução de ponto fixo de um sistema de equações diferenciais.
- k) A remoção de dispositivos de coordenação externamente impostos induz uma mudança de uma perspectiva reducionista *top-down* para uma abordagem *bottom-up*.
- l) Propõe-se a abordagem ACE (*agent-based computational economics*) como ferramenta para implementar pesquisas de acordo com a microfundamentação proposta acima.
- m) Qualquer esforço direcionado a basear teorias macroeconômicas em modelos de comportamento individual deve ser acompanhado por uma estratégia coerente de avaliação da qualidade de suas explicações e previsões.

Um modelo segundo essas linhas pode ser uma consubstanciação da abordagem pós-walrasiana da macroeconomia (Colander (2006)).

Uma agenda de pesquisa implementável consistiria em montar um laboratório ACE nessas linhas, para estudar a emergência de recessões, bolhas, restrições de liquidez, desequilíbrios oferta-demanda e dinâmicas de preços patológicas.

### 2.2.2 Mesofundamentação da Macroeconomia em Economia Evolucionária

Uma proposta alternativa à microfundamentação é a mesofundamentação da macroeconomia. Na mesofundamentação da macroeconomia, busca-se explicar os fenômenos macroeconômicos a partir de regras adotadas pela população. Esse enfoque é particularmente útil para a economia evolucionária, uma vez que esta analisa os processos de mudança estrutural do sistema econômico, que podem se originar em mudanças no sistema de regras.

Um desafio para a economia evolucionária, colocado por Nelson e Winter (1982) tem sido o de se tornar capaz de prever e explicar padrões de crescimento econômico pelo menos como a teoria Neoclássica. No entanto, segundo Foster (2011), a economia evolucionária moderna tem tendido a se preocupar somente com o lado da oferta, ao nível de firma ou indústria. Segundo eles, esse foco na oferta tem sido difícil de conectar, analítica e empiricamente, com a macroeconomia; assim sendo, procuraram sugerir uma agenda de pesquisa para corrigir essa falha.

O nascimento de um corpo coerente do pensamento econômico evolucionário econômico se deu em Nelson e Winter (1982), a partir de uma crítica deles à teoria neoclássica de crescimento. No entanto, a abordagem alternativa que sugeriram era basicamente microeconômica, ao nível de firma, predominantemente voltada ao lado da oferta, usando simulações para apoiar a compreensão teórica e evitando métodos econométricos. Na ocasião, não era claro como se poderia fazer análises econômicas no nível macroeconômico partindo de hipóteses explicitamente evolucionárias propostas no nível microeconômico.

Metcalfe et al. (2006) apontaram a importância dos trabalhos de Kuznets (1953) e Fabricant (1940) explicando como a ascensão e queda de firmas e indústrias, devidas ao empreendedorismo, à inovação e a pressões competitivas pode ser conectado ao crescimento macroeconômico e flutuações.

A relativa estabilidade que se observa em dados de fluxos macroeconômicos em curtos períodos é resultante do sistema econômico funcionar obedecendo a regras. Mudanças evolutivas envolvem regras que os sistemas adotam, de modo que a macroeconomia evolucionária deveria focar sistemas de regras e como elas mudam. Com base nisso, Dopfer et al. (1940) argumentam que, para se fazer macroeconomia evolucionária, dever-se-ia construir sobre mesofundamentação em regras<sup>4</sup>, em vez de microfundamentação. Eles argumentam que o núcleo de um sistema econômico complexo está em meso-regras que são expressas como uma série de instituições, como costumes, normas, rotinas, leis, consituições, modas, etc. Elas são adotadas pela população e aplicadas de diversas maneiras para gerar valor econômico. O sistema de meso-regras é visto como hierárquico, variando desde regras centrais de vida longa, aplicadas em toda a economia, até regras de vida curta que são especializadas e contingentes.

Assim, o trabalho do macroeconomista é descobrir as meso-regras mais centrais no meso-conjunto hierárquico. Essas regras fundamentam outras que, por sua vez, facilitam a produção de diversos produtos em uma variedade de organizações. Assim, o valor agregado, conforme é medido em estatísticas macroeconômicas, é diretamente conectado a meso-regras centrais. Segue-se que, para se compreender o crescimento de uma economia, deve-se ter conhecimento sobre o seu conjunto interconectado de meso-regras e como ele está mudando. Isto requer um estudo histórico de instituições, tecnologias e estruturas organizacionais em profundidade.

Outra abordagem que poderia beneficiar a macroeconomia evolucionária, segundo Foster (2011), é a visão da economia como um sistema processador de energia direcionado pelo conhecimento. Essa visão é importante para a compreensão dos processos de crescimento econômico, pois:

- O processo de crescimento econômico é resultante, principalmente, da formação e aplicação de estruturas de conhecimento em mentes humanas (Metcalfe e Ramlogan

---

<sup>4</sup>Na modelagem baseada em agentes, os agentes são movidos por regras de comportamento.

(2005)).

- O sistema econômico atua sob restrições ambientais, e essa visão favorece a integração economia/meio ambiente em um sistema maior.
- As estruturas tecnológicas e organizacionais que determinam o crescimento econômico são formadas a partir da associação entre meso-regras e fluxos ou estoques de energia.

Nas estruturas tecnológicas e organizacionais, meso-regras tecnológicas determinam a viabilidade física de uma dada transformação da energia, enquanto as meso-regras organizacionais possibilitam que energia e habilidades humanas sejam coordenadas dentro das redes de sistemas econômicos.

As implicações do inter-relacionamento entre energia e conhecimento na atividade econômica devem ser consideradas de uma perspectiva mais sistêmica. O fluxo de energia é mediado pelo projeto e uso de sistemas extratores, transformadores, distribuidores e utilizadores. Todos eles envolvem acumulação e uso de conhecimento que, por sua vez, requer o uso de energia humana e não-humana. As meso-regras tecnológicas e organizacionais incorporadas nesses sistemas conhecimento-energia facilitam e, ao mesmo tempo, restringem o crescimento econômico de um modo fundamental. Uma vez que esse sistema está consolidado, é difícil mudar sem uma mudança em meso-regras centrais.

Uma proposta para a identificação e quantificação das ligações entre meso-regras e fluxos de valor agregado que possibilitaria a realização de pesquisas em macroeconomia, a partir da sua mesofundamentação, seria a proposta em Foster e Potts (2009):

- a) Investigações históricas detalhadas no intervalo de tempo selecionado, para identificar as meso-regras-chave que são relevantes ao entendimento do processo de crescimento. Qualquer tendência de variação na influência dessas regras também deve ser avaliada.
- b) Uma investigação estatística detalhada das associações entre todas as séries de dados disponíveis no intervalo de tempo especificado que meça fluxos e estoques no sistema em questão.
- c) Uma busca de conexões entre relações estatísticas observadas e as meso-regras pré-identificadas.
- d) Uma busca indutiva adicional de meso-regras que possam ser ligadas a outras associações estatísticas descobertas.
- e) A eliminação de associações estatísticas não-ligadas a meso-regras.



- f) A construção de dados artificiais, como séries de variáveis dummy, para refletir meso-regras-chave, descobertas em investigações históricas e que são importantes, mas que não têm contrapartida estatística.
- g) Estimação econométrica de um modelo de crescimento parcimonioso, utilizando métodos econométricos convencionais e bayesianos, nos quais todas as variáveis e/ou associações entre variáveis são ligadas a meso-regras identificadas.
- h) A construção de um modelo baseado em agentes no qual *meso-agentes* obedecem a meso-regras identificadas, mas com intensidade paramétrica variável, para refletir a micro-diversidade e para permitir sucesso e falha, com a restrição de que a média populacional deve ser igual ao macro-parâmetro estimado.
- i) Calibração das simulações resultantes utilizando dados macroeconômicos reais dentro e além do período da amostra. Dado que, a princípio, a modelagem econométrica deve ser restrita a períodos em que não existem grandes descontinuidades estruturais nos dados, o teste mais forte de calibração é rastrear os dados através de uma descontinuidade além do período de estimação da amostra. Esse é um teste exigente, e é baseado em uma visão sistêmica de que essas descontinuidades são um produto de regras já presentes em períodos de crescimento aparentemente estável, na ausência de choque exógenos óbvios.

O fato de os sistemas econômicos serem adaptativos e complexos, e passarem por mudanças estruturais dificulta o estudo da macroeconomia. No entanto, Foster (2011) argumenta que o estudo da macroeconomia a partir de princípios evolucionários passa a ser possível, desde que se reconheça que os sistemas econômicos são, de fato, redes de meso-regras, e que essas redes tenham coerência estrutural que possa ser modelada analítica e empiricamente no tempo histórico.

## 2.3 Modelos Baseados em Agentes

### 2.3.1 Risco Sistêmico em Bancos

Iori et al. (2006) desenvolveram um modelo baseado em agentes para estudar o risco sistêmico em redes de bancos. Na literatura, podem ser encontradas as seguintes causas de risco sistêmico:

- *Bank runs*: comportamento de manada de depositantes e investidores, visando o saque de fundos.
- Se a falha de um banco provocar a queda do preço de seus ativos, os bancos que possuem esses mesmos ativos podem ter sua solvência comprometida.

- Exposição cruzada entre instituições financeiras: por um lado funcionam como um seguro mútuo, por outro, criam o potencial de espalhamento de falhas que venham a ocorrer em alguma instituição.

Este trabalho visa tratar a última causa da lista, especificamente através de exposições por meio de depósitos interbancários. O foco deste trabalho é o potencial que o mercado interbancário tem de agir como mecanismo de propagação de crises de liquidez.

O modelo é estruturado da seguinte maneira:

- A economia opera em tempo discreto, denotada por  $t = 1, 2, \dots$ . Em qualquer período  $t$ , existe um número finito de bancos em funcionamento  $M_t$ . Cada banco é indicado por  $k$ :  $k = 1, 2, \dots, M_t$ .
- O propósito principal dos bancos é canalizar fundos recebidos dos depositantes para o investimento produtivo. As oportunidades de investimento são provenientes do setor produtivo e direcionadas a apenas 1 banco por oportunidade.
- O investimento feito em  $t$  vence em  $t + \tau$ , apresentando taxa de retorno  $\rho$ , exógena e livre de risco. Os retornos são realizados em  $t + 1, \dots, t + \tau$ .
- Cada banco recebe choques estocásticos nas suas reservas (provenientes dos padrões de saque dos seus clientes). Esses choques também envolvem transferências eletrônicas entre bancos.
- Se, pela não-previsibilidade dessas flutuações, o banco não conseguir cumprir suas obrigações, ele quebra. Se houver mercado interbancário, e o banco estiver conectado a esse mercado (isso é definido por uma matriz de interconexão, na qual cada elemento indica uma conexão nesse mercado com probabilidade  $c$ ), ele tenta obter financiamento nesse mercado. Caso não consiga, ele irá quebrar.

A seqüência de eventos prevista nesse modelo é apresentada para o caso em que não há mercado interbancário:

- Ao início da simulação, a economia tem  $M_0$  bancos. Ao início de cada período, o banco  $k$  tem seus ativos líquidos dados por:

$$L_{t-1}^k = A_{t-1}^k + V_{t-1}^k - \sum_{s=1}^{\tau} I_{t-s}^k \quad (2.1)$$

sendo  $A_{t-1}^k$  os depósitos no banco  $k$  em  $t - 1$ ,  $V_{t-1}^k$  o capital do banco e  $I_{t-s}^k$  os investimentos do banco  $k$  em  $t - s$ .

- Pagamento de juros aos depositantes, com taxa  $r_a \geq 0$  exógena.
- Recebimento de rendimento de investimentos dados por  $\rho \sum_{s=1}^{\tau-1} I_{t-s}^k + (1 + \rho)I_{t-\tau}^k$
- Ocorrem saques e depósitos estocásticos, resultando em um novo valor  $A_t^k$

- Após o movimento do dia, o saldo líquido é dado por:

$$\hat{L}_t^k = L_{t-1}^k + (A_t^k - A_{t-1}^k) - r_a A_{t-1}^k + \rho \sum_{s=1}^{\tau} I_{t-s}^k + I_{t-\tau}^k \quad (2.2)$$

- Se não houver mercado interbancário, caso  $\hat{L}_t^k < 0$ , o banco fecha.

Se o banco sobreviver ( $\hat{L}_t^k > 0$ ):

- Paga dividendos aos acionistas, a partir do excesso de retornos.

Calcula-se o valor líquido do banco ao meio do período:

$$\hat{V}_t^k = \hat{L}_t^k + \sum_{s=1}^{\tau-1} I_{t-s}^k - A_t^k \quad (2.3)$$

Disso, obtém-se a relação capital-depósitos:  $\hat{E}_t^k = \hat{V}_t^k / A_t^k$

Se  $\hat{E}_t^k > \chi$ , o banco  $k$  é um candidato ao pagamento de dividendos ( $\chi$  é a relação capital-depósitos alvo). O valor dos dividendos a pagar é:

$$D_t^k = \max[0, \min(\rho \sum_{s=1}^{\tau} I_{t-s}^k - r_a A_{t-1}^k, \hat{L}_t^k - R_t^k, \hat{L}_t^k + \sum_{s=1}^{\tau-1} I_{t-s}^k - (1 + \chi)A_t^k)] \quad (2.4)$$

sendo  $R_t^k$  as reservas mínimas mantidas pelo banco  $k$  e calculadas como  $R_t^k = \beta A_t^k$

- Se, após o pagamento de dividendos, houver liquidez acima das reservas mínimas requeridas, o banco receberá uma oportunidade de investimento randômica  $\omega_t^k$ , que define o máximo valor que ele pode investir. A liquidez disponível é dada por  $\tilde{L}_t^k = \hat{L}_t^k - D_t^k$ , portanto, o máximo valor que pode ser investido é:  $\tilde{L}_t^k - \beta A_t^k$ .

Portanto, o investimento a ser feito é dado por:

$$I_t^k = \min[\max(0, \tilde{L}_t^k - \beta A_t^k), \omega_t^k] \quad (2.5)$$

Ao final de  $t$ , a liquidez será  $L_t^k = \tilde{L}_t^k - I_t^k$ , e o valor líquido do banco será:

$$V_t^k = L_t^k + \sum_{s=0}^{\tau-1} I_{t-s}^k - A_t^k \quad (2.6)$$

Se o modelo tem mercado interbancário, ao início do período, a liquidez  $L_{t-1}^k$  é dada por:

$$L_{t-1}^k = A_{t-1}^k + B_{t-1}^k + V_{t-1}^k - \sum_{s=1}^{\tau} I_{t-s}^k \quad (2.7)$$

Na equação acima,  $B_{t-1}^k$  é o total tomado emprestado pelo banco  $k$  de outros bancos no período  $t - 1$ ;  $B_{t-1}^k$  pode ser positivo ou negativo, e satisfaz a  $\sum_{k=1}^M B_{t-1}^k = 0$ .

O empréstimo interbancário deve ser pago no período seguinte. Se, ao final desse processo, o saldo do banco ficar negativo, ele emite certificado de dívida a ser resgatado

ao final do dia, para cobrir o excedente de pagamentos em relação a suas reservas. Se, ao final do dia, ele não tiver saldo para resgatar esse certificado, o banco quebra e nenhum de seus credores é pago.

Os resultados sugerem que os empréstimos interbancários contribuem para com uma menor incidência de falhas de bancos por meio da ocorrência de um seguro mútuo; no entanto, eles também criam uma tendência para que o sistema mostre avalanches, isto é, episódios de colapsos múltiplos de bancos. As avalanches ocorridas no modelo indicam a ocorrência de contágio direto e indireto. No contágio direto, a falha de um banco afeta seus credores; no indireto, a falha de um banco enfraquece o sistema e o leva a um estado instável no qual aumenta a susceptibilidade a falhas múltiplas. As possibilidades de ocorrência das duas formas de contágio são mínimas quando o mercado interbancário consiste de bancos homogêneos, mas elas aumentam com a heterogeneidade. Também foi possível observar que a manutenção de grandes reservas de liquidez é estabilizadora, no caso de bancos isolados, mas pode levar à redução do papel de *risk-sharing* do mercado interbancário, tornando os bancos mais instáveis quando interligados por meio desse mercado.

### 2.3.2 Dinâmica Industrial

Battiston et al. (2007) desenvolveram um modelo ACE simples de uma rede de produção no qual as firmas estão ligadas por relacionamentos fornecedor-cliente envolvendo extensões de crédito. Nesse trabalho, procuraram identificar o conjunto mínimo de mecanismos que reproduzem qualitativamente os principais fatos estilizados da demografia industrial, como a distribuição dos tamanhos das firmas e, ao mesmo tempo, a correlação, ao longo do tempo e entre as firmas, do produto, crescimento e bancarrotas.

A contribuição desse modelo com relação a modelos anteriores vem do fato de que estes apresentavam apenas propagação indireta de bancarrotas, através do aumento das taxas de juros de crédito bancário: se uma firma quebrava, a taxa de juros de empréstimo subia para as demais, levando outras firmas à bancarrota (Gatti et al. (2005)).

Esse modelo tem a seguinte estrutura:

a) Ambiente econômico:

- $N$  firmas são organizadas em  $M$  níveis de produção, interconectados de forma sequencial. As firmas do nível  $K$  são fornecedoras de firmas no nível  $K + 1$  e clientes de firmas no nível  $K - 1$ .
- Às firmas, são atribuídos índices em minúsculas:  $i, j, k$ ; aos níveis de produção, são atribuídos índices em maiúsculas:  $I, J, K$ . Se a firma está no nível  $K = 1$ , é produtora primária, se está no nível  $K = M$ , é produtora de bens de consumo final.

- As firmas são interconectadas por: a) pedidos de produção de insumos; b) pagamentos de clientes.
- A tecnologia é linear:

$$Y_i^K = \sum_{j \in V_i^S} Q_{i,j}^{(K,K+1)} Y_j^{(K-1)} \quad (2.8)$$

sendo:

$V_i^S$ : conjunto de fornecedores da firma  $i$

$Y_j^{(K-1)}$ : produto total da firma  $i$

$Q_{i,j}$ : fração do produto de  $j$  que  $i$  usa para produzir seu produto

$Q$  é uma matriz insumo-produto. Para  $\forall K$ , vale:

$$\sum_{i \in \text{nível } K} Q_{ij}^{(K,K-1)} = 1, \quad \forall j \in \text{nível } K$$

b) Seqüência de eventos em cada período  $t = 1, \dots, T$ :

- No início de cada período, todas as firmas determinam sua produção desejada, com base na demanda e na sua capacidade produtiva. Isso é feito partindo do nível  $M$  até o nível 1: as firmas do nível  $M$  recebem pedidos de consumidores finais e fazem pedidos de insumos para suas fornecedoras no nível  $M - 1$ . Esse processo se propaga até o nível 1.
- A partir da produção desejada, as firmas calculam a sua produção esperada (não no sentido de  $E[Y]$ , mas a que elas acreditam que ocorrerá). O cálculo é feito a partir do nível 2 até o nível  $M$ . As firmas de cada nível calculam a sua produção esperada com base na produção esperada de seus fornecedores, e com isso alocam insumos para a produção de fato.
- A produção das firmas se inicia do nível 1 até o nível  $M$ . Não há estoques.
- No nível  $M$ , o produto é vendido ao consumidor final, que paga por eles. Os pagamentos são realizados pelas firmas de cada nível  $K$  somente depois de terem recebido de seu clientes no nível  $K + 1$ .
- Se os custos excederem a receita, a firma vai à bancarrota, não paga os seus fornecedores no período e fica  $\tau$  períodos sem produzir e sem realizar pagamentos. Depois disso, é substituída por outra firma com uma dada capacidade produtiva inicial. Assim, a quebra de uma firma produz uma interrupção, tanto na cadeia de pagamentos, quanto na cadeia produtiva, sendo estas restabelecidas no período  $t + \tau + 1$ .

Nesse processo, a estrutura de conexões não se altera. Battiston et al. (2007) afirmam que sob essa estrutura de modelo devem ser especificados mecanismos de dinâmica de preços, lucro e patrimônio líquido, por exemplo, mas que, no entanto, alguns resultados

apresentados nesse trabalho independem da especificação desses mecanismos. Portanto, essa estrutura é candidata a ser definidora de uma classe de modelos que compartilham um comportamento similar, em particular, o referente às condições para a ocorrência de avalanches de bancarrotas.

Battiston et al. (2007) dão prosseguimento ao trabalho especificando os seguintes mecanismos:

a) Produção desejada da firma  $i$ :  $Y_i^{(d,K)}$

Depende das ordens recebidas do nível  $K + 1$  até o máximo imposto pela capacidade de produção da firma, dada pela constante  $\theta > 0$  multiplicada pelo valor líquido da firma  $A_i^{(K)}(t)$ .  $\mathbf{O}^{(K,K+1)}$  é a matriz de pedidos descrevendo os pedidos do nível  $K + 1$  para o nível  $K$ . Em notação matricial:

$$\mathbf{Y}^{(d,K)}(t) = \min(\theta \mathbf{A}^{(K)}(t), \mathbf{O}^{(K,K+1)} \mathbf{Y}^{(d,K+1)}(t)) \quad (2.9)$$

b) Produção esperada

$V_i^S$  é o conjunto de fornecedores da firma  $i$ .  $\mathbf{Q}^{(K,K-1)}$  é a matriz insumo-produto que descreve a transformação de insumos do nível  $K - 1$  em produto do nível  $K$ . Cada elemento  $Q_{ij}^{(K,K-1)}$  representa a fração do produto total da firma  $j$  que  $i$  usa na sua produção. Em notação matricial, o produto em qualquer nível pode ser expresso em função do produto do primeiro nível por:

$$\mathbf{Y}^{(e,K)}(t) = \mathbf{Q}^{(K,K-1)}(t) \mathbf{Y}^{(e,K-1)}(t) = \mathbf{Q}^{(K,K-1)}(t) \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}^{(2,1)}(t) \mathbf{Y}^{(e,1)}(t) \quad (2.10)$$

c) Produção efetiva

Pode ser diferente da produção esperada, uma vez que cada firma pode passar por falhas técnicas aleatórias, com probabilidade  $q$ , que resultam na perda de toda a produção do período. Essa falha dura apenas 1 período. Assim, a produção efetiva da firma  $i$  é:

$$Y_i^{(K)}(t) = Y_i^{(e,K)}(t) S_i(t) \quad (2.11)$$

sendo  $S_j(t) = 0$  com probabilidade  $q$  e  $S_j(t) = 1$  com probabilidade  $1 - q$ .

d) Custos de produção

O produto da firma  $i$  é vendido ao cliente ao preço  $P_i(t)$ . Não há estoques. O preço do produto de uma firma no nível  $K$  é dado por  $P_i(t) = P^{(K)}(t) u_i(t)$ , sendo  $P^{(K)}(t)$  o preço genérico do nível  $K$  e  $u_i(t)$  o preço relativo para o produto da firma  $i$ . Assume-se que  $u_i(t)$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $[1 - \delta_p, 1 + \delta_p]$  e independente de  $P^{(K)}(t)$ . O custo da firma  $i$  é dado por:

$$C_i^{(K)}(t) = C_i^{(s,K)}(t) + C_i^{(r,K)}(t) \quad (2.12)$$

sendo  $C_i^{(s,K)}(t)$  o custo dos insumos e  $C_i^{(r,K)}(t)$  o custo de trabalho e instalações, igual à constante  $c_r > 0$  multiplicada pelo produção efetiva.

e) Lucro e bancarrota

Há uma distinção entre a produção entregue pela firma  $i$  a seus clientes ( $Y_i^{(K)}(t)$ ) e a produção pela qual a firma recebeu pagamentos ( $Y_i^{(s,K)}(t)$ ). Se a receita da firma for menor que os custos, ela terá prejuízo, podendo ir à bancarrota e não pagando seus fornecedores. O lucro, em termos reais, é dado pela diferença entre receitas e custos, em termos reais:

$$\pi_i^{(K)}(t) = u_i(t)Y_i^{(s,K)}(t) - C_i^{(K)}(t) \quad (2.13)$$

O valor líquido da firma depende do lucro e da taxa de depreciação  $1 - \rho$ :

$$A_i^{(K)}(t+1) = \rho A_i^{(K)}(t) + \pi_i^{(K)}(t) \quad (2.14)$$

A firma vai à bancarrota se a relação entre o seu lucro e o valor líquido obedecer a:

$$\frac{\pi_i^{(K)}}{A_i^{(K)}} < -\beta \quad (2.15)$$

Sendo:  $0 < \beta < 1$

f) Reação a quebra de firmas

Se um fornecedor  $j$  inesperadamente deixa de atender ao pedido da firma  $i$ , pode ocorrer de  $i$  não conseguir reduzir imediatamente a alocação de trabalho e instalações em resposta a essa redução no recebimento de insumos, o que a leva a sofrer prejuízos.

g) Estratégias para colocação de ordens e entrega

Neste modelo, são consideradas duas possíveis estratégias para a colocação de pedidos e uma para a entrega. Os pedidos podem ser distribuídos uniformemente entre os fornecedores, ou proporcionalmente à capacidade produtiva de cada um. A entrega aos clientes é sempre proporcional ao pedido deles.

Foram executadas simulações com este modelo, sendo obtidas as seguintes características genéricas:

- Correlação espaço-temporal de produto, crescimento e bancarrotas.
- Crescimento exponencial.
- Oscilações do produto agregado *de-trended*.
- Distribuição de tamanho de firmas heterogênea.
- Distribuição de probabilidades do crescimento agregado exponencial (lado direito).

Essas características permitem a reprodução direta de alguns fatos estilizados de dinâmica industrial.

### 2.3.3 Replicação de Fatos Estilizados

Gatti et al. (2007) mostram que um modelo baseado em agentes simples, com agentes heterogêneos financeiramente frágeis, consegue replicar um grande número de fatos estilizados com precisão considerável, de dinâmica industrial a fatos financeiros, de ciclos econômicos a escalagem.

Esse trabalho tem a finalidade de popularizar a abordagem de modelagem econômica baseada em agentes heterogêneos, na qual a macroeconomia é um sistema complexo composto por grande número de agentes heterogêneos que interagem. Partindo de regras individuais muito simples, a interação dos agentes replica regularidades estatísticas em relações macroeconômicas geradas por um processo auto-organizado. São replicados 23 fatos estilizados (ver seção 4.4.1).

Paralelamente à verificação da replicação de fatos estilizados, o trabalho que faz uma avaliação detalhada da validade empírica da hipótese central do modelo, que é a existência de relacionamento de feedback entre o produto das firmas e a instância financeira, mostrando, por meio de análises econométricas, que há evidência de que a posição financeira de uma firma é uma variável-chave na análise do comportamento do produto. Também mostram que o relacionamento da taxa de crescimento das vendas totais sobre o capital total e a razão empréstimos tomados sobre capital total parece ser não-linear.

O modelo utilizado neste trabalho é baseado no utilizado em Gatti et al. (2005).

#### a) Generalidades

O modelo é formado por  $N$  firmas (sendo  $N$  variável com o tempo) e 1 banco. As firmas não são interconectadas, sendo conectadas apenas ao banco por relacionamento de crédito.

#### b) Mercados

São 2: o mercado de bens e o mercado de crédito bancário. No mercado de bens, é negociado o bem homogêneo produzido pelas firmas. O mercado é orientado pela oferta: as firmas vendem toda a sua produção que elas decidem produzir, por otimização, a um preço estocástico, com distribuição uniforme em torno do preço médio de mercado (parâmetro). No mercado de crédito bancário, a oferta é determinada a partir de uma razão-alvo  $\nu$  entre o total de empréstimos a conceder e o patrimônio líquido do banco. Essa razão-alvo é determinada por sua estratégia de gerência de risco do banco ou por determinação prudencial. A oferta de crédito é alocada a cada firma proporcionalmente ao colateral que ela pode oferecer: seu



estoque de capital. A demanda por crédito é calculada pelas firmas individuais. O equilíbrio entre oferta e demanda é obtido mediante a taxa de juros de equilíbrio, calculada para cada firma individualmente,  $r_{it}$ .

c) Entrada e saída de firmas da economia

A saída de firmas ocorre quando não conseguem pagar suas dívidas. A entrada é determinada pelo produto entre uma constante e uma probabilidade, que depende negativamente da taxa média de juros de empréstimo. Isso reflete a idéia de que, com juros mais altos, fica mais difícil a firma honrar seus compromissos.

d) Firmas

O balanço das firmas tem a seguinte identidade:  $L_{it} = A_{it} + L_{it}$ , sendo  $K_{it}$  o capital da firma  $i$  no período  $t$ ,  $A$ , o valor líquido da firma e  $L$  o empréstimo contratado. O valor líquido evolui de acordo com  $A_{it} = A_{it-1} + \pi_{it}$ , sendo  $\pi$  o lucro da firma. Em cada período, a firma quita o empréstimo recebido no período anterior e partindo da necessidade de investimento no período, calcula a sua demanda por empréstimos.

A função de produção da firma  $i$  é linear, dependendo apenas do seu capital  $K_{it}$  e de sua produtividade  $\phi$ , constante e uniforme para todas as firmas:

$$Y_{it} = \phi K_{it} \quad (2.16)$$

Todos os bens produzidos são vendidos a um preço estocástico  $p_{it} = uP_t$ , sendo  $u$  uma extração de uma distribuição uniforme com média 1 e variância finita, e  $P_t$  a média de preços do mercado.

Firmas produzem sem conhecer o preço de venda, podendo ir à bancarrota. Se o preço de venda ficar abaixo de um valor crítico, a firma não consegue honrar seus compromissos e quebra, saindo do mercado.

Para determinar a quantidade a produzir, as firmas maximizam o lucro esperado,  $\Gamma_{it}$ , levando em conta os custos esperados de quebra, e obtêm o estoque de capital ótimo:

$$\max_{K_{it}} \Gamma_{it} = (\phi - gr_{it})K_{it} - \frac{\phi c}{2}(gr_{it}K_{it}^2 - A_{it-1}K_{it}) \quad (2.17)$$

$$K_{it}^d = \frac{\phi - gr_{it}}{c\phi gr_{it}} + \frac{A_{it}}{2gr_{it}} \quad (2.18)$$

Com: constante associada a custos de reaparelhamento  $g > 1$  e custos de bancarrota  $c > 0$

O produto é obtido desse estoque de capital, e o investimento é dado por:

$$I_{it} = K_{it}^d - K_{it} \quad (2.19)$$

Do investimento se calcula a demanda da firma  $i$  por crédito. Como o investimento é financiado pelos ganhos retidos e pela dívida contraída, a demanda por crédito é uma função da taxa líquida de juros e da sua robustez financeira:

$$L_{it}^d = \frac{\phi - gr_{it}}{c\phi gr_{it}} - \pi_{it-1} + \left( \frac{1 - 2gr_{it}}{2gr_{it}} \right) A_{it-1} \quad (2.20)$$

O crédito recebido e a taxa de juros de equilíbrio são calculados pelo banco.

e) Bancos

No mercado de crédito bancário, a oferta  $L_t^s$  é determinada a partir de uma razão-alvo  $\nu$  entre o total de empréstimos a conceder e o patrimônio líquido do banco. A alocação desse montante a cada firma é feita com base no colateral que ela pode oferecer (estoque de capital) e no caixa disponível (valor líquido), utilizável no serviço da dívida:

$$L_{it}^s = \lambda L_t^s \frac{K_{it-1}}{K_{t-1}} + (1 - \lambda) L_t^s \frac{A_{it-1}}{A_{t-1}} \quad (2.21)$$

com:  $K_{t-1} = \sum_{i=1}^{N_{t-1}} K_{it-1}$ ,  $A_{t-1} = \sum_{i=1}^{N_{t-1}} A_{it-1}$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$

A taxa de juros dos empréstimos a cada firma é a que equilibra oferta e demanda por crédito, sendo obtida de:

$$r_{it} = \frac{2 + A_{it-1}}{2cg \left( \frac{1}{\phi c} + \pi_{it-1} + A_{it-1} \right) + 2cg L_t^s [\lambda \kappa_{it-1} + (1 - \lambda) \alpha_{it-1}]} \quad (2.22)$$

Nesse cálculo,  $\kappa_{it}$  e  $\alpha_{it}$  são, respectivamente, as razões entre capital individual e agregado, e entre valor líquido individual e agregado para a firma  $i$ .

Nesta linha de pesquisa, não têm sido abordados o papel da demanda, choques tecnológicos e política monetária.

### 2.3.4 Crescimento Endógeno e Ciclos de Negócios

Dosi et al. (2010) desenvolveram um modelo baseado em agentes de crescimento endógeno e ciclos de negócios e exploram suas propriedades sob diferentes políticas públicas, que impactam oferta, demanda e os fundamentos da economia. O modelo aborda três questões principais:

- É investigado o processo pelo qual inovações tecnológicas afetam macro-variáveis, como taxas de desemprego e, no longo prazo, taxas de crescimento.
- Pergunta-se como essas mudanças endógenas nos fundamentos da economia interagem com as condições da demanda.
- São explorados os efeitos de longo prazo das condições de demanda.

Esse modelo é uma extensão de Dosi et al. (2006) e, da mesma forma, é usado como um laboratório de política no qual podem ser avaliados os efeitos de intervenções públicas alternativas, em diferentes cenários tecno-econômicos, sobre os ciclos de negócio e o crescimento econômico.

Modelos evolucionários, como os propostos inicialmente por Nelson e Winter (1982), são movidos por um núcleo schumpeteriano, com inovação endógena, mas negligenciam em grande medida qualquer influência relacionada à demanda sobre a atividade macroeconômica. Este modelo tem raízes evolucionárias, mas tenta explorar as retroalimentações entre os fatores que influenciam a demanda agregada e os que dirigem a mudança tecnológica. Trata-se de um modelo pós-walrasiano (Colander et al. (2008)), no sentido de não buscar o equilíbrio de mercados e não se basear na hipótese de agente representativo.

O modelo proposto tem a seguinte estrutura:

- A economia possui um setor de produção de máquinas com  $F_1$  firmas, denotadas pelo subscrito  $i$ , um setor de produção de bens de consumo com  $F_2$  firmas, denotadas por  $j$ ,  $L^S$  trabalhadores / consumidores e um setor público.
- As firmas produtoras de bens de capital investem em pesquisa e desenvolvimento, e produzem máquinas heterogêneas.
- Firmas produtoras de bens de consumo combinam máquinas adquiridas nas firmas produtoras dessas máquinas e trabalho para produzir um produto final para os consumidores.
- O setor público arrecada impostos sobre os lucros das firmas e paga benefícios aos desempregados.
- Os retornos incertos dos esforços de pesquisa dos produtores de máquinas provocam impacto ao se difundir pelo setor de produção de bens de consumo.

A linha do tempo do modelo, com as decisões microeconômicas em qualquer período  $t$ , é esta:

- a) Firmas produtoras de máquinas realizam pesquisa e desenvolvimento para descobrir novos produtos e técnicas de produção mais eficientes, ou para imitar a tecnologia e os produtos dos competidores.
- b) Firmas produtoras de máquinas anunciam suas máquinas junto a produtores de bens de consumo.
- c) Firmas produtoras de bens de consumo decidem quanto irão produzir e investir. Se o investimento for positivo, essas firmas escolhem seus fornecedores de máquinas e fazem pedidos.

- d) Nas duas indústrias, as firmas contratam trabalhadores de acordo com seus planos de produção e a iniciam.
- e) O mercado incompletamente competitivo, de bens de consumo, abre. As fatias de mercado de firmas evoluem conforme a competitividade delas, com relação ao preço.
- f) Ocorrem entrada e saída de firmas. Nos dois setores, firmas com fatias de mercado próximas a zero e ativos líquidos negativos saem das duas indústrias e são substituídas por novas firmas.
- g) Máquinas pedidas ao início do período são entregues e se tornam partes do estoque de capital em  $t + 1$ .

A seguir, o comportamento dos agentes é mais detalhado:

a) Indústria de bens de capital

A tecnologia de um firma dessa indústria é especificada por  $(A_i^\tau, B_i^\tau)$ , sendo  $A_i^\tau$  a produtividade do trabalho da máquina produzida por  $i$  para a indústria de bens de consumo, enquanto  $B_i^\tau$  é a produtividade da técnica de produção utilizada pela própria firma  $i$ . O inteiro  $\tau$  indica a geração da tecnologia. Dado o salário  $w$  (em moeda), o custo unitário de produção de firmas produtoras de bens de capital é:

$$c_i(t) = \frac{w(t)}{B_i^\tau} \quad (2.23)$$

Os preços são fixados por regra de *mark-up* simples <sup>5</sup>

$$p_i(t) = (1 + \mu_1)c_i(t) \quad (2.24)$$

O custo unitário de trabalho da produção no setor produtor de bens de consumo, associado a cada máquina da geração  $\tau$ , produzida pela firma  $i$  é:

$$c(A_i^\tau, t) = \frac{w(t)}{A_i^\tau} \quad (2.25)$$

As firmas, na indústria de bens de capital, procuram aumentar suas fatias de mercado e lucros, tentando melhorar sua tecnologia via inovação e imitação. Os processos são custosos: as firmas investem em pesquisa e desenvolvimento uma fração de suas vendas passadas:

$$RD_i(t) = \nu S_i(t - 1) \quad (2.26)$$

com  $0 < \nu < 1$ . Os gastos de pesquisa e desenvolvimento são empregados na contratação de pesquisadores ao salário de mercado  $w(t)$ .

---

<sup>5</sup>Evidência registrada em Fabiani et al. (2006), para a maioria das firmas européias.

As firmas dividem seus esforços de pesquisa e desenvolvimento em inovação e imitação, de acordo com um parâmetro exógeno, obtendo como resultado tecnologias  $A_i^{IN}$  e  $A_i^{IM}$ . Cada firma decide produzir a máquina que apresentar melhor relação preço / eficiência:

$$\min[p_i^h(t) + bc^h(A_i^h, t)], \quad h = \tau, IN, IM \quad (2.27)$$

b) Indústria de bens de consumo

As firmas produtoras de bens de consumo produzem um bem homogêneo usando o estoque de máquinas que possuem e trabalho, sob retornos constantes de escala. Elas planejam sua produção  $Q_j$  de acordo com expectativas adaptativas de demanda  $D_j^e$ , tomadas sobre as demandas passadas dos últimos  $h$  períodos.

$$D_j^e(t) = f(D_j(t-1), \dots, D_j(t-h)) \quad (2.28)$$

O nível desejado de produção depende da demanda esperada e do nível de estoque desejado  $N_j^d(t)$ :

$$Q_j^d(t) = D_j^e(t) + N_j^d(t) - N_j(t-1) \quad (2.29)$$

com:  $N_j^d(t) = \iota D_j^e(t)$ ,  $\iota \in [0, 1]$

Para produzir a quantidade desejada de bens, a firma precisa ter um estoque de máquinas apropriado  $K_j^d(t)$ . Se esse estoque for maior do que o que a firma tem ( $K_j(t)$ ), ela precisará investir  $EI_j^d(t)$  para expandir sua capacidade:

$$EI_j^d(t) = K_j^d(t) - K_j(t) \quad (2.30)$$

Além da necessidade de expansão de estoque, as firmas também precisam repor suas máquinas obsoletas. Para isso, cada firma identifica, entre todas as máquinas de seu estoque, aquelas cujo custo unitário de produção seja significativamente maior do que o custo unitário de produção da melhor máquina nova a que tem acesso. As máquinas que atendem a essa condição também são repostas.

As firmas precisam financiar seus investimentos em máquinas e o pagamento de salários (usualmente feito adiantado, de acordo com trabalhos teóricos e empíricos, como, por exemplo, Greenwald e Stiglitz (1993)). Para isso, elas preferem usar recursos próprios, como seu estoque de ativos líquidos ( $NW_j$ ). Se isto não for suficiente para cobrir os custos de produção, a firma toma um empréstimo externo à taxa de juros  $r$ .

Com base nos seus estoques de máquinas, as firmas produtoras de bens de consumo calculam sua produtividade média ( $\pi_j$ ) e o custo unitário de produção ( $c_j$ ). Os preços são calculados usando um *mark-up* variável  $\mu_j(t)$ , cuja evolução leva em

conta a evolução das fatias de mercado das firmas.

$$\begin{aligned}
 p_j(t) &= (1 + \mu_j(t))c_j(t) \\
 \mu_j(t) &= \mu_j(t-1) \left( 1 + \nu \frac{f_j(t-1) - f_j(t-2)}{f_j(t-2)} \right) \quad 0 \leq \nu \leq 1
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

A fatia de mercado  $f_j(t)$  de cada firma é calculada com base na sua competitividade  $E_j$ , na competitividade média do setor  $\bar{E}(t)$  e na fatia de mercado dela no período anterior:

$$f_j(t) = f_j(t-1) \left( 1 + \chi \frac{E_j(t) - \bar{E}(t)}{\bar{E}(t)} \right) \tag{2.32}$$

com:

$$\begin{aligned}
 E_j(t) &= -\omega_1 p_j(t) - \omega_2 l_j(t) \\
 \bar{E}(t) &= \sum_{j=1}^{F_2} E_j(t) f_j(t-1)
 \end{aligned}$$

$l_j$ : nível da demanda não-atendida no período anterior

$\omega_1, \omega_2, \chi$ : parâmetros positivos

O lucro de cada firma produtora de bens de consumo é dado por:

$$\Pi_j(t) = S_j(t) - c_j(t)Q_j(t) - rDeb_j(t) \tag{2.33}$$

com:

$$\begin{aligned}
 S_j(t) &= p_j(t)D_j(t) \\
 Deb_j &: \text{estoque de dívida da firma } j
 \end{aligned}$$

As escolhas de cada firma e seus lucros determinam a evolução de seus ativos líquidos ( $NW_j$ ):

$$NW_j(t) = NW_j(t-1) + \Pi_j(t) - cl_j(t) \tag{2.34}$$

sendo  $cl_j(t)$  a quantidade de fundos internos empregados pela firma  $j$  para financiar o investimento.

### c) Dinâmica schumpeteriana de entrada e saída

Ao final de cada período, firmas com fatia de mercado quase nula ou ativos líquidos negativos saem do mercado e são substituídas por firmas novas. Seguindo a literatura empírica em entrada de firmas (como, por exemplo Bartelsman et al. (2005)), assume-se que as novas firmas (em qualquer um dos dois setores) são menores do

que as que saíram, em termos de estoques médios. No que se refere à tecnologia das firmas que estão entrando, as novas firmas selecionam a sua tecnologia entre as gerações mais atuais das máquinas das firmas já existentes.

d) Mercado de trabalho

A demanda agregada por trabalho ( $L^D$ ) é a soma das demandas por trabalho das firmas dos dois setores. A oferta de trabalho ( $L^S$ ) é exógena e inelástica. O emprego agregado é o mínimo entre ( $L^D$ ) e ( $L^S$ ).

O salário é determinado por fatores institucionais e de mercado, com mecanismos de indexação sobre preços de consumo e produtividade média, por um lado, e ajustes a taxas de desemprego, por outro:

$$w(t) = w(t-1) + \left( 1 + \psi_1 \frac{\Delta \overline{AB}(t)}{\overline{AB}(t-1)} + \psi_2 \frac{\Delta cpi(t)}{cpi(t-1)} + \psi_3 \frac{\Delta U(t)}{U(t-1)} \right) \quad (2.35)$$

Sendo  $\overline{AB}$  a produtividade média do trabalho,  $cpi$  o índice de preços do consumidor,  $U$  a taxa de desemprego, e  $\psi_{1,2,3}$  parâmetros da simulação.

e) Consumo, impostos e gastos públicos

O setor público arrecada impostos sobre lucros de firmas e salários dos empregados e paga um subsídio  $w^u$  aos trabalhadores desempregados, que é uma fração do salário atual de mercado, isto é,  $w^u(t) = \varphi w(t)$ ,  $\varphi \in (0, 1)$ .

O consumo agregado  $C$  é a soma da renda de trabalhadores empregados e desempregados:

$$C(t) = w(t)L^D(t) + w^u(L^S - L^D(t)) \quad (2.36)$$

O modelo satisfaz às identidades de contabilidade nacional: a soma dos valores adicionados dos bens de capital e de consumo ( $Y$ ) é igual à produção agregada da economia, já que, neste modelo, não há bens intermediários. Isso é igual à soma do consumo, investimento e variação agregada de estoques ( $\Delta N$ ):

$$\sum_{i=1}^{F_1} Q_i(t) + \sum_{j=1}^{F_2} Q_j(t) = Y(t) + I(t) + \Delta N(t) \quad (2.37)$$

Os resultados das simulações lançam questionamentos sobre a dicotomia entre variáveis que impactam o longo prazo (tipicamente, mudanças relacionadas à tecnologia) e variáveis com efeito de curto prazo (variáveis relacionadas à demanda). Esses resultados mostram, por um lado, que as inovações tecnológicas parecem exercer seus efeitos em todas as freqüências, no curto e no longo prazo. Por outro lado, mostram que políticas keynesianas de gerenciamento de demanda não só contribuem para reduzir a volatilidade do produto e a taxa de desemprego no curto prazo, mas também afetam taxas de crescimento de longo

prazo, ao mesmo tempo em que contribuem para libertar a economia de uma trajetória de crescimento com estagnação, que é um dos possíveis estados meta-estáveis que emergem no modelo.



### 3 Descrição do Modelo

A apresentação do modelo desenvolvido neste trabalho será feita através de um detalhamento progressivo. Inicialmente, a economia será apresentada como um organismo composto pelos seus setores: o setor produtivo (firmas), o setor bancário, os trabalhadores / consumidores (famílias), o setor público e o grupo de investidores. Os setores interagem em duas camadas: a camada dos fluxos reais (de bens) e a de fluxos monetários. Em seguida, cada tipo de agente será apresentado no seu contexto, isto é, são listadas os seus comportamentos que envolvem interação e o impacto desses comportamentos nos fluxos reais e monetários. Por fim, o modelo é detalhado.

A possibilidade de organizar o modelo em sistemas de agentes unidos por fluxos sugere a análise destes dois aspectos:

- Intensidade
- Sustentabilidade

De forma geral, pode-se dizer que a intensidade dos fluxos, principalmente o fluxo real, é indicadora da vitalidade, isto é, do nível de atividade da economia. Por sua vez, a sustentabilidade está relacionada à existência do organismo econômico no longo prazo. A intensidade é relacionada ao crescimento da economia, enquanto a sustentabilidade é relacionada à ocorrência de crises, que podem impedir a continuidade dos fluxos em seus níveis originais. Os dois mecanismos seguintes podem dificultar ou impedir a ocorrência de crises:

- a) O equilíbrio absoluto, isto é, todas as variáveis que determinam cada fluxo têm valores tais que nenhuma variável de estado se altera ao longo do tempo. Isso requer que não ocorra nenhuma perturbação no sistema, o que é utópico.
- b) Um mecanismo de restauração do equilíbrio associado à existência de estoques de tamanho suficiente para assegurar o processo circulatório durante os transientes provocados por choques sofridos pelo sistema. Esses estoques seriam, basicamente, valores em caixa de firmas e bancos, valores em caixa nas reservas de socorro e

estoques de produtos. Por outro lado, o mecanismo de restauração do equilíbrio está associado às regras de comportamento dos agentes da economia<sup>1</sup>.

Essa abordagem está em linha com a proposta por Foster (2011), que sugere que a representação de sistemas econômicos por fluxos e estoques de energia e conhecimento são um caminho para a estruturação de modelos macroeconômicos adequados. Esse enfoque pode ser útil na análise de propagação de crises e na modelagem de sistemas econômicos submetidos a restrições impostas pelo meio ambiente.

### 3.1 Descrição Geral

Inicialmente, é apresentada uma visão geral do modelo como um todo. Nesse modelo, o tempo transcorre em períodos nos quais existe uma seqüência rotineira de eventos. Essa seqüência de eventos (linha do tempo), será detalhada adiante. Os agentes e os papéis que desempenham no modelo são estes:

*Firmas:* são responsáveis pela produção de bens da economia, a partir de insumos produzidos por outras firmas e trabalho. Os bens produzidos são colocados em estoque e podem ser vendidos para outras firmas, consumidores e governo. Os bens não-vendidos permanecem em estoque até o período seguinte. As firmas pagam salário (fixo<sup>2</sup>, por unidade de trabalho) e custos fixos às famílias. Os custos fixos podem ser entendidos como alugueis, por exemplo. Os lucros das firmas são inteiramente pagos como dividendos para os investidores, de modo que a firma não acumula ativos financeiros<sup>3</sup>. Cada firma obrigatoriamente deposita o seu caixa

---

<sup>1</sup>Esse mecanismo funcionaria se o mapa associado à evolução do estado do modelo de um período para o período seguinte fosse uma contração. Isto requer também que os comportamentos dos agentes não tenham descontinuidades.

<sup>2</sup>Neste modelo, o salário é o numerário. Assume-se também que são rígidos, isto é, condições de oferta e demanda no mercado de trabalho não afetam seu valor.

<sup>3</sup>Esta simplificação foi adotada com a finalidade de manter a quantidade de moeda em circulação aproximadamente constante. Isso ocorre porque os lucros são pagos às famílias sob a forma de dividendos, o que devolve a elas a parcela da receita de vendas das firmas não gasta na compra de insumos. Se as firmas mantivessem em caixa uma parte dos lucros, uma parcela crescente da base monetária sairia de circulação, levando a economia a diminuir de tamanho ao longo do tempo até paralisar suas atividades. Para visualizar como isso acontece (supondo que a economia não tenha governo, embora a presença dele não altere os resultados), suponha-se que a economia esteja inicialmente em equilíbrio, produzindo na condição de demanda efetiva: toda a produção é vendida, e a totalidade da renda das famílias (salários, dividendos e custos fixos) é gasta em consumo. Em um dado período, as firmas decidem reter uma parte dos lucros, reduzindo os dividendos pagos. Como a renda das famílias é reduzida, a demanda diminui, o que é acompanhado pelo nível de emprego, resultando em queda no total de salários recebidos pelas famílias, com posterior queda na demanda, realimentando o ciclo. Por outro lado, a redução de preços por todas as firmas, visando manter a demanda constante não surte efeito, pois os salários são fixos, o que leva à redução dos lucros, que podem, inclusive, se tornarem negativos. Assim sendo, para que firmas possam reter parte dos lucros, o valor retido precisa ser utilizado em investimento que resulte em produção, por exemplo, compra de equipamentos, de modo que a queda na demanda das famílias seja compensada pelo surgimento de demanda motivada pelo investimento, o que mantém o nível de emprego e possibilita a manutenção do equilíbrio. O tratamento desse problema de poupança-investimento está sendo implementado neste modelo, daí a hipótese de firmas sem retenção de lucros.

em um banco, do qual pode solicitar empréstimos, que podem ser renováveis. As operações de compra de insumos das firmas são financiadas via crédito comercial, isto é, as firmas não precisam efetuar os pagamentos dos insumos adquiridos ao recebê-los, podendo aguardar o recebimento dos demais pagamentos para então realizar os pagamentos. Esses pagamentos são efetivados ao final de cada período por ocasião da compensação de pagamentos. Por fim, as firmas pagam imposto sobre o lucro previsto, para cada bem produzido.

*Bancos:* são responsáveis por prover liquidez para a economia, através de operações de crédito, e são agentes de pagamentos das firmas. O papel de agente de pagamentos consiste em ser o intermediário executor de cada pagamento (ou recebimento das firmas). Os pagamentos ou recebimentos podem envolver uma firma e um agente não-correntista do banco, como as famílias ou o governo. As operações de crédito podem ser de crédito bancário ou interbancário. O interbancário é solicitado por bancos que necessitem de reservas para fazer frente às operações de crédito bancário concedidas, respeitando-se o requerimento de reservas. No caso do crédito bancário, é respeitado o requerimento de capital. Os bancos, como as firmas, pagam imposto sobre o lucro auferido e pagam o restante do lucro aos investidores, a título de dividendos.

*Famílias:* são os trabalhadores / consumidores da economia. Fornecem o trabalho demandado pelas firmas em troca de salário. Também recebem das firmas o pagamento de custos fixos e, eventualmente, recebem transferências de recursos dos investidores destinados ao consumo. Do total recebido, as famílias pagam imposto ao governo e procuram gastar todo o restante em consumo (não há poupança voluntária).

*Governo:* arrecada tributos e os destinam integralmente ao consumo. Neste modelo, o governo não emprega trabalhadores, não produz bens públicos e não inclui uma autoridade monetária<sup>4</sup>. A simulação pode ser parametrizada para que o governo socorra firmas e bancos em dificuldades<sup>5</sup>. Nesse caso, o governo constitui reservas de socorro separadas para firmas e bancos, de onde são extraídos recursos para a realização de aportes para esses agentes. Em cada período, o total dos aportes para os agentes de cada tipo não pode exceder o valor dos recursos disponíveis na reserva correspondente. Caso exceda, os aportes a cada agente com necessidade são realizados de modo proporcional. Depois de realizados os aportes, o governo reconstitui as reservas com recursos provenientes da receita de arrecadação

---

<sup>4</sup>Neste modelo, eventuais intervenções de política monetária são realizadas de maneira exógena. A inclusão de um agente com o papel de autoridade monetária está além do escopo deste trabalho.

<sup>5</sup>A simulação é parametrizada para que, ou o governo socorra firmas e bancos em dificuldades, mediante aportes, ou os investidores aportem recursos a firmas e bancos com problemas de liquidez. O tratamento dado, nos dois casos, é aproximadamente o mesmo.

de tributos e destina o restante da arrecadação ao consumo. Neste modelo, o comportamento do governo ao socorrer firmas é idêntico ao dos investidores, e usa a mesma estrutura. As diferenças entre os dois comportamentos são estas: 1) o governo usualmente consegue reconstituir as reservas com mais facilidade do que o grupo de investidores (a arrecadação de tributos é superior ao total de dividendos recebidos), e 2) a simulação pode ser parametrizada para que o governo dê preferência a determinados agentes em caso de insuficiência de recursos.

*Grupo de investidores:* são um subgrupo das famílias que recebe dividendos das firmas e bancos e procura mantê-los em condições de operação mediante aportes aos agentes com problemas de liquidez. Este modelo não implementa plenamente o conceito de propriedade privada, assim sendo, todas as firmas e bancos são de propriedade do grupo e recebem aportes indistintamente conforme tenham necessidade. Esses aportes são provenientes de reservas constituídas pelos investidores com essa finalidade. O mecanismo de realização de aportes e manutenção das reservas no nível definido ao início da simulação é o mesmo adotado na modelagem do governo, com a diferença de que os recursos utilizados na reconstituição do nível das reservas é proveniente dos dividendos recebidos de firmas e bancos. Os dividendos recebidos de firmas são utilizados somente na reconstituição da reserva para a manutenção de firmas, o mesmo princípio valendo para os bancos. Do mesmo modo do que no caso do governo, o valor dos dividendos não-utilizado na reconstituição das reservas é destinado ao consumo (isto é, repassado às famílias, que o utilizarão em consumo).

*Sistema de pagamentos:* o sistema de pagamentos é uma instituição financeira que compensa os pagamentos do sistema no período. Os pagamentos dos bancos são compensados condicionalmente à disponibilidade das firmas, e os pagamentos das firmas são compensados condicionalmente à disponibilidade dos bancos.

*Mercados:* São os seguintes: mercados de bens, de crédito comercial, de trabalho, de crédito bancário e de crédito interbancário. No mercado de bens, o preço de cada bem e a demanda são previamente determinados por firmas e agentes consumidores. Se o estoque da firma não for suficiente para atender a demanda, o atendimento é proporcional à demanda de cada agente. No mercado de crédito comercial, o valor solicitado é sempre atendido, e a taxa de juros é determinada previamente. No mercado de trabalho, as demandas por trabalhadores das firmas são completamente atendidas se o número total de trabalhadores demandados não for superior à quantidade de mão-de-obra disponível na economia, caso contrário, são atendidas de modo proporcional. No mercado de crédito bancário, as taxas de juros e os tetos a serem emprestados, tanto por limitação da firma devedora, quanto por requerimento de capital do banco prestador, são determinados pelos bancos. Se o valor que o banco pode emprestar for inferior à soma das demandas aprovadas (dentro do

limite) de seus correntistas, o empréstimo é concedido de maneira proporcional. Por fim, o mercado interbancário parte da definição dos participantes em cada ponta: os solicitantes de crédito e os cedentes. Cada tomador faz uma pesquisa de taxas de juros entre um dado (parâmetro) número de emprestadores e demanda crédito inicialmente aos que cobram menor taxa de juros. Caso a demanda não seja completamente atendida, passa para o segundo da lista, e assim por diante, até a demanda ser totalmente atendida ou a lista de possíveis emprestadores se esgotar.

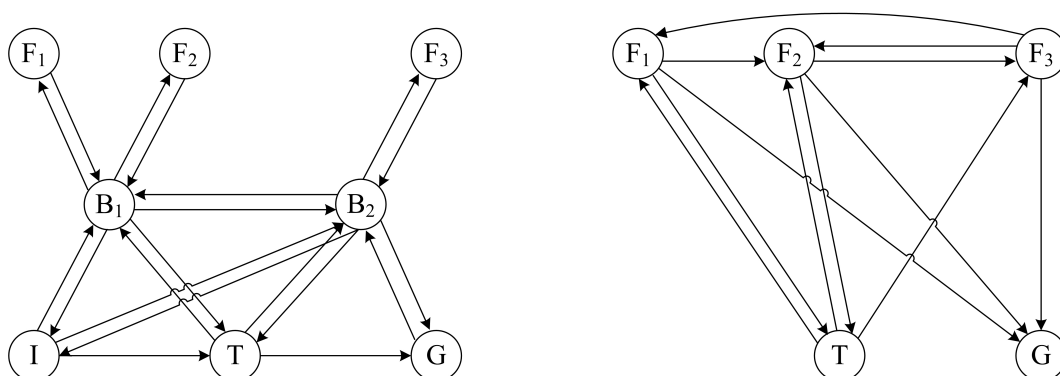


Figura 3.1: Visão geral do modelo de uma economia com 3 firmas e 2 bancos: fluxos nominais (esq) e fluxos reais (dir)

A figura 3.1 mostra uma economia com 3 firmas, 2 bancos, trabalhadores consumidores (famílias), governo e o grupo de investidores. Esses agentes interagem dando origem a fluxos financeiros e de bens.

A figura 3.1 (dir) mostra o fornecimento de trabalho para as três firmas e o consumo, pelas famílias, de bens das firmas  $F_1$  e  $F_2$ . O governo consome os bens das três firmas e a firma  $F_2$  utiliza, como insumo, bens produzidos pelas outras duas firmas, enquanto a firma  $F_1$  utiliza como insumo o produto de  $F_3$ , e  $F_3$  usa como insumo o bem produzido por  $F_2$ .

Essas relações de consumo de bens e trabalho são representadas, na figura 3.1 (esq), pelos fluxos financeiros correspondentes. Como as firmas são correntistas dos bancos, os pagamentos e recebimentos delas são executados pelos bancos. No caso das operações entre  $F_1$  e  $F_2$ , ocorrem transferências de saldos de contas-correntes no mesmo banco; para operações entre as firmas  $F_1$  ou  $F_2$  e  $F_3$ , ocorrem transferências interbancárias. Pagamentos ou recebimentos de firmas a consumidores, governo e investidores ocorrem através de saques ou depósitos por esses agentes. Por fim, neste modelo, o recolhimento de impostos de renda das famílias e a destinação ao consumo de excedentes de reconstituição de reservas de socorro ocorrem fora do sistema bancário, uma vez que esses agentes não são correntistas.

### 3.2 Interações por Tipo de Agente

A seguir, são apresentadas, para cada agente da economia, as operações que realizam, os fluxos associados a elas e as equações de evolução do saldo em caixa (estoque monetário) desses agentes, a partir das quais se pode verificar se estão em equilíbrio dinâmico. Como dito anteriormente, se os agentes são sujeitos a choques, as igualdades não irão acontecer, mas devem existir um mecanismo de restauração das mesmas.

#### a) Fluxos e estoque monetário de firmas

As operações realizadas pelas firmas e os fluxos monetários e de bens associados são apresentados na figura 3.2. No diagrama de fluxos nominais (monetários), os fluxos são desenhados entre a firma  $F_1$  e as suas contrapartes nas operações. Todos os pagamentos são realizados por intermédio do banco  $B_1$ , mas isso não é representado na figura. O fluxo entre a firma  $F_1$  e o banco  $B_1$  apresentado se refere a operações de crédito bancário e remuneração de depósitos, que são operações nas quais o banco é contraparte da firma.

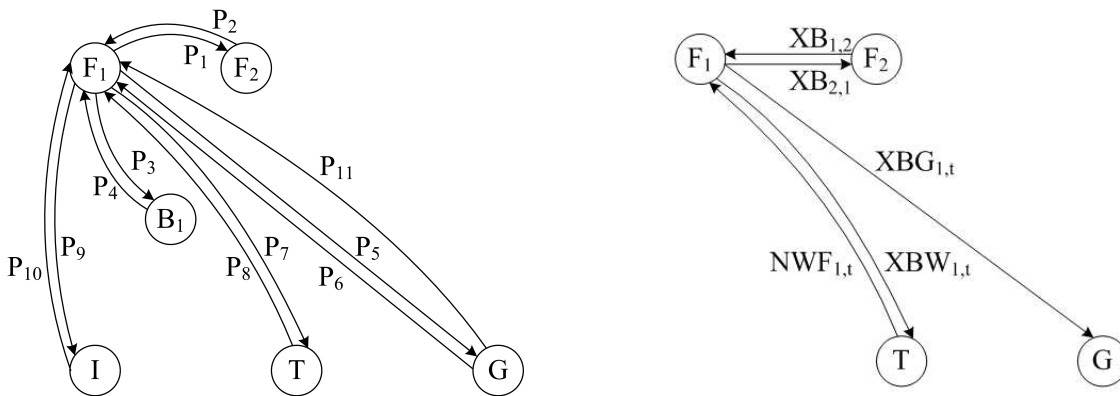


Figura 3.2: Fluxos nominais e fluxos reais associados a uma firma: fluxos nominais (esq) e fluxos reais (dir). No diagrama de fluxos reais,  $XB_{i,j}$  é a quantidade do produto  $j$  comprado pela firma  $i$ ,  $XBW_{i,t}$  é a quantidade de produto  $i$  comprada pelas famílias no período  $t$ ,  $XBG_{i,t}$  é a quantidade de produto  $i$  comprada pelo governo, e  $NWF_{i,t}$  é o número de empregados da firma  $i$ .

As operações realizadas pela firma  $F_1$  e representadas nesta figura são:

- Produção, incluindo compra de insumos da firma  $F_1$ , contratação de empregados, pagamento de salários e de custos fixos.
- Vendas de produtos à firma  $F_2$ , consumidores e governo.
- Recebimento de juros sobre valores depositados em conta-corrente no banco.
- Gerenciamento de empréstimos bancários: definição de valor demandado, contratação, pagamento de juros e amortizações.
- Pagamento de impostos.
- Pagamento de dividendos.

- Recebimento de aportes.
- Tratamento de perdas.

Os pagamentos relacionados a essas operações são representados na figura 3.2 (dir):

- $P_1$  Pagamento à firma  $F_2$  pela compra de insumo ( $XB_{1,2}$ ).
- $P_2$  Recebimento da firma  $F_2$  pela venda de produto ( $XB_{2,1}$ ).
- $P_3$  Pagamento de juros de empréstimo bancário + amortizações.
- $P_4$  Recebimento de juros de depósitos + crédito adicional.
- $P_5$  Impostos pagos
- $P_6$  Recebimento referente a vendas ao governo ( $XBG_{1,t}$ ).
- $P_7$  Salários + custos fixos.
- $P_8$  Recebimento por vendas ao consumidor ( $XBW_{1,t}$ ).
- $P_9$  Dividendos pagos.
- $P_{10}$  Aportes recebidos de investidores.
- $P_{11}$  Aportes recebidos do governo.

A evolução do saldo em caixa da firma  $i$ ,  $FC_{i,t}$ , é dada por<sup>6</sup>:

$$FC_{i,t+1} = FC_{i,t} + TNPF_{i,t} + P_2 + P_4 + P_6 + P_8 + P_{10} + P_{11} - TNRF_{i,t} - P_1 - P_3 - P_5 - P_7 - P_9 \quad (3.1)$$

b) Fluxos e estoque monetário de bancos

As operações realizadas pelos bancos e os fluxos monetários correspondentes são apresentados na figura 3.3. Nesse gráfico, estão representados os fluxos originados por operações conduzidas pelo banco  $B_1$  e pela firma  $F_1$ . Essas operações envolvem somente fluxos financeiros e englobam os pagamentos e recebimentos da firma  $F_1$ , uma vez que o banco é depositário e agente de pagamento dessa firma, portanto, executar pagamentos da firma  $F_1$  são operações do banco  $B_1$ .

As operações realizadas pelo banco  $B_1$  e representadas nesta figura são:

- Gerenciamento de empréstimos bancários, compreendendo: verificação de disponibilidade de recursos para concessão de crédito; verificação de limites de cada firma; alocação de recursos a cada firma demandante de crédito via mercado de crédito; crédito em conta-corrente dos valores emprestados, e recebimento de juros e amortizações.
- Gerenciamento de empréstimos interbancários, envolvendo: recebimento de juros e devolução de principal de operações vincendas; verificação de posição tomadora ou emprestadora para participação no mercado; alocação de recursos via mercado de crédito interbancário, e transferências de valores a pagar e a receber, de principal e juros, ao início e término das operações.

---

<sup>6</sup> $TNPF_{i,t}$  e  $TNRF_{i,t}$  são valores não-pagos e não-recebidos devidos a *default*

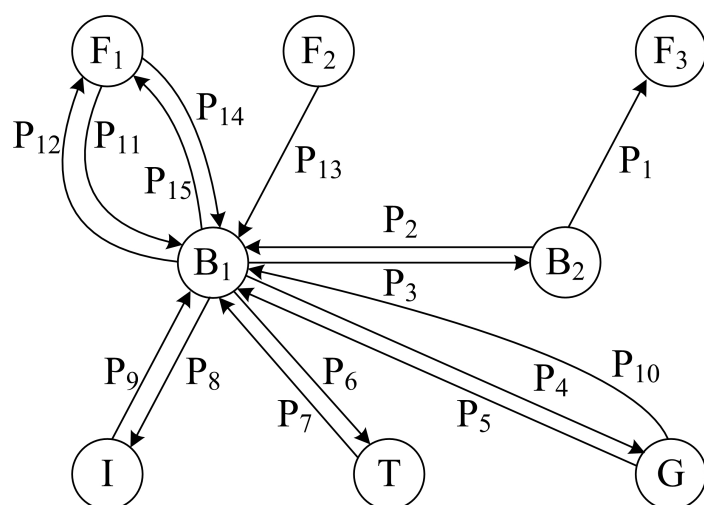


Figura 3.3: Fluxos nominais associados a um banco

- Pagamento de juros sobre o saldos em conta-corrente das firmas correntistas.
- Crédito de valores recebidos pelas firmas em conta-corrente, referentes a: vendas de produtos e a aportes recebidos.
- Débito em conta-corrente de valores pagos pelas firmas, referentes a: compras de outras firmas, salários e custos fixos pagos, impostos e dividendos.
- Pagamentos a agentes externos, referentes a operações de firmas: salários, custos fixos, impostos e dividendos.
- Recebimentos de agentes externos, referentes a operações de firmas: vendas a consumidores e governo, e recebimento de aportes.
- Pagamento de impostos.
- Pagamento de dividendos.
- Recebimento de aportes.
- Tratamento de perdas.

Os pagamentos relacionados a essas operações são representados na figura 3.2 (dir). Os fluxos entre os bancos e as firmas são movimentações em conta-corrente:

- $P_1$  Recebimento da firma  $F_3$  de valor pago pela firma  $F_1$  por compra de insumos.
- $P_2$  Pagamento de principal e juros pelo banco  $B_2$  ao término de operação de empréstimo interbancário.
- $P_3$  Pagamento referente ao início de operação de empréstimo interbancário concedido pelo banco  $B_1$  ao banco  $B_2$  + pagamento da firma  $F_1$  à firma  $F_3$  (compra de insumos).
- $P_4$  Pagamento, ao governo, de impostos devidos pela firma  $F_1$  e pelo banco  $B_1$ .
- $P_5$  Pagamento, pelo governo, de valor referente à compra de produto da firma  $F_1$ .
- $P_6$  Pagamento de salários e custos fixos da firma  $F_1$  às famílias.
- $P_7$  Pagamento, pelas famílias, de valor referente à compra de produto da firma  $F_1$ .



- $P_8$  Dividendos pagos pela firma  $F_1$  e pelo banco  $B_1$ .
- $P_9$  Aportes à firma  $F_1$  e ao banco  $B_1$ , recebidos de investidores.
- $P_{10}$  Aportes à firma  $F_1$  e ao banco  $B_1$ , recebidos do governo.
- $P_{11}$  Compra de insumos da firma  $F_3$  + salários + custos fixos.
- $P_{12}$  Recebimento, pela firma  $F_1$ , referente à venda de produto à firma  $F_2$ , ao governo, e aos consumidores, e recebimento de aporte.
- $P_{13}$  Pagamento pela compra de produto da firma  $F_1$ .
- $P_{14}$  Pagamento de juros de empréstimos bancários + amortizações.
- $P_{15}$  Pagamento (concessão) de empréstimo bancário adicional + pagamento de juros de depósitos.

Deve-se calcular a evolução do saldo de excedentes de reservas do banco, dada por  $ER_{b,t} = FCB_{b,t} - \delta FDE_{b,t}$ , sendo  $FCB$  o saldo em caixa do banco  $b$  e  $FDE$  a soma dos depósitos em conta-corrente do banco. Como o saldo em conta-corrente das firmas já foi calculado, basta calcular a evolução do saldo em caixa do banco  $b^7$ :

$$FCB_{b,t+1} = FCB_{b,t} + VNP_b + P_2 + P_5 + P_7 + P_9 + P_{10} - VNR_b - P_3 - P_4 - P_6 - P_8 \quad (3.2)$$

c) Fluxos e estoque monetário do governo

As operações realizadas pelo governo e os fluxos monetários correspondentes são apresentados na figura 3.4. Essas operações se referem à arrecadação de tributos e gasto do valor arrecadado em consumo. O fluxo de bens não é representado na figura.

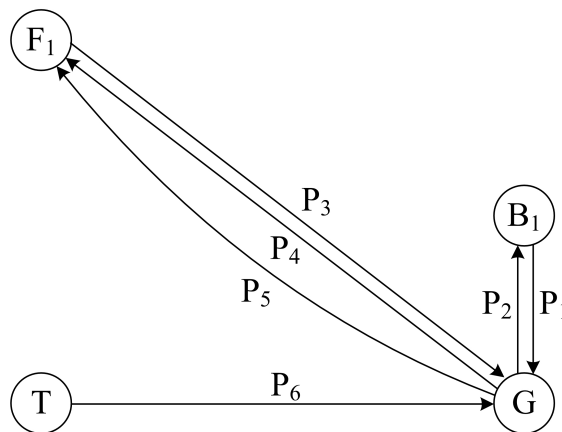


Figura 3.4: Fluxos nominais associados ao governo

As operações realizadas pelo governo e representadas nesta figura são:

---

<sup>7</sup> $VNP_b$  e  $VNR_b$  são valores não-pagos e não-recebidos pelo banco  $b$  devidos a *default*

- Recebimento de impostos das famílias, das firmas e dos bancos.
- Consumo de bens.
- Aporte de recursos à firma  $F_1$  e ao banco  $B_1$ .

Os pagamentos relacionados a essas operações são representados na figura 3.2 (dir):

- $P_1$  Recebimento de impostos do banco  $B_1$ .
- $P_2$  Aporte de recursos ao banco  $B_1$ .
- $P_3$  Recebimento de impostos da firma  $F_1$ .
- $P_4$  Pagamento: compra de produtos de  $F_1$ .
- $P_5$  Aporte de recursos à firma  $F_1$ .
- $P_6$  Recebimento de imposto de renda: famílias.

A evolução do saldo em caixa,  $FCG_t$ , é dada por<sup>8</sup>:

$$FCG_{t+1} = FCG_t + P_1 + P_3 + P_6 - P_2 - P_4 - P_5 - TGD_t - TGNP_t + TGD_{t-1} \quad (3.3)$$

O saldo de cada reserva de socorro (firmas,  $TRBF_t$ , e bancos,  $TRBB_t$ ), quando a simulação está parametrizada para que o governo realize aportes de socorro às firmas, evolui de forma separada, da seguinte forma<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} TAF_t &= \sum_i FAA_{i,t+1} \\ TAB_t &= \sum_b FAAB_{b,t+1} \\ TRBF_{t+1} &= \min \left( TRBF_1, TRBF_t - TAF_t + FCG_t \frac{TAF_t}{TAF_t + TAB_t} \right) \\ TRBB_{t+1} &= \min \left( TRBB_1, TRBB_t - TAB_t + FCG_t \frac{TAB_t}{TAF_t + TAB_t} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

d) Fluxos e estoque monetário das famílias

As operações realizadas pelas famílias e os fluxos monetários correspondentes são apresentados na figura 3.5. Essas operações se referem ao recebimento de salários, custos fixos e de excedentes de dividendos não-utilizado na reconstituição de reservas de socorro, e destinação desse valor ao consumo. Os fluxos de bens e trabalho não são representados na figura.

As operações realizadas pelas famílias e representadas nesta figura são:

- Trabalho (firma  $F_1$ ).
- Recebimento de salários e custos fixos (aluguéis, *royalties*).

<sup>8</sup>O valor  $TGD_t + TGNP_t - TGD_{t-1}$  é o total de valores não-recebidos devidos a *default*

<sup>9</sup> $FCG_t$  é o saldo em caixa do governo ao final do período  $t$ , e  $TAF_t$  e  $TAB_t$  são os valores dos aportes realizados ao início de  $t + 1$  com os recursos das reservas em  $t$

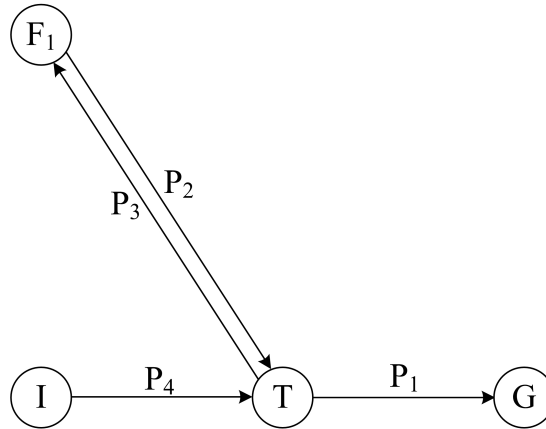


Figura 3.5: Fluxos nominais associados às famílias

- Trabalho (firma  $F_1$ ).
- Recebimento de excedentes dos dividendos pagos por firmas e bancos não-utilizados em reconstituição de reservas de socorro.
- Consumo de bens.

Os pagamentos relacionados a essas operações são representados na figura 3.2 (dir):

$P_1$  Pagamento de imposto de renda.

$P_2$  Recebimento de salários e custos fixos.

$P_3$  Pagamento: compra de produtos de  $F_1$ .

$P_4$  Recebimento de excedentes dos dividendos pagos por firmas e bancos.

A evolução do saldo em caixa,  $FCW_t$ , é dada por<sup>10</sup>:

$$FCW_{t+1} = FCW_t + P_2 + P_4 - P_1 - P_3 - TWD_t - TWNP_t + TWD_{t-1} - TFXCD_t - TFXCNP_t + TFXCD_{t-1} \quad (3.5)$$

e) Fluxos e estoque monetário do grupo de investidores

As operações realizadas pelos investidores e os fluxos monetários correspondentes são apresentados na figura 3.6. Essas operações se referem ao recebimento de dividendos de firmas e bancos, e à utilização de reservas de socorro na realização de aportes a firmas e bancos com problemas de liquidez. Após a realização dos aportes, os saldos das reservas de socorro são recompostos utilizando-se os valores de dividendos recebidos. O valor não-utilizado na recomposição é destinado ao consumo.

As operações realizadas pelos investidores e representadas nesta figura são:

<sup>10</sup>O valor  $TWD_t + TWNP_t - TWD_{t-1} + TFXCD_t + TFXCNP_t - TFXCD_{t-1}$  é o total de valores não-recebidos devidos a *default*

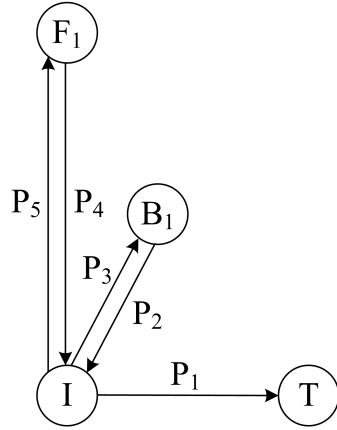


Figura 3.6: Fluxos nominais associados aos investidores

- Recebimento de dividendos (firma  $F_1$  e banco  $B_1$ ).
- Aporte de recursos à firma  $F_1$  e ao banco  $B_1$ .
- Destinação do excedente do valor recebido de dividendos não-utilizado na reconstituição de reservas de socorro ao consumo.
- Reconstituição de reservas de socorro, após aportes até o montante que possuem ao início da simulação.
- Consumo de bens.

Os pagamentos relacionados a essas operações são representados na figura 3.2 (dir):

- $P_1$  Destinação do excedente do valor recebido de dividendos não-utilizado na reconstituição de reservas de socorro ao consumo.
- $P_2$  Recebimento de dividendos do banco  $B_1$ .
- $P_3$  Aporte de recursos ao banco  $B_1$ .
- $P_4$  Recebimento de dividendos da firma  $F_1$ .
- $P_5$  Aporte de recursos à firma  $F_1$ .

O saldo em caixa dos investidores,  $FCI_t$ , sempre é igual a zero, pois valores de dividendos recebidos não-utilizados na recomposição de reservas de socorro são destinados ao consumo. O saldo de cada reserva de socorro (firmas,  $TRBF_t$ , e bancos,  $TRBB_t$ ) evolui de forma separada, da seguinte forma<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned}
 TAF_t &= \sum_i FAA_{i,t+1} \\
 TAB_t &= \sum_b FAAB_{b,t+1} \\
 TRBF_{t+1} &= \min(TRBF_1, TRBF_t - TAF_t + FDF_t) \\
 TRBB_{t+1} &= \min(TRBB_1, TRBB_t - TAB_t + FDB_t)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

<sup>11</sup> $FDF_t$  e  $FDB_t$  são os valores dos dividendos recebidos ao final do período  $t$ , e  $TAF_t$  e  $TAB_t$  são os valores dos aportes realizados ao início de  $t + 1$  com os recursos das reservas em  $t$

Definido o contexto de atuação de cada agente, tanto as operações que motivam as interações, quanto os fluxos monetários e de bens associados, será feita uma apresentação mais detalhada do modelo desenvolvido.

### **3.3 Linha do Tempo do Modelo**

Inicialmente, será apresentada a linha do tempo do modelo, com a seqüência de eventos de um período. Em seguida, serão detalhados tópicos de interesse relacionados ao modelo.

- Famílias e governo demandam bens às firmas
- Firms definem taxas de empréstimo - crédito comercial
- Bancos definem taxa de empréstimo - crédito bancário
- Firms definem meta de produção para o período e definem demandas
- Mercado de bens: bens são negociados
- Firms demandam crédito bancário
- Mercado de crédito bancário: alocação de crédito pelos bancos
- Bancos remuneram depósitos das firmas em conta-corrente
- Bancos se posicionam demandando ou ofertando crédito interbancário
- Bancos definem taxa de empréstimo - crédito interbancário
- Mercado interbancário: negociação
- Mercado de trabalho: alocação de empregados
- Produção
- Definição de preços dos bens no período seguinte
- Compensação dos pagamentos
- Recolhimento de imposto de renda das famílias
- Apuração de resultado e pagamento de dividendos: firmas
- Apuração de resultado e pagamento de dividendos: bancos
- Intervenções em firmas
- Intervenções em bancos
- Recomposição de reservas de socorro (firmas+bancos)

### 3.4 Redes Heterogêneas de Firmas: Impacto no Modelo

Na definição deste modelo, um aspecto central é o de que as firmas são interconectadas em redes heterogêneas. A interligação dessas firmas tem a estrutura empregada por Acemoglu et al. (2010), que estrutura as firmas em redes heterogêneas e utiliza funções de produção e preferências Cobb-Douglas <sup>12</sup>.

A estruturação da cadeia produtiva em redes heterogêneas, num contexto de informação limitada, obriga que, no processo produtivo, os insumos a serem adquiridos tenham sido produzidos em períodos anteriores, o que não permite que se considere que um ciclo produtivo se inicia com a aquisição de insumos e termina com a conclusão da venda dos produtos, seguida pela apuração de resultados. Isto deixa de acontecer, pois a venda dos produtos e compra dos insumos se dão na mesma operação, na qual o produtor de um período vende insumos ao produtor do período seguinte. Devido a isso, a apuração do resultado é feita após a produção, e antes das vendas, quando não se sabe se toda a produção será vendida. Na prática, é isso o que ocorre nas firmas.

O principal objetivo da implementação desse mecanismo é reproduzir um mecanismo de contágio do setor real no qual choques na capacidade produtiva de uma firma se propagam para as firmas-clientes sem seguir padrões de interconexão. Neste trabalho, não pôde ser adotada a abordagem dada em Battiston et al. (2007), pois naquele trabalho, a cadeia produtiva é disposta em camadas e a produção é determinada pela demanda dos consumidores finais. Essa demanda se propaga sequencialmente através das camadas até atingir a camada de produtores de bens primários. A produção segue o caminho oposto, partindo da produção de bens primários, e também ocorre de maneira sequencial, com as firmas de cada camada podendo adquirir no máximo a quantidade produzida pelas firmas da camada anterior. No caso deste trabalho, não é possível utilizar essa abordagem, pois as firmas formam redes heterogêneas.

### 3.5 Informação Limitada

Neste modelo, assume-se que os agentes não conhecem as decisões que outros agentes irão tomar, de modo que eles tomam decisões de maneira adaptativa. Isso está em linha com Gaffeo et al. (2008), trabalho em que as decisões são tomadas de acordo com um critério de *satisficing* (Simon (1987)), utilizando um processo de decisão ajustado de acordo com resultados anteriores, em um procedimento de “correção de erros”.

### 3.6 Regras Sujeitas a Restrições Políticas

Este trabalho considera que, de forma geral, o comportamento da economia segue um conjunto de regras condicionado a decisões políticas em diversos níveis e a fatores

---

<sup>12</sup>No entanto, Acemoglu et al. (2010) não utiliza modelo baseado em agentes.

externos. Essas decisões, quando ocorrem, são modeladas como fatores exógenos.

De uma forma geral, pode-se dizer que não há uma perda muito grande de fidelidade à realidade neste tipo de modelo, pois boa parte dos processos e decisões econômicas segue regras, por exemplo, a determinação de regras de produção, o próprio processo produtivo, as regras para concessão de crédito, regras para a compensação de pagamentos, regras de arrecadação de tributos, regras de mercado, regras para a administração de carteiras, por exemplo. Apesar dessas regras não serem seguidas com exatidão, estando sujeitas a variações motivadas por decisões em todos os níveis, pode-se afirmar que elas sejam seguidas de forma aproximada, com exceção do período em que ocorrem crises, quando são questionados os comportamentos pré-estabelecidos. Apesar disso, como as regras adotadas no modelo são básicas, considerou-se que elas não mudariam durante as crises. Eventuais mudanças nesse caso, deveriam ser definidas de forma exógena.

### 3.7 Fatores de atenuação

Nas regras apresentadas a seguir, são considerados os seguintes fatores de atenuação:  $\psi_1$  (atenuação do ajuste da meta de produção de bens a variações na expectativa da demanda),  $\psi_2$  (atenuação do ajuste da meta de produção a variações de necessidades de suplementação de estoques) e  $\beta$  (atenuação do ajuste dos preços dos produtos). Esses fatores são expoentes que representam a intensidade das reações dos agentes a mudanças nas condições que determinam o processo de tomada de decisão deles. Expoentes maiores do que 1 representam reações exageradas a essas mudanças, expoentes iguais a 1 representam reação imediata às novas condições e menores do que 1, representam adaptação gradual.

Esses expoentes têm forte influência na estabilidade da economia neste modelo: valores maiores do que 0.8 (dependendo dos demais parâmetros e configurações do modelo) usualmente provocam instabilidade<sup>13</sup>. Neste trabalho, são adotados valores na faixa de 0.5 com a finalidade de evitar essas instabilidades. Na prática, no entanto, há situações em que essas instabilidades ocorrem, como, por exemplo, durante crises, nas quais os agentes se tornam mais avessos ao risco, reagindo de forma exagerada a eventos de relativamente pouca importância ou exibindo comportamento de manada.

### 3.8 Demanda de Bens por Famílias e Governo

Inicialmente, são calculadas as demandas pelos bens de famílias e governo. Essas demandas são calculadas de acordo com o modelo de Dixit e Stiglitz (1977), através da equação E.13. Essa equação pressupõe que o consumidor prefere gastar toda a sua dotação em consumo de bens (ou seja,  $\alpha = 1$ ). Neste modelo, o consumidor escolhe consumir entre

---

<sup>13</sup>Variações nos valores das variáveis de estado do modelo de um período para o período seguinte não tendem a decrescer no tempo.

$NB$  cestas de consumo, representadas na matriz  $\mathbf{XCB}_{[NB \times NI]}$ . Nessa matriz, cada linha representa uma cesta, composta pelas quantidades dos bens  $j$  especificadas nas colunas  $j$  de  $\mathbf{XCB}_{i,j}$ . Dessa forma, o consumidor escolhe entre as cestas: para isso, ele calcula o preço de cada cesta  $c$ :

$$PBW_c = \sum_j XCB_{c,j} P_{j,t-1} \quad j = 1, \dots, NI \quad (3.7)$$

e em seguida, calcula as demandas pelas cestas  $c$  usando o modelo de Dixit e Stiglitz (1977):

$$DB_c = \frac{PBW_c^{1/(\rho-1)} FCW_t}{\sum_j PBW_j^{\rho/(\rho-1)}} \quad (3.8)$$

Por fim, obtém as demandas para todos os bens  $i$ ,  $DYW_{i,t}$ , através de:

$$DYW_{i,t} = \sum_c XCB_{c,i} DB_c \quad (3.9)$$

Os valores assim calculados são somados a uma perturbação aleatória (distribuição uniforme) multiplicada por um fator  $\xi$  (parâmetro da simulação) e reescalados para que o valor total da demanda seja igual às disponibilidades em caixa  $FCW_t$ ./par No caso das demandas do governo, é seguido o mesmo processo de cálculo, mas com as cestas ( $\mathbf{XCBG}$ ) e o saldo em caixa ( $FCG$ ) do governo.

### 3.9 Definição de Taxas - Crédito Comercial

As firmas  $i$  adquirem insumos  $j$  ao início de cada período e pagam pela compra ao final do período, utilizando-se do crédito comercial. O pagamento de principal + juros é feito no processo de compensação de pagamentos, quando também estiverem recebendo a receita de vendas. Essa taxa de juros também é utilizada no processo de otimização do lucro.

O cálculo proposto a seguir é uma modificação do utilizado em Gatti et al. (2010), e propõe que a taxa de juros em operações de crédito comercial seja obtida a partir da taxa básica de juros e de uma função da alavancagem da firma tomadora e do valor líquido da firma emprestadora. Uma maior alavancagem da firma tomadora é um indicativo de maior risco dessa firma; um menor valor líquido da emprestadora pode indicar maior necessidade de financiamento da firma via crédito bancário, encarecendo o crédito concedido.

$$RC_{i,j} = \varphi_0 + \varphi_2(LA_{j,t})^{-\varphi_1} + \varphi_2(l_{i,t})^{\varphi_1} \quad (3.10)$$

Sendo  $LA_{j,t}$  o valor líquido da firma fornecedora ao final do período anterior, e  $l_{i,t}$  a alavancagem<sup>14</sup> da firma compradora (tomadora do empréstimo).

<sup>14</sup> $l_{i,t} = FBB_{i,t}/LA_{i,t}$ , sendo  $FBB_{i,t}$  o valor do crédito bancário em aberto (principal), no momento do



O cálculo apresentado aqui difere de Gatti et al. (2010) em dois pontos: acrescenta-se aqui um termo exógeno, referente à taxa básica de juros vigente ( $\varphi_0$ ), e o cálculo do valor líquido da firma fornecedora ( $LA_{j,t}$ ) no final do período anterior é feito antes do pagamento dos dividendos. Isso é feito para permitir diferenciação adicional entre as firmas lucrativas e as que não são, uma vez que, no caso das firmas lucrativas, o lucro é integralmente pago sob a forma de dividendos.

### 3.10 Definição das Taxas de Empréstimo - Crédito Bancário

Ao início de cada período, todas as firmas  $i$  solicitam a seus bancos  $b$  que informem a taxa de juros de empréstimo bancário. O cálculo dessa taxa segue as mesmas regras adotadas no cálculo da taxa de juros de crédito comercial.<sup>15</sup>

$$RB_{i,t} = \varphi_0 + \varphi_2(LAB_{b,t})^{-\varphi_1} + \varphi_2(l_{i,t})^{\varphi_1} \quad (3.11)$$

Sendo  $LAB_{b,t}$  o valor líquido do banco prestador ao final do período anterior, e  $l_{i,t}$ , a alavancagem da firma compradora (tomadora do empréstimo).

### 3.11 Metas de Produção e Demandas das Firms

A definição das metas de produção pelas firmas parte das demandas de bens por famílias e governo no início do período e das taxas de juros comercial e bancário. Com esses dados, cada firma calcula a sua demanda unitária (por unidade de bem produzido) por bens e por trabalho, otimizando o lucro. Os bens demandados podem ser bens de capital ou bens de consumo, conforme a taxa de depreciação associada a eles (parâmetro da simulação). Em seguida, elas calculam as metas de produção, em contexto de racionalidade limitada: elas precisam prever a demanda que terão que atender no período seguinte com base em dados disponíveis até o momento. Para isso, elas levam em consideração: 1) Evolução da demanda das famílias e do governo, 2) Variação estimada no preço do produto, 3) Variação estimada do número de empregados na economia, e 4) Excedente em estoque. Tendo calculado a meta de produção, cada firma multiplica essa meta pelas demandas unitárias obtidas no processo de otimização do lucro para obter as demandas por insumos e trabalho.

O modelo apresentado em Dosi et al. (2010) também trata bens de capital e leva em conta o nível do estoque de produto na determinação do nível de produção. A seguir são abordados os elementos desse processo:

---

cálculo.

<sup>15</sup>Gatti et al. (2010) calcula taxa de juros de crédito bancário usando a mesma formulação utilizada para a taxa de juros de crédito comercial.

a) Função de produção das firmas individuais

O trabalho de Acemoglu et al. (2010) utiliza a mesma estrutura de firmas interligadas em redes heterogêneas, em relacionamento com um consumidor representativo. Apesar desse trabalho não apresentar um modelo baseado em agentes, a sua estrutura de firmas em rede se relacionando com consumidor representativo será utilizada com pequenas modificações:

- Na função de produção das firmas, a produção será calculada a partir de uma soma de termos relacionados a cada insumo, e não do produto. Essa opção foi feita para possibilitar que a produção continue se algum produto estiver em falta. A função alterada atende às condições de Inada, possibilitando solução interior para o equilíbrio.
- As demandas dos consumidores, tanto famílias quanto governo, (apresentadas anteriormente), são calculadas pelo modelo de Dixit e Stiglitz (1977), apropriado para o contexto de competição monopolística.

A função de produção é dada por:

$$Y_{i,t} = A_i(QW_i XW_{i,t})^{1-\alpha} \sum_{j \in J} (QX_{i,j} X_{i,j})^\alpha \quad (3.12)$$

Nessa função, os valores de  $QW$  e  $QX$  são utilizados para permitir diferenciação na ponderação do trabalho e de cada insumo no cálculo.

b) Tratamento dos bens de capital

Neste modelo, é associada uma taxa de depreciação  $DEPR_j \in (0, 1]$ <sup>16</sup> a cada produto  $j$ . Cada firma possui um estoque de insumos e bens de capital no período ( $XS_{i,j}$ ). Essa variável representa o estoque de insumos  $i$  possuídos pela firma  $j$ . Ao final da produção, em cada período, esse estoque é depreciado, para cada bem  $j$  no estoque da firma  $i$ , por:  $XS_{i,j} = XS_{i,j}(1 - DEPR_j)$ . No caso de o bem  $j$  ser bem de capital, fica-se com  $XS_{i,j} > 0$ . O impacto desse tipo de bem no modelo é este: a firma  $i$  calcula a demanda  $X_{i,j}$  dos bens  $j$  que otimiza o lucro para produzir a quantidade demandada de seus produtos. A quantidade de bens  $j$  a adquirir,  $X_{i,j}$ , levará em conta o estoque de bens de capital da seguinte forma:

$$X_{i,j} = \max(0, X_{i,j} - XS_{i,j}) \quad (3.13)$$

O modelo em Dosi et al. (2010) também trata estoque de bens de capital.

c) Otimização do lucro: demandas ótimas por insumos e trabalho

A otimização do lucro é feita separadamente para cada firma  $i$ , a partir dos preços

---

<sup>16</sup>A taxa de depreciação não pode ser igual a zero, pois isso tornaria o equilíbrio muito instável. Se é igual a 1, tem-se um bem de consumo. Todos os bens recebem o mesmo tratamento neste modelo.

dos insumos, definidos ao final do período anterior ( $t - 1$ ). O cálculo é feito para a produção de 1 unidade do bem, ou seja,  $Y_{i,t} = 1$ . As demandas ótimas por trabalho ( $XW_i$  e insumos ( $X_{i,j}$ ) são dadas por:

$$Xu_{i,j} = z_j/QX_{i,j} \text{ e } XWu_i = z_w/QW_i \quad (3.14)$$

Obtidos de:

$$\begin{aligned} z_j &= \frac{Y_{i,t}}{A_i} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha s_w} \right)^{\alpha-1} \left( \sum_{j \in J_i} s_j^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\alpha-2} \frac{1}{s_j^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}, \quad j \in J_i \\ z_w &= \frac{Y_{i,t}}{A_i} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha s_w} \right)^{\alpha} \left( \sum_{j \in J_i} s_j^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\alpha-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sendo:

$$s_w = (1 + RB_{i,t})W/QW_i, \text{ com } W = 1 \text{ (numerário), e:}$$

$$s_j = (1 + RC_{i,j})P_{j,t}/QX_{i,j}, \text{ se a firma } j \text{ for fornecedora da firma } i; \text{ caso contrário, } s_j = 0.$$

Na otimização do lucro das firmas, os preços de cada insumo são afetados pelas taxas de juros de crédito comercial, uma vez que os valores efetivamente pagos pelas compras são de principal + juros. Assume-se também que pagamento dos salários é financiado por crédito bancário, cuja taxa de juros é  $RB_{i,t}$ .

Maiores detalhes podem ser encontrados no anexo D.

- d) Cálculo da demanda estimada no período  $t$  e do crescimento estimado da demanda. O crescimento estimado da demanda pelo bem  $i$ , ( $GDYest_i$ ), é calculado desta maneira:

$$GDYest_i = (DYW_{i,t} + DYG_{i,t}) / (DYW_{i,t-1} + DYG_{i,t-1}) \quad (3.16)$$

No entanto, se  $DYW_{i,t-1} + DYG_{i,t-1} = 0$  o cálculo deve ser feito com base na evolução do número de empregados na economia:

$$GDYest_i = NW_{t-1} / NW_{t-2} \quad (3.17)$$

A demanda estimada, por fim, é dada por:

$$DYest_i = GDYest_i \cdot DY_{i,t-1} \quad (3.18)$$

- e) Cálculo do preço de venda para obtenção da margem de lucro da firma. Esse preço é calculado para cada firma separadamente por uma equação obtida da

equação (C.8):

$$P_{i,t} = \left( \sum_j (X_{i,j} DEPR_j (1 + RC_{i,j}) P_{j,t-1}) + W XWu_i + FXCu_i + FIBB_{i,t} / DYest_i \right) (1 + PM_{i,t} / (1 - T_y)) \quad (3.19)$$

A equação acima e a equação (C.8) apresentam as seguintes diferenças:

- A equação em (C.8) calcula um vetor de preços de equilíbrio, no qual todas as firmas têm o lucro desejado, enquanto na equação acima, cada firma calcula seu preço de equilíbrio sem saber o valor dos preços de equilíbrio calculados pelas demais firmas.
- A equação acima leva em conta a estimativa do valor de juros de empréstimos bancários por unidade produzida; a equação (C.8) assume que as taxas de juros são zero.
- Na equação acima, o preço do bem  $i$  calculado pode ser diferente do preço desse bem, se ele for insumo da própria produção; a equação (C.8) assume preços em equilíbrio (não se alteram no tempo).

f) Cálculo de previsões de estoque e da meta de produção para cada firma  $i$

Inicialmente, a meta de produção é calculada levando em conta a estimativa da demanda no próximo período, corrigida pela variação do preço do produto  $i$ , considerando o preço de equilíbrio  $P_{i,t}$ . Nessa estimativa, as firmas também fazem uma correção comparando o nível de emprego da economia no período anterior ( $NW_{t-1}$ ) com o nível de emprego ideal (dado por  $EM NWT$ ). Isso é feito porque a estimativa inicial da demanda,  $DYest_i$ , é feita sem considerar essas alterações. Por fim, esse valor é atenuado por um expoente  $\psi_1 \in (0, 1)$  (parâmetro da simulação).

$$YG_{i,t} = DYest_i (EM * NWT_t / NW_{t-1} P_{i,t-1} / P_{i,t})^{\psi_1} \quad (3.20)$$

Em seguida, são calculados a estimativa do nível de estoque após as vendas em  $t$ ,  $IE_i$  e o nível de estoque coerente com a nova meta de produção,  $ICG$ , utilizando-se o parâmetro  $IR$  de excesso requerido no estoque.  $YI_{i,t}$  é a quantidade de produto  $i$  em estoque em  $t$ .

$$IE_i = \max(0, YI_{i,t} - DYest_i) \\ ICG_i = YG_{i,t} (1 + IR) \quad (3.21)$$

Por fim, a meta de produção calculada pela firma  $i$  é corrigida com base em uma atenuação da razão entre a quantidade a produzir, com base na meta, e a meta de produção calculada acima ( $YG_{i,t}$ ), por um expoente  $\psi_2 \in (0, 1)$  (parâmetro)

$$YG_{i,t} = YG_{i,t} ((ICG_i - IE_i) / YG_{i,t})^{\psi_2} \quad (3.22)$$

g) Cálculo das demandas de firmas e demandas totais para cada firma  $i$

A demanda por trabalho é obtida da demanda unitária obtida e da meta de produção:

$$XW_i = YG_{i,t} XWu_i \quad (3.23)$$

A demanda por insumos também é obtida da demanda unitária obtida do processo de otimização, mas desconta-se do valor obtido o valor dos bens de capital em estoque, após a depreciação, antes de se chegar ao valor demandado final:

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= YG_{i,t} Xu_{i,j}, & j = 1, \dots, NI \\ XS_{i,j} &= (1 - DEPR_j) XS_{i,j} & j = 1, \dots, NI \\ X_{i,j} &= \max(0, X_{i,j} - XS_{i,j}) & j = 1, \dots, NI \end{aligned} \quad (3.24)$$

A demanda das firmas pelos bens  $i$ ,  $DYF_{i,t}$ , é totalizada, por bem  $i$ , e é calculada a demanda total de firmas e consumidores finais pelos bens  $i$ ,  $DY_{i,t}$ :

$$\begin{aligned} DYF_{i,t} &= \sum_j X_{j,i} \\ DY_i &= DYF_{i,t} + DYW_{i,t} + DYG_{i,t} \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.12 Mercado de Bens

No mercado de bens, cada firma  $i$  atende à demanda  $DY_{i,t}$  com produtos em estoque,  $YI_{i,t}$ , produzidos em períodos anteriores. Nesse mercado, as quantidades fornecidas são as demandadas se a quantidade de produto em estoque for suficiente, ou seja, se  $YI_{i,t} \geq DY_{i,t}$ , ou atendidas proporcionalmente<sup>17</sup> à quantidade demandada, caso contrário. As quantidades de produto  $i$  fornecidas são registradas em  $YS_{i,t}$  (total vendido),  $XB_{j,i}$  (vendas às firmas  $j$ ),  $XBW_{i,t}$  (famílias) e  $XBG_{i,t}$  (governo). São calculados os valores dessas vendas multiplicando-se as quantidades pelo preço do produto ao final do período anterior (preço com base no qual o produto foi demandado). Os valores são: firmas, valores pagos:  $FBC_{j,t}$ , firmas, valores recebidos:  $FLCF_{i,t}$ , famílias:  $FSW_t$ , governo:  $FSG_t$ . São também calculados os valores de juros de crédito comercial associados às operações entre firmas: juros pagos:  $FIBC_{j,t}$ ; juros recebidos:  $FILCF_{i,t}$ . As firmas também registram os valores das vendas às famílias  $SW_{i,t}$  e ao governo  $SG_{i,t}$

<sup>17</sup>Neste modelo, em todos os mercados, o atendimento à demanda é feito de forma proporcional à quantidade demandada, se a quantidade ofertada não for suficiente. Esse critério de alocação foi adotado por sua simplicidade; em uma situação real (não tratada neste modelo), os demandantes poderiam revelar demandas majoradas se tivessem expectativas de baixa na oferta.

### 3.13 Demanda por Crédito Bancário

Cada firma avalia sua necessidade de crédito bancário, levando em conta a disponibilidade de caixa para os pagamentos previstos no período e uma margem de segurança ( $\eta$ ) definida como parâmetro da simulação.

Para o cálculo da demanda por crédito bancário  $DBBF_{i,t}$ , a firma  $i$  compara a previsão do saldo em caixa, após o recebimento das receitas do período ( $CB_i$ ), com os pagamentos previstos no período ( $PD_i$ ), deixando uma margem de segurança  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
 CB_i &= FC_{i,t} + SW_{i,t} + SG_{i,t} + FLCF_{i,t} + FILCF_{i,t} \\
 PD_i &= FIBB_{i,t-1} + FBC_{i,t} + FIBC_{i,t} + W XW_i + FXC_i + \\
 &\quad + (FIBB_{i,t-1} + FBC_{i,t} + FIBC_{i,t} + W XW_i + FXC_i + XB_{i,i} P_{i,t-1}) PM_{i,t} T_y \\
 DBBF_{i,t} &= \eta PD_i - CB_i
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Se  $DBBF_{i,t} < 0$ , a firma  $i$  não necessita de crédito bancário adicional, podendo fazer amortizações de empréstimos em aberto, caso os possua.

### 3.14 Alocação de Crédito Bancário pelos Bancos

Para as firmas que estão solicitando crédito ( $DBBF_{i,t} > 0$ ), o banco calcula o limite de crédito a conceder a cada firma, com base na alavancagem dela. O cálculo é feito com o valor atual dos empréstimos em aberto  $FBB_{i,t}$ .

$$DBBF_{i,t} = \min(\max(LMAX_i FA_{i,t} - FBB_{i,t}, 0), DBBF_{i,t}) \tag{3.27}$$

Em seguida, o banco  $b$  totaliza as demandas por crédito das suas correntistas em  $Dcp_b$  e calcula a solicitação máxima de crédito que pode atender ( $DBBmax_b$ ), com base no requerimento de capital:

$$DBBmax_b = FAB_{b,t}/(\gamma \nu) - FLCB_{b,t} - FIICB_{b,t} - FLI_{b,t} - FILL_{b,t} \tag{3.28}$$

Se  $DBBmax_b < Dcp_b$ , as solicitações de crédito de cada firma são atendidas proporcionalmente. A parcela atendida dessas solicitações é registrada pelas firmas  $i$  ( $FBB_{i,t}$ ) e pelo banco  $b$  ( $FLCB_{b,t}$ ). No caso de amortização, a movimentação é o valor a amortizar, já calculado. Essa movimentação é também registrada (nas mesmas variáveis) e os juros a pagar no período seguinte são calculados sobre o valor em aberto do empréstimo atualizado (firmas:  $FIBB_{i,t+1}$ , bancos:  $FIICB_{b,t+1}$ ). Na concessão do crédito bancário, ou no pagamento de juros sobre depósitos, não é avaliado o requerimento de reservas, pois os bancos podem complementá-las no mercado interbancário.

### 3.15 Remuneração de Depósitos de Firmas em Conta-corrente

Cada banco calcula a taxa de juros para remuneração dos depósitos do período  $t$  para  $t + 1$  e paga os juros sobre o saldo dos depósitos do final de  $t - 1$ .

O cálculo da taxa de juros para remuneração em  $t + 1$  parte do total de juros de empréstimos bancários a ser recebido em  $t + 1$  ( $FILCB_{b,t+1}$ ), da taxa de lucro sobre os empréstimos bancários desejada pelo banco ( $PMB_{b,t}$ ), e do saldo em conta-corrente dos depositantes no momento do cálculo ( $FDE_{b,t}$ ). Embora esse saldo deva ser modificado pelo sistema de pagamentos no período, é assumido como uma aproximação do saldo do final do período.

A taxa de remuneração dos depósitos a ser paga pelo banco  $b$  em  $t + 1$  às firmas correntistas é dada por:

$$RBD_{b,t} = \max(0, FILCB_{b,t+1} - PMB_b FLCB_{b,t}) / FDE_{b,t} \quad (FDE_{b,t} \neq 0) \quad (3.29)$$

São também calculados e pagos os valores dos pagamentos de juros sobre depósitos referentes aos saldos do final do período anterior. As firmas pagam imposto sobre os juros recebidos.

Firmas:

$$\begin{aligned} FIC_{i,t} &= FC_{i,t-1} \left( \sum_b M_{b,i} RBD_{i,t-1} \right) \\ FC_{i,t} &= FC_{i,t} + FIC_{i,t} \\ FTFG_{i,t} &= FTFG_{i,t} + T_b FIC_{i,t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Bancos:

$$\begin{aligned} FIDE_{b,t} &= \sum_i M_{b,i} FIC_{i,t} \\ FDE_{b,t} &= FDE_{b,t} + FIDE_{b,t} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por fim, são calculados os valores de impostos sobre os juros líquidos recebidos pelos bancos (diferença entre os juros recebidos e os juros pagos) e lançados para tratamento pelo sistema de pagamentos. O imposto sobre os juros recebidos do mercado interbancário é pago separadamente.

$$FTBG_{b,t} = \max(0, T_b(FILCB_{b,t+1} - FIDE_{b,t})) \quad (3.32)$$

### 3.16 Abertura do Mercado Interbancário

Em cada período, o mercado interbancário é aberto e cada banco calcula a sua necessidade ou disponibilidade de recursos, para se posicionar como tomador ou emprestador. Neste modelo, os bancos não formulam estratégias de atuação nesse mercado. Com base no número de bancos para pesquisa de taxa de crédito interbancário (parâmetro  $NBCI$ ), os bancos tomadores montam uma lista de bancos emprestadores junto aos quais irão pesquisar taxas de empréstimo, fazem a pesquisa e classificam a lista em ordem crescente de taxa para que a negociação possa se iniciar. Esse processo é semelhante ao proposto em Iori et al. (2006)<sup>18</sup>.

Inicialmente, os bancos calculam os saldos que irão demandar ou ofertar nesse mercado. No caso dos tomadores, o saldo em conta-corrente é comparado com o mínimo para atendimento ao requerimento de reservas compulsórias, com colchão de liquidez  $\mu$ . Para os emprestadores, a restrição de crédito é feita com base no requerimento de capital. Cálculo da demanda do banco  $b$  por empréstimo interbancário em  $t$ :

$$DIB_{b,t} = FCB_{b,t} + FLI_{b,t-1} + FILL_{b,t} - FBI_{b,t-1} - FIBI_{b,t} - \delta \mu FDE_{b,t} \quad (3.33)$$

Se  $DIB_{b,t} > 0$ , o banco  $b$  é emprestador. Nesse caso, o valor da disponibilidade para empréstimo é o mínimo entre o calculado e o valor máximo permitido por restrição devida ao requerimento de capital:

$$DIB_{b,t} = \min(DIB_{b,t}, FAB_{b,t}/(\gamma \nu) - FLCB_{b,t-1} - FILCB_{b,t} - FLI_{b,t-1} - FILL_{b,t}) \quad (3.34)$$

Haverá mercado se o número de emprestadores e o número de tomadores forem maiores do que zero. Cada banco tomador monta uma lista de bancos candidatos a emprestador, sorteando  $NBCI$  bancos do conjunto de emprestadores identificados. Em seguida, são obtidas as taxas de empréstimo interbancário  $RIB_{b,c}$  de cada banco candidato a emprestador  $c$  que consta na lista dos bancos tomadores  $b$ , utilizando o cálculo descrito na próxima seção. Em seguida, cada banco  $b$  classifica a sua lista de bancos candidatos a emprestadores por ordem crescente de taxa  $RIB_{b,c}$  para que a negociação possa se iniciar. Por fim as matrizes com valores de principal e juros das operações iniciadas em  $t - 1$  ( $BI$  e  $IBI$ ) são copiadas para áreas referentes a operações do período anterior ( $BIPP$  e  $IBIPP$ ), para permitir o processamento do resgate dessas operações e o registro das operações do período  $t$ .

---

<sup>18</sup>No entanto, em Iori et al. (2006), a alocação não é proporcional: são sorteados bancos tomadores até se esgotar a disponibilidade de crédito, o que é um processo mais próximo da realidade.



### 3.17 Definição de Taxas - Crédito Interbancário

Os bancos  $b$  obtêm a taxa de empréstimo interbancário junto a cada banco  $c$  da sua lista de candidatos a emprestador.

Como nos casos das taxas de empréstimos comercial e bancário, utiliza-se uma modificação do cálculo proposto em Gatti et al. (2010). Aqui, propõe-se que a taxa de juros em operações de crédito interbancário seja obtida a partir da taxa básica de juros e de uma função da alavancagem do banco tomador e do valor líquido do banco emprestador.

$$RIB_{b,c} = \varphi_0 + \varphi_2(LAB_{c,t})^{-\varphi_1} + \varphi_2(l_{b,t})^{\varphi_1} \quad (3.35)$$

Sendo  $LAB_{c,t}$  o valor líquido do banco emprestador ao final do período anterior, e  $l_{b,t}$ , a alavancagem do banco tomador, dada por:

$$l_{b,t} = (FBI_{b,t} + FDE_{b,t})/LA_{b,t} \quad (3.36)$$

### 3.18 Negociação e Registro de Operações Interbancárias

Se houver mercado (demandantes e ofertantes), ocorre a negociação. A negociação é feita em rodadas por ordem de classificação nas listas dos demandantes. Em cada rodada  $i$ , todas as operações classificadas na  $i$ -ésima posição na lista com saldo demandado não-atendido são processadas. Em cada rodada, é feito o seguinte:

- Cada banco emprestador calcula as demandas por empréstimo dirigidas a ele.
- Se o valor disponível para empréstimo atender à demanda, os empréstimos são integralmente concedidos. Caso contrário, as demandas são atendidas de forma proporcional. Os bancos tomadores demandarão a parcela não-atendida na próxima rodada, do próximo banco da lista.
- As operações (principal) de empréstimos interbancários tomados pelo banco  $b$  do banco  $c$  são registradas em  $BI_{b,c}$
- Após a última rodada, a parcela não-atendida das solicitações de crédito permanecerá nessa situação.

Ao término das rodadas, as operações são registradas e o imposto a ser pago é calculado: Tomadores (principal + juros):

$$\begin{aligned} FBI_{b,t} &= \sum_c BI_{b,c} \\ IBI_{b,c} &= BI_{b,c} RIB_{b,c} \quad b, c = 1, \dots, NB \\ FBI_{b,t+1} &= \sum_c IBI_{b,c} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Emprestadores (principal + juros):

$$\begin{aligned} FLL_{c,t} &= \sum_b BI_{b,c} \\ FILL_{c,t+1} &= \sum_b IBI_{b,c} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Registro de pagamento de impostos, devidos ao final da operação do período anterior, sobre os juros a receber em  $t$ , pelos emprestadores e do recebimento, pelo governo:

$$\begin{aligned} FTBG_{b,t} &= FTBG_{b,t} + T_b FILL_{c,t} \\ FTG_t &= FTG_t + \sum_b FTBG_{b,t} \quad b = 1, \dots, NB \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.19 Mercado de Trabalho

Nesta seção, cada firma  $i$  procura contratar o número de empregados calculado na otimização do lucro. Se o número total de trabalhadores da economia  $NWT_t$  for inferior à soma das demandas por trabalhadores das firmas ( $XW_i$ ), cada demanda é atendida proporcionalmente. O número de empregados contratados ( $NWF_{i,t}$ ) e os salários a pagar ou receber são registrados.

Os registros de salários a pagar pelas firmas  $i$ , salário total a receber pelas famílias e número total de empregados são:

$$\begin{aligned} FW_{i,t} &= W NWF_{i,t} \\ FTW_t &= W \sum_i NWF_{i,t} \\ NW_t &= \sum_i NWF_{i,t} \end{aligned} \quad (3.40)$$

### 3.20 Produção e Cálculo do Imposto das Firmas

Cada firma produz utilizando os insumos que tiver em estoque e os trabalhadores que tiver conseguido contratar. Os bens produzidos são colocados no estoque de produtos. Nesse momento, são calculados os impostos sobre lucro de cada firma (utilizando o preço-base do produto,  $P_{i,t}$ ) para registro. Esses valores são totalizados e registrados pelo governo (no trabalho de Dosi et al. (2010), o governo também recebe impostos calculados sobre o lucro das firmas. Também arrecada imposto sobre a renda das famílias). São registrados os totais de custos fixos a receber pelas famílias.

Colocação dos insumos  $j$  adquiridos pelas firmas  $i$  em estoque ( $XS_{i,j}$ ), produção e

colocação do produto em estoque ( $YI_{i,t}$ ):

$$\begin{aligned}
XS_{i,j} &= XS_{i,j} + XB_{i,j} \quad j = 1, \dots, NI \\
Y_{i,t} &= A_i(QW_i NWF_{i,t})^{1-\alpha} \sum_j (QX_{i,j} XS_{i,j})^\alpha \\
YI_{i,t} &= YI_{i,t} + Y_{i,t}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

O valor do imposto pago pelas firmas  $i$  é obtido da multiplicação da alíquota  $T_y$  ( $T_y \in [0, 1]$ ) pelo lucro previsto. Esse valor é somado ao imposto sobre juros recebidos sobre depósitos, calculado anteriormente (equação 3.32):

$$FTFG_{i,t} = FTFG_{i,t} + \max(0, Y_{i,t}P_{i,t} - \sum_j XB_{i,j}P_{j,t-1} - WNWF_{i,t} - FXC_i) \tag{3.42}$$

Totalização de impostos a recolher, das firmas  $i$ , pelo governo, até o momento:

$$FTG_t = \sum_i FTFG_{i,t} \tag{3.43}$$

Totalização dos custos fixos a receber das firmas  $i$ , pelas famílias:

$$FFXC_t = \sum_i FXC_i \tag{3.44}$$

### 3.21 Definição de Preços dos Bens no Período Seguinte

Os preços de venda para o período seguinte são fixados pelas firmas  $i$ , nesse contexto de informação limitada, por meio de um cálculo de correção de erro: se o estoque do produto ( $YI_{i,t}$ ) for maior (menor) do que o desejado ( $ICG_i$ ), o preço é diminuído (aumentado)<sup>19</sup>. Utiliza-se um expoente de atenuação  $\beta \in (0, 1)$  (parâmetro da simulação)

$$P_{i,t} = P_{i,t}(ICG_i/YI_{i,t})^\beta \tag{3.45}$$

### 3.22 Compensação de Pagamentos e Registro de Perdas

O sistema de pagamentos proposto neste trabalho é uma extensão do apresentado no trabalho de Eisenberg e Noe (2001). A efetivação dos pagamentos é conduzida por esse sistema, a partir dos registros das operações pelos agentes, de acordo com o processo detalhado no anexo F.3.

Inicialmente, as transferências financeiras relacionadas a esses pagamentos são lançadas nas matrizes de dívidas em aberto entre agentes tratadas pelo sistema de pagamentos.

<sup>19</sup>Isso é uma *proxy* da demanda projetada  $\times$  oferta

As operações do subsistema de firmas<sup>20</sup> são lançadas nas matrizes  $\mathbf{LFF}_{[NI+NB+2 \times NI+NB+2]}$  e  $\mathbf{LFNF}_{[NI+NB+2 \times NI+NB+2]}$ , e as do subsistema de bancos não-relacionadas a operações de firmas são lançadas na matriz  $\mathbf{LBNF}_{[NB+2 \times NB+2]}$ . As matrizes  $\mathbf{LFF}$  e  $\mathbf{LFNF}$  têm as  $NI$  primeiras linhas (e colunas) reservadas para as firmas, as  $NB$  linhas (colunas) seguintes reservadas aos bancos, a linha (coluna)  $NI + NB + 1$ , aos trabalhadores e a  $NI + NB + 2$ , para o governo. No caso da matriz  $\mathbf{LBNF}$ , as  $NB$  primeiras linhas (colunas) são reservadas aos bancos, a linha (coluna)  $NI + NB + 1$ , aos trabalhadores e a  $NI + NB + 2$ , para o governo. Nessas matrizes, os agentes nas linhas devem para os agentes nas colunas. Antes do lançamento desses valores, estão registrados nas matrizes  $\mathbf{LFF}$  e  $\mathbf{LFNF}$  os valores dos pagamentos de firmas em atraso, isto é, a parcela dos pagamentos devidos no período anterior e não-paga.

Depois do lançamento, ocorre a compensação dos pagamentos, por meio da utilização do algoritmo apresentado no anexo F.3, que compensa o sistema financeiro impedindo violações do requerimento de reservas pelos bancos. Nesse algoritmo, os valores dos pagamentos das firmas obtidos são o máximo entre as dívidas dos agentes e as disponibilidades em caixa deles e os pagos pelos bancos, são o máximo entre as transferências de reservas associadas aos pagamentos em realização e as disponibilidades de reservas (excedente de reservas em relação ao recolhimento compulsório). Pagamentos de firmas que requerem transferências interbancárias recebem tratamento específico.

Ao término da compensação, as firmas que não tiverem conseguido pagar integralmente suas dívidas pagam seus credores de forma proporcional aos valores devidos. Essa proporção é a taxa de recuperação associada às dívidas da firma  $i$  ( $KF_i \in [0, 1]$ ). No caso dos bancos, a proporção é dada pela taxa de recuperação associada às dívidas do banco  $b$  ( $KBR_b \in [0, 1]$ ). Após a definição dos valores a pagar, são definidos os status das firmas ( $STF_{i,t}$ ), como *normal*, *pagamento atrasado* e *liquidada*, conforme tenham pago integralmente ou não as suas dívidas; e os dos bancos ( $STB_b$ ) como *normal* ou *liquidado* conforme tenham pago integralmente suas dívidas ou não. Em seguida, os saldos em caixa dos agentes são atualizados e as perdas são registradas. A partir disso, são ajustados os registros de operações interbancárias em que o banco emprestador em  $t$  entra em *default* e não transfere integralmente o valor emprestado ao tomador, para que reflitam os valores efetivamente emprestados. Por fim, as matrizes de dívidas em aberto de firmas ( $\mathbf{LFF}$  e  $\mathbf{LFNF}$ ) são atualizadas para registrar apenas os pagamentos não-realizados das firmas com status *pagamento atrasado* ( $STF_{i,t} = 2$ ), rolando essas dívidas para o período seguinte.

A seguir, são detalhados as partes mais importantes desse processo:

- a) Preparação da compensação: lançamento de valores nas matrizes de dívidas

No subsistema de firmas, as dívidas que exigem transferências interbancárias são

---

<sup>20</sup>Ver anexo F.2.2.

registradas na matriz  $\mathbf{LFF}$ , e as que não exigem, são registradas na matriz  $\mathbf{LFNF}$ . São registradas nas matriz  $\mathbf{LFF}$  as dívidas entre firmas correntistas de bancos diferentes, pagamentos e recebimentos entre firmas e famílias ou governo. São registradas na matriz  $\mathbf{LFNF}$  as dívidas entre firmas correntistas do mesmo banco (exigem apenas uma transferência contábil para o seu pagamento) e juros e amortizações de empréstimos bancários a firmas. No caso das dívidas do subsistema de bancos, são registradas as dívidas apenas das operações interbancárias, não-relacionadas a pagamentos de firmas, na matriz  $\mathbf{LBNF}$ . A matriz de pagamentos de dívidas de bancos originadas por pagamentos de firmas ( $\mathbf{LBF}$ ) é gerada durante o processo de compensação.

Preenchimento das matrizes de dívidas:

- Dívidas do subsistema de firmas com transferências interbancárias

A matriz  $\mathbf{LFF}$  vem preenchida com as dívidas de firmas não-pagas no período anterior. Inicialmente, são preenchidas com pagamentos de principal + juros de operação de crédito comercial, referentes a compras de insumos das firmas  $j$  pelas firmas  $i$  ( $pgto_{i,j}$ ), sendo  $i$  e  $j$  correntistas de bancos diferentes:

$$LFF_{i,j} = LFF_{i,j} + pgto_{i,j} \quad (3.46)$$

Demais registros: (recebimentos de compras de famílias, pagamentos de salários e custos fixos, recebimentos de compras do governo, pagamentos de impostos de firmas)

$$\begin{aligned} LFF_{NI+NB+1,i} &= LFF_{NI+NB+1,i} + SW_i \\ LFF_{i,NI+NB+1} &= LFF_{i,NI+NB+1} + FW_{i,t} + FXC_i \\ LFF_{NI+NB+2,i} &= LFF_{NI+NB+2,i} + SG_i \\ LFF_{i,NI+NB+2} &= LFF_{i,NI+NB+2} + FTFG_{i,t} \end{aligned} \quad (3.47)$$

- Dívidas do subsistema de firmas sem transferências interbancárias

Pagamentos de principal + juros de operação de crédito comercial, referentes a compras de insumos das firmas  $j$  pelas firmas  $i$  ( $pgto_{i,j}$ ), sendo  $i$  e  $j$  correntistas do mesmo banco:

$$LFNF_{i,j} = LFNFi,j + pgto_{i,j} \quad (3.48)$$

Pagamentos de juros e variação no principal de empréstimos bancários de

bancos  $b$  concedidos a firmas correntistas  $i$ :

$$\begin{aligned}
LFNF_{i,NI+b} &= LFNF_{i,NI+b} + FIBB_{i,t} \\
LFNF_{i,NI+b} &= LFNF_{i,NI+b} + FBB_{i,t-1} - FBB_{i,t} && \text{amortização} \\
LFNF_{NI+b,i} &= LFNF_{NI+b,i} + FBB_{i,t} - FBB_{i,t-1} && \text{concessão adicional}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ocorre amortização se  $FBB_{i,t-1} - FBB_{i,t} > 0$ , e concessão adicional, caso contrário.

- Dívidas do subsistema de bancos não-associadas a firmas

São registrados o início de operações interbancárias do período (matriz **BI**) e o término das operações do período anterior (matrizes **BIPP** - principal e **IBIPP** - juros).

$$\begin{aligned}
LBNF_{b,c} &= LBNF_{b,c} + BI_{c,b} && b, c = 1, \dots, NB \\
LBNF_{b,c} &= LBNF_{b,c} + BIPP_{b,c} + IBIPP_{b,c} && b, c = 1, \dots, NB
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Preenchimento dos vetores de dotações iniciais:

- Subsistema de firmas

$$\begin{aligned}
EF_i &= FC_{i,t} && i = 1, \dots, NI \\
EF_{NI+b} &= 0 && b = 1, \dots, NB \\
EF_{NI+NB+1} &= FCW_t \\
EF_{NI+NB+2} &= FCG_t
\end{aligned} \tag{3.51}$$

- Subsistema de bancos

$$\begin{aligned}
ER_b &= FCB_{b,t} - \delta FDE_{b,t} && b = 1, \dots, NB \\
ER_{NB+1} &= (1 - \delta) FCW_t \\
ER_{NB+2} &= (1 - \delta) FCG_t
\end{aligned} \tag{3.52}$$

b) Matriz de agregação

É definida uma matriz de agregação, para somar os pagamentos de firmas de forma a serem realizados pelos bancos de que são correntistas ( $\mathbf{M}_{[NB \times NI]}$ ):

$$\begin{aligned}
M_{b,i} &= 1 && \text{se a firma } i \text{ é correntista do banco } b, \text{ e:} \\
&= 0 && \text{caso contrário}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

c) Compensação

É feita de acordo com o processo de compensação condicional, extensão do processo definido em Eisenberg e Noe (2001), definido no anexo F.3. São dadas as matrizes definidas acima e obtidos vetores de pagamentos e recebimentos utilizados nas atualizações dos saldos em caixa dos agentes.

d) Atualização de saldos em caixa dos agentes

O processo de compensação calcula vetores com pagamentos e recebimentos para os subsistemas de firmas ( $PF_{[NI+NB+2]}$  e  $RF_{[NI+NB+2]}$ ) e de bancos ( $PB_{[NB+2]}$  e  $RBP_{[NB+2]}$ ). Esses vetores são obtidos de (F.81) e (F.82).

Os saldos em caixa são atualizados, para cada firma  $i$ , por:

$$FC_{i,t} = FC_{i,t} + RF_i - PF_i \quad (3.54)$$

Para famílias e governo:

$$\begin{aligned} FCW_t &= FCW_t + RBP_{NB+1} - PB_{NB+1} \\ FCG_t &= FCG_t + RBP_{NB+2} - PB_{NB+2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Depósitos em conta-corrente e caixa, para os bancos  $b$ :

$$\begin{aligned} FDE_{b,t} &= FDE_{b,t} + \sum_i M_{b,i}(RF_i - PF_i) \\ FCB_{b,t} &= FCB_{b,t} + RBP_b - PB_b \end{aligned} \quad (3.56)$$

e) Atualização do status de pagamento

O status de pagamento de firmas e bancos definem se serão socorridos, liquidados e se poderão realizar operações. O status de pagamento é atualizado após a compensação do período, a não ser nas situações indicadas. As firmas podem estar nas seguintes situações:

- Normal ( $STF_{i,t} = 1$ )

Os pagamentos estão em dia, e a operação é normal

- Pagamento atrasado ( $STF_{i,t} = 2$ )

Os pagamentos estavam em dia no período anterior, mas as dívidas do período não foram quitadas. A dívida não-paga é rolada para o período seguinte, a firma recebe um aporte de socorro e, no período seguinte, não poderá produzir (Battiston et al. (2007) também apresenta um mecanismo de interrupção de produção associado a *default* de firmas), mas poderá vender seus produtos e pagar custos fixos.

- Liquidada ( $STF_{i,t} = 0$ )

Se a simulação estiver parametrizada para que o governo socorra firmas

em dificuldades, a firma recebe um aporte do governo. Caso contrário, um investidor assume a firma liquidada e realiza um aporte, na expectativa de obter retorno desse investimento através dos dividendos. Se o volume de aportes for suficiente para o pagamento das dívidas previstas do período seguinte, a firma reinicia suas atividades.

- Suspensa ( $STF_{i,t} = 3$ )

A firma foi liquidada e não recebeu aportes em volume suficiente para o reinício das atividades. A firma paralisa todas as suas atividades, aguardando aportes adicionais em períodos subsequentes para o reinício de suas atividades (essa situação é atualizada pelo investidor, ao realizar aportes).

Quanto aos bancos, podem estar nas seguintes situações:

- Normal ( $STB_{b,t} = 1$ )

Os pagamentos estão em dia, e a operação é normal

- Liquidado ( $STB_{b,t} = 0$ )

O banco, independentemente da situação no período anterior, não conseguiu quitar suas dívidas. Ele encerra suas operações e tem suas dívidas não-pagas canceladas. Em seguida, recebe um aporte do governo ou de investidores (como no caso das firmas) e a operação se reinicia, independentemente do volume do aporte.

f) Registro de perdas

Ver anexo H

g) Ajuste de operações de crédito interbancário de prestador em *default*

Nos casos em que, no mercado interbancário, o banco  $b$ , prestador em  $t$ , entra em *default*<sup>21</sup> e não transfere integralmente o valor emprestado ao tomador, é necessário ajustar os registros da operação para refletir o valor efetivamente emprestado (transferido).

São corrigidos os valores das operações interbancárias em aberto ( $BI$ ), a soma dos valores dos empréstimos interbancários cedidos pelo banco  $b$  no período ( $FLL_{b,t}$ ) e os valores dos empréstimos interbancários pelas contrapartes  $c$  do banco  $b$  ( $FBI_{c,t}$ ). O cálculo leva em conta a taxa de recuperação dos pagamentos do banco  $b$  ( $KBR_b$ ):

$$\begin{aligned}
 BI_{c,b} &= BI_{c,b} KBR_b \quad c = 1, \dots, NB \\
 FLL_{b,t} &= FLL_{b,t} KBR_b \\
 FBI_{c,t} &= FBI_{c,t} - \sum_d BI_{c,d} (1 - KBR_d)
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

<sup>21</sup>Em princípio, isso não deveria ocorrer, pois um banco somente se posiciona como prestador no interbancário se estiver em situação favorável.



Na última equação, cada tomador de empréstimo  $c$  recalcula o total dos empréstimos interbancários tomados.

h) Rolagem das dívidas em atraso para o período seguinte

As matrizes de dívidas de firmas ( $\mathbf{LFF}$  e  $\mathbf{LFNF}$ ) são zeradas, mantendo-se apenas a parcela não-paga das dívidas de firmas  $i$  com pagamento atrasado ( $STF_{i,t} = 2$ ).

$$\begin{aligned} LFF_{i,j} &= LFF_{i,j} (1 - KF_i) & j = 1, \dots, NI + NB + 2 \\ LFNF_{i,j} &= LFNF_{i,j} (1 - KF_i) \end{aligned} \quad (3.58)$$

As matrizes de dívidas dos bancos ( $\mathbf{LBF}$  e  $\mathbf{LBNF}$ ) são zeradas.

### 3.23 Recolhimento de Imposto de Renda das Famílias

O imposto de renda a pagar ( $FTWG_t$ ) é calculado sobre a parcela não-tributada da renda das famílias, isto é, a soma de salários e custos fixos recebidos das firmas  $i$ . Essa transferência é feita fora do sistema de pagamentos e depois do processamento dele. Isso ocorre porque as famílias só pagam imposto sobre os rendimentos efetivamente recebidos no período, o que só é possível determinar após o processamento do sistema de pagamentos, quando são conhecidos os valores atrasados do período ( $TWD_t$ ,  $TWNP_t$ ,  $TFXCD_t$  e  $TFXNP_t$ ) e os recuperados do período anterior. Há um mecanismo de imposição do pagamento de impostos pelas famílias, que faz o recolhimento dos mesmos antes dos gastos de consumo; assim sendo, ele sempre é pago em sua totalidade (as famílias não entram em *default*).

$$\begin{aligned} FTWG_t &= T_w (FTW_t + TWD_{t-1} - TWNP_t - TWD_t + FFXC_t + TFXCD_{t-1} - \\ &\quad - TFXNP_t - TFXCD_t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

São atualizados o valor contábil de impostos recebidos ( $FTG_t$ ) e os caixas das famílias e governo:

$$\begin{aligned} FTG_t &= FTG_t + FTWG_t \\ FCW_t &= FCW_t - FCWG_t \\ FCG_t &= FCG_t + FTWG_t \end{aligned} \quad (3.60)$$

### 3.24 Resultado de Firmas e Pagamento de Dividendos

As firmas apuram o resultado: valor líquido e lucro líquido e, com base nisso, pagam dividendos. Esse pagamento não é feito por meio do sistema de pagamentos, por

isso, é necessário verificar a disponibilidade de recursos para pagamento e registrar as movimentações em caixa.

Antes do cálculo do valor líquido de cada firma  $i$ , é calculado o valor do seu estoque de capital. Esse valor é igual ao valor depreciado do estoque antes do início da produção (pois se entende que a depreciação ocorre durante o processo produtivo):

$$FKG_{i,t} = \sum_j XS_{i,j}(1 - DEPR_j)P_{i,j} \quad (3.61)$$

O valor líquido de cada firma é calculado a partir dos itens do balanço. Entre esses itens estão as variáveis de perdas: somente valores não-pagos. Não são contados os valores não-recebidos, pois eles já estão refletidos no saldo em caixa da firma.

$$FA_{i,t} = FC_{i,t} + FKG_{i,t} + YI_{i,t}P_{i,t} - FBB_{i,t} - WD_{i,t} - BCPID_{i,t} - BBPID_{i,t} - FXCD_{i,t} - TFD_{i,t} + LCPID_{i,t} \quad (3.62)$$

Se  $FA_{i,t} < 0$  e  $FC_{i,t} > 0$ , a firma precisará receber o tratamento do status de pagamento ( $STF_{i,t}$ ) que ela teria recebido se não tivesse quitado os pagamentos do período, conforme a seção 3.22.

Para firmas  $i$  liquidadas em  $t$  ( $STF_{i,t} = 0$ ), devem ser registradas perdas definitivas de crédito bancário (nas variáveis de perdas da firma e do banco credor): empréstimos bancários em aberto não serão pagos. É registrado somente o principal (os juros só seriam devidos no período seguinte).

O lucro da firma é calculado<sup>22</sup> descontando-se aportes porventura recebidos:

$$FP_{i,t} = FA_{i,t} - FAA_{i,t} - FA_{i,t-1} \quad (3.63)$$

Em seguida, as firmas pagam dividendos. O valor a ser pago é o que excede o valor da firma no período inicial, limitado à disponibilidade em caixa. A finalidade dessa regra é fazer com que as firmas não acumulem recursos, reduzindo a quantidade de moeda em circulação.

Firmas pagam dividendos se os bancos  $b$  onde têm conta estiverem solventes ( $STB_{b,t} = normal$ ). Nesse caso, o valor dos dividendos a serem pagos é o mínimo entre o excedente do valor líquido da firma em  $t$ , com relação ao valor líquido dela em  $t = 1$ , e a sobra de caixa<sup>23</sup> dela ( $SOBRACX_i$ ) com relação ao necessário ao pagamento dos custos fixos em  $t + 1$ . O cálculo do valor de dividendos a serem pagos pela firma  $i$ , cujo banco

<sup>22</sup>Se a firma tiver sido liquidada em  $t - 1$ , o lucro deve ser obtido de:  $FP_{b,t} = FA_{b,t} - FA_{b,1}$ .

<sup>23</sup>A sobra de caixa é calculada de forma aproximada a partir de uma previsão dos recebimentos por vendas em  $t + 1$  e do valor dos custos fixos

está solvente, é dado por:

$$\begin{aligned} SOBRACX_i &= FC_{i,t} + \min(YI_{i,t}, YS_{i,t})P_{i,t} - FXC_i \\ FDF_{i,t} &= \max(0, \min(FA_{i,t} - FA_{i,1}, SOBRACX_i)) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Os bancos  $b$  das firmas  $i$ , além de solventes, devem ter disponibilidade de caixa e de reservas para o pagamento dos dividendos. Caso não tenham, os bancos pagam os dividendos de forma proporcional e são colocados em default ( $STB_{b,t} = liquidado$ ).

Por fim, os dividendos pagos são totalizados, por banco dos quais as firmas são correntistas e no total, e a movimentação é registrada nas contas das firmas e dos bancos. Para as firmas  $i$ :

$$\begin{aligned} FA_{i,t} &= FA_{i,t} - FDF_{i,t} \\ FC_{i,t} &= FC_{i,t} - FDF_{i,t} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Calculando totais e registrando para os bancos  $b$ :

$$\begin{aligned} FDFB_b &= \sum_i M_{b,i} FDF_{i,t} \\ TD_t &= \sum_i FDF_{i,t} \\ FCB_{b,t} &= FCB_{b,t} - FDFB_{b,t} \\ FDE_{b,t} &= FDE_{b,t} - FDFB_{b,t} \end{aligned} \quad (3.66)$$

### 3.25 Resultado de Bancos e Pagamento de Dividendos

Os bancos apuram o resultado: valor líquido e lucro líquido e, com base nisso, pagam dividendos. Esse pagamento não é feito por meio do sistema de pagamentos, por isso, é necessário verificar a disponibilidade de recursos para pagamento e registrar as movimentações em caixa.

O valor líquido de cada banco  $b$  é calculado a partir dos itens do balanço. Entre esses itens está o valor a receber em atraso das firmas. As perdas originadas por bancos (a pagar e a receber) já estão refletidas no saldo em caixa, dado que essas perdas são sempre definitivas.

$$FAB_{b,t} = FCB_{b,t} + FLCB_{b,t} + FLI_{b,t} + LBPID_{b,t} - FDE_{b,t} - FBI_{b,t} \quad (3.67)$$

Se  $FAB_{b,t} < 0$  e  $FCB_{b,t} > 0$ , o status de pagamento do banco deve ser reclassificado para *liquidado* ( $STB_{b,t} = 0$ ).

O lucro do banco calculado descontando-se aportes porventura recebidos<sup>24</sup>:

$$FPB_{b,t} = FAB_{b,t} - FAAB_{b,t} - FAB_{b,t-1} \quad (3.68)$$

Os bancos calculam e pagam dividendos depois de apurado o resultado do período. O valor a ser pago é a receita líquida de juros, sujeita à disponibilidade de caixa próprio.

Inicia-se o cálculo dos dividendos a pagar pelos bancos  $b$  pelo caixa disponível para pagamento, que é o excedente em relação ao valor mínimo de reservas estabelecido para os bancos (colchão em relação ao requerimento de reservas):

$$SOBRACXB_{b,t} = FCB_{b,t} - \delta\mu FDE_{b,t} \quad (3.69)$$

O valor a pagar de dividendos é o mínimo entre a receita líquida de juros e o caixa disponível:

$$\begin{aligned} FDB_{b,t} &= \min(FILCB_{b,t} + FILI_{b,t} - FTBG_{b,t} - FIBI_{b,t} - FIDE_{b,t}, SOBRACXB_{b,t}) \\ FDB_{b,t} &= \max(FDB_{b,t}, 0) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dividendos recebidos pelos investidores são somados aos recebidos das firmas:

$$TD_t = TD_t + \sum_b FDB_b \quad (3.71)$$

Valores do dividendos pagos pelos bancos  $b$  são contabilizados e movimentados no caixa:

$$\begin{aligned} FAB_{b,t} &= FAB_{b,t} - FDB_{b,t} \\ FCB_{b,t} &= FCB_{b,t} - FDB_{b,t} \end{aligned} \quad (3.72)$$

### 3.26 Intervenção em Firmas

Firmas com pagamento atrasado ( $STF_{i,t} = 2$ ) ou em liquidação ( $STF_{i,t} = 0$ ) têm grandes dificuldades para honrar seus compromissos no período seguinte, podendo paralisar suas atividades se não receberem recursos financeiros adicionais. Esses recursos podem ser obtidos de aportes realizados por investidores ou pelo governo, conforme indicado por parâmetro da simulação. Os investidores (quando indicado por parâmetro) aportam recursos para manter as firmas em funcionamento, recebendo dividendos em troca (além disso, as famílias recebem pagamentos de custos fixos dessas firmas). O governo, quando é o caso, procura manter a estabilidade dos indicadores macroeconômicos, como o PIB e o nível de emprego.

As firmas também poderiam receber recursos financeiros adicionais através de crédito

---

<sup>24</sup>Se o banco tiver sido liquidado em  $t - 1$ , o lucro deve ser obtido de:  $FPB_{b,t} = FAB_{b,t} - FAB_{b,1}$ .

bancário (essa modalidade de auxílio às firmas não é tratada neste trabalho). Neste modelo, firmas com pagamento atrasado ou em liquidação usualmente estão sofrendo restrição de crédito. Isso pode ser motivado por alavancagem dessas firmas acima dos limites aceitos pelos bancos para concessão de empréstimos ou pela pouca disponibilidade de recursos para empréstimo por parte dos bancos. Uma maneira pela qual essa restrição poderia ser mitigada seria através de empréstimos governamentais aos bancos, vinculados à condição de serem empregados em empréstimos a firmas em dificuldades.<sup>25</sup>

Havendo necessidade de auxílio, os aportes a realizar nas firmas são calculados. No caso de firmas com pagamento em atraso, o aporte é a soma das dívidas não-pagas com o valor do empréstimo bancário. Para as firmas a liquidar, o aporte a realizar é a diferença entre o valor que complementa o valor líquido da firma ao nível inicial da firma ( $FA_{i,1}$ ) e o total não-pago, que é considerado perda definitiva para os credores. Se esse valor não for suficiente para o pagamento dos custos fixos em  $t+1$ , é feita uma complementação do aporte.

Para firmas com pagamento atrasado:

$$FAA_{i,t+1} = TNPF_{i,t} + FBB_{i,t} \quad (3.73)$$

Para firmas liquidadas:

$$\begin{aligned} FAA_{i,t+1} &= \max(0, FA_{i,t} - FA_{i,1} - TNPF_{i,t}) \\ SOBRACX_i &= FC_{i,t} + \min(YI_{i,t}, YS_{i,t})P_{i,t} - FXC_i \\ FAA_{i,t+1} &= \max(FAA_{i,t+1}, -SOBRACX_i) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Os aportes são deduzidos das reservas de socorro a firmas. Caso o total dos aportes seja superior ao valor dessas reservas, os aportes são feitos de forma proporcional, de forma a utilizar todo o valor das reservas:

$$FAA_{i,t+1} = FAA_{i,t+1} (TRBF_t / \sum_i FAA_{i,t+1}) \quad (3.75)$$

Se alguma firma em liquidação ficar impossibilitada de pagar seus custos fixos em  $t + 1$  devido a aporte recebido insuficiente, ela terá suas atividades suspensas em  $t + 1$  ( $STF_{i,t} = 3$ ). Ao final de  $t + 1$ , essa firma se candidatará novamente a receber o aporte necessário, permanecendo com atividades suspensas até conseguir os recursos necessários ao reinício da operação. Quando isso ocorre, a firma volta à situação de liquidada ( $STF_{i,t} = 0$ ) e as suas operações são reiniciadas no período seguinte.

---

<sup>25</sup>A diferença principal entre o auxílio a firmas por crédito bancário e o auxílio por aportes é a necessidade de devolução dos empréstimos concedidos. Para que essa devolução seja possível, é necessário que a firma auxiliada se reequilibre, o que, usualmente, exigiria alguma forma de reestruturação da mesma, não prevista neste modelo.

Feitos os aportes, os valores de firmas são atualizados: saldo em caixa, valor líquido e valores de crédito bancário. No caso de firmas liquidadas, os estoques de bens para produção e de produtos são mantidos.

Total de aportes:

$$TAF_t = \sum_i FAA_{i,t+1} \quad (3.76)$$

Atualização de dados de firmas com pagamento atrasado (os aportes afetam firmas e bancos em  $t + 1$ ):

$$\begin{aligned} FA_{i,t+1} &= FA_{i,t} + FAA_{i,t+1} \\ FC_{i,t+1} &= FC_{i,t} + FAA_{i,t+1} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Atualização de dados de firmas  $i$  em liquidação (dívidas em aberto são consideradas perdas definitivas e são canceladas):

$$\begin{aligned} FA_{i,t+1} &= FA_{i,t} + TNPF_{i,t} + FAA_{i,t+1} \\ FC_{i,t+1} &= FC_{i,t} + FAA_{i,t+1} \\ FBB_{i,t+1} &= 0 \\ FILCB_{b,t+1} &= FILCB_{b,t+1} - \sum_c M_{c,i} FIBB_{i,t+1} \quad (\text{atualiza juros devidos: banco}) \\ FIBB_{i,t+1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Movimentações nos bancos das firmas que receberam aporte:

$$\begin{aligned} FCB_{b,t} &= FCB_{b,t} + \sum_i M_{b,i} FAA_{i,t+1} \\ FDE_{b,t} &= FDE_{b,t} + \sum_i M_{b,i} FAA_{i,t+1} \end{aligned} \quad (3.79)$$

### 3.27 Intervenção em Bancos

De forma semelhante ao que ocorre com as firmas, investidores ou o governo intervêm nos bancos em liquidação ( $STB_{b,t} = 0$ ). No processo de liquidação, o banco recebe aporte e suas dívidas são canceladas.

Havendo bancos com necessidade de liquidação, os aportes a realizar são calculados. O valor do aporte a realizar é o mínimo entre o valor líquido do banco e o excedente em relação ao valor mínimo de reservas bancárias estabelecido para os bancos (colchão em

relação ao requerimento de reservas):

$$\begin{aligned}
SOBRACXB_b &= FCB_{b,t} - \delta\mu FDE_{b,t} \\
FAAB_{b,t+1} &= -\min(FAB_{b,t}, SOBRACXB_b) \\
FAAB_{b,t+1} &= -\min(FAAB_{b,t+1}, 0)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Se o valor total dos aportes calculados ( $\sum_b FAAB_{b,t+1}$ ) for superior ao valor das reservas de socorro a bancos ( $TRBB_t$ ), os aportes são feitos de forma proporcional, de forma a utilizar todo o valor dessas reservas.

$$FAAB_{b,t+1} = FAAB_{b,t+1}(TRBB_t / \sum_b FAAB_{b,t+1}) \tag{3.81}$$

Feitos os aportes, são atualizados os valores: total de aportes, saldo em caixa, valor líquido e valores de juros de crédito interbancário.

Total de aportes:

$$TAB_t = \sum_b FAAB_{b,t+1} \tag{3.82}$$

Atualização de dados de bancos em liquidação (os aportes afetam os bancos em  $t + 1$ ). Se esses bancos em liquidação são tomadores de empréstimos interbancários, as dívidas (principal) são canceladas (os registros de principal de operações cujos bancos prestadores foram liquidados foram corrigidos na seção 3.22).

$$\begin{aligned}
FAB_{b,t+1} &= FAB_{b,t} + FAAB_{b,t+1} + TNPBB_{b,t} \\
FCB_{b,t+1} &= FCB_{b,t} + FAAB_{b,t+1} \\
FBI_{b,t+1} &= 0 \\
FLI_{c,t+1} &= FLI_{c,t+1} - \sum_b BI_{b,c}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Por fim, o principal e os juros de operações interbancárias modificadas pela liquidação de bancos tomadores ou emprestadores são recalculados e registrados, para tomadores e emprestadores de cada operação afetada, para a realização dos pagamentos em  $t + 1$ . O recálculo é feito para as matrizes de principal (**BI**) e juros (**IBI**) de empréstimos interbancários iniciados em  $t$  e para os registros contábeis de juros de empréstimos interbancários tomados ( $FIBI_{b,t+1}$ ) ou cedidos ( $FILL_{b,t+1}$ ) dos bancos.

### 3.28 Recomposição de Reservas de Socorro (Firmas e Bancos)

Após as intervenções possivelmente realizadas no período, as reservas das quais foram obtidos os recursos para aporte são recompostas. A origem dos recursos é definida por parâmetro da simulação, e podem ser provenientes da receita de dividendos obtidos pelos

investidores, ou da receita de impostos arrecadados pelo governo.

- Recursos para recomposição fornecidos pelos investidores:

Nesse caso, os recursos são provenientes dos dividendos pagos no período. Os dividendos pagos são separados por origem: bancos e firmas: os dividendos provenientes de bancos só são utilizados na recomposição de reservas de bancos, o mesmo vale para firmas. A recomposição é feita com base no nível das reservas no período inicial, calculado com base em parâmetros da simulação. Valores de dividendos não-utilizados na recomposição são destinados ao consumo.

$$\begin{aligned}
 recb &= \min(TRBB_1 - TRBB_t + TAB_t, \sum_i FDB_{i,t}) \\
 recf &= \min(TRBF_1 - TRBF_t + TAF_t, \sum_i FDF_{i,t}) \\
 TRBB_t &= TRBB_t - TAB_t + recb \\
 TRBF_t &= TRBF_t - TAF_t + recf \\
 FSI_t &= FSI_t + TD_t - recf - recb
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

- Recursos para recomposição fornecidos pelo governo:

Inicialmente, os totais necessários à recomposição das reservas de socorro a firmas e de socorro a bancos são calculados e somados. Em seguida, se a receita de impostos não for suficiente para a recomposição, esta é feita de maneira proporcional, para firmas e bancos. Nesse caso, como os recursos para recomposição não são provenientes dos dividendos recebidos no período, estes são direcionados ao consumo.

Ao final, são atualizados os saldos em caixa dos investidores e das famílias:

$$\begin{aligned}
 FCI_t &= FCI_t + recb + recf - TAB_t - TAF_t \\
 FCW_t &= FCW_t + FSI_t
 \end{aligned} \tag{3.85}$$



## 4 Análises e Resultados

### 4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, o modelo desenvolvido neste trabalho é, inicialmente, parametrizado; em seguida, passa por um processo de validação e, por fim, é utilizado na realização de análises de diferentes cenários econômicos. Inicialmente, serão feitas algumas considerações sobre a utilização dessa classe de modelos.

A modelagem matemática de uma economia usualmente consiste na pesquisa de relações analíticas entre variáveis econômicas. Essas relações podem ser validadas empiricamente e, se consideradas válidas, podem ser utilizadas na análise de cenários. O conhecimento obtido mediante essa metodologia é específico e preciso.

Os modelos baseados em agentes são generalizações dos modelos citados acima <sup>1</sup>, mas, usualmente, utilizam métodos numéricos implementados computacionalmente. A modelagem matemática tradicional e a modelagem baseada em agentes se utilizam dos mesmos princípios, isto é, são definidos os agentes relevantes para os problemas que se quer estudar, são definidas regras de interação (ou seja, regras para os mercados envolvidos), e as seqüências (ou simultaneidade) dos cálculos no tempo. No entanto, existem algumas diferenças entre elas: os modelos baseados em agentes permitem, em larga escala, heterogeneidade entre agentes de uma mesma classe, impõem menos restrições à coordenação dos agentes e não fornecem, como resultado, a dedução de novas relações entre variáveis do modelo. Como consequência, a utilização desse tipo de modelo como ferramenta para a aquisição de conhecimento requer uma abordagem diferente da utilizada com os modelos tradicionais. Ao se utilizar um modelo baseado em agentes, está-se montando uma economia em escala reduzida, tanto no número de agentes, quanto na abrangência do conjunto de regras adotado, de forma tal que seja possível realizar repetidos experimentos (ao contrário do que ocorre com a economia real, na qual os eventos são únicos), observando-se o comportamento do modelo como um todo ou de qualquer parte que se queira.

Análises com esse tipo de modelo podem ser utilizadas para:

---

<sup>1</sup>Isto quer dizer, se for possível reduzir o número de agentes de forma a se ter 1 agente de cada tipo, obtém-se o mesmo resultado obtido por um modelo de agente representativo que utilize as mesmas equações.

- a) verificar a distribuição de variáveis que caracterizam os agentes de cada classe. Por exemplo, pode-se estudar a distribuição de ativos totais das firmas que resulta das tecnologias de produção, das demandas e da substitutibilidade entre os bens nas preferências dos consumidores.
- b) identificar os comportamentos macroeconômicos que surgem de regras de comportamento individuais (microfundamentação comportamental) ou os comportamentos microeconômicos que surgem de regras definidas em nível macroeconômico (um exemplo disso seria o efeito da existência de instituições específicas no comportamento dos agentes, ao nível microeconômico).
- c) construir mecanismos de detecção de fenômenos de interesse em seus estágios iniciais, como crises, por exemplo. Isso é possível porque se pode repetir experimentos que envolvem crise enquanto se procura por padrões que se repetem nesses experimentos.

Apesar do potencial apresentado por modelos baseados em agentes para o aperfeiçoamento do conhecimento sobre o funcionamento de economias sujeitas a regras de funcionamento mais elaboradas, há dificuldades na estimação dos parâmetros dos modelos. LeBaron e Tesfatsion (2008) afirmam que ciclos de identificação, estimação e teste poderiam ser adotados para esses modelos, como é feito para os modelos tradicionais, mas seriam muito custosos computacionalmente, devido à inexistência de métodos econométricos analíticos para quase todas as situações, exigindo métodos computacionalmente custosos. Por causa disso, a estimação desses modelos apresenta muitas dificuldades, desincentivando a sua utilização pelos formuladores de políticas nos bancos centrais, que prefeririam continuar a usar modelos mais simples e utilizar os modelos baseados em agentes na exploração dos efeitos de decisões políticas não-convencionais.

Fagiolo et al. (2007), por sua vez, salienta o sucesso obtido pelos modelos baseados em agentes na explicação de fenômenos macroeconômicos, mas afirma que há excesso de heterogeneidade entre eles e falta de consenso em questões metodológicas centrais. O seu trabalho aponta abordagens metodológicas para a estimação e calibração desses modelos, mas afirma a necessidade de se resolver questões em aberto nas seguintes áreas: 1) estratégias alternativas para a construção de modelos baseados empiricamente; 2) problemas devidos à sobre-parametrização; 3) contra factuais e seu uso em análise de políticas; 4) definição de testes empíricos suficientemente fortes, e 5) problemas devidos à disponibilidade, qualidade e viés das bases de dados disponíveis, sugerindo que se intensifique a pesquisa relativa a questões metodológicas. Há poucos trabalhos relacionados à estimação de parâmetros de modelos baseados em agentes em economia, podendo-se citar Gilli e Winker (2003) e Alfarano et al. (2005).

A seguir, será apresentada a parametrização do modelo desenvolvido neste trabalho. Adotando-se essa parametrização, serão verificados alguns fatos estilizados distribucionais.

Mais tarde, será analisada a sensibilidade do comportamento da economia à variação de parâmetros e, por fim, serão feitos alguns estudos de caso relacionados a intervenções de política monetária e à gestão de crises. Essas análises estão longe de ser exaustivas<sup>2</sup>, mas servem como um ponto de partida na utilização deste modelo como uma economia de laboratório, cujo comportamento replica, ao menos qualitativamente, as reações de uma economia real a eventos específicos e a decisões de política econômica.

## 4.2 Parametrização do Modelo

Nesta seção, é apresentada a parametrização do modelo adotada em todas as simulações. Nas simulações individuais, alguns parâmetros são explicitamente alterados; os demais são mantidos com os valores definidos nesta seção. Os parâmetros definidos a seguir não foram obtidos de estimação ou da literatura, entretanto, procurou-se configurar uma economia que apresentasse desigualdades nos preços e nos tamanhos de firmas e bancos da ordem de pelo menos 100 vezes, como se verifica na prática. A seguir, os parâmetros adotados são apresentados por grupos.

*Parâmetros de escala:* As simulações foram executadas em 1000 períodos, considerados suficientes para a avaliação dos fenômenos, a partir de economias geradas ao início da simulação. Na maioria das vezes, optou-se por configurar a economia com 1000 firmas e 100 bancos, número razoavelmente alto de agentes, mas não alto o suficiente para inviabilizar o processamento por motivos de tempo e memória. Os produtos foram distribuídos em cestas de consumo (consumidores finais) canônicas, ou seja, 1 produto por cesta, o que determinou a geração de um número de cestas igual ao de produtos. Não foram definidos produtos exclusivamente intermediários (não-incluídos em nenhuma cesta), nem cestas compostas por mais de 1 produto, embora isso fosse possível. Quanto às cestas de consumo do governo, foram geradas como uma replicação das cestas de consumo de consumidores (poderiam ser diferentes). A economia tem, inicialmente, 10000 trabalhadores, dos quais 90% estão empregados inicialmente.

*Associações entre agentes:* Na associação entre firmas e bancos, definiu-se a proporção de 10 firmas por banco (ver item anterior). No entanto, essa proporção não é fixa para todos os bancos: as firmas foram associadas aos bancos depois de se extrair, para cada banco, o número de firmas correntistas que deveria ter, de uma distribuição lognormal; em seguida, as firmas a serem associadas foram escolhidas aleatoriamente, de modo que todas as firmas fossem associadas a algum banco. Não se impôs que todos os bancos possuíssem firmas correntistas. Com relação à associação entre firmas, foi utilizado um processo aproximadamente igual, mas partindo da

---

<sup>2</sup>Uma análise não-realizada, mas que poderia ter sido feita, é a referente aos impactos de decisões de política fiscal.

probabilidade de uma conexão entre firmas  $i$  e  $j$  existir (conectividade), dada pelo parâmetro  $PCN$ . O valor desse parâmetro, quando não-alterado, foi de 10%. Como as cestas de consumo foram canônicas, não houve a necessidade de sorteio.

*Definição das funções de produção:* As funções de produção de cada firma possuem a forma funcional definida em (3.12). Para cada firma  $i$ , os insumos foram determinados pelas interconexões entre firmas definidas no item anterior. As quantidades consumidas de cada insumo  $j$  pelas firmas  $i$  foram extraídas de uma distribuição uniforme  $u[0.1, 100]$ , as produtividades específicas de cada insumo  $QX_{i,j}$  e do trabalho  $QW_i$  foram extraídas de  $u[0.1, 10]$ , e a quantidade de trabalho consumida foi extraída de  $u[0.1, 500]$ . Por fim, as demandas dos consumidores finais pelas cestas foram extraídas de  $u[0.1, 100]$  e a intensidade do ruído na determinação da demanda foi assumida  $\xi = 0.1$ .

*Características dos bens:* Uma parcela dada por  $FBK = 0.4$  dos bens foi definida como bens de capital. Esses bens foram sorteados do conjunto total de bens. As taxas de depreciação foram extraídas de  $u[0.02, 0.5]$  (taxas de depreciação de 2% a 50% por período). Por sua vez, o excedente de produto que cada firma procurou manter em estoque foi definido como  $IR = 0.1$  da meta de produção do período. Por fim, o coeficiente de substitutibilidade dos bens nas funções de demanda (equação (E.13)) foi assumido  $\rho = 0.5$ .

*Taxas de lucros de firmas e bancos e custos fixos de firmas:* Inicialmente, foram definidas, como taxas de lucro-alvo de firmas,  $PMI = 0.01$ , (lucro calculado sobre os custos totais) e dos bancos,  $PMB = 0.01$  (calculado sobre o total de empréstimos bancários). Quanto aos custos fixos de firmas, foram obtidos de um custo fixo unitário extraído de uma distribuição lognormal, escolhida por sua assimetria à direita. O propósito de gerar os custos fixos dessa maneira foi gerar desigualdades nos preços dos produtos, como pode ser verificado na equação (C.8).

*Taxas de juros:* A taxa básica de juros foi, inicialmente, zero. Os coeficientes para cálculo das taxas de juros de crédito comercial (ver 3.9) e bancário (ver 3.10) foram:  $\varphi_1 = 0.2$  e  $\varphi_2 = 0.01$ . Por sua vez, os utilizados nos cálculos de taxas do interbancário (ver 3.17) foram:  $\varphi_1^I = 0.1$  e  $\varphi_2^I = 0.01$ .

*Variáveis de gerenciamento de bancos:* O número máximo de parceiros no mercado interbancário foi 3. O recolhimento compulsório foi calculado com  $\delta = 0.7$  e a margem de segurança calculada sobre o requerimento de reservas foi  $\mu = 0.3$ . O coeficiente de adequação de capital *Capital Adequacy Ratio* foi assumido  $\gamma = 0.08$ , e a margem de segurança calculada sobre esse requerimento,  $\nu = 0.3$ . A alavancagem máxima que uma firma precisava ter para ter uma solicitação de crédito bancário aceita foi configurada como  $LMAX = 0.8$ .

*Aportes e reservas de socorro:* Inicialmente, foi definido que os aportes deviam ser realizados pelos investidores, ou seja, as reservas de socorro de são onde retirados os valores para os aportes deviam ser mantidas com os lucros obtidos do conjunto dos agentes (firmas ou bancos) aos quais se destinavam. O nível de recursos que se procura manter nas reservas é calculado sobre a soma dos valores líquidos, no início da simulação, de firmas e bancos. Nesse cálculo, foram utilizados os multiplicadores  $KSF = 0.02$  e  $KSB = 0.02$ .

*Alíquotas de imposto:* Sobre renda auferida por pessoa física:  $T_w = 0.2$ ; sobre lucro de firmas  $T_y = 0.05$  e sobre lucro de bancos,  $T_b = 0.2$ .

### 4.3 Medidas Realizadas

Nesta seção, serão descritas as medidas utilizadas nas análises que poderão ser objeto de dúvida. As medidas utilizadas aqui são essencialmente as mesmas utilizadas nas análises do mundo real, uma vez que o modelo apresenta, em escala reduzida, elementos semelhantes aos de economias reais. São elas:

- a) PIB médio: é calculado com preços-base do equilíbrio inicial:

$$(\cdot) = \sum_t \sum_i (XBG_{i,t} + XBW_{i,t})P_{i,1}/T$$

- b) Índice de preços médio: utiliza como cesta-base o consumo final (de consumidores e do governo) do equilíbrio inicial:

$$(\cdot) = \sum_t \left( \frac{\sum_i (XBG_{i,1} + XBW_{i,1})P_{i,t}}{\sum_i (XBG_{i,1} + XBW_{i,1})P_{i,1}} \right) / T$$

- c) Valor agregado máximo - firmas: é obtido da maior soma, em um período, dos valores líquidos das firmas (o mesmo vale para os bancos):

$$(\cdot) = \max_t \left( \sum_i FA_{i,t} \right)$$

- d) Desemprego máximo (%): é calculado com base no número total de trabalhadores da economia, definido no início da simulação:

$$(\cdot) = \max_t \left( 100 \left( 1 - NW_t/NWTI \right) \right)$$

- e) Renda média das famílias: considera a renda líquida das famílias: salários, custos fixos, dividendos de firmas e de bancos, descontados os impostos:

$$(\cdot) = \sum_t \left( \sum_i (FW_{i,t} + FDF_{i,t}) + \sum_b FDB_{b,t} - FTWG_t \right) / T + \sum_i FXC_i$$

f) Crédito comercial: é o valor agregado médio da soma dos empréstimos comerciais concedidos, e equivale ao valor do consumo intermediário agregado dos bens:

$$(\cdot) = \sum_t \sum_i FBC_{i,t}/T$$

g) Base monetária no período  $t$ : é a soma dos valores em caixa dos bancos, incluindo o valor do recolhimento compulsório, com o valor da moeda em poder do público: trabalhadores, governo e investidores (reservas de socorro).

$$(\cdot) = \sum_b FCB_{b,t} + FCW_t + FCG_t + TRBF_t + TRBB_t$$

h) Reservas bancárias: é o valor médio das reservas bancárias que excedem o valor do depósito compulsório:

$$(\cdot) = \sum_t \sum_i (FCB_{b,t} - \delta FDE_{b,t})/T$$

i) Nível de reservas de socorro a firmas - mínimo: é o valor mínimo da relação entre as reservas de socorro ao final de um período e o saldo que essas reservas devem ter, definido no período inicial. Esse valor não é o valor da reserva logo após a sua utilização para aportes, mas após a recomposição, depois da utilização. Quando esse indicador é menor do que 1, isso indica que não está sendo possível recompor integralmente as reservas após a utilização, e sinaliza uma possível crise. O mesmo vale para reservas de socorro a bancos.

$$(\cdot) = \min_t TRBF_t/TRBF_1$$

j) Perdas financeiras de firmas - máximo: é o máximo valor agregado das perdas financeiras de firmas em um período. As perdas financeiras são os valores não-recebidos pelas firmas no processo de compensação, por default de firmas ou bancos. O mesmo conceito se aplica aos bancos.

$$(\cdot) = \max_t \sum_i TNRF_{i,t}$$

k) Relação entre perdas financeiras por contágio / perdas financeiras totais - máximo de firmas: nesta medida, é considerada a soma, para todas as firmas, dos valores não-pagos por firmas pelo fato de terem tido perdas (valores não-recebidos). Esse valor não-pago por uma firma é o valor que excede o cálculo do valor não-pago pela firma obtido na primeira iteração do processo de compensação; portanto, é o valor da perda causada por ela a outros agentes por ter sofrido perdas originadas em outros agentes. O valor agregado dessa perda em um período é dividido pelo

valor das perdas financeiras agregadas causadas pelas firmas, calculado de forma semelhante à das perdas sofridas pelas firmas no item anterior. Para bancos, vale o mesmo conceito.

$$(\cdot) = \max_t \left( \frac{\sum_i (TNPF_{i,t} - TNPFO_{i,t}) - aux_{i,t}}{\sum_i TNPF_{i,t}} \right)$$

Sendo:

$$aux_{i,t} = FBB_{i,t}, \text{ se a firma } i \text{ foi liquidada em } t, \text{ e } 0 \text{ caso contrário}$$

- l) Perdas no processo produtivo por restrição de fornecimento - máximo: é o máximo valor agregado dos bens não-produzidos pelas firmas em um período. A quantidade de bens não-produzida é a diferença, a menor, entre a quantidade de bens produzidos e a meta de produção da firma naquele período. As firmas produzem a quantidade estipulada pela meta, a não ser que não consigam as quantidades de insumos que demandaram aos fornecedores.

$$(\cdot) = \max_t \sum_i (YG_{i,t} - Y_{i,t}) P_{i,t}$$

- m) Perdas no processo produtivo por restrição na demanda - máximo: são o máximo valor agregado de um período, de venda das mercadorias não-vendidas a clientes pelo fato de terem interrompido a produção por atraso de pagamento. A estimativa usa os fornecimentos calculados no equilíbrio inicial. Na equação a seguir,  $aux_{i,j}$  é a quantidade do bem  $j$  demandada pela firma  $i$  no equilíbrio, desconsiderando que alguns insumos são bens de capital.

$$aux = Xu \cdot (y \mathbf{1}_{[I \times NI]}) \quad (\text{ver seção C.3.2})$$

A quantidade demandada dos bens de capital em equilíbrio é a parcela depreciada. Para bens de consumo, a depreciação é igual a 1.

$$Xeq = (Xeq_{i,j}) = aux_{i,j} DEPR_j$$

A matriz  $(Ind_{[NI \times T-1]})$  indica se a firma  $i$  suspendeu a produção no período anterior.

$$Ind_{i,t} = \begin{cases} 1, & \text{se } STF_{i,t-1} \in \{2, 3\}, \text{ ou} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$(\cdot) = \max_{t=2, \dots, T} \sum_j \left( \sum_i Xeq_{j,i} Ind_{i,t} \right) P_{i,t-1}$$

- n) Perdas no processo produtivo - oportunidade de venda - máximo: são o máximo valor

agregado de um período das mercadorias demandadas às firmas e não-vendidas por insuficiência de estoque.

$$(\cdot) = \max_{t=2, \dots, T} \sum_i (DY_{i,t} - YS_{i,t})P_{i,t-1}$$

- o) Ativos totais - firmas: para uma firma  $i$ , é a soma, em um período  $t$ , das seguintes parcelas: disponibilidade em caixa, valor dos bens de capital de que dispõe, valor do estoque de produtos e valores a receber de empréstimos comerciais em atraso. Os valores são calculados ao final de um período.

$$(\cdot) = FC_{i,t} + FKG_{i,t} + YI_{i,t}P_{i,t} + LCPID_{i,t}$$

- p) Ativos totais - bancos: para um banco  $b$ , é a soma, em um período  $t$ , das seguintes parcelas: caixa do banco, valor principal dos empréstimos bancários e interbancários cedidos e valores em atraso a receber de firmas com pagamentos em atraso. Os valores são calculados ao final de um período, por isso, não há saldo de juros a receber.

$$(\cdot) = FCB_{b,t} + FLCB_{b,t} + FLI_{b,t} + LBPID_{b,t}$$

- q) *Equity ratio* - firma  $i$  no período  $t$ : é o valor líquido de uma firma dividido pelos seus ativos totais.

$$(\cdot) = FA_{i,t} / (FC_{i,t} + FKG_{i,t} + YI_{i,t}P_{i,t} + LCPID_{i,t})$$

#### 4.4 Validação do modelo

LeBaron e Tesfatsion (2008) analisaram os requisitos a serem atendidos pelos modelos baseados em agentes para que possam ser úteis na geração de conhecimento a respeito de processos macroeconômicos. Afirmaram que um desses requisitos é o de que as especificações dos modelos devem estar sujeitas à validação empírica, buscando-se relacionar o comportamento do modelo ao observado no objeto modelado. No entanto, a validação empírica de modelos econômicos baseados em agentes apresenta uma série de dificuldades específicas, das quais algumas são relacionadas a seguir:

- a) Graus de liberdade. Modelos baseados em agentes usualmente contêm muitos parâmetros, de modo que um pesquisador treinado pode manipular esses parâmetros para obter conformidade a fatos estilizados empíricos. Além disso, um pesquisador pode usar uma grande variedade de formas funcionais e algoritmos de aprendizagem nos seus modelos, de modo a obter comportamentos bem-ajustados aos dados de



que dispõe, o que não significa que o modelo se ajuste bem a novos conjuntos de dados.

- b) Algumas propriedades dos modelos não são bem compreendidas, nem motivadas pelo comportamento humano observado.
- c) Nem sempre é possível validar as distribuições obtidas em nível micro pela simples ausência de dados empíricos.

Apesar dessas dificuldades, a validação empírica é tão importante para esses modelos quanto para os demais tipos de modelo. Uma forma natural de validação é a replicação de características empíricas em muitos níveis de agregação e escalas de tempo. Os modelos baseados em agentes usualmente geram uma dinâmica distribucional completa para uma economia. Um critério de validação possível seria a confrontação de distribuições de propriedades dos agentes do modelo com as distribuições empíricas correspondentes. Isso tem sido feito com frequência na literatura; alguns exemplos serão abordados na próxima seção, na qual o modelo proposto neste trabalho também passará por um processo simples de validação por replicação de um fato estilizado.

#### 4.4.1 Fatos Estilizados

Gatti et al. (2007) afirmam que a capacidade de um modelo de replicar regularidades bem-estabelecidas encontradas em dados empíricos é um sinal encorajador de sólida microfundamentação.

A seguir, são apresentados alguns fatos estilizados relacionados a firmas, bancos e a ciclos econômicos, reproduzidos em outros trabalhos, indicando as regularidades procuradas pelos autores:

Em Gatti et al. (2003):

- a) Choques reais e nominais afetam o PL (Patrimônio Líquido) e, portanto, o crescimento e sobrevivência de cada firma individual (Judd e Treham (1995)).

Em Gatti et al. (2007):

- a) As taxas de variação cumulativas do produto durante expansões e contrações seguem uma distribuição de Weibull (Guilmi et al. (2004)).
- b) A taxa de crescimento do produto individual e do agregado seguem distribuições de Laplace similares (Stanley et al. (1996)) e (Canning et al. (1998)).
- c) A idade das firmas existentes é distribuída exponencialmente (Fujiwara (2003)).
- d) *Bad debts* (*defaults*) seguem distribuição de Weibull (Gatti et al. (2004a)).

Em Gatti et al. (2007):

a) Fatos estilizados de dinâmica industrial:

- i) A distribuição dos tamanhos das firmas é assimétrica à direita e descrita por uma power law (ver Ijiri e Simon (1964), Ijiri e Simon (1976), Morel (1998), Axtell (2001), Gaffeo et al. (2003b), Ramsden e Kiss-Haypal (2000) e Okuyama et al. (1999)).
- ii) Dado o tamanho da firma, a taxa de crescimento média é decrescente com a idade.
- iii) A taxa de crescimento média de firmas sobreviventes decresce à medida que o tamanho aumenta.
- iv) A probabilidade de sobrevivência é positivamente correlacionada com o tamanho e a idade da firma.

Para os 3 últimos fatos: Evans (1987), Hall (1987), Dunne et al. (1988), Dunne et al. (1989), Audretsch e Mahmood (1994), Dunne e Hughes (1994) e Mata e Portugal (1994). A variância agregada é menor do que a dos agentes individuais (ver Lee et al. (1998), Canning et al. (1998), Amaral et al. (1997) e Gabaix (2002)).

b) Fatos estilizados financeiros (empréstimos bancários):

- i) A taxa de juros é acíclica ou moderadamente pró-cíclica (ver Gallegati e Gallegati (1996)).
- ii) Não existe correlação entre taxa de juros e dívida (ver Gatti et al. (2004b));
- iii) A relação entre o capital das firmas e o dos bancos é aproximadamente constante (ver Gallegati et al. (2003)).
- iv) A distribuição da quantidade de empréstimos é power law (ver Fujiwara (2003)).
- v) A distribuição de empréstimos em default é Weibull (ver Gatti et al. (2005)).
- vi) A distribuição dos lucros das firmas é power law (ver Fujiwara (2003)).
- vii) A distribuição da taxa de lucro com respeito ao equity ratio é assimétrica (ver Gatti et al. (2004b)).
- viii) A distribuição do equity ratio não é independente do tamanho da firma (ver Gatti et al. (2004b)).
- ix) Um equity ratio mais alto é associado a menor volatilidade dos lucros (ver Gatti et al. (2004b)).

- x) A taxa de retorno do capital e o equity ratio são positivamente correlacionados (ver Gatti et al. (2004b)).
  - xi) Relações (razões) financeiras são bons preditores de falhas das firmas, isto é, o equity ratio deteriora monotonicamente à medida que a data da bancarrota se aproxima (ver Beaver (1966)).
- c) Fatos estilizados de ciclos econômicos:
- i) As taxas de variação das taxas acumuladas têm distribuição Weibull (ver Guilmi et al. (2004)).
  - ii) A duração das fases de recessão é power law, enquanto a das expansões é exponencial (ver Gaffeo et al. (2003a)).
  - iii) A distribuição dos tamanhos das firmas se desloca ao longo do ciclo de negócios (ver Gaffeo et al. (2003b)).
  - iv) A autocorrelação do PIB simulado (0.8) é bastante próxima da real (0.93) (ver Gallegati e Stanca (1999)).
  - v) O desvio-padrão do PIB simulado (2.9) é muito próximo do real (2.8) (ver Gallegati e Stanca (1999)).

A estrutura de um modelo pode não favorecer a replicação de determinadas classes de fatos estilizados. No caso deste modelo, as ligações entre firmas são fixas, apesar do peso relativo dessas ligações sofrer alterações dependendo de preços. Também são fixas as ligações firma-banco. Além disso, as firmas e os bancos distribuem todo o lucro como dividendos, de modo que não é possível abordar a questão do crescimento de uma firma. Outra característica desta parametrização deste modelo é que a economia não cresce no longo prazo; tipicamente, o PIB dessa economia flutua irregularmente em torno de um valor de equilíbrio, de modo que não se pode falar em padrões de crescimento. Assim sendo, da relação apresentada de fatos estilizados, apenas alguns poderiam ser objeto de tentativa de replicação por este modelo. Uma relação desses fatos seria:

- a) Do trabalho de Gatti et al. (2007), os fatos descritos nos itens a e d, e
- b) Do trabalho de Gatti et al. (2007), os fatos descritos nos itens ai, bi a biii, e ci a civ.

Da relação acima, serão estudadas apenas as distribuições de tamanhos de firmas e tamanhos de bancos, definidos como os ativos totais desses agentes. Será verificado se os tamanhos de firmas e de bancos, (definidos como sendo o total dos ativos da firma) de uma economia estão distribuídos de acordo com uma *power law*. Para isso, será construído um histograma em escala log-log das amostras de ativos totais das firmas e analisada a cauda da distribuição.

Essa análise é feita, tomando como base o fato de que a função densidade de probabilidade de uma distribuição de Pareto com parâmetros  $\alpha$  e  $\theta$  é dada por:

$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}; \quad \text{sendo } x \geq \theta. \text{ Tem-se:}$$

$$\log(f(x; \alpha, \theta)) = \log(\alpha\theta^\alpha) - (\alpha + 1)\log x \quad (4.1)$$

A equação acima permite afirmar que o histograma em escala logarítmica de um conjunto de dados com distribuição de Pareto tende a ser, para amostras grandes, uma linha reta. Na confecção dos histogramas, são definidas 40 barras cobrindo toda a faixa de variação dos dados. As barras têm largura constante em escala logarítmica, e as frequências são apresentadas em escala logarítmica, como se vê na figura 4.1. Nessa figura, verifica-se que a distribuição é assimétrica à direita. Com base na equação 4.1, deve-se verificar se a cauda da distribuição é aproximadamente uma reta, em escala logarítmica. Para isso, foram separadas as 16 barras (40% do total) mais à direita e feita uma interpolação linear na escala logarítmica através de uma regressão OLS. As declividades obtidas são apresentadas em cada gráfico.

Na análise de tamanhos das firmas (ativos totais), foram analisadas as distribuições desses tamanhos em economias de 1000 firmas e 100 bancos e de 2000 firmas e 200 bancos. Nos dois casos, foram analisadas as distribuições ao início e ao término da simulação. Nas duas simulações, as economias estavam parametrizadas como descrito na seção 4.2, e foram sujeitas a duas intervenções de política monetária: no período 200, a taxa de juros foi elevada em 3% e retiradas da economia, pelo governo, 1000 unidades monetárias; e, no período 800, foi feito o movimento inverso.

Ao início da simulação, a distribuição de tamanhos de firmas e bancos é consequência direta da parametrização do processo de geração do estado inicial da economia, portanto, considerou-se necessário verificar novamente a distribuição ao término da simulação, depois da economia ter sido sujeita a flutuações aleatórias da demanda das firmas individuais e a ações de política monetária.

Os histogramas dessas distribuições são apresentados nas figuras 4.1 e 4.2, e mostram, para a economia com 1000 firmas, que a cauda da distribuição cobre pouco menos de duas décadas e pode ser aproximada por uma distribuição de Pareto com  $\alpha = 1.39$  ao início da simulação e  $\alpha = 1.52$  ao final. No caso da economia com 2000 firmas, foram encontrados  $\alpha = 1.33$  e  $\alpha = 1.12$ .

Isso indica uma evidência fraca de que a cauda da distribuição dos tamanhos de firmas segue a lei de Pareto, uma vez que ela não chega a cobrir duas décadas inteiras, exigindo um número maior de firmas para a sua confirmação. Apesar disso, os valores próximos aos encontrados por Gaffeo et al. (2003b) na análise de dados empíricos. Gaffeo et al. (2003b) analisaram a distribuição de tamanhos de firmas não-financeiras de países do G7,

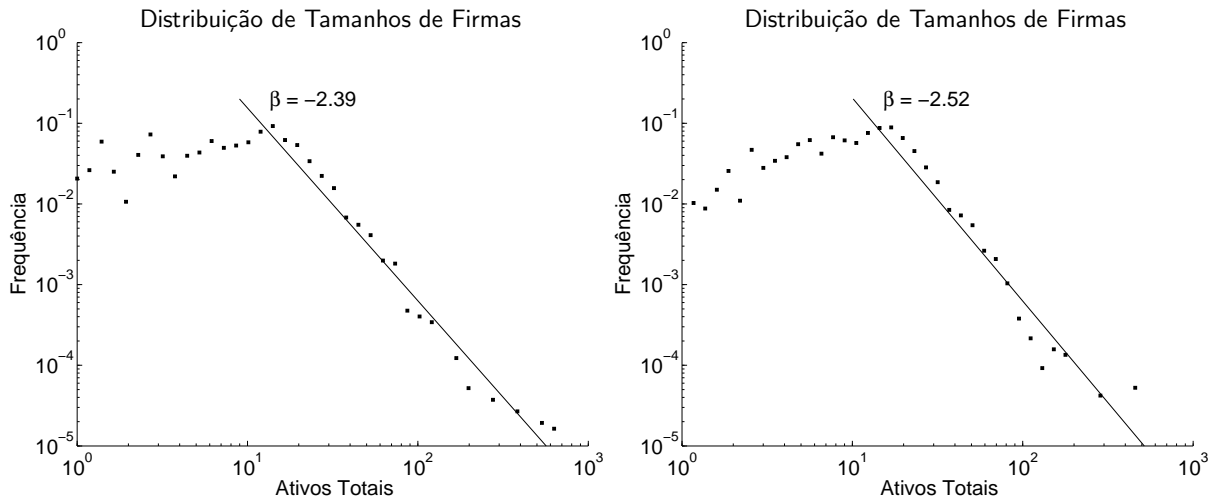


Figura 4.1: Distribuições de tamanhos de firmas de uma economia com 1000 firmas e 100 bancos ao início (esq) e ao final da simulação (dir)

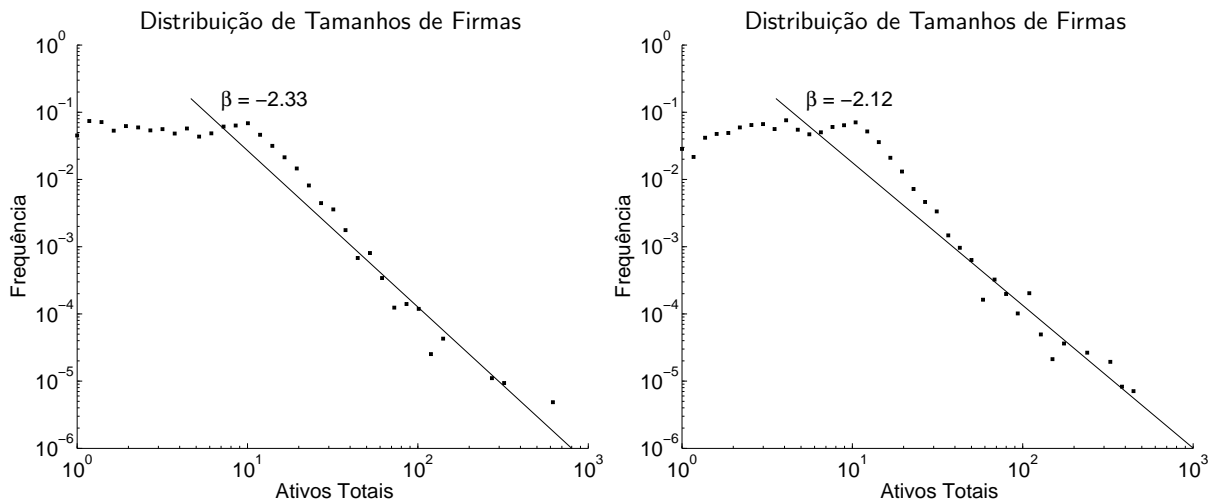


Figura 4.2: Distribuições de tamanhos de firmas de uma economia com 2000 firmas e 200 bancos ao início (esq) e ao final da simulação (dir)

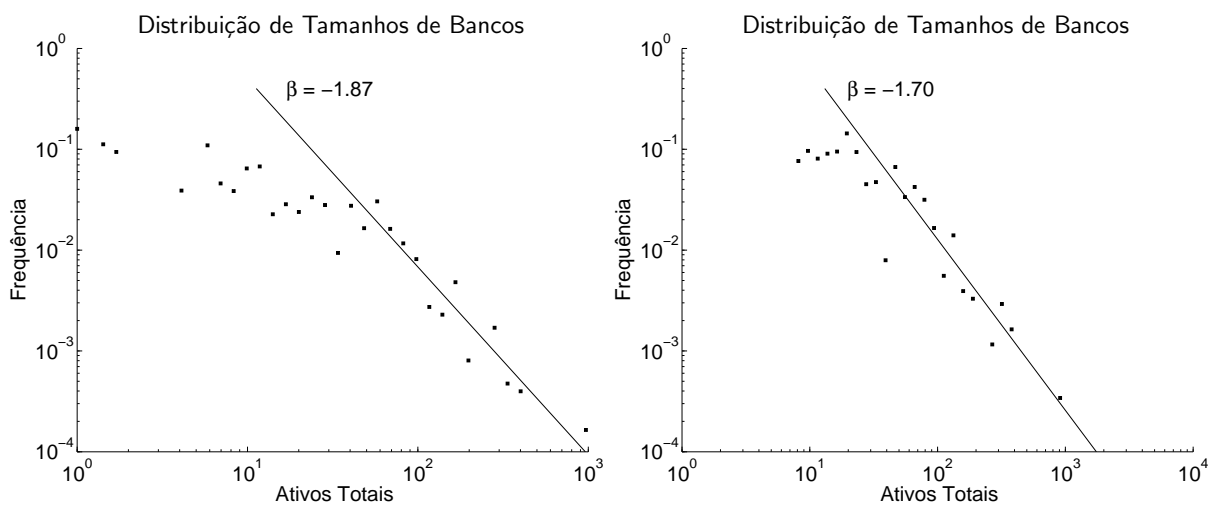


Figura 4.3: Distribuições de tamanhos de bancos de uma economia com 1000 firmas e 100 bancos ao início (esq) e ao final da simulação (dir)

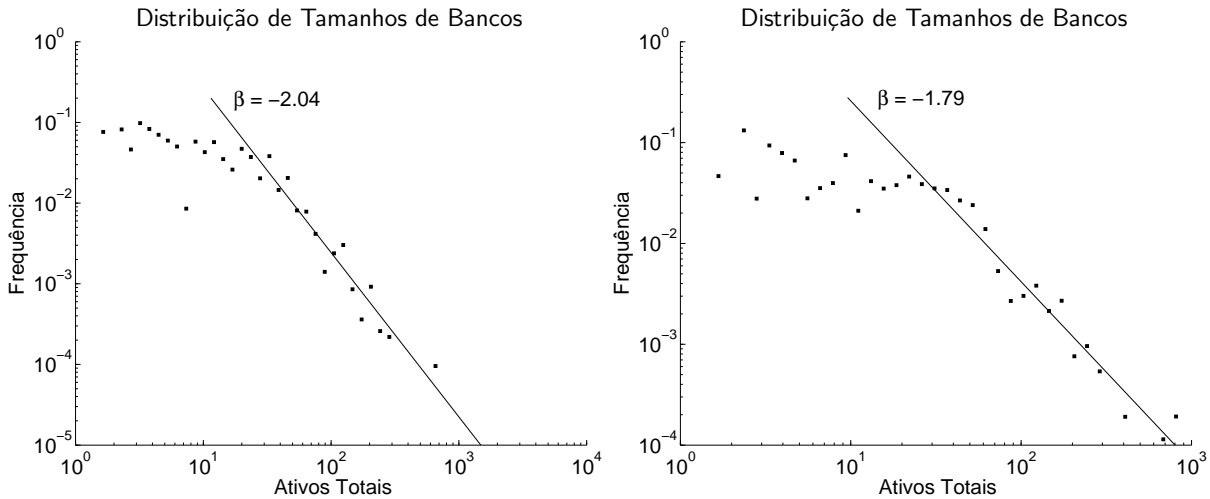


Figura 4.4: Distribuições de tamanhos de bancos de uma economia com 2000 firmas e 200 bancos ao início (esq) e ao final da simulação (dir)

no período de 1987 a 2000. Para tamanho de firma dado pelas vendas totais, encontraram  $\alpha = 0.96$ , para tamanho dado pelo capital,  $\alpha = 1.16$ , e para tamanho dado pela dívida,  $\alpha = 1.14$ .

Os gráficos mostram, também, que na ausência de crises severas (no caso da simulação com 1000 firmas e 100 bancos, o número máximo de defaults em 1 período foi de 22 firmas e 9 bancos; no caso da de 2000 firmas e 200 bancos, esses números foram 105 firmas e 73 bancos), a distribuição se mantém.

No caso dos bancos dessas economias, foram feitas as mesmas análises, cujos histogramas são apresentados nas figuras 4.3 e 4.4. Os parâmetros da distribuição de Pareto para a economia com 100 bancos foram  $\alpha = 0.87$  ao início da simulação e  $\alpha = 0.70$  ao final; para a economia com 200 bancos, os valores foram, respectivamente,  $\alpha = 1.04$  e  $\alpha = 0.79$ . Não é possível afirmar que os ativos totais dos bancos tenham a distribuição de Pareto devido ao tamanho das amostras (100 e 200 bancos), insuficiente para a caracterização dos valores extremos da cauda. Além disso, a ordem de grandeza dos valores não apresenta variabilidade suficientemente grande.

Janicki e Prescott (2006) estudaram a distribuição dos tamanhos de bancos dos Estados Unidos da América em 1960 e 2005. Afirmaram que, em 1960, as distribuições lognormal e, em especial, a de Pareto, forneciam boas aproximações das distribuições empíricas de ativos totais dos bancos. Ao analisar os dados de 2005, observaram que a qualidade dessas aproximações teve uma nítida piora devido ao aumento da concentração dos ativos dos grandes bancos, como conseqüência de fusões ocorridas entre eles. A conseqüência dessa concentração foi aumentar os valores extremos da distribuição empírica para níveis que não podem ser obtidos por distribuições de Pareto e lognormal, que possuem caudas menos pesadas.

## 4.5 Estudos de Sensibilidade

Nesta seção, será analisada a sensibilidade do modelo à variação de alguns parâmetros genéricos. Em todos os processamentos, há um aumento da taxa básica de juros de 3%, acompanhada de contração da base monetária no valor de 1000 unidades monetárias no período 200, e reversão dessa intervenção no período 800, salvo indicação em contrário. As simulações duram 1000 períodos e são realizadas em economias com 1000 firmas e 100 bancos, a não ser no estudo de impacto dos tamanhos das economias. Inicialmente, será analisada a dependência, de diferentes seqüências de choques aleatórios na demanda dos consumidores, das medidas realizadas para uma mesma economia. Como cada simulação é conseqüência da realização de uma seqüência de choques, surgem dúvidas quanto à robustez dos resultados obtidos nos estudos, ou seja, de quanto esses resultados poderiam ser diferentes se a seqüência de choques fosse outra. A finalidade desse estudo é calcular a variabilidade dos resultados de uma simulação causada por histórias diferentes de choques. Em seguida, será avaliada a influência de realizar simulações com um número menor ou maior de agentes. Esse estudo será realizado com e sem intervenções de política monetária. Mais tarde, será analisado o impacto da conectividade entre firmas, ou seja da densidade média das ligações entre as firmas na cadeia produtiva, e, por fim, será estudado o impacto das ligações entre bancos no mercado interbancário.

### 4.5.1 Dependência Histórica

Nesta seção, são realizados estudos da dependência histórica dos resultados obtidos nas simulações realizadas a seguir, ou seja, de quanto as medidas da economia podem mudar se ela for submetida a outras seqüências de choques na demanda dos consumidores<sup>3</sup>. A variabilidade dos resultados de simulações de dependência histórica do desempenho de uma economia depende da proximidade de uma crise. Configurações econômicas distantes de uma crise ou com crise quase certa apresentam menor variabilidade das medidas obtidas do que aquelas em que, para alguns históricos de choques ocorre crise, enquanto, para outros, não. Isso sugere que a exposição a crises de uma configuração econômica pode ser avaliada por meio de estudos de dependência histórica, técnica que, na prática, é uma aplicação do método de Monte Carlo. Para a realização deste estudo, foram executadas apenas 100 simulações, tendo em vista o custo computacional.

Os resultados estão organizados em tabelas de medidas agrupadas por tipo. Essas tabelas são as mesmas utilizadas nas outras análises. Nas tabelas, para cada medida, estão relacionadas algumas características da distribuição calculada: valor mínimo calculado, quantis 25%, 50% e 75%, e valor máximo. Ao final, é apresentada a estatística desvio-padrão sobre média. A tabela A.1 apresenta os valores obtidos para os indicadores

---

<sup>3</sup>Neste modelo, as demandas dos consumidores são calculadas de acordo com o modelo de Dixit-Stiglitz e submetidas a choques aleatórios.

econômicos. As distribuições dos valores de cada medida são tipicamente não-normais, de acordo com a estatística de Jarque-Bera<sup>4</sup>, de modo que é mais apropriado usar a distribuição empírica nos testes de hipóteses.

Os indicadores econômicos, apresentados na tabela A.1, apresentam  $\sigma/\mu$  da ordem de 1% para a maioria das medidas, o que mostra que a variabilidade das medidas é relativamente pequena. No entanto, as distribuições de PIB, renda das famílias, impostos arrecadados e crédito comercial são assimétricas à esquerda, enquanto a do índice de preços é assimétrica à direita, o que mostra a ocorrência de crises em algumas simulações. Com relação às distribuições de valores agregados de firmas e de bancos, apesar da influência do modo como o modelo foi definido<sup>5</sup>, é possível constatar, comparando-se os valores agregados de bancos médio e máximo, a ocorrência de um período de maior endividamento das firmas, representando, na média, cerca de 10% do valor total dos bancos.

Com relação aos indicadores bancários (tabela A.2), os valores de  $\sigma/\mu$  estão na faixa de 3.5%. A variabilidade maior é para o volume do interbancário, embora os valores sejam relativamente baixos, o que mostra apenas que os bancos não precisaram muito dessa modalidade de empréstimo.

As tabelas A.3 e tabela A.4 abordam os indicadores de *default* e de perdas. A forte assimetria à direita evidencia que ocorreram crises em menos de 25% das simulações.

#### 4.5.2 Número de Agentes da Economia

Este estudo foi realizado em duas condições: com a intervenção de política monetária mencionada acima e sem essa intervenção. Os motivos da simulação sem intervenção foram dois:

- a) Verificar o efeito, nos indicadores, dos tamanhos das firmas, sem a influência de eventos exógenos;
- b) Verificar se o efeito dos choques nas firmas individuais tende a se cancelar ao nível agregado à medida que o tamanho da economia (número de firmas) aumenta, na ausência de choques agregados.

As simulações foram realizadas com a mesma parametrização da economia, salvo os números de firmas e de bancos. Em todas elas, foi mantida a relação média de 10 firmas por banco, tendo sido feitas simulações para economias de 100 a 5000 firmas, conforme a tabela A.9.

---

<sup>4</sup>Os testes de normalidade para as medidas de PIB médio, índice de preços médio, desemprego médio e renda média das famílias rejeitaram a hipótese de normalidade com p-valor inferior a 0.1%.

<sup>5</sup>Neste modelo, as firmas pagam, como dividendos, o que excede seu valor inicial; os bancos pagam os lucros obtidos com taxas de juros, respeitadas as disponibilidades de caixa de ambos os agentes.



Inicialmente, serão analisadas as simulações sem intervenção externa. A tabela A.9, que trata dos indicadores econômicos, mostra valores como o PIB, valores agregados de firmas e de bancos, renda das famílias, impostos arrecadados e base monetária inicial crescentes com o número de firmas. Por outro lado, o número de trabalhadores é o mesmo em todas elas, de modo que, nas economias com mais firmas, eles estão distribuídos por um número maior delas, embora o salário total recebido seja o mesmo ao início das simulações. Os indicadores crescentes mencionados são consequência da construção do modelo: em uma economia com mais firmas, sendo a conectividade média (em percentual de firmas fornecedoras, em relação a total de firmas) a mesma, a produção agregada da economia aumenta com o número de firmas, pois há mais itens a serem somados na função de produção (se não forem alteradas as distribuições de onde são extraídas as quantidades de insumos, produtividades e consumos). Com relação ao índice de preços médio, nota-se que é praticamente inalterado. O desemprego médio percentual, por sua vez, apresenta ligeira tendência de queda. Com relação ao decaimento das relações entre  $\sigma/\mu$  do PIB e das vendas de firmas individuais, os resultados não mostram que ele esteja ocorrendo à razão de  $\sqrt{n}$ , sendo  $n$  o número de firmas. Isso ocorre tanto para as relações médias quanto as mínimas. Isso está em linha com a afirmação de Acemoglu et al. (2010) de que redes de fornecimento complexas podem fazer com que a taxa de decaimento de  $\sqrt{n}$  não se aplique. Também está em linha com Gabaix (2009), que afirma que choques idiossincráticos se transformam em choques agregados porque a distribuição dos tamanhos das firmas tem cauda muito pesada, e as grandes firmas contribuem com uma fração suficientemente grande do produto agregado evitando que os choques idiossincráticos a essas firmas desapareçam<sup>6</sup>.

A tabela A.10 mostra indicadores de *default* da economia: não houve *defaults* nessas simulações, a não ser na de 5000 firmas, na qual, na média, 1 banco estava em default. Isso mostra que, não havendo intervenções, a configuração dessas economias se mostrou estável.

A análise das simulações com intervenções de política monetária é feita a seguir. A tabela A.5, que apresenta os indicadores econômicos, mostra, como no caso em que não houve intervenção, o mesmo conjunto de valores crescente com o número de firmas (as razões são as mesmas). O índice de preços e os desempregos, médio e máximo, são aproximadamente constantes, tendo em vista a variabilidade das medidas estudada na seção anterior. Assim, não se pode afirmar que o tamanho da economia influencie essas medidas. Os indicadores bancários são apresentados na tabela A.6. Nessa tabela, verifica-se que o volume dos empréstimos interbancários diminui com o aumento do tamanho da economia. Essa diminuição também é verificada quando se padroniza esse número pelo valor dos depósitos,

---

<sup>6</sup>Na configuração das economias geradas neste trabalho, as redes de fornecimento são complexas e podem surgir firmas mais de 300 vezes maiores do que outras, tornando aplicáveis as explicações dadas nesses dois trabalhos.

das reservas e da base monetária. Uma explicação possível é relacionada à conectividade média das firmas (em porcentagem do total de firmas), que é mantida constante. No caso das economias maiores, os fluxos de caixa das firmas correntistas dos bancos variam menos, pois o efeito de choques vindos das firmas fornecedoras ou clientes são mais diluídos. O impacto dessa diluição é mais perceptível na tabela A.7: pode-se verificar que o crescimento do número de *defaults* de firmas e bancos com o tamanho da economia é menos que proporcional. Isso é confirmado na tabela A.8, de perdas, na qual as perdas agregadas de firmas e bancos chegam a diminuir com o aumento do tamanho da economia. O contágio entre firmas também diminui, assim como o contágio proveniente de outro setor (firmas  $\times$  bancos). Por fim, as perdas no processo produtivo também diminuem, influenciadas pelo aumento menos do que proporcional das firmas em *default*.

### 4.5.3 Conectividade entre firmas

Nesta seção, serão estudados os efeitos da conectividade entre firmas nas relações de fornecimento. As simulações são feitas com economias de 1000 firmas e 100 bancos, variando-se o número médio de fornecedores de cada firma (expresso em percentual do total de 1000 firmas). As médias variam de 5 fornecedores a 300. O objetivo é verificar como o comportamento das economias é afetado pela densidade das relações de fornecimento.

Com relação à tabela A.11, de indicadores econômicos, aplicam-se os mesmos comentários sobre as medidas que aumentam com o tamanho da economia, feitos na seção anterior, pois isso ocorre devido ao número de fornecedores crescente de cada firma. O índice de preços e os desempregos médio e máximo mostram uma variação pouco além da verificada no estudo de dependência histórica. As relações  $\sigma_{PIB}/\mu_{PIB}$  e  $\sigma_{IP}/\mu_{IP}$  são mais altas para as economias com conectividade mais baixa e com conectividade mais alta, sugerindo que, nesses casos, elas são mais instáveis. A tabela A.12, de indicadores bancários, mostra que o volume dos empréstimos interbancários diminui com o aumento da conectividade. Como na seção anterior, no caso das economias em que as firmas têm maior número de fornecedores, os fluxos de caixa das firmas correntistas dos bancos variam menos, pois o efeito de choques vindos das firmas fornecedoras ou clientes são mais diluídos. As tabelas A.13 e A.14, de *defaults* e perdas, mostram resultados coerentes com a idéia de que conectividades baixas e conectividades altas aumentam as perdas. Foi verificado que, para as conectividades de 1.0% a 20%, o número de *defaults* de firmas e de bancos é praticamente constante, sendo maior, tanto para a conectividade de 0.5%, quanto para a de 30%. No caso das perdas financeiras de firmas, verifica-se também que os valores são maiores para as conectividades de 0.5% e 30%, enquanto no caso dos bancos, o efeito só se verifica para a conectividade de 30%. No caso das firmas, quando a conectividade é baixa, cada firma fica exposta a perdas maiores infligidas por outras, o que pode levá-las a *default* e propagação das perdas. No caso da conectividade alta, cada firma pode ser afetada por

muitas outras. Em média, irão sofrer perdas relativamente pequenas; no entanto, algumas firmas sofrerão perdas originadas em mais de uma firma. No caso dos bancos, as perdas financeiras são maiores, quando a conectividade é alta, porque nesse caso, o número de *defaults* de firmas é consideravelmente maior do que nos casos de menores conectividades.

No caso das perdas financeiras originadas em outro setor, observa-se que são maiores somente no caso de conectividade de 30%, tanto no caso de perdas de firmas originadas por bancos como vice-versa. Novamente, a explicação é que, no caso de perdas de bancos, originadas por firmas, o número de *defaults* de firmas é maior nesse caso; no caso de perdas de firmas, originadas por bancos, é que o não-pagamento de dívidas por um banco afeta uma proporção maior de pagamentos feitos pelas firmas a seus fornecedores, uma vez que, como foi visto, o volume dos empréstimos interbancários é menor nesse caso.

#### 4.5.4 Conectividade no Mercado Interbancário

Nesta seção, será estudado o efeito do número máximo de parceiros que cada banco pode ter no mercado interbancário nos indicadores da economia. Como no caso anterior, será utilizada como base uma economia de 1000 firmas e 100 bancos. Os números de parceiros neste estudo variam de zero a 20. Os resultados das simulações são apresentados em tabelas com as mesmas informações apresentadas para os estudos anteriores.

De uma forma geral, essas simulações mostraram que o mercado interbancário pode favorecer crises, o que é possível ver pelo PIB médio e pelo índice de preços médio, na tabela A.15. Essas medidas são maiores quando o número máximo de parceiros é menor; isso indica que há menos crises nessa situação. O nível mínimo das reservas de socorro de firmas e de bancos após reposição, quando há aportes, (ver tabela A.17), também indica que as crises foram mais severas quando o número de parceiros era maior. Nesses casos, o nível é aproximadamente zero, indicando que, após o último aporte realizado, os investidores não receberam dividendos. Nesse caso, havendo *default*, não haveria aporte subsequente para resgatar a firma ou banco dessa situação, o que impediria seu funcionamento, reduzindo o PIB da economia. A tabela A.18, de perdas, confirma que as perdas foram maiores nos casos em que o número máximo de parceiros é maior.

Por fim, nas simulações, o volume dos empréstimos do mercado interbancário é maior quando o número máximo de parceiros é pequeno, como se pode constatar na tabela A.16.

## 4.6 Estudos de caso

### 4.6.1 Economia sem Intervenção Externa

Este estudo de caso é realizado sobre uma economia de 1000 firmas e 100 bancos, configurada como na seção 4.2. Não é realizada nenhuma intervenção externa. Os gráficos

utilizados na análise são apresentados nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7.

Com relação aos indicadores macroeconômicos, verifica-se que o PIB e o nível de emprego apresentam o mesmo padrão de flutuações. As flutuações são irregulares, em torno de uma média; ocorrem então variações bruscas seguidas por flutuações em torno de uma nova média. Uma observação no gráfico de índice de preços sugere que as mudanças de padrão no PIB ocorrem simultaneamente a oscilações bruscas no índice de preços, mesmo quando a média do índice permanece aproximadamente constante. Provavelmente, as oscilações bruscas nos preços provocam deslocamentos no equilíbrio de preços e demandas<sup>7</sup>.

O gráfico de distribuição da base monetária mostra a distribuição da posse de moeda ao término de cada período. Como essa economia é fechada e não ocorrem intervenções de política monetária, a base monetária é constante, de modo que, para algum agente acumular recursos, outro tem que estar perdendo. Famílias, governo e investidores possuem moeda manual. O estoque de moeda possuído pelas firmas está integralmente depositado nos bancos. O caixa dos bancos possui recursos próprios e depósitos das firmas. Este gráfico mostra que as reservas de socorro (investidores) e o governo têm estoque de moeda bastante estável, se comparados aos demais agentes. Este gráfico não mostra tendências de acumulação por parte de qualquer agente; quando isso ocorre, a quantidade de moeda que troca de mãos diminui.

O gráfico de Ativos Totais Agregados, de firmas e bancos, mostra uma certa complementaridade entre esses estoques de ativos, que se refere aos pagamentos de juros sobre empréstimos bancários e sobre depósitos, que são transferências de ativos de um tipo de agente para o outro.

O gráfico de Ativos Totais de firmas e bancos individuais mostra os agentes, no eixo das ordenadas, e o tempo no eixo das abscissas. No eixo das ordenadas, as firmas estão numeradas de 1 a 1000 e os bancos, de 1001 a 1100. O valor dos ativos totais de cada agente num dado período é indicado pela tonalidade de cinza, o que o torna um gráfico mais qualitativo do que quantitativo. Uma inspeção dessas tonalidades, em uma linha vertical sobre um dado período, dá idéia da distribuição dos valores de ativos totais no período, indicando se há concentração de ativos em poucos agentes ou se há uma distribuição mais equitativa. Pode-se verificar se essa concentração aumenta ou diminui com o tempo. Uma verificação das tonalidades na horizontal mostra se houve constância no valor dos ativos totais da firma ou banco ao longo do tempo ou se houve variação brusca, indicativo de crise.

---

<sup>7</sup>O equilíbrio inicial do sistema de firmas, calculado com taxas de juros zero, parece ser único. Isso pode ser demonstrado se o mapa associado ao cálculo do equilíbrio for uma contração (ver discussão na seção 4.7.3). Essa propriedade do mapa não parece ser destruída pelas taxas de juros de crédito comercial. No entanto, as taxas de juros bancários e, especialmente, as dos interbancários parecem destruir essa propriedade, o que faz com que o ponto de equilíbrio seja 'móvel'.

No caso deste estudo, o gráfico de Ativos Totais de firmas e bancos individuais mostra linhas horizontais homogêneas, o que significa que não há mudanças significativas no total de ativos das firmas e dos bancos.

Os gráficos seguintes mostram a arrecadação de tributos, pagos por firmas, bancos e famílias, e o total de dividendos pagos por firmas e bancos às famílias. Esses gráficos têm aproximadamente a mesma forma e seguem as flutuações do PIB.

Quanto ao gráfico de endividamento das firmas, apresenta duas seções principais: nos primeiros 100 períodos, aproximadamente, as firmas caminham para um equilíbrio com taxas de juros de créditos comercial e bancário, pois o equilíbrio inicial é calculado com todas as taxas de juros iguais a zero. No segundo período, até o final da simulação, surgem os ciclos irregulares que caracterizam esta simulação. Esses mesmos ciclos estão presentes nos gráficos de reservas bancárias excedentes (sobra de caixa em relação ao requerimento de reservas) e volume de empréstimos interbancários. O gráfico de volume de empréstimos interbancários é suavemente decrescente, o que também ocorre com o número de participantes, que se distribui de forma mais ou menos uniforme entre tomadores e emprestadores.

Os gráficos de número de bancos em *default* mostram números de bancos aumentando em patamares aproximadamente constantes. Esse aumento não ocorre com as firmas em *default*, cujo número oscila de modo irregular. As perdas financeiras totais (valores não recebidos em decorrência dos *defaults*) são muito baixas, com exceção de alguns picos. Como o número de firmas e bancos em *default* não é alto nesses picos, isso indica que firmas ou bancos grandes entraram em *default* nesses períodos. Confrontando-se esse gráfico com o do PIB, verifica-se uma correspondência entre os picos e as mudanças de equilíbrio, o que sugere efeitos de granularidade, na linha de Gabaix (2009).

O gráfico de Perdas Totais Agregadas do Setor Real se refere a valores demandados às firmas e não-vendidos por algum motivo. São perdas de oportunidades de vendas. Essas perdas mudam de padrão seguindo os picos das perdas reais e apresentam um valor mínimo, da ordem de 200, talvez relacionado ao padrão das oscilações aleatórias da demanda dos consumidores.

O gráfico de Aportes Realizados em firmas mostra um padrão semelhante ao de Perdas Totais Agregadas do Setor Real, deslocado para o zero. Os aportes realizados a bancos são inferiores, mesmo levando em conta o fato de que há 10 firmas para cada banco. Por fim, o gráfico de Reservas de Socorro a Firmas e a Bancos mostra o nível dessas reservas após utilização para aportes e recomposição pelos investidores. Salvo em alguns períodos, as reservas são plenamente recompostas, mostrando que, de forma geral, há recursos para socorrer ou investir em firmas ou bancos em dificuldades, o que previne que uma crise, uma vez iniciada, assuma grandes proporções.

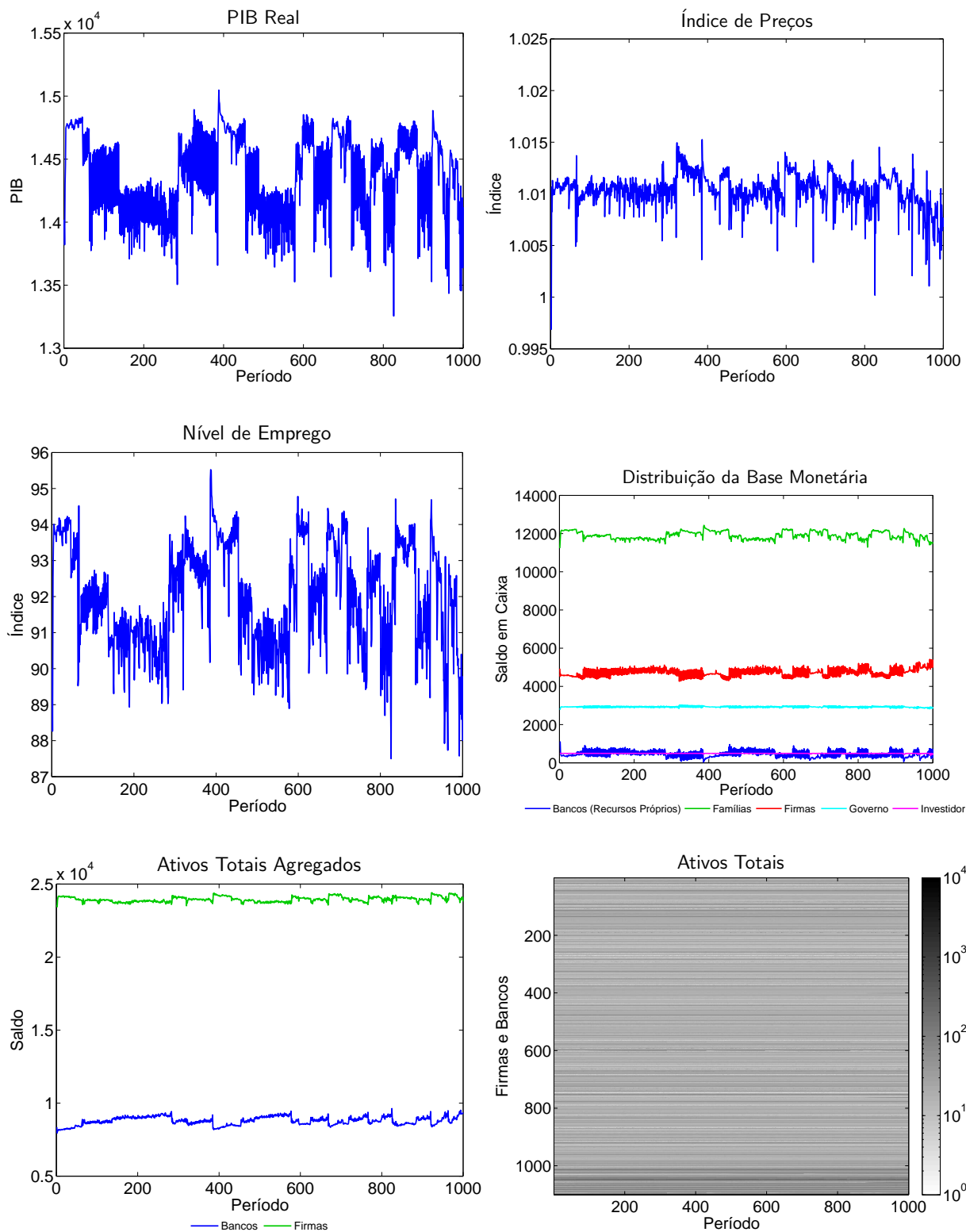


Figura 4.5: Sem política monetária: Indicadores macroeconômicos. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

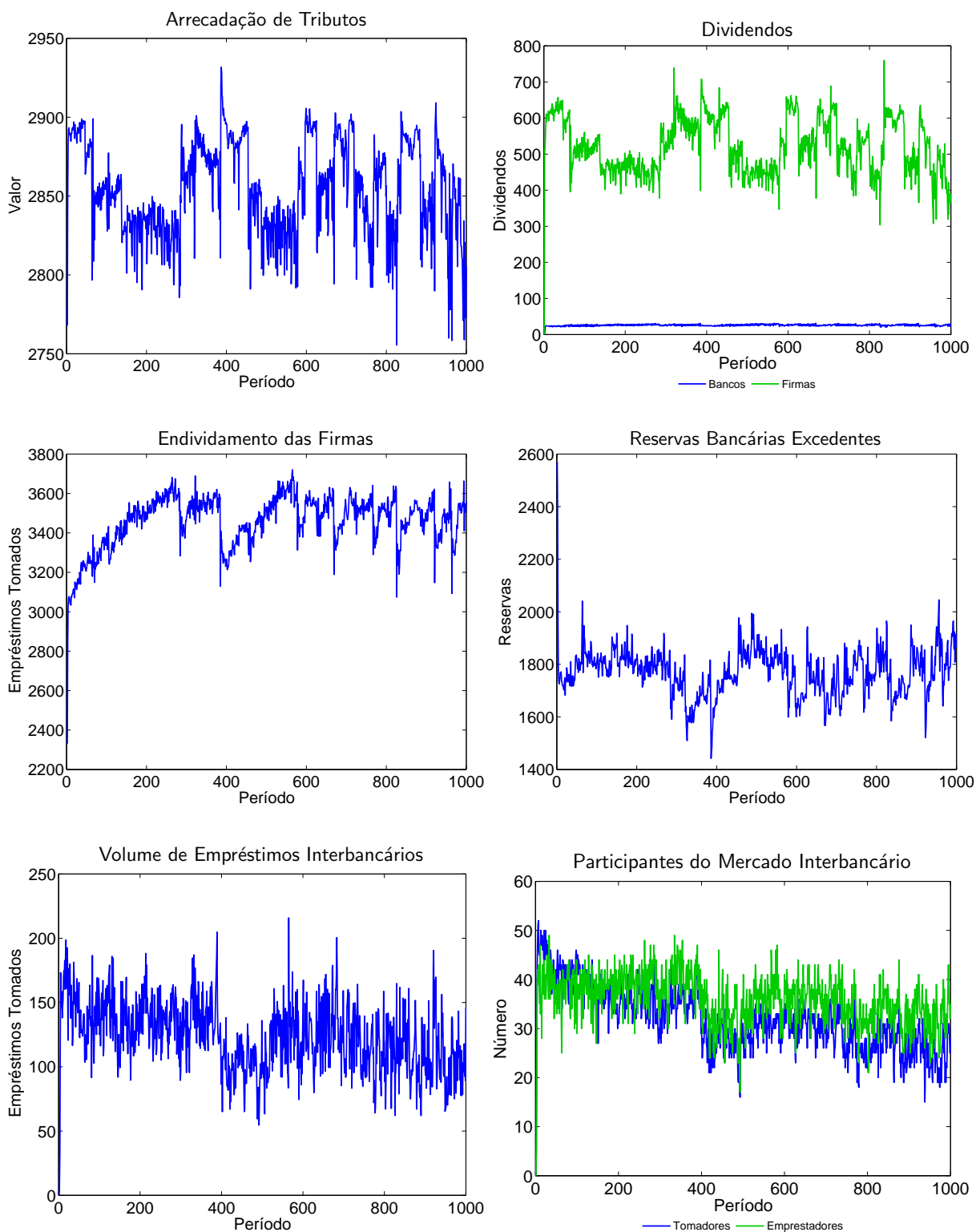


Figura 4.6: Sem política monetária: Indicadores bancários e outros. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

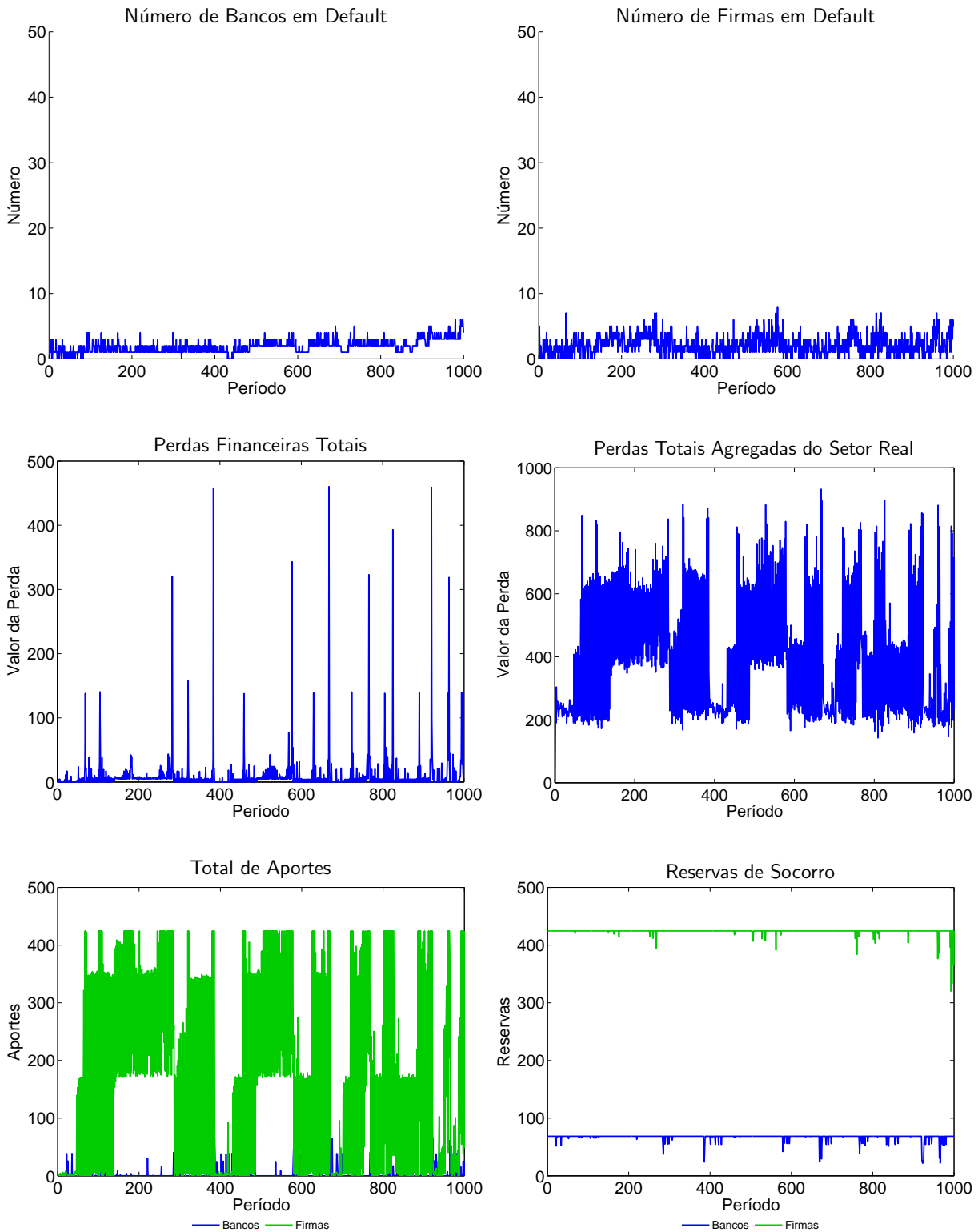


Figura 4.7: Sem política monetária: Perdas. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).



#### 4.6.2 Aumento da taxa de juros

Este estudo de caso é realizado sobre a mesma economia de 1000 firmas e 100 bancos, analisada na seção anterior, com a diferença de que é realizada, no período 200, um aumento de taxa básica de juros para 3%, com retirada de 1000 unidades monetárias da economia, e uma diminuição da taxa básica de juros para 0% e injeção de 1000 unidades monetárias na economia, revertendo a intervenção no período 800. Esse tipo de intervenção seria equivalente a um aumento de taxa de juros com venda de títulos públicos aos bancos e sua reversão mais tarde, com a diferença de que isso é feito por meio de redução do consumo do governo no instante 200 e aumento, no instante 800. Os gráficos utilizados na análise são apresentados nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10.

Os gráficos de PIB e nível de emprego têm o mesmo padrão e mostram, no período em que a base monetária sofreu contração, um nível mais baixo e maior volatilidade. A volatilidade aumentada é conseqüência de um maior número de *defaults* de firmas no período, como se pode ver na figura 4.10, gráfico (b). No período, também ocorre maior número de *defaults* de bancos, como se vê no gráfico (a) da mesma figura. Esse mesmo padrão é visto no índice de preços, que apresenta picos, dos quais alguns têm características de granularidade, isto é, o índice é influenciado pelos preços de produtos de poucas firmas grandes; essa situação será estudada a seguir.

O gráfico de Distribuição da Base Monetária mostra, como no caso sem intervenção, estabilidade no saldo em caixa do governo e das reservas de socorro dos investidores. A contração da base monetária, no período 200, foi mais percebida no saldo em caixa dos consumidores, que apresentou queda devido ao aumento do desemprego no período, com conseqüente queda na renda das famílias. Também houve queda perceptível no caixa próprio dos bancos, e, correspondentemente, das reservas bancárias excedentes ao requerimento compulsório (figura 4.9, gráfico (d)), conseqüência do aumento do endividamento das firmas, como se vê na figura 4.9, gráfico (c).

Apesar da queda nas reservas bancárias, os ativos totais dos bancos (figura 4.8, gráfico (e)) aumentaram a partir do período 200, como conseqüência do aumento da taxa de juros de empréstimos bancários no período. Esse efeito foi acompanhado do decréscimo dos ativos totais agregados das firmas no mesmo período, pois os juros são transferências de ativos das firmas para os bancos. O gráfico de ativos totais individuais (figura 4.8, gráfico (f)) mostra linhas horizontais homogêneas, para firmas e bancos, com poucas variações sensíveis, por volta do período 600, indicando que pelo menos 1 firma grande teve problemas nesse período. Vê-se um reflexo dessa ocorrência no caixa das firmas representado no gráfico de Distribuição da Base Monetária.

Como esperado, tanto a arrecadação de tributos e o pagamento de dividendos de firmas seguem a forma do PIB. Por outro lado, os bancos se tornaram mais lucrativos no período de alta da taxa básica de juros e pagaram mais dividendos.

Com relação ao mercado interbancário, verifica-se um crescimento gradual no volume dos empréstimos devido à redução de liquidez entre os períodos 200 e 600, com queda abrupta após a expansão da base monetária no período 800. O mercado interbancário foi nitidamente tomador entre os períodos 200 e 800, como se vê na figura 4.9, gráfico (f).

Os gráficos de número de firmas em *default* (figura 4.10) mostram um aumento evidente dessas ocorrências, tanto para os bancos, quanto para as firmas. Chegou-se a ter 17 bancos em *default*, (mais de 10%), pouco depois do período 600. No caso das firmas, o máximo foi de 28, pouco menos de 3%.

O gráfico de Perdas Financeiras Totais mostrou aumento no intervalo entre os períodos 200 e 600, com maior número de picos e com valores mais altos do que o caso em que não houve intervenção de política monetária. O gráfico de Perdas Totais Agregadas do setor Real mostra o mesmo efeito, com perdas totais maiores do que as do outro caso citado. O gráfico de Total de Aportes, tanto para firmas, quanto para bancos, mostra aportes máximos de firmas pouco menores do que 500, o que indica que está sendo utilizado o total das reservas nos aportes a firmas. No caso dos bancos, o volume de aportes é menor, mas apresenta a mesma característica.

O gráfico de recomposição de Reservas de Socorro pelos investidores mostra que, após a utilização dessas reservas em aportes, a recomposição nem sempre é completa, de modo que, no caso de crises mais severas, as reservas podem se esgotar, aprofundando a crise. Será explorada essa possibilidade na próxima seção.

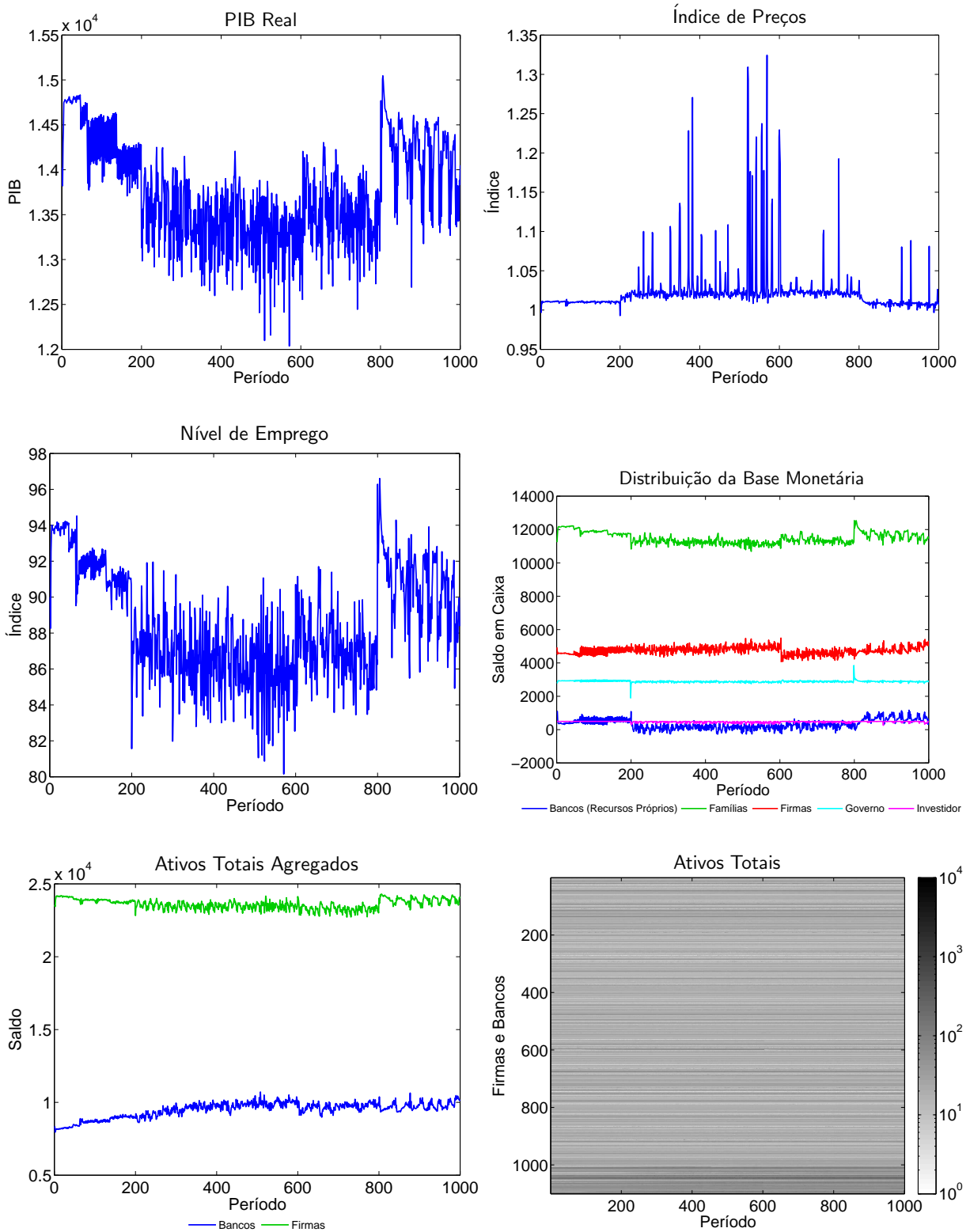


Figura 4.8: Aumento de taxa de juros: Indicadores macroeconômicos. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

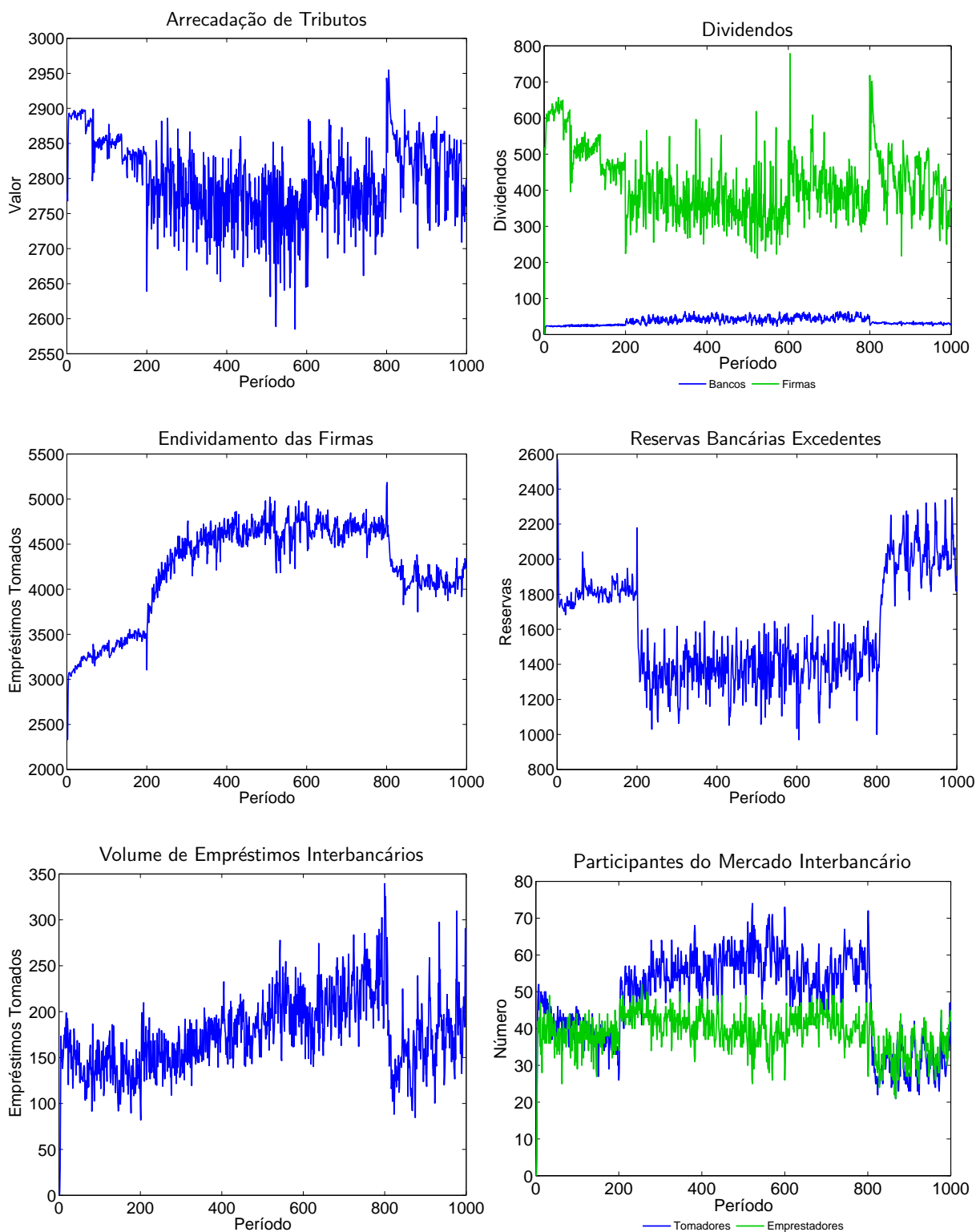


Figura 4.9: Aumento de taxa de juros: Indicadores bancários e outros. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

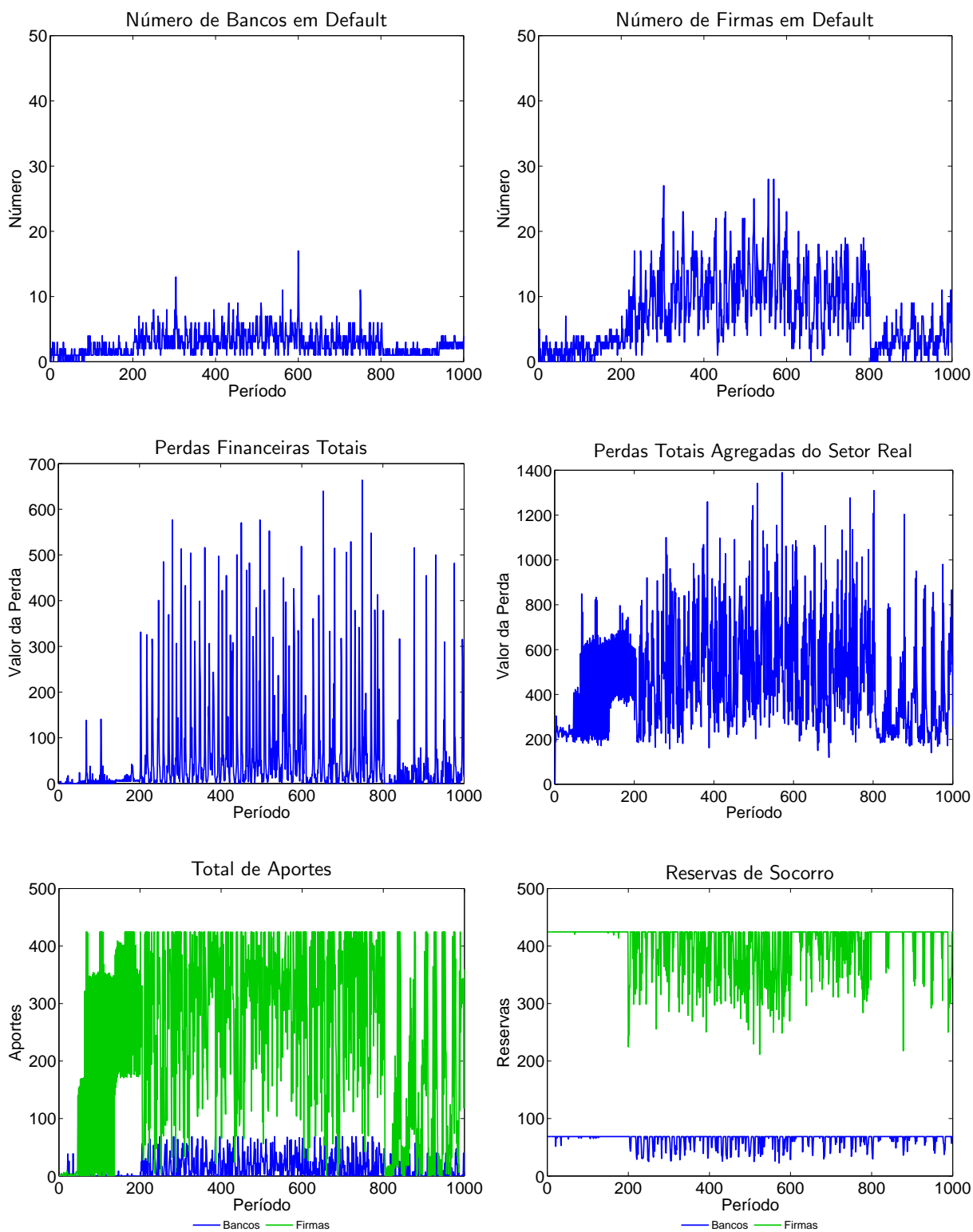


Figura 4.10: Aumento de taxa de juros: Perdas. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

Por fim, será apresentado um caso em que parece haver um efeito de granularidade: flutuações na produção (preços e vendas) de uma firma grande produzindo impacto no PIB.<sup>8</sup>

Existe a possibilidade de ocorrer endogenia nesse caso, ou seja, ser impossível estabelecer, a priori, se uma queda no PIB está associada a fatores que levam a firma à paralisação ou se a paralisação da firma afeta o PIB negativamente. Na prática, essas duas influências existem em alguma medida. No entanto, foi verificado que o período com o índice de preços mais alto foi seguido, 2 períodos depois, pelo período com o PIB mais baixo da simulação.<sup>9</sup>

Para a apresentação desse caso de possível granularidade, foi selecionado o período com o maior índice de preços da simulação: o período 569. A tabela 4.1 mostra as firmas cuja produção estava suspensa no período 569, juntamente com o total de ativos de cada uma e o percentual do valor agregado dos ativos da economia. Nessa tabela, destaca-se a firma 672, com 2,16% dos total de ativos da economia. A tabela 4.2 apresenta, dos períodos em que essa firma não produziu (20 períodos, no total), os 10 períodos para os quais o PIB de 2 períodos depois eram os menores. São apresentados também os índices de preços associados: pode-se verificar que são altos, próximos do índice de preços máximo da simulação (1.324). A tabela 4.3 mostra uma comparação entre os PIBs apresentados na tabela 4.2 e os PIBs mais baixos de toda a simulação. Nessa comparação, verifica-se que os 7 menores valores de PIB associados a paradas de produção da firma 672 estão entre os 10 menores valores de PIB da série toda, indicando uma possível associação entre os períodos de paralisação da firma 672 e períodos de baixa do PIB, caracterizando um caso de granularidade nessa economia. Gabaix (2009) testa a granularidade econometricamente, investigando a proporção das flutuações agregadas que pode ser atribuída aos choques agregados. Para isso, ele obtém o resíduo granular, que é uma medida parcimoniosa dos choques das 100 maiores firmas, e faz uma regressão da taxa de crescimento do PIB em relação a esse resíduo granular, encontrando que os choques idiossincráticos nas 100 maiores firmas dos EUA podem explicar cerca de um terço das flutuações do PIB.

---

<sup>8</sup>Gabaix (2009) chama de *hipótese granular* a hipótese de que muitas flutuações econômicas possam ser atribuídas a grãos incompressíveis de atividade econômica, ou seja, a grandes firmas, em vez de serem resultantes de pequenos choques difusos afetando diretamente cada firma.

<sup>9</sup>Essa associação entre PIB e vendas da firma, via índice de preços, foi feita com base nas regras do modelo. De acordo com as regras do modelo, se a produção de uma firma é suspensa, ela não produz em  $t + 1$  (não compra e não vende) e o preço do produto é multiplicado por um fator, numa reação do mercado à escassez do produto. Isso aumenta o índice de preços de  $t$ . Em  $t + 1$ , a meta de produção dos fornecedores da firma com produção suspensa diminui, bem como a produção dos bens das firmas-clientes da firma que teve a produção suspensa. Em  $t + 2$ , a demanda de consumidores e governo diminui, dadas as reduções do nível de emprego e da produção em  $t + 1$ , e como decorrência disso, o PIB de  $t + 2$  é reduzido (ver cálculo do PIB na seção 4.3).

Tabela 4.1: Firmas com produção suspensa no período 569

Firma	Ativos totais	Fração da economia
14	10	0.04%
256	50	0.21%
260	11	0.04%
377	16	0.07%
672	512	2.16%
751	84	0.35%
826	24	0.10%
981	27	0.12%
Soma		3.10%

Tabela 4.2: Períodos em que a firma 672 não produziu

Período (t)	Índice de Preços	PIB (t+2)
372	1.228	12858
382	1.271	12599
521	1.309	12593
522	1.293	12160
532	1.171	12475
542	1.220	12719
556	1.237	12414
569	1.324	12036
600	1.229	12831
602	1.187	12550

Tabela 4.3: Períodos em que a firma 672 não produziu, classificados por PIB crescente. A coluna da direita mostra os valores mais baixos de PIB de toda a série.

PIB (t+2)	Período (t)	PIB - série total
12036	569	12036
12160	522	12098
12414	556	12160
12475	532	12409
12550	602	12414
12593	521	12445
12599	382	12475
12719	542	12550
12831	600	12593
12858	372	12599

### 4.6.3 Crises

Neste trabalho, o conceito de crise está diretamente relacionado ao de fragilidade financeira em Allen e Gale (2004): um sistema financeiro é frágil se pequenos choques têm efeitos desproporcionalmente grandes.

No primeiro estudo de caso, a economia não sofreu intervenção externa, e verificou-se que os indicadores macroeconômicos, como PIB e nível de emprego, flutuaram em torno de uma média estável. No segundo estudo de caso, a mesma economia foi submetida a um choque de política monetária, que, mais tarde, foi revertido, observando-se que o PIB e o nível de emprego passaram a flutuar em torno de uma média estável e menor. Espera-se que, tomando-se como base esse estudo de caso, pequenas variações em outros parâmetros da simulação correspondam a pequenas alterações nas médias das variáveis macroeconômicas verificadas. Se o PIB sofrer uma redução drástica ou ocorrer uma mudança no padrão de equilíbrio da economia, de forma que ela passe a operar de forma deficiente, terá ocorrido uma crise. Com relação à demarcação da crise, sugere-se que o seu início seja definido como o momento em que se identifica mudança no padrão de equilíbrio da economia. Neste trabalho, um possível indicador desse padrão de equilíbrio seria a relação Média (PIB) / Base monetária. Quedas acentuadas nesse indicador indicam a ocorrência de uma crise.

DellAriccia et al. (2008), seguindo Demirgüç-Kunt e Detragiache (1998), sugerem que episódios de tensão no sistema bancário sejam considerados crises sistêmicas se ocorrer pelo menos uma dessas condições:

- Corrida de depositantes a bancos
- Tomada de medidas de emergência pelo governo para proteger o sistema bancário (feriados bancários ou nacionalizações)
- Custo final do resgate a bancos a partir de 2% do PIB
- Inadimplência de empréstimos bancários a partir de 10% dos ativos dos bancos

Para definição das datas de início das crises, DellAriccia et al. (2008) se basearam em estudos de caso.

Nesta seção, a economia que foi objeto de análise nas seções anteriores será submetida a uma crise. Para tanto, o valor destinado a reservas para socorro a bancos e a firmas será reduzido de 0.02 para 0.005 vezes o valor líquido agregado de bancos e de firmas, respectivamente, com o propósito de tornar o volume dessas reservas insuficiente para o aporte integral dos valores necessários aos agentes em dificuldade. Inicialmente, será simulada a realização de aportes pelos investidores, em consonância com os estudos de caso anteriores, e, em seguida, a realização de aportes pelo governo, mantendo-se o cenário da simulação realizada para investidores. As diferenças nos resultados dessas simulações



serão decorrentes de diferenças na capacidade de recomposição das reservas de socorro por esses agentes. Por fim, serão testados critérios de priorização de socorro pelo governo, verificando-se a capacidade de cada um de evitar ou mitigar a crise.

#### 4.6.3.1 Importância das Reservas de Socorro

Os períodos iniciais desta simulação são idênticos aos da simulação da seção anterior, pois a seqüência dos choques sobre a demanda dos consumidores é a mesma. Começa a ocorrer uma diferenciação quando não se consegue aportar integralmente os valores necessários ao saneamento das contas dos agentes em *default*. Os gráficos de PIB, Nível de Emprego, Distribuição da Base Monetária, Dividendos, Endividamento das Firms e Reservas Bancárias Excedentes mostram uma perturbação no período 200, referente à intervenção de Política Monetária, com elevação da taxa básica de juros e contração da base monetária. Após o período 200, o PIB decresce de forma constante até o período 500 e depois cai de forma abrupta. O mesmo efeito é observado em gráficos como o de nível de emprego e arrecadação de tributos. O índice de preços, por sua vez se comporta de modo simétrico: aumenta de forma constante até por volta do período 500 e depois aumenta de forma acelerada a partir do período 500. Essa aceleração é causada pela recomposição deficiente das reservas de socorro, situação que reduz o montante dos aportes realizados, que se tornam cada vez mais insuficientes para a recolocação das firmas em produção<sup>10</sup>. O reinício da produção das firmas reduziria o desemprego e sustentaria a demanda em níveis mais altos. Como isto não ocorre, o aumento do desemprego reduz progressivamente a demanda, a produção e a arrecadação de tributos, e as firmas se tornam menos lucrativas; isso reduz os recursos para recomposição das reservas e realimenta o processo.

A insuficiência de aportes pode ser identificada, tanto para firmas, quanto para bancos, no gráfico Total de Aportes, na figura 4.13. Nesse gráfico, pode-se notar que o total de aportes é truncado com valor igual ao das reservas de socorro em diversos períodos desde o início da simulação (para os bancos, isso ocorre pela primeira vez no período 22, para as firmas, no período 49).

O gráfico de Ativos Totais Agregados<sup>11</sup> mostra um aumento dos ativos totais de bancos até por volta do período 600, depois, um período de alguma estabilidade até o período 800, e, por fim, uma queda acentuada. Os ativos totais de firmas têm comportamento semelhante, mas o aumento inicial é bem mais suave. Aparentemente, mesmo que um número crescente de bancos esteja entrando em default, nos períodos que sucedem o período 200, os ativos totais aumentam porque os empréstimos bancários

---

<sup>10</sup>Neste modelo, firmas em *default* não podem produzir.

<sup>11</sup>Esse gráfico apresenta os ativos totais dos bancos, calculados como a soma do caixa dos bancos (que inclui o caixa das firmas correntistas, integralmente depositado nos bancos), empréstimos às firmas, empréstimos a bancos e valores a receber de firmas com pagamentos atrasados. Os ativos totais das firmas são compostos pelo caixa das firmas, o valor do estoque de bens de capital das firmas, o valor do estoque de bens produzidos e os valores a receber das firmas com pagamentos em atraso.

estão aumentando, o que não quer dizer que o valor dos bancos esteja aumentando. O gráfico de Distribuição da Base Monetária mostra que o total de recursos próprios dos bancos diminui, e que o caixa das firmas aumenta até o período 800. Essa redução do total de recursos de titularidade dos bancos ocorre como consequência do aumento dos empréstimos bancários, que resulta em transferência de recursos para o caixa (titularidade) das firmas. Paralelamente, há redução no caixa das famílias, motivada pela suspensão da produção de firmas, que não conseguem aportes suficientes para o reinício da produção quando em *default*. A paralização das atividades de um número crescente de firmas se reflete na renda das famílias, através do desemprego crescente, e da queda dos totais de custos fixos e de dividendos recebidos. Devido a essa redução no caixa, a demanda dos consumidores diminui. A demanda do governo também diminui, porque a arrecadação de tributos é drasticamente reduzida. Essa redução nas demandas de consumo final (famílias e governo) se reflete na redução do PIB, e leva as firmas a revisarem suas metas de produção para baixo, realimentando e aprofundando a crise. A redução da arrecadação de tributos também é registrada no gráfico de Distribuição da Base Monetária. Esse gráfico mostra também uma redução no nível das reservas de socorro (caixa do investidor), pois os recursos das reservas são utilizados na realização de aportes, mas a queda progressiva nos lucros das firmas e bancos chega a um nível tal que, a partir do período 330 (bancos) e do período 600 (firmas), aproximadamente, passa a não ser possível recompor essas reservas. Essa não-recomposição integral das reservas de socorro a firmas, observada a partir do período 600, resulta em redução no valor dos aportes de recursos a firmas em dificuldades, que passam a ser cada vez mais insuficientes para sanear suas dívidas e recolocá-las em produção. Isso acelera a instalação da crise, como se pode verificar nos gráficos de PIB, Nível de emprego, Arrecadação de tributos, Número de firmas em *default* e Número de bancos em *default*. A partir do período 830, aproximadamente, a crise já se aprofundou de tal forma que as reservas não sofrem nenhum tipo de reposição. Isso leva a crise a seu estágio final, no qual um número muito reduzido de firmas permanece em atividade, empregando uma parcela muito reduzida da mão-de-obra disponível.

Quanto ao aumento do caixa das firmas verificado no gráfico de Distribuição da Base Monetária, o que ocorre é uma concentração de recursos no caixa das firmas que continuam em produção. O gráfico de Ativos Totais de Firms Individuais mostra, por volta do período 950, uma grande desigualdade dos ativos totais das firmas. Essa desigualdade não é notavelmente grande para os bancos. Um indício dessa concentração dos recursos financeiros é o de que a relação entre a soma dos saldos em caixa das firmas que estavam produzindo no período 950 (39 firmas) e a soma dos saldos em caixa dessas firmas no período 2 é de mais de 500:1.

Com relação ao mercado interbancário, o volume de empréstimos se manteve aproximadamente no mesmo nível até o período 300; do mesmo modo, houve equilíbrio entre os números de tomadores e emprestadores. A partir desse período, o mercado

foi ficando fortemente tomador, enquanto o volume de empréstimos diminuía, devido a restrições impostas pelo requerimento de capital. Essas restrições surgiram porque os bancos aumentaram o volume de empréstimos bancários. A partir do período 600, o volume de empréstimos interbancários ficou próximo do zero.

Esta crise é motivada pela insuficiência dos recursos destinados a aportes para firmas e bancos em *default*. Firms em *default* têm a sua produção paralisada quando atrasam pagamentos (perdem o acesso ao crédito comercial e bancário) ou se não recebem recursos suficientes para o reinício da produção. Bancos continuam as atividades, mas os credores dos pagamentos a realizar perdem o valor não-pago (é assumida taxa de recuperação zero para saldos a recuperar após o término do processo de compensação). Assim sendo, observando os conjuntos de agentes como um todo, os *defaults* de firmas reduzem o nível de emprego, aumentam os preços pela escassez, e reduzem o consumo, ou seja, reduzem a capacidade da economia suprir as necessidades de consumo; por outro lado, os *defaults* de bancos, essencialmente prejudicam o papel que têm de canalizadores de recursos financeiros entre emprestadores e tomadores, compradores e vendedores, originando problemas de contágio: os recursos financeiros não são transferidos para onde são necessários, originando dívidas dos credores para com os credores deles. No mundo real, existem fatores com um efeito mais acentuado do que este, que não estão modeladas, como, por exemplo, a quebra de confiança no(s) banco(s), que ampliam esses efeitos.

Buscou-se verificar qual é o setor mais sensível a restrições ao volume de reservas de socorro. Para isso, foi feita uma simulação na qual somente as reservas de socorro a firmas sofreram a restrição descrita nesta seção, enquanto as reservas de socorro a bancos foram mantidas como na seção anterior. Em seguida, foi feita uma simulação restringindo as reservas de socorro a bancos, sem restringir as de socorro a firmas. A evolução do PIB da economia nessas duas situações é apresentada na figura 4.14, e mostra que, quando restrições foram aplicadas somente sobre as reservas de socorro a bancos, a economia quase não foi afetada, mostrando que a saúde das firmas praticamente não foi afetada por possíveis dificuldades atravessadas pelos bancos, enquanto, no caso em que restrições foram aplicadas somente sobre as reservas de socorro a firmas, a economia entrou em crise severa, embora menos grave do que a ocorrida como consequência das restrições sobre os dois tipos de reservas de socorro. Pode-se dizer que as firmas são mais sensíveis a esse tipo de restrição e que o contágio sofrido por toda a economia, nesse caso, é maior.

Uma análise mais resumida dos mecanismos que provocaram essa crise, tendo em vista que a parametrização desta economia era idêntica à da representada na seção anterior, a menos do dimensionamento das reservas de socorro é a de que esta economia, inicialmente, estava em um equilíbrio dinâmico, no qual firmas e bancos entravam em *default* e eram socorridos à mesma taxa média no tempo. Visto de outro modo, neste equilíbrio, o prejuízo médio causado por firmas e bancos em *default* por unidade de tempo é igual ao valor médio dos aportes por unidade de tempo. Se os aportes são insuficientes

para a realocação de firmas em produção, a circulação de bens e moeda é interrompida em setores da economia, que sai desse estado de equilíbrio inicial e se reorganiza em outro estado. No caso específico desta crise, a economia parece ter atingido um estado de equilíbrio ao final da simulação: o número de firmas em funcionamento regular nos últimos 20 períodos (981 a 1000) foi de 34 (3.4%) e o índice de emprego médio foi de 3.5%.

Desse modo, uma maneira de fortalecer esta economia contra crises é disponibilizar recursos financeiros para investimento (ou intervenção) em firmas em dificuldades<sup>12</sup>. Neste estudo de caso, o socorro a bancos foi menos eficaz do que o socorro a firmas, no entanto, é necessária cautela antes de generalizar esse resultado, pois é necessário verificar até que ponto ele depende da estrutura do modelo adotado. Uma observação adicional é a de que, além da disponibilidade desses recursos para investimento, deve existir o interesse em investir, não abordado neste modelo. Um último comentário é o de que, depois da instalação da crise, a intervenção de política monetária baixando a taxa de juros e expandindo a base monetária, no período 800, foi ineficaz, no que se refere à crise.

#### 4.6.3.2 Análise de Contágio

Verificando-se os números de firmas e de bancos em *default*, nota-se que evoluem de forma muito semelhante. Isso pode ser reflexo de um problema de contágio. De fato, os gráficos de perdas financeiras por contágio, na figura 4.15, mostram que o *default* de bancos tem uma parcela muito grande de contágio. Isto quer dizer que muito da dívida não-paga pelos bancos só existe porque eles não receberam o que era previsto ao início do processo de compensação de pagamentos do período. Isto não quer dizer necessariamente que os bancos não receberam suas dívidas, mas que recebimentos inicialmente previstos não aconteceram, por exemplo, recebimentos de firmas correntistas dos bancos. Nesse caso, essas firmas continuam a ter e tentar pagar suas dívidas, embora com menor saldo em caixa. Em condições normais, os totais pagos e os recebidos pelas firmas são aproximadamente iguais, pois as firmas estão em torno de um ponto de equilíbrio. Isso se reflete nos bancos, fazendo com que recebimentos e pagamentos de firmas sejam aproximadamente iguais. Se uma ou mais firmas correntistas de um banco deixa de receber pagamentos devido ao *default* de clientes, o banco precisará fazer os pagamentos das firmas utilizando excedentes de reservas em relação ao recolhimento compulsório. Se a posição de reservas do banco estiver frágil, ele entrará em *default* por contágio. Esse tipo de contágio se origina em firmas não-correntistas do banco. Outra forma de contágio, por firmas correntistas, contribuiu para as perdas dos bancos: as situações em que elas não pagaram o principal de seus empréstimos bancários.

A observação dos gráficos de *Default* de Firmas - Contágio e de *Default* Agregado das

---

<sup>12</sup>As reservas de socorro, neste modelo, são recursos para investimento ou intervenção visando a recuperação de firmas e bancos em dificuldade. Podem ser manejadas pelos investidores ou pelo governo.

Firmas na figura 4.15 mostra que, para as firmas, a componente de contágio (de qualquer origem) é muito menor do que para os bancos. Pelos dois gráficos, fica claro que, no caso das firmas, uma grande parte dos *defaults* teve origem na própria firma: eles ocorreriam mesmo que a firma recebesse integralmente de seus devedores. Os defaults de bancos não tiveram participação significativa nos das firmas. Os principais canais pelos quais o *default* de um banco afeta uma firma são: restrição de crédito e pagamento incompleto. Neste último caso, o banco afeta firmas correntistas de outro banco quando realiza pagamentos incompletos de dívidas de firmas correntistas.

Além do contágio através do sistema financeiro, existe o contágio através do processo produtivo. Esse tipo de contágio pode ser direto ou indireto. Se falta um insumo para uma produção otimizada, ou há redução na demanda de firmas por um produto acabado, o contágio ocorre de forma direta; se há redução na demanda dos consumidores devido à redução do nível de emprego, o contágio é indireto.

São analisados a seguir dois mecanismo de contágio através do processo produtivo: o contágio originado por clientes, e o contágio originado por fornecedores. Esses mecanismos são representados nos gráficos da figura 4.16: os gráficos de Perdas do Setor Real - Clientes (firmas individuais e agregadas) e Perdas do Setor Real - Fornecedores (firmas individuais e agregadas). As perdas associadas a contágio por clientes, no processo produtivo, são originadas pela interrupção da produção de uma firma cliente, quando entra em *default*. Nesse caso, a demanda de uma firma é reduzida, uma vez que a firma cliente não está produzindo, o que leva a uma revisão, no período seguinte, da meta de produção para baixo e conseqüente redução no emprego. Por outro lado, as perdas associadas a contágio no processo produtivo por fornecedores são originadas quando uma firma fornecedora não consegue atender integralmente à demanda por seus produtos; no entanto, a perda ocorre porque a produção está abaixo da meta, devido à escassez de algum insumo e porque a composição de insumos utilizada na produção é diferente da calculada na maximização do lucro. Outro fator de perda: devido à presença de custos fixos, a queda na receita de vendas provoca uma redução no lucro mais do que proporcional à queda na receita. O valor da perda é determinado pela diferença, ao preço corrente, entre o valor da meta de produção e o valor da quantidade efetivamente produzida.

A figura 4.16, com os gráficos de Perdas do Setor Real, mostra que as perdas causadas por clientes (restrição na demanda) são maiores. Isso pode ser visto nos gráficos de Perdas Agregadas do Setor Real - Clientes. O gráfico de perdas agregadas originadas por clientes compara o valor da quantidade de produtos não-vendidos ao valor da quantidade de produtos vendida no equilíbrio inicial, calculados a preços correntes. Como o número de firmas que interrompe as atividades está crescendo, o valor da perda aumenta progressivamente, devido à menor demanda de produtos por firmas e pelas famílias (devido ao desemprego). Esse gráfico mostra uma aceleração no ritmo das perdas entre os períodos 600 e 800.

O gráfico de Perdas Agregadas do Setor Real - Fornecedores compara a meta de produção com o que foi efetivamente produzido. Esse gráfico não tem a forma do outro porque a meta de produção diminui com a redução da demanda, de modo que, à medida que a crise se aprofunda, a meta de produção se reduz, reduzindo as perdas. Os gráficos de Perdas do Setor Real (firmas individuais), colocados à esquerda, são interpretados como os gráficos de Ativos Totais de agentes individuais (ver seção 4.6.1). Mostram que a distribuição de perdas entre as firmas é relativamente homogênea, e que a crise se aprofunda mais rapidamente entre os períodos 600 e 800. Não há elementos para concluir que a desaceleração tenha ocorrido devido às ações de política monetária no período 800; é mais provável que ela tenha ocorrido pelo fato de a economia se aproximar de um novo equilíbrio.

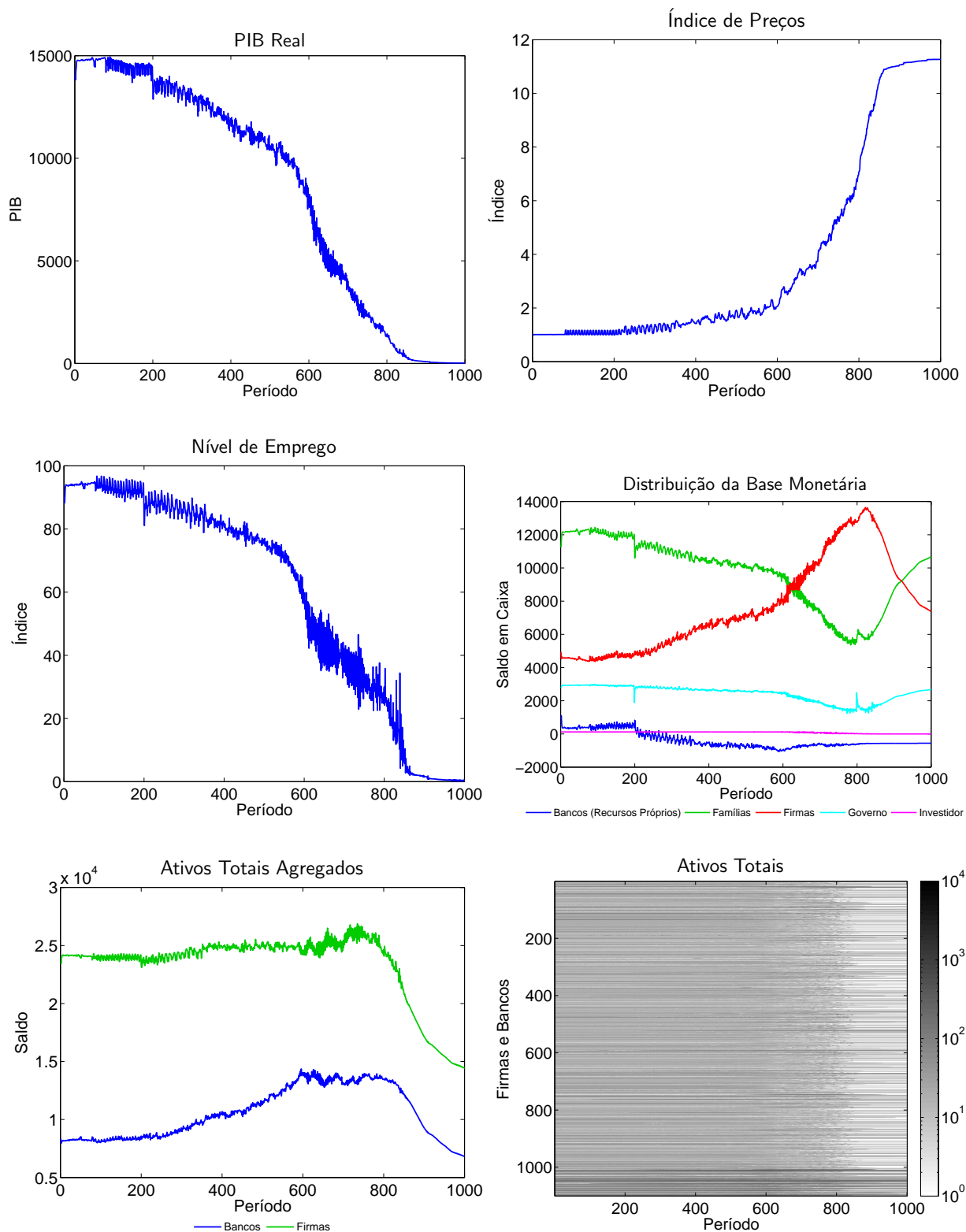


Figura 4.11: Crise: Indicadores macroeconômicos. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

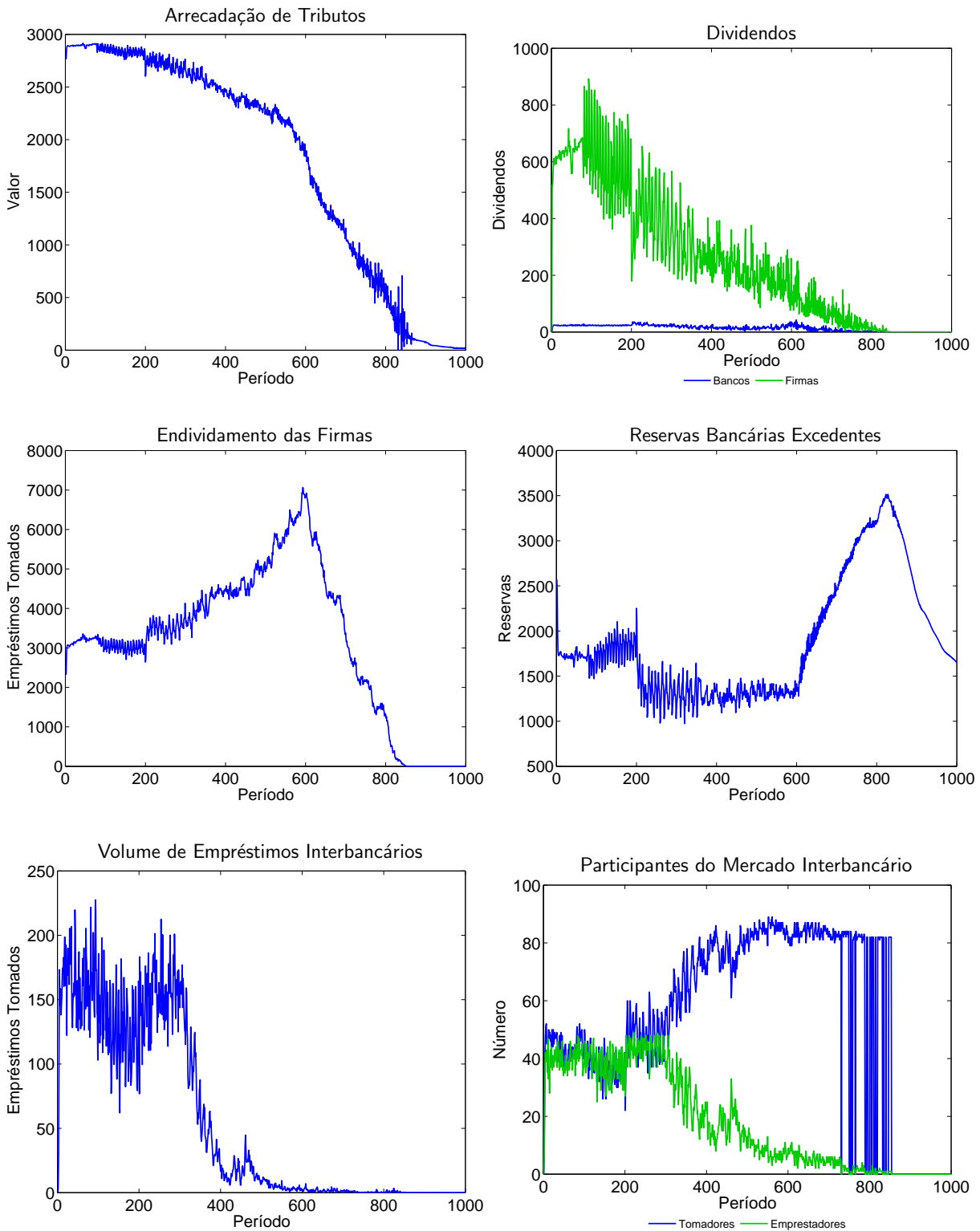


Figura 4.12: Crise: Indicadores bancários e outros. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).



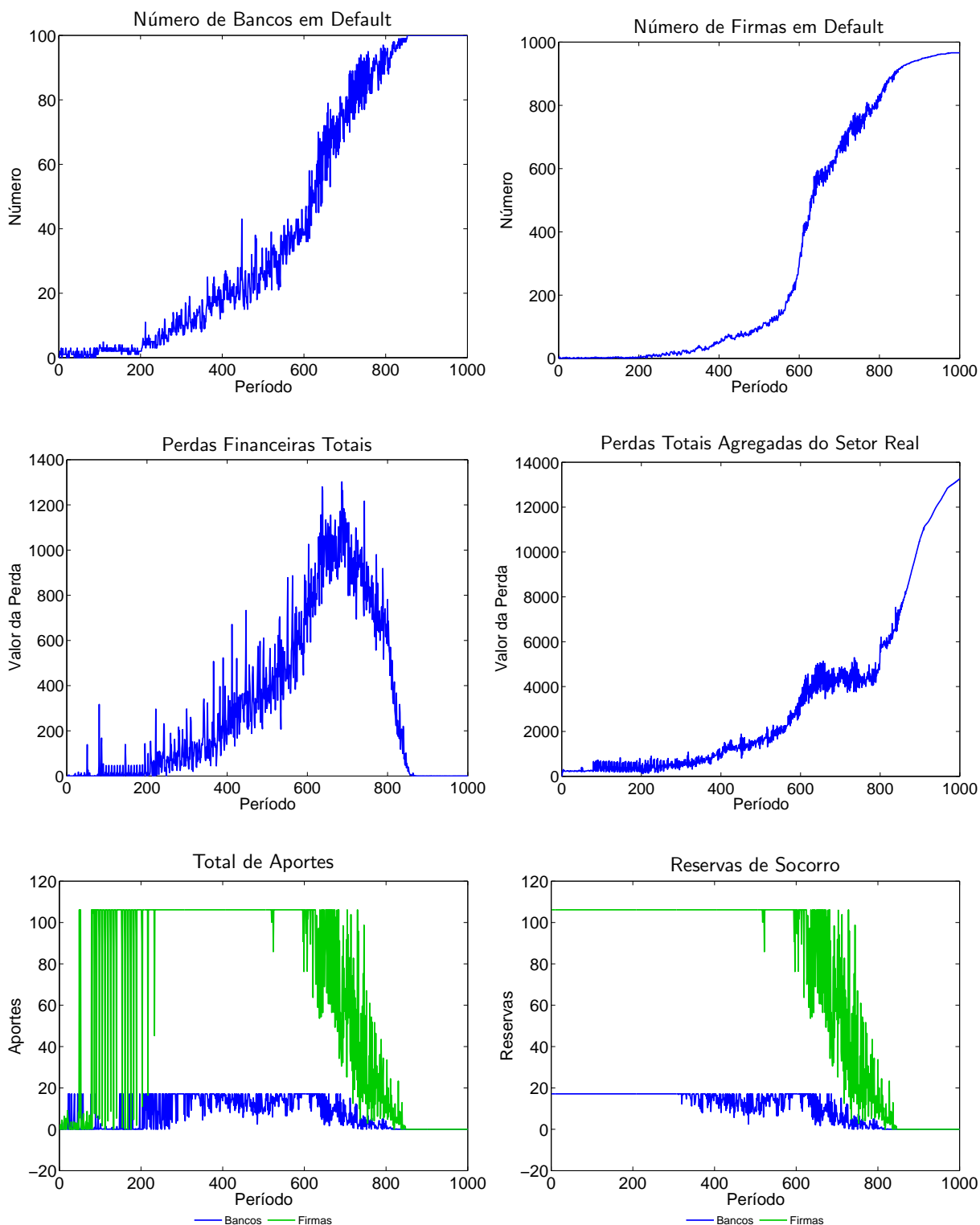


Figura 4.13: Crise: Perdas. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

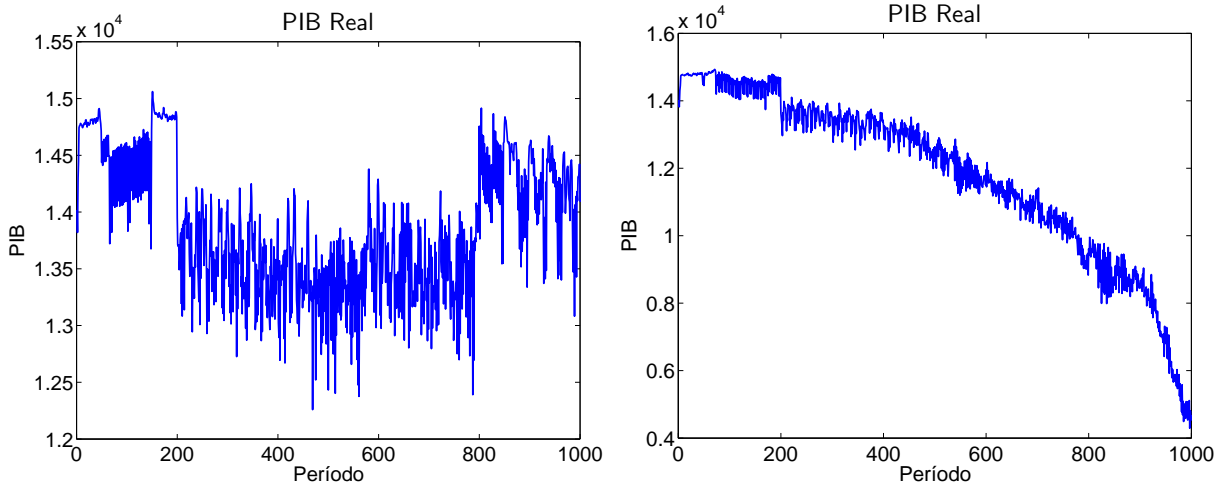


Figura 4.14: Comparação da influência de restrições a reservas de socorro: (*esq*): somente bancos, (*dir*): somente firmas.

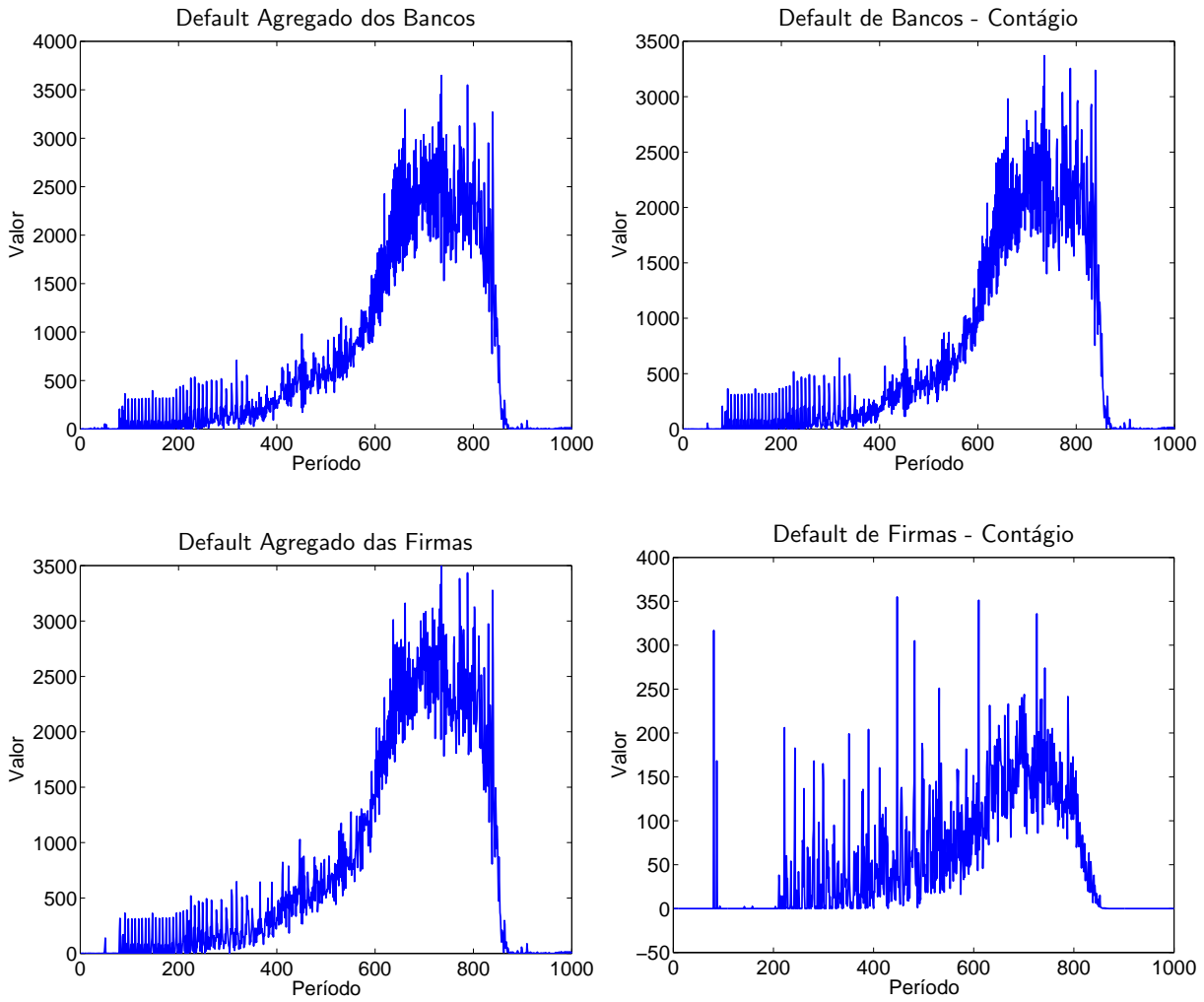


Figura 4.15: Perdas financeiras: contágio. Na primeira linha, gráficos a) e b), e na segunda, c) e d).

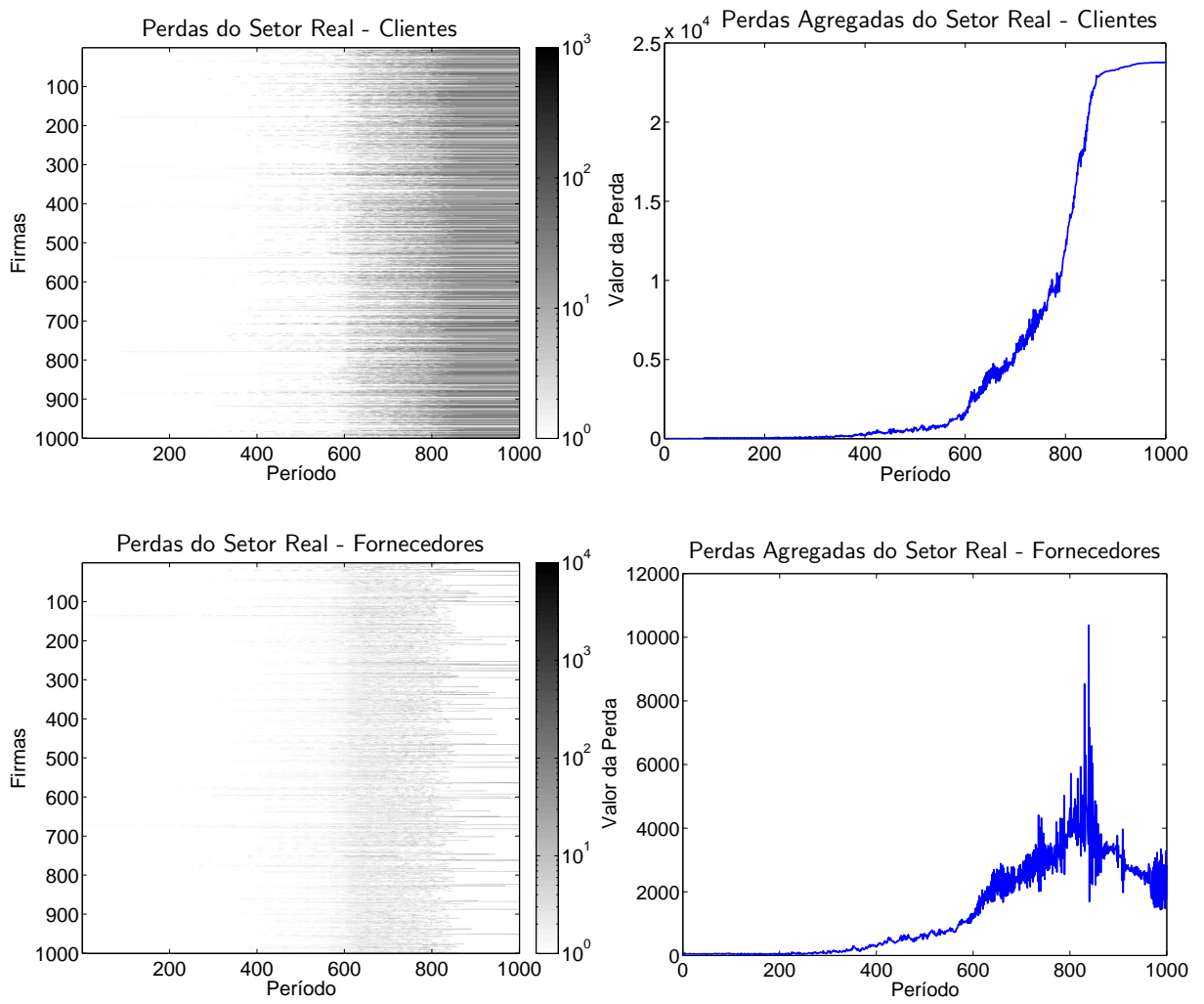


Figura 4.16: Perdas no setor real: contágio. Na primeira linha, gráficos a) e b), e na segunda, c) e d).

### 4.6.3.3 Socorro pelo Governo

Nos períodos iniciais desta simulação, a economia apresenta uma evolução idêntica à ocorrida na simulação realizada para aportes por investidores. A diferenciação entre essas evoluções começa a surgir quando são realizados aportes, devido ao fato de os recursos utilizados na recomposição das reservas serem provenientes do caixa do governo, em vez de virem do caixa dos investidores. Neste modelo, o saldo em caixa dos agentes (investidores ou governo) é prioritariamente destinado à realização de aportes, sendo o valor remanescente destinado ao consumo. Isso significa que, no caso de utilizar recursos provenientes do caixa do governo, a realização de aportes reduz o consumo desse agente; do mesmo modo, a realização de aportes pelos investidores implica em redução do consumo deles<sup>13</sup>. Como as cestas de consumo dos dois tipos de agentes são diferentes, as demandas pelos bens individuais serão diferentes, determinando metas de produção diferentes e evoluções diferentes para as economias.

Outro fator que diferencia a evolução da economia, nos casos em que a origem dos recursos para recomposição das reservas é diferente, é a capacidade de prover integralmente o valor da recomposição. Nos estudos de caso realizados neste trabalho, ao início da simulação, a receita do governo (impostos) é maior do que a dos investidores (dividendos), de modo que ele consegue manter o nível das reservas de socorro no valor pré-definido (ver figura 4.19, gráfico (f)); o que não ocorre com os investidores (figura 4.13, gráfico (f)). Disso resulta que, quando o governo supre as necessidades de recomposição das reservas de socorro, o valor total dos aportes efetivamente realizados, a firmas e a bancos, é o máximo permitido pelo dimensionamento das reservas, ou seja, chega ao valor total das reservas, definido ao início da simulação, conforme pode ser visto na figura 4.19, gráfico (e). No caso de recomposição pelos investidores (figura 4.13, gráfico (e)), à medida que a crise se aprofunda, o total de dividendos recebidos por eles diminui, limitando cada vez mais a recomposição das reservas. Nesse caso, o valor total dos aportes realizados pode chegar ao valor total das reservas, mas esse valor é inferior ao valor estabelecido no dimensionamento inicial delas. Pelo fato de firmas e bancos receberem volume de aportes reduzido, terão desempenho pior do que teriam se tivessem recebido o volume de aportes permitido pelo dimensionamento original das reservas. Isso fará com que o total de dividendos que eles poderão pagar seja menor do que teria sido se não tivesse havido redução no volume de aportes. Os recursos para reconstituição das reservas são provenientes desse total reduzido de dividendos, e, em caso de necessidade, atingirão menor teto do que atingiriam se a redução não tivesse ocorrido, levando a uma reconstituição mais deficiente e realimentando o processo.

Isso resulta em indicadores macroeconômicos, como PIB e Nível de emprego mais

---

<sup>13</sup>É reduzido o consumo das famílias, uma vez que os investidores destinam o saldo não utilizado em aportes ao consumo, repassando-o às famílias.

baixos do que os obtidos quando o governo recompõe as reservas de socorro. Os gráficos de PIB e Nível de emprego apresentados nas figuras 4.17, gráficos (a) e (c) (recomposição pelo governo) apresentam valores mais altos do que os referentes a recomposição das reservas pelos investidores (figuras 4.11, gráficos (a) e (c)). Nos gráficos de PIB e Nível de emprego obtidos quando os investidores recompõem as reservas de socorro, verifica-se que, no período 1000, PIB e Nível de emprego estão próximos de zero. No caso de recomposição pelo governo, no período 1000, o PIB oscila entre 10 e 15% do valor original, e o Nível de emprego está entre 30 e 40%. Para verificar se a recomposição das reservas de socorro pelo governo estabiliza a economia em um nível de atividade mais baixo ou se apenas retarda um pouco a queda do nível de atividade até zero, decidiu-se estender a simulação até 2000 períodos, verificando-se que, aparentemente, a economia encontrou um novo nível de equilíbrio (muito mais baixo) após a crise. Isso pode ser visto também pelo Índice de preços, figura 4.17 (b), que estabiliza por volta do período 1000, em um nível entre 5 e 6. O gráfico de Ativos totais individuais, figura 4.17 (f) mostra uma distribuição de ativos com menor desigualdade entre as firmas do que a observada na figura 4.11, gráfico (f). O gráfico 4.17 (f) também mostra que a distribuição dos ativos entre as firmas era mais homogênea nos períodos iniciais da simulação do que nos períodos 1000 a 2000.

Até o período 600, a economia evolui de forma semelhante à observada no caso em que os aportes são realizados pelos investidores. A evolução da economia nos dois casos estudados começa a se diferenciar mais por volta do período 600, quando a reconstituição das reservas de socorro a firmas, quando feita pelos investidores, começa a não ser completa (neste estudo, a recomposição das reservas de socorro a firmas, quando feita pelo governo, é sempre completa). Apesar dessa diferenciação um pouco maior, a partir do período 600, a economia, nos dois casos, sofre uma queda abrupta no PIB, Nível de emprego e Arrecadação de tributos. Possivelmente essa queda ocorra porque, nos dois casos, as reservas de socorro sejam insuficientes para suprir a necessidade de aportes (por exemplo, isso pode ser visto na figura 4.19, gráfico (e): a partir do período 400, aproximadamente, o total de aportes em firmas realizados é sempre igual ao valor da reserva de socorro a firmas). Além disso, é possível que, nos dois casos, por volta do período 600, firmas sistemicamente importantes tenham sido forçadas a suspender a produção, acelerando a evolução da crise. No caso da recomposição das reservas de socorro feita por investidores, o tamanho das reservas e a soma dos aportes realizados, a firmas e a bancos, são próximos de zero a partir do período 830, aproximadamente; por outro lado, no caso de a recomposição ser feita pelo governo, as reservas e os aportes realizados em cada período se mantêm constantes e iguais ao valor inicialmente estabelecido para as reservas. Esse fluxo constante de aportes parece evitar a paralização completa da economia, que se mantém em um novo nível de equilíbrio com PIB, Nível de emprego e Arrecadação de tributos maiores que zero.

Nesse novo nível de equilíbrio, verifica-se, como exposto anteriormente, PIB real e Nível de emprego bem mais baixos do que inicialmente, e Índice de preços quase 6

vezes maior. A distribuição da base monetária se alterou: famílias sofreram uma drástica redução dos valores em caixa, como consequência da redução do nível de emprego e da paralização de cerca de 85% das firmas (ver figura 4.19, gráfico (b)). As firmas que pararam de produzir também deixam de pagar custos fixos às famílias. A paralização de grande parte das firmas e a redução da renda das famílias resultou em queda na arrecadação de tributos, com correspondente queda no saldo em caixa do governo. Por sua vez, o caixa das firmas subiu muito, apesar da paralização de 85% delas. Os recursos ficaram concentrados no caixa dos 15% das firmas que continuaram em produção, o que pode ser visualizado qualitativamente no gráfico de Ativos totais individuais. Próximo ao período 2000, nota-se a presença de poucas linhas horizontais escuras ao lado de linhas bem mais claras no gráfico apresentado na figura 4.17 (f). Neste estudo de caso em particular, a subida dos valores em caixa da totalidade das firmas pode ser atribuída à redução dos pagamentos destas às famílias e ao governo; por outro lado, a base monetária permaneceu constante a partir do período 200 e as reservas de socorro (a firmas e a bancos) têm tamanho limitado. Além disso, os bancos têm volume de empréstimos bancários agregados (conforme figura 4.18, gráfico (c)) em nível inferior ao inicial e não conseguem se apropriar, de forma contínua e em termos agregados, dos valores em caixa do conjunto de firmas, via juros de empréstimos. Isso é reforçado pelo fato de que os bancos praticamente não pagam dividendos a partir do período 1000 (portanto, estão com baixos lucros nesse período), conforme a figura 4.18, gráfico(b). Por fim, observa-se, no gráfico de distribuição da base monetária, um aumento no caixa próprio dos bancos tendendo à estabilidade a partir do período 1500.

A queda no endividamento das firmas junto aos bancos é acompanhada pelo aumento das reservas bancárias excedentes ao depósito compulsório (figura 4.18, gráfico (d)). O número de bancos em default tende a se estabilizar a partir do período 1000 da simulação, em torno de 95% dos bancos, conforme se vê na figura 4.19, gráfico (a). Nessa situação, o mercado interbancário permanece fortemente tomador, com pouquíssimos bancos emprestadores (figura 4.18, gráfico (f)<sup>14</sup>). O valor dos empréstimos interbancários nesses períodos é baixíssimo, apontando para um possível racionamento de crédito nesse mercado, dado que o número de bancos em default é alto.

Por fim, os gráficos de Perdas financeiras totais e de Perdas totais agregadas do setor real (figura 4.19 (c) e (d)) mostram também essa tendência à estabilização a partir do período 1500, o que faz supor que a economia atingiu novo estado de equilíbrio. Nesse

---

<sup>14</sup>Nesse gráfico, são apresentados o número de tomadores e o número de emprestadores que realizaram operações no mercado. Nos períodos em que o número de tomadores e o número de emprestadores são zero, não houve mercado (pode ter havido demanda por empréstimos sem que algum banco tenha tido condições de atuar como emprestador). Cada banco se posiciona como tomador ou emprestador com base na expectativa de pagamentos de juros de operações interbancárias do período anterior e de recebimentos de juros previstos nas operações de empréstimos concedidos, bancários e interbancários. Entram nesse cálculo também os principais das operações interbancárias iniciadas no período anterior e que terminam no período atual, a pagar e a receber.

equilíbrio, há um conjunto de firmas e bancos operando com prejuízos e requerendo constantes intervenções para se manterem operacionais (na ausência de recursos para intervenção, as firmas nessa situação param de produzir e o equilíbrio não se sustenta, como pode ser visto no estudo de caso em que os investidores complementam as reservas de socorro). Esta situação é semelhante àquela em que setores da economia necessitam de subsídio do governo para se sustentarem.

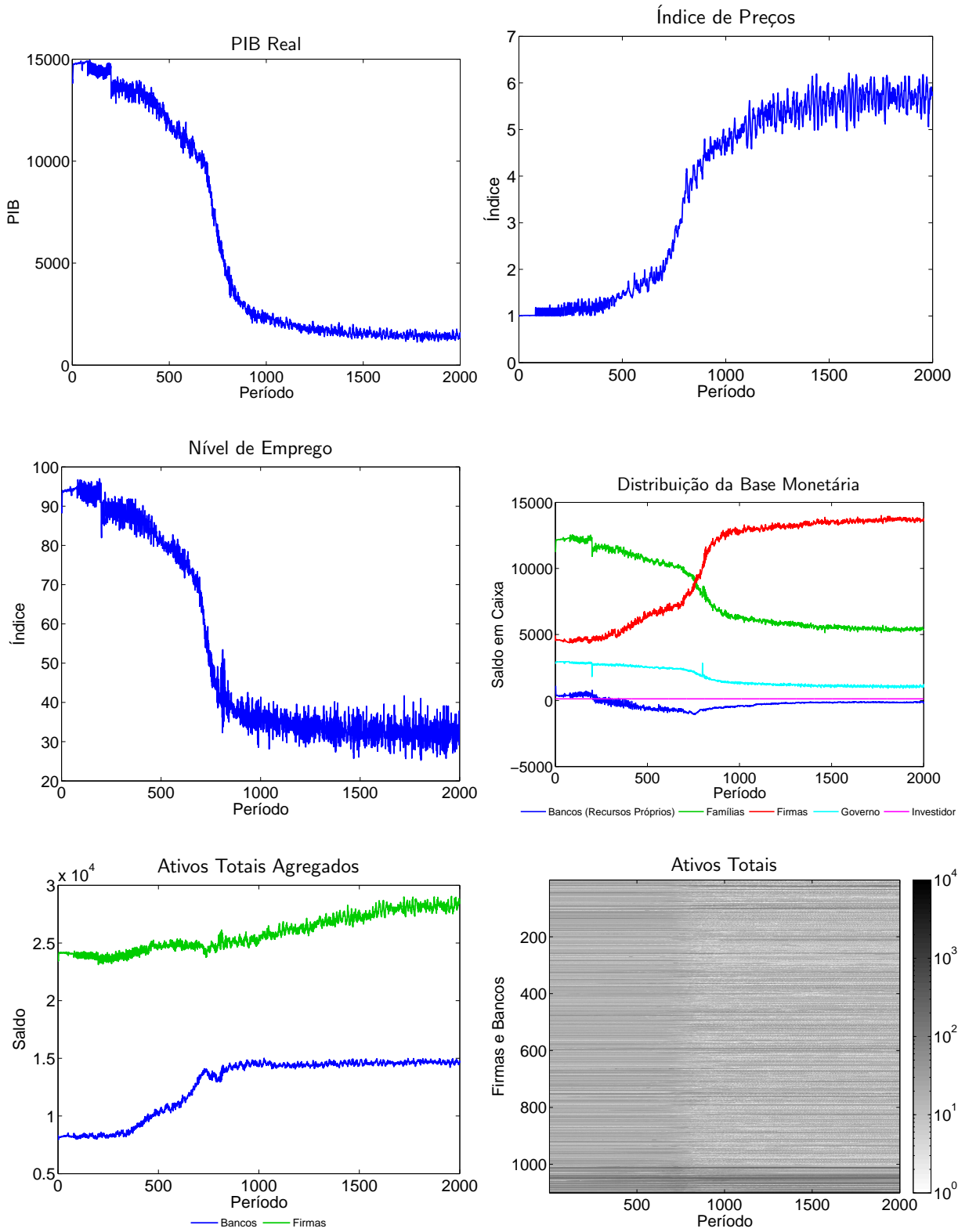


Figura 4.17: Crise (socorro pelo governo): Indicadores macroeconômicos. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).



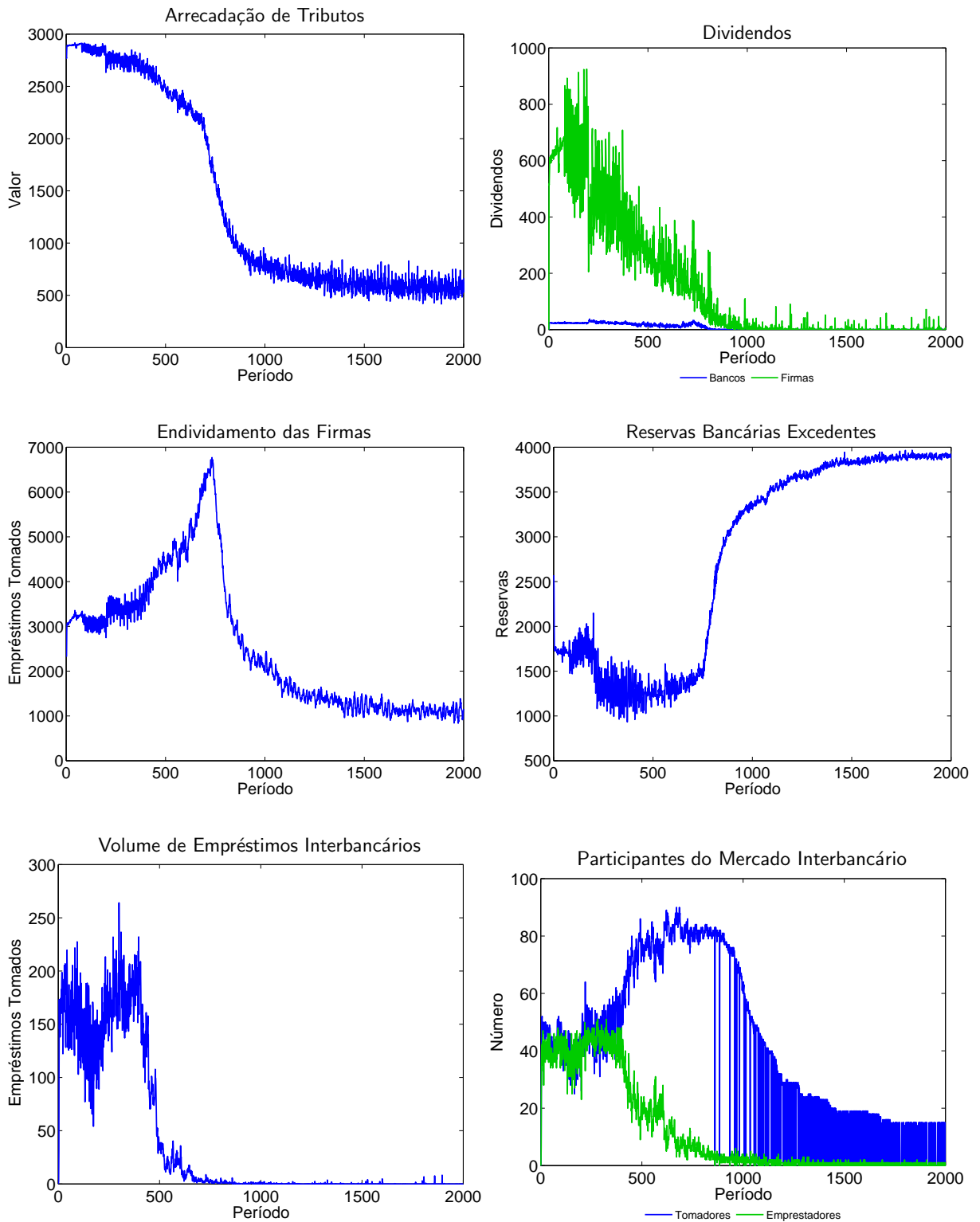


Figura 4.18: Crise (socorro pelo governo): Indicadores bancários e outros. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

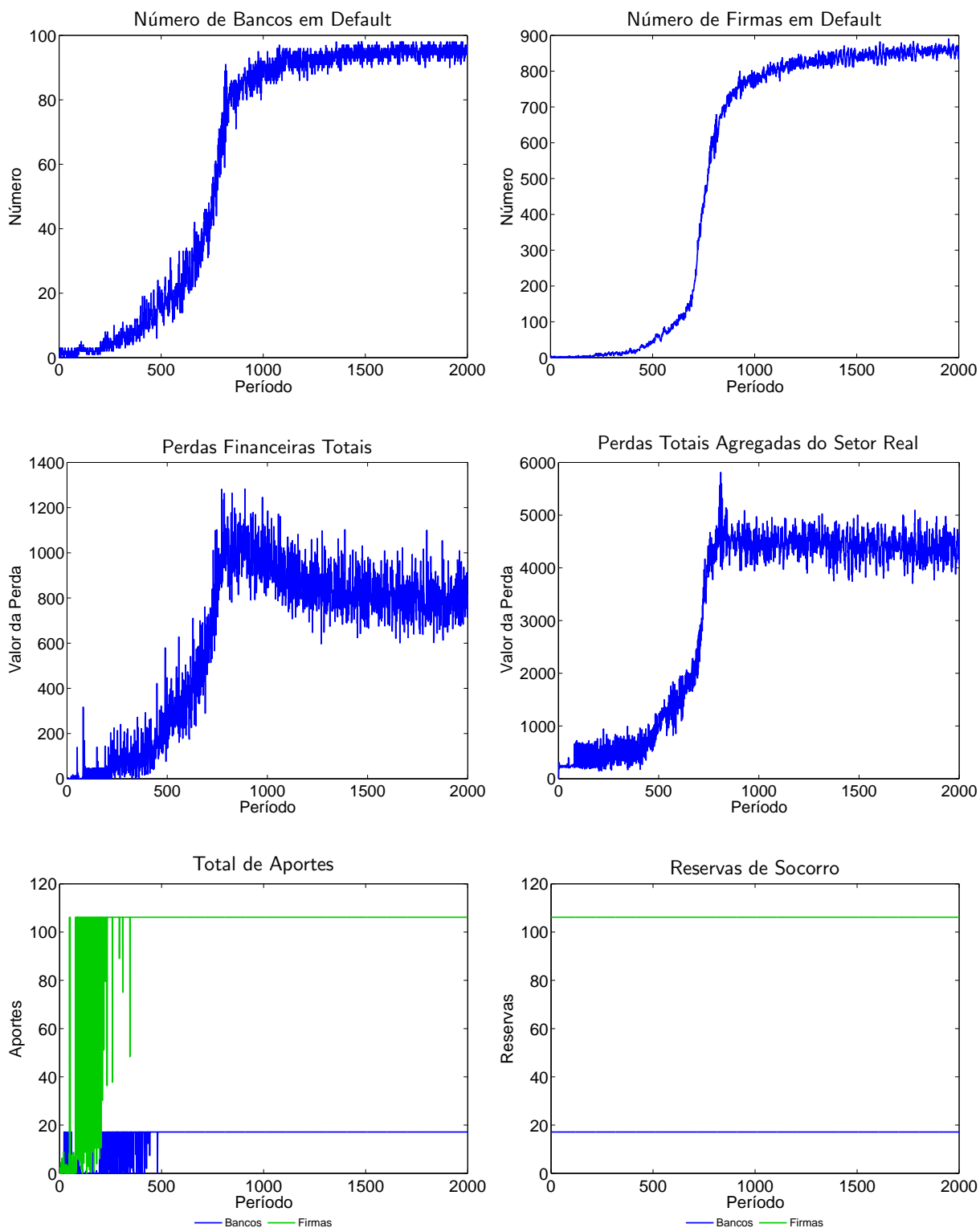


Figura 4.19: Crise (socorro pelo governo): Perdas. Na primeira linha, gráficos a) e b), na segunda, c) e d), e na terceira, e) e f).

#### 4.6.3.4 Socorro a Agentes Específicos

Nesta seção, parte-se da situação de crise estudada na seção 4.6.3.1, que, essencialmente, se deve ao dimensionamento insuficiente das reservas de socorro a firmas. Conforme mencionado naquela seção, o volume dessas reservas é inferior ao necessário para repor as perdas geradas pelas firmas que entram em crise em um equilíbrio no qual firmas entram em *default* e são socorridas aproximadamente à mesma taxa. Deseja-se investigar se critérios alternativos de alocação dessas reservas a aportes a firmas produzem melhor resultado do que o critério utilizado anteriormente. Originalmente, está sendo utilizado o critério de alocação proporcional, isto é, no momento da realização dos aportes, soma-se o total dos aportes necessários a cada firma e compara-se com o total disponível da reserva de socorro a firmas. Se o valor disponível for insuficiente, faz-se a alocação de aportes proporcional ao calculado para cada firma.

Em linha com as considerações feitas na seção 4.6.3.1, serão testados três critérios de alocação de aportes alternativos, nas situações em que as reservas são insuficientes:

- a) Priorização da alocação dos aportes a firmas que fazem maior quantidade de pagamentos a fornecedores. Esse teste será feito com base na indicação de que quando uma firma cliente paralisa sua produção, as firmas fornecedoras deixam de vender para elas experimentando uma queda na receita de vendas, que se reflete em queda na meta de produção, do nível de emprego, e do PIB. Procurar-se-á alocar os aportes a firmas com maior volume de vendas a outras firmas, procurando-se reduzir esse efeito.
- b) Priorização da alocação dos aportes a firmas que geram maior renda às famílias. Neste caso, procurar-se-á priorizar a manutenção em produção de firmas que geram a maior renda para as famílias, medida através da soma de custos fixos e salários (não estão sendo considerados os lucros). Isso é feito com a finalidade de se manter a demanda no nível mais alto possível, sustentando a atividade econômica.
- c) Priorização da alocação dos aportes a firmas grandes que sejam clientes importantes de outras (*too big to fail*). Nesse caso, procura-se manter em produção firmas com grande volume de pagamentos a fornecedores e que, ao mesmo tempo, sejam clientes importantes desses fornecedores, ou seja, que tenham uma participação significativa na receita deles. O objetivo dessa forma de alocação é priorizar a destinação dos aportes a firmas cuja paralização tenha um potencial maior de contágio de fornecedores.

Para a realização desses testes, partiu-se da configuração da economia que originou a crise na seção 4.6.3, modificando-se os critérios de alocação de aportes, nos casos em que as reservas de socorro a firmas foram insuficientes para atender à demanda por

aportes. Foi considerado um detalhe adicional: destinou-se 80% dos recursos disponíveis aos aportes prioritários e os 20% restantes foram alocados às necessidades não-atendidas na priorização, de maneira proporcional. Isso foi feito para evitar a paralização definitiva das firmas não-priorizadas para aporte por falta de recursos financeiros. Essas firmas podem não retornar à produção imediatamente, mas, depois de alguns períodos. Isso ocorre, porque elas recebem os aportes necessários aos poucos.

Além desse teste, foram feitos esses mesmos cálculos, mas para reservas de socorro maiores, de volume igual a 1% da soma dos valores líquidos de firmas e bancos, com a finalidade de se verificar a robustez de possíveis achados. Os resultados são apresentados na figura 4.20.

Nessas figuras, é possível ver que, para o volume de reservas de socorro maior, de 1% do valor líquido agregado das firmas, todos os critérios de socorro evitaram eficazmente a crise, sendo que os critérios com melhor desempenho foram o original (socorro proporcional) e o *too big to fail*. Por outro lado, o que apresentou pior desempenho foi o que prioriza a alocação de aportes a firmas com maior volume de compras. No caso do volume de reservas de socorro de 0.5% do valor líquido agregado das firmas, o critério de socorro a firmas *too big to fail* teve um desempenho nitidamente superior aos demais. Isso pode ser explicado pelo fato de que, neste critério, os recursos são preferencialmente alocados às firmas cuja paralização tem mais potencial de desestabilizar outras por contágio. Evitando preferencialmente a paralização dessas firmas, o potencial de contágio de outras firmas é reduzido, desacelerando a queda do PIB.

Neste estudo de caso, o melhor critério de priorização de firmas para socorro foi o *too big to fail*, o que sugere que se investigue se esta é a melhor opção sob outras configurações de economia.

Este estudo levou em conta somente o socorro a firmas, uma vez que na seção 4.6.3.1, se verificou que a suficiência das reservas de socorro a bancos não foi eficaz para mitigar ou reverter a crise. Neste modelo, crises bancárias são de pouca relevância, pois bancos em *default* continuam a operar, mesmo recebendo aportes insuficientes. Caso fossem impedidos de operar, os efeitos de crises bancárias seriam severos, pois os bancos deixariam de realizar as transferências financeiras associadas às firmas suas correntistas, provocando contágio no setor real de intensidade da ordem que se observa nas crises bancárias reais.

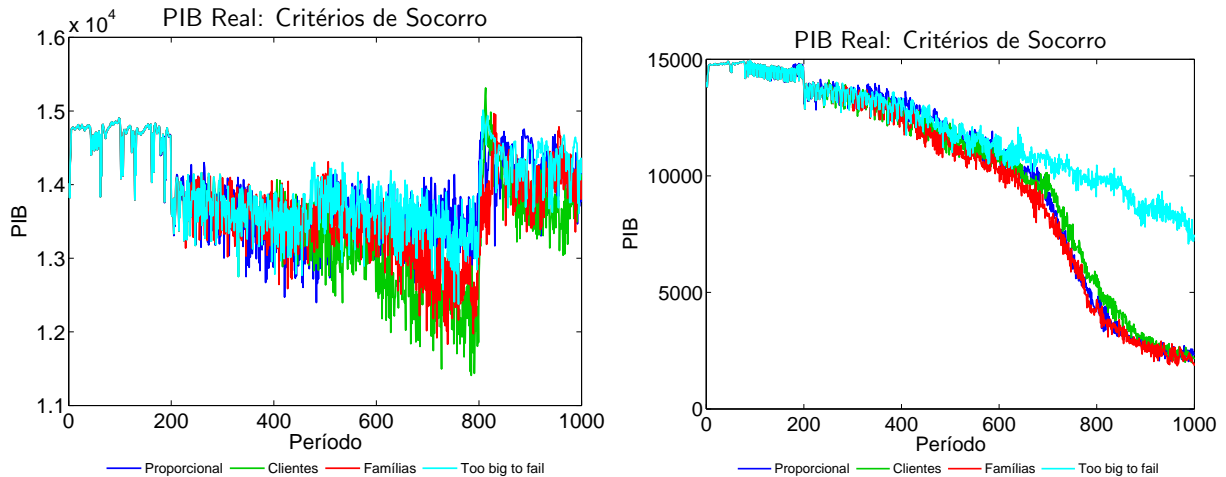


Figura 4.20: PIB: comparação entre critérios de socorro a firmas: (*esq*): Reservas de socorro (bancos, firmas) iguais a 1% do valor líquido agregado (bancos, firmas), (*dir*): Reservas iguais a 0.5% do valor líquido agregado. Critérios: (1) proporcional; (2) prioridade para firmas maiores clientes; (3) prioridade para firmas que geram mais renda para as famílias; (4) prioridade para firmas grandes que sejam clientes importantes de outras (*too big to fail*).

## 4.7 Comentários Finais do Modelo

Nesta seção, serão feitos comentários sobre tópicos associados à estrutura e a limitações deste modelo.

### 4.7.1 Representação Alternativa da Macroestrutura do Modelo

Na apresentação deste modelo, por ser ele um modelo baseado em agentes, foi dada ênfase na caracterização de cada tipo de agente e de seus comportamentos nos diversos contextos. No entanto, o conjunto dos comportamentos de interação dos agentes forma uma estrutura que permite uma abordagem diferente deste modelo: trata-se de uma estrutura formada por fluxos e estoques, reais e nominais, que se referem, respectivamente, a bens e à moeda. Ao se estudar o comportamento de setores da economia ou da totalidade dela, pode-se analisar os fluxos e estoques reais (bens) e nominais (monetários). Por exemplo, em uma crise, alguns agentes não têm caixa para os pagamentos, enquanto outros não têm estoque de bens para atender à demanda de consumidores. Uma análise da distribuição do estoque de moeda deverá mostrar firmas, ou bancos, com saldo insuficiente em caixa e consumidores com saldo em excesso.

Foster (2011) propõe que sistemas complexos econômicos são, em sua essência, basicamente energéticos, mas que diferem de sistemas biológicos por coletarem, armazenarem e aplicarem conhecimento. Sugere que colocar o foco nos fluxos e estoques de energia e de conhecimento pode prover a macroeconomia com uma estrutura analítica adequada.

De fato, a circulação de bens e moeda pode ser associada a fluxos de energia,

sobre os quais incide a lei de conservação de energia<sup>15</sup>. Essa estrutura de estoques e fluxos, tanto reais quanto monetários, pode ser analisada com mais facilidade adotando-se uma abordagem hidráulica, útil pela sua capacidade de apontar, de forma imediata e intuitiva, os pontos nos quais ocorrem problemas que podem levar a crises financeiras. Nesse tipo de abordagem, um sistema financeiro é representado por reservatórios (caixa) e tubulações (pagamentos). A análise da robustez de um sistema financeiro está associada à severidade dos eventos necessários a uma interrupção de um determinado volume de fluxo, ou afetando determinado número de agentes. No que se refere a intervenções em crises, a análise a fazer seria identificar os pontos do sistema a receber intervenções que tivessem a melhor relação custo/benefício. Phillips (1950) apresentou esse tipo de idéia em um contexto diferente.

#### 4.7.2 Equilíbrio Inicial como Regra de Ouro

Decidiu-se iniciar as simulações com este modelo em um estado de equilíbrio do sistema de firmas, para se evitar efeitos transitórios que poderiam surgir se a economia (setor real) estivesse muito afastada do ponto de equilíbrio. Esse equilíbrio é calculado sem perturbações na demanda dos consumidores e governo, e com taxas de juros zero. Sendo as taxas de juro iguais a zero, a existência de bancos é transparente para as firmas, pois o custo dos empréstimos bancários é zero.

Esse estado de equilíbrio é a condição de demanda efetiva dessa economia para o número inicial de trabalhadores definido como parâmetro. Por isso mesmo, a economia não pode crescer (em termos per capita) a partir desse ponto, a não ser que haja progresso tecnológico. Os recursos (insumos e trabalho) estão plenamente utilizados para a produção da cesta de consumo que otimiza a utilidade agregada dos consumidores, portanto a economia está na fronteira das possibilidades de produção.

Essa condição é equivalente à regra de ouro do modelo de Ramsey descentralizado, com as diferenças de que, neste modelo, não se usa o fator de desconto intertemporal  $\beta$  e de que os trabalhadores / consumidores não escolhem o número de horas trabalhadas.

#### 4.7.3 Equilíbrio de Economias Descentralizadas

Neste trabalho, são apresentadas, no anexo C, duas formulações para a simulação do subsistema de firmas, trabalhadores/consumidores e governo: em uma delas, a simulação é formulada como um problema de equilíbrio geral estático, na outra, a simulação é apresentada como um mapa que associa preços e quantidades produzidas em um período a preços e quantidades produzidas no período seguinte. De acordo com o teorema da contração, um mapa possui ponto fixo único se for uma contração, o que depende das

---

<sup>15</sup>Note-se que, no caso deste modelo, a transformação de trabalho em bens e de bens em outros, no processo produtivo, não obedece a estas leis, devido à forma da função de produção.

formas funcionais adotadas na sua especificação. Se o ponto de equilíbrio é único, a solução do problema de equilíbrio geral correspondente será única, uma vez que as equações que descrevem os problemas dos agentes e as condições de compensação dos mercados são as mesmas utilizadas no mapa, sendo o mapa apenas a descrição genérica de um processo numérico para se calcular essa solução.

Essa equivalência sugere que economias cujos agentes agem de forma auto-interessada e descentralizada atingem o estado que soluciona o problema de equilíbrio geral estático delas quando o mapa que representa o comportamento deles é uma contração, situação em que o leiloeiro walrasiano é desnecessário.

#### 4.7.4 Crescimento da Economia

##### 4.7.4.1 Fatores Associados ao Crescimento

A quantidade de produto consumida per capita pode ser usada na identificação dos fatores associados ao crescimento da economia, e pode ser calculada a partir da relação Renda de 1 trabalhador / Preço do produto. Essa relação será calculada para uma economia com a mesma estrutura adotada neste trabalho, mas produzindo apenas 1 bem e sem tributação. Nessas condições, a renda de 1 trabalhador em 1 período é obtida da soma de salários, custos fixos e lucros das firmas:

$$w^1 = W + FXCu/XWu + (XWu W + PXu \delta)PM/XWu$$

Rearranjando:

$$w^1 = W(1 + PM) + FXCu/XWu + PXu \delta)PM/XWu \quad (4.2)$$

As demandas ótimas unitárias (para a produção de 1 unidade do bem) a partir do insumo e trabalho são obtidas de (D.2a) e (D.2b):

$$Xu^1 = \frac{1}{A} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{\alpha-1} \left( \frac{P}{W} \right)^{\alpha-1} \quad (4.3a)$$

$$XWu^1 = \frac{1}{A} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{\alpha} \left( \frac{P}{W} \right) \quad (4.3b)$$

Substituindo (4.3) em (4.2):

$$w^1 = W(1 + PM) + FXCu \frac{AW}{P} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{-\alpha} + \delta PM \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{-\alpha} \left( \frac{W^{2-\alpha}}{P^{1-\alpha}} \right) \quad (4.4)$$

Por sua vez, o preço de equilíbrio para produção com lucro, desconsiderados os impostos, é dado por:

$$P = (1 - \delta Xu(1 + PM))^{-1}(XWu W + FXCu)(1 + PM) \quad (4.5)$$

Dividindo (4.4) por (4.5):

$$d^1 = \frac{W(1 + PM)}{P} + FXCu \frac{AW}{P^2} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)^{-\alpha} + \delta PM \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)^{-\alpha} \left(\frac{W}{P}\right)^{2-\alpha} \quad (4.6)$$

Assumindo-se  $W$  constante, de (4.5) e (4.6), pode-se concluir que o consumo per capita aumenta quando o preço diminui. Para isso, deve-se ter  $FXCu = 0$  e  $PM = 0$ . Substituindo-se esses valores em (4.5), tem-se:

$$P = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) \left[\frac{1}{AW^\alpha} \left(\frac{\delta}{W} + \frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (4.7)$$

De(4.7), pode-se concluir que a economia cresce quando a produtividade ( $A$ ) aumenta e a taxa de depreciação do bem (trata-se de um bem de capital) diminui. Em suma, o PIB per capita aumenta se:

- a) Ocorre progresso tecnológico ( $A$  aumenta);
- b) São reduzidos custos fixos (associados à propriedade) e taxas de lucro (fatores de transferência de renda).

#### 4.7.4.2 O Papel do Governo no Crescimento

Neste modelo, o governo é representado como um grupo de consumidores, cuja razão de ser é estimular setores da economia através dos seus gastos de consumo. Adicionalmente, pode realizar aportes de socorro a firmas e a bancos em dificuldades, quando a simulação é configurada para isso. Uma parte importante do papel do governo não foi incluída neste modelo: a produção de bens públicos. Esses bens podem ser de dois tipos: instituições e infraestrutura. Eles podem ser modelados como insumos nas funções de produção das firmas e funcionariam como externalidades: eles estão disponíveis para uso pelas firmas, sem que elas paguem diretamente por isso (são não-excludentes e não-rivais). À medida que o estoque de bens públicos aumenta, a produtividade das firmas aumenta, resultando em crescimento da economia.

#### 4.7.4.3 Progresso Tecnológico Exógeno

Neste modelo, o salário é o numerário. Nessas condições, o progresso tecnológico leva a uma redução nos preços dos bens em relação ao salário. Nesse caso, o PIB per capita aumenta, mas serão necessários menos trabalhadores para a produção da mesma quantidade. Além disso, a proporção entre salários e preços se altera, levando, no problema



de maximização do lucro das firmas, a um aumento da demanda por bens e diminuição da demanda por trabalho. Esses dois fatores reduzem o nível de emprego. Se cada firma decidir manter a sua participação no mercado, isto é, manter a relação Valor das vendas da firma / Valor das vendas de todas as firmas, procurando manter o valor das vendas realizadas, o efeito de queda no nível de emprego será reduzido e a economia crescerá.

#### **4.7.4.4 Progresso Tecnológico como Produto de Pesquisa**

Nesse caso, existiriam firmas pagas para a realização de pesquisa e desenvolvimento de produtos. O bem produzido por essas firmas seria a tecnologia, que poderia ser mantida ou aperfeiçoada. As firmas compradoras de tecnologia só pagariam pelo progresso tecnológico do período, não pagando pela tecnologia que possuíam no início do período. Nas funções de produção, a tecnologia adquirida poderia se comportar como um insumo a mais, somando sua contribuição à dos demais insumos.



## 5 Conclusão

O objetivo desta tese foi construir um modelo de uma economia fechada, formada por firmas e bancos, conectadas em redes heterogêneas, para ser utilizado em análises de comportamento da economia em diversos cenários e na investigação de mecanismos de deflagração e propagação de crises, detalhadas adiante, em um contexto de conservação da base monetária e dos bens produzidos. A proposição deste modelo foi fundamentada em dois pilares:

- a) *Abordagem sistêmica*: A economia foi modelada como um organismo autocontido e sem comunicação com o meio externo, salvo em testes específicos, ou seja, não há fluxos de bens ou moeda através da fronteira da economia. A intenção dessa forma de modelagem foi identificar padrões de interação dos agentes que surgem por causa de restrições aplicadas ao conjunto dos agentes. Desejou-se dotar o modelo dessa característica porque o usual é deixar algumas variáveis livres nos modelos, por motivo simplicidade (por exemplo: sempre há disponibilidade de trabalho, ou sempre há meios de pagamento para completar as transações econômicas). No entanto, esses graus de liberdade podem mascarar efeitos importantes, como, no exemplo dado, a limitação na produção imposta pelo pleno emprego ou quedas na demanda por bens por falta de moeda em caixa. Decidiu-se adotar essa abordagem sistêmica da economia mesmo ao custo de maior complexidade, para se obter o benefício da possibilidade de investigação desses efeitos, que podem ser importantes para a estabilidade da economia e para o manejo de crises.
- b) *Funcionamento da economia pautado por um conjunto de regras*: Nessa abordagem, a economia se comporta no tempo como consequência de interações dos agentes em dois níveis: em um dos níveis estão as decisões políticas, as decisões pessoais, os aspectos culturais associados à economia, a criatividade e o processo de mudança institucional; no segundo nível, estão as regras definidas através das instituições em vigor, os processos de trabalho, os modelos matemáticos aceitos como ferramentas de tomada de decisão e as leis naturais. Esta modelagem considera as interações dos agentes no segundo nível, assumindo o primeiro como exógeno. Essa estrutura é coerente com investigações do que ocorre com a economia (ou com agentes, ou grupos de agentes) se determinadas decisões políticas são tomadas, ou quando uma regra é mudada. Também é coerente com investigações da robustez do equilíbrio

de uma economia sujeito a determinado conjunto de regras. Se surgem crises, isso indica que existem regras que tornam o equilíbrio instável ou não-sustentável. De uma forma geral, pode-se dizer que não há uma perda muito grande de fidelidade à realidade neste tipo de modelo, pois boa parte dos processos e decisões econômicas segue regras, por exemplo, a determinação de regras de produção, o próprio processo produtivo, as regras para concessão de crédito, regras para a compensação de pagamentos, regras de arrecadação de tributos, regras de mercado. É certo que as regras não são seguidas com exatidão, pois decisões individuais dos agentes permeiam cada etapa da atividade econômica, mas pode-se dizer que as regras são aproximadamente seguidas pelo conjunto de agentes a maior parte do tempo, o que possibilita que a economia esteja em estados de equilíbrio explicáveis pelo respeito a essas regras. Seguir regras, mas não de forma absoluta parece fazer parte da natureza humana, tanto é que existem instituições e tradições em todas as sociedades. No entanto, existem situações nas quais essas regras mudam, entre as quais estão as crises, que são períodos de intenso questionamento e investigação. Apesar disso, como as regras adotadas no modelo são básicas, considerou-se que elas não mudariam durante as crises. Eventuais mudanças nesse caso, deveriam ser definidas de forma exógena.

Sobre esses pilares foi desenvolvido um modelo baseado em agentes de uma economia formada por firmas interligadas em redes heterogêneas e por bancos, interligados no mercado interbancário, que atuam como agentes de pagamento das firmas e como provedores de crédito bancário. Outros agentes são os trabalhadores consumidores (famílias), governo, investidores (realizam aportes às firmas e bancos e recebem dividendos, direcionando o valor não-gasto em aportes ao consumo), e sistema de pagamentos.

Este trabalho apresenta duas contribuições principais: o modelo em si e o desenvolvimento de um algoritmo de compensação de pagamentos condicionais, extensão do algoritmo de Eisenberg e Noe (2001), utilizado no modelo. As principais contribuições deste modelo para com a literatura<sup>1</sup> são a interligação das firmas em cadeias produtivas formando redes heterogêneas, o relacionamento destas com os bancos como tomadoras de crédito e como correntistas, a utilização de um algoritmo de compensação condicional na realização dos pagamentos, e a circulação de bens e moeda em circuito fechado. Em particular, pode-se afirmar que o equilíbrio da economia sob essa circulação de bens e moeda em circuito fechado é compatível com uma solução de um problema de equilíbrio geral estático

---

<sup>1</sup>Algumas diferenças entre a abordagem utilizada neste trabalho e a utilizada em outros trabalhos são: em Gatti et al. (2006) e Gatti et al. (2009), as firmas são estruturadas em 2 camadas e ligadas a bancos isolados entre si, em Gatti et al. (2007), firmas isoladas entre si se relacionam por crédito com um só banco, em Gatti et al. (2010), firmas estruturadas em duas camadas com *preferencial attachment* se relacionam a bancos isolados entre si por operações de crédito, em Battiston et al. (2007), as firmas são dispostas em camadas sequenciais desde as produtoras de bens primários até as produtoras de bens finais, e em Iori et al. (2006), é estudado o mercado interbancário por meio de uma rede heterogênea de bancos submetidos a depósitos e saques estocásticos

associado à economia; no entanto, havendo desequilíbrio, surgem efeitos de contágio para toda a economia. Esse contágio é potencializado pelo uso da moeda por consumidores representativos (famílias e governo) e está entre as causas das flutuações econômicas a serem analisadas.

Os resultados das análises realizadas com este modelo são apresentados a seguir:

- a) Em um estudo no qual se submeteu a mesma economia, no mesmo estado inicial, a diferentes seqüências de choques de demanda, constatou-se que, na ausência de crises, a variabilidade das medidas e do comportamento da economia é baixa; por exemplo, indicadores econômicos como o PIB apresentaram  $\sigma/\mu$  da ordem de 1%. Verificou-se que, neste modelo, a variabilidade do comportamento da economia em relação a seqüências de choques aumenta com a proximidade de crises, ou seja, aumenta quando o equilíbrio inicial da economia está mais próximo de uma situação que pode deflagrar uma crise, pois existirão seqüências de choques que não perturbam a economia o suficiente para levá-la a uma crise enquanto outras fazem isto. Quando há crises, as distribuições das medidas obtidas neste estudo se tornam acentuadamente assimétricas, o que pode ser uma medida de quão perto de uma crise uma configuração econômica se encontra.
- b) Neste trabalho, procurou-se desenvolver um modelo de firmas e bancos no qual o relacionamento entre eles não se restringe aos empréstimos bancários. Procurou-se modelar os bancos como agentes de pagamento das firmas, o que proporcionou a abordagem de novas formas de contágio entre firmas e bancos, que tradicionalmente se restringiriam a situações de crédito e devolução de empréstimos insuficientes. No modelo proposto neste trabalho, as crises bancárias prejudicam o fluxo de caixa das firmas; da mesma forma, crises em firmas perturbam o fluxo de caixa dos bancos, podendo levá-los a *default*. Essa modelagem tornou necessário o desenvolvimento de um novo processo de compensação de pagamentos para o tratamento de pagamentos condicionais, ou seja, os pagamentos que os bancos devem fazer para as firmas se elas não entrarem em *default*. O processo de compensação proposto é uma extensão do processo de compensação de Eisenberg e Noe (2001) e, como esse processo, tem sempre solução única.
- c) O estudo da dependência do comportamento da economia com relação ao seu tamanho (número de agentes) foi feito para se verificar se, neste modelo, o efeito dos choques nas firma individuais tende a se cancelar ao nível agregado à medida que a economia aumenta de tamanho. O estudo de sensibilidade do comportamento da economia ao número de agentes  $n$  mostrou que o decaimento das relações  $\sigma/\mu$  do PIB com o aumento de  $n$  é menor do que  $\sqrt{n}$ . Isso concorda com a proposição de Acemoglu et al. (2010) de que redes de fornecimento complexas podem fazer

com que a volatilidade agregada não desapareça em grandes economias. Gabaix (2009), por sua vez, afirma que os choques das firmas individuais não se cancelam no agregado quando a distribuição dos tamanhos de firmas tem cauda pesada, como se verifica neste modelo e empiricamente. Neste trabalho, é apresentado um exemplo no qual os choques de interrupção da produção em uma firma grande parecem estar associados a flutuações agregadas do PIB de 2 períodos depois.

- d) O estudo da dependência do comportamento da economia com relação à conectividade entre firmas mostrou que a economia tem um desempenho semelhante para as conectividades de 1% a 20% (as tabelas A.11 e A.12 não permitem concluir que haja diferenças no desempenho da economia nesses casos). Para conectividades de 0.5% e 30%, a economia mostrou índices de preços, desemprego médio e perdas maiores, sugerindo que, tanto a baixa quanto a alta conectividade entre firmas pode favorecer a instabilidade econômica e a propagação de perdas.
- e) O estudo da dependência do comportamento da economia com relação à conectividade no mercado interbancário mostrou que, neste modelo, o mercado interbancário tornou a economia mais instável, tão mais instável quanto maior o número máximo de parceiros nesse mercado, sendo que a economia apresentou maior PIB, menor desemprego e menores perdas para número de parceiros igual a 1 ou igual a zero. Isso é contrário ao observado na prática, na qual a ausência do mercado interbancário é prejudicial, sugerindo que a modelagem dos bancos necessita de ajustes.
- f) No estudo de caso de crises, foram observados dois tipos de contágio na economia: contágio financeiro e contágio na cadeia produtiva. No caso do contágio financeiro, além do contágio direto entre bancos ou entre firmas, no qual o não-recebimento de uma dívida pode dar origem a uma cadeia de pagamentos insuficientes, transmitindo os *defaults* ao longo da cadeia de pagamentos, surgem contágios de bancos para firmas, por restrição de crédito ou pela realização de pagamentos incompletos de dívidas de firmas devido a falhas de bancos, e contágios de firmas para bancos, via *default* na quitação de empréstimos bancários ou pelo desequilíbrio no fluxo de caixa que uma firma em *default* pode causar aos bancos dos quais as firmas credoras são correntistas. No que se refere ao contágio na cadeia produtiva, os principais tipos verificados foram relacionados à redução da demanda de insumos por firmas em *default*, prejudicando firmas fornecedoras, e redução da capacidade de fornecimento de produtos a firmas clientes, por parte de firmas que pararam ou reduziram a produção.
- g) Verificou-se que, instalada uma crise severa, as ações de política monetária testadas (baixar taxa de juros com expansão da base monetária) não foram eficazes para, isoladamente, conter a crise. No entanto, neste modelo, um aperto de política

monetária pode induzir uma crise, pois a quantidade de moeda em circulação afeta o nível de produção neste modelo (não-neutralidade da moeda). No modelo, isso ocorre porque as firmas estabelecem sua meta de produção com base na demanda, que é diretamente proporcional ao caixa disponível a consumidores e governo. Com relação à dinâmica de crises, uma explicação sustentada por este modelo é a de que em um estado ‘normal’, a economia está em equilíbrio. Nesse equilíbrio, agentes entram em *default* e são socorridos à mesma taxa. A crise se instala quando o fluxo de aportes para os agentes em *default* é insuficiente para manter esses agentes em atividade. Essa paralisação ou redução da atividade de agentes desequilibra a economia, que busca novo ponto de equilíbrio, com nível de atividade inferior.

- h) A estabilidade e unicidade do equilíbrio deste modelo, calculada com taxa de juros igual a zero, está associada ao fato do mapa da simulação ou processo econômico ser uma contração. As taxas de juros no mercado interbancário parecem destruir essa propriedade do mapa, fazendo com que o ponto de equilíbrio se desloque no tempo.
- i) Na crise estudada, verificou-se que a alocação de recursos para socorro a bancos, quando não havia recursos suficientes para socorro a firmas, foi ineficaz, ao passo que a alocação de recursos para socorro a firmas, quando não havia recursos suficientes para socorro aos bancos, foi eficaz no combate à crise. Com base nisso, procurou-se identificar firmas que preferencialmente deveriam receber aportes para a contenção ou reversão da crise. Nesta crise, verificou-se que a seleção de firmas pelo critério *too big to fail* apresentou melhores resultados do que os obtidos com os outros critérios de seleção estudados, sugerindo que se investigue se esse resultado se mantém para outras configurações de economia.

Apesar da aparente complexidade, este modelo está em sua versão básica, requerendo diversos aperfeiçoamentos. A continuidade da pesquisa utilizando esse tipo de modelo pode-se dar nestas direções:

- a) Aplicações do modelo
  - i) Desenvolvimento de metodologia para calibração do modelo;
  - ii) Exploração de alternativas regulatórias em estudos de Estabilidade do Sistema Financeiro;
  - iii) Utilização como instrumento de exploração de alternativas na tomada de decisões;
- b) Aperfeiçoamentos estruturais
  - i) Aperfeiçoar a modelagem dos bancos;

- ii) Tratar emissão de moeda;
- iii) Dotar a economia de mecanismos de crescimento quantitativo (acompanhando o crescimento populacional, sem progresso tecnológico). Para isso, também devem ser implementados mecanismos de investimento e poupança em moeda. Presentemente, o modelo considera que consumidores, governo e investidores gastam tudo o que ganham. Eliminar essa restrição requer a solução de problemas de coordenação, como a definição de mecanismos de determinação de taxas de juros que incentivem a realização de depósitos, e de determinação das taxas de juros de empréstimos a firmas que desejam investir. Estas precisam identificar no cálculo de suas metas de produção, a quantidade de investimento necessária e verificar a possibilidade de obtenção do retorno necessário ao pagamento da dívida. A autoridade monetária, por sua vez, deve prover um mecanismo para determinar a quantidade necessária de emissão de moeda e colocá-la em circulação, acompanhando as necessidades das firmas em crescimento.
- iv) Inclusão de bens públicos e do progresso tecnológico como produto de pesquisa, conforme abordado no item 4.7.4.4

c) Extensões

- i) Inclusão do tratamento de recursos naturais, que possibilitaria o estudo da influência do esgotamento de recursos naturais na economia. No entanto, esse estudo possivelmente exigiria a troca da função de produção utilizada por outra capaz de reproduzir a intensidade do impacto da falta de recursos essenciais à produção.
- ii) Tratamento de crédito a consumidor.
- iii) Abertura da economia.

A abordagem metodológica de modelagem baseada em agentes permite a elaboração de modelos bastante complexos, ao possibilitar a inclusão de diferentes dimensões de interações dos agentes. No entanto, é aconselhável que essa inclusão seja feita de maneira gradual, para possibilitar a compreensão da complexidade do modelo e de sua capacidade de representar os fenômenos estudados. Isso evitaria a perda do controle da complexidade do modelo, que o tornaria um objeto a mais de estudo, em vez de ser uma ferramenta de aquisição de conhecimento. Tendo isso em mente, sugere-se inicialmente introduzir neste modelo os aperfeiçoamentos estruturais sugeridos no item b e se explorar diferentes parametrizações de economias na realização de análises.



## Referências Bibliográficas

- ACEMOGLU, D.; OZDAGLAR, A.; TAHBAZ-SALEHI, A. Cascades in networks and aggregate volatility. working paper. *NBER Working Papers*, 2010.
- ALESSANDRI, P.; GAI, P.; KAPADIA, S.; MORA, N.; PUHR, C. Towards a framework for quantifying systemic stability. *International Journal of Central Banking*, v. 5, n. 3, p. 47–81, 2009.
- ALFARANO, S.; LUX, T.; WAGNER, F. Estimation of agent-based models: The case of an asymmetric herding model. *Computational Economics*, v. 26, p. 19–49, 2005.
- ALLEN, F.; GALE, D. Financial contagion. *Journal of Political Economy*, v. 108, n. 1, p. 1–33, 2000.
- \_\_\_\_\_. Financial fragility, liquidity and asset prices. *Journal of European Economic Association*, v. 2(6), n. 6, p. 1015–1048, December 2004.
- AMARAL, L. A. N.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LESCHHORN, H.; MAASS, P.; SALINGER, M. A.; STANLEY, H. E. Scaling behavior in economics: I. empirical results for company growth. *Journal de Physique I France*, v. 7, p. 621–633, 1997.
- ARTHUR, B.; DURLAUF, S.; LANE, D. *The Economy as an Evolving Complex System II*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1997.
- AUDRETSCH, D. B.; MAHMOOD, T. Firm selection and industry evolution: the post-entry performance of new firms. *Journal of Evolutionary Economics*, v. 4, p. 243–260, 1994.
- AXTELL, R. Zipf distribution of us firm sizes. *Science*, v. 293, p. 1818–1820, 2001.
- BAK, P.; CHEN, K. Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics. *Ricerche Economiche*, v. 47, p. 3–30, 1993.
- BARTELSMAN, E.; SCARPETTA, S.; SCHIVARDI, F. Comparative analysis of firm demographics and survival: evidence from micro-level sources in oecd countries. *Industrial and Corporate Change*, v. 14, p. 365–391, 2005.

- BATTISTON, S.; GATTI, D. D.; GALLEGATI, M.; GREENWALD, B.; STIGLITZ, J. E. Credit chains and bankruptcy propagation in production networks. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v. 31, p. 2061–2084, 2007.
- BEAVER, W. H. Financial ratios as predictors of failure, in: Empirical research in accounting: Selected studies. *Journal of Accounting Research (Suppl.)*, p. 77–111, 1966.
- BRENNER, T. Agent learning representation: Advice on modelling economic learning. In: TEFATSION, L.; JUDD, K. L. (Ed.). *Handbook of Computational Economics: Volume 2, Agent-Based Computational Economics*. Amsterdam, NL: Elsevier, 2006. cap. 18, p. 897–947.
- BRENNER, T.; MURMANN, J. *The use of simulations in developing robust knowledge about causal processes: methodological considerations and an application to industrial evolution*. 2003. Papers on Economics and Evolution (0303), Max Planck Institute, Jena.
- CANNING, D.; AMARAL, L.; LEE, Y.; MEYER, M.; STANLEY, E. Scaling the volatility of gdp growth rates. *Economics Letters*, v. 60, p. 335–341, 1998.
- COLANDER, D. (Ed.). *Post Walrasian Macroeconomics. Beyond the Dynamics Stochastic General Equilibrium Model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- COLANDER, D.; FOLLMER, H.; HAAS, A.; GOLDBERG, M.; JUSELIUS, K.; KIRMAN, A.; LUX, T.; SLOTH, B. The financial crisis and the systemic failure of academic economics. working paper. *Kiel Institute for World Economy*, 2009.
- COLANDER, D.; HOWITT, P.; KIRMAN, A.; LEIJONHUFVUD, A.; MEHRLING, P. Beyond dsge models: Toward an empirically based macroeconomics. *American Economic Review: Papers and Proceedings*, v. 98, n. 2, p. 236–240, 2008.
- DEBREU, G. Excess demand functions. *J Math Econ*, v. 1, p. 15–23, 1974.
- DELLARICCIA, G.; DETRAGIACHE, E.; RAJAN, R. The real effect of banking crises. *Journal of Finance*, v. 17, p. 89–112, 2008.
- DEMIRGÜÇ-KUNT, A.; DETRAGIACHE, E. The determinants of banking crises in developing and developed countries. *IMF Staff Papers*, v. 45(1), n. 1, p. 81–109, 1998.
- DIAMOND, D. W.; DYBVIK, P. H. Bank runs, deposit insurance and liquidity. *The Journal of Political Economy*, v. 91, p. 401–419, 1983.
- DIXIT, A. K.; STIGLITZ, J. E. Monopolistic competition and optimum product diversity. *The American Economic Review*, v. 67, p. 297–308, 1977.
- DOPFER, K.; FOSTER, J.; POTTS, J. Micro-meso-macro. *Journal of Evolutionary Economics*, v. 14, p. 263–279, 1994.

- DOSI, G.; FAGIOLO, G.; ROVENTINI, A. An evolutionary model of endogenous business cycles. *Computational Economics*, v. 27, p. 3–34, 2006.
- \_\_\_\_\_. The microfoundations of business cycles: an evolutionary, multi-agent model. *Journal of Evolutionary Economics*, v. 18, p. 413–432, 2008.
- \_\_\_\_\_. Schumpeter meeting keynes: A policy-friendly model of endogenous growth and business cycles. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v. 34, p. 1748–1767, 2010.
- DUNNE, T.; HUGHES, A. Age, size, growth and survival: Uk companies in the 1980s. *Journal of Industrial Economics*, v. 42, p. 115–140, 1994.
- DUNNE, T.; ROBERTS, M. J.; SAMUELSON, L. Patterns of firm entry and exit in us manufacturing plants. *Rand Journal of Economics*, v. 19, p. 495–515, 1988.
- \_\_\_\_\_. The growth and failure of us manufacturing plants. *Quarterly Journal of Economics*, v. 104, p. 671–698, 1989.
- EISENBERG, L.; NOE, T. Systemic risk in financial systems. *Management Science*, v. 47, p. 236–249, 2001.
- ELSINGER, H.; LEHAR, A.; SUMMER, M. Risk assessment for banking systems. *Management Science*, v. 52, n. 9, p. 1301–1314, 2006.
- EPSTEIN, J. M.; AXTELL, R. L. *Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up*. Cambridge, MA: MIT Press, 1996.
- EVANS, D. S. Tests of alternative theories of firm growth. *Journal of Political Economy*, v. 95, p. 657–674, 1987.
- FABIANI, S.; DRUANT, M.; HERNANDO, I.; KWAPIL, C.; LANDAU, B.; LOUPIAS, C.; MARTINS, F.; MATHA, T.; SABBATINI, R.; STAHL H.AND STOKMAN, A. What firms surveys tell us about price-setting behavior in the euro area. *International Journal of Central Banking*, v. 2, p. 3–47, 2006.
- FABRICANT, S. *The output of manufacturing industries: 1899-1937*. New York: NBER, 1940.
- FAGIOLO, G. Spatial interactions in dynamic decentralized economies: a review. In: *The Economics of Networks, Interaction and Behaviours*. [S.l.]: Springer Verlag, 1998.
- FAGIOLO, G.; MONETA, A.; WINDRUM, P. A critical guide to empirical validation of agent-based models in economics: methodologies, procedures, and open problems. *Computational Economics*, v. 30, p. 195–226, 2007.

FOSTER, J. Evolutionary macroeconomics: a research agenda. *Journal of Evolutionary Economics*, v. 21, p. 5–28, 2011.

FOSTER, J.; POTTS, J. A micro-meso-macro perspective on the methodology of evolutionary economics: integrating history, simulation and econometrics. In: \_\_\_\_\_. Berlin: Springer/Physica, 2009. p. 53–70.

FUJIWARA, Y. *Zipf law in firms bankruptcy*. 2003.

GABAIX, X. Power laws and the origins of the business cycle. mimeo, mit. 2002.

\_\_\_\_\_. *The Granular Origins of Aggregate Fluctuations*. [S.l.], 2009.

GAFFEO, E.; GALLEGATI, M.; GIULIONI, G.; PALESTRINI, A. Power laws for macroeconomic fluctuations. *Physica A*, v. 324, p. 408–416, 2003.

GAFFEO, E.; GALLEGATI, M.; PALESTRINI, A. On the size distribution of firms: additional evidence from the g7 countries. *Physica A*, v. 324, p. 117–123, 2003.

GAFFEO, E.; GATTI, D. D.; DESIDERIO, S.; GALLEGATI, M. Adaptive microfoundations for emergent macroeconomics. *Eastern Economic Journal*, v. 34, p. 441–463, 2008.

GALLEGATI, M.; GALLEGATI, M. Volatility and persistence of fluctuations: individual production series in italy, 1890-1985. *Applied Economics*, v. 27, p. 677–688, 1996.

GALLEGATI, M.; GIULIONI, G.; KICHIJI, N. Complex dynamics and financial fragility in an agent-based model. *Advances in Complex Systems*, v. 6, p. 267–282, 2003.

GALLEGATI, M.; STANCA, L. The dynamic relation between financial conditions and investment: evidence from a panel data. *Industrial and Corporate Change*, v. 8, p. 551–572, 1999.

GATTI, D. D.; GAFFEO, E.; GALLEGATI, M. Complex agent-based macroeconomics: a manifesto for a new paradigm. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, v. 5, p. 111–135, 2010.

GATTI, D. D.; GAFFEO, E.; GALLEGATI, M.; GIULIONI, G.; KIRMAN, A.; PALESTRINI, A.; RUSSO, A. Complex dynamics and empirical evidence. *Information Sciences*, v. 177, p. 1204–1221, 2007.

GATTI, D. D.; GALLEGATI, M.; C., G. B.; RUSSO, A.; STIGLITZ, J. E. The financial accelerator in an evolving credit network. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v. 34, p. 1627–1650, 2010.

- GATTI, D. D.; GALLEGATI, M.; GIULIONI, G.; PALESTRINI, A. Financial fragility, patterns of firms' entry and exit and aggregate dynamics. *Journal of Economic Behavior & Organization*, v. 51, p. 79–97, 2003.
- GATTI, D. D.; GALLEGATI, M.; GREENWALD, B. C.; RUSSO, A.; STIGLITZ, J. E. Business fluctuations in a credit-network economy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 370, n. 1, p. 68–74, 2006.
- \_\_\_\_\_. Business fluctuations and bankruptcy avalanches in an evolving network economy. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, v. 4, p. 195–212, 2009.
- GATTI, D. D.; GUILMI, C. D.; GAFFEO, E.; GALLEGATI, M. Bankruptcy as an exit mechanism for systems with a variable number of components. *Physica A*, v. 344, p. 8–13, 2004.
- GATTI, D. D.; GUILMI, C. D.; GAFFEO, E.; GIULIONI, G.; GALLEGATI, M.; PALESTRINI, A. Business cycle fluctuations and firms' size distribution dynamics. *Advances in Complex Systems*, v. 7, p. 223–240, 2004.
- \_\_\_\_\_. A new approach to business fluctuations: heterogeneous interacting agents, scaling laws and financial fragility. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, v. 56, p. 489–512, 2005.
- GATTI, D. D.; GUILMI, C. D.; GALLEGATI, M.; GIULIONI, G. Financial fragility, industrial dynamics, and business fluctuations in an agent-based model. *Macroeconomic Dynamics*, v. 11(Supplement 1), p. 62–79, 2007.
- GILLI, M.; WINKER, P. A global optimization heuristic for estimating agent based models. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 42, p. 299–312, 2003.
- GOODHART, C.; SUNIRAND, P.; TSOMOCOS, D. A model to analyse financial fragility: applications. *Journal of Financial Stability*, v. 1, p. 1–30, 2004.
- \_\_\_\_\_. A risk assessment model for banks. *Annals of Finance*, v. 1, p. 197–224, 2005.
- \_\_\_\_\_. A model to analyse financial fragility. *Economic Theory*, v. 27, p. 107–142, 2006.
- \_\_\_\_\_. A time series analysis of financial fragility in the uk banking system. *Annals of Finance*, v. 2, p. 1–21, 2006.
- GREENWALD, B.; STIGLITZ. Financial market imperfections and business cycles. *Quarterly Journal of Economics*, v. 108, p. 77–114, 1993.
- GUILMI, C. D.; GAFFEO, E.; GALLEGATI, M. Empirical results on the size distribution of business cycle phases. *Physica A*, v. 333, p. 325–334, 2004.

HALL, B. H. The relationship between firm size and firm growth in the us manufacturing sector. *Journal of Industrial Economics*, v. 35, p. 583–606, 1987.

HOGGARTH, G.; REIS, R.; SAPORTA, V. Output costs of banking system instability: some empirical evidence. *Journal of Banking and Finance*, v. 26, n. 5, p. 825–855, 2002.

IJIRI, Y.; SIMON, H. Business firm growth and size. *American Economic Review*, v. 54, p. 77–89, 1964.

\_\_\_\_\_. Interpretations of departures from the pareto curve firm-size distributions. *Journal of Political Economy*, v. 82, p. 315–331, 1976.

IORI, G.; JAFAREY, S.; PADILLA, F. G. Systemic risk on the interbank market. *Journal of Economic Behavior & Organization*, v. 61, p. 525–542, 2006.

JANICKI, H. P.; PRESCOTT, E. S. Changes in the size distribution of u.s. banks: 1960-2005. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, v. 92, p. 291–316, 2006.

JIMENEZ, G.; MENCIA, J. Modelling the distribution of credit losses with observable and latent factors. *Journal of Empirical Finance*, v. 16, p. 235–253, 2009.

JOVANOVIC, B. Micro shocks and aggregate risk. *Quarterly Journal of Economics*, v. 102, p. 395–409, 1987.

JUDD, J.; TREHAM, B. The cyclical behaviour of prices: interpreting the evidence. *Journal of Money, Credit and Banking*, v. 27, p. 789–797, 1995.

KIRMAN, A. The intrinsic limits of modern economic theory: the emperor has no clothes. *Economic Journal*, v. 99, p. 126–139, 1989.

\_\_\_\_\_. Whom or what does the representative individual represent? *The Journal of Economic Perspectives*, v. 6, n. 2, p. 117–136, 1992.

\_\_\_\_\_. The economy as an evolving network. *Journal of Evolutionary Economics*, v. 7, p. 339–353, 1997.

\_\_\_\_\_. The economy as an interactive system. In: ARTHUR, W.; DURLAUF, S.; LANE, D. (Ed.). *The Economy as an Evolving Complex System II*. Santa Fe and Reading, MA: Addison-Wesley, 1997.

\_\_\_\_\_. Heterogeneity in economics. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, v. 1, p. 89–117, 2006.

\_\_\_\_\_. *The Economic Crisis is a Crisis for Economic Theory*. 2009. Working Paper. Prepared for presentation at the CESifo Economic Studies Conference on Whats wrong with modern macroeconomics?. Munich Nov. 6-7 2009.

\_\_\_\_\_. The economic crisis is a crisis for economic theory. *CESifo Economic Studies*, v. 56, p. 498–535, 2010.

KROSZNER, R. S.; LAEVEN, L.; KLINGEBIEL, D. Banking crises, financial dependence, and growth. *Journal of Financial Economics*, v. 84, p. 187–228, 2007.

KUZNETS, S. *Economic change*. New York: Norton, 1953.

LEBARON, B.; TEFATSION, L. Modeling macroeconomics as open-ended dynamic systems of interaction agents. *American Economic Review*, v. 98, n. 2, p. 246–250, 2008.

LEE, Y.; AMARAL, L. A. N.; CANNING, D.; MEYER, M.; STANLEY, H. E. Universal features in the growth dynamics of complex organizations. *Physical Review Letters*, v. 81, p. 3275–3278, 1998.

LEOMBRUNI, R. *The Methodological Status of Agent-Based Simulations*. 2002. Working Paper No. 19, LABORatorio R. Revelli, Centre for Employment Studies, Turin, Italy.

MALERBA, F.; NELSON, R.; ORSENIGO, L.; WINTER, S. History friendly models of industry evolution: the computer industry. *Industrial and Corporate Change*, v. 8, p. 3–41, 1999.

MALERBA, F.; ORSENIGO, L. Innovation and market structure in the dynamics of the pharmaceutical industry and biotechnology: towards a history friendly model. In: *Conference in Honour of Richard Nelson and Sydney Winter, Aalborg, 12th - 15th June 2001*. [S.l.: s.n.], 2001.

MANTEL, R. On the characterisation of aggregate excess demand. *Journal of Economic Theory*, v. 7, p. 348–353, 1974.

MARENGO, L.; WILLINGER, M. Alternative methodologies for modeling evolutionary dynamics: Introduction. *Journal of Evolutionary Economics*, v. 7, p. 331–338, 1997.

MATA, J.; PORTUGAL, P. Life duration of new firms. *Journal of Industrial Dynamics*, v. 42, p. 227–246, 1994.

MAYR, E. *This is Biology: The Science of the Living World*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1997.

METCALFE, J. S.; FOSTER, J.; RAMLOGAN, R. Adaptive economic growth. *Cambridge Journal of Economics*, v. 30, p. 7–32, 2006.

- METCALFE, J. S.; RAMLOGAN, R. Limits to the economy of knowledge and knowledge of the economy. *Futures*, v. 37, p. 655–674, 2005.
- MOREL, B. *The distribution of business firms size, stochasticities, and self-organized criticality. Working paper, Carnegie-Mellon University.* 1998. Working paper, Carnegie-Mellon University.
- NELSON, R.; WINTER, S. *An Evolutionary Theory of Economic Change.* [S.l.]: Harvard University Press, 1982.
- NIER, E.; YANG, J.; YORULMAZER, T.; ALENTORN, A. Network models and financial stability. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v. 31, p. 2033–2060, 2007.
- OKUYAMA, K.; TAKAYASU, M.; TAKAYASU, H. Zipf's law in income distribution of companies. *Physica A*, v. 269, p. 125–131, 1999.
- PHILLIPS, A. W. Mechanical models in economic dynamics. *Economica*, v. 17, n. 67, p. 283–305, 1950.
- RAMSDEN, J.; KISS-HAYPAL, G. Company size distribution in different countries. *Physica A*, v. 277, p. 220–227, 2000.
- SERWA, D. Larger crises cost more: Impact of banking sector instability on output growth. *Journal of International Money and Finance*, v. 29, p. 1463–1481, 2010.
- SILVERBERG, G.; DOSI, G.; ORSENIGO, L. Innovation, diversity and diffusion: a self-organisation model. *Economic Journal*, v. 98, p. 1032–1054, 1988.
- SIMON, C.; BLUME, L. *Matemática para economistas.* Porto Alegre, RS: Bookman, 2004.
- SIMON, H. Satisficing. In: EATWELL, J.; MILGATE, M.; NEWMAN, P. (Ed.). *The New Palgrave: A Dictionary of Economics.* [S.l.]: London: McMillan, 1987.
- SONNENSCHN, H. Market excess demand functions. *Econometrica*, v. 40, p. 549–556, 1972.
- STANLEY, M.; AMARAL, L.; BULDYREV, S.; HAVLIN, S.; LESCHORN, H.; MAAS, P.; SALINGER, M.; STANLEY, E. Scaling behavior in the growth of companies. *Nature*, v. 379, p. 804–806, 1996.
- TESFATSION, L. Agent-based computational economics: Growing economies from the bottom up. *Artificial Life*, v. 8, p. 55–82, 2002.



TESFATSION, L.; JUDD, K. L. Handbook of computational economics: Volume 2, agent-based computational economics. In: TEFATSION, L.; JUDD, K. L. (Ed.). *Handbooks in Economics Series*. Amsterdam, NL: Elsevier, 2006.

TSOMOCOS, D. Equilibrium analysis, banking and financial instability. *Journal of Mathematical Economics*, v. 39, p. 619–655, 2003.

TSOMOCOS, D. P.; BHATTACHARYA, S.; GOODHART, C. A. E.; SUNIRAND, P. Banks, relative performance, and sequential contagion. *Economic Theory*, v. 32, n. 2, p. 381–398, 2007.

WALQUE, G. D.; PIERRARD, O.; ROUABAH, A. Financial (in)stability, supervision and liquidity injections: A dynamic general equilibrium approach. *Economic Journal*, v. 120, p. 1234–1261, 2010.

WERKER, C.; BRENNER, T. *Empirical Calibration of Simulation Models*. 2004. Papers on Economics and Evolution, (0410) Max Planck Institute for Research into Economic Systems, Jena.

ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1986.



## A Tabelas - Estudos de Sensibilidade

Tabela A.1: Dependência histórica de indicadores econômicos

Indicador	Mínimo	Q 25	Mediana	Q 75	Máximo	$\sigma/\mu$
PIB médio	13000	13676	13751	13831	13942	0.010
$\sigma_{PIB}/\mu_{PIB}$	0.032	0.037	0.040	0.044	0.066	0.138
Índice preços médio	1.017	1.021	1.026	1.034	1.124	0.015
$\sigma_{IP}/\mu_{IP}$	0.009	0.026	0.040	0.054	0.116	0.490
Valor agregado médio - firmas	19273	19346	19398	19467	19556	0.004
Valor agregado inicial - firmas	21225	21225	21225	21225	21225	0.000
Valor agregado máximo - firmas	21225	21225	21225	21225	21386	0.001
Valor agregado inicial - bancos	3426	3426	3426	3426	3426	0.000
Valor agregado médio - bancos	4075	4153	4206	4263	4336	0.015
Valor agregado máximo - bancos	4489	4633	4766	4909	5169	0.034
Desemprego (médio) (%)	10.46	11.00	11.43	11.78	14.85	0.061
Desemprego (máximo) (%)	16.99	18.98	20.07	20.98	25.06	0.075
Renda das famílias (média)	11111	11398	11435	11483	11544	0.006
Impostos arrecadados	2679	2786	2797	2808	2820	0.008
Crédito comercial	1926	2017	2026	2038	2050	0.009

Tabela A.2: Dependência histórica de indicadores bancários

Indicador	Mínimo	Q 25	Mediana	Q 75	Máximo	$\sigma/\mu$
Saldo em caixa	4921	4995	5060	5122	5570	0.021
Depósitos	4764	4895	4990	5086	5918	0.036
Reservas bancárias	1427	1551	1567	1583	1599	0.017
Empréstimos bancários	3931	4047	4130	4217	4618	0.030
Empréstimos Interbancários	89	146	156	163	179	0.091

Tabela A.3: Dependência histórica de indicadores de default

Indicador	Mínimo	Q 25	Mediana	Q 75	Máximo	$\sigma/\mu$
Defaults de firmas - média	5	6	7	8	24	0.344
Defaults de firmas - máximo	19	25	28	33	84	0.328
Defaults de bancos - média	1	3	3	4	11	0.462
Defaults de bancos - máximo	7	12	15	18	54	0.463
Reservas de socorro firmas - média	0.769	0.922	0.946	0.963	0.983	0.038
Reservas de socorro firmas - mínimo	0.254	0.443	0.486	0.528	0.647	0.153
Reservas de socorro bancos - média	0.605	0.925	0.941	0.950	0.966	0.057
Reservas de socorro bancos - mínimo	0.065	0.209	0.265	0.316	0.413	0.296

Tabela A.4: Dependência histórica de indicadores de perdas

Indicador	Mínimo	Q 25	Mediana	Q 75	Máximo	$\sigma/\mu$
Perdas financeiras						
Firmas - média	3	5	7	8	23	0.414
Firmas - máximo	34	42	45	48	128	0.250
Bancos - média	37	47	52	58	125	0.253
Bancos - máximo	486	595	674	725	881	0.130
Relação perdas financeiras por contágio / perdas financeiras totais						
Firmas - média	0.003	0.013	0.022	0.033	0.070	0.583
Firmas - máximo	0.287	0.790	0.881	0.923	0.991	0.156
Bancos - média	0.731	0.754	0.767	0.782	0.874	0.027
Bancos - máximo	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.000
Perdas no processo produtivo						
Por restrição de fornecimento - média	59	63	65	70	156	0.195
Por restrição de fornecimento - máximo	139	177	201	235	597	0.310
Por restrição na demanda - média	26	32	37	42	122	0.348
Por restrição na demanda - máximo	114	156	179	208	563	0.326
Oportunidade de venda - média	437	479	506	530	830	0.111
Oportunidade de venda - máximo	1154	1301	1355	1466	2163	0.116

Tabela A.5: Número de agentes: indicadores econômicos

Indicador	Número de firmas						
	100	200	500	750	1000	2000	5000
PIB médio	10783	12261	13679	14621	15419	18213	23569
$\sigma_{PIB}/\mu_{PIB}$	0.050	0.037	0.030	0.028	0.031	0.029	0.025
Índice preços médio	1.034	1.017	1.014	1.014	1.014	1.015	1.012
$\sigma_{IP}/\mu_{IP}$	0.076	0.017	0.008	0.007	0.008	0.006	0.005
Valor agregado médio - firmas	17194	18448	20438	21204	22409	25566	31924
Valor agregado inicial - firmas	17835	19196	21141	22229	23264	26689	33070
Valor agregado máximo - firmas	18088	19196	21141	22229	23264	26689	33070
Valor agregado inicial - bancos	2452	2921	3391	3324	3679	4439	5292
Valor agregado médio - bancos	2341	2938	3292	3505	3724	4565	5489
Valor agregado máximo - bancos	2733	3645	3549	3940	4152	4947	5853
Desemprego (médio) (%)	11.49	10.31	10.44	10.37	10.19	10.17	9.48
Desemprego (máximo) (%)	20.50	18.34	16.71	15.73	15.10	13.64	12.13
Renda das famílias (média)	8874	10036	11195	11972	12615	14946	19248
Impostos arrecadados	2191	2478	2769	2963	3117	3693	4729
Crédito comercial	2110	2148	2083	2095	2073	2087	2113
Relação entre razões desvio- padrão/média ( $\sigma^m$ )							
$\sigma_{PIB}^m/\sigma_{V1\ Firma}^m$ - média	0.098	0.078	0.078	0.079	0.082	0.083	0.073
$\sigma_{PIB}^m/\sigma_{V1\ Firma}^m$ - mínimo	0.091	0.091	0.054	0.059	0.075	0.050	0.036

Tabela A.6: Número de agentes: indicadores bancários

Indicador	Número de firmas						
	100	200	500	750	1000	2000	5000
Saldo em caixa	4271	4542	5363	5311	5840	6818	8149
Depósitos	4239	4382	5085	5178	5625	6585	7859
Reservas bancárias	1303	1475	1804	1686	1903	2208	2648
Empréstimos bancários	2310	2778	3012	3372	3508	4331	5198
Empréstimos Interbancários	387	403	276	192	192	202	164
Base monetária inicial da economia	16361	18102	20426	21371	22719	26700	33575

Tabela A.7: Número de agentes: default

Indicador	Número de firmas						
	100	200	500	750	1000	2000	5000
Defaults de firmas - média	2	2	5	7	10	22	32
Defaults de firmas - máximo	18	12	22	28	48	73	135
Defaults de bancos - média	1	1	3	1	3	4	10
Defaults de bancos - máximo	5	9	9	9	9	15	21
Reservas de socorro firmas - média	0.835	0.905	0.899	0.909	0.881	0.895	0.970
Reservas de socorro firmas - mínimo	0.031	0.210	0.281	0.410	0.338	0.441	0.581
Reservas de socorro bancos - média	0.914	0.945	0.990	0.995	0.997	1.000	1.000
Reservas de socorro bancos - mínimo	0.002	0.042	0.391	0.386	0.631	0.955	1.000

Tabela A.8: Número de agentes: perdas

Indicador	Número de firmas						
	100	200	500	750	1000	2000	5000
Perdas financeiras							
Firmas - média	3	1	1	1	1	1	1
Firmas - máximo	97	54	6	6	11	5	5
Bancos - média	30	17	10	7	8	8	4
Bancos - máximo	1501	1651	236	201	207	226	140
Relação perdas financeiras por contágio / perdas financeiras totais							
Firmas - média	0.051	0.034	0.006	0.004	0.008	0.004	0.000
Firmas - máximo	1.000	0.966	0.726	0.359	0.614	0.487	0.027
Bancos - média	0.897	0.767	0.902	0.963	0.949	0.957	0.929
Bancos - máximo	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Perdas financeiras originadas em outro setor							
Firmas originadas por bancos - média	0	0	0	0	0	0	0
Firmas originadas por bancos - máximo	54	51	6	2	2	1	0
Bancos originadas por firmas - média	12	8	6	6	7	7	4
Bancos originadas por firmas - máximo	346	235	235	195	203	226	138
Perdas no processo produtivo							
Por restrição de fornecimento - média	87	41	53	51	40	72	53
Por restrição de fornecimento - máximo	1314	324	233	252	143	210	204
Por restrição na demanda - média	23	5	7	7	7	9	6
Por restrição na demanda - máximo	604	55	32	25	40	27	26
Oportunidade de venda - média	223	140	179	197	199	283	253
Oportunidade de venda - máximo	2277	754	541	569	646	592	699



Tabela A.9: Número de agentes: indicadores econômicos  
- sem intervenção externa -

Indicador	Número de firmas						
	100	200	500	750	1000	2000	5000
PIB médio	11394	12751	14371	15356	16152	19189	24548
$\sigma_{PIB}/\mu_{PIB}$	0.004	0.003	0.003	0.002	0.003	0.003	0.003
Índice preços médio	1.007	1.008	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009
$\sigma_{IP}/\mu_{IP}$	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
Valor agregado médio - firmas	17718	19038	20953	22007	23020	26368	32647
Valor agregado inicial - firmas	17835	19196	21141	22229	23264	26689	33070
Valor agregado máximo - firmas	17835	19196	21141	22229	23264	26689	33070
Valor agregado inicial - bancos	2452	2921	3391	3324	3679	4439	5292
Valor agregado médio - bancos	2500	2957	3410	3356	3717	4475	5315
Valor agregado máximo - bancos	2532	2981	3422	3375	3740	4500	5333
Desemprego (médio) (%)	7.92	7.50	6.83	6.84	6.74	6.45	6.28
Desemprego (máximo) (%)	10.11	10.63	10.38	10.48	10.75	10.87	11.03
Renda das famílias (média)	9217	10336	11665	12468	13117	15604	19979
Impostos arrecadados	2258	2521	2831	3023	3175	3757	4782
Crédito comercial	2215	2223	2176	2186	2157	2185	2192
Base monetária inicial da economia	16361	18102	20426	21371	22719	26700	33575
Relação entre razões desvio- padrão/média ( $\sigma^m$ )							
$\sigma_{PIB}^m/\sigma_{V1}^m$ Firma - média	0.095	0.072	0.054	0.053	0.054	0.053	0.065
$\sigma_{PIB}^m/\sigma_{V1}^m$ Firma - mínimo	0.070	0.051	0.031	0.029	0.034	0.030	0.036

Tabela A.10: Número de agentes: default  
- sem intervenção externa -

Indicador	Número de firmas						
	100	200	500	750	1000	2000	5000
Defaults de firmas - média	0	0	0	0	0	0	0
Defaults de firmas - máximo	0	0	0	0	0	0	0
Defaults de bancos - média	0	0	0	0	0	0	1
Defaults de bancos - máximo	0	0	0	0	0	0	2
Reservas de socorro firmas - média	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Reservas de socorro firmas - mínimo	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Reservas de socorro bancos - média	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Reservas de socorro bancos - mínimo	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabela A.11: Conectividade entre firmas: indicadores econômicos

Indicador	Conectividade							
	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3
PIB médio	10222	10741	11402	12558	13707	14602	15206	15267
$\sigma_{PIB}/\mu_{PIB}$	0.056	0.053	0.048	0.047	0.043	0.038	0.040	0.083
Índice preços médio	1.045	1.024	1.021	1.023	1.032	1.026	1.027	1.137
$\sigma_{IP}/\mu_{IP}$	0.057	0.018	0.016	0.023	0.051	0.037	0.040	0.146
Valor agregado médio - firmas	15426	16162	16873	18168	19399	20310	20987	21995
Valor agregado inicial - firmas	17192	17655	18392	19795	21225	22228	22992	24161
Valor agregado máximo - firmas	17460	17655	18392	19795	21225	22228	22992	24470
Valor agregado inicial - bancos	2680	2762	2928	3177	3426	3592	3710	3913
Valor agregado médio - bancos	3695	3482	3619	3879	4202	4405	4596	4884
Valor agregado máximo - bancos	4276	3851	4051	4237	4859	5014	5109	7478
Desemprego (médio) (%)	13.04	12.32	11.83	11.63	11.63	11.22	11.48	15.21
Desemprego (máximo) (%)	26.26	20.52	19.44	19.34	20.23	18.89	19.80	35.19
Renda das famílias (média)	8486	8863	9421	10412	11410	12159	12665	13134
Impostos arrecadados	2099	2194	2327	2559	2789	2965	3085	3129
Crédito comercial	1952	1968	2005	2016	2022	2027	2019	1916

Tabela A.12: Conectividade entre firmas: indicadores bancários

Indicador	Conectividade							
	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3
Saldo em caixa	4300	4329	4493	4784	5110	5258	5430	6315
Depósitos	4125	4193	4380	4751	5051	5190	5387	6711
Reservas bancárias	1413	1394	1427	1458	1574	1625	1659	1617
Empréstimos bancários	3518	3345	3505	3844	4141	4335	4550	5276
Empréstimos Interbancários	166	161	155	135	162	141	140	93

Tabela A.13: Conectividade entre firmas: default

Indicador	Conectividade							
	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3
Defaults de firmas - média	17	9	8	9	8	7	8	25
Defaults de firmas - máximo	56	29	31	33	33	29	31	196
Defaults de bancos - média	6	4	3	3	3	3	4	13
Defaults de bancos - máximo	39	24	23	15	15	14	13	53
Reservas de socorro firmas - média	0.675	0.743	0.793	0.861	0.928	0.973	0.986	0.890
Reservas de socorro firmas - mínimo	0.208	0.240	0.316	0.371	0.491	0.639	0.620	0.261
Reservas de socorro bancos - média	0.913	0.938	0.953	0.938	0.925	0.929	0.921	0.597
Reservas de socorro bancos - mínimo	0.213	0.169	0.193	0.259	0.262	0.257	0.284	0.023

Tabela A.14: Conectividade entre firmas: perdas

Indicador	Conectividade							
	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3
Perdas financeiras								
Firmas - média	9	5	4	5	8	5	5	24
Firmas - máximo	178	54	53	54	47	35	48	162
Bancos - média	49	38	33	44	58	52	51	134
Bancos - máximo	777	738	467	749	690	652	614	959
Relação perdas financeiras por contágio / perdas financeiras totais								
Firmas - média	0.021	0.011	0.010	0.019	0.035	0.018	0.017	0.044
Firmas - máximo	0.496	0.535	0.665	0.814	0.890	0.888	0.885	0.556
Bancos - média	0.843	0.846	0.846	0.824	0.761	0.775	0.813	0.795
Bancos - máximo	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Perdas financeiras originadas em outro setor								
Firmas originadas por bancos - média	2	1	1	2	2	1	1	6
Firmas originadas por bancos - máximo	53	43	39	39	31	21	17	63
Bancos originadas por firmas - média	38	29	26	37	44	38	40	118
Bancos originadas por firmas - máximo	773	702	454	747	690	650	607	916
Perdas no processo produtivo								
Por restrição de fornecimento - média	111	70	60	66	66	72	83	187
Por restrição de fornecimento - máximo	2514	239	234	200	208	226	283	1085
Por restrição na demanda - média	73	42	34	37	40	36	40	134
Por restrição na demanda - máximo	1252	428	182	166	189	185	219	1029
Oportunidade de venda - média	450	402	395	453	520	537	570	965
Oportunidade de venda - máximo	1675	1242	1216	1287	1360	1360	1778	3213

Tabela A.15: Conectividade no interbancário: indicadores econômicos

Indicador	Número máximo de parceiros							
	0	1	2	3	5	10	15	20
PIB médio	13743	13819	13847	13725	11942	9824	10943	10226
$\sigma_{PIB}/\mu_{PIB}$	0.034	0.036	0.041	0.038	0.176	0.480	0.318	0.426
Índice preços médio	1.020	1.020	1.023	1.028	1.353	2.526	1.720	2.229
$\sigma_{IP}/\mu_{IP}$	0.022	0.025	0.034	0.045	0.320	0.995	0.614	0.930
Valor agregado médio - firmas	19121	19377	19456	19336	18999	19751	19376	19719
Valor agregado inicial - firmas	21225	21225	21225	21225	21225	21225	21225	21225
Valor agregado máximo - firmas	21225	21225	21225	21225	21225	23387	23230	23540
Valor agregado inicial - bancos	3426	3426	3426	3426	3426	3426	3426	3426
Valor agregado médio - bancos	4406	4261	4195	4171	4406	3470	3985	3621
Valor agregado máximo - bancos	4882	4670	4683	4729	6261	6065	6699	6381
Desemprego (médio) (%)	11.39	11.10	10.94	11.44	20.12	31.70	25.06	29.10
Desemprego (máximo) (%)	18.84	17.90	20.13	19.81	58.70	98.34	73.72	97.26
Renda das famílias (média)	11434	11464	11487	11435	10723	9906	10405	10111
Impostos arrecadados	2799	2805	2808	2795	2502	2103	2321	2181
Crédito comercial	2028	2036	2038	2027	1753	1443	1600	1499

Tabela A.16: Conectividade no interbancário: indicadores bancários

Indicador	Número máximo de parceiros							
	0	1	2	3	5	10	15	20
Saldo em caixa	5051	5026	5003	5053	6005	7271	6530	7060
Depósitos	4803	4835	4867	4955	6521	7804	7061	7584
Reservas bancárias	1689	1642	1596	1585	1440	1808	1587	1751
Empréstimos bancários	4155	4067	4058	4071	4915	3995	4507	4137
Empréstimos Interbancários	0	67	127	169	72	77	89	87

Tabela A.17: Conectividade no interbancário: default

Indicador	Número máximo de parceiros							
	0	1	2	3	5	10	15	20
Defaults de firmas - média	7	6	6	7	83	234	154	206
Defaults de firmas - máximo	26	23	22	27	571	934	784	925
Defaults de bancos - média	1	2	3	3	20	34	26	31
Defaults de bancos - máximo	11	13	14	15	74	100	91	100
Reservas de socorro firmas - média	0.960	0.965	0.955	0.954	0.674	0.554	0.625	0.577
Reservas de socorro firmas - mínimo	0.471	0.605	0.471	0.466	0.147	0.000	0.008	0.000
Reservas de socorro bancos - média	0.954	0.940	0.943	0.958	0.490	0.434	0.497	0.455
Reservas de socorro bancos - mínimo	0.325	0.368	0.271	0.169	0.016	0.000	0.000	0.000

Tabela A.18: Conectividade no interbancário: perdas

Indicador	Número máximo de parceiros							
	0	1	2	3	5	10	15	20
Perdas financeiras								
Firmas - média	7	5	5	9	64	78	90	83
Firmas - máximo	43	38	39	43	321	368	362	340
Bancos - média	40	41	44	51	227	261	275	266
Bancos - máximo	621	648	669	572	982	1003	1040	1026
Relação perdas financeiras por contágio / perdas financeiras totais								
Firmas - média	0.011	0.011	0.014	0.028	0.074	0.064	0.056	0.053
Firmas - máximo	0.756	0.795	0.797	0.940	0.954	0.838	0.664	0.890
Bancos - média	0.852	0.781	0.777	0.814	0.756	0.781	0.831	0.827
Bancos - máximo	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Perdas financeiras originadas em outro setor								
Firmas originadas por bancos - média	2	1	1	2	12	13	13	13
Firmas originadas por bancos - máximo	32	24	32	25	62	68	75	78
Bancos originadas por firmas - média	39	35	35	39	205	238	251	242
Bancos originadas por firmas - máximo	621	648	668	543	956	970	1008	1004
Perdas no processo produtivo								
Por restrição de fornecimento - média	65	60	62	66	422	1021	718	934
Por restrição de fornecimento - máximo	196	181	234	210	2579	6104	4269	8280
Por restrição na demanda - média	36	32	31	40	452	2896	1108	2209
Por restrição na demanda - máximo	186	159	171	179	4207	21604	9816	21678
Oportunidade de venda - média	524	471	467	545	1386	2187	1783	1984
Oportunidade de venda - máximo	1437	1207	1444	1471	4920	8879	5325	7465



## B Existência e Positividade Estrita do Vetor de Preços

Deseja-se verificar a existência e positividade estrita do vetor de preços que equilibra receitas e despesas de cada firma, por unidade produzida, de acordo com a equação C.8:

$$\mathbf{p} = \left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \right) - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right]^{-1} (W \mathbf{XW}\mathbf{u} + \mathbf{FXC}\mathbf{u} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \quad (\text{B.1})$$

Paralelamente a essa condição de equilíbrio, supõe-se que toda a produção é consumida. Inicialmente, a existência e a positividade estrita desse vetor serão verificadas para uma equação simplificada, formada com os dados gerados no item 1; os resultados obtidos são estendidos em seguida. Nessa equação, escrita para o conjunto das firmas, o vetor de preços é dado por:

$$\mathbf{p} = [\mathbf{Y} - \mathbf{X}]^{-1} (W \mathbf{XW} + \mathbf{FXC}) \quad (\text{B.2})$$

Esse sistema pode ser rearranjado para:

$$\mathbf{p} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{r} \quad (\text{B.3})$$

Sendo  $\mathbf{p}$  o vetor de preços e  $\mathbf{r}$  o vetor de salários e custos fixos, dado por:

$$\mathbf{r} = (W \mathbf{XW} + \mathbf{FXC}) \quad (\text{B.4})$$

Com  $W = 1$ , e:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} y_1 - x_{1,1} & -x_{1,2} & \dots & -x_{1,NI} \\ -x_{2,1} & y_2 - x_{2,2} & \dots & -x_{2,NI} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{NI,1} & -x_{NI,2} & \dots & y_{NI} - x_{NI,NI} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Para o vetor de preços  $\mathbf{p}$ , é necessário verificar em que condições 1) o vetor existe, ou seja, em que condições  $\mathbf{Z}$  é inversível; e 2) os preços são não-negativos ( $P_i \geq 0$ ).

A identificação das condições em que ( $P_i \geq 0$ ) permite identificar quando  $\mathbf{Z}$  é inversível.

Inicialmente, deve-se notar, para o conjunto das firmas, que:

a) A produção das firmas é igual à demanda:  $\mathbf{Y} = \mathbf{DY} = \mathbf{DYW} + \mathbf{DYG} + \mathbf{DYF}$

A demanda das firmas é dada pela soma das quantidades demandadas de insumos:

$$\mathbf{DYF} = \mathbf{X}^T \mathbf{1}_{NI \times 1} \quad (\text{B.6})$$

b)  $\mathbf{Z}$  dado por:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & \mathbf{0} \\ & y_2 & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & y_{NI} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,NI} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,NI} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{NI,1} & x_{NI,2} & \dots & x_{NI,NI} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y} - \mathbf{X} \quad (\text{B.7})$$

c)  $\mathbf{W}\mathbf{X}\mathbf{W} + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C} > 0$ , pois  $W = 1$ ,  $XW_i > 0$  e  $FXC_i \geq 0$ , por construção

d)  $\mathbf{Z}^T \mathbf{1} = \mathbf{DY}$ , sendo  $DY_i > 0$ , pois, se o produto de uma firma não é demandado, ela não pode produzir, em equilíbrio e, na prática, ela deixa de pertencer à economia.

Uma matriz  $\mathbf{Z}$  é produtiva quando existe um vetor  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{Z}\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$ <sup>1</sup>.

Pode-se mostrar que  $\mathbf{Z}^T$  é matriz produtiva partindo de  $(\mathbf{Y}^T - \mathbf{X}^T)\mathbf{1} > \mathbf{0}$ . Para isso, tome-se no vetor  $[DY_1, \dots, DY_{NI}]^T$  um elemento  $DY_j > 0$ . É possível subtrair um valor  $\varepsilon > 0$  do  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{1}$  de modo que o produto da  $j$ -ésima linha de  $\mathbf{Z}^T$  por esse vetor  $\mathbf{1}$  modificado ainda seja estritamente positivo. Nesse caso, os produtos das demais linhas por esse vetor permanecem constantes ou aumentam, ou seja:

$$\mathbf{Z}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) > \mathbf{0}$$

Portanto  $\mathbf{Z}^T$  é matriz produtiva, ou seja,  $\mathbf{Z}^T \mathbf{x} \gg \mathbf{0}$  para algum  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ . Pode-se mostrar que, se  $\mathbf{Z}^T$  é produtiva, então, para qualquer vetor  $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ , a equação  $\mathbf{Z}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$  tem solução  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  (ver Simon e Blume (2004, teorema 28.5)), o que mostra que  $\mathbf{Z}^T$  é inversível.

<sup>1</sup>Dados os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , se  $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ , todos os elementos de  $\mathbf{x}$  são maiores que os de  $\mathbf{y}$ , se  $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ , os elementos de  $\mathbf{x}$  são maiores ou iguais aos de  $\mathbf{y}$ , sendo pelo menos um deles estritamente maior, e se  $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ , pode ocorrer  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  ou  $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ .

Sendo  $\mathbf{Z}^T$  é inversível,  $\mathbf{Z}$  é inversível; portanto, para que  $\mathbf{Z}$  seja inversível, basta que  $\mathbf{Z}^T$  seja produtiva, o que ocorre por construção.

Neste caso, tem-se  $\mathbf{x} = (\mathbf{Z}^T)^{-1}\mathbf{y}$ . Seja  $\mathbf{y}$  um vetor  $\mathbf{e}_i$  (vetor com o  $i$ -ésimo elemento igual a 1 e os demais iguais a zero). Para que  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ , qualquer que seja o índice  $i$  escolhido em  $\mathbf{e}_i$ , é necessário que os elementos de  $(\mathbf{Z}^T)^{-1}$  sejam não-negativos. Dessa forma, os elementos de  $((\mathbf{Z}^T)^{-1})^T$  são não-negativos. Como  $((\mathbf{Z}^T)^{-1})^T = \mathbf{Z}^{-1}$ , tem-se que a equação  $\mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{y}$  tem solução  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  para  $\mathbf{y} > \mathbf{0}$ .

Portanto, em  $\mathbf{Z}\mathbf{p} = \mathbf{r}$ , sendo  $\mathbf{r} > \mathbf{0}$ , o vetor de preços  $p$  sempre existirá e terá componentes  $p_i \geq 0$ , ou seja, no processo de geração de dados proposto, sempre é possível obter um vetor de preços positivos em (B.2).

A seguir, esse resultado é estendido para verificar a existência e positividade estrita do vetor de preços calculado em (B.1).

Assumindo que o vetor  $\mathbf{Y}$  de quantidades produzidas tenha elementos não-nulos, pode-se dividir as linhas de  $[\mathbf{Y} - \mathbf{X}]$  e de  $(W\mathbf{X}W + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C})$  pelos elementos  $Y_i$ , obtendo:

$$[\mathbf{Y} - \mathbf{X}] \cdot / \mathbf{Y} = [\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u}], \text{ e } (W\mathbf{X}W + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C}) \cdot / \mathbf{Y} = W\mathbf{X}W\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{u} \mathbf{1}_{NI \times 1} \quad (\text{B.8})$$

Tem-se:

$$\mathbf{p} = [\mathbf{Y} - \mathbf{X}]^{-1}(W\mathbf{X}W + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C}) = [\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u}]^{-1}(W\mathbf{X}W\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{u} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \quad (\text{B.9})$$

que mostra que a matriz  $[\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u}]^{-1}$  é produtiva.

Se  $[\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u}]^{-1}$  é produtiva,  $[\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T)]^{-1}$  também será produtiva, pois os elementos de  $\mathbf{DEPR}^T$  estão no intervalo  $(0, 1]$ , de modo que:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u}]\mathbf{p} \leq [\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T)]\mathbf{p} \quad (\text{B.10})$$

Quanto à matriz:

$$\left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \right) - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right] \quad (\text{B.11})$$

não se pode garantir que seja produtiva, pois:

$$\mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \leq \mathbf{1}_{NI \times 1}, \text{ uma vez que } \frac{PM}{1 - T_y} \geq \mathbf{0}_{NI \times 1} \quad (\text{B.12})$$

Uma maneira de se garantir que a matriz (B.11) seja produtiva é transformar a matriz  $\mathbf{X}\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{X}\mathbf{u}^a = \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot / \left( \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \mathbf{1}_{NI \times 1} \right) \quad (\text{B.13})$$

Nesse caso, tem-se a igualdade:

$$\left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \right) - \mathbf{X}u^a \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right] \mathbf{p} =$$

$$([\mathbf{I} - \mathbf{X}u \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T)]\mathbf{p}) \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \quad (\text{B.14})$$

Como vale (B.12), a matriz:

$$\left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \right) - \mathbf{X}u^a \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right] \quad (\text{B.15})$$

É produtiva, já que:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{X}u \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T)]\mathbf{p} > \mathbf{0}_{NI \times 1} \rightarrow$$

$$\left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \right) - \mathbf{X}u^a \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right] \mathbf{p} > \mathbf{0}_{NI \times 1} \quad (\text{B.16})$$

Portanto, na versão de (B.1) na qual foi feita a transformação de  $\mathbf{X}u$ :

$$\mathbf{p} = \left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{PM}{1 - T_y} \right) \right) - \mathbf{X}u^a \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right]^{-1} (W \mathbf{X}Wu + FXCu) \quad (\text{B.17})$$

Como  $W \mathbf{X}Wu + FXCu \mathbf{1}_{NI \times 1} > \mathbf{0}_{NI \times 1}$ , o vetor de preços  $\mathbf{p}$  sempre existirá e terá componentes  $p_i \geq 0$ , ou seja, no processo de geração e transformação de dados proposto, sempre é possível obter um vetor de preços positivos.

Note que a transformação feita manteve ou aumentou a produtividade das firmas; no entanto, em uma simulação na qual os dados foram gerados a partir de distribuições, isso é pouco relevante. É importante lembrar que essa transformação de  $\mathbf{X}u$  deve ser acompanhada da transformação:

$$A_i^a = A_i \left( 1 + \frac{PM_i}{1 - T_y} \right)^{\alpha_i} \quad i \in \{1, \dots, NI\} \quad (\text{B.18})$$

visando manter a integridade da função de produção gerada para cada firma. Feita essa transformação, a matriz  $\mathbf{X}u^a$  transformada pode ser utilizada no primeiro cálculo do vetor de preços, utilizado como ponto de partida no cálculo do equilíbrio. Nos demais cálculos, a transformação de  $\mathbf{X}u$  não é necessária, pois as sucessivas otimizações nas demandas dos insumos garantem que a matriz a ser invertida continua produtiva.

## C A Economia em Equilíbrio: Duas Abordagens

Nesta seção, é estudado o equilíbrio de uma versão simplificada da economia representada neste modelo. Nessa versão, assume-se taxas de juros iguais a zero, ausência de choques na demanda e não-interferência dos bancos nas decisões dos agentes.

Esse estudo foi motivado pela necessidade de se calcular um ponto de equilíbrio no qual a economia seria colocada ao início da simulação, evitando-se a interferência de dinâmicas da economia em busca de equilíbrio nas análises a serem feitas. Paralelamente à determinação do processo de cálculo do ponto de equilíbrio, são apresentadas duas abordagens para o problema de determinação do equilíbrio para essa economia: o problema pode ser visto como um problema de equilíbrio geral estático de uma economia descentralizada, na qual todos os agentes otimizam. Outra visão do mesmo problema é a de determinação do ponto fixo de um mapa, que representa o estado de cada variável da economia, modificado, de um período para o período seguinte, pelas decisões descentralizadas dos agentes. A confrontação dessas duas abordagens permite conjecturar que nos casos em que o mapa for uma contração, a economia se moverá naturalmente para o seu único ponto fixo, (a solução do problema de equilíbrio geral) por mais descentralizadas que as decisões sejam. Nessas condições, o mapa será a descrição de um processo de *tâtonnement* para o problema de equilíbrio geral. Essa conjectura não se aplica a problemas equilíbrio geral intertemporal, nem a problemas de equilíbrio com estados contingentes.

O problema de equilíbrio geral apresentado nesta seção tem os mesmos agentes que a simulação; as firmas têm a mesma função lucro, e trabalhadores / consumidores e governo têm a mesma função utilidade, sendo também observadas as mesmas condições de compensação de mercados. A diferença básica entre a simulação e o problema de equilíbrio geral está na informação possuída pelos agentes, que é local, no primeiro caso, e plena (perfeita) no segundo. Dada a limitação da informação dos agentes na simulação, o comportamento da economia que ela representa depende da continuidade da função de escolha dos agentes, com base no estado da economia e na escolha anterior, e da continuidade da função de reação da economia a partir do seu estado e da escolha dos agentes. Depende também da sensibilidade das respostas aos estímulos, tanto no processo de escolha conduzido pelos agentes, quanto nos efeitos que este provoca na economia.

Se as funções que representam o processo de escolha dos agentes (preços e quantidades) e a reação da economia a essas escolhas forem contínuas, o teorema do ponto

fixo de Brouwer garante que existe pelo menos um ponto fixo (estado estacionário) na economia. Se, além disso, essas funções tiverem baixa sensibilidade a estímulos, produzindo seqüências convergentes de estados da economia e escolhas dos agentes, qualquer que seja o estado inicial e a escolha inicial de preços e quantidades pelos agentes, então a economia terá um único estado estacionário, que será sempre atingido. Em outras palavras, nessas condições, simulações com agentes que atuam de forma descentralizada e auto-interessada chegam ao mesmo estado estacionário de problemas de equilíbrio geral em um período e um estado da natureza, com os mesmos agentes<sup>1</sup> e informação plena. Isso provê uma possível explicação para o problema de como agentes auto-interessados tomando decisões descentralizadas conseguem levar a economia a um equilíbrio.

A seguir, são detalhadas as duas abordagens. Ao final, é apresentado um processo de cálculo desse equilíbrio baseado no conceito de equilíbrio como ponto fixo de um mapa.

## C.1 O Equilíbrio como o Ponto Fixo de um Mapa

Esta simulação pode ser representada por um mapa que associa preços e quantidades produzidas em um período a preços e quantidades produzidas no período seguinte, dados os parâmetros da economia. Em cada período, preços e quantidades produzidas determinam variáveis de estado dos agentes, as quais, por sua vez, determinam preços e quantidades produzidas no período seguinte.

A determinação do equilíbrio dessa economia consiste em se encontrar o ponto fixo desse mapa, isto é, os vetores de preços e quantidades produzidas que equilibram o sistema. No cálculo do equilíbrio inicial, buscando-se simplicidade, considera-se que a economia não possui bancos. Isso pode ser feito assumindo-se que as taxas de juros são zero e que não há limites de crédito, fazendo com que os bancos existentes não influenciem as decisões dos demais agentes.

É importante ressaltar que as funções de produção, as receitas e os custos dos agentes apresentam retornos constantes de escala, portanto, a determinação do equilíbrio da economia depende da escala inicial da economia, isto é, das quantidades produzidas pelas firmas antes do cálculo do equilíbrio. Determinados os vetores de preços e quantidades de equilíbrio, este último pode ser multiplicado por uma constante maior do que zero resultando numa outra economia em equilíbrio, proporcional à primeira. O mapa utilizado na determinação do equilíbrio é um pouco diferente daquele que representa a evolução da

---

<sup>1</sup>O problema de equilíbrio geral equivalente tem os mesmos agentes da simulação; não é um equilíbrio geral com agentes representativos ou com *continuum* de agentes (em simulações como esta, os agentes são discretos e as suas características são definidas de maneira aleatória). Além disso, estão sendo tratadas economias com características representáveis por simulações de modelos baseados em agentes e por modelos de equilíbrio geral, lembrando que problemas de equilíbrio geral intertemporal ou com estados contingentes não são representáveis por esse tipo de simulação; da mesma forma, simulações com processo de aprendizado, ou com descontinuidades, como, por exemplo, otimização utilizando algoritmos genéticos, não são representáveis por problemas de equilíbrio geral estruturados da forma descrita nesta seção.

simulação no tempo. No mapa para determinação do equilíbrio, assume-se informação perfeita, enquanto no da simulação, os agentes só tomam conhecimento das decisões dos demais agentes depois que elas foram tomadas. Essa modificação no mapa do equilíbrio é feita para acelerar o processo numérico de convergência e não distorce os resultados obtidos: o equilíbrio encontrado no mapa modificado permanece estável em uma simulação que implementa o mapa original.

O mapa que representa a evolução da economia, para a determinação do equilíbrio, é dado por:

$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) : ((\boldsymbol{\theta}, \infty), ((\boldsymbol{\theta}, \infty))) \rightarrow ((\boldsymbol{\theta}, \infty), ((\boldsymbol{\theta}, \infty)))$ , definido como:

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) \equiv (\Phi(\mathbf{p}; \boldsymbol{\theta}), \Phi(\mathbf{y}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\theta}))$$

sendo  $\boldsymbol{\theta}$  o conjunto de parâmetros:

$$\boldsymbol{\theta} = \{W, \mathbf{QX}, \mathbf{QW}, \mathbf{Xu}, \mathbf{XWu}, \mathbf{A}, \alpha, \mathbf{DEPR}, \mathbf{PM}, \mathbf{FXCu}, T_y, T_w\} \quad (\text{C.1})$$

### C.1.1 Especificação do Mapa de Preços

Este mapa ( $\Phi_1$ ) parte de uma estimativa inicial do vetor  $\mathbf{p}$  de preços, feita de acordo com o anexo B<sup>2</sup>.

Considera-se que cada firma otimiza sua demanda por insumos dados os seus parâmetros e o vetor de preços. As demandas ótimas unitárias (isto é, para produção de uma unidade do bem:  $\mathbf{y} = \mathbf{1}^{NI \times 1}$ ) de cada firma são calculadas de acordo com o anexo D. Essas demandas, obtidas para as  $NI$  firmas (sendo cada firma  $i$  representada pelos valores da linha  $i$  dos vetores e matrizes) são denotadas por:

$$(\mathbf{Xu}, \mathbf{XWu}) = D(\mathbf{p}; W, \mathbf{QX}, \mathbf{QW}, \mathbf{A}, \alpha) \in \mathbb{R}^{NI} \times \mathbb{R}^{NI \times NI} \quad (\text{C.2})$$

O cálculo do novo vetor de preços associados às demandas ótimas ( $\mathbf{XWu}, \mathbf{Xu}$ ) das firmas parte das seguintes hipóteses, formuladas para produção unitária:

a) Firmas utilizam bens de capital e bens de consumo no processo produtivo.

Todos esses bens são tratados de igual maneira, sendo sujeitos a depreciação. A depreciação dos bens de consumo durante o processo produtivo é igual a 1, pois eles precisam ser integralmente repostos no próximo processo produtivo. Por outro lado, a depreciação dos bens de capital é assumida maior que zero e menor que 1, de modo que, em equilíbrio, só precisa ser reposta a parcela consumida desses

---

<sup>2</sup>Nessa estimativa, os valores iniciais de  $\mathbf{Xu}$  e  $\mathbf{XWu}$  são obtidos dividindo-se cada linha de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{XW}$  pela linha correspondente do vetor  $\mathbf{y}$  de quantidades produzidas. Esses vetores / matrizes são obtidos do processo de geração de dados.

bens. O consumo de recursos dos dois tipos (bens de capital ou não) é dado por:  $\mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')$ .

Em equilíbrio, esse valor é constante, pois a produção é constante.

b) As receitas das firmas são provenientes da venda de produtos.

c) Os pagamentos efetuados pelas firmas se referem a despesas e pagamento de dividendos aos investidores. As despesas são:

-Pagamento de salários aos trabalhadores:  $\mathbf{FW} = W \mathbf{XWu}$  por unidade produzida.

-Custos fixos: são pagos também aos trabalhadores. No cálculo do equilíbrio inicial, utiliza-se um valor unitário de custo fixo ( $\mathbf{FXCu}$ ) para cada firma, para simplificar os cálculos. Definido esse equilíbrio, os valores totais de custos fixos de cada firma, isto é,  $\mathbf{FXC} = \mathbf{FXCu} \mathbf{y}$  permanecem inalterados até o fim da simulação.

-Imposto sobre lucros, pago ao governo. É calculado multiplicando-se a alíquota  $T_y$  pelo valor do lucro obtido, que em equilíbrio permanece constante. Os valores pagos por unidade produzida são dados por:

$$\mathbf{FTFGu} = T_y ([\mathbf{I} - \mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')] \mathbf{p} - W \mathbf{XWu} - \mathbf{FXCu} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \quad (\text{C.3})$$

-Dividendos pagos aos investidores. Referem-se ao valor do lucro líquido (descontados os impostos). No equilíbrio inicial, os dividendos pagos por unidade produzida são dados por:

$$\mathbf{FTFGu} = (1 - T_y) ([\mathbf{I} - \mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')] \mathbf{p} - W \mathbf{XWu} - \mathbf{FXCu} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \quad (\text{C.4})$$

Por outro lado, as firmas podem escolher a margem de lucro, dada pelo vetor  $\mathbf{PM}$ . A margem de lucro é a parcela do custo unitário que o investidor quer receber ao final do ciclo produtivo, descontado o imposto sobre o lucro. O lucro bruto é dado por:

$$\mathbf{BP} = (\mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}') \mathbf{p} + W \mathbf{XWu} + \mathbf{FXCu} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \cdot (\mathbf{PM} / (1 - T_y)) \quad (\text{C.5})$$

O lucro bruto também é calculado da diferença entre receitas e despesas:

$$\mathbf{BP} = [\mathbf{I} - \mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')] \mathbf{p} - W \mathbf{XWu} - \mathbf{FXCu} \mathbf{1}_{NI \times 1} \quad (\text{C.6})$$



Igualando (C.5) e (C.6):

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')\mathbf{p} + W \mathbf{XW}\mathbf{u} + \mathbf{FXCu}\mathbf{1}_{NI \times 1}) \cdot (\mathbf{PM}/(1 - T_y)) = \\ [\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')] \mathbf{p} - W \mathbf{XW}\mathbf{u} - \mathbf{FXCu}\mathbf{1}_{NI \times 1} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Chega-se ao vetor de preços de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{\mathbf{PM}}{1 - T_y} \right) \right) \right. \\ \left. - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right]^{-1} (W \mathbf{XW}\mathbf{u} + \mathbf{FXCu} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Deve-se verificar se esse vetor de preços: 1) existe; e 2) possui elementos estritamente positivos. O anexo B trata este assunto em detalhe<sup>3</sup>. Com base nisto, o mapa é formalizado:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{p}; \boldsymbol{\theta}) : (\mathbf{0}, \infty) \rightarrow (\mathbf{0}, \infty) \\ \Phi_1(\mathbf{p}; \boldsymbol{\theta}) = \left[ \text{diag} \left( \mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \left( 1 + \frac{\mathbf{PM}}{1 - T_y} \right) \right) \right. \\ \left. - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T) \right]^{-1} (W \mathbf{XW}\mathbf{u} + \mathbf{FXCu} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \end{aligned}$$

Com:

$$(\mathbf{X}\mathbf{u}, \mathbf{XW}\mathbf{u}) = D(\mathbf{p}; W, \mathbf{QX}, \mathbf{QW}, \mathbf{A}, \alpha) \in \mathbb{R}^{NI \times NI} \times \mathbb{R}^{NI} \quad (\text{C.9})$$

### C.1.2 Especificação do Mapa de Quantidades

Este mapa parte do vetor de preços  $\mathbf{p}^*$ , das demandas unitárias ( $\mathbf{X}\mathbf{u}$  e  $\mathbf{XW}\mathbf{u}$ ), obtidas do ponto fixo de  $\Phi_1$ , e de uma estimativa inicial  $\mathbf{y}$  da produção das firmas. A sequência de cálculos desse mapa consiste em:

- A partir dos dados  $\mathbf{p}^*$ ,  $\mathbf{X}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{XW}\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$ , são calculados os valores destinados ao consumo pelos consumidores e pelo governo  $FSW$  e  $FSG$ .
- A partir dos valores destinados ao consumo  $FSW$  e  $FSG$ , do vetor de preços e das composições das cestas de consumo dos consumidores e governo, são calculadas as demandas dos bens individuais, por consumidores e pelo governo.
- Dadas as demandas pelos bens individuais de consumidores e do governo, e as demandas unitárias das firmas (para produção de 1 unidade do bem), calcula-se

<sup>3</sup>O anexo sugere que, somente no cálculo do vetor de preços anterior ao início da colocação da economia em equilíbrio, deve ser feita uma transformação da matriz de demandas unitárias das firmas ( $\mathbf{X}\mathbf{u}$ ). Essa transformação é desnecessária durante o cálculo do equilíbrio.

a quantidade  $\mathbf{y}$  a ser produzida pelas firmas, resolvendo-se um sistema de equações lineares (isso exige que as firmas tenham informação perfeita).

O ponto fixo é obtido da reiteração desses cálculos. A receita líquida dos trabalhadores / consumidores, bem como a do governo são empregadas no consumo, calculadas a seguir.

a) Receita líquida dos trabalhadores / consumidores

A receita dos trabalhadores / consumidores, descontados os impostos, é integralmente direcionada ao consumo. A receita bruta é formada pela soma de salários, dos custos fixos recebidos e dos lucros líquidos que os investidores receberam das firmas e repassaram aos trabalhadores. Usualmente, os grupos da sociedade que recebem esses três tipos de receita são diferentes, mas neste modelo, optou-se por não diferenciar o comportamento de consumo desses grupos, de forma que as receitas são somadas, formando a receita bruta:

$$FTW + FFXC + FSI = W\mathbf{y}'\mathbf{XW}\mathbf{u} + FXCu\mathbf{y}'\mathbf{1}_{NI \times 1} + \\ + ([\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1}\mathbf{DEPR}')] ]\mathbf{p} - W\mathbf{XW}\mathbf{u} - FXCu\mathbf{1}_{NI \times 1})'\mathbf{y} \quad (\text{C.10})$$

Os impostos a pagar incidem somente sobre salários e custos fixos, uma vez que os lucros das firmas já foram taxados:

$$FTWG = T_w(W\mathbf{y}'\mathbf{XW}\mathbf{u} + FXCu\mathbf{y}'\mathbf{1}_{NI \times 1}) \\ FSW = FTW + FFXC + FSI - FTWG \\ FSW = (1 - T_w)(W\mathbf{y}'\mathbf{XW}\mathbf{u} + FXCu\mathbf{y}'\mathbf{1}_{NI \times 1}) + \\ + (1 - T_y)([\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1}\mathbf{DEPR}')] ]\mathbf{p} - W\mathbf{XW}\mathbf{u} - FXCu\mathbf{1}_{NI \times 1})'\mathbf{y} \quad (\text{C.11})$$

b) Receita do governo

Em equilíbrio, a receita do governo, gerada por impostos pagos por firmas e trabalhadores, é dada por:

$$FTG = T_w(W\mathbf{y}'\mathbf{XW}\mathbf{u} + FXCu\mathbf{y}'\mathbf{1}_{NI \times 1}) + \\ + T_y([\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1}\mathbf{DEPR}')] ]\mathbf{p} - W\mathbf{XW}\mathbf{u} - FXCu\mathbf{1}_{NI \times 1})'\mathbf{y} \quad (\text{C.12})$$

Essa receita é integralmente direcionada ao consumo:

$$FSG = FTG \quad (\text{C.13})$$

Obtidos os valores monetários destinados ao consumo, as quantidades de bens consumidos são obtidas, para consumidores e governo, da seguinte maneira:

a) São calculados os preços das cestas. No caso dos trabalhadores / consumidores:

$$\mathbf{PB} = \mathbf{XCB} \mathbf{p}$$

b) Utilizando o modelo de Dixit e Stiglitz (1977) (equação E.13), calcula-se as demandas pelas cestas, expressas no vetor  $\mathbf{ncestas}_{NB \times 1}$

c) Calcula-se, por fim, as demandas pelos bens. Para os trabalhadores / consumidores:

$$\mathbf{DYW} = \mathbf{XCB}' \mathbf{ncestas}$$

As quantidades de bens demandadas para consumo pelos trabalhadores / consumidores, obtidas por esse processo, são denotadas por:

$$\mathbf{DYW} = DW(\mathbf{FSW}, \mathbf{XCB}, \mathbf{p}^*) \quad (\text{C.14})$$

Para o governo, a quantidade de produto demandada é denotada por:

$$\mathbf{DYG} = DW(\mathbf{FSG}, \mathbf{XCBG}, \mathbf{p}^*) \quad (\text{C.15})$$

A demanda externa às firmas é dada por:

$$\mathbf{d} = \mathbf{DYW} + \mathbf{DYG} \quad (\text{C.16})$$

Do ponto de vista produtivo, a produção  $\mathbf{y}$  de cada firma deve atender à demanda  $\mathbf{d}$  e à demanda das firmas, referente ao consumo de recursos (por depreciação ou emprego no processo produtivo), o que, partindo das demandas unitárias das firmas obtidas no ponto fixo de  $\Phi_1$ , é dado por:

$$\mathbf{d} = [\mathbf{I} - \mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')]' \mathbf{y} \quad (\text{C.17})$$

De onde:

$$\mathbf{y} = ([\mathbf{I} - \mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')]' )^{-1} \mathbf{d} \quad (\text{C.18})$$

O anexo B mostra que a matriz  $[\mathbf{I} - \mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')]$  é produtiva, de onde se pode afirmar que o vetor  $\mathbf{y}$  existe e seus elementos são estritamente positivos. Com base nisto, pode-se formalizar o mapa:

$$\Phi_2(\mathbf{y}; \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) : (\boldsymbol{\theta}, \infty) \rightarrow (\boldsymbol{\theta}, \infty)$$

$$\Phi_2(\mathbf{y}; \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) = ([\mathbf{I} - \mathbf{Xu} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}')]' )^{-1} \mathbf{d}$$

Com:

$$\begin{aligned}
d &= DYW + DYG \\
DYW &= DW(FSW, XCB, \mathbf{p}^*) \\
DYG &= DW(FSG, XCBG, \mathbf{p}^*) \\
FSW &= (1 - T_w)(W \mathbf{y}' XW\mathbf{u} + FXCu \mathbf{y}' \mathbf{1}_{NI \times 1}) + \\
&\quad + (1 - T_y)([\mathbf{I} - X\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} DEPR')] \mathbf{p} - W XW\mathbf{u} - FXCu \mathbf{1}_{NI \times 1})' \mathbf{y} \\
FSG &= T_w(W \mathbf{y}' XW\mathbf{u} + FXCu \mathbf{y}' \mathbf{1}_{NI \times 1}) + \\
&\quad + T_y([\mathbf{I} - X\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} DEPR')] \mathbf{p} - W XW\mathbf{u} - FXCu \mathbf{1}_{NI \times 1})' \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Os pontos fixos  $\mathbf{p}^* = \Phi_1(\mathbf{p}^*; \boldsymbol{\theta})$  e  $\mathbf{y}^* = \Phi_2(\mathbf{y}^*; \mathbf{p}^*, \boldsymbol{\theta})$  devem ser calculados nessa ordem, resultando no ponto fixo do mapa  $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta})$ . O ponto fixo:

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{y}^*) = \Phi(\mathbf{p}^*, \mathbf{y}^*; \boldsymbol{\theta}) \tag{C.20}$$

é o equilíbrio da economia.

## C.2 O Equilíbrio como Solução de um Problema de Equilíbrio Geral

O equilíbrio definido no item anterior possui características que permitem que ele seja formulado como um equilíbrio geral de produção e consumo, com firmas, consumidores e governo, como segue.

Sejam os problemas de otimização dos agentes (firmas, trabalhadores / consumidores e governo):

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^F : \quad & \max_{\substack{Xu_{i,j}, XWu_i \\ j \in J}} \Pi^F(\cdot) = P_i - \sum_{j \in J} P_j Xu_{i,j} - W XWu_i \\
\text{s. a.} \quad & 1 = A_i (QW_i XWu_i)^{1-\alpha} \sum_{j \in J} (QX_{i,j} Xu_{i,j})^\alpha
\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^W : \quad & \max_{NC_c^W} U^C(\cdot) = \left[ \sum_{c=1, \dots, NC} PBW_c^\rho \right]^{1/\rho} \\
\text{s. a.} \quad & \sum_c PBW_c NC_c^W = FSW \\
& PBW_c = \sum_i XCB_{c,i} P_i
\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^G : \max_{NC_c^G} U^G(\cdot) &= \left[ \sum_{c=1, \dots, NCG} PBG_c^\rho \right]^{1/\rho} \\
\text{s. a. } \sum_c PBG_c NC_c^G &= FSG \\
PBG_c &= \sum_i XCBG_{c,i} P_i
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Um equilíbrio de produção e consumo, com firmas, consumidores e governo, para a economia

$$\begin{aligned}
E = \{ &(A_i, \alpha_i, QX_{i,j}, QW_i, DEPR_i, FXCu, PM_i, \Pi_i^F)_{i \in I}, \\
&(\mathbf{XCB}, W, NW^0, U^C), (\mathbf{XCBG}, T_y, T_w, U^G) \}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

é um conjunto de preços  $\{P_i\}$ , um conjunto de matrizes de consumos unitários de insumos e trabalho  $\{Xu_{i,j}, XW_i\} \in \mathbb{R}_+^{NI \times NI} \times \mathbb{R}_+^{NI}$ , uma alocação de cestas de consumo de consumidores  $\{NC^W\} \in \mathbb{R}_+^{NC}$ , uma alocação de cestas de consumo do governo  $\{NCG\} \in \mathbb{R}_+^{NCG}$  e um conjunto de quantidades produzidas  $\{Y_i\} \in \mathbb{R}_+^{NI}$ , tais que:

$$\begin{aligned}
\sigma^F &\in \operatorname{argmax}_{\sigma^F \in B^F} \Pi_i^F, \text{ sendo } \sigma^F = \{\mathbf{Xu}, \mathbf{XWu}\} \text{ e } B^F = \{\sigma^F: \text{equação C.21}\} \\
\sigma^W &\in \operatorname{argmax}_{\sigma^W \in B^W} U^W, \text{ sendo } \sigma^W = \{NC^W\} \text{ e } B^W = \{\sigma^W: \text{equações C.22}\} \\
\sigma^G &\in \operatorname{argmax}_{\sigma^G \in B^G} U^G, \text{ sendo } \sigma^G = \{NCG\} \text{ e } B^G = \{\sigma^G: \text{equações C.23}\}
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Ou seja, firmas, consumidores e governo otimizam, e valem as seguintes condições de compensação de mercados:

$$\begin{aligned}
Y_i &= \sum_j Xu_{i,j} DEPR_j Y_j + \sum_{c=1, \dots, NC} XCB_{c,i} NC_c^W + \\
&\sum_{c=1, \dots, NCG} XCBG_{c,i} NC_c^G
\end{aligned} \tag{C.26}$$

(Oferta de produtos igual à demanda)

$$\begin{aligned}
PM_i &= (1 - T_y) pfu_i / eu_i \\
eu_i &= \left( \sum_j Xu_{i,j} DEPR_j P_j \right) + W XWu_i + FXCu \\
pfu_i &= P_i - \left( \sum_j Xu_{i,j} DEPR_j P_j \right) - W XWu_i - FXCu
\end{aligned} \tag{C.27}$$

(Cada firma tem a margem de lucro desejada)

$$NW_0 = \sum_i Y_i XWu_i \tag{C.28}$$

(Oferta de trabalho igual à demanda)

$$FTW = (1 - T_w) \sum_i Y_i (W XWu_i + FXCu) + (1 - T_y) \sum_i Y_i pfu_i \quad (C.29)$$

$$FSW = FTW \quad (C.30)$$

(A renda dos trabalhadores é destinada integralmente ao consumo)

$$FTG = T_w \sum_i Y_i (W XWu_i + FXCu) + T_y \sum_i Y_i pfu_i \quad (C.31)$$

$$FSG = FTG \quad (C.32)$$

(A receita do governo é destinada integralmente ao consumo)

Aplica-se a essa formulação a mesma observação feita para a formulação de ponto fixo, uma vez que o problema é o mesmo: como as funções de produção, as receitas e os custos dos agentes apresentam retornos constantes de escala, a determinação do equilíbrio da economia depende da escala inicial da economia, isto é, das quantidades produzidas pelas firmas antes do cálculo do equilíbrio.

A existência da solução deste problema de equilíbrio geral está associada à continuidade dos mapas que constituem a formulação de ponto fixo deste problema. Sendo os mapas contínuos, a existência do ponto fixo está garantida pelo teorema do ponto fixo de Brouwer (multidimensional). A unicidade pode ser provada pelo teorema da contração: se os mapas forem contrações, a unicidade da solução está demonstrada. Neste caso em particular (início da simulação), é necessária apenas a existência do ponto fixo.

### C.3 Descrição do Cálculo do Equilíbrio

Nesta seção, é apresentado um processo de cálculo do equilíbrio da economia simplificada, isto é, sem bancos e com taxas de juros iguais a zero. Esse cálculo é realizado ao início da simulação.

Se uma simulação for iniciada com a economia em estado de equilíbrio, e não ocorrerem choques exógenos, as variáveis de estado dos agentes permanecerão constantes ao longo do tempo, à medida que os ciclos da simulação forem executados. O cálculo do equilíbrio não é necessário ao início da simulação, mas é importante para evitar a influência de fatores devidos ao desequilíbrio inicial da economia no comportamento dos agentes.

No cálculo do equilíbrio, os valores das variáveis obtidos no item anterior são utilizados como ponto de partida e sucessivamente ajustados até que o equilíbrio seja

atingido dentro da tolerância admitida. No estado de equilíbrio, os fluxos de entrada de cada agente da economia são iguais aos de saída, em cada período. Especificamente, isso significa o seguinte.

- No caso das firmas, a quantidade de produtos em estoque é constante. O número de unidades produzidas é igual ao de unidades vendidas e o número de unidades consumidas dos diferentes insumos permanece constante período a período. O número de trabalhadores contratados e os valores dos pagamentos recebidos por vendas a consumidores, governo e outras firmas são constantes, bem como o empréstimo bancário contratado. O mesmo ocorre com os valores pagos a fornecedores de insumos, salários, custos fixos, impostos e dividendos distribuídos ao final de cada período. As somas desses pagamentos e recebimentos são iguais em cada período, o que mantém inalterados os valores em caixa das firmas. Por fim, o valor líquido de cada firma permanece constante.
- No caso dos trabalhadores / consumidores, o número de trabalhadores contratados não se altera com o tempo, o que resulta em total de salários recebidos constante. Os demais recebimentos (custos fixos e dividendos das firmas) também são constantes. O valor recebido é gasto no pagamento de impostos (sobre salários e custos fixos recebidos) e em consumo. No caso deste, como os preços permanecem constantes e as preferências não se alteram, as quantidades consumidas de cada produto não se alteram.
- No caso do governo, os totais de impostos recebidos das firmas e dos trabalhadores não se alteram, e esse total é gasto em consumo.
- Os investidores recebem um valor constante de dividendos de cada firma e o direcionam ao consumo (no modelo, eles se comportam como consumidores, transferindo esse valor para eles).

Este equilíbrio é implementado em duas fases: na primeira, busca-se o equilíbrio de preços e demandas unitárias ótimas (por unidade produzida) por insumos e trabalho, para as firmas individuais; na segunda, parte-se dos preços e demandas unitárias calculados e se obtém o ponto de equilíbrio entre oferta de produtos e demanda: são calculadas as quantidades produzidas pelas firmas e correspondentes quantidades totais de insumos e trabalho demandados. A partir dessas quantidades, são obtidas as demandas por produtos dos consumidores e governo. Depois de atingido o equilíbrio, o tamanho da economia (número de trabalhadores / consumidores) é ajustado de acordo com os parâmetros do programa e as variáveis de estado dos agentes (firmas, bancos, trabalhadores, governo, investidores) são definidas com os valores de início da simulação.

Para o início dos cálculos deve-se dispor dos seguintes dados (ver Lista de Variáveis para obter a descrição de cada um)<sup>4</sup>:

$NI, NC, NCG, \alpha, \mathbf{QX}, \mathbf{X}, \mathbf{QW}, \mathbf{XW}, \mathbf{DEPR}, \mathbf{P}, \mathbf{XCB}, \mathbf{XCBG}$  A partir desses dados, devem ser feitos estes cálculos:

Demandas a serem atendidas pelas firmas  $i$ :

$$DY_{i,t} = DYW_{i,t} + \sum_{j=1, \dots, NI} X_{j,i} \quad (\text{C.33})$$

A tecnologia e os insumos possibilitam que a firma  $i$  produza:

$$y_i = A_i (QW_i XW_i)^{1-\alpha} \sum_i (Q_{i,j} X_{i,j})^\alpha \quad (\text{C.34})$$

Igualando-se a produção à demanda, tem-se  $DY_{i,t} = y_i$ , de onde se calcula o valor das constantes de proporcionalidade insumo-produto na produção dos bens:

$$A_i = DY_{i,t} / [(QW_i XW_i)^{1-\alpha} \sum_i (Q_{i,j} X_{i,j})^\alpha] \quad (\text{C.35})$$

Com esses dados, pode-se iniciar o processo descrito a seguir.

### C.3.1 Equilíbrio de Preços e Demandas Ótimas Unitárias

Esta fase do cálculo do equilíbrio parte de um conjunto de preços dos insumos para obter a demanda ótima por insumos e trabalho por unidade produzida de cada firma. A partir dessa demanda ótima, são recalculados os preços que permitem a produção de uma unidade do bem com o lucro especificado. O processo é reiterado até a demanda unitária por trabalho convergir com dado nível de precisão<sup>5</sup>.

Inicialmente, é calculado o vetor de preços dos produtos ( $\mathbf{p}$ ) a ser utilizado como ponto de partida nos cálculos do equilíbrio. Para o cálculo de  $\mathbf{p}$ , é necessário que o sistema de equações a ser resolvido possua soluções estritamente positivas. Para isso, é suficiente que a matriz que multiplica  $\mathbf{p}$  seja produtiva. O anexo B mostra que, partindo-se do fato que, por construção, a matriz obtida dos dados de entrada gerados,  $[\text{diag}(\mathbf{y}) - \mathbf{X}_{NI \times NI}]$  é produtiva<sup>6,7</sup>, pode-se garantir essa positividade estrita de  $\mathbf{p}$  se as demandas unitárias utilizadas nesse cálculo forem obtidas da seguinte maneira:

$$\mathbf{f} = 1 + \mathbf{PM}_{.,1} / (1 - T_y) \quad (\text{vetor de fatores de ajuste}) \quad (\text{C.36})$$

<sup>4</sup>Usualmente, assume-se que a variável  $\alpha$  tenha o mesmo valor para todas as firmas. Neste caso, é denotada por  $\alpha$

<sup>5</sup>Neste trabalho, a maior diferença  $\mathbf{XW}\mathbf{u}_i^t \cdot / \mathbf{XW}\mathbf{u}_i^{t-1}$  admitida é  $10^{-13}$ .

<sup>6</sup>Nesse cálculo,  $\text{diag}(\mathbf{y})$ , sendo  $\mathbf{y}_{1 \times NI}$ , gera uma matriz  $NI \times NI$  com os elementos de  $\mathbf{y}$  na diagonal e os demais sendo zeros.  $\mathbf{X}$  é a matriz de demandas das firmas-linha por bens das firmas-coluna na produção de  $\mathbf{y}$  unidades de produto. No vetor  $\mathbf{y}$ , o elemento  $y_i$  é a quantidade de bens produzidos pela firma  $i$ .

<sup>7</sup>Uma matriz  $\mathbf{Z}$  é produtiva quando existe um vetor  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{Z}\mathbf{x}$  produz como resultado um vetor de elementos estritamente positivos.



Em  $\mathbf{f}$ , o elemento  $f_i$  depende da margem de lucro da firma  $i$  no período inicial ( $\mathbf{PM}_{\cdot,1}$ ).

$$\mathbf{X}\mathbf{u} = \mathbf{X} \cdot /((\mathbf{f} \cdot \mathbf{y})\mathbf{1}_{1 \times NI}) \quad (\text{demanda unitária por bens})$$

$$\mathbf{XW}\mathbf{u} = \mathbf{XW} \cdot \mathbf{y} \quad (\text{demanda unitária por trabalho})$$

$$\mathbf{A}^a = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{f} \cdot \hat{\alpha}) \quad (\text{ajuste da constante de proporcionalidade - produção}^8)$$

Na prática, essa transformação torna as firmas mais produtivas, ao reduzir as demandas unitárias. Dadas as magnitudes usuais de  $T_y$  e  $PM_{i,t}$  e considerando-se que os dados da simulação foram gerados a partir de distribuições, pode-se afirmar que a transformação não provoca efeitos relevantes nos resultados obtidos<sup>9</sup>. O vetor de preços  $\mathbf{p}$  é obtido de:

$$\mathbf{p} = [\text{diag}(\mathbf{1}_{NI \times 1} \cdot / \mathbf{f}) - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}^T)]^{-1} (W \mathbf{XW}\mathbf{u} + \mathbf{FXC}\mathbf{u} \mathbf{1}_{NI \times 1}) \quad (\text{C.37})$$

Em seguida, os cálculos a seguir são repetidos até que a maior diferença entre as demandas unitárias calculadas em uma iteração,  $\mathbf{XW}\mathbf{u}$ , e as calculadas na iteração anterior seja inferior à tolerância especificada na simulação. São feitas as seguintes iterações:

- a) Dados os parâmetros ( $\mathbf{QX}$ ,  $\mathbf{QW}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $W$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{RC}$ ,  $\mathbf{RB}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\alpha$ ), do conjunto de firmas da economia, devem ser calculadas as demandas unitárias ótimas ( $\mathbf{XW}\mathbf{u}$  e  $\mathbf{X}\mathbf{u}$ ) de cada firma, utilizando o cálculo apresentado no anexo D. O cálculo é feito para cada firma individualmente. Como as demandas são unitárias, o vetor de quantidades produzidas  $\mathbf{y}$  deve ter todos os elementos iguais a 1. Neste cálculo de determinação de equilíbrio, as taxas de juros de créditos comercial e bancário ( $\mathbf{RC}$  e  $\mathbf{RB}$ ) são consideradas nulas.
- b) Se o vetor  $\mathbf{XW}\mathbf{u}$  não tiver convergido, o preço de equilíbrio é recalculado com os novos valores de  $\mathbf{X}\mathbf{u}$  e  $\mathbf{XW}\mathbf{u}$ , utilizando a equação (C.37).

Após a convergência de  $\mathbf{XW}\mathbf{u}$ , são preparados dados para o cálculo de equilíbrio entre oferta e demanda:

$$\mathbf{PROD}\mathbf{u} = \mathbf{I}_{NI \times NI} - \mathbf{X}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{1}_{NI \times 1} \mathbf{DEPR}') \quad (\text{matriz insumo-produto unitária})$$

$$\mathbf{p}\mathbf{f}\mathbf{u} = \mathbf{PROD}\mathbf{u} \mathbf{p} - W \mathbf{XW}\mathbf{u} - \mathbf{FXC}\mathbf{u} \mathbf{1}_{NI \times 1} \quad (\text{vetor de lucros unitários})$$

---

<sup>9</sup>Se os dados utilizados fossem dados reais, a saída seria utilizá-los nos cálculos sem esta transformação e verificar se os vetores de preços calculados existem e são estritamente positivos.

### C.3.2 Equilíbrio Global entre Oferta e Demanda de Bens

O cálculo deste equilíbrio parte dos preços e demandas unitárias calculadas anteriormente, bem como dos cálculos de produção total feitos na equação (C.34). São calculadas as demandas por bens de trabalhadores / consumidores e governo. A partir da demanda total calculada, são obtidos os valores de quantidades a produzir das firmas. Essas quantidades permitem o cálculo do lucro das firmas, dos custos fixos totais, dos impostos sobre lucro a pagar e da quantidade de trabalhadores a contratar, que são utilizados na iteração seguinte do processo.

As iterações continuam até que a maior diferença entre as quantidades produzidas ( $\mathbf{y}$ ) calculadas em uma iteração e as calculadas na iteração anterior seja inferior à tolerância especificada na simulação.

A iteração se inicia com o cálculo das demandas pelos bens, pelos consumidores e pelo governo. As demandas são determinadas utilizando-se o modelo de Dixit e Stiglitz (1977), que se aplica ao contexto da competição monopolística que caracteriza esta economia. Dados os valores  $CW$  e  $PB$  (saldo em caixa dos trabalhadores / consumidores destinado ao consumo e preço de cada cesta), ou  $CG$  e  $PBG$  (idem, governo), devem ser calculadas as demandas por bens dos consumidores ( $\mathbf{dw}$ ) e do governo ( $\mathbf{dg}$ ) utilizando-se a equação (E.13). Os dados de entrada para esses cálculos são obtidos utilizando-se o valor de  $y$  obtido no cálculo mais recente, da seguinte forma. Levando isso em conta, são feitas, de forma iterativa, os seguintes cálculos:

a) Saldo em caixa dos trabalhadores / consumidores

$$CW = W(1 - T_w)\mathbf{y}' \mathbf{XW}\mathbf{u} + (1 - T_y)\mathbf{p}\mathbf{f}\mathbf{u}' \mathbf{y} + (1 - T_w) \mathbf{FXC}\mathbf{u} \mathbf{1}_{1 \times NI} \mathbf{y} \quad (\text{C.38})$$

Em equilíbrio, o caixa dos trabalhadores destinado ao consumo é o total líquido (descontado o imposto) de salários, somado ao lucro líquido total das firmas e ao valor líquido do total dos custos fixos recebidos das firmas.

$$PB = \mathbf{XCB} \mathbf{p} \quad (\text{vetor de preços das cestas}) \quad (\text{C.39})$$

b) Saldo em caixa do governo

$$CG = W T_w \mathbf{y}' \mathbf{XW}\mathbf{u} + T_y \mathbf{p}\mathbf{f}\mathbf{u}' \mathbf{y} + T_w \mathbf{FXC}\mathbf{u} \mathbf{1}_{1 \times NI} \mathbf{y} \quad (\text{C.40})$$

Em equilíbrio, o caixa do governo destinado ao consumo é o total dos impostos sobre salários, lucros das firmas e custos fixos recebidos das firmas.

$$PBG = \mathbf{XCBG} \mathbf{p} \quad (\text{vetor de preços das cestas do governo}) \quad (\text{C.41})$$

c) Cálculo das demandas

As demandas pelos bens são obtidas do vetor de demandas pelas cestas ( $n_{cestas}$ , calculado de acordo com o modelo de Dixit-Stiglitz) fornecidas pelo cálculo:

$$dw = XCB' n_{cestas} \quad (\text{cálculo feito com dados de consumidores})$$

$$dg = XCBG' n_{cestas} \quad (\text{cálculo feito com dados do governo})$$

Obtidas as demandas de consumidores e governo, é calculada a demanda total externa ao conjunto de firmas:

$$d = dw + dg \quad (C.42)$$

d) Recálculo da produção

Por fim, recalcula-se a produção de cada firma resolvendo-se o sistema:

$$y = PRODu^{-1} d \quad (C.43)$$

É importante notar que a matriz insumo-produto  $PRODu$  considera como demanda das firmas pelos bens a totalidade dos bens de consumo necessários e apenas a reposição da parcela dos bens de capital que depreciaram, o que é indicado pela multiplicação (elemento a elemento) de  $Xu$  pelo fator ( $\mathbf{1}_{NI \times 1} DEPR'$ ).

Pode-se afirmar que o vetor  $y$  obtido sempre existe e que seus elementos são estritamente positivos. Isso ocorre porque o vetor  $p$  calculado no item anterior existe e tem valores estritamente positivos (ver anexo B).



## D Cálculo das Demandas Ótimas das Firmas Individuais

Nesta seção, é apresentado o cálculo das demandas ótimas das firmas individuais, ( $\mathbf{X}_i$ , e  $XW_i$ ) a partir dos seguintes dados:

- a)  $QX_{i,\cdot}$  - vetor de produtividades de cada insumo na produção do bem  $i$ .
- b)  $QW_i$  - produtividade do trabalho na produção do bem  $i$ .
- c)  $\mathbf{p}$  - vetor de preços dos bens no período de cálculo.
- d)  $W$  - salário (numerário).
- e)  $y_i$  - meta de produção da firma  $i$ . No cálculo das demandas unitárias,  $y_i = 1$ .
- f)  $RC_{i,\cdot}$  - vetor de taxas de juros de crédito comercial pagas pela firma  $i$  às demais no período de cálculo.
- g)  $RB_i$  - taxa de juros de empréstimo bancário contraído pela firma  $i$  junto ao seu banco no período de cálculo.
- h)  $A_i$  e  $\alpha_i$  - parâmetros da função de produção da firma  $i$

Defina-se, visando simplicidade, a notação:

- a)  $z_j = QX_{i,j}X_{i,j}$ , com  $QX_{i,j} = 0$  se a firma  $j$  não é fornecedora da firma  $i$ .
- b)  $z_w = QW_iXW_i$
- c) Se a firma  $j$  for fornecedora da firma  $i$ :  $s_j = (1 + RC_{i,j})P_j/QX_{i,j}$ , caso contrário,  $s_j = 0$ .
- d)  $s_w = (1 + RB_i)W/QW_i$ , com  $W = 1$  (numerário).

Os preços de compra dos insumos foram definidos no período anterior (no cálculo do equilíbrio inicial, esses preços são dados).

A equação (D.1), a seguir, apresenta o problema de maximização do lucro da firma  $i$  para uma dada quantidade do bem  $i$  a produzir ( $Y_{i,t}$ ), assumida igual à meta de produção do período ( $YG_{i,t}$ ), definida previamente.

$$\begin{aligned}
& \max_{z_j} P_{i,t-1} Y_{i,t} - \sum_{j \in J_i} s_j z_j - s_w z_w \\
& \text{s. a. } Y_{i,t} = A_i z_w^{1-\alpha} \sum_{j \in J_i} z_j^\alpha = YG_{i,t}
\end{aligned} \tag{D.1}$$

As soluções são dadas por:

$$z_j = \frac{Y_{i,t}}{A_i} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha s_w} \right)^{\alpha-1} \left( \sum_{j \in J_i} s_j^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\alpha-2} s_j^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad j \in J_i \tag{D.2a}$$

$$z_w = \frac{Y_{i,t}}{A_i} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha s_w} \right)^\alpha \left( \sum_{j \in J_i} s_j^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\alpha-1} \tag{D.2b}$$

Por fim, obtém-se:

$$X_{i,j} = z_j/QX_{i,j} \text{ e } XW_i = z_w/QW_i \tag{D.3}$$

## E Cálculo das Demandas por Bens em Competição Monopolística

Nesta seção, é apresentado o cálculo das demandas por bens por trabalhadores / consumidores ou governo em regime de competição monopolística. Neste trabalho, assume-se como hipótese que, tanto os trabalhadores / consumidores quanto o governo formam grupos nos quais os integrantes são indiferenciados entre si, permitindo a adoção de um consumidor representativo para cada grupo. Nesse contexto, pode ser usado o modelo de Dixit e Stiglitz (1977) para a determinação das demandas de cada grupo pelos bens ou cestas de bens (quando consumidas de forma agregada, ou seja, sem a separação de seus componentes). Uma particularidade interessante da versão desse modelo adotada neste trabalho é a de que ele aloca uma parcela maior da renda dos consumidores aos bens de menor preço, exercendo sobre as firmas uma pressão de baixa de preços dos seus produtos.

As preferências do grupo consumidor são representadas por uma função utilidade convexa e fracamente separável<sup>1</sup>:

$$u = U(x_0, V(x_1, \dots, x_n)) \quad (\text{E.1})$$

Nessa função,  $x_0$  é um bem numérico produzido em um setor e  $x_1, \dots, x_n$  são bens diferenciados produzidos em outro setor.

Dixit e Stiglitz (1977) abordam três casos diferentes, impondo duas das três hipóteses restritivas a seguir:

- a) Simetria de  $V(\cdot)$  com relação a seus argumentos;
- b)  $V(\cdot)$  na forma de uma função com elasticidade de substituição constante (C.E.S.);
- c)  $U(\cdot)$  especificada na forma de uma função *Cobb-Douglas*.

A seguir, serão assumidas inicialmente as hipóteses a) e b) e, ao final, será adotada a hipótese c). Atendendo às hipóteses a) e b), assume-se a função  $V(\cdot)$  com a forma:

$$u = U\left(x_0, \left[\sum_i x_i^\rho\right]^{1/\rho}\right) \quad (\text{E.2})$$

---

<sup>1</sup>Em funções-utilidade fracamente separáveis, a taxa marginal de substituição e a elasticidade de substituição de 2 bens de um sub-grupo independe dos bens dos demais sub-grupos.

Para permitir quantidades iguais a zero, deve-se ter  $\rho \in (0, 1)$ . Por sua vez, a função  $U(\cdot)$  é assumida homotética em seus argumentos e separável. A separabilidade de  $U(\cdot)$  permite que o problema de maximização da utilidade seja resolvida em dois estágios: no primeiro, a alocação ótima da renda para cada sub-grupo é determinada, e no segundo, são determinadas as quantidades dentro de cada sub-grupo.

a) Primeiro estágio:

Para a alocação da renda entre os grupos de  $U(\cdot)$ , inicialmente, define-se um índice de quantidades  $q$  para os bens do 2º setor:

$$y = \left[ \sum_i x_i^\rho \right]^{1/\rho} \quad (\text{E.3})$$

O problema de otimização a resolver é:

$$\begin{aligned} \max_{x_0, y} \quad & U(x_0, y) \\ \text{s. a.} \quad & x_0 + q y = I \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Assume-se que  $x_0$  é um bem numerário (preço unitário) e  $I$  é a renda do grupo disponível ao consumo.

Definem-se  $U_0 = \partial U / \partial x_0$  e  $U_y = \partial U / \partial y$ .

Das condições de primeira ordem, obtém-se  $U_y / U_0 = q$ , de onde se pode obter a fração da alocação de renda ao consumo de  $y$ :

$$s(q) = q y / I \quad (\text{E.5})$$

De onde são obtidas as demandas por  $x_0$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= I(1 - s(q)) \\ y &= s(q)I/q \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

b) Segundo estágio:

O problema a ser resolvido impõe como restrição orçamentária a renda alocada no primeiro estágio ao setor:

$$\begin{aligned} \max_{x_i} \quad & y = \left[ \sum_i x_i^\rho \right]^{1/\rho} \\ \text{s. a.} \quad & \sum_i p_i x_i = s(q)I \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

As demandas pelos bens do setor obtidas são:



$$x_i = \frac{p_i^{1/(\rho-1)} I s(q)}{\sum_j p_j^{\rho/(\rho-1)}} \quad (\text{E.8})$$

Para obter as demandas de forma específica, é necessário especificar  $U(\cdot)$ . Assumindo que essa função é uma Cobb-Douglas:

$$u = U(x_0, y) = x_0^{(1-\alpha)} y^\alpha \quad (\text{E.9})$$

Pode-se reescrever o problema de otimização do primeiro estágio como:

$$\begin{aligned} \max_{x_0, y} \quad & u = x_0^{(1-\alpha)} y^\alpha \\ \text{s. a.} \quad & x_0 + qy = I \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

As soluções são:

$$\begin{aligned} x_0 &= I(1 - \alpha) \\ y &= \alpha I/q \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Com:  $s(q) = \alpha$

Substituindo-se  $s(q)$  nas demandas obtidas em (8), tem-se:

$$x_i = \frac{p_i^{1/(\rho-1)} I \alpha}{\sum_j p_j^{\rho/(\rho-1)}} \quad (\text{E.12})$$

Suponhamos agora, que  $\alpha = 1$ : nesse caso, o consumidor não extrai utilidade no consumo do bem numérico, portanto, a utilidade será maior quanto maior for o consumo do bem  $y$  (ou seja, da cesta de bens dada por (E.3)).

Nesse caso, (E.12) se transforma em:

$$x_i = \frac{p_i^{1/(\rho-1)} I}{\sum_j p_j^{\rho/(\rho-1)}} \quad (\text{E.13})$$

O cálculo das demandas de consumidores neste trabalho utilizará esta fórmula, uma vez que, por hipótese, os consumidores gastam (preferem gastar) toda a renda. São dados os preços dos bens (ou cestas) e o saldo em caixa destinado ao consumo ( $I$ ), e obtidas as quantidades dos bens (ou cestas) demandadas ( $x_i$ ).



## F Compensação do Sistema de Pagamentos

No modelo desenvolvido neste trabalho, o sistema de pagamentos atua ao final de cada período executando transferências financeiras geradas pelas operações de firmas, de bancos e do grupo de trabalhadores / consumidores. O conjunto dessas transferências possui as seguintes características básicas: /par

- Apresenta redes heterogêneas, inclusive com ciclos.
- Apresenta pagamentos cujo montante só é conhecido depois que o valor de outros é calculado, ou seja, o valor do pagamento é condicional à realização de outro.

A última característica é motivada pela estrutura do sistema financeiro: como as firmas são correntistas de bancos, transferências financeiras entre firmas correntistas de bancos diferentes geram transferências entre esses bancos; se a firma pagadora entrar em default e pagar um valor reduzido, essa redução deve se refletir no valor da transferência entre os bancos das duas firmas. Da mesma forma, se um banco entrar em default, os pagamentos devidos pelas firmas correntistas dele são reduzidos. Na figura F.1 a seguir, a firma F1 é correntista do banco B1 e a firma F2 é correntista do banco B2.

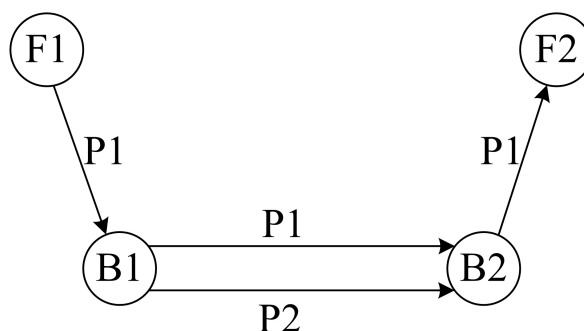


Figura F.1: Pagamentos Interbancários

A firma F1 deve pagar  $P1$  para a firma F2, e o banco B1 deve pagar  $P1+P2$  para o banco B2. Se a firma F1 só puder pagar  $\alpha P1$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), a transferência entre B1 e B2 será  $\alpha P1+P2$ ; se o banco B1 só puder pagar  $\beta(P1+P2)$ , ( $0 \leq \beta \leq 1$ ), a transferência efetivada entre F1 e F2 será  $\beta P1$ . Nesse caso, o valor pago pela firma devedora e não recebido pela credora devido ao default do banco da firma pagadora será uma perda relacionada ao default do banco.

O método de compensação do sistema financeiro a ser utilizado neste trabalho é uma extensão do desenvolvido por Eisenberg e Noe (2001) para tratar liquidação em redes heterogêneas envolvendo ciclos. Esse método tem sido utilizado na literatura de investigação de risco sistêmico, por exemplo, em Elsinger et al. (2006), Jimenez e Mencia (2009) e Alessandri et al. (2009).

Neste trabalho, o método de Eisenberg e Noe (2001) é estendido para tratar a compensação de dois sistemas de pagamentos que atuam conjuntamente na realização de parte de seus pagamentos.

Inicialmente, será apresentado o método de Eisenberg e Noe (2001), que define um algoritmo de compensação de sistemas financeiros. Em seguida, esse método será estendido para o tratamento do sistema bancário no qual parte de seus pagamentos é determinada por pagamentos das firmas e de um sistema de firmas no qual uma parte dos pagamentos é determinada por pagamentos dos bancos.

Por fim, será feita uma extensão no método para incluir no tratamento dado ao sistema bancário a necessidade de manutenção de requerimento de reservas bancárias.

## **F.1 Compensação de um Sistema de Pagamentos - Eisenberg e Noe (2001)**

A seguir, é apresentado o algoritmo de compensação de sistemas de pagamentos de Eisenberg e Noe (2001). Esse algoritmo permite o cálculo do vetor de pagamentos dos agentes participantes de um sistema financeiro interligado, através de um processo simples e tratável, com base nestas hipóteses:

- Dívida limitada: o total pago por um agente não excede o que ele possui (sua dotação inicial somada ao valor recebido).
- Prioridade dos credores sobre acionistas: os valores devidos devem ser pagos na sua totalidade. Se o agente não dispuser de recursos suficientes para o pagamento integral, deverá pagar os credores utilizando todos os seus recursos.
- Obrigatoriedade de pagamento imediato: um agente é obrigado a usar imediatamente todos os recursos de que dispõe para o pagamento de suas dívidas. Não lhe é permitido reter ou atrasar um pagamento.
- Pagamentos proporcionais: os credores são pagos de forma proporcional ao valor da dívida.

Considere-se um sistema financeiro com  $N$  agentes, que podem possuir dívidas para com quaisquer outros agentes do sistema. Essas dívidas são representadas pela matriz  $\mathbf{L}_{[N \times N]}$ , na qual o elemento  $L_{i,j}$  representa a dívida do agente  $i$  para com o agente  $j$ . Cada agente  $i$  possui uma dotação (saldo) inicial  $e_i$ .

O vetor de dívidas totais de cada agente para com os demais é dado por:

$$d_i = \sum_j L_{i,j} \quad (\text{F.1})$$

Normaliza-se a matriz de dívidas dos agentes aos demais com relação à dívida total de cada agente:

$$\Pi_{i,j} = L_{i,j}/d_i \quad \text{se} \quad d_i > 0 \quad , \text{ e} \quad \Pi_{i,j} = 0 \quad \text{caso contrário.} \quad (\text{F.2})$$

Com esses elementos, define-se um sistema financeiro como sendo a tripla  $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ , em que  $\mathbf{\Pi}$  é a matriz de dívidas relativas,  $\mathbf{d}$  é um vetor de dívidas e  $\mathbf{e}$  é um vetor de dotações iniciais.

O vetor de pagamentos para o sistema financeiro  $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$  é um vetor  $p^* \in [0, \mathbf{d}]$  que atende às seguintes condições, estabelecidas pelas hipóteses assumidas:

a) Dívida limitada: para cada agente  $i$ :

$$p_i^* \leq \sum_j \Pi_{j,i} p_j^* + e_i \quad (\text{F.3})$$

b) Prioridade absoluta dos credores sobre os acionistas. Se o agente possuir recursos para o pagamento integral da sua dívida, esta deve ser paga integralmente:

$$p_i^* = d_i \quad (\text{F.4})$$

Caso contrário, deve utilizar todos os seus recursos no pagamento (valores recebidos + dotação inicial):

$$p_i^* = \sum_j \Pi_{j,i} p_j^* + e_i \quad (\text{F.5})$$

c) Pagamentos proporcionais: os valores pagos pelos agentes  $i$  a seus credores são proporcionais às dívidas iniciais:

$$p_{i,j} = \Pi_{i,j} p_i^* \quad (\text{F.6})$$

As condições a e b a serem atendidas pelo vetor de pagamentos podem ser sintetizadas na seguinte condição<sup>1</sup>:

$$p_i^* = \min \left( \sum_j \Pi_{j,i} p_j^* + e_i, d_i \right) \quad (\text{F.7})$$

Essa condição é obtida no ponto fixo do mapa:

---

<sup>1</sup>  $\min(x, y) = (\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_n, y_n))$

$$\begin{aligned}\Phi(\cdot; \mathbf{\Pi}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) &: [\mathbf{0}, \mathbf{d}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{d}] \\ \Phi(\mathbf{p}; \mathbf{\Pi}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) &\equiv \min(\mathbf{\Pi}^T \mathbf{p} + \mathbf{e}, \mathbf{d})\end{aligned}\tag{F.8}$$

Eisenberg e Noe (2001) afirmam que:

- a) Existe um conjunto não-vazio de pontos fixos desse mapa, ou seja, existe pelo menos um vetor de pagamentos  $\mathbf{p}^*$  para um dado sistema financeiro  $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{d}, \mathbf{e})^2$ ;
- b) Se o sistema financeiro for regular<sup>3</sup>, esse vetor é único;
- c) Se uma dada função-objetivo  $f: [\mathbf{0}, \mathbf{d}] \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente crescente, qualquer solução do problema de otimização  $\mathcal{P}$ , enunciado a seguir, é um vetor de pagamentos para o sistema financeiro  $(\mathbf{\Pi}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbf{\Pi}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, f): & \max_{\mathbf{p} \in [\mathbf{0}, \mathbf{d}]} f(\mathbf{p}) \\ \text{s. a.} & \quad \mathbf{p} \leq \mathbf{\Pi}^T + \mathbf{e}\end{aligned}\tag{F.9}$$

Por fim, podem ser extraídas duas informações importantes do vetor de pagamentos:

- a) Os participantes insolventes do sistema:  $(p_i^* < d_i)$ , e:
- b) A taxa de recuperação, dada por:  $(K_i = p_i^*/d_i)$ .

## F.2 Compensação de dois Sistemas de Pagamentos Interdependentes

<sup>2</sup>Eisenberg e Noe (2001) apresentam uma métrica sob a qual o mapa  $\Phi$  é positivo, crescente, côncavo e não-expansivo. Como o mapa é positivo, tem-se  $\Phi(\mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$ , como é crescente e não-expansivo, valem  $\Phi(\mathbf{d}) \geq \mathbf{d}$  e  $\Phi(\mathbf{0}) \geq \mathbf{d}$ . Sob essas condições, o teorema do ponto fixo de Tarski (ver Zeidler (1986)), teorema 11.E) garante que o mapa  $\Phi$  possui pelo menos um ponto fixo.

<sup>3</sup>Eisenberg e Noe (2001) definem um sistema financeiro regular como aquele em que toda órbita de risco  $o(i)$  dos agentes participantes  $i$  é um *surplus set*. Órbita de risco de um agente é o conjunto de agentes credores dele, direta ou indiretamente (ou seja, credor de algum credor direto ou indireto). *Surplus set* é um conjunto de agentes no qual nenhum deles é devedor de agente externo ao conjunto e que possui pelo menos um agente com dotação inicial estritamente positiva.

### F.2.1 Abordagem Inicial

Nesta seção, o método de Eisenberg e Noe (2001) é estendido para tratar a compensação de dois sistemas de pagamentos interdependentes que atuam conjuntamente na realização de parte de seus pagamentos. A extensão é feita no contexto das necessidades de compensação do modelo desenvolvido neste trabalho, ilustradas a seguir.

Suponha-se que se deseje calcular os vetores de pagamentos do sistema apresentado na figura F.2: Esse sistema representa os pagamentos entre bancos motivados por opera-

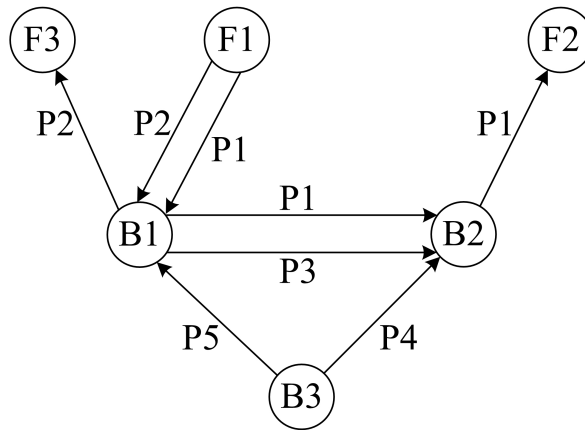


Figura F.2: Sistema de pagamentos com firmas e bancos

ções de firmas correntistas e por operações dos bancos depositários dessas firmas. Neste modelo, as firmas depositam todos os seus haveres financeiros nos bancos e dependem de serviços bancários para a realização de pagamentos e recebimentos. Apesar dos pagamentos serem operacionalizados pelos bancos, é conveniente que sejam separados por origem, como será visto adiante. A figura F.3 apresenta o desmembramento adotado neste trabalho. O sistema de pagamentos original é desmembrado em um subsistema com os pagamentos associados a operações envolvendo firmas e outro com os pagamentos envolvendo bancos: Se F1 entrar em default, seus pagamentos às firmas F2 e F3 terão seu valor

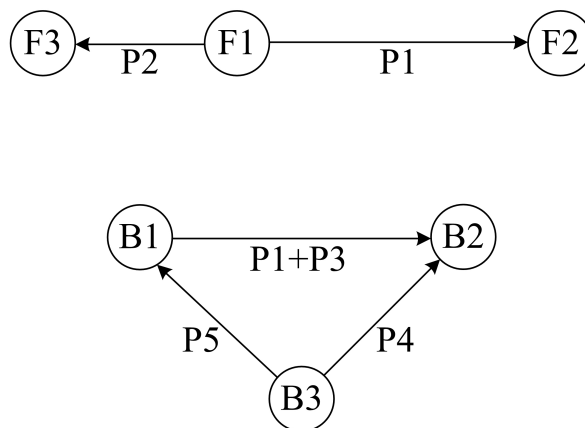


Figura F.3: Subsistema de firmas (acima) e subsistema de bancos (abaixo)

reduzido, afetando as transferências entre B1 e B2. Em especial, a alteração no valor de P1 afeta a transferência entre os bancos B1 e B2, enquanto a que ocorre no valor de P2 não afeta transferências entre bancos, pois F1 e F3 são correntistas do mesmo banco - o pagamento se reflete apenas no saldo das contas de depósitos que elas mantêm no banco B1.

Se B1 entrar em default, o valor dos pagamentos P1 e P3 será afetado, afetando diretamente o banco B2. No entanto, a redução em P1 afeta o pagamento entre as firmas F1 e F2. Possíveis reduções nos valores dos pagamentos P5 e P4 não afetam automaticamente os pagamentos entre as firmas.

A compensação do sistema inteiro pelos bancos requer que, inicialmente, eles avaliem a capacidade de pagamento das firmas para determinar o valor das transferências financeiras delas (pagamento integral ou parcial e proporcional das dívidas) e do impacto que terão no valor das transferências financeiras deles. Feita essa avaliação, os bancos avaliam a sua própria capacidade de pagamento para então realizar a compensação. Neste caso, como no caso do algoritmo de Eisenberg e Noe (2001), procura-se calcular os vetores de pagamento dos subsistemas de firmas e de bancos por meio da determinação do ponto fixo dos mapas associados à compensação dos dois subsistemas. Esses mapas relacionam, para todos os agentes, o que eles tentam pagar, limitados superiormente à dívida deles, ao que conseguem pagar, por meio do cálculo do que cada agente pode pagar depois de ter recebido os pagamentos dos demais agentes. No ponto fixo, os pagamentos realizados pelos agentes são tais que cada agente ou salda as suas dívidas ou, quando isto não é possível, reparte todo o valor de que dispõe proporcionalmente entre seus credores, dados os recebimentos dos pagamentos dos demais.

A determinação desse ponto fixo é feita de forma iterativa. Calcula-se inicialmente o vetor de pagamentos do subsistema de firmas; a partir dele, calcula-se o vetor de pagamentos do subsistema de bancos, a partir do qual se recalcula o vetor de pagamentos do subsistema de firmas, e assim sucessivamente. Esse processo gera uma seqüência convergente de vetores de pagamento dos subsistemas de firmas e de bancos. Na próxima seção, é apresentada a formulação utilizada nesse cálculo.

## **F.2.2 Formulação do Processo de Compensação**

A formulação do sistema de pagamentos utiliza as características do sistema de pagamentos definidas a seguir.

O sistema de pagamentos a ser submetido ao processo de compensação possui  $NI + NB + 2$  agentes, sendo  $NI$  firmas,  $NB$  bancos, o grupo de trabalhadores / consumidores e o governo.

Esse sistema é desmembrado em 2 subsistemas conectados: o subsistema de firmas, representando os pagamentos originados das operações que envolvem firmas e os demais



agentes, e o subsistema de bancos, representando os pagamentos entre bancos, e os pagamentos entre bancos e os demais agentes (grupo de trabalhadores / consumidores e governo).

Esses sistemas são caracterizados da seguinte forma:

a) Subsistema de firmas

Possui  $NI + NB + 2$  agentes, representando  $NI$  firmas,  $NB$  bancos, o grupo de trabalhadores / consumidores, e o governo, nesta ordem. A estrutura de dívidas é dada pela matriz  $\mathbf{LF}_{[NI+NB+2 \times NI+NB+2]}$ , na qual o elemento  $LF_{i,j}$  representa a dívida do agente  $i$  para o agente  $j$ . Essa dívida é separada em duas componentes:

$$LF_{i,j} = LFNF_{i,j} + LFF_{i,j} \quad (\text{F.10})$$

$LFNF_{i,j}$  representa os pagamentos do subsistema que não são associados a transferências interbancárias. São eles: pagamentos de empréstimos comerciais (principal e juros) concedidos por firma correntista do mesmo banco que a firma devedora e pagamentos de juros e amortizações de empréstimos bancários obtidos junto ao banco<sup>4</sup>.

$LFF_{i,j}$  representa os pagamentos associados a transferências interbancárias. São eles: pagamentos de empréstimos comerciais (principal e juros) concedidos por firma correntista de banco diferente da firma devedora, pagamento de salários, recebimento de pagamento de vendas a consumidores, pagamento de impostos e recebimento de pagamento de vendas ao governo.

O saldo inicial de cada participante é dado por:

$$\mathbf{EF}_{[NI+NB+2 \times 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{FC}_{1 \dots NI, t} \\ \mathbf{0}_{[NB \times 1]} \\ FCW_t \\ FCG_t \end{bmatrix} \quad (\text{F.11})$$

No caso de firmas, a dotação inicial considerada é o saldo em caixa. A verificação do patrimônio líquido da firma é realizada no encerramento contábil do período. Se ele não for positivo, a firma será considerada em default. No caso dos bancos, assume-se saldo inicial zero, uma vez que, no subsistema de firmas, eles não realizam nenhum pagamento.

---

<sup>4</sup>O pagamento do banco à firma, referente à concessão do empréstimo, é feito antes da compensação, no momento da concessão do empréstimo. Isso é feito para simplificar o processo de cálculo, uma vez que a concessão de um empréstimo bancário a um correntista obedece a regras distintas das seguidas na compensação do subsistema de firmas, pois é uma operação contábil (não requer que o banco tenha todo o valor emprestado em caixa), sendo necessárias as verificações de conformidade aos requerimentos de capital e de reservas bancárias, que são realizadas no momento da concessão do empréstimo.

b) Subsistema de bancos Possui  $NB + 2$  agentes representando os  $NB$  bancos, o grupo de trabalhadores / consumidores e o governo, nesta ordem. A estrutura das dívidas desse subsistema é dada pela matriz  $\mathbf{LB}_{[NB+2 \times NB+2]}$  na qual o elemento  $LB_{b,c}$  representa a dívida do agente  $b$  para o agente  $c$ , decomposta da seguinte forma:

$$LB_{b,c} = LBNF_{b,c} + LBF_{b,c} \quad (\text{F.12})$$

$LBNF_{b,c}$  representa os pagamentos do sistema não-associados a operações que envolvem firmas. São desse tipo todas as transferências financeiras do mercado de empréstimos interbancários.

$LBF_{b,c}$  representa os pagamentos entre bancos (ou entre um banco e o grupo de trabalhadores / consumidores ou governo) associados a operações envolvendo firmas (pagamento de crédito comercial entre firmas correntistas de bancos diferentes e pagamentos de salários e recebimentos por vendas). Essa matriz é a agregação da matriz  $LFF_{i,j}$ , dada por:

$$LBF_{b,c} = \sum_i \sum_j LFF_{i,j} \quad (\text{F.13})$$

$i \in \{\mathbf{B}_b, \text{Famílias, Governo}\}; j \in \{\mathbf{B}_c, \text{Famílias, Governo}\}$

Essa agregação pode ser feita por meio de um produto de matrizes:

$$\mathbf{LBF} = \mathbf{M} \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T \quad (\text{F.14})$$

A matriz de relacionamento entre os agentes da rede de firmas e os agentes da rede de bancos  $\mathbf{M}$  é dada, em cada período, por:

$$\mathbf{M}_{[NB+2 \times NI+NB+2]} = (M_{b,i}) \quad (\text{F.15})$$

Com:

$$M_{b,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é firma correntista do banco } b \text{ ou se } i = b \text{ (banco,} \\ & \text{famílias ou governo)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$b$  é um agente do subsistema de bancos e  $i$ , um agente do subsistema de firmas. Cada coluna de  $\mathbf{M}$  apresenta um elemento igual a 1 e os demais iguais a zero.

O saldo inicial dos participantes é dado por:

$$\mathbf{EB}_{[NB+2 \times 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{FCB}_{1 \dots NB, t} \\ FCW_t \\ FCG_t \end{bmatrix} \quad (\text{F.16})$$

Da mesma forma que no caso das firmas no subsistema de firmas, a dotação inicial considerada é o saldo em caixa. As verificações do patrimônio líquido do banco, bem como da adequação do nível de reservas bancárias são realizadas no encerramento contábil do período. O nível adequado de reservas bancárias deve ser restaurado se tiver ocorrido violação do requerimento.

Segundo Eisenberg e Noe (2001), são definidos, para o subsistema de firmas:

Dívida total dos agentes:

$$DF_i = \sum_j LF_{i,j} \quad (\text{F.17})$$

Para o subsistema de bancos:

Dívida total dos agentes:

$$DB_b = \sum_c LB_{b,c} \quad (\text{F.18})$$

Adicionalmente, são definidos:

Vetor de taxas de recuperação da dívida dos agentes  $i$  (relação entre os pagamentos efetuados pelos agentes  $i$  ( $PF_i$ ) e a dívida total deles ( $DF_i$ ))

$$KF_i = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ PF_i/DF_i & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.19})$$

Matriz de relacionamento entre os agentes do sistema de firmas e os do sistema de bancos ( $\mathbf{M}_{[NB+2 \times NI+NB+2]}$ ):

$$M_{b,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é firma correntista do banco } b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.20})$$

Vetor de taxas de recuperação da dívida dos agentes  $b$  (relação entre os pagamentos efetuados pelos agentes  $b$  ( $PB_b$ ) e a dívida total deles ( $DB_b$ ))

$$KB_b = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b = 0 \\ PB_b/DB_b & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.21})$$

A matriz de pagamentos interbancários associados a operações envolvendo firmas, considerando as restrições de pagamento experimentadas pelas firmas quando não podem

pagar integralmente suas dívidas, é dada por:

$$\mathbf{LBF} = \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T \quad (\text{F.22})$$

Nessa expressão,  $\text{diag}(\mathbf{KF})$  é a matriz diagonal formada a partir do vetor  $\mathbf{KF}$ .

A matriz  $\mathbf{LBF}$  é formada a partir dos pagamentos de dívidas que as firmas são capazes de fazer. A matriz de pagamentos entre firmas, associados a pagamentos interbancários, é ajustada levando em conta os pagamentos que os bancos são capazes de fazer, o que é expresso pelo vetor de taxas de recuperação da dívida dos agentes do subsistema de bancos:

$$\mathbf{LFF}_B = \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KB}) \mathbf{LFF} \quad (\text{F.23})$$

A compensação do sistema de pagamentos requer que os dois subsistemas compensem, dados os mesmos vetores de pagamentos de firmas e bancos. O subsistema de firmas deve compensar, respeitadas as restrições do subsistema de bancos e o subsistema de bancos deve compensar, respeitadas as restrições do subsistema de firmas. A compensação simultânea dos subsistemas é conseguida por meio da obtenção dos vetores de taxas de recuperação de compensação dos subsistemas  $\mathbf{KF}^*$  e  $\mathbf{KB}^*$ . Nessa notação, o símbolo (\*) indica o valor do vetor ou matriz no ponto fixo.

A compensação do subsistema de firmas requer, para cada firma  $i$ :

$$KF_i^* = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ \min(RF_i^* + EF_i, DF_i) / DF_i & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.24})$$

Com:

$$RF_i^* = [(\text{diag}(\mathbf{KF}^*) \mathbf{LFF} + \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KB}^* \cdot \mathbf{KF}^*) \mathbf{LFF})^T \mathbf{1}]_i \quad (\text{F.25})$$

Por sua vez, a compensação do sistema de bancos requer:

$$KB_b^* = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b^* = 0 \\ \min(RB_b^* + EB_b, DB_b^*) / DB_b^* & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.26})$$

Com:

$$\mathbf{LB}^* = \mathbf{LBNF} + \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{KF}^*) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T$$

$$DB_b^* = [\mathbf{LB}^* \mathbf{1}]_b$$

$$RB_b^* = [(\text{diag} \mathbf{KB}^* \mathbf{LB}^*)^T \mathbf{1}]_b$$

Os vetores de pagamentos dos agentes dos subsistemas de firmas e de bancos, obtidos dessa condição são:

$$\begin{aligned} \mathbf{PF}^* &= \text{diag}(\mathbf{KF}^*) \mathbf{DF}^* \\ \mathbf{PB}^* &= \text{diag}(\mathbf{KB}^*) \mathbf{DB}^* \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

A expressão  $\min(a, b)$  nas equações (F.24) e (F.26) significa:

$a$  é o montante dos recursos que podem ser usados no pagamento da dívida, ou seja, quanto o agente vai receber, consideradas as taxas de recuperação dos pagamentos dos agentes do outro sistema, somado à sua dotação inicial.

$b$  é a dívida a ser paga, considerando as taxas de recuperação dos pagamentos dos agentes do outro sistema<sup>5</sup>.

Dessa forma, a expressão  $\min(a, b)$  significa que os agentes do sistema pagam o mínimo entre o valor que possuem ( $a$ ) e o valor devido ( $b$ ). A divisão desse mínimo pelo valor ( $b$ ) fornece a taxa de recuperação dos agentes do subsistema.

Essas condições de compensação do sistema de pagamentos, formado pelos dois subsistemas, podem ser representadas pelo ponto fixo do seguinte mapa:

$$\Psi(\cdot, \cdot; \mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{EB}, \mathbf{M}): ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]) \rightarrow ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]),$$

Definido como:

$$\Psi(\mathbf{KF}, \mathbf{KB}; \boldsymbol{\theta}) \equiv (\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \boldsymbol{\theta}), \Psi_2(\mathbf{KB}; \Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta})),$$

Sendo  $\boldsymbol{\theta}$  o conjunto de parâmetros  $\{\mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{EB}, \mathbf{M}\}$ ,

$$\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \boldsymbol{\theta}): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}], \text{ dado por:}$$

---

<sup>5</sup>Aqui, é necessária uma explicação do motivo pelo qual as taxas de recuperação dos pagamentos dos agentes do outro sistema afeta o valor pago da dívida. Se estiver sendo feita a compensação do subsistema de firmas, caso um banco não consiga pagar integralmente suas dívidas, pagará todo o valor de que dispõe ( $a_b$ ). A hipótese de pagamento proporcional fará com que a taxa de recuperação  $KB_b$  das dívidas do banco  $b$ , dada por  $a_b/DB_b$ , seja usada como multiplicador de todos os pagamentos desse banco, e em particular, dos pagamentos das firmas correntistas devidos pelo banco, ou seja, o banco  $b$  pagará aos credores dessas firmas, correntistas do banco  $c$ , (via pagamento interbancário) o valor total de  $KB_b LB_{b,c}$ . Cada firma credora receberá um pagamento multiplicado por  $KB_b$ , portanto o valor pago pela firma devedora será este, por limitação do banco  $b$ . Disso resulta que o pagamento a ser feito pelas firmas  $i$  no subsistema de firmas passa a ser afetado por  $KB_b$ :  $LF_{i,j} = LFNF_{i,j} + KB_b LFF_{i,j}$ . Por outro lado, no caso em que se está fazendo a compensação do subsistema de bancos, uma redução na taxa de recuperação dos pagamentos das firmas reduz o valor das transferências interbancárias relacionadas aos pagamentos dessas firmas.

$$\Psi_{1,i}(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ \min(RF_i + EF_i, DF_i)/DF_i & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$\Psi_2(\mathbf{KB}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , dado por:

$$\Psi_{2,b}(\mathbf{KB}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b^* = 0 \\ \min(RB_b + EB_b, DB_b)/DB_b & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.28})$$

A compensação do sistema de pagamentos é obtida dos pontos fixos:

$$\begin{aligned} \mathbf{KF}^* &= \Psi_1(\mathbf{KF}^*; \mathbf{KB}^*, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{KB}^* &= \Psi_2(\mathbf{KB}^*; \mathbf{KF}^*, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

E os vetores de pagamentos são obtidos de (F.27).

### F.2.3 Existência, Unicidade e Otimalidade dos Vetores de Pagamento

As demonstrações da existência, unicidade e otimalidade do vetor de pagamentos que compensa o sistema financeiro, têm a finalidade de assegurar que:

- a) O processo de compensação sempre produz algum vetor de pagamentos bem-definido.
- b) O vetor de pagamentos é único, o que significa que não surgirão conflitos entre os agentes do sistema financeiro quanto à escolha de um vetor de pagamentos a partir de um conjunto com mais de uma alternativa.
- c) O processo de compensação faz as transferências de valor entre agentes da economia de forma eficiente<sup>6</sup>, ou seja, o vetor de pagamentos maximiza alguma avaliação de eficiência que atribua valor positivo aos pagamentos realizados por todos os nós.

---

<sup>6</sup>A intuição disso é a seguinte: adotemos, como ponto de partida o vetor de pagamentos calculado segundo o processo de Eisenberg e Noe (2001) e o valor da medida de eficiência do processo de compensação associada a ele. Suponhamos que se queira melhorar a medida de eficiência reduzindo-se os pagamentos realizados por alguns nós de baixa ponderação para aumentar os realizados por nós de maior peso (não é possível iniciar o processo aumentando o valor pago por algum nó, pois o valor pago em um vetor de pagamentos é o máximo possível para cada nó). Os pagamentos realizados pelos nós de maior peso não aumentarão, pois a redução de um pagamento por algum nó sempre reduz o recebimento de algum outro nó, e portanto, nunca será possível que outro nó aumente o valor pago. Dessa forma, o valor da medida de avaliação não poderá ser aumentado: o vetor de pagamentos otimiza a medida de eficiência do processo de compensação.

Para a demonstração da existência e unicidade das taxas de recuperação obtidas no ponto fixo do mapa associado ao processo de compensação do sistema de pagamentos, inicia-se pelos mapas dos subsistemas individuais.

Os mapas dos subsistemas de firmas e bancos serão inicialmente colocados na forma:

$\Psi(\cdot; \boldsymbol{\theta}): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_i(\mathbf{a}; \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{se } c_i = 0 \\ \min(b_i + [\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{a}]_i, 1) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.30})$$

em que  $\boldsymbol{\Pi}^T$  é uma matriz formada por  $\Pi_{i,j} \in [0, 1]$ , de tal forma que  $\sum_i \Pi_{i,j} \leq 1$ . Nesse mapa,  $\Psi_i(\mathbf{a}; \boldsymbol{\theta}) = 1$  se  $c_i = 0$ , significando que se o agente  $i$  não possui dívidas, sua taxa de recuperação é 1. Esse mapa pode ser simplificado<sup>7</sup> para:

$\Psi(\cdot; \boldsymbol{\theta}): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_i(\mathbf{a}; \boldsymbol{\theta}) = \Psi_i(\mathbf{a}) = \min(b_i + [\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{a}]_i, 1) \quad (\text{F.31})$$

Demonstradas a existência e unicidade para os subsistemas individuais, faz-se a generalização desses resultados para o sistema de pagamentos composto pelos subsistemas.

Essa forma é semelhante à adotada em Eisenberg e Noe (2001)<sup>8</sup>, e evidencia as características comuns aos mapas que são relevantes para as demonstrações.

O mapa associado ao subsistema de firmas é definido como em (F.24):

$$KF_i^* = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ \min(RF_i^* + EF_i, DF_i)/DF_i & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.32})$$

De (F.10) e (F.17), tem-se  $(\mathbf{LFF} + \mathbf{LFNF}) \mathbf{1} = \mathbf{DF}$ . Seguindo Eisenberg e Noe (2001), definem-se  $\boldsymbol{\Pi}_{FF} = (\Pi_{FF_{i,j}}) = LFF_{i,j}/DF_i$  e  $\boldsymbol{\Pi}_{FNF} = (\Pi_{FNF_{i,j}}) = LFNF_{i,j}/DF_i$ . A equação (F.24) pode ser reescrita utilizando-se essas definições, para se obter:

$$\mathbf{RF}./\mathbf{DF} = (\boldsymbol{\Pi}_{FNF} + \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KB}) \boldsymbol{\Pi}_{FF})^T \mathbf{KF} = \boldsymbol{\Pi}_F^T \mathbf{KF} \quad (\text{F.33})$$

<sup>7</sup>Essa simplificação pode ser feita se, para os agentes com  $c_i = 0$ , for atribuído  $\Pi_{i,j} = 1$  para  $j$  qualquer e diferente de  $i$ . Os demais elementos  $\Pi_{i,\cdot}$  devem ser iguais a zero. Isso não afeta os cálculos, pois, mesmo tendo  $\Psi_i = 1$ , o agente  $j$  recebe zero, pois a dívida total de  $i$ ,  $(c_i) = 0$ .

<sup>8</sup>Os mapas apresentados em Eisenberg e Noe (2001) se referem a vetores de pagamento; neste trabalho, o mapa é de taxas de recuperação.

e:

$$\Psi_{1,i}(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ \min(EF_i/DF_i + [(\boldsymbol{\Pi}_{FNF} + \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KB}) \boldsymbol{\Pi}_{FF})^T \mathbf{KF}]_i, 1) & \\ \text{caso contrário} & \end{cases} \quad (\text{F.34})$$

A partir da definição de  $\mathbf{M}$  em (F.15) e de  $\mathbf{KB} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , tem-se  $\mathbf{M}^T \mathbf{KB} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , o que significa que, se  $\mathbf{KB} < \mathbf{1}$ <sup>9</sup>, a soma das colunas de  $\boldsymbol{\Pi}_F^T$  pode ser inferior a 1.

O mapa associado ao subsistema de bancos é definido em (F.26):

$$KB_b^* = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b^* = 0 \\ \min(RB_b^* + EB_b, DB_b^*)/DB_b^* & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.35})$$

De (F.26), pode-se definir  $\boldsymbol{\Pi}_{B,b,c} = LB_{b,c}/DB_b$  e  $RB_b = [\boldsymbol{\Pi}_B^T \mathbf{KB}]_b$ , sendo

$$\mathbf{LB} = \mathbf{LBNF} + \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T \quad (\text{F.36})$$

Portanto, chega-se a:

$$\Psi_{2,b}(\mathbf{KB}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b = 0 \\ \min(EB_b/DB_b + [\boldsymbol{\Pi}_B^T \mathbf{KB}]_b, 1) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.37})$$

As colunas de  $\boldsymbol{\Pi}_B^T$  têm soma igual a 1, uma vez que  $DB_b = \sum_c LB_{b,c}$ , independentemente do valor de  $\mathbf{KF}$ . Isso ocorre porque um banco só é obrigado a pagar o que as firmas correntistas podem pagar, quando estas entram em default; assim, não surge pendência de recebimento do banco credor.

No caso do subsistema de firmas, se um banco entra em default, os pagamentos entre firmas e demais agentes do subsistema de firmas ficam prejudicados. O valor não-pago devido ao default do banco gera uma pendência de recebimento para o agente credor no subsistema de firmas, pois o valor a ser recebido por ele não muda como consequência do default.

O mapa associado à compensação do sistema todo fica definido como:

$$\Psi(\cdot, \cdot; \mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{EB}, \mathbf{M}): ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]) \rightarrow ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]),$$

Definido como:

$$\Psi(\mathbf{KF}, \mathbf{KB}; \boldsymbol{\theta}) \equiv (\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \boldsymbol{\theta}), \Psi_2(\mathbf{KB}; \Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta})),$$

---

<sup>9</sup>Todas as coordenadas menores ou iguais a 1, com pelo menos uma desigualdade estrita.



Sendo  $\theta$  o conjunto de parâmetros  $\{\mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{EB}, \mathbf{M}\}$ ,

$\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \theta): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_{1,i}(\mathbf{KF}; \mathbf{KB}, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ \min(EF_i/DF_i + [(\mathbf{\Pi}_{FNF} + \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KB}) \mathbf{\Pi}_{FF})^T \mathbf{KF}]_i, 1) & \\ \text{caso contrário} & \end{cases}$$

e

$\Psi_2(\mathbf{KB}; \mathbf{KF}, \theta): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_{2,b}(\mathbf{KB}; \mathbf{KF}, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b^* = 0 \\ \min(EB_b/DB_b + [\mathbf{\Pi}_B^T \mathbf{KB}]_b, 1) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.38})$$

Partindo dessas definições, serão demonstradas a existência e a unicidade dos pontos fixos associados aos mapas  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , estendendo-se, em seguida, o resultado obtido para o mapa  $\Psi$ , no anexo G.

#### F.2.4 Algoritmo de Compensação de dois Sistemas de Pagamento Interdependentes

A compensação de um sistema de pagamentos pode ser implementada pelo seguinte algoritmo:

Dados:

Subsistema de firmas:  $\mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{EF}, \mathbf{M}$

Subsistema de bancos:  $\mathbf{LBNF}, \mathbf{EB}$

Serão buscados, mediante um processo iterativo, vetores de taxas de recuperação  $\mathbf{KF}$  e  $\mathbf{KB}$  que compensem os dois subsistemas, levando os mapas  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  a um ponto fixo. Deve-se ter  $\mathbf{KF} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$  e  $\mathbf{KB} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ .

Pode-se iniciar o processo com os valores  $\mathbf{KF}^0 = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{KB}^0 = \mathbf{0}$ , ou  $\mathbf{KF}^0 = \mathbf{1}$  e  $\mathbf{KB}^0 = \mathbf{1}$ , com os mesmos resultados. Eisenberg e Noe (2001) iniciam o cálculo supondo que os agentes pagam integralmente suas dívidas, ou seja,  $\mathbf{KF}^0 = \mathbf{1}$  e  $\mathbf{KB}^0 = \mathbf{1}$ . Para a iteração  $k$ , os cálculos a serem feitos são:

Subsistema de firmas:

$$RF^k = ((\text{diag}(\mathbf{KF}^{k-1}) \mathbf{LFNF} + \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KB}^{k-1} \cdot \mathbf{KF}^{k-1}) \mathbf{LFF}))^T \mathbf{1} \quad (\text{F.39})$$

Para cada firma  $i$ :

$$KF_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i^0 = 0 \\ \min(RF_i^k + EF_i, DF_i^0)/DF_i^0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.40})$$

Subsistema de bancos:

Para cada banco  $b$ :

$$RB_b^k = [(\text{diag } \mathbf{KB}^{k-1} \mathbf{LB}^{k-1})^T \mathbf{1}]_b \quad (\text{F.41})$$

Os valores recebidos pelos bancos são calculados em (F.41), utilizando-se a matriz de dívidas calculada com os pagamentos das firmas da iteração anterior (definidos pelas taxas de recuperação  $\mathbf{KF}^{k-1}$ ), como no caso dos recebimentos das firmas em (F.39). Isso é feito para que os valores recebidos pelos bancos sejam coerentes com os recebidos pelas firmas.

Em cada iteração, os subsistemas de firmas e bancos partem de recebimentos calculados com os mesmos valores pagos pelas firmas. As firmas calculam, inicialmente, a parcela da dívida que possuem, a ser paga. Os bancos, por sua vez, partem do valor que as firmas podem pagar e calculam, desse valor, a parcela que pode ser paga. Os valores pagos pelas firmas, calculados com as duas restrições, são utilizados no cálculo dos valores recebidos pelos agentes credores, nos subsistemas de firmas e de bancos, na iteração seguinte.

$$\mathbf{LB}^k = \mathbf{LBNF} + \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{KF}^k) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T \quad (\text{F.42})$$

$$DB_b^k = [\mathbf{LB}^k \mathbf{1}]_b \quad (\text{F.43})$$

$$KB_b^k = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b^k = 0 \\ \min(RB_b^k + EB_b, DB_b^k)/DB_b^k & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.44})$$

Encerra-se o processo quando  $|\mathbf{KF}^k - \mathbf{KF}^{k-1}| \leq \varepsilon_F$  e  $|\mathbf{KB}^k - \mathbf{KB}^{k-1}| \leq \varepsilon_B$ . Os valores de  $\mathbf{KF}^k$  e  $\mathbf{KB}^k$  vão convergindo monotonicamente para os valores que possuem no ponto fixo,  $\mathbf{KF}^*$  e  $\mathbf{KB}^*$ , à medida que  $k$  aumenta. No ponto fixo, os valores de  $\mathbf{KF}^k$  e  $\mathbf{KB}^k$  e os valores pagos pelas firmas são invariantes com  $k$ .

Os vetores de pagamento obtidos são:

$$\mathbf{PF} = \text{diag}(\mathbf{KF}^k) \mathbf{DF}^0 \quad (\text{F.45})$$

$$\mathbf{PB} = \text{diag}(\mathbf{KB}^k) \mathbf{DB}^k$$

Diferentemente do processo de compensação proposto por Eisenberg e Noe (2001), no qual a variável de controle do mapa é a dívida paga pelos agentes (vetor de pagamento), neste

processo, as variáveis de controle são as taxas de recuperação das dívidas dos agentes dos dois subsistemas. Esta escolha foi feita levando-se em conta a facilidade dos cálculos dos valores pagos e recebidos nos dois subsistemas e não altera a essência dos cálculos, que confrontam o que cada agente possui com o que precisa pagar.

### F.3 Compensação de dois Sistemas de Pagamentos Interdependentes Impedindo Violações do Requerimento de Reservas Bancárias

#### F.3.1 Definições Iniciais

Nesta seção, é feita uma segunda extensão do método de Eisenberg e Noe (2001) que possibilita que se imponha aos bancos a manutenção de um valor mínimo de reservas compulsórias<sup>10</sup>. O atendimento ao requerimento de reservas, pelos bancos, é mais restritivo do que a exigência de os bancos terem recursos em caixa para os pagamentos, analisada na seção anterior. Isso possibilita que o subsistema de bancos definido naquela seção seja substituído por um subsistema de bancos transferindo reservas disponíveis, definido a seguir, resultando em um processo de compensação que não viola o requerimento de reservas.

Assume-se que, antes da compensação dos pagamentos, todos os bancos atendem ao requerimento de reservas compulsórias, de modo que basta verificar se, ao final do processo de compensação, esse critério continua sendo atendido pelos bancos. Se ele deixar de ser atendido por algum banco, inicia-se um cálculo da proporção dos pagamentos previstos a serem realizados sem que haja violação dos requerimentos de reservas.

O ponto de partida do processo de compensação é o cálculo do saldo inicial de reservas, dado por:

$$ER_b = FCB_{b,t} - \delta FDE_{b,t} \tag{F.46}$$

O requerimento de reservas para um banco é dado por uma fração  $\delta \in [0, 1]$  do valor dos depósitos mantidos nele.

A movimentação das reservas acompanha a realização dos pagamentos de firmas e bancos; sendo assim, o cálculo do valor das reservas deve ser tal que, ao final do processo de compensação, seja possível obter o novo saldo de reservas a partir do saldo inicial e da movimentação.

No cálculo da movimentação das reservas, são levados em conta os fatores que afetam

---

<sup>10</sup>O produto dessa extensão é aplicável no contexto de uma economia com subsistemas de firmas e de bancos relacionados entre si como especificado neste trabalho ou no caso em que as transferências interbancárias que se originam em uma conta-corrente de um banco se destinam a uma corrente de outro banco e as que não se originam em conta-corrente também não se destinam a uma.

o caixa do banco e o total de depósitos em conta-corrente mantidos por ele, ou seja, os pagamentos e recebimentos tanto das firmas quanto do banco.

Os pagamentos realizados pelas firmas são dados por (F.10), enquanto os realizados pelos bancos são dados por (F.12). Esses valores são relacionados entre si: a parcela dos pagamentos das firmas associados a transferências entre bancos ou de/para fora do banco determina parte dos pagamentos realizados nos sistema de bancos de acordo com (F.14). Essa interdependência entre os pagamentos realizados por firmas e bancos resulta em cálculos de valores de reservas movimentadas diferentes, de acordo com as características da transferência realizada nos subsistemas de firmas e de bancos:

- a) Transferências de firmas que não originam movimentações de caixa do banco (**LFNF**) afetam somente os saldos em conta-corrente das firmas. São elas: transferências entre firmas correntistas do mesmo banco, que não afetam o total de depósitos do banco (**FDE**) e pagamentos de juros e amortizações de empréstimos bancários das firmas aos bancos dos quais são correntistas (nota: a obtenção de empréstimo bancário ou acréscimo do valor emprestado é tratada antes do cálculo da compensação, criando parte da demanda por empréstimos interbancários). Para simplificar os cálculos, os pagamentos entre firmas correntistas do mesmo banco são desconsiderados, dado o seu efeito nulo no total de depósitos do banco. Os demais pagamentos originam a variação de reservas do banco  $b$  dada por  $\delta \cdot (\text{Valor do pagamento da firma ao banco})$ , pois o caixa do banco não é afetado.
- b) Transferências de firmas que originam movimentações de caixa do(s) banco(s) a elas relacionados (**LBF**).  $LBF_{b,c}$  são os pagamentos originados por operações envolvendo firmas, que podem ser transferências entre firmas ou entre firmas e o grupo de trabalhadores / consumidores (ou entre firmas e o governo). No primeiro caso, as transferências são realizadas da conta-corrente mantida pela firma  $i$  no banco  $b$  para a conta-corrente da firma  $j$  mantida no banco  $c$  - nesse caso, o valor das reservas disponíveis transferidas do banco  $b$  para o banco  $c$  são  $(1 - \delta) \cdot (\text{Valor da transferência})_{b,c}$ . O valor dos depósitos transferidos sai do caixa e o valor do requerimento de reservas é reduzido em  $\delta \cdot (\text{Valor dos depósitos transferidos})$ , resultando em um valor de transferência de reservas disponíveis proporcional ao valor da transferência pelo fator  $(1 - \delta)$ . No segundo caso, as transferências envolvem a conta-corrente de uma firma e o grupo de trabalhadores / consumidores ou governo, que não são correntistas de banco. Para esses agentes, não é feito controle do nível de reservas, somente é necessário que possuam em caixa os recursos necessários aos pagamentos. Dessa maneira, não seria introduzida distorção caso fosse assumido que todos os recursos deles estivessem depositados em conta-corrente de um banco não-participante do sistema, criado somente para manter esses depósitos, pois, tanto o saldo inicial quanto os valores recebidos e os pagos estariam multiplicados pelo

mesmo fator  $(1-\delta)$ , de modo que seria possível verificar a disponibilidade de recursos para pagamento de forma compatível com o controle de reservas.

- c) Transferências entre bancos não-associadas a pagamentos entre firmas (**LBNF**). Nessa situação, estão as transferências referentes a operações interbancárias entre os bancos  $b$  e  $c$ . Nesses casos, o valor transferido sai do caixa de um banco para o caixa do outro, sem afetar valores em depósito, de modo que o valor transferido de reservas disponíveis é o valor da transferência entre os bancos.
- d) Transferências registradas em **LBF** não-realizadas completamente pelos bancos devido a default bancário: neste modelo está se considerando que o valor pago pela firma devedora não é completamente recebido pela firma (ou agente não-correntista) credora; a parcela não-recebida devido ao default do banco é considerada perda dessa credora. Essa parcela não-paga pelo banco sai da conta-corrente da firma, mas não sai do caixa do banco e possui impacto nas reservas (aumento) dado por  $\delta \cdot (\text{Valor não-pago})$ .

### F.3.2 Detalhamento do Processo de Compensação

Partindo dessas definições, são apresentados os cálculos para que a compensação do subsistema de bancos atenda ao critério de não-violação do nível de reservas no processo de compensação do subsistema de bancos. A compensação do sistema de pagamentos é feita como no caso padrão apresentado na seção F.2.2, mas substituindo o subsistema de bancos pelo que será proposto a seguir.

O saldo inicial de reservas de cada banco é dado por:

$$\mathbf{ER}_{[NB+2 \times 1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{FCB}_{1 \dots NB, t} - \delta \mathbf{FDE}_{1 \dots NB, t} \\ (1 - \delta) \mathbf{FCW}_t \\ (1 - \delta) \mathbf{FCG}_t \end{bmatrix} \quad (\text{F.47})$$

A movimentação de reservas entre os integrantes do subsistema de bancos é calculada a seguir. Parte-se da matriz de "dívidas" referente às movimentações de reservas entre os agentes, seguindo a estrutura do processo de compensação adotada por Eisenberg e Noe (2001):

$$\mathbf{LBR} = \mathbf{LBNF} + (1 - \delta) \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T \quad (\text{F.48})$$

As reservas "pagas", ou seja, as reduções no saldo de reservas de cada participante, são obtidas de:

$$\mathbf{PBR} = (\text{diag}(\mathbf{KBR}) \mathbf{LBR}) \mathbf{1} \quad (\text{F.49})$$

As reservas "recebidas" são calculadas somando-se os valores recebidos dos pagamentos de reservas definidos acima aos valores recebidos referentes aos pagamentos das firmas associadas a crédito bancário e os referentes aos pagamentos efetuados pelas firmas e não-efetuados pelos bancos de forma integral devido a default deles.

Os valores de reservas recebidos pela realização de pagamentos referentes a juros e amortizações de crédito bancário pelas firmas são dados por:

$$\mathbf{RCBR} = \delta(\text{diag}(\mathbf{KF}_{[1\dots NI]}) \mathbf{LFNF}_{[1\dots NI \times 1\dots NI+NB+2]})^T \mathbf{1} \quad (\text{F.50})$$

Os valores de reservas recebidos pelos bancos em default quando impossibilitados de realizar pagamentos de firmas correntistas na sua totalidade são dados por:

$$\mathbf{RDBR} = \delta(\text{diag}(\mathbf{1} - \mathbf{KBR}) \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T \mathbf{1} \quad (\text{F.51})$$

E os valores recebidos devidos aos pagamentos de reservas realizados pelos agentes do subsistema de bancos são obtidos de:

$$\mathbf{RBRA} = (\text{diag}(\mathbf{KBR}) \mathbf{LBR})^T \mathbf{1} \quad (\text{F.52})$$

O total recebido de reservas é dado por:

$$\mathbf{RBR} = \mathbf{RBRA} + \mathbf{RCBR} + \mathbf{RDBR} \quad (\text{F.53})$$

O valor de reservas a ser movimentado é obtido do mínimo entre o valor da "dívida" e o valor de reservas disponíveis após os recebimentos:

$$PBR_b = \min(ER_b + RBR_b, DBR_b) \quad (\text{F.54})$$

Com:  $DBR_b = \mathbf{LBR}_b \cdot \mathbf{1}$

Portanto, o vetor de taxas de recuperação de pagamentos bancários que resulta da imposição da não-violação do requerimento de reservas na compensação de um sistema bancário é dado por:

$$KBR_b = \begin{cases} 1 & \text{se } DBR_b = 0 \\ \min(ER_b + RBR_b, DBR_b) / DBR_b & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.55})$$

Com:  $0 \leq KBR \leq 1$

$KBR_b$  é uma restrição aos pagamentos realizados pelo banco  $b$  a ser seguida para que não haja violação do requerimento de reservas bancárias e pode ser utilizada para restringir os pagamentos realizados por esse banco, uma vez que a multiplicação do total pago por um valor  $k$  implica na multiplicação do valor de reservas pagas pelo mesmo número, desde que mantida a proporcionalidade dos pagamentos que compõem esse total.

No entanto, a definição de  $KBR_b$  acima apresenta um inconveniente: a redução de

$KBR_b$  pode levar a um aumento do valor recebido  $RBR_b$ , o que viola a não-expansividade do mapa  $\Psi_3$ , (definido adiante) e impede que se garanta a existência de um ponto fixo que forneça o vetor de pagamento  $PBR_b$ . Na prática, essa situação leva a soluções falhas, isto é, é possível se obter  $KBR_b = 1$  partindo de  $KBR_b < 1$  em uma iteração de cálculo resultando na não-ocorrência de default por violação do nível de reservas na iteração seguinte, quando, na prática, a violação ocorre. Para evitar esse problema, é feito o seguinte.

Suponhamos que, para um dado banco  $b$ , o valor movimentado de reservas seja obtido de:

$$KBR_b DBR_b = \min(ER_b + RBR_b, DBR_b) \quad (F.56)$$

Ou:

$$KBR_b DBR_b = \min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + (1 - KBR_b)DBF_b, DBR_b) \quad (F.57)$$

Com:

$$KBR_b < 1 \text{ e } DBF_b = \delta[(\mathbf{M} \text{ diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T) \mathbf{1}]_b \quad (F.58)$$

Tem-se então:

$$KBR_b DBR_b = \min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + (1 - KBR_b)DBF_b, KBR_b DBR_b) \quad (F.59)$$

Somando  $KBR_b DBF_b$  aos dois lados da expressão:

$$KBR_b(DBR_b + DBF_b) = \min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b, KBR_b(DBR_b + DBF_b)) \quad (F.60)$$

Como  $KBR_b < 1$ :

$$\min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b, KBR_b(DBR_b + DBF_b)) = ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b \quad (F.61)$$

De onde:

$$KBR_b = (ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b)/(DBR_b + DBF_b) \quad (F.62)$$

Quando  $ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b \geq DBR_b + DBF_b$ , tem-se  $KBR_b = 1$ , pois o valor das reservas pagas não pode exceder o valor devido (associado às transferências devidas). Portanto, chega-se a:

$$KBR_b = \min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b, DBR_b + DBF_b)/ (DBR_b + DBF_b) \quad (F.63)$$

Dessa forma, o vetor de taxas de recuperação de pagamentos bancários que resulta da imposição da não-violação do requerimento de reservas na compensação de um sistema bancário é dado por:

$$KBR_b = \begin{cases} 1 & \text{se } DBR_b + DBF_b = 0 \\ \min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b, DBR_b + DBF_b) / (DBR_b + DBF_b) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com:

$$\begin{aligned} DBF_b &= \delta[(M \text{ diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} M^T) \mathbf{1}]_b \\ DBR_b &= \mathbf{LBR}_b \cdot \mathbf{1} \\ \mathbf{LBR} &= \mathbf{LBNF} + (1 - \delta)M \text{ diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} M^T \\ RBRA_b &= [(\text{diag}(\mathbf{KBR}) \mathbf{LBR})^T \mathbf{1}]_b \\ RCBR_b &= [\delta(\text{diag}(\mathbf{KF}_{[1 \dots NI]}) \mathbf{LFNF}_{[1 \dots NI \times 1 \dots NI + NB + 2]})^T \mathbf{1}]_b \end{aligned} \tag{F.64}$$

A compensação do sistema de pagamentos bancários sujeito ao requerimento de reservas é obtida no ponto fixo do seguinte mapa:

$$\Psi_3(\mathbf{KBR}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \tag{F.65}$$

Sendo  $\boldsymbol{\theta}_1$  o conjunto de parâmetros  $\{\mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{ER}, M, \delta\}$ ,  $\mathbf{KF}$  o vetor de taxas de recuperação do subsistema de firmas, e:

$$\Psi_3(\mathbf{KBR}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } DBR_b + DBF_b = 0 \\ \min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b, DBR_b + DBF_b) / (DBR_b + DBF_b) & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{F.66}$$

O ponto fixo desse mapa fornece as taxas de recuperação da compensação do subsistema de bancos quando este atende ao requerimento de reservas. Nessa notação, o símbolo (\*) indica o valor do vetor ou matriz no ponto fixo.

$$\mathbf{KBR}^* = \Psi_3(\mathbf{KBR}^*; \mathbf{KF}^*, \boldsymbol{\theta}_1) \tag{F.67}$$

O vetor de pagamentos do subsistema de bancos é dado por (os valores dos pagamentos são proporcionais à dívida de cada banco respeitando-se a taxa de recuperação obtida impondo-se a não-violação do requerimento de reservas):

$$\mathbf{PB}^* = \mathbf{KBR}^* \cdot \mathbf{DB}^* \tag{F.68}$$



Como os subsistemas de firmas e de bancos são interligados, o ponto fixo de cada um deles é condicional ao ponto fixo do outro. A compensação de todo o sistema de pagamentos requer que os dois subsistemas estejam em seu ponto fixo. Essa condição pode ser representada pelo ponto fixo do mapa a seguir, no qual o subsistema de firmas é o mesmo do mapa dado por (F.28)<sup>11</sup>:

$$\Psi(\cdot, \cdot; \mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{ER}, \mathbf{M}, \delta):$$

$$([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]) \rightarrow ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]),$$

Definido como:

$$\Psi(\mathbf{KF}, \mathbf{KBR}; \boldsymbol{\theta}_1) \equiv (\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1), \Psi_3(\mathbf{KBR}; \Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1), \boldsymbol{\theta}_1)),$$

Sendo  $\boldsymbol{\theta}_1$  o conjunto de parâmetros  $\{\mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{ER}, \mathbf{M}, \delta\}$ ,

$\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_{1,i}(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ \min(RF_i + EF_i, DF_i)/DF_i & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$\Psi_3(\mathbf{KBR}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_{3,b}(\mathbf{KB}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } DBR_b + DBF_b = 0 \\ \min(ER_b + RBRA_b + RCBR_b + DBF_b, DBR_b + DBF_b)/(DBR_b + DBF_b) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.69})$$

Os pontos fixos são dados por:

$$\mathbf{KF}^* = \Psi_1(\mathbf{KF}^*; \mathbf{KBR}^*, \boldsymbol{\theta}_1) \quad (\text{F.70})$$

$$\mathbf{KBR}^* = \Psi_3(\mathbf{KBR}^*; \mathbf{KF}^*, \boldsymbol{\theta}_1)$$

E os vetores de pagamentos são obtidos de (F.27) ( $\mathbf{PF}^*$ ) e (F.68) ( $\mathbf{PB}^*$ ).

---

<sup>11</sup>Utilizando em seus cálculos o vetor de taxas de recuperação do subsistema de bancos  $\mathbf{KBR}$ , no lugar de  $\mathbf{KB}$ .

### F.3.3 Existência, Unicidade e Otimalidade dos Vetores de Pagamento, com Requerimento de Reservas

Seguindo o mesmo processo adotado para o sistema de pagamentos composto por subsistemas de firmas e bancos, os mapas de taxas de recuperação deste sistema de pagamentos também serão colocados na forma:

$$\begin{aligned} \Psi(\cdot; \boldsymbol{\theta}): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] &\rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}], \text{ dado por:} \\ \Psi_i(\mathbf{a}; \boldsymbol{\theta}) = \Psi_i(\mathbf{a}) &= \min(b_i + [\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{a}]_i, 1) \end{aligned} \quad (\text{F.71})$$

em que  $\boldsymbol{\Pi}^T$  é uma matriz formada por  $\Pi_{i,j} \in [0, 1]$ , de tal forma que  $\sum_i \Pi_{i,j} \leq 1$ . Como no caso do sistema de pagamentos composto por firmas e bancos, a demonstração da existência e unicidade dos pontos fixos dos mapas são abordados no anexo G.

Neste sistema de pagamentos, o subsistema de firmas não foi alterado. O subsistema de bancos foi alterado para registrar os saldos em reservas dos agentes, bem como as transferências desses saldos entre os agentes do mesmo modo que o subsistema de bancos do item anterior registra saldos e transferências de valores em caixa.

Partindo de (F.64), pode-se reescrever:

$$\mathbf{DBR} + \mathbf{DBF} = (\mathbf{LBR} + \delta(\mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{KF}) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T)) \mathbf{1} = \mathbf{LB} \mathbf{1} = \mathbf{DB} \quad (\text{F.72})$$

em que  $\mathbf{DB}$ , como em (F.43), representa os valores dos pagamentos dos agentes (caixa). De (F.64), pode-se definir:

$$RBRA_b / (DBR_b + DBF_b) = [\mathbf{LBR}^T \mathbf{KBR}]_b / DB_b = [\boldsymbol{\Pi}_R^T \mathbf{KBR}]_b \quad (\text{F.73})$$

sendo:  $\Pi_{R_b,c} = LBR_{b,c} / DB_c$

Como os termos  $ER_b$ ,  $RCBR_b$  e  $DBF_b$  não dependem de  $\mathbf{KBR}$ , são entendidos como parâmetros do mapa  $\Psi_3(\mathbf{KBR}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1)$ . Pode-se então escrever:

$$\Psi_3(\mathbf{KBR}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b = 0 \\ \min((ER_b + RCBR_b + DBF_b) / DB_b + [\boldsymbol{\Pi}_R^T \mathbf{KBR}]_b, 1) & \\ \text{caso contrário} & \end{cases} \quad (\text{F.74})$$

Nos casos em que  $\delta < 1$  e  $\mathbf{LFF} > 0$ ,  $\mathbf{LBR} < \mathbf{LB}$ , portanto, pelo menos uma coluna de  $\boldsymbol{\Pi}_R^T$  terá soma menor do que 1. No entanto, essa soma independe de  $\mathbf{KF}$ , uma vez que o banco atua nesse sistema apenas como um agente de pagamentos das firmas correntistas e não se torna devedor de valores não-pagos pelas firmas a outros agentes.

O relacionamento do subsistema de firmas com o subsistema de bancos, neste sistema

de pagamentos, por sua vez, continua o mesmo definido para o sistema de pagamentos no qual os bancos transferem recursos em caixa.

Após os rearranjos, o mapa associado à compensação de um sistema de pagamentos que impede a violação do nível de reservas dos bancos fica definido como:

$$\Psi(\cdot, \cdot; \mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{ER}, \mathbf{M}, \delta):$$

$$([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]) \rightarrow ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]),$$

Definido como:

$$\Psi(\mathbf{KF}, \mathbf{KBR}; \boldsymbol{\theta}_1) \equiv (\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1), \Psi_3(\mathbf{KBR}; \Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1), \boldsymbol{\theta}_1)),$$

Sendo  $\boldsymbol{\theta}_1$  o conjunto de parâmetros  $\{\mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{LBNF}, \mathbf{EF}, \mathbf{ER}, \mathbf{M}, \delta\}$ ;

$\Psi_1(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_{1,i}(\mathbf{KF}; \mathbf{KBR}, \boldsymbol{\theta}_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i = 0 \\ \min(EF_i/DF_i + [(\boldsymbol{\Pi}_{FNF} + \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KBR}) \boldsymbol{\Pi}_{FF})^T \mathbf{KF}]_i, 1) & \\ \text{caso contrário} & \end{cases}$$

e

$\Psi_3(\mathbf{KBR}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ , dado por:

$$\Psi_3(\mathbf{KBR}; \mathbf{KF}, \boldsymbol{\theta}_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } DB_b = 0 \\ \min((ER_b + RCBR_b + DBF_b)/DB_b + [\boldsymbol{\Pi}_R^T \mathbf{KBR}]_b, 1) & \\ \text{caso contrário} & \end{cases}$$

(F.75)

### F.3.4 Algoritmo de Compensação sem Violação de Reservas Bancárias

A compensação de um sistema de pagamentos que não viole o requerimento de reservas bancárias pode ser implementada por um algoritmo semelhante ao apresentado na seção anterior.

Dados:

Subsistema de firmas:  $\mathbf{LFNF}, \mathbf{LFF}, \mathbf{EF}, \mathbf{M}$

Subsistema de bancos:  $\mathbf{LBNF}, \mathbf{ER}, \delta$

Devem ser buscados, mediante um processo iterativo, vetores de taxas de recuperação  $\mathbf{KF}$  e  $\mathbf{KBR}$  que compensem os dois subsistemas, levando os mapas  $\Psi_1$  e  $\Psi_3$  a um ponto

fixo. Os domínios de  $\mathbf{KF}$  e  $\mathbf{KBR}$  são:  $\mathbf{KF} \in [0, 1]$  e  $\mathbf{KBR} \in [0, 1]$ .

Como anteriormente, pode-se iniciar o processo com os valores  $\mathbf{KF}^0 = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{KBR}^0 = \mathbf{0}$ , ou  $\mathbf{KF}^0 = \mathbf{1}$  e  $\mathbf{KBR}^0 = \mathbf{1}$ , com os mesmos resultados. Seguindo Eisenberg e Noe (2001), o cálculo é iniciado supondo que os agentes pagam integralmente suas dívidas, ou seja,  $\mathbf{KF}^0 = \mathbf{1}$  e  $\mathbf{KBR}^0 = \mathbf{1}$ . Para a iteração  $k$ , os cálculos a serem feitos são:

Subsistema de firmas:

$$\mathbf{RF}^k = ((\text{diag}(\mathbf{KF}^{k-1}) \mathbf{LFNF} + \text{diag}(\mathbf{M}^T \mathbf{KBR}^{k-1} \cdot \mathbf{KF}^{k-1}) \mathbf{LFF}))^T \mathbf{1} \quad (\text{F.76})$$

Para cada firma  $i$ :

$$\mathbf{KF}_i^k = \begin{cases} 1 & \text{se } DF_i^0 = 0 \\ \min(\mathbf{RF}_i^k + \mathbf{EF}_i, DF_i^0) / DF_i^0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{F.77})$$

Subsistema de bancos:

$$\begin{aligned} \mathbf{RBRA}^k &= (\text{diag}(\mathbf{KBR}^{k-1}) \mathbf{LBR}^{k-1})^T \mathbf{1} \\ \mathbf{RCBR}^k &= \delta(\text{diag}(\mathbf{KF}_{[1 \dots NI]}^{k-1}) \mathbf{LFNF}_{[1 \dots NI \times 1 \dots NI + NB + 2]})^T \mathbf{1} \\ \mathbf{DBF}^k &= \delta \mathbf{LBF}^{k-1} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{F.78})$$

Na compensação do sistema de pagamentos como um todo, ou seja, na compensação simultânea dos subsistemas de firmas e de bancos, é necessário que ao início de cada iteração, sejam representados os mesmos pagamentos nos dois subsistemas. Isso é feito utilizando-se os mesmos vetores de taxas de recuperação nos cálculos dos valores recebidos pelos agentes dos dois subsistemas.

Neste algoritmo, são utilizados os vetores de taxas de recuperação da iteração anterior  $\mathbf{KF}^{k-1}$  e  $\mathbf{KBR}^{k-1}$  no cálculo dos recebimentos das firmas do subsistema de firmas em (F.76). Esses vetores são também utilizados na obtenção das matrizes  $\mathbf{LBR}^{k-1}$  e  $\mathbf{LBF}^{k-1}$ , referenciadas nas equações (F.78), a partir das quais são calculados os valores de reservas “recebidas” pelos bancos no subsistema de bancos. Dessa forma, os subsistemas de firmas e de bancos representam os mesmos pagamentos iniciais, em função dos quais são calculados os pagamentos que cada agente pode fazer, que deverão ser representados

pelos dois subsistemas na iteração seguinte.

$$\begin{aligned}
\mathbf{LBF}^k &= \mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{KF}^k) \mathbf{LFF} \mathbf{M}^T \\
\mathbf{LBR}^k &= \mathbf{LBNF} + (1 - \delta) \mathbf{LBF}^k \\
\mathbf{DBR}^k &= \mathbf{LBR}^k \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{F.79}$$

Para cada banco  $b$ :

$$\mathbf{KBR}_b^k = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{DBR}_b^k + \mathbf{DBF}_b^k = 0 \\ \min(\mathbf{ER}_b^k + \mathbf{RBRA}_b^k + \mathbf{RCBR}_b^k + \mathbf{DBF}_b^k, \mathbf{DBR}_b^k + \\ \mathbf{DBF}_b^k) / (\mathbf{DBR}_b^k + \mathbf{DBF}_b^k) & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{F.80}$$

Encerra-se o processo quando  $|\mathbf{KF}^k - \mathbf{KF}^{k-1}| \leq \varepsilon_F$  e  $|\mathbf{KBR}^k - \mathbf{KBR}^{k-1}| \leq \varepsilon_B$ . A convergência dos valores de  $\mathbf{KF}^k$  e  $\mathbf{KB}^k$  para os seus valores no ponto fixo,  $\mathbf{KF}^*$  e  $\mathbf{KBR}^*$ , é monotônica. Os vetores de pagamento obtidos são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{PF} &= \operatorname{diag}(\mathbf{KF}^k) \mathbf{DF}^0 \\
\mathbf{PB} &= \operatorname{diag}(\mathbf{KBR}^k) \mathbf{DB}^k
\end{aligned} \tag{F.81}$$

$\mathbf{DB}^k$  é calculado de acordo com (F.41) e (F.81). Note-se que o valor pago pelas firmas  $i$  é o valor da dívida original multiplicado por  $\mathbf{KF}_i$ , enquanto o valor recebido em (F.76) é obtido do produto da dívida original por  $[\mathbf{M}^T \mathbf{KBR}^{k-1}]_i \mathbf{KF}_i^{k-1}$ , ou seja, havendo default do banco da firma pagadora, parte do valor pago pela firma não é recebido pela recebedora.

Os vetores de recebimentos são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{RF} &= \mathbf{RF}^k \quad (\text{da equação (F.76)}) \\
\mathbf{RBP} &= ((\mathbf{LBF}^k + \mathbf{LBNF}) \cdot (\mathbf{KBR}^k \mathbf{1}_{1 \times NB+2}))^T \mathbf{1}_{NB+2 \times 1}
\end{aligned} \tag{F.82}$$



## G Existência e Unicidade dos Vetores de Taxas de Recuperação

Deseja-se demonstrar a existência e a unicidade dos vetores de taxas de recuperação obtidos na compensação dos sistemas de pagamentos estudados neste trabalho, que fazem os pagamentos de um sistema bancário condicionados à realização dos pagamentos de firmas correntistas. O sistema de pagamentos foi dividido nos subsistemas de firmas e de bancos e modelado por mapas que associam a parcela da dívida que os agentes dos subsistemas tentam pagar à parcela que eles conseguem pagar. A compensação do sistema ocorre no ponto fixo dos mapas, que representa a taxa de recuperação das dívidas de cada agente.

Inicialmente, são demonstradas a existência e unicidade do ponto fixo dos mapas para os subsistemas individuais e, em seguida, o resultado obtido é estendido para o sistema completo. Foi possível colocar os mapas dos subsistemas de firmas e bancos na mesma forma, dada pela equação (F.31), permitindo que a demonstração seja aplicável a todos eles.

O mapa para o qual a existência e a unicidade do ponto fixo será demonstrada tem a forma:

$$\begin{aligned} \Psi(\cdot; \boldsymbol{\theta}) : [\mathbf{0}, \mathbf{1}] &\rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}], \text{ dado por:} & (G.1) \\ \Psi_i(\mathbf{a}; \boldsymbol{\theta}) &= \min(b_i + [\Pi^T \mathbf{a}]_i, c_i) \end{aligned}$$

Neste mapa,  $\Pi^T$  é uma matriz de parâmetros formada por  $\Pi_{i,j} \in [0, 1]$ , de tal forma que  $\sum_j \Pi_{i,j} \leq 1$ . Inicialmente, são feitas considerações sobre a abrangência e a aplicabilidade dos resultados a serem obtidos, em seguida, são feitas as demonstrações e, por fim, é feita uma discussão da otimalidade do volume de pagamentos no ponto fixo.

### G.1 Contração

A existência e a unicidade do ponto fixo desse mapa pode ser demonstrada por meio do Teorema da Contração, isto é, se, no espaço normado  $\langle \mathbb{X}; d \rangle$ :

$$\|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, \quad \Psi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \quad c \in [0, 1) \quad (G.2)$$

sendo  $\|\cdot\|$  a norma, então, o ponto fixo de  $\Psi(\cdot)$  é único.

Se o mapa  $\Psi$  for uma contração, será contínuo, condição suficiente para a existência do ponto fixo, de acordo com o teorema do ponto fixo de Brower.

No caso deste trabalho,  $\mathbb{X} \triangleq [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$  e  $\|\cdot\|$  é a norma  $\ell_1$  (norma da soma).

A demonstração da unicidade do ponto fixo consiste em mostrar que o mapa  $\Psi(\mathbf{a})$  é uma contração em seu domínio.

Dizer que o mapa  $\Psi$  tem apenas 1 ponto fixo é o mesmo que dizer que, em todo o domínio do mapa, existe apenas 1 ponto ao qual o mapa associa o próprio ponto, independentemente do processo de cálculo. Paralelamente à demonstração da unicidade do ponto fixo, é importante definir um processo de cálculo desse ponto fixo. Com relação a isso, o teorema da contração é particularmente útil, pois permite concluir que, se for escolhido um ponto arbitrário no domínio e calculado o ponto a ele associado pelo mapa, e se esse cálculo for reiterado para os pontos que forem sendo obtidos, forma-se uma seqüência de Cauchy, que necessariamente converge ao ponto fixo, que pertence ao domínio por ser este um espaço completo. Isso acontece porque o teorema garante que a distância entre os pontos da seqüência diminui a cada iteração do cálculo e, portanto, garante que esse processo de cálculo leva a aproximações do ponto fixo tão precisas quanto se queira.

## G.2 Decomponibilidade de Sistemas

**Definição G.1** A matriz  $\mathbf{\Pi}_{[N \times N]} = (\Pi_{i,j})$  é decomponível se, por meio da permutação entre algumas linhas e entre as colunas correspondentes, for possível transformá-la em uma matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{G.3})$$

sendo  $\mathbf{A}_{11}$  e  $\mathbf{A}_{22}$  submatrizes quadradas.

**Definição G.2** A matriz  $\mathbf{\Pi}_{[N \times N]} = (\Pi_{i,j})$  é completamente decomponível se puder ser transformada em uma matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

por meio de permutações entre linhas e entre as colunas correspondentes.

**Definição G.3** A matriz  $\mathbf{\Pi}_{[N \times N]} = (\Pi_{i,j})$  é indecomponível se não é decomponível.

As definições referentes à matriz  $\mathbf{\Pi}$  apresentadas permitem caracterizar o sistema de pagamentos da seguinte forma: se a matriz  $\mathbf{\Pi}$  é completamente decomponível, isso significa



que o sistema pode ser particionado em subsistemas completamente independentes, de modo a ser possível compensar ou analisar cada subsistema independentemente. Eisenberg e Noe (2001) se referem aos agentes representados em um desses subsistemas como pertencentes à mesma órbita de risco. O ponto fixo do mapa,  $\mathbf{a}^*$ , é dado por  $\mathbf{a}^* = [\mathbf{a}_1^* \mid \mathbf{a}_2^*]$ , depois de desfeitas as permutações realizadas para separar os subsistemas. Se a matriz  $\mathbf{\Pi}$  é decomponível, alguns agentes em  $\mathbf{A}_{11}$  são devedores de agentes em  $\mathbf{A}_{22}$ , mas não o contrário. O subsistema em  $\mathbf{A}_{11}$  pode ser compensado separadamente do restante do sistema, acrescentando-se a ele um agente adicional para representar os pagamentos em  $\mathbf{A}_{22}$ . Obtido o vetor de pagamentos dos agentes de  $\mathbf{A}_{11}$  e aplicadas as proporções  $\Pi_{i,j}$  em  $\mathbf{A}_{12}$ , pode-se somar os valores pagos a cada agente de  $\mathbf{A}_{22}$  às suas dotações iniciais e então fazer a compensação de  $\mathbf{A}_{22}$ . Nesse caso, ainda é possível obter o ponto fixo do mapa,  $\mathbf{a}^*$ , a partir dos pontos fixos obtidos para os mapas dos subsistemas  $[\mathbf{a}_1^* \mid \mathbf{a}_2^*]$ , de acordo com o processo descrito.

Por fim, se a matriz  $\mathbf{\Pi}$  é não-decomponível, representa um sistema de pagamentos que só pode ser compensado como um todo, devido à presença de ciclos nas interconexões dos agentes. Quando não há ciclos, a matriz  $\mathbf{\Pi}$  é decomponível, pois há pelo menos 1 agente que não recebe pagamentos dos demais. Ele pode ser compensado separadamente dos demais e seus pagamentos acrescentados à dotação inicial dos seus credores, como já foi dito. Na rede restante, pelo menos 1 agente não receberá pagamentos de outros, e o processo pode ser repetido até a compensação do sistema todo, de forma que sempre existirá um ponto fixo. Outra forma de decomponibilidade de  $\mathbf{\Pi}$  é a decomponibilidade por grupos, referida inicialmente, na qual  $\mathbf{\Pi}$  pode ser dividida em submatrizes indecomponíveis de modo que os agentes de uma dessas submatrizes (por exemplo,  $\mathbf{A}_{11}$ ) não receba pagamentos de agentes pertencentes a outros grupos.

Assim sendo, toda a demonstração a ser feita considera a matriz  $\mathbf{\Pi}$  indecomponível, uma vez que resultados obtidos para matrizes decomponíveis podem ser obtidos da composição / justaposição dos resultados obtidos para matrizes indecomponíveis.

### G.3 Unicidade do Ponto Fixo para os Subsistemas Individuais

Seja o mapa dado por:

$$\begin{aligned} \Psi(\cdot; \boldsymbol{\theta}): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] &\rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \equiv \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}, \text{ dado por:} \\ \Psi_i(\mathbf{a}; \boldsymbol{\theta}) = \Psi_i(\mathbf{a}) &= \min(b_i + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}]_i, 1) \end{aligned} \tag{G.5}$$

Com  $\Pi_{i,j}$  constantes,  $\Pi_{i,j} \in [0, 1]$ , de tal forma que  $\sum_i \Pi_{i,j} \leq 1$ ;

$\mathbf{\Pi}$  é indecomponível;

$\mathbf{a}$  é vetor-coluna, com  $a_i \geq 0$ ;

$b_i \geq 0, c_i \geq 0$  constantes, e:

A norma adotada é a  $\ell_1$  (norma da soma).

Para mostrar que esse mapa é uma contração, deve-se mostrar que:

$$\|\Psi(\mathbf{a}^1) - \Psi(\mathbf{a}^2)\| < \|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2\| \quad (\text{G.6})$$

Dados  $\mathbf{a}^1$  e  $\mathbf{a}^2$  quaisquer:

$$\|\Psi(\mathbf{a}^1) - \Psi(\mathbf{a}^2)\| = \|\min(\mathbf{b} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^1, \mathbf{c}) - \min(\mathbf{b} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^2, \mathbf{c})\| \quad (\text{G.7})$$

Tome-se o mapa auxiliar  $\Phi_i(\mathbf{a}, \boldsymbol{\theta}) \equiv b_i + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}]_i$ :

Tem-se:

$$\|\Phi(\mathbf{a}^1) - \Phi(\mathbf{a}^2)\| = \|\mathbf{b} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^1 - (\mathbf{b} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^2)\| = \|\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2)\| \quad (\text{G.8})$$

Além disso, se:

$$\begin{aligned} \sum_j \Pi_{i,j} = 1 \text{ e } \begin{cases} \mathbf{a}_i^1 \geq \mathbf{a}_i^2, \forall i \text{ ou } \mathbf{a}_i^1 \leq \mathbf{a}_i^2, \forall i: \text{ Caso (a)} \\ \text{senão: Caso (b)} \end{cases} \\ \sum_j \Pi_{i,j} \leq 1: \text{ Caso (c)} \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Então:

$$\begin{aligned} \text{Caso (a)} &\rightarrow \|\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2)\| = \|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2\| \\ \text{Casos (b) e (c)} &\rightarrow \|\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2)\| \leq \|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2\| \end{aligned}$$

Se o mapa for uma contração para o Caso (a), será também para os Casos (b) e (c), pois nesses casos,  $\|\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a}\|$

Será verificado a seguir se o mapa  $\Psi(\cdot)$  é uma contração para o Caso (a).

Tem-se:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbf{a}^1) - \Phi(\mathbf{a}^2)\| &= \|\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2)\| = \sum_i \|[ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^1 ]_i - [ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^2 ]_i\| = \\ &= \sum_i \|b_i + [ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^1 ]_i - b_i - [ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^2 ]_i\| \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Para cada elemento  $i$  do mapa  $\Psi$ , ( $\Psi_i(\mathbf{a})$ ):

$$\Psi_i(\mathbf{a}) = \min(b_i + [ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a} ]_i, c_i) \quad (\text{G.11})$$

Pode-se ter, para cada elemento  $i$ , as situações:

$$\begin{aligned} \min(b_i + [ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a} ]_i, c_i) &= b_i + [ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a} ]_i, \text{ ou:} \\ \min(b_i + [ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a} ]_i, c_i) &= c_i \end{aligned}$$

Aplicando para  $\mathbf{a}^1$  e  $\mathbf{a}^2$ :

$$\|\min(b_i + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^1]_i, c_i) - \min(b_i + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^2]_i, c_i)\| \leq \|b_i + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^1]_i - b_i - [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}^2]_i\| \quad (\text{G.12})$$

e, portanto:

$$\|\Psi(\mathbf{a}^1) - \Psi(\mathbf{a}^2)\| \leq \|\Phi(\mathbf{a}^1) - \Phi(\mathbf{a}^2)\| = \|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2\| \quad (\text{G.13})$$

Disso se conclui que o mapa é uma contração em um subconjunto do seu domínio e não é no subconjunto complementar.

Para identificar esse subconjunto, tome-se o caso em que  $\|\mathbf{b}\| > 0$ , com  $b_i \geq 0$ .

Defina-se a região  $\mathbb{Y}^C \subset \mathbb{X} = \{\mathbf{a} : \min(\mathbf{b} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \mathbf{b} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}\}$

Nesse caso, não ocorre contração, pois:

$$\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\} \in \mathbb{Y}^C \rightarrow \|\Psi(\mathbf{a}^1) - \Psi(\mathbf{a}^2)\| = \|\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2)\| \quad (\text{G.14})$$

Além disso, como  $\|\mathbf{b}\| > 0$  e  $\mathbf{a} \in \mathbb{Y}^C$ , tem-se  $\Psi(\mathbf{a}) \neq \mathbf{a}$ , portanto, não há ponto fixo nessa região.

Tome-se a região complementar em  $\mathbb{X}$ , definida por:

$$\mathbb{Y} \subset \mathbb{X} = \{\mathbf{a} : b_i + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}]_i > c_i\} \text{ para algum } i$$

Nesse caso:

$$\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\} \in \mathbb{Y} \rightarrow \|\Psi(\mathbf{a}^1) - \Psi(\mathbf{a}^2)\| < \|\mathbf{a}^1 - \mathbf{a}^2\| \quad (\text{G.15})$$

Portanto,  $\Psi(\mathbf{a})$  é contração para  $\mathbf{a} \in \mathbb{Y}$ .

Sendo assim, para o Caso (a)<sup>1</sup>, de acordo com o teorema da contração,  $\Psi(\mathbf{a})$  tem ponto fixo único em  $\mathbb{Y}$ , e, portanto, tem ponto fixo único em  $\mathbb{X}$  ■

Suponhamos agora, que  $\|\mathbf{b}\| = 0$

Da mesma forma, existirão as regiões  $\mathbb{Y}$  e  $\mathbb{Y}^C$ , definidas para o caso em que  $\|\mathbf{b}\| > 0$ .

No entanto, dado que  $\|\mathbf{b}\| = 0$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{Y}^C$  será ponto fixo quando  $\mathbf{a} = \mathbf{\Pi}^T \mathbf{a}$ , ou seja, se  $\mathbf{a}$  for proporcional ao autovetor de  $\mathbf{\Pi}^T$  associado ao autovalor  $\lambda = 1$ . Neste caso em que  $\sum_i \Pi_{i,j} = 1, \forall j$ , a matriz  $\mathbf{\Pi}^T$  sempre tem um autovalor  $\lambda = 1$ , assim, todos os pontos de  $\mathbb{Y}^C$  sobre a reta na direção do autovetor associado a esse autovalor são pontos fixos.

Portanto, se  $\|\mathbf{b}\| = 0$ ,  $\Psi(\mathbf{a})$  tem mais de um ponto fixo<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Portanto, esse resultado vale também para os Casos (b) e (c).

<sup>2</sup>Caso seja necessário compensar pagamentos em um sistema com essa característica (caixa inicial  $\mathbf{b}$  dos agentes nulo), deve-se iniciar o processo por um ponto  $\mathbf{a} \in \mathbb{Y}$ , pois há somente um ponto fixo na região de contração  $\mathbb{Y}$ . Um candidato natural para isso é o ponto associado ao pagamento integral da dívida por todos os agentes.

## G.4 Unicidade do Ponto Fixo para o Sistema Completo

O sistema completo é descrito pelos mapas F.38 (compensação de dois sistemas de pagamentos interdependentes) e F.75 (compensação de dois sistemas de pagamentos interdependentes impedindo violações do requerimento de reservas). Esses mapas têm a forma:

$$\Psi(\cdot, \cdot; \boldsymbol{\theta}): ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]) \rightarrow ([\mathbf{0}, \mathbf{1}], [\mathbf{0}, \mathbf{1}]),$$

Definido como:

$$\Psi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; \boldsymbol{\theta}) \equiv (\Psi_1(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\theta}), \Psi_2(\mathbf{a}_2; \Psi_1(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta})),$$

Sendo:

$$\Psi_1(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\theta}): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}], \text{ dado por:}$$

$$\Psi_{1,i}(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\theta}) = \min(b_{1,i} + [\boldsymbol{\Pi}_1^T \mathbf{a}_1]_i, 1)$$

e

$$\Psi_2(\mathbf{a}_2; \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\theta}): [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}], \text{ dado por:}$$

$$\Psi_{2,i}(\mathbf{a}_2; \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\theta}) = \min(b_{2,i} + [\boldsymbol{\Pi}_2^T \mathbf{a}_2]_i, 1) \tag{G.16}$$

Foi demonstrado que  $\Psi_1(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\theta})$  e  $\Psi_2(\mathbf{a}_2; \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\theta})$  são contrações.

Nessas demonstrações,  $\mathbf{a}_2$  foi considerado como dado em  $\Psi_1$  e  $\mathbf{a}_1$  foi considerado como dado em  $\Psi_2$ . No entanto, usualmente, tem-se:  $\mathbf{a}_2^1 \neq \mathbf{a}_2^2 \rightarrow \Psi_1(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2^1, \boldsymbol{\theta}) \neq \Psi_1(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2^2, \boldsymbol{\theta})$ , o mesmo ocorrendo com  $\mathbf{a}_1$  e  $\Psi_2$ . Desse modo, para se analisar o mapa completo, basta verificar que  $\Psi_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; \boldsymbol{\theta})$  e  $\Psi_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1; \boldsymbol{\theta})$  são contrações, separadamente, ou seja, analisar os mapas dependendo das 2 variáveis simultaneamente. Para simplificar a análise sem, com isso, torná-la inválida, pode-se adotar o seguinte enfoque: fazer análises parciais, isto é, para mostrar que  $\Psi_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2; \boldsymbol{\theta})$  é contração, a demonstração deve ser dividida em 2 partes:

- a)Mostrar que  $\Psi_1(\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2, \boldsymbol{\theta})$  é contração, para  $\mathbf{a}_2$  fixo (já feito na seção anterior), e:
- b)Mostrar que  $\Psi_1(\mathbf{a}_2; \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\theta})$  é não-expansivo, para  $\mathbf{a}_1$  fixo.

Para o mapa  $\Psi_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1; \boldsymbol{\theta})$ , deve ser feito algo semelhante.

Isso pode ser feito dessa forma devido à estrutura do problema, que é a seguinte:

- a)Calcula-se o que as firmas podem pagar, dadas as taxas de recuperação das firmas, calculadas anteriormente,  $\mathbf{a}_1^i$  e as taxas de recuperação dos bancos  $\mathbf{a}_2^i$ , obtendo-se



- O mapa de taxas de recuperação do subsistema de firmas  $\Psi_1$  e o vetor de taxas de recuperação do subsistema de bancos  $\mathbf{KB}$  na equação (F.28)(ou para o vetor  $\mathbf{KBR}$  na equação (F.69), pois o mapa  $\Psi_1$  é o mesmo).
- O mapa de taxas de recuperação do subsistema de bancos  $\Psi_2$  e o vetor de taxas de recuperação do subsistema de firmas  $\mathbf{KF}$  na equação(F.28).
- O mapa de taxas de recuperação do subsistema de bancos do sistema de pagamentos que impede violações do requerimento de reservas  $\Psi_3$  e o vetor de taxas de recuperação do subsistema de firmas  $\mathbf{KF}$  na equação(F.69).

No entanto, devido à sua maior complexidade e por não serem preocupações centrais deste trabalho, as demonstrações não serão feitas aqui.

No teste da implementação computacional do processo de compensação que impede violações de reservas, constatou-se que, independentemente dos valores iniciais de  $\mathbf{KF}$  e  $\mathbf{KBR}$ , chegava-se sempre ao mesmo ponto fixo ( $\mathbf{KF}^*$ ,  $\mathbf{KBR}^*$ ). O mesmo ocorreu para diversas configurações de dívida.

Dessa forma, há indícios de que o ponto fixo do sistema completo seja único.

## G.5 Otimalidade do Volume de Pagamentos no Ponto Fixo

No caso dos subsistemas isolados<sup>3</sup> (mapas  $\Psi_1$  - firmas,  $\Psi_2$  - bancos,  $\Psi_3$  - reservas), o volume de pagamentos associado às taxas de recuperação no ponto fixo é máximo. Os mapas  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  são idênticos aos estudados em Eisenberg e Noe (2001), portanto, vale o resultado de otimalidade obtido nesse trabalho. O mapa  $\Psi_3$  é diferente dos demais no que se refere à soma das colunas da matriz  $\mathbf{\Pi}^T$ , que é menor ou igual a 1; no entanto, pode-se afirmar que o volume de pagamentos no ponto fixo é máximo.

Nos três casos, a intuição disso é a seguinte: adotemos, como ponto de partida o vetor de pagamentos calculado com base nas taxas de recuperação no ponto fixo do mapa. Suponhamos que se queira aumentar o volume de pagamentos reduzindo-se os pagamentos realizados por alguns agentes para se aumentar os realizados por outros (não é possível iniciar o processo aumentando o valor pago por algum agente, pois o valor pago em um vetor de pagamentos é o máximo possível para cada agente). Os pagamentos realizados pelos demais agentes não aumentarão, pois a redução de um pagamento por algum agente reduz o recebimento de outro agente, e portanto, nunca será possível que outro agente aumente o valor pago. Dessa forma, conclui-se que o vetor de pagamentos no ponto fixo tem soma máxima.

No caso de sistemas de pagamentos compostos firmas + bancos ou firmas + bancos (reservas), ocorrem as seguintes situações: reduções nos valores pagos por algum banco

---

<sup>3</sup>No subsistema de firmas, considera-se que os bancos pagam integralmente suas dívidas ( $\mathbf{KB} = 1$ ), no caso dos subsistemas de bancos, com ou sem impedimento de violações do nível de reservas, considera-se que as firmas realizam seus pagamentos de forma integral ( $\mathbf{KF} = 1$ ).

restringem os valores pagos por suas firmas correntistas, provocando os efeitos citados acima nos subsistemas individuais. Por outro lado, reduções nos valores pagos pelas firmas reduzem os valores a serem pagos pelos bancos, reduzindo também o volume total de pagamentos. Um efeito dessa redução na dívida é o de que se um banco está em default e uma firma correntista reduz o valor de seus pagamentos, a taxa de recuperação desse banco sobe. Apesar desse aumento, o valor total pago diminuiu.

Portanto, a soma dos pagamentos realizados pelos agentes do sistema é máxima no ponto fixo dos mapas.





## H Cálculo de Perdas e Recuperações após a Compensação

Nesta seção, é apresentado o cálculo das perdas e recuperações relacionadas a *default* de agentes na compensação dos pagamentos. Inicialmente, são apresentadas as recuperações de recebimentos de firmas e bancos em atraso e, em seguida, são detalhadas as perdas.

### H.1 Recuperação de Pagamentos Atrasados de Firmas

a) Pagamentos atrasados de firmas a firmas correntistas de bancos diferentes que podem ser recuperados:

$$PAFR = LFF_{\cdot,j} \quad j = 1, \dots, NI \quad (H.1)$$

b) Pagamentos atrasados de firmas a firmas correntistas do mesmo banco que podem ser recuperados:

$$PAFRNF = LFNF_{\cdot,j} \quad j = 1, \dots, NI \quad (H.2)$$

c) Pagamentos atrasados de firmas aos bancos onde têm conta, que podem ser recuperados:

$$PABR = LFNF_{\cdot,j} \mathbf{1}_{NB \times 1} \quad j = NI + 1, \dots, NI + NB \quad (H.3)$$

d) Recebimentos de firmas  $i$  em atraso no período anterior, recuperados no período, por firmas e bancos:

$$\begin{aligned} FLR_{\cdot,t} &= \left( \sum_i (M_{\cdot,i})^T KBR_{1:NB} \right) KF_i PAFR_{i,\cdot}^T + \left( \sum_i KF_i PAFRNF_{i,\cdot} \right)^T \\ FLRB_{\cdot,t} &= M_{\cdot,i} (KF_i PABR_{i,\cdot}) \end{aligned} \quad (H.4)$$

### H.2 Perdas Totais de Firmas:

a) Matrizes auxiliares

Matriz de relacionamento entre os agentes do subsistema de bancos e os do

subsistema de firmas ( $\mathbf{MP}_{[NB+2 \times NI+NB+2]} = (MP_{b,i})$ ):

Com:

$$\begin{aligned} & 1 \text{ se } i \text{ é firma correntista do banco } b \text{ ou se } i = b \text{ (banco,} \\ MP_{b,i} &= \text{ famílias ou governo), e:} \\ & 0 \text{ caso contrário} \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

Matriz de relacionamento entre bancos e firmas ( $\mathbf{M}_{[NB \times NI]} = (M_{b,i})$ ):

$$\begin{aligned} M_{b,i} &= 1 \text{ se } i \text{ é firma correntista do banco } b, \text{ e:} \\ & 0 \text{ caso contrário} \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Valores não-pagos devido a *default* das firmas  $i$ :

$$\mathbf{LFDF}_{i,\cdot} = (\mathbf{LFF}_{i,\cdot} + \mathbf{LFNF}_{i,\cdot})(1 - KF_i) \quad (\text{H.7})$$

Valores pagos pelas firmas  $i$ , mas não-recebidos pelos credores devido a *default* de bancos:

$$\mathbf{LFDB}_{i,\cdot} = \mathbf{LFF}_{i,\cdot} \mathbf{KF}_i (1 - (\mathbf{M}_{\cdot,i})^T \mathbf{KBR}_{1:NB}) \quad (\text{H.8})$$

b) Valor não-pago pelas firmas  $i$

$$\mathbf{TNPF}_{i,t} = \mathbf{DF}_i - \mathbf{PF}_i \quad (\text{H.9})$$

c) Firmas  $i$  liquidadas ( $\mathbf{STF}_{i,t} = 0$ ) não devolvem o empréstimo bancário (principal):

$$\mathbf{TNPF}_{i,t} = \mathbf{TNPF}_{i,t} + \mathbf{FBB}_{i,t} \quad (\text{H.10})$$

d) Valores pagos pelas firmas  $i$ , mas não-recebidos pelos credores devido a *default* de bancos:

$$\mathbf{TNPF}_{i,t} = \mathbf{LFDB}_{i,\cdot} \mathbf{1}_{NI+NB+2 \times 1} \quad (\text{H.11})$$

e) Total não-recebido pela firma  $i$  por *default* de firmas:

$$\mathbf{TNRF}_{i,t} = \mathbf{LFDF}_{\cdot,i}^T \mathbf{1}_{NI \times 1} \quad (\text{H.12})$$

f) Total não-recebido pela firma  $i$  por *default* de bancos:

$$\mathbf{TNRF}_{i,t} = \mathbf{LFDB}_{\cdot,i}^T \mathbf{1}_{NI \times 1} \quad (\text{H.13})$$

g) Perdas totais das firmas  $i$  (valores não-recebidos):

$$\begin{aligned} FLT_{i,t} &= TNRFF_{i,t} + TNRFB_{i,t} \\ TNRF_{i,t} &= FLT_{i,t} \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

h) Total não-pago pelas firmas  $i$ :

$$TNPF_{i,t} = TNPFF_{i,t} \quad (\text{H.15})$$

### H.2.1 Crédito Comercial

a) Crédito comercial tomado (perdas de responsabilidade de firmas):

$$\begin{aligned} BCPID_{i,t} &= \sum_j LFDF_{i,j} \\ BCPINP_{i,t} &= BCPID_{i,t} \quad \text{para firmas } i \text{ com } STF_{i,t} = \textit{liquidada} \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

b) Crédito comercial cedido (perdas de responsabilidade de firmas e de bancos):

$$\begin{aligned} LCPID_{i,t} &= \sum_j LFDF_{j,i} + \sum_j LFDB_{j,i} \\ LCPINP_{i,t} &= \sum_j LFDF_{j,i} + \sum_j LFDB_{j,i} \\ &\quad \text{para firmas } j \text{ com } STF_{j,t} = \textit{liquidada} \end{aligned} \quad (\text{H.17})$$

### H.2.2 Crédito Bancário Tomado

Juros, amortizações das firmas  $i$  junto aos bancos:

$$\begin{aligned} BBPID_{i,t} &= \sum_b LFDF_{i,NI+b} \\ BBPINP_{i,t} &= BBPID_{i,t} + FBB_{i,t} \quad \text{para firmas } i \text{ com } STF_{i,t} = \textit{liquidada} \end{aligned} \quad (\text{H.18})$$

### H.2.3 Salários e Custos Fixos Atrasados

Salários e custos fixos atrasados pelas firmas  $i$ :

$$\begin{aligned} WD_{i,t} &= FW_i(1 - KF_i) \\ FFXD_{i,t} &= LFDF_{i,NI+NB+1} - WD_{i,t} \\ WNP_{i,t} &= WD_{i,t} \quad \text{para firmas } i \text{ com } STF_{i,t} = \textit{liquidada} \\ FFXNP_{i,t} &= FFXD_{i,t} \quad \text{para firmas } i \text{ com } STF_{i,t} = \textit{liquidada} \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

## H.2.4 Impostos

$$\begin{aligned}
 TFD_{i,t} &= LFDF_{i,NI+NB+2} \\
 TFNP_{i,t} &= TFD_{i,t} \quad \text{para firmas } i \text{ com } STF_{i,t} = \textit{liquidada}
 \end{aligned} \tag{H.20}$$

## H.3 Perdas Totais de Famílias

Perdas totais das famílias, incluindo responsabilidade dos bancos:

$$\begin{aligned}
 TWD_t &= \sum_i WD_{i,t} \\
 TFXCD_t &= \sum_i FXCD_{i,t} \\
 TWNP_t &= \sum_i WNP_{i,t} + \sum_j (FW_{j,t} KF_j (1 - (\mathbf{M}_{\cdot,i})^T \mathbf{KBR}_{1:NB}))
 \end{aligned} \tag{H.21}$$

O segundo termo da soma é o salário não-recebido pelos trabalhadores, de todas as firmas  $j$ , devido a *default* bancário:

$$TFXCNP_t = \sum_i (FXCNP_{i,t} + LFDB_{i,NI+NB+1}) - \sum_j (FW_{j,t} KF_j (1 - (\mathbf{M}_{\cdot,i})^T \mathbf{KBR}_{1:NB})) \tag{H.22}$$

## H.4 Impostos Não-Pagos dos Bancos

Impostos não-pagos dos bancos  $b$ :

$$TBNP_{b,t} = LBNF_{b,NB+2} (1 - KBR_b) \tag{H.23}$$

## H.5 Perdas do Governo

$$\begin{aligned}
 TGD_t &= \sum_i TFD_{i,t} \\
 TGNP_t &= \sum_i TFNP_{i,t} + \sum_i LFDB_{i,NI+NB+2} + \sum_b TBNP_{b,t}
 \end{aligned} \tag{H.24}$$

O segundo termo da soma refere-se a impostos pagos pelas firmas  $j$  e não-recebidos pelo governo, devido a *default* bancário.

## H.6 Bancos

### H.6.1 Crédito Interbancário

a)Crédito interbancário tomado

Valor tomado contratado em  $t$  e não-recebido por *default* do prestador

$$BISPNP_{b,t} = \sum_c BI_{b,c}(1 - KBR_c) \quad (H.25)$$

Ocorre devolução parcial do valor tomado pelo banco  $b$  em  $t - 1$  (principal + juros) e não-devolução total do tomado emprestado em  $t$ . A perda só se aplica ao valor recebido do prestador.

$$BIPINP_{b,t} = ((\sum_c BIPP_{b,c}) + FIBI_{b,t})(1 - KBR_b) + FIBI_{b,t} - BISPNP_{b,t} \quad (H.26)$$

b)Crédito interbancário cedido

Valor cedido contratado em  $t$  e não-pago por *default* do prestador

$$LISPNP_{b,t} = FLI_{b,t}(1 - KBR_b) \quad (H.27)$$

Ocorre devolução parcial do valor cedido pelo banco  $b$  em  $t - 1$  (principal + juros) e não-devolução total do cedido em pago em  $t$ .

$$\begin{aligned} LIPINP_{b,t} &= \sum_c (BIPP_{c,b} + IBIPP_{c,b})(1 - KBR_c) \\ LIPINP_{c,t} &= LIPINP_{c,t} + \sum_d BI_{d,c}KBR_c \\ &\text{para bancos } d \text{ com } STB_{d,t} = \textit{liquidado} \end{aligned} \quad (H.28)$$

Esta parcela se refere a empréstimos efetivamente pagos cedidos por bancos em *default* a bancos em *default*.

### H.6.2 Crédito Bancário Concedido

Crédito bancário concedido pelo banco  $b$ : totalização dos registros das firmas:

$$\begin{aligned} LBPID_{b,t} &= M_{b,\cdot} \mathbf{BBPID}_{\cdot,t} \\ LBPINP_{b,t} &= M_{b,\cdot} \mathbf{BBPINP}_{\cdot,t} \\ aux_b &= LBPID_{b,t} + \sum_i M_{b,i} FBB_{i,t} \quad \text{para firmas } i \text{ com } STF_{i,t} = \textit{liquidada} \end{aligned} \quad (H.29)$$

### H.6.3 Perdas Totais de Bancos:

a)Matrizes auxiliares

Valores não-pagos pelos bancos devido a *default* de firmas (as dívidas não-pagas das

firmas são totalizadas para os bancos de que são correntistas):

$$\mathbf{LBDF} = \mathbf{MP}(\mathbf{LFF} \cdot ((1 - \mathbf{KF}) \mathbf{1}_{1 \times NI+NB+2})) \mathbf{MP}^T \quad (\text{H.30})$$

Valores não-pagos pelos bancos devido a *default* de bancos:

$$\mathbf{LBDB} = (\mathbf{LFF} + \mathbf{LBNF}) \cdot ((1 - \mathbf{KB}) \mathbf{1}_{1 \times NB+2}) \quad (\text{H.31})$$

b) Total não-pago pelos bancos  $b$  por *default* de firmas:

$$\mathbf{TNPF}_{b,t} = \sum_c \mathbf{LBDF}_{b,c} \quad (\text{H.32})$$

c) Total não-pago pelos bancos  $b$ , em *default* ( $\mathbf{STB}_{b,t} = \text{liquidado}$ ), incluindo devolução do principal do interbancário tomado e recebido em  $t$ :

$$\mathbf{TNPB}_{b,t} = \sum_c \mathbf{LBDB}_{b,c} + \mathbf{FBI}_{b,t} - \mathbf{BISP}_{b,t} \quad (\text{H.33})$$

Para bancos  $b$  que não estão em *default* em  $t$ ,  $\mathbf{TNPB}_{b,t} = 0$ .

d) Total não-recebido pelos bancos  $b$  devido a *default* de firmas, incluindo não-recebimento de crédito bancário:

Excetuando-se o valor não-recebido de crédito bancário, o valor não-recebido não é uma perda do banco, e sim de credores dessas firmas.

$$\mathbf{TNRF}_{b,t} = \sum_c \mathbf{LBDF}_{c,b} + \mathbf{aux}_b \quad (\text{H.34})$$

e) Total não-recebido pelo banco  $b$  por *default* de bancos, incluindo interbancário cedido (e pago) em  $t$  a bancos em *default*:

$$\mathbf{TNRB}_{b,t} = \sum_c \mathbf{LBDB}_{c,b} + \sum_d \mathbf{BI}_{d,b} \mathbf{KBR}_b$$

para bancos  $d$  com  $\mathbf{STB}_{d,t} = \text{liquidado}$  (\text{H.35})

f) Perdas totais dos bancos  $b$  (valores devidos a  $b$  não-recebidos):

$$\mathbf{FLTB}_{b,t} = \mathbf{TNRB}_{b,t} + \mathbf{aux}_b \quad (\text{H.36})$$

g) Total não-pago pelos bancos  $b$  (originado por *default* de  $b$  ou de seus correntistas):

$$\mathbf{TNPB}_{b,t} = \mathbf{TNPF}_{b,t} + \mathbf{TNPB}_{b,t} \quad (\text{H.37})$$

h) Total não-recebido pelos bancos  $b$  (originado por *default* de correntistas de  $b$  ou de outros bancos):

$$\mathbf{TNRB}_{b,t} = \mathbf{TNRF}_{b,t} + \mathbf{TNRB}_{b,t} \quad (\text{H.38})$$