Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma Introdução à A-Identidade Polinomial

por

Edimilson dos Santos da Silva *
Mestrado em Matemática - Brasília - DF

Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Agradecimentos

Nessa ocasião essencialmente especial, fruto de inspiração e perseverança, sou grato a Deus, primeiramente, e a todos que contribuíram para que houvesse esse momento, em especial a minha família, amigos e colegas de curso, e às pessoas da senhora Sandra e minha sempre professora Roseane Cristina.

Agradeço profundamente às orientações, ao profissionalismo e à confiança dedicada pelo meu orientador, o prof. Dr. Dimas José Gonçalves: obrigado pelas explicações, pela educação em seu tratar durante nossos encontros, e por ser um exímio e calmo orientador.

Sinto-me também muito grato aos professores e aos funcionários do departamento de Matemática, bem como aos funcionários da residência de pós-graduação da UnB (Colina, Bloco K), pela atenciosidade e o profissionalismo demonstrados. Aqui cabe uma menção à saudosa pessoa do "seu Manuel"da gráfica, que já não está mais entre nós: que Deus o tenha!

Como a "união sempre faz a força", não poderia deixar de citar a pessoa do meu grande amigo Gilberto de Assis Pereira, que foi o primeiro colega que fiz no mestrado, e que compartilhou comigo a aflição, a dúvida e a vitória que foram símbolos desses 2 anos de curso.

A estes, e em especial a meu pai, Nilson, a meus irmãos Júlio e Neidijane, e às minhas bravas heroínas, minha mãe Jucileide e minha avó Julia Maria, agradeço e parabenizo com salvas de palmas, pois também fazem parte dessa conquista.

Matematicamente, muito + obrigado!!!

Resumo

Nesta dissertação estudamos as A-identidades polinomiais de algumas álgebras importantes. Sobre um corpo algebricamente fechado de característica 0, é dada uma descrição de todas as A-identidades polinomiais da álgebra de Grassmann de dimensão infinita. Depois, estudamos as A-identidades da álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo infinito. Obtemos uma cota inferior para o grau mínimo de uma A-identidade satisfeita por tais álgebras. Além disso, estudamos o grau mínimo das A-identidades satisfeitas pela álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2, 3 e 4 e obtemos A-identidades com tais graus.

Abstract

In this dissertation we study the polynomial A-identities of some important algebras. Over an algebraically closed field of characteristic 0 is given a description of all A-identities of the infinite dimensional Grassmann algebra. After, we study the A-identities for the upper triangular matrix algebras over a infinite field. We give a lower bound for the minimal degree of an A-identity satisfied by such algebras. Furthermore we study the minimal degree of the A-identities satisfied by the upper triangular matrices algebra of order 2, 3 and 4 and we obtain A-identities with such degrees.

Sumário

Introdução

O assunto estudado nesta dissertação é álgebra, mais especificamente álgebras que satisfazem identidades polinomiais, chamadas *PI-álgebras* (do inglês Polynomial Identities). Sejam K um corpo e R uma álgebra associativa e com unidade. Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ nas variáveis não comutativas $x_1, \dots, x_n$ é dito ser uma *identidade polinomial* para R se

$$f(r_1, \dots, r_n) = 0$$

para quaisquer $r_1, \dots, r_n \in R$. Se f é um polinômio não nulo, dizemos que R é uma *PI-álgebra*.

Temos vários exemplos de PI-álgebras: as álgebras comutativas, álgebra de Grassmann, álgebras de dimensão finita ... Neste último caso destaca-se a álgebra matricial $M_n(K)$. Com o estudo realizado por Amitsur e Levitzki em 1950 (ver [1]), foi provado que

$$s_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(2n)}$$

é uma identidade para a álgebra $M_n(K)$. Aqui, S_{2n} é o grupo simétrico de grau $2n$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ. O polinômio s_{2n} recebe um nome especial: *polinômio standard*. Na verdade, podemos dizer algo mais a respeito desse polinômio: qualquer outra identidade para $M_n(K)$ de grau $2n$ é um múltiplo escalar do polinômio standard e esta álgebra não possui nenhuma identidade de grau menor que $2n$.

Dentre tantos resultados importantes na teoria de PI-álgebras, destacamos aqui o trabalho de Krakowski e Regev (ver [9]). Em 1973 eles descreveram todas as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann G (de dimensão infinita). Quando o corpo é infinito, essas identidades são consequências do comutador triplo $[[x_1, x_2], x_3]$, onde $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Recordamos que este resultado foi obtido também em 1963 por Latyshev em [10].

Outra álgebra importante é a das matrizes triangulares superiores $U_n(K)$. Essa álgebra foi estudada por vários autores, entre eles Maltsev (ver [11]). Foi provado que as identidades polinomiais dessa álgebra seguem do polinômio

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

quando o corpo K é infinito.

Acabamos de citar as três álgebras que serão analisadas nesta dissertação do ponto de vista de *A-identidades*. Sejam A_n o grupo alternado e P_n^A o conjunto dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ dados por

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}, \ \alpha_\sigma \in K.$$

Dizemos que f é um *A-polinômio*. Se f é uma identidade polinomial para uma álgebra R, dizemos que f é uma *A-identidade* para R.

Usando a teoria de representações do grupo A_n, por volta do ano 2000 os matemáticos Henke e Regev iniciaram o estudo das A-identidades. O primeiro fato é que toda PI-álgebra R tem uma A-identidade. De fato, se $f(x_1, \dots, x_n)$ é qualquer identidade multilinear para R, então o polinômio

$$f(x_1x_2, x_3x_4, \dots, x_{2n-3}x_{2n-2}, x_{2n-1})$$

é uma A-identidade para R.

Em 2003, Henke e Regev estudaram as A-identidades da álgebra de Grassmann G (ver [7]). Eles calcularam as *A-codimensões* desta álgebra, ou seja, demonstraram que

$$c_n^A(G) = \dim \frac{P_n^A}{P_n^A \cap T(G)} = 2^{n-1} - 1,$$

onde $T(G)$ é o conjunto das identidades polinomiais de G. Nesse mesmo trabalho, eles mostraram que o polinômio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2]$$

é uma A-identidade para G e conjeturaram que esse polinômio f gera todas as A-identidades para G no seguinte sentido: sejam $\sigma \in A_n$ e $0 \leq r \leq n-4$. Denote por $p_{r,\sigma}$ e $q_{r,\sigma}$ os monômios

$$p_{r,\sigma} = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(r)}, \quad q_{r,\sigma} = x_{\sigma(r+5)} \dots x_{\sigma(n)}.$$

Defina $f_{r,\sigma}$ como sendo o A-polinômio

$$f_{r,\sigma} = p_{r,\sigma}([x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+2)}x_{\sigma(r+3)}]x_{\sigma(r+4)} - x_{\sigma(r+4)}[x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+3)}x_{\sigma(r+2)}])q_{r,\sigma}.$$

Então os polinômios $f_{r,\sigma}$ geram o espaço vetorial de **todas** as A-identidades de grau n para G.

No mesmo trabalho Henke e Regev observaram que o grau mínimo de uma A-identidade para $M_2(K)$ é 6. Isso os levou à conjetura de que o grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra $M_n(K)$ é igual a $2n + 2$.

Nesta dissertação apresentamos os resultados obtidos por D. Gonçalves e P. Koshlukov (ver [5] e [6]) que dizem respeito a respostas dadas as duas conjeturas acima. A seguir descrevemos como a dissertação está organizada.

No primeiro capítulo introduzimos alguns conceitos, exemplos e resultados básicos da PI-teoria que servirão como base para os próximos dois capítulos. Para um maior aprofundamento sobre o assunto, citamos os livros [2] e [3].

No segundo capítulo é apresentada a demonstração do Teorema 2.1.3: a veracidade da conjetura de Henke e Regev sobre as A-identidades da álgebra de Grassmann. Os resultados dessa seção se devem a D. Gonçalves e P. Koshlukov, e constam no artigo [5].

No terceiro capítulo é apresentado um estudo das A-identidades da álgebra $U_n(K)$. Na primeira seção, mostramos que o grau mínimo de uma A-identidade para $U_2(K)$ é 5 e exibimos uma A-identidade com tal grau. Na segunda seção é provado que o grau mínimo das A-identidades para $U_3(K)$ e $U_4(K)$ são 8 e 10 respectivamente. Na terceira seção é apresentado o Teorema 3.3.16: seja $d(n)$ o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$. Se $k \geq 0$ é um inteiro fixado, então existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(n) > 2n + k$$

para todo $n \geq n_0$. Observe que temos uma resposta *negativa* à segunda conjetura de Henke e Regev: mais precisamente, como $U_n(K)$ é uma subálgebra da álgebra matricial $M_n(K)$, toda identidade (em particular A-identidade) de $M_n(K)$ será uma identidade para $U_n(K)$. Portanto, dado um número k, para n suficientemente grande, não pode existir A-identidade para $M_n(K)$ cujo grau é $2n + k$. Os resultados obtidos nesse capítulo devem-se a D. Gonçalves e P. Koshlukov (ver [6]).

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Definições e Exemplos de PI-álgebras

Nesta seção abordaremos alguns conceitos básicos sobre PI-álgebras e introduziremos as notações que serão utilizadas ao longo da dissertação. Além disso, discorreremos sobre algumas identidades que são satisfeitas por álgebras importantes, dentre as quais a álgebra das matrizes triangulares superiores e a álgebra de Grassmann, que serão estudadas nos próximos capítulos. Sugerimos os livros [2] e [3] para um maior aprofundamento do assunto.

Durante toda a dissertação, fixaremos a notação K para um corpo arbitrário e $\mathbb{N}$ para o conjunto dos números naturais $\{1, 2, \ldots\}$.

Considere $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis. Denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade, livremente gerada por X. Como espaço vetorial, a álgebra $K\langle X\rangle$ tem uma base formada por 1 e pelas palavras (monômios)

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n},$$

onde $x_{i_j} \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. A multiplicação é definida por

$$(x_{i_1}\ldots x_{i_n})(x_{j_1}\ldots x_{j_m}) = x_{i_1}\ldots x_{i_n}x_{j_1}\ldots x_{j_m}.$$

Ao longo da dissertação, todas as álgebras consideradas serão associativas e com unidade.

Definição 1.1.1 *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra. Dizemos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial para R se*

$$f(r_1, \ldots, r_n) = 0$$

para quaisquer $r_1, \dots, r_n \in R$. Assim, se $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ é uma identidade polinomial para R, dizemos que R é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.1.2 *Toda álgebra comutativa R é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade polinomial $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.*

Exemplo 1.1.3 *Se R é uma álgebra de dimensão finita com $\dim R < n$, então R é uma PI-álgebra. De fato, R satisfaz a identidade standard de grau n*

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo das permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ.

Com efeito, uma vez que o polinômio standard é multilinear, é suficiente verificar que s_n se anula sobre os elementos de uma base β de R. Como $\dim R < n$, ao escolhermos n elementos de β, pelo menos um deles se repete. Logo, pelo fato de s_n ser um polinômio anti-simétrico, ele se anula sobre essa escolha, e o exemplo está verificado.

Sendo uma álgebra de dimensão finita, a álgebra das matrizes $M_2(K)$ é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio standard de grau 5. No entanto, o próximo exemplo fornece uma outra identidade importante satisfeita por essa álgebra.

Exemplo 1.1.4 *A álgebra das matrizes $M_2(K)$ satisfaz a identidade*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3],$$

que é conhecida como polinômio de Hall.

De fato, seja $r \in M_2(K)$. Seu polinômio característico é dado por

$$p(x) = x^2 - tr(r)x + det(r).$$

Aplicando o teorema de Cayley-Hamilton, temos

$$r^2 - tr(r)r + det(r)e = 0,$$

com e sendo a matriz identidade. Logo, se consideramos $r = [r_1, r_2]$, então $tr(r) = 0$ e r^2 é escalar, isto é, r^2 comuta com todo elemento de $M_2(K)$. Assim,

$$f(r_1, r_2, r_3) = 0,$$

para toda matriz $r_i \in M_2(K)$, e segue que o polinômio de Hall é uma identidade para $M_2(K)$.

Em 1950, Amitsur e Levitzki demonstraram o seguinte resultado:

Teorema 1.1.5 ([1]) *A álgebra $M_n(K)$, das matrizes de ordem n, satisfaz a identidade standard de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}.$$

Em [2] encontramos duas demonstrações para esse teorema. Uma delas deve-se a Razmyslov (na página 80) e a outra foi feita por Rosset (na página 82). Outras demonstrações poderão ser encontradas em [1], [8] e [14].

Um polinômio, já comentado anteriormente, que recebe um nome especial pela a sua importância é o seguinte:

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1.$$

Dizemos que ele é o comutador de comprimento 2. Por indução, definimos o comutador de comprimento n por

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Exemplo 1.1.6 *A álgebra $U_n(K)$, das matrizes triangulares superiores de ordem n, satisfaz a identidade*

$$f(x_1, \ldots, x_{2n}) = [x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Com efeito, se $r_1, r_2 \in U_n(K)$, então $[r_1, r_2]$ pertence a $U_n(K)$ e possui diagonal nula. Como o produto de n matrizes de $U_n(K)$ tendo diagonal nula resulta na matriz nula, segue o resultado.

Definição 1.1.7 *Seja K um corpo de característica diferente de 2. A álgebra gerada por $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$, satisfazendo as relações*

$$e_ie_j + e_je_i = 0,$$

é chamada álgebra de Grassmann (ou Exterior) e a denotamos por G.

É fato conhecido que o conjunto D, formado por 1 e pelos elementos

$$e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n} \text{ tais que } i_1 < i_2 < \dots < i_n, \quad n \geq 1,$$

é uma base para G. Definindo o comprimento de $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n}$ como sendo n, obtemos os seguintes fatos:

1. Se $a \in D$ tem comprimento par, então a pertence ao centro de G. Neste caso,
$$[a, g] = 0, \ \ \forall g \in G.$$

2. Se $a, b \in D$ têm comprimentos ímpares, então $ab = -ba$.

Exemplo 1.1.8 *A álgebra de Grassmann G satisfaz a identidade polinomial*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3].$$

De fato, uma vez que $[x_1, x_2, x_3]$ é um polinômio multilinear, basta verificar que $[a_1, a_2, a_3] = 0$ para os elementos da base de G (base considerada acima). Se a_1 ou a_2 tem comprimento par, então $[a_1, a_2] = 0$. Se a_1 e a_2 possuem comprimentos ímpares, temos que $[a_1, a_2] = 2a_1a_2$ tem comprimento par e o exemplo está verificado.

Definição 1.1.9 *Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um T-ideal se*

$$\psi(I) \subset I$$

para todo endomorfismo ψ de $K\langle X\rangle$.

Dada uma álgebra R qualquer, denotaremos por $T(R)$ o conjunto de suas identidades polinomiais. Um exemplo de T-ideal é o conjunto $T(R)$. Na verdade, todo T-ideal pode ser obtido desta maneira, isto é, dado um T-ideal I, existe uma álgebra R tal que $I = T(R)$. A saber, a álgebra R pode ser tomada como sendo o quociente $K\langle X\rangle/I$.

Dado um subconjunto S de $K\langle X\rangle$, podemos pensar no menor T-ideal que contém S. Ele existe e é a interseção de todos os T-ideais que contêm S. Dizemos que ele é o T-ideal gerado por S e abaixo damos uma descrição dele.

Proposição 1.1.10 *Se S é um subconjunto de $K\langle X\rangle$, então o T-ideal gerado por S é o espaço vetorial gerado pelos elementos do tipo*

$$g_0 f(g_1, \dots, g_n) g_{n+1},$$

onde $g_j \in K\langle X\rangle$ e $f \in S$.

Definição 1.1.11 *Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogêneo de grau b em x_i, se é uma combinação linear de monômios em cada qual a variável x_i aparece b vezes. Se f é homogêneo de grau b_i em x_i, para todo $i = 1, \ldots, n$, dizemos que f é multi-homogêneo de multigrau $(b_1, \ldots, b_n)$. Um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(1, \ldots, 1)$ é chamado multilinear de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.*

Denotaremos por P_n o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares de grau n, nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$. É fácil ver que P_n possui uma base

$$\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Definição 1.1.12 *Dois conjuntos de polinômios são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.*

O próximo resultado nos mostra que dependendo do corpo, um T-ideal é gerado pelos seus elementos multi-homogêneos (corpo infinito) ou multilineares (corpo de característica 0). Uma demonstração simples pode ser encontrada em [2, p. 39].

Proposição 1.1.13 *Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ um polinômio em $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Escreva*

$$f = \sum_n f_{(n_1,\ldots,n_m)},$$

onde $f_{(n_1,\ldots,n_m)}$ é a componente multi-homogênea de f com multigrau

$$n = (n_1, \ldots, n_m).$$

(i) *Se $\mathbb{K}$ é infinito, então*

$$\{f\} \text{ e } \{f_{(n_1,\ldots,n_m)} \mid n = (n_1, \ldots, n_m)\}$$

são equivalentes.
(ii) *Se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$, então $\{f\}$ é equivalente a um conjunto de polinômios multilineares.*

Nos Capítulos 2 e 3, estudaremos as álgebras de Grassmann e das matrizes triangulares superiores do ponto de vista de A-identidades. Portanto, enunciamos dois resultados importantes que dizem respeito a essas álgebras.

Teorema 1.1.14 ([9], [10]) *Sejam K um corpo infinito e G a álgebra de Grassmann. O T-ideal $T(G)$ é gerado pelo polinômio*

$$[x_1, x_2, x_3].$$

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada também em [2, p. 50] quando o corpo é de característica 0.

Teorema 1.1.15 *Seja $U_k(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem k. O T-ideal $T(U_k(K))$ é gerado pelo polinômio*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada também em [2, p. 52].

1.2 A-identidades

Nesta seção introduzimos o conceito de A-identidade polinomial, objeto principal desta dissertação que será abordado nos Capítulos 2 e 3 com o estudo das álgebras G e $U_n(K)$.

Seja S_n o grupo simétrico de grau n, isto é, o grupo das permutações de $\{1, \ldots, n\}$. Podemos definir em P_n uma estrutura de S_n-módulo à esquerda, cujo produto é definido por linearidade e por

$$\gamma \cdot (x_{\tau(1)} \ldots x_{\tau(n)}) = x_{\gamma\tau(1)} \ldots x_{\gamma\tau(n)},$$

onde $\gamma, \tau \in S_n$. Observe que o grupo S_n age sobre um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ da seguinte forma:

$$\gamma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\gamma(1)}, \ldots, x_{\gamma(n)}),$$

com $\gamma \in S_n$. Dessa maneira, $P_n \cap T(R)$ é um S_n-módulo a esquerda e consequentemente o quociente $P_n/P_n \cap T(R)$ também é.

Agora, seja A_n o grupo das permutações pares de S_n.

Definição 1.2.1 *Seja P_n^A o espaço vetorial com base*

$$\{x_{\gamma(1)} \ldots x_{\gamma(n)} \mid \gamma \in A_n\}.$$

Os elementos de P_n^A são denominados polinômios pares ou A-polinômios. Se R é uma álgebra com uma identidade $f \in P_n^A$, então dizemos que f é uma A-identidade para R.

Observe que toda PI-álgebra R satisfaz alguma A-identidade. Mostremos isso: se R é uma PI-álgebra, então ela satisfaz alguma identidade multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ (ver [2, p. 41]). Logo,

$$g = f(x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-3}x_{2n-2}, x_{2n-1}x_{2n})$$

é uma A-identidade para R. De fato, se um monômio $x_{\gamma(1)}x_{\gamma(2)}\ldots x_{\gamma(2n)}$ aparece na decomposição de g, então γ é um produto de permutações do tipo

$$(2i-1 \quad 2j-1)(2i \;\; 2j).$$

Logo, g é um A-polinômio. Como $f \in T(R)$ concluímos que g é uma A-identidade para R.

Podemos considerar ainda outra A-identidade com grau menor que o de g. Ela é dada por

$$f(x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-3}x_{2n-2}, x_{2n-1}).$$

Como aplicação direta da construção acima de A-identidades, segue que toda álgebra comutativa C satisfaz as A-identidades

$$[x_1x_2, x_3x_4] \text{ e } [x_1x_2, x_3],$$

pois $[x_1, x_2]$ é uma identidade para C. Além disso, como a álgebra de Grassmann G satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2, x_3],$$

então G satisfaz a A-identidade

$$[x_1x_2, x_3x_4, x_5].$$

Podemos nos perguntar se G tem alguma A-identidade com grau menor que 5? Se existir, então ela deve ser de grau 3 ou 4, pois 3 é o grau nínimo de uma identidade para G. Suponha que

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1x_2x_3 + bx_2x_3x_1 + cx_3x_1x_2$$

seja uma A-identidade para G. Aplicando f aos elementos da base de G (descritos na seção anterior), temos

$$f(e_1, e_2, e_3) = f(e_1, e_2, e_3e_4) = f(e_1, e_2e_3, e_4) = 0$$

e portanto um sistema

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ a-b+c &= 0 \\ a-b-c &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema temos que $a = b = c = 0$.

A seguir, exibimos uma A-identidade de grau 4 para G.

Proposição 1.2.2 *O polinômio par*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2]$$

é uma A-identidade para a álgebra de Grassmann G.

Demonstração. Daremos duas demonstrações diferentes, sendo que a primeira pode ser encontrada em [7] e a segunda em [4].
(D1) Como o polinômio é multilinear, basta verificar que ele se anula sobre os elementos da base de G. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 elementos da base

$$D = \{1\} \cup \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

i) Se a_1 ou a_2a_3 possui comprimento par, então ele pertence ao centro de G e portanto $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$. Observe que se a_2a_3 possui comprimento par, então a_3a_2 também possui comprimento par.

ii) Suponhamos a_1 e a_2a_3 de comprimentos ímpares. Sem perda de generalidade, assuma que a_2 e a_3 possuem comprimentos par e ímpar respectivamente. Então $[a_1, a_2a_3] = [a_1, a_3a_2]$ é central e portanto $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$.

(D2) Substituindo uma variável pelo produto de duas, temos

$$[x_1, x_2x_3, x_4] = [x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_2x_3].$$

Uma vez que $x_2x_3 = x_3x_2 + [x_2, x_3]$ segue que

$$[x_1, x_2x_3, x_4] = f(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_4[x_1, [x_2, x_3]]$$

e portanto

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2x_3, x_4] - x_4[x_2, x_3, x_1]$$

é uma identidade para G. ✓

Proposição 1.2.3 *Sejam T_1 e T_2 dois T-ideais da álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$, onde K é um corpo de característica 0. Então*

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow T_1 \cap P_n^A = T_2 \cap P_n^A, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, duas álgebras R_1 e R_2 possuem as mesmas identidades se, e somente se, possuem as mesmas A-identidades.

Demonstração.
$(\Rightarrow)$ Se $T_1 = T_2$, então eles possuem as mesmas identidades e, em particular, as mesmas A-identidades. Portanto, $T_1 \cap {P_n}^A = T_2 \cap {P_n}^A$.
$(\Leftarrow)$ Como a característica de K é 0, todo T-ideal é gerado pelos seus elementos multilineares. Dessa forma, provaremos que

$$T_1 \cap P_n = T_2 \cap P_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_1 \cap P_n$, então

$$g(x_1, \ldots, x_{2n-1}) = f(x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-3}x_{2n-2}, x_{2n-1})$$

pertence a $T_1 \cap P_{2n-1}^A$ e portanto a $T_2 \cap P_{2n-1}^A$. Logo,

$$f(x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}) = g(x_1, 1, x_3, 1, \ldots, x_{2n-3}, 1, x_{2n-1}) \in T_2.$$

Renomeando as variáveis obtemos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_2 \cap P_n$. Assim, está provado que $T_1 \cap P_n \subset T_2 \cap P_n$. A prova de que $T_2 \cap P_n \subset T_1 \cap P_n$ é análoga. ✓

Finalizamos a seção com o seguinte comentário: uma vez que P_n é um S_n-módulo, temos em particular que P_n é um A_n-módulo. Portanto, em P_n^A também temos uma estrutura de A_n-módulo. Aqui o produto continua a ser

$$\gamma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\gamma(1)}, \ldots, x_{\gamma(n)}),$$

onde $f \in P_n^A$ e $\gamma \in A_n$. Se R é uma álgebra, é fácil ver que o conjunto das suas A-identidades de grau n é um A_n-módulo. Neste caso, podemos usar a Teoria de Representações do Grupo Alternado para estudar as A-identidades de determinada álgebra.

Capítulo 2

Álgebra de Grassmann

2.1 A-identidades da Álgebra de Grassmann

Nesta seção descreveremos as A-identidades para a álgebra de Grassmann G sobre um corpo algebricamente fechado e de característica 0. Os resultados aqui apresentados encontram-se em [4] e [5].

Para facilitar a compreensão do leitor, definiremos alguns polinômios que serão usados ao longo da dissertação. Fixado $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$, seja $\gamma \in A_n$ uma permutação par e $0 \leq h \leq n-4$ um número inteiro. Defina 4 polinômios segundo os itens abaixo:

a) Monômios

$$f_{h,\gamma} = x_{\gamma(1)} \dots x_{\gamma(h)} \text{ e } g_{h,\gamma} = x_{\gamma(h+5)} \dots x_{\gamma(n)}.$$

b) Polinômio

$$u_{h,\gamma} = [x_{\gamma(h+1)}, x_{\gamma(h+2)}x_{\gamma(h+3)}]x_{\gamma(h+4)} - x_{\gamma(h+4)}[x_{\gamma(h+1)}, x_{\gamma(h+3)}x_{\gamma(h+2)}].$$

c) A-polinômio

$$p_{h,\gamma} = f_{h,\gamma}u_{h,\gamma}g_{h,\gamma}. \tag{2.1}$$

Não é difícil ver que

$$p_{h,id} = x_1 \dots x_h([x_{h+1}, x_{h+2}x_{h+3}]x_{h+4} - x_{h+4}[x_{h+1}, x_{h+3}x_{h+2}])x_{h+5} \dots x_n$$

é um A-polinômio. Logo,

$$p_{h,\gamma} = \gamma \cdot p_{h,id}$$

de fato é um A-polinômio. Na verdade ele é algo mais: uma vez que

$$[x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2]$$

é uma identidade para álgebra de Grassmann G segue que $p_{h,\gamma}$ é uma A-identidade para G. Como combinações lineares desses polinômios $p_{h,\gamma}$ continuam sendo A-identidades para G, podemos nos perguntar se todas as A-identidades para G são obtidas dessa maneira. Essa foi exatamente a pergunta feita por Henke e Regev em [7]:

Conjetura 2.1.1 ([7]) *Se K é corpo algebricamente fechado com $char(K) = 0$, então o espaço vetorial gerado por*

$$\{p_{h,\gamma} \,|\, \gamma \in A_n \text{ } e \text{ } 0 \leq h \leq n-4\}$$

*é o conjunto de **todas** as A-identidades polinomiais de grau n para a álgebra de Grassmann G.*

Nesse mesmo artigo Henke e Regev usam a teoria de representações do grupo alternado A_n e uma técnica do artigo [9] para obter o seguinte resultado:

Teorema 2.1.2 ([7]) *Se K é corpo algebricamente fechado com $char(K) = 0$, então a n-ésima A-codimensão da álgebra de Grassmann G é*

$$\dim\left(\frac{P_n^A}{P_n^A \cap T(G)}\right) = 2^{n-1} - 1.$$

Utilizando-se desse teorema, D. Gonçalves e P. Koshlukov deram uma resposta positiva para a conjetura acima. Eles provaram o seguinte:

Teorema 2.1.3 ([4],[5]) *Seja $V(n)$ o espaço vetorial gerado pelo conjunto*

$$\{p_{h,\gamma} \,|\, \gamma \in A_n \text{ } e \text{ } 0 \leq h \leq n-4\}.$$

Se K é corpo algebricamente fechado com $char(K) = 0$, então

$$\dim\left(\frac{P_n^A}{V(n)}\right) = 2^{n-1} - 1.$$

Note que os Teoremas 2.1.2 e 2.1.3 implicam imediatamente que a Conjetura 2.1.1 é verdadeira. De fato, por eles temos que

$$\dim(P_n^A \cap T(G)) = \dim(V(n))$$

e portanto $P_n^A \cap T(G) = V(n)$, pois $V(n) \subseteq P_n^A \cap T(G)$.

Nesta seção assumiremos o Teorema 2.1.2 e provaremos o Teorema 2.1.3.

Primeiro caracterizaremos $V(n)$, expressando algumas de suas propriedades. Considere o A_n-módulo quociente $P_n^A/V(n)$, e denote por $y_{\gamma(1)}y_{\gamma(2)}\ldots y_{\gamma(n)}$ a imagem de $x_{\gamma(1)}x_{\gamma(2)}\ldots x_{\gamma(n)}$ no quociente, ou seja,

$$y_{\gamma(1)}y_{\gamma(2)}\ldots y_{\gamma(n)} = x_{\gamma(1)}x_{\gamma(2)}\ldots x_{\gamma(n)} + V(n),$$

onde $\gamma \in A_n$.

Sejam m_1 e m_2 dois monômios (nas variáveis y's) e

$$p = \sum_q \alpha_q \cdot q,\ \alpha_q \in K,$$

uma combinação linear de monômios q tais que $m_1pm_2 \in P_n^A/V(n)$. Por comodidade, em uma igualdade do tipo

$$m_1pm_2 = 0,$$

substituiremos m_1 e m_2 por $*$ e $**$, respectivamente. Assim, a igualdade ficará com a aparência

$$\sum_q \alpha_q(*q**) = 0.$$

Lema 2.1.4 *Se $*y_ay_by_cy_d**$ é um monômio em $P_n^A/V(n)$, então*

$$*y_ay_by_cy_d** - *y_dy_ay_cy_b** - *y_by_cy_ay_d** + *y_dy_cy_by_a** = 0. \tag{2.2}$$

Demonstração. Sejam $\gamma \in A_n$ uma permutação par e $0 \leq h \leq n-4$ um número inteiro tais que

$$*y_ay_by_cy_d** = y_{\gamma(1)}\cdots y_{\gamma(h)}y_{\gamma(h+1)}y_{\gamma(h+2)}y_{\gamma(h+3)}y_{\gamma(h+4)}y_{\gamma(h+5)}\cdots y_{\gamma(n)}.$$

Identificando $*$ e $**$ com os monômios $y_{\gamma(1)}\ldots y_{\gamma(h)}$ e $y_{\gamma(h+5)}\ldots y_{\gamma(n)}$ respectivamente e identificando

$$y_{\gamma(h+1)}y_{\gamma(h+2)}y_{\gamma(h+3)}y_{\gamma(h+4)} = y_ay_by_cy_d$$

temos por (2.1) o resultado desejado, isto é,

$$p_{h,\gamma} + V(n) = 0.$$

✓

Observe que a igualdade (2.2) significa que em $P_n^A/V(n)$,

$$m_1 y_a y_b y_c y_d m_2 - m_1 y_d y_a y_c y_b m_2 - m_1 y_b y_c y_a y_d m_2 + m_1 y_d y_c y_b y_a m_2 = 0,$$

para certos monômios m_1 e m_2. Para visualisar melhor o comportamento das variáveis y_a, y_b, y_c e y_d na igualdade (2.2), vamos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 0 &= +*y_a y_b y_c y_d ** && (2.3)\\ & -*y_d y_a y_c y_b ** && (2.4)\\ & -*y_b y_c y_a y_d ** && (2.5)\\ & +*y_d y_c y_b y_a **. && (2.6) \end{aligned}$$

Se $\gamma \in A_n$ e $\gamma(i) = a$, dizemos que a variável y_a ocupa a posição i no monômio $y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n)}$. Observe o comportamento das variáveis y_a e y_c acima, isto é, as posições que elas ocupam nos 4 monômios. Isso será muito útil.

Nos resultados que demonstraremos a seguir, buscamos diminuir o número de geradores do espaço vetorial $P_n^A/V(n)$. O objetivo é encontrar $2^{n-1} - 1$ deles.

Lema 2.1.5 *O espaço vetorial $P_n^A/V(n)$ é gerado pelos monômios do tipo*

$$m = y_{\gamma(1)} y_{\gamma(2)} \dots y_{\gamma(n-2)} y_{\gamma(n-1)} y_{\gamma(n)},$$

onde y_n ocupa uma das três últimas posições. Em outras palavras,

$$\gamma(n-2) = n \ \ ou\ \ \gamma(n-1) = n \ \ ou\ \ \gamma(n) = n.$$

Demonstração. Seja $m = y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n)}$ um monômio em $P_n^A/V(n)$. Se y_n ocupa a i-ésima posição de m e $i < n-2$, então identifique m com o monômio (2.3), isto é,

$$a = n,\ b = \gamma(i+1),\ c = \gamma(i+2),\ d = \gamma(i+3).$$

Assim, m é uma combinação linear de três monômios, onde a variável y_n aparece em cada um deles na posição $i+1$ (monômio em (2.4)) ou $i+2$ (monômio em (2.5)) ou $i+3$ (monômio em (2.6)). Ao aplicarmos indução nesses três monômios, temos o resultado desejado. ✓

Para um melhor entendimento de como ocorre esse processo, segue um exemplo:

Exemplo 2.1.6 *Em $P_6^A/V(6)$, considere o monômio $m = y_1y_6y_4y_2y_3y_5$. Identificando*

$$* = y_1,\ 6 = a,\ 4 = b,\ 2 = c,\ 3 = d,\ ** = y_5$$

e aplicando o argumento da demonstração do lema anterior, temos

$$m = y_1y_6y_4y_2y_3y_5 = y_1y_3y_6y_2y_4y_5 + y_1y_4y_2y_6y_3y_5 - y_1y_3y_2y_4y_6y_5.$$

Observe que os 2 últimos somandos já estão de acordo com o nosso resultado. Assim, aplicando o mesmo argumento ao somando $y_1y_3y_6y_2y_4y_5$, com

$$* = y_1y_3,\ 6 = a,\ 2 = b,\ 4 = c,\ 5 = d,$$

obtemos

$$m = (y_1y_3y_5y_6y_4y_2 + y_1y_3y_2y_4y_6y_5 - y_1y_3y_5y_4y_2y_6)+$$

$$+y_1y_4y_2y_6y_3y_5 - y_1y_3y_2y_4y_6y_5.$$

Definição 2.1.7 *Considere $1 \leq k, l \leq n$ dois números distintos, e denote por $W(k,l)$ o espaço vetorial gerado pelos monômios $y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n)}$ tais que $\gamma(k) = n$ e $\gamma(l) = n-2$, ou seja, monômios nos quais as variáveis y_n e y_{n-2} ocupam respectivamente as posições k e l.*

Exemplo 2.1.8 $m = y_{\gamma(1)}y_{\gamma(2)}y_ny_{\gamma(4)}y_{n-2}y_{\gamma(6)} \dots y_{\gamma(n-1)}y_{\gamma(n)} \in W(3,5)$.

Lema 2.1.9 *O espaço vetorial $P_n^A/V(n)$ é a soma dos subespaços $W(k,l)$, onde k e l são $\geq n-3$. Em outras palavras, $P_n^A/V(n)$ é gerado como espaço vetorial pelos monômios em que ambas as variáveis y_n e y_{n-2} aparecem nas 4 últimas posições.*

Demonstração. Pelo último lema e pela identidade (2.2), temos que

$$P_n^A/V(n) = \sum_{i \geq n-3} W(n,i) + \sum_{i \geq n-4} W(n-1,i) + \sum_{i \geq n-5} W(n-2,i). \qquad (2.7)$$

Escreva

$$\Lambda = \sum_{i,j \geq n-3} W(j,i).$$

Queremos mostrar que $P_n^A/V(n) = \Lambda$. Primeiro mostraremos que não precisamos de $W(n-2, n-5)$ no somatório (2.7). Seja

$$m = *y_{n-2}y_{i_1}y_{i_2}y_ny_{i_3}y_{i_4} \in W(n-2, n-5).$$

Identificando m com o monômio em (2.5), isto é, fazendo

$$y_b = y_{i_1},\ y_c = y_{i_2},\ y_a = y_n,\ y_d = y_{i_3},$$

temos que m é combinação linear de

$$m_1 = *y_{n-2}y_ny_{i_1}y_{i_2}y_{i_3}y_{i_4}$$

$$m_2 = *y_{n-2}y_{i_3}y_ny_{i_2}y_{i_1}y_{i_4}$$

$$m_3 = *y_{n-2}y_{i_3}y_{i_2}y_{i_1}y_ny_{i_4}.$$

Identificando m_1 com (2.5) de modo que $y_c = y_n$, identificando m_2 com (2.3) de modo que $y_c = y_n$ e identificando m_3 com (2.3) de modo que $y_a = y_{n-2}$, obtemos que esses 3 monômios são combinações lineares de monômios onde duas das 5 últimas posições são ocupadas por y_n e y_{n-2}. Obtemos assim que

$$P_n^A/V(n) = \sum_{i,\,j \geq n-4} W(j,i).$$

Utilizando um argumento parecido com o do último lema e novamente várias vezes a identidade (2.2), segue que

$$P_n^A/V(n) = \sum_{i \geq n-3} W(n,i) + \sum_{i \geq n-4} W(n-1,i) + \sum_{i \geq n-4} W(n-2,i).$$

Podemos usar o mesmo argumento para os outros $W(i,j)$, de modo a eliminá-los e obter

$$\sum_{i,\,j \geq n-3} W(j,i) = P_n^A/V(n).$$

Concluímos assim a demonstração. ✓

Agora considere

$$W = \sum_{l=n-3}^{n-1} W(n,l) + \sum_{k=n-3}^{n-1} W(k,n).$$

Isso significa que W é o espaço vetorial gerado pelos monômios nos quais a última posição é ocupada por y_n ou por y_{n-2}.

Chamamos a atenção do leitor para a afirmação a seguir, que é um passo muito importante para a demonstração do Teorema 2.1.3. Além disso, o próximo resultado deixa explícito a estratégia de diminuir ao máximo a quantidade de geradores do espaço vetorial $P_n^A/V(n)$.

Proposição 2.1.10 $P_n^A/V(n) = W + W(n-1, n-2) + W(n-2, n-1)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.1.9, devemos mostrar que os monômios de $P_n^A/V(n)$ pertencentes aos subespaços vetoriais

$$W(n-2, n-3),\ W(n-1, n-3),\ W(n-3, n-2),\ W(n-3, n-1),$$

são combinações lineares de monômios em W, $W(n-1, n-2)$ e $W(n-2, n-1)$. Para isso, utilizaremos diversas vezes a igualdade (2.2), a qual reescrevemos abaixo:

$$*y_a y_b y_c y_d ** - *y_d y_a y_c y_b ** - *y_b y_c y_a y_d ** + *y_d y_c y_b y_a ** = 0.$$

Caso 1. Seja $m = y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n-4)} y_{n-2} y_n y_{\gamma(n-1)} y_{\gamma(n)} \in W(n-2, n-3)$. Identificando $d = n-2$, $a = n$, $c = \gamma(n-1)$, $b = \gamma(n)$, $* = y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n-4)}$ e $**$ um monômio de comprimento nulo, reescrevemos a igualdade (2.2) como

$$*y_d y_a y_c y_b ** = *y_a y_b y_c y_d ** - *y_b y_c y_a y_d ** + *y_d y_c y_b y_a **,$$

e obtemos

$$\begin{aligned} m = *y_{n-2} y_n y_{\gamma(n-1)} y_{\gamma(n)} = *y_n y_{\gamma(n)} y_{\gamma(n-1)} y_{n-2} \quad &- \quad *y_{\gamma(n)} y_{\gamma(n-1)} y_n y_{n-2} \\ &+ \quad *y_{n-2} y_{\gamma(n-1)} y_{\gamma(n)} y_n. \end{aligned}$$

Todos os monômios do lado direito desta igualdade pertencem a W, pois possuem y_{n-2} ou y_n na última posição. Logo, $m \in W$ e, portanto,

$$W(n-2, n-3) \subset W.$$

Caso 2. Considere $m = y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n-4)} y_n y_{n-2} y_{\gamma(n-1)} y_{\gamma(n)} \in W(n-3, n-2)$. Analogamente ao *Caso 1*, identificando $d = n$, $a = n-2$, $c = \gamma(n-1)$, $b = \gamma(n)$, $* = y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n-4)}$ e $**$ um monômio de comprimento nulo, manipulamos a igualdade (2.2) e obtemos

$$\begin{aligned} m = *y_n y_{n-2} y_{\gamma(n-1)} y_{\gamma(n)} = *y_{n-2} y_{\gamma(n)} y_{\gamma(n-1)} y_n \quad &- \quad *y_{\gamma(n)} y_{\gamma(n-1)} y_{n-2} y_n \\ &+ \quad *y_n y_{\gamma(n-1)} y_{\gamma(n)} y_{n-2}. \end{aligned}$$

Note que todos os monômios do lado direito da igualdade pertencem a W, pois têm y_{n-2} ou y_n na última posição. Assim, $m \in W$ e, portanto,

$$W(n-3, n-2) \subset W.$$

Caso 3. Seja $m = y_{\gamma(1)} \ldots y_{\gamma(n-4)} y_{n-2} y_{\gamma(n-2)} y_n y_{\gamma(n)} \in W(n-1, n-3)$. Agora, reescrevemos a igualdade (2.2) como

$$*y_d y_c y_b y_a ** = - * y_a y_b y_c y_d ** + *y_d y_a y_c y_b ** + *y_b y_c y_a y_d **$$

e identificamos $d = n-2$, $c = \gamma(n-2)$, $b = n$, $a = \gamma(n)$, $* = y_{\gamma(1)} \ldots y_{\gamma(n-4)}$ e $**$ um monômio de comprimento nulo. Ou seja, identificamos m com $*y_d y_c y_b y_a **$. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} m = *y_{n-2} y_{\gamma(n-2)} y_n y_{\gamma(n)} = - * y_{\gamma(n)} y_n y_{\gamma(n-2)} y_{n-2} &+ *y_{n-2} y_{\gamma(n)} y_{\gamma(n-2)} y_n \\ &+ *y_n y_{\gamma(n-2)} y_{\gamma(n)} y_{n-2}. \end{aligned}$$

Analogamente ao *Caso 1*, todos os monômios do lado direito da igualdade pertencem a W. Logo, $m \in W$ e assim

$$W(n-1, n-3) \subset W.$$

Caso 4. Considere $m = y_{\gamma(1)} \ldots y_{\gamma(n-4)} y_n y_{\gamma(n-2)} y_{n-2} y_{\gamma(n)} \in W(n-3, n-1)$. Note que é suficiente trocar de lugares d e b no *Caso 3*, isto é, identificar $d = n$ e $b = n-2$. Assim, também considerando $c = \gamma(n-2)$, $a = \gamma(n)$, $* = y_{\gamma(1)} \ldots y_{\gamma(n-4)}$ e $**$ um monômio de comprimento nulo, identificamos m com $*y_d y_c y_b y_a **$ e obtemos

$$\begin{aligned} m = *y_n y_{\gamma(n-2)} y_{n-2} y_{\gamma(n)} = - * y_{\gamma(n)} y_{n-2} y_{\gamma(n-2)} y_n &+ *y_n y_{\gamma(n)} y_{\gamma(n-2)} y_{n-2} \\ &+ *y_{n-2} y_{\gamma(n-2)} y_{\gamma(n)} y_n. \end{aligned}$$

Como nos casos anteriores, todos os monômios do lado direito da igualdade pertencem a W. Portanto, $m \in W$, e concluímos que

$$W(n-3, n-1) \subset W.$$

Dessa maneira, foram considerados todos os casos possíveis, e a demonstração está completa. ✓

Corolário 2.1.11 $P_n^A / V(n) = W + W(n-2, n-1)$.

Demonstração. Considere

$$m = y_{\gamma(1)} \ldots y_{\gamma(n-4)} y_{\gamma(n-3)} y_{n-2} y_n y_{\gamma(n)} \in W(n-1, n-2)$$

e reescreva a igualdade (2.2) como

$$*y_ay_by_cy_d ** = *y_dy_ay_cy_b ** + *y_by_cy_ay_d ** - *y_dy_cy_by_a **.$$

Identificando $a = \gamma(n-3)$, $b = n-2$, $c = n$, $d = \gamma(n)$, $* = y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n-4)}$ e $**$ um monômio de comprimento nulo, temos

$$\begin{aligned} m = *y_{\gamma(n-3)}y_{n-2}y_ny_{\gamma(n)} = *y_{\gamma(n)}y_{\gamma(n-3)}y_ny_{n-2} &+ *y_{n-2}y_ny_{\gamma(n-3)}y_{\gamma(n)} \\ &- *y_{\gamma(n)}y_ny_{n-2}y_{\gamma(n-3)}. \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} *y_{\gamma(n)}y_{\gamma(n-3)}y_ny_{n-2} &\in W, \\ *y_{n-2}y_ny_{\gamma(n-3)}y_{\gamma(n)} &\in W(n-2, n-3), \\ *y_{\gamma(n)}y_ny_{n-2}y_{\gamma(n-3)} &\in W(n-2, n-1), \end{aligned}$$

temos que $m \in W + W(n-2, n-3) + W(n-2, n-1)$. Além disso, pela demonstração da última proposição, sabemos que $W(n-2, n-3) \subseteq W$. Portanto

$$m \in W + W(n-2, n-1),$$

e o corolário está demonstrado. ✓

Note que a estratégia antes anunciada de reduzir ao máximo a quantidade de geradores de $P_n^A/V(n)$ está sendo satisfatória, já que reduzimos $P_n^A/V(n)$ somente à soma dos seus subespaços W e $W(n-2, n-1)$.

Lema 2.1.12 *No espaço vetorial $P_5^A/V(5)$ são válidas as igualdades*

$$[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = 0 \quad e \quad [y_1y_2, y_3y_4, y_5] = 0.$$

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, fazemos uso da igualdade (2.2), e efetuamos alguns cálculos. Assim, expandindo o comutador $[y_1y_2, y_3, y_4y_5]$, obtemos

$$[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = y_1y_2y_3y_4y_5 - y_3y_1y_2y_4y_5 - y_4y_5y_1y_2y_3 + y_4y_5y_3y_1y_2.$$

Agora, identificando $3 = a$, $1 = b$, $2 = c$, $4 = d$, $** = y_5$ e $*$ um monômio de comprimento nulo, reescrevemos a segunda parcela da soma utilizando a igualdade (2.2) e obtemos

$$\begin{aligned} -(y_3y_1y_2y_4)y_5 &= -(y_4y_3y_2y_1 + y_1y_2y_3y_4 - y_4y_2y_1y_3)y_5 \\ &= -y_4y_3y_2y_1y_5 - y_1y_2y_3y_4y_5 + y_4y_2y_1y_3y_5. \end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio no monômio $-y_4y_3y_2y_1y_5$, dessa vez identificando $3 = a$, $2 = b$, $1 = c$, $5 = d$, $* = y_4$ e $**$ um monômio de comprimento nulo, e posteriormente fazendo o devido cancelamento dos termos simétricos, chegamos a

$$\begin{aligned}
-y_3y_1y_2y_4y_5 &= -y_4(y_3y_2y_1y_5) - y_1y_2y_3y_4y_5 + y_4y_2y_1y_3y_5 \\
&= -y_4(y_5y_3y_1y_2 + y_2y_1y_3y_5 - y_5y_1y_2y_3) \\
&\quad -y_1y_2y_3y_4y_5 + y_4y_2y_1y_3y_5 \\
&= -y_4y_5y_3y_1y_2 - y_4y_2y_1y_3y_5 + y_4y_5y_1y_2y_3 \\
&\quad -y_1y_2y_3y_4y_5 + y_4y_2y_1y_3y_5 \\
&= -y_4y_5y_3y_1y_2 + y_4y_5y_1y_2y_3 - y_1y_2y_3y_4y_5.
\end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo essa nova expressão do monômio $-y_3y_1y_2y_4y_5$ em $[y_1y_2, y_3, y_4y_5]$, obtemos que $[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = 0$ em $P_5^A/V(5)$. Manipulando a Identidade de Jacobi, temos que a segunda igualdade é consequência da primeira. De fato,

$$[y_1y_2, y_3y_4, y_5] + [y_5, y_1y_2, y_3y_4] + [y_3y_4, y_5, y_1y_2] = 0$$

implica em

$$[y_1y_2, y_3y_4, y_5] = -[[y_5, y_1y_2], y_3y_4] - [y_3y_4, y_5, y_1y_2].$$

Usando que $-[y_5, y_1y_2] = [y_1y_2, y_5]$, obtemos

$$[y_1y_2, y_3y_4, y_5] = [y_1y_2, y_5, y_3y_4] - [y_3y_4, y_5, y_1y_2].$$

Como $[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = 0$ em $P_5^A/V(5)$, fazendo uma mudança de variáveis notamos que os dois termos do lado direito da igualdade também são nulos sobre $P_5^A/V(5)$, o que conclui a demonstração. ✓

Essencialmente, pela notação já colocada, observe que o resultado anterior significa que $[x_1x_2, x_3, x_4x_5]$ e $[x_1x_2, x_3x_4, x_5]$ são polinômios em $V(5)$.

Corolário 2.1.13 *Se* $n \geq 3$*, então*

$$*[y_1y_2, y_3y_4, \ldots, y_{2n-1}y_{2n}] ** = 0.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em n. Considere $n = 3$ e a identidade $[u, vw] = v[u, w] + [u, v]w$. Identificando $[y_1y_2, y_3y_4] = u$, $y_5 = v$ e $y_6 = w$, obtemos

$$[y_1y_2, y_3y_4, y_5y_6] = [[y_1y_2, y_3y_4], y_5y_6] = y_5[y_1y_2, y_3y_4, y_6] + [y_1y_2, y_3y_4, y_5]y_6.$$

Pelo Lema 2.1.12 temos que

$$x_5[x_1x_2, x_3x_4, x_6] \quad \text{e} \quad [x_1x_2, x_3x_4, x_5]x_6$$

pertencem a $V(6)$. Logo, em $P_6^A/V(6)$,

$$[y_1y_2, y_3y_4, y_5y_6] = 0$$

e portanto

$$*[y_1y_2, y_3y_4, y_5y_6] ** = 0.$$

Assumamos, por indução, que o resultado é válido para n. Mostraremos que

$$*[y_1y_2, y_3y_4, \ldots, y_{2n-1}y_{2n}, y_{2n+1}y_{2n+2}] ** = 0.$$

Denotando o monômio $y_{2n+1}y_{2n+2}$ por m_{n+1}, observamos que

$$[y_1y_2, \ldots, m_{n+1}] = [y_1y_2, \ldots, y_{2n-1}y_{2n}]m_{n+1} - m_{n+1}[y_1y_2, \ldots, y_{2n-1}y_{2n}].$$

Por indução, como $[y_1y_2, \ldots, y_{2n-1}y_{2n}] = 0$ em $P_{2n}^A/V(2n)$, temos que

$$[x_1x_2, \ldots, x_{2n-1}x_{2n}] \in V(2n).$$

Então,

$$[x_1x_2, \ldots, x_{2n-1}x_{2n}]x_{2n+1}x_{2n+2} \ \text{ e } \ x_{2n+1}x_{2n+2}[x_1x_2, \ldots, x_{2n-1}x_{2n}]$$

pertencem a $V(2n+2)$ e portanto

$$[y_1y_2, \ldots, y_{2n+1}y_{2n+2}] = 0.$$

Em particular,

$$*[y_1y_2, y_3y_4, \ldots, y_{2n-1}y_{2n}, y_{2n+1}y_{2n+2}] ** = 0,$$

e está demonstrado o corolário. ✓

Proposição 2.1.14 *Considere $n \geq 4$ e $m = *y_ny_{n-2}m'$ um monômio. Se m' possui comprimento par, então $m \in W$.*

Demonstração. A demonstração será por indução no comprimento de m'. Suponhamos que o comprimento de m' seja igual a $2k$, onde $k \geq 0$. Se $k = 0$ então $m = *y_n y_{n-2}$ e portanto $m \in W$. Se $k = 1$, então $m = *y_n y_{n-2} m' \in W(n-3, n-2)$. Pelo Caso 2 da demonstração da Proposição 2.1.10 segue que $m \in W$.

Seja $m = *y_n y_{n-2} y_a y_b y_c y_d **$, onde $m' = y_a y_b y_c y_d **$ é um monômio de comprimento $2k$, $k \geq 2$. Pelo Corolário 2.1.13 temos que

$$*[y_n y_{n-2}, y_a y_b, y_c y_d] ** = 0,$$

isto é,

$$m = *y_a y_b y_n y_{n-2} y_c y_d ** + *y_c y_d y_n y_{n-2} y_a y_b ** - *y_c y_d y_a y_b y_n y_{n-2} **.$$

Aplicando indução nos monômios à direita da igualdade, segue que $m \in W$. ✓

Segue um exemplo para facilitar o entendimento:

Exemplo 2.1.15 *Seja* $m = y_6 y_4 y_3 y_5 y_1 y_2 \in P_6^A / V(6)$. *Observe que na notação do último resultado temos que* $n = 6$, $m' = y_3 y_5 y_1 y_2$ *e o monômio* $*$ *é de comprimento nulo. Pelo Corolário 2.1.13, temos* $[y_6 y_4, y_3 y_5, y_1 y_2] = 0$, *e portanto*

$$y_6 y_4 \cdot y_3 y_5 \cdot y_1 y_2 = y_3 y_5 \cdot y_6 y_4 \cdot y_1 y_2 + y_1 y_2 \cdot y_6 y_4 \cdot y_3 y_5 - y_1 y_2 \cdot y_3 y_5 \cdot y_6 y_4.$$

Note que os dois primeiros termos da soma, no segundo membro da equação, pertencem a $W(n-3, n-2) \subseteq W$ *e o último termo da soma pertence a* W. *Logo,* $m = y_6 y_4 y_3 y_5 y_1 y_2 \in W$.

Lema 2.1.16 *Seja* $m = *y_a y_b y_n y_{n-2} y_c ** \in (P_n^A / V(n)) \setminus W$ *um monômio. Então existem* $w_1, w_2 \in W$ *tais que*

$$m = *y_n y_{n-2} y_a y_b y_c ** + w_1 \ ; \quad m = *y_b y_c y_n y_{n-2} y_a ** + w_2.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.1.14, o $**$ do lado direito de m representa um monômio de comprimento par. De fato, se $**$ tem comprimento ímpar, então $m' = y_c **$ tem comprimento par e portanto $m \in W$. Absurdo.

Provaremos a existência de w_1: pelo Lema 2.1.12 temos $[y_1 y_2, y_3 y_4, y_5] = 0$. Ou seja,

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 - y_3 y_4 y_1 y_2 y_5 - y_5 y_1 y_2 y_3 y_4 + y_5 y_3 y_4 y_1 y_2 = 0.$$

Substituindo os índices 1, 2, 3, 4 e 5 por a, b, n, $n-2$ e c, respectivamente, e multiplicando a expressão acima por $*$ à esquerda e $**$ à direita, obtemos

$$*y_a y_b y_n y_{n-2} y_c ** = *y_n y_{n-2} y_a y_b y_c ** + *y_c y_a y_b y_n y_{n-2} ** - *y_c y_n y_{n-2} y_a y_b **.$$

Atente para o fato que $*y_c y_a y_b y_n y_{n-2} **$ e $*y_c y_n y_{n-2} y_a y_b **$ pertencem a W pela Proposição 2.1.14, pois $**$ representa um monômio de comprimento par. Logo, sendo $w_1 = *y_c y_a y_b y_n y_{n-2} ** - *y_c y_n y_{n-2} y_a y_b ** \in W$, segue que

$$m = *y_n y_{n-2} y_a y_b y_c ** + w_1.$$

Para provar a existência de w_2, usaremos a igualdade $[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = 0$ obtida no Lema 2.1.12. Substituindo os índices 1, 2, 3, 4 e 5 por n, $n-2$, a, b e c, respectivamente, e multiplicando a expressão acima por $*$ à esquerda e $**$ à direita, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = *[y_n y_{n-2}, y_a, y_b y_c] ** &= + * y_n y_{n-2} y_a y_b y_c ** - *y_a y_n y_{n-2} y_b y_c ** \\ &\quad - * y_b y_c y_n y_{n-2} y_a ** + *y_b y_c y_a y_n y_{n-2} **. \end{aligned}$$

Como $**$ é um monômio de comprimento par, segue que o segundo e quarto somandos pertencem a W. Logo,

$$*y_n y_{n-2} y_a y_b y_c ** \equiv *y_b y_c y_n y_{n-2} y_a ** \pmod W.$$

Como $*y_n y_{n-2} y_a y_b y_c ** \equiv *y_a y_b y_n y_{n-2} y_c ** \pmod W$ (primeira igualdade do lema), concluímos o resultado. ✓

Lema 2.1.17 *Seja* $m = *y_a y_n y_{n-2} y_b y_c ** \in (P_n^A / V(n)) \setminus W$ *um monômio. Então*

$$m = *y_c y_n y_{n-2} y_a y_b ** + w_3$$

para algum $w_3 \in W$.

Demonstração. O $**$ do lado direito em m representa um monômio de comprimento ímpar. De fato, se $**$ tem comprimento par, então $m' = y_b y_c **$ tem comprimento par e portanto, pela Proposição 2.1.14, $m \in W$. Absurdo.

Considere a primeira igualdade do Lema 2.1.12:

$$0 = [y_1y_2, y_3, y_4y_5] = y_1y_2y_3y_4y_5 - y_3y_1y_2y_4y_5 - y_4y_5y_1y_2y_3 + y_4y_5y_3y_1y_2.$$

Então substituímos nessa igualdade os índices 1, 2, 3, 4 e 5 por a, b, c, n e $n-2$, respectivamente, e multiplicamos por $*$ à esquerda e $**$ à direita. Assim, obtemos

$$*y_ay_by_cy_ny_{n-2}** - *y_cy_ay_by_ny_{n-2}** - *y_ny_{n-2}y_ay_by_c** + *y_ny_{n-2}y_cy_ay_b** = 0.$$

Observe que os últimos dois somandos pertencem a W, pois o $**$ do lado direito é um monômio de comprimento ímpar. Portanto,

$$*y_ay_by_cy_ny_{n-2} ** \equiv *y_cy_ay_by_ny_{n-2} ** \pmod{W}. \tag{2.8}$$

Agora, para obtermos a expressão procurada, transformamos os dois monômios de uma forma adequada ao nosso propósito. Como $**$ tem comprimento ímpar, podemos escrever $** = y_du$ para algum monômio u. Aplicando a primeira igualdade do Lema 2.1.16 ao monômio $y_by_cy_ny_{n-2}y_d$ obtemos

$$*y_ay_by_cy_ny_{n-2}y_du = *y_ay_ny_{n-2}y_by_cy_du + w_1, w_1 \in W.$$

Isso nos dá

$$*y_ay_by_cy_ny_{n-2} ** \equiv *y_ay_ny_{n-2}y_by_c ** \pmod{W}.$$

Analogamente, considerando o monômio $*y_cy_ay_by_ny_{n-2}y_du$ e aplicando novamente a primeira igualdade do Lema 2.1.16, obtemos

$$*y_cy_ay_by_ny_{n-2}y_du = *y_cy_ny_{n-2}y_ay_by_du + {w_1}', {w_1}' \in W.$$

Disso, resulta

$$*y_cy_ay_by_ny_{n-2} ** \equiv *y_cy_ny_{n-2}y_ay_b ** \pmod{W}.$$

Pelas duas últimas congruências da demonstração do lema e por (2.8) segue o resultado. ✓

Observação 2.1.18 *Sob as hipóteses dos dois últimos lemas, podemos fazer um deslocamento do bloco y_ny_{n-2} em duas unidades ou fazer permutações cíclicas das variáveis y_a, y_b e y_c. Nessas situações, obteremos um novo monômio igual a m, a menos de um elemento em W.*

Lema 2.1.19 *Seja $m = y_{\gamma(1)} \dots y_{\gamma(n-3)}y_ny_{n-2}y_{\gamma(n)} \in W(n-2, n-1)$ um monômio. Então*

$$m = y_1y_2 \dots y_{n-4}y_{n-3}y_ny_{n-2}y_{n-1} + w$$

para algum polinômio $w \in W$.

Demonstração. Analisemos os seguintes casos:
Caso $n = 4$: Neste caso, temos que $m = y_1y_4y_2y_3$ ou $m = y_3y_4y_2y_1$. Observe que o segundo monômio não pode ocorrer em $P_4^A/V(4)$, pois trata-se de um monômio "ímpar". Logo, $m = y_1y_4y_2y_3$, e isto condiz com o resultado.

Caso $n = 5$: Seja $m = y_{\gamma(1)}y_{\gamma(2)}y_5y_3y_{\gamma(5)}$. De acordo com a segunda igualdade do Lema 2.1.16, se permutarmos ciclicamente as variáveis $y_{\gamma(1)}$, $y_{\gamma(2)}$ e $y_{\gamma(5)}$ em m, obteremos um monômio $y_1y_{\sigma(2)}y_5y_3y_{\sigma(5)}$ igual m, a menos de um polinômio em W. Agora, como $\sigma \in A_5$, temos que $\sigma(2) = 2$ e $\sigma(5) = 4$. Portanto, $m = y_1y_2y_5y_3y_4 + w$, para algum $w \in W$.

Caso $n > 5$: Primeiro mostraremos que $m = m' + w$ para algum $w \in W$, onde a primeira posição do monômio m' é ocupada por y_1. Suponha que $\gamma(1) \neq 1$ em m. Do Lema 2.1.16 usamos a primeira parte para localizar y_1 em m e a segunda para mover y_1 para a esquerda, isto é, pela primeira parte, movemos o bloco y_ny_{n-2} para a esquerda até obtermos

$$m = *y_ny_{n-2}y_1 ** + w_1 \text{ ou } m = *y_1y_ny_{n-2} ** + w_1,$$

para algum $w_1 \in W$. Além disso, pela segunda parte do Lema 2.1.16, movemos y_1 uma ou duas posições para a esquerda do bloco y_ny_{n-2}. Realizamos este processo de localização de y_1 e deslocamento para a esquerda, até que y_1 esteja ocupando a primeira posição no monômio. Entretanto, pode ocorrer neste processo a situação $m = y_ay_ny_{n-2}y_1y_b{*}{*}{+}w_2$ para algum $w_2 \in W$. Note que não é possível aplicar o Lema 2.1.16 nesta situação, pois à esquerda do bloco y_ny_{n-2} temos um monômio de comprimento 1. Se isso acontecer, usamos o Lema 2.1.17. Seguindo esses passos iniciais, chegamos a um monômio m' nas condições acima. Reescrevendo $m' = y_1m''$, usamos o argumento acima para a variável y_2 e m'', e assim por diante, até obtermos

$$m = y_1y_2 \dots y_{n-4}y_{n-3}y_ny_{n-2}y_{n-1} + w,$$

para algum polinômio $w \in W$. ✓

Para um melhor entendimento da demonstração do último lema, segue um exemplo:

Exemplo 2.1.20 *Considere o monômio* $m = y_5y_3y_2y_6y_4y_1 \in W(4, 5)$. *Aplicando o argumento da demonstração, mostraremos que* $m = y_1y_2y_3y_6y_4y_5 + w$, *com* w *sendo um polinômio em* W. *Assim, usaremos os elementos* w_1 *e* ${w_1}'$ *para representarmos monômios de W que resultam da aplicação da primeira igualdade do*

Lema 2.1.16, w_2*,* ${w_2}'$*,* ${w_2}''$*, e* ${w_2}'''$ *, para a aplicação da segunda igualdade desse mesmo lema,* w_3 *e* ${w_3}'$ *para o uso do Lema 2.1.17. Assim, temos que*

$$\begin{aligned}
m = y_5(y_3y_2y_6y_4y_1) &= y_5(y_2y_1y_6y_4y_3) + w_2 \\
&= y_5(y_1y_3y_6y_4y_2) + {w_2}' + w_2 \\
&= (y_5y_6y_4y_1y_3)y_2 + w_1 + {w_2}' + w_2 \\
&= (y_3y_6y_4y_5y_1)y_2 + w_3 + w_1 + {w_2}' + w_2 \\
&= y_1(y_6y_4y_3y_5y_2) + {w_3}' + w_3 + w_1 + {w_2}' + w_2 \\
&= y_1(y_3y_5y_6y_4y_2) + {w_1}' + {w_3}' + w_3 + w_1 + {w_2}' + w_2 \\
&= y_1(y_5y_2y_6y_4y_3) + {w_2}'' + {w_1}' + {w_3}' + w_3 + w_1 + \\
&\quad + {w_2}' + w_2 \\
&= y_1y_2y_3y_6y_4y_5 + {w_2}''' + {w_2}'' + {w_1}' + {w_3}' + w_3 + w_1 + \\
&\quad {w_2}' + w_2.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$m = y_5y_3y_2y_6y_4y_1 = y_1y_2y_3y_6y_4y_5 + w,$$

com $w = ({w_2}''' + {w_2}'' + {w_1}' + {w_3}' + w_3 + w_1 + {w_2}' + w_2) \in W$*.*

Lema 2.1.21 *Temos* $\dim P_4^A/V(4) = 2^{4-1} - 1 = 7$.

Demonstração. Pelo Corolário 2.1.11 temos $P_4^A/V(4) = W + W(2,3)$ e pelo Lema 2.1.19

$$P_4^A/V(4) = W + \text{span}\langle y_1y_4y_2y_3\rangle.$$

Logo,

$$\dim P_4^A/V(4) \leq \dim W + 1.$$

Sabendo que os monômios que geram W são pares e possuem final y_2 ou y_4, segue que $\dim W \leq 6$ e assim

$$\dim P_4^A/V(4) \leq 7.$$

Como $V(4) \subseteq (P_4^A \cap T(G))$, segue do Teorema 2.1.2 que

$$7 = \dim P_4^A/(P_4^A \cap T(G)) \leq \dim P_4^A/V(4) \leq 7.$$

Portanto, $\dim P_4^A/V(4) = 7$. ✓

Demonstração do Teorema 2.1.3. Faremos a demonstração por indução em n. Inicialmente usaremos o lema anterior para demonstrar o caso $n = 5$, e assim dar uma ideia do argumento de indução. Pelo Corolário 2.1.11 temos $P_5^A/V(5) = W + W(3,4)$ e pelo Lema 2.1.19

$$P_5^A/V(5) = W + \text{span}\langle y_1y_2y_5y_3y_4\rangle.$$

Logo, $\dim P_5^A/V(5) \leq \dim W + 1$. Considere $\phi_1 : P_4^A \longrightarrow P_5^A/V(5)$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto f(y_1, y_2, y_3, y_4)y_5,$$

e $\phi_2 : P_4^A \longrightarrow P_5^A/V(5)$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto f(y_1, y_2, y_4, y_5)y_3.$$

Note que W é a soma das imagens $Im(\phi_1)$ e $Im(\phi_2)$. Além disso,

$$V(4) \subseteq Ker(\phi_1) \text{ e } V(4) \subseteq Ker(\phi_2).$$

Pelo Teorema do Isomorfismo temos

$$P_4^A/Ker(\phi_1) \cong Im(\phi_1) \text{ e } P_4^A/Ker(\phi_2) \cong Im(\phi_2)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\dim W \leq \dim Im(\phi_1) + \dim Im(\phi_2) &= \dim P_4^A/Ker(\phi_1) + \dim P_4^A/Ker(\phi_2)\\ &\leq \dim P_4^A/V(4) + \dim P_4^A/V(4) = 14.\end{aligned}$$

Como $V(5) \subseteq P_5^A \cap T(G)$ segue do Teorema 2.1.2 o seguinte:

$$15 = \dim P_5^A/(P_5^A \cap T(G)) \leq \dim P_5^A/V(5) \leq \dim W + 1 \leq 14 + 1.$$

Logo, $\dim P_5^A/V(5) = 15$.

Para o caso geral, suponha que o teorema seja válido para $n-1$, ou seja,

$$\dim P_{n-1}^A/V(n-1) = 2^{n-2} - 1.$$

Pelo Corolário 2.1.11 e Lema 2.1.19, temos

$$P_n^A/V(n) = W(n-2, n-1) + W \text{ e } \dim P_n^A/V(n) \leq 1 + \dim W.$$

Defina homomorfismos ϕ_1 e ϕ_2 de P_{n-1}^A em $P_n^A/V(n)$ da seguinte forma: se $f = f(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in P_{n-1}^A$, então

$$\phi_1(f) = f(y_1, \ldots, y_{n-1})y_n \ \text{ e } \ \phi_2(f) = f(y_1, \ldots, y_{n-3}, y_{n-1}, y_n)y_{n-2}.$$

Usando argumentos similares aos anteriores e aplicando o argumento de indução, temos

$$\dim W \leq (2^{n-2} - 1) + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 2.$$

Logo,

$$\dim P_n^A/V(n) \leq 1 + \dim W \leq 1 + 2^{n-1} - 2 = 2^{n-1} - 1.$$

Como $V(n) \subseteq T(G) \cap P_n^A$, segue do Teorema 2.1.2 a relação

$$2^{n-1} - 1 = \dim P_n^A/(T(G) \cap P_n^A) \leq \dim P_n^A/V(n) \leq 2^{n-1} - 1,$$

e portanto conclui-se que $\dim P_n^A/(T(G) \cap P_n^A) = \dim P_n^A/V(n)$. Em outras palavras, temos que

$$V(n) = T(G) \cap P_n^A$$

e assim a Conjetura de Henke e Regev é verdadeira.

✓

Capítulo 3

Álgebra $U_n(K)$

3.1 A-identidades de $U_2(K)$

Seja $U_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n. Denote por $d(n)$ o grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra $U_n(K)$. Nesta seção, mostraremos que $d(2) = 5$, isto é, o grau mínimo de uma A-identidade para $U_2(K)$ é 5. Além disso, exibiremos uma A-identidade de tal grau. Ao longo de toda a seção, o corpo K considerado será infinito.

Lema 3.1.1 *O grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra $U_1(K) = K$ é $d(1) = 3$.*

Demonstração. Inicialmente, note que $d(1) \geq 2$, pois o grau mínimo de uma identidade polinomial para K é 2 (comutador de duas variáveis distintas). Agora, observe que o único monômio par de grau 2 é x_1x_2. Nenhum múltiplo escalar desse monômio é A-identidade para K (basta substituir x_1 e x_2 por 1 para verificar isso). Por outro lado, como

$$[x_1, x_2x_3] = x_1x_2x_3 - x_2x_3x_1$$

é uma A-identidade para K, segue que $d(1) = 3$. ✓

Proposição 3.1.2 *Seja R uma PI-álgebra com n-ésima codimensão $c_n(R)$. Se*

$$c_n(R) < \frac{1}{2} \cdot n!,$$

então R possui uma A-identidade de grau n.

Demonstração. Sabe-se que $\dim P_n^A = n!/2 = |A_n|$. Assim, no espaço vetorial $P_n/P_n \cap T(R)$ os monômios pares formam um conjunto linearmente dependente, pois por hipótese

$$c_n(R) = \dim P_n/P_n \cap T(R) < \frac{1}{2} \cdot n! = \dim P_n^A.$$

Denote $y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}\dots y_{\sigma(n)} = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)} + P_n \cap T(R), \sigma \in A_n$. Da dependência linear, seja então

$$\sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}\dots y_{\sigma(n)} = 0$$

uma combinação linear em $P_n/P_n \cap T(R)$, onde $\alpha_\sigma \neq 0$ para algum $\sigma \in A_n$. Isso significa que

$$\sum_{\sigma \in A_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)} \in P_n \cap T(R)$$

é a A-identidade de grau n desejada. ✓

Denote por e_{ij} a matriz elementar de $M_n(K)$ com entrada (i,j) igual a 1 e demais entradas iguais a 0.

Lema 3.1.3 *O grau mínimo de uma A-identidade para $U_2(K)$ é $d(2) = 5$.*

Demonstração. Sabe-se pelo Teorema 1.1.15 que o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ gera todas as identidades polinomiais (em particular, todas as A-identidades) de $U_2(K)$. Assim, $d(2) \geq 4$. Daremos duas demonstrações distintas para o fato que $d(2) \neq 4$, sendo que a primeira pode ser encontrada em [4].

(D1) Suponha que exista uma A-identidade $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ para $U_2(K)$ de grau 4. Então f é uma combinação linear do tipo

$$\begin{aligned} f \;\; = \;\; & \gamma_{12}[x_1,x_2][x_3,x_4] + \gamma_{13}[x_1,x_3][x_2,x_4] + \gamma_{14}[x_1,x_4][x_2,x_3] + \\ & + \gamma_{23}[x_2,x_3][x_1,x_4] + \gamma_{24}[x_2,x_4][x_1,x_3] + \gamma_{34}[x_3,x_4][x_1,x_2], \end{aligned}$$

onde $\gamma_{ij} \in K$. Sejam $a < b$ e $\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$. Temos que um dos monômios $x_ax_bx_cx_d$ e $x_ax_bx_dx_c$ é ímpar e ambos aparecem em f multiplicados pelo escalar γ_{ab}. Como f é par, temos que $\gamma_{ab} = 0$ e, assim, f é o polinômio nulo.

(D2) Suponha que

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{\sigma \in A_4} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}$$

seja uma A-identidade de grau 4 para $U_2(K)$. Como $\gamma \cdot f$ é uma A-identidade de $U_2(K)$, para todo $\gamma \in A_4$, podemos supor, sem perda de generalidade, que o coeficiente α_{id} que acompanha o monômio $x_1x_2x_3x_4$ em f é não nulo. Agora, usando matrizes elementares de $U_2(K)$, especificamente e_{11}, e_{12} e e_{22}, e fazendo substituições convenientes em $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, obtemos

$$f(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}) = \alpha_{id} e_{12} = 0.$$

Logo, $\alpha_{id} = 0$ e temos um absurdo.

Pelas duas demonstrações apresentadas, temos que $d(2) \geq 5$. Em [3, p. 88] encontramos que

$$c_5(U_2(K)) = 50 < 5!/2 = 60.$$

Portanto, pela Proposição 3.1.2, $U_2(K)$ possui uma A-identidade de grau 5. ✓

Em [4, p. 48] foram exibidas duas A-identidades para $U_2(K)$ de grau 5. Elas geram (como A_5-módulo) o conjunto de todas as A-identidades de grau 5 para $U_2(K)$. Porém, lá é usada a Teoria de Representações do Grupo Alternado para obter tal resultado, e portanto o corpo considerado é algebricamente fechado e de característica 0. No próximo resultado exibimos uma A-identidade de grau 5 para $U_2(K)$ independente do corpo K considerado.

Teorema 3.1.4 *O polinômio*

$$\begin{aligned} f \;=\;& x_1x_2[x_3, x_4x_5] + x_2x_1[x_4, x_3x_5] + x_4x_1[x_2, x_5x_3] + x_1x_4[x_5, x_2x_3] + \\ & x_5x_4[x_1, x_3x_2] + x_4x_5[x_3, x_1x_2] + x_3x_5[x_4, x_2x_1] + x_5x_3[x_2, x_4x_1] + \\ & x_2x_3[x_5, x_1x_4] + x_3x_2[x_1, x_5x_4] \end{aligned}$$

é uma A-identidade para $U_2(K)$.

Demonstração. Denotando

$$y_a y_b y_c y_d y_e = x_a x_b x_c x_d x_e + (P_5 \cap T(U_2(K)))$$

temos

$$
\begin{aligned}
0 &= [y_1, y_2][y_3, y_4y_5] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] - y_2y_1[y_3, y_4y_5] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + (-y_2y_1y_3y_4y_5 + y_2y_1y_4y_5y_3) \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + (-y_2y_1y_3[y_4, y_5] - y_2y_1y_3y_5y_4) + (y_2y_1y_4[y_5, y_3] + y_2y_1y_4y_3y_5) \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + (y_2y_1y_4y_3y_5 - y_2y_1y_3y_5y_4) - y_2y_1y_3[y_4, y_5] + y_2y_1y_4[y_5, y_3] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + y_2y_1[y_4, y_3y_5] - y_2y_1y_3[y_4, y_5] + y_2y_1y_4[y_5, y_3] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + y_2y_1[y_4, y_3y_5] - ([y_2, y_1y_3] + y_1y_3y_2)[y_4, y_5] + ([y_2, y_1y_4] + y_1y_4y_2)[y_5, y_3] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + y_2y_1[y_4, y_3y_5] - y_1y_3y_2[y_4, y_5] + y_1y_4y_2[y_5, y_3] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + y_2y_1[y_4, y_3y_5] - (y_1[y_3, y_2] + y_1y_2y_3)[y_4, y_5] + ([y_1, y_4y_2] + y_4y_2y_1)[y_5, y_3] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + y_2y_1[y_4, y_3y_5] - y_1y_2y_3[y_4, y_5] + y_4y_2y_1[y_5, y_3] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + y_2y_1[y_4, y_3y_5] - y_1y_2y_3[y_4, y_5] + (y_4[y_2, y_1] + y_4y_1y_2)[y_5, y_3] \\
&= y_1y_2[y_3, y_4y_5] + y_2y_1[y_4, y_3y_5] - y_1y_2y_3[y_4, y_5] + y_4y_1y_2[y_5, y_3].
\end{aligned}
$$

Obtemos assim a identidade para $U_2(K)$

$$g = x_1x_2[x_3, x_4x_5] + x_2x_1[x_4, x_3x_5] - x_1x_2x_3[x_4, x_5] + x_4x_1x_2[x_5, x_3].$$

Por uma mudança de variáveis em g, obtemos as 5 identidades abaixo:

$$
\begin{aligned}
&x_1x_2[x_3, x_4x_5] + x_2x_1[x_4, x_3x_5] - x_1x_2x_3[x_4, x_5] + x_4x_1x_2[x_5, x_3] \\
&x_4x_1[x_2, x_5x_3] + x_1x_4[x_5, x_2x_3] - x_4x_1x_2[x_5, x_3] + x_5x_4x_1[x_3, x_2] \\
&x_5x_4[x_1, x_3x_2] + x_4x_5[x_3, x_1x_2] - x_5x_4x_1[x_3, x_2] + x_3x_5x_4[x_2, x_1] \\
&x_3x_5[x_4, x_2x_1] + x_5x_3[x_2, x_4x_1] - x_3x_5x_4[x_2, x_1] + x_2x_3x_5[x_1, x_4] \\
&x_2x_3[x_5, x_1x_4] + x_3x_2[x_1, x_5x_4] - x_2x_3x_5[x_1, x_4] + x_1x_2x_3[x_4, x_5].
\end{aligned}
$$

Finalmente, somando essas cinco identidades e cancelando os termos simétricos, obtemos a seguinte A-identidade de grau 5 para $U_2(K)$:

$$
\begin{aligned}
f = \; & x_1x_2[x_3, x_4x_5] + x_2x_1[x_4, x_3x_5] + \\
& x_4x_1[x_2, x_5x_3] + x_1x_4[x_5, x_2x_3] + \\
& x_5x_4[x_1, x_3x_2] + x_4x_5[x_3, x_1x_2] + \\
& x_3x_5[x_4, x_2x_1] + x_5x_3[x_2, x_4x_1] + \\
& x_2x_3[x_5, x_1x_4] + x_3x_2[x_1, x_5x_4].
\end{aligned}
$$

✓

3.2 A-identidades de $U_3(K)$ e $U_4(K)$

O objetivo desta seção é determinar o grau minimal de uma A-identidade para as álgebras $U_3(K)$ e $U_4(K)$. Para tal, antes obteremos alguns resultados fundamentais. Ao longo de toda a seção, o corpo K considerado é infinito.

Lema 3.2.1 *Seja f um polinômio multilinear de grau m. Se*

$$f(e_{i_1j_1},\dots,e_{i_mj_m})=0$$

para quaisquer matrizes elementares $e_{i_1j_1},\dots,e_{i_mj_m}\in U_n(K)$, onde $j_l=n$ para algum $1\le l\le m$, então f é uma identidade para $U_n(K)$.

Demonstração. Para $j\in\mathbb{N}$, definimos $\bar{j}\in\{1,\dots,n\}$ por

$$j\equiv\bar{j}\ (\text{mod}\ n).$$

Fixando $t\in\mathbb{N}$, definimos a função $\psi : M_n(K)\to M_n(K)$ por linearidade e por

$$\psi(e_{ij})=e_{\overline{i+t}\ \overline{j+t}}\,.$$

Por exemplo, considerando $t=4$ e $n=6$, temos que

$$\psi(e_{56})=e_{\overline{5+4}\ \overline{6+4}}=e_{\overline{9}\ \overline{10}}=e_{34}.$$

Afirmação. A aplicação ψ é um isomorfismo de álgebras.

Provaremos tal afirmação.

1. ψ é homomorfismo:

   Basta verificar que ψ preserva o produto sobre os elementos de uma base de $M_n(K)$. Pois bem, sejam e_{ij} e e_{kl} matrizes elementares de $M_n(K)$. Temos que

   $$\psi(e_{ij}e_{kl})=\begin{cases}\psi(e_{il}), & se\quad j=k;\\ 0, & se\quad j\neq k.\end{cases}$$

   Se $j\neq k$, então $\overline{j+t}\neq\overline{k+t}$ pois $1\le j,k\le n$. Assim, temos

   $$\psi(e_{ij}e_{kl})=\psi(0)=0=e_{\overline{i+t}\ \overline{j+t}}.e_{\overline{k+t}\ \overline{l+t}}=\psi(e_{ij})\psi(e_{kl}).$$

   Se $j=k$, então $\overline{j+t}=\overline{k+t}$, e assim

   $$\psi(e_{ij}e_{kl})=\psi(e_{il})=e_{\overline{i+t}\ \overline{l+t}}=e_{\overline{i+t}\ \overline{j+t}}.e_{\overline{k+t}\ \overline{l+t}}=\psi(e_{ij})\psi(e_{kl}).$$

   Pelos dois casos concluímos que ψ é homomorfismo de álgebras.

2. ψ é bijetora:

   De fato, como ψ leva base em base (basta olhar para as matrizes elementares para verificar isso), temos que ψ é bijetora.

Pelos dois itens apresentados, concluímos que ψ é isomorfismo de álgebras.

Suponhamos que f não seja uma identidade para $U_n(K)$. Então existem matrizes elementares $u_1, u_2, \ldots, u_m \in U_n(K)$, tais que

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_m) \neq 0.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $u_1 = e_{i_1 j_1}, \ldots, u_m = e_{i_m j_m}$, com

$$j_k = i_{k+1} \;\; (k = 1, \ldots, m-1) \;\text{ e }\; i_1 \leq j_1 \leq i_2 \leq j_2 \leq \ldots \leq i_m \leq j_m < n.$$

Fixemos $t = n - j_m$. Pelo isomorfismo ψ, temos

$$\begin{aligned} 0 \neq \psi(f(e_{i_1 j_1}, \ldots, e_{i_m j_m})) &= f(\psi(e_{i_1 j_1}), \ldots, \psi(e_{i_m j_m})) \\ &= f(e_{\overline{i_1+t}\;\overline{j_1+t}}, \ldots, e_{\overline{i_m+t}\;\overline{j_m+t}}) \\ &= f(e_{i_1+t,\; j_1+t}, \ldots, e_{i_m+t,\; j_m+t}). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(e_{i_1+t,\; j_1+t}, \ldots, e_{i_m+t,\; j_m+t}) \neq 0$$

com $j_m + t = n$. Absurdo. ✓

Lema 3.2.2 *Se $1 < k < n$, então $T(U_n(K))$ é o produto dos T-ideais*

$$T(U_n(K)) = T(U_k(K)) \cdot T(U_{n-k}(K)).$$

Demonstração. Sabemos que o polinômio

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2m-1}, x_{2m}] \tag{3.1}$$

gera $T(U_m(K))$ como T-ideal. Assim, toda identidade de $U_m(K)$ é combinação linear de polinômios do tipo

$$p = g_0[g_1, g_2][g_3, g_4] \ldots [g_{2m-1}, g_{2m}]g_{2m+1},$$

onde $g_i \in K\langle X \rangle$. Como o polinômio em (3.1) é multilinear, podemos assumir que todo g_i é monômio.

Aplicando a igualdade $[a, bc] = b[a, c] + [a, b]c$ a cada comutador $[g_i, g_{i+1}]$, reduzimos a expressão de p a uma combinação linear de elementos do tipo

$$u_1[x_{i_1}, x_{j_1}]u_2[x_{i_2}, x_{j_2}]u_3[x_{i_3}, x_{j_3}] \dots u_m[x_{i_m}, x_{j_m}]u_{m+1}, \tag{3.2}$$

onde cada u_i é um monômio. Uma vez que cada um desses elementos é uma identidade para $U_m(K)$, segue que $T(U_m(K))$ é o espaço vetorial gerado pelos elementos (3.2). Como consequência direta deste fato, temos que

$$T(U_n(K)) = T(U_k(K)) \cdot T(U_{n-k}(K)).$$

✓

Observe que o Lema 3.2.2 nos diz, intrinsecamente, que podemos "fatorar"o T-ideal de $U_n(K)$ como o produto dos T-ideais de

$$U_{k_1}(K), U_{k_2}(K), \dots, U_{k_t}(K),$$

desde que $k_1 + k_2 + \dots + k_t = n$.

O próximo resultado é de extrema importância para o propósito desta seção, pois fornece uma desigualdade essencial para a determinação do grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$.

Teorema 3.2.3 *Se $d(n)$ é o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$, então*

$$d(n) + 3 \geq d(n+1) \geq d(n) + 2.$$

Demonstração. Suponha que $f(x_1, \dots, x_r)$ seja uma A-identidade de grau

$$r \leq d(n) + 1$$

para $U_{n+1}(K)$. Assim, o polinômio

$$p = f(x_1, \dots, x_r)x_{r+1}x_{r+2} \dots x_{d(n)+1}$$

é uma A-identidade de grau $d(n) + 1$ para $U_{n+1}(K)$.

Como p é não nulo, existe alguma permutação γ par cujo monômio

$$x_{\gamma(1)}x_{\gamma(2)} \dots x_{\gamma(d(n)+1)}$$

aparece em p com coeficiente não nulo. Definindo $g = \gamma^{-1} \cdot p$, observe que g é uma A-identidade para $U_{n+1}(K)$ de grau $d(n) + 1$, cujo coeficiente do monômio $x_1x_2 \dots x_{d(n)+1}$ é não nulo.

Agora escreva
$$g = \sum g_{ij} x_i x_j,$$
onde g_{ij} é um polinômio multilinear nas variáveis
$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{d(n)+1}\} - \{x_i, x_j\}.$$
Considere o polinômio $h = g_{(d(n),\, d(n)+1)}$ e observe que este é um A-polinômio não nulo de grau $d(n)-1$. Se $e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{(i_{d(n)-1}, j_{d(n)-1})} \in U_n(K)$ são matrizes elementares, onde $j_l = n$ para algum $1 \leq l \leq d(n)-1$, então existe $\alpha \in K$ tal que
$$h(e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{(i_{d(n)-1}, j_{d(n)-1})}) = \alpha e_{in},$$
para algum $1 \leq i \leq n$. Uma vez que
$$g(e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{(i_{d(n)-1}, j_{d(n)-1})}, e_{(n,n+1)}, e_{(n+1,n+1)}) = \alpha e_{(i,n+1)} = 0,$$
temos que $\alpha = 0$ e portanto pelo Lema 3.2.1 segue que h é uma identidade para $U_n(K)$. Como h é par e possui grau $d(n)-1$, temos um absurdo. Logo,
$$d(n+1) \geq d(n) + 2.$$

Agora, seja $f(x_1, \ldots, x_{d(n)})$ uma A-identidade para $U_n(K)$. Pelo Lema 3.2.2 temos
$$T(U_{n+1}(K)) = T(U_n(K)) \cdot T(U_1(K))$$
e assim,
$$f(x_1, \ldots, x_{d(n)})[x_{d(n)+1}, x_{d(n)+2} x_{d(n)+3}]$$
é uma A-identidade de grau $d(n)+3$ para $U_{n+1}(K)$. ✓

Nos próximos dois resultados, damos o grau mínimo de uma A-identidade para $U_3(K)$ e $U_4(K)$.

Corolário 3.2.4 *O grau mínimo de uma A-identidade para $U_3(K)$ é 8.*

Demonstração. Como $d(2) = 5$, temos pelo Teorema 3.2.3 que
$$8 \geq d(3) \geq 7.$$
Mostraremos que $U_3(K)$ não possui A-identidade de grau 7. Assim, suponhamos que exista uma A-identidade f de grau 7 para $U_3(K)$. Denotaremos o coeficiente

do monômio $x_{\gamma(1)}x_{\gamma(2)}\ldots x_{\gamma(7)}$ por $\gamma(1)\gamma(2)\ldots\gamma(7)$. Por uma mudança adequada de variáveis, podemos supor que o coeficiente 1234567 é não nulo.

Analisaremos algumas substituições das variáveis em f por matrizes elementares de $U_3(K)$.

(i_1) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{12} & e_{22} & e_{22} & e_{23} & e_{33} \end{array}$$

obtemos como resultado

$$(1234567 + 2135467)e_{13} = 0,$$

que nos dá a seguinte relação entre os coeficientes:

$$1234567 + 2135467 = 0.$$

(ii_1) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_5 & x_4 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{12} & e_{22} & e_{22} & e_{23} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos como resultado

$$(2135467 + 2153476)e_{13} = 0,$$

que fornece a relação entre os coeficientes:

$$2135467 + 2153476 = 0.$$

(iii_1) Agora, fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_7 & x_6 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{12} & e_{22} & e_{23} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos

$$(2153476 + 1253467)e_{13} = 0,$$

que nos dá a seguinte relação entre os coeficientes:

$$2153476 + 1253467 = 0.$$

Dessa forma, pelos 3 itens segue que

$$1234567 = -1253467. \tag{3.3}$$

Seguindo o mesmo raciocínio,

(i_2) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{22} & e_{22} & e_{12} & e_{23} & e_{33} \end{array}$$

obtemos como resultado

$$(1253467 + 2154367)e_{13} = 0,$$

que nos dá a seguinte relação entre os coeficientes:

$$1253467 + 2154367 = 0.$$

(ii_2) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_5 & x_4 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{12} & e_{23} & e_{22} & e_{22} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos como resultado

$$(2154367 + 2145376)e_{13} = 0,$$

que fornece a relação entre os coeficientes:

$$2154367 + 2145376 = 0.$$

(iii_2) Agora, fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_7 & x_6 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{22} & e_{23} & e_{12} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos

$$(2145376 + 1245367)e_{13} = 0,$$

que nos dá a seguinte relação entre os coeficientes:

$$2145376 + 1245367 = 0.$$

Assim, pelos 3 itens acima temos que

$$1253467 = -1245367. \tag{3.4}$$

Além disso,

(i_3) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{22} & e_{12} & e_{22} & e_{23} & e_{33} \end{array}$$

obtemos como resultado

$$(1245367 + 2143567)e_{13} = 0,$$

que nos dá a seguinte relação entre os coeficientes:

$$1245367 + 2143567 = 0.$$

(ii_3) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_5 & x_4 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{12} & e_{22} & e_{23} & e_{22} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos como resultado

$$(2143567 + 2134576)e_{13} = 0,$$

que fornece a relação entre os coeficientes:

$$2143567 + 2134576 = 0.$$

(iii_3) Agora, fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_7 & x_6 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{23} & e_{12} & e_{22} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos

$$(2134576 + 1234567)e_{13} = 0,$$

que nos dá a seguinte relação entre os coeficientes:

$$2134576 + 1234567 = 0.$$

Dessa forma, por esses 3 itens segue que

$$1245367 = -1234567. \tag{3.5}$$

Logo, das equações (3.3), (3.4) e (3.5), temos

$$1234567 = -1234567,$$

e portanto $1234567 = 0$. Absurdo.

Disso, concluímos que não existe A-identidade de grau 7 para $U_3(K)$. Agora, usando novamente o Teorema 3.2.3, segue que $d(3) = 8$. ✓

Corolário 3.2.5 *O grau mínimo de uma A-identidade para $U_4(K)$ é 10.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.3 e pelo último corolário, segue que $d(4) \geq 10$. Agora, considere $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ uma A-identidade para $U_2(K)$. Pelo Lema 3.2.2, temos que

$$T(U_4(K)) = T(U_2(K))T(U_2(K)).$$

Assim,

$$h = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)g(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$$

é uma identidade para $U_4(K)$. Como $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $g(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$ são pares, segue que h também é par, e portanto é uma A-identidade de grau 10 para $U_4(K)$. Logo, concluímos que $d(4) = 10$. ✓

3.3 A-identidades de $U_n(K)$

O interesse em estudar A-identidades para $U_n(K)$ foi motivado pelo artigo [7], onde os matemáticos Henke e Regev colocaram a seguinte conjetura:

Conjetura 3.3.1 ([7]) *O grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra matricial $M_n(K)$ é $2n+2$.*

Com o intuito de provar a conjetura acima, foi analisada a subálgebra $U_n(K)$ e obtido uma resposta negativa para tal problema. O objetivo desta seção, assim, é demonstrar o seguinte resultado: se $k \geq 0$ é um número inteiro, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(n) > 2n + k$$

para todo $n \geq n_0$. Observe que esse resultado implica uma resposta negativa para a conjetura.

Definição 3.3.2 *Considere $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ e escreva $y_j = x_{i_j}$. Se f é um polinômio multilinear dado por*

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma y_{\sigma(1)} \ldots y_{\sigma(n)},\ \alpha_\sigma \in K,$$

definimos o polinômio f^* por

$$f^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma y_{\sigma(1)} \ldots y_{\sigma(n)}.$$

Exemplo 3.3.3 *Se $f(x_1, x_3, x_8) = -x_1x_3x_8 + 3x_3x_1x_8 + 2x_8x_1x_3 - 4x_1x_8x_3$, então*

$$f^*(x_1, x_3, x_8) = -x_1x_3x_8 - 3x_3x_1x_8 + 2x_8x_1x_3 + 4x_1x_8x_3.$$

Exemplo 3.3.4 *Se f é um polinômio multilinear dado por*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}, \alpha_\sigma \in K,$$

então f^* é dado por

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Tendo em vista a demonstração do próximo lema, denotaremos por

$$S_n(i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

o conjunto das permutações de $\{i_1, \ldots, i_n\}$, onde $i_1 < \ldots < i_n$.

Se $\sigma \in S_n(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, definimos $\sigma' \in S_n(1, 2, \ldots, n)$ por

$$\sigma' = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ 1 & \ldots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Além disso, definimos $(-1)^\sigma = (-1)^{\sigma'}$. Observe que se

$$f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n(i_1, \ldots, i_n)} \alpha_\sigma x_{\sigma(i_1)} \ldots x_{\sigma(i_n)}$$

é multilinear, então

$$f^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n(i_1, \ldots, i_n)} (-1)^\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(i_1)} \ldots x_{\sigma(i_n)}.$$

Lema 3.3.5 *Sejam $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ e $h(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{k+n}})$ polinômios multilineares, onde*

$$i_1 < \ldots < i_k,\ i_{k+1} < \ldots < i_{k+n} \quad e \quad \{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{i_{k+1}, \ldots, i_{k+n}\} = \emptyset.$$

Então $(gh)^* = \pm g^* h^*$.

Demonstração. Escrevendo

$$\{i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{k+n}\} = \{j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_{k+n}\},$$

onde $j_1 < \ldots < j_k < j_{k+1} < \ldots < j_{k+n}$, definimos

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k & j_{k+1} & \ldots & j_{k+n} \\ i_1 & \ldots & i_k & i_{k+1} & \ldots & i_{k+n} \end{pmatrix}.$$

Se o monômio $m = x_{\gamma(j_1)} \ldots x_{\gamma(j_k)} x_{\gamma(j_{k+1})} \ldots x_{\gamma(j_{k+n})}$ aparece no produto gh, então

$$\{\gamma(j_1), \ldots, \gamma(j_k)\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \text{ e } \{\gamma(j_{k+1}), \ldots, \gamma(j_{k+n})\} = \{i_{k+1}, \ldots, i_{k+n}\}.$$

Cabe aqui a ressalva que $\gamma \in S_{k+n}(j_1, j_2, \ldots, j_{k+n})$.

Agora, definimos as permutações

$$\gamma_g \in S_k(i_1, j_2, \ldots, i_k) \ \text{ e } \ \gamma_h \in S_n(i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{k+n})$$

da seguinte maneira:

$$\gamma_g = \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ \gamma(j_1) & \ldots & \gamma(j_k) \end{pmatrix} \ \text{ e } \ \gamma_h = \begin{pmatrix} i_{k+1} & \ldots & i_{k+n} \\ \gamma(j_{k+1}) & \ldots & \gamma(j_{k+n}) \end{pmatrix}.$$

Observe que γ_g pode ser olhada como uma permutação em $S_{k+n}(j_1, j_2, \ldots, j_{k+n})$, bastando identificá-la com a permutação que tem o mesmo comportamento que γ_g sobre os elementos $i_1, \ldots, i_k$ e que fixa os demais elementos $i_{k+1}, \ldots, i_{k+n}$. Tanto em $S_k(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, quanto em $S_{k+n}(j_1, j_2, \ldots, j_{k+n})$, o sinal de γ_g é o mesmo. O mesmo vale para γ_h.

Temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} (\gamma_h\gamma_g\sigma)x_{j_1}\ldots x_{j_k}x_{j_{k+1}}\ldots x_{j_{k+n}} &= (\gamma_h\gamma_g)x_{i_1}\ldots x_{i_k}x_{i_{k+1}}\ldots x_{i_{k+n}} \\ &= (\gamma_h)x_{\gamma(j_1)}\ldots x_{\gamma(j_k)}x_{i_{k+1}}\ldots x_{i_{k+n}} \\ &= x_{\gamma(j_1)}\ldots x_{\gamma(j_k)}x_{\gamma(j_{k+1})}\ldots x_{\gamma(j_{k+n})} \\ &= m. \end{aligned}$$

Isto é, $\gamma = \gamma_h\gamma_g\sigma$ e portanto

$$(-1)^{\gamma} = (-1)^{\sigma}(-1)^{\gamma_g}(-1)^{\gamma_h}.$$

Escrevendo

$$g = \sum_{\gamma_g \in S_k(i_1,\ldots,i_k)} \alpha_{\gamma_g} x_{\gamma_g(i_1)} \ldots x_{\gamma_g(i_k)}$$

e escrevendo

$$h = \sum_{\gamma_h \in S_n(i_{k+1},\ldots,i_{k+n})} \beta_{\gamma_h} x_{\gamma_h(i_{k+1})} \ldots x_{\gamma_h(i_{k+n})}$$

temos

$$\begin{aligned} gh &= \left(\sum_{\gamma_g \in S_k} \alpha_{\gamma_g} x_{\gamma_g(i_1)} \ldots x_{\gamma_g(i_k)}\right)\left(\sum_{\gamma_h \in S_n} \beta_{\gamma_h} x_{\gamma_h(i_{k+1})} \ldots x_{\gamma_h(i_{k+n})}\right) \\ &= \sum_{\gamma_g \in S_k}\sum_{\gamma_h \in S_n} \alpha_{\gamma_g}\beta_{\gamma_h} x_{\gamma_g(i_1)} \ldots x_{\gamma_g(i_k)} x_{\gamma_h(i_{k+1})} \ldots x_{\gamma_h(i_{k+n})}. \end{aligned}$$

Portanto, $(gh)^*$ é igual a

$$\sum_{\gamma_g\in S_k}\sum_{\gamma_h\in S_n}(-1)^{\sigma}(-1)^{\gamma_g}(-1)^{\gamma_h}\alpha_{\gamma_g}\beta_{\gamma_h}x_{\gamma_g(i_1)}\dots x_{\gamma_g(i_k)}x_{\gamma_h(i_{k+1})}\dots x_{\gamma_h(i_{k+n})}$$

que por sua vez é igual a $(-1)^{\sigma}g^*h^*$. ✓

Se a álgebra de Grassmann G é gerada por $e_1, e_2, e_3, \ldots$, denotaremos por D a base

$$D = \{1\} \cup \{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n} | i_1 < i_2 < \ldots < i_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 3.3.6 *Dada uma álgebra R, denote por R^* o subespaço vetorial de $R \otimes G$ gerado pelos elementos $r \otimes a$, onde $a \in D$ tem comprimento ímpar e $r \in R$. Dizemos que um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade para R^* se*

$$f(b_1, \ldots, b_n) = 0,$$

para todo $b_i \in R^*$.

Lema 3.3.7 *Seja $p(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear e considere R uma PI-álgebra. Então p é uma identidade para R se, e somente se, p^* é uma identidade para R^*.*

Demonstração. Considere $a_1, \ldots, a_n$ elementos de comprimentos ímpares da base D de G e sejam $r_1, \ldots, r_n \in R$. Escrevendo

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)},\ \alpha_\sigma \in K,$$

temos que

$$\begin{aligned} p^*(r_1 \otimes a_1, \ldots, r_n \otimes a_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\sigma}\alpha_\sigma(r_{\sigma(1)}\otimes a_{\sigma(1)})\dots(r_{\sigma(n)}\otimes a_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\sigma}\alpha_\sigma(r_{\sigma(1)}\dots r_{\sigma(n)})\otimes(a_{\sigma(1)}\dots a_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma(r_{\sigma(1)}\dots r_{\sigma(n)})\otimes(a_1\dots a_n) \\ &= p(r_1, \ldots, r_n)\otimes(a_1\dots a_n). \end{aligned}$$

O resultado é óbvio, cabendo apenas um comentário acerca da recíproca: para concluí-la, basta considerarmos $a_1 = e_1, a_2 = e_2, \ldots, a_n = e_n$. ✓

Proposição 3.3.8 *Uma PI-álgebra R possui uma A-identidade de grau n se, e somente se, existe um polinômio multilinear p de grau n que é identidade simultaneamente para R e R^*.*

Demonstração. Se p é uma A-identidade para R, então $p = p^*$ e pelo Lema 3.3.7 segue que p é uma identidade para R^*. Agora, se p é uma identidade para R e R^*, então $(p^*)^* = p$ é identidade para R^*, e novamente pelo Lema 3.3.7 temos que p^* é identidade para R. Logo,

$$p + p^* = \sum_{\sigma \in S_n} (\alpha_\sigma + (-1)^\sigma \alpha_\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

é uma identidade par para R ou é um polinômio nulo (caso σ seja sempre ímpar). Se $p + p^*$ é nulo, então p é um polinômio ímpar e portanto $\gamma \cdot p$ é par, para toda permutação ímpar γ. ✓

Definição 3.3.9 *Seja f um polinômio multilinear de grau n e considere $k \geq 0$ tal que $r = 3k + 2 \leq n$. Fixado um número par $t \geq 0$, escreva*

$$f = \sum (x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_t}) \cdot f_j \cdot (x_{j_{t+r+1}} x_{j_{t+r+2}} \dots x_{j_n}),$$

onde f_j é um polinômio multilinear de grau r nas variáveis

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} - \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_t}, x_{j_{t+r+1}}, x_{j_{t+r+2}}, \dots, x_{j_n}\}.$$

Dizemos que f_j é um k-corte em f.

Pelo exemplo a seguir, observamos que ao variarmos o número t obtemos k-cortes distintos.

Exemplo 3.3.10 *Considere o polinômio multilinear f de grau 9 dado por*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_9) &= -3x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9 + 2x_1x_2x_5x_3x_4x_6x_7x_8x_9 \\ &\quad + x_1x_3x_4x_5x_6x_8x_2x_7x_9. \end{aligned}$$

Para $t = 0$ e $k = 1$ na definição anterior, escrevemos f da seguinte maneira

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_9) &= (-3x_1x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_5x_3x_4)x_6x_7x_8x_9 \\ &\quad + (x_1x_3x_4x_5x_6)x_8x_2x_7x_9. \end{aligned}$$

Assim, os polinômios

$$(-3x_1x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_5x_3x_4) \;\; e \;\; (x_1x_3x_4x_5x_6)$$

são 1-cortes em f. Além disso, para $t = 2$ temos os 1-cortes

$$(-3x_3x_4x_5x_6x_7 + 2x_5x_3x_4x_6x_7) \;\; e \;\; (x_4x_5x_6x_8x_2).$$

Definição 3.3.11 *Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_{3k+2}$ as matrizes elementares*

$$e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{33}, \ldots, e_{kk}, e_{kk}, e_{kk+1}, e_{k+1k+1}, e_{k+1k+1},$$

respectivamente, e f um polinômio multilinear de grau $\geq 3k + 2$. Então f é dito uma $\triangle(k)$-identidade se todo k-corte g se anula sobre as matrizes acima, ou seja,

$$g(b_{\gamma(1)}, b_{\gamma(2)}, \ldots, b_{\gamma(3k+2)}) = 0,$$

para toda permutação $\gamma \in S_{3k+2}$.

Lema 3.3.12 *Seja f uma identidade multilinear de grau $2n + k$ para $U_n(K)$, onde $k \leq n - 1$. Então f é uma $\triangle(k)$-identidade.*

Demonstração. A condição $k \leq n - 1$ implica em $r = 3k + 2 \leq 2n + k$. Assim, podemos falar de k-cortes em f. Fixamos um número par t e escrevemos

$$f = \sum (x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_t}) \cdot f_j \cdot (x_{j_{t+r+1}}x_{j_{t+r+2}}\ldots x_{j_{2n+k}}),$$

onde f_j é um polinômio multilinear de grau r nas variáveis

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n+k}\} - \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}, x_{j_{t+r+1}}, x_{j_{t+r+2}}, \ldots, x_{j_{2n+k}}\}.$$

Analisemos os seguintes casos:

Caso 1: $t = 0$.

Devemos mostrar que o k-corte f_j se anula sobre

$$e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{33}, \ldots, e_{kk}, e_{kk}, e_{kk+1}, e_{k+1k+1}, e_{k+1k+1}. \tag{3.6}$$

Assim, denote essas matrizes por $b_1, b_2, \ldots, b_r$, respectivamente, e seja $\gamma \in S_r$. Agora substitua as variáveis de acordo com os seguintes itens:

(1) $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$, respectivamente, por

$$b_{\gamma(1)}, b_{\gamma(2)}, \ldots, b_{\gamma(r)}.$$

(2) $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_{2n+k}}$, respectivamente, por

$$e_{(k+1,k+2)}, e_{(k+2,k+2)}, e_{(k+2,k+3)}, e_{(k+3,k+3)}, \ldots, e_{(n,n)}.$$

Efetuando essas substituições em f, obtemos como resultado αe_{1n}, com $\alpha \in K$. Como f é uma identidade para $U_n(K)$, temos $\alpha = 0$. Observe que esse α é o mesmo α proveniente da substituição

$$f_j(b_{\gamma(1)}, b_{\gamma(2)}, \ldots, b_{\gamma(r)}) = \alpha e_{(1,k+1)}.$$

Logo, o k-corte f_j se anula sobre as matrizes elementares em (3.6).

Caso 2: $t = 2s \neq 0$.

Observe, mostrar que o k-corte f_j se anula sobre as matrizes elementares em (3.6) é equivalente a provar que f_j se anula sobre

$$e_{(s+1,s+1)}, e_{(s+1,s+1)}, e_{(s+1,s+2)}, e_{(s+2,s+2)}, e_{(s+2,s+2)}, \ldots$$

$$\ldots, e_{(s+k,s+k)}, e_{(s+k,s+k)}, e_{(s+k,s+k+1)}, e_{(s+k+1,s+k+1)}, e_{(s+k+1,s+k+1)}.$$

Denote essas matrizes por $c_1, \ldots, c_r$ e seja $\gamma \in S_r$. Substitua as variáveis como a seguir:

(1) $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}$, respectivamente, por

$$e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{34}, \ldots, e_{ss+1}.$$

(2) $x_{j_{t+1}}, \ldots, x_{j_{t+r}}$, respectivamente, por

$$c_{\gamma(1)}, c_{\gamma(2)}, \ldots, c_{\gamma(r)}.$$

(3) $x_{j_{t+r+1}}, \ldots, x_{j_{2n+k}}$, respectivamente, por

$$e_{(s+k+1,s+k+2)}, e_{(s+k+2,s+k+2)}, e_{(s+k+2,s+k+3)}, e_{(s+k+3,s+k+3)}, \ldots, e_{(n,n)}.$$

Fazendo essas substituições em f, obtemos αe_{1n} e

$$f_j(c_{\gamma(1)}, c_{\gamma(2)}, \ldots, c_{\gamma(r)}) = \alpha e_{(s+1,s+k+1)},$$

onde $\alpha \in K$. Por hipótese, f é uma identidade para $U_n(K)$, ou seja, $\alpha = 0$. Portanto, temos

$$f_j(c_{\gamma(1)}, c_{\gamma(2)}, \ldots, c_{\gamma(r)}) = 0,$$

e segue o resultado. ✓

Se g_1 e g_2 são dois polinômios, denotamos por $g_1 \circ g_2$ o *produto de Jordan*

$$g_1 \circ g_2 = g_1 g_2 + g_2 g_1.$$

Lema 3.3.13 *Seja f um polinômio multilinear de grau $3k+2$ definido conforme um dos itens abaixo:*

(1) *Seja k um número par. O polinômio f é uma combinação linear de elementos da forma*

$$(x_{i_1} \circ x_{i_2})(x_{i_3} \circ x_{i_4}) \ldots (x_{i_{3k+1}} \circ x_{i_{3k+2}}).$$

(2) *Seja $k \geq 2$ um número par. O polinômio f é uma combinação linear de elementos do tipo*

$$x_{i_1}(x_{i_2} \circ x_{i_3})(x_{i_4} \circ x_{i_5}) \ldots (x_{i_{3k}} \circ x_{i_{3k+1}}) x_{i_{3k+2}}.$$

(3) *Seja k um número ímpar. O polinômio f é uma combinação linear de elementos da forma*

$$(x_{i_1} \circ x_{i_2})(x_{i_3} \circ x_{i_4}) \ldots (x_{i_{3k}} \circ x_{i_{3k+1}}) x_{i_{3k+2}}.$$

(4) *Seja k um número ímpar. O polinômio f é uma combinação linear de elementos do tipo*

$$x_{i_1}(x_{i_2} \circ x_{i_3})(x_{i_4} \circ x_{i_5}) \ldots (x_{i_{3k+1}} \circ x_{i_{3k+2}}).$$

Então f não é uma $\triangle(k)$-identidade.

Demonstração. Faremos a prova por indução em k. Se $k = 0$, então

$$f(x_1, x_2) = \beta(x_1 \circ x_2) = \beta(x_1 x_2 + x_2 x_1), \quad 0 \neq \beta \in K,$$

e assim $f(e_{11}, e_{11}) = 2\beta e_{11} \neq 0$. Portanto, f não é $\triangle(k)$-identidade.

Por indução, assuma que o resultado é válido para k par e f como no item (1).

Agora, se k é um número ímpar e f está definida como no item (3), escreva

$$f = \sum f_{jlt} x_j x_l x_t,$$

onde f_{jlt} é um polinômio multilinear nas variáveis

$$\{x_1, \ldots, x_{3k+2}\} - \{x_j, x_l, x_t\}.$$

Sejam $a = 3k, b = 3k+1$ e $c = 3k+2$, e assuma, sem perda de generalidade, que f_{abc} é não nulo. Note que o polinômio f_{abc} é definido como no item (1). Aplicando indução, f_{abc} não é uma $\triangle(k-1)$-identidade e portanto não se anula para alguma substituição das variáveis pelas matrizes $e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, \ldots, e_{k-1k}, e_{kk}, e_{kk}$. Fixando essa substituição e fazendo-a em $f_{abc}, f_{bac}, f_{acb}, f_{cab}, f_{bca}, f_{cba}$, obtemos como resultado, respectivamente,

$$\beta_{abc} e_{1k},\ \beta_{bac} e_{1k}, \ldots, \beta_{cba} e_{1k}, \quad \beta_{jlt} \in K.$$

Note que $\beta_{abc} \neq 0$. Dessa forma, efetue essa mesma substituição em f,junto com as três substituições abaixo:

(i) $x_a = e_{kk+1},\ x_b = e_{k+1k+1},\ x_c = e_{k+1k+1}$. Neste caso, o valor de f após a substituição é $(\beta_{abc} + \beta_{acb}) e_{1k+1}$.

(ii) $x_c = e_{kk+1},\ x_a = e_{k+1k+1},\ x_b = e_{k+1k+1}$. Neste caso o valor de f perante a substituição é $(\beta_{cab} + \beta_{cba}) e_{1k+1}$.

(iii) $x_b = e_{kk+1},\ x_c = e_{k+1k+1},\ x_a = e_{k+1k+1}$. Neste caso o valor de f após a substituição é $(\beta_{bca} + \beta_{bac}) e_{1k+1}$.

Assim, supondo que f é uma $\triangle(k)$-identidade, então em particular temos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_{abc} + \beta_{acb} & = & 0 \\ \beta_{cab} + \beta_{cba} & = & 0 \\ \beta_{bca} + \beta_{bac} & = & 0. \end{array} \right.$$

Pela definição de f_{jlt}, temos que $f_{jlt} = f_{ljt}$, pois f é do tipo (3). Logo, temos $\beta_{jlt} = \beta_{ljt}$, e portanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_{abc} + \beta_{acb} & = & 0 \\ \beta_{acb} + \beta_{cba} & = & 0 \\ \beta_{cba} + \beta_{abc} & = & 0. \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$0 = \beta_{abc} = \beta_{acb} = \beta_{cba}.$$

Absurdo, pois $\beta_{abc} \neq 0$. Logo, concluímos que f não é uma $\triangle(k)$-identidade.

Para provar o item (4), escrevemos

$$f = \sum x_j x_l x_t f_{jlt},$$

onde f_{jlt} é um polinômio multilinear nas variáveis

$$\{x_1, \ldots, x_{3k+2}\} - \{x_j, x_l, x_t\}.$$

Sejam $a = 1, b = 2$ e $c = 3$, e assumamos, sem perda de generalidade, que f_{123} é não-nulo. Notemos que o polinômio f_{abc} é definido como no item (1). Por indução, f_{abc} não é uma $\triangle(k-1)$-identidade e, assim, não se anula para alguma substituição das variáveis pelas matrizes

$$e_{22}, e_{22}, \ldots, e_{k-1k}, e_{kk}, e_{kk}, e_{kk+1}, e_{k+1,k+1}, e_{k+1,k+1}.$$

Fixando essa substituição e fazendo-a em $f_{abc}, f_{bac}, f_{acb}, f_{cab}, f_{bca}, f_{cba}$, obtemos como resultado, respectivamente,

$$\beta_{abc}e_{2,k+1},\ \beta_{bac}e_{2,k+1}, \ldots, \beta_{cba}e_{2,k+1}, \quad \beta_{jlt} \in K.$$

Observe que $\beta_{abc} \neq 0$ pela hipótese de indução acima sobre f_{abc}. Dessa forma, efetue essa mesma substituição em f, junto com as três substituições abaixo:

(i) $x_a = e_{11},\ x_b = e_{11},\ x_c = e_{12}$. Neste caso, o valor de f após a substituição é $(\beta_{abc} + \beta_{bac})e_{1k+1}$.

(ii) $x_b = e_{11},\ x_c = e_{11},\ x_a = e_{12}$. Neste caso, o valor de f perante a substituição é $(\beta_{bca} + \beta_{cba})e_{1k+1}$.

(iii) $x_c = e_{11},\ x_a = e_{11},\ x_b = e_{12}$. Neste caso, o valor de f após a substituição é $(\beta_{cab} + \beta_{acb})e_{1k+1}$.

Dessa maneira, se f é uma $\triangle(k)$-identidade, então

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_{abc} + \beta_{bac} & = & 0 \\ \beta_{bca} + \beta_{cba} & = & 0 \\ \beta_{cab} + \beta_{acb} & = & 0. \end{array} \right.$$

Pela definição de f_{jlt}, temos que $f_{jlt} = f_{jtl}$, pois f é do tipo (4). Assim, temos $\beta_{jlt} = \beta_{jtl}$, e portanto temos o sistema

$$\begin{cases} \beta_{abc} + \beta_{bac} & = & 0 \\ \beta_{bac} + \beta_{cba} & = & 0 \\ \beta_{cba} + \beta_{abc} & = & 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$0 = \beta_{abc} = \beta_{bac} = \beta_{cba}.$$

Absurdo, pois $\beta_{abc} \neq 0$. Portanto, concluímos que f também não é uma $\triangle(k)$-identidade, caso seja do tipo (4).

Para provar o item (2), escrevemos

$$f = \sum f_{jlt} x_j x_l x_t$$

e notamos que f_{jlt} tem as características de um polinômio definido no item (4). Agora é suficiente usar um argumento análogo ao que foi usado no caso (3). Isso fica como sugestão ao leitor.

Para provar o item (1), escreva

$$f = \sum f_{jlt} x_j x_l x_t.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $f_{3k,3k+1,3k+2}$ é não-nulo e sejam $a = 3k,\ b = 3k+1,\ c = 3k+2$. Substituindo as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_{3k-1}$ pelas matrizes $e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, \ldots, e_{k-1k}, e_{kk}, e_{kk}$ (que não precisam estar necessariamente nesta ordem), obtemos que f_{abc} e f_{acb} são dados por

$$\beta_{abc} e_{1k} \ \text{ e } \ \beta_{acb} e_{1k},$$

respectivamente. Realizando a mesma substituição acima em f, junto com as substituições $x_a = e_{kk+1},\ x_b = x_c = e_{k+1k+1}$, obtemos

$$(\beta_{abc} + \beta_{acb}) e_{1k+1}.$$

Como f é do tipo (1), segue que $f_{abc} = f_{acb}$ e portanto $\beta_{abc} = \beta_{acb}$. Assim, supondo que f é uma $\triangle(k)$-identidade, então

$$0 = (\beta_{abc} + \beta_{acb}) = 2\beta_{abc}.$$

Logo, f_{abc} é uma $\triangle(k-1)$-identidade. Mas isso é um absurdo, pois f_{abc} é definido como no item (3). ✓

Por convenção, adotaremos sobre os monômios de $K\langle X\rangle$ a seguinte ordem: inicialmente ordenamos os elementos de X por

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots \quad .$$

Agora, se m_1 e m_2 são dois monômios, então eles se relacionam da seguinte maneira:

(1) Se grau(m_1) $<$ grau(m_2), então $m_1 < m_2$.

(2) Se grau(m_1)=grau(m_2), escreva

$$m_1 = x_{i_1} \dots x_{i_n},\ m_2 = x_{j_1} \dots x_{j_n}$$

e considere o maior k tal que $x_{i_k} \neq x_{j_k}$. Se $x_{i_k} < x_{j_k}$, então $m_1 < m_2$.

Dado um polinômio $f \in K\langle X\rangle$, denotaremos por $\overline{f}$ o maior monômio que forma f. Além disso, utilizaremos a seguinte definição: sejam m, m_1 e m_2 três monômios. Se $m = m_1 m_2$, então dizemos que m *possui final* m_2.

Lema 3.3.14 *Considere um polinômio multilinear f de grau n dado por*

$$f = \sum_{j=1}^{s} f_j g_j, \tag{3.7}$$

onde f_j e g_j são multilineares e satisfazem:

(1) *f_j possui grau $\geq 3k+2$.*

(2) $\overline{g_1} < \overline{g_2} < \dots < \overline{g_s}$.

(3) *Se $\overline{g_j} < \overline{g_l}$, então os monômios que formam g_l não possuem final $\overline{g_j}$.*

Se f é uma $\triangle(k)$-identidade, então $f_1, f_2, \dots, f_s$ também são $\triangle(k)$-identidades.

Demonstração. Seja d_j o grau de f_j e $r = 3k+2$. Fixado um número par t, escreva

$$f_1 = \sum x_{i_1} \dots x_{i_t} w_i x_{i_{t+r+1}} \dots x_{i_{d_1}},$$

onde w_i possui grau r e $i = (i_1, \dots, i_t, i_{t+r+1}, \dots, i_{d_1})$. Escreva também

$$f = \sum x_{a_1} \dots x_{a_t} u_a x_{a_{t+r+1}} \dots x_{a_{d_1}} x_{a_{d_1+1}} \dots x_{a_n},$$

onde u_a possui grau r e $a = (a_1, \ldots, a_t, a_{t+r+1}, \ldots, a_n)$. Pelos itens (2) e (3), se $a = (i_1, \ldots, i_t, i_{t+r+1}, \ldots, i_{d_1}, a_{d_1+1}, a_{d_1+2}, \ldots, a_n)$, onde

$$x_{a_{d_1+1}} \ldots x_{a_n} = \overline{g_1},$$

então $u_a = \alpha w_i$, com α sendo o coeficiente de $\overline{g_1}$ em g_1. Dessa forma, todo k-corte em f_1 é um k-corte em f, a menos de uma constante multiplicativa α. Portanto f_1 é uma $\triangle(k)$-identidade. Apesar de o polinômio

$$f - f_1 g_1 = \sum_{j=2}^{s} f_j g_j$$

não ser uma $\triangle(k)$-identidade, usamos o mesmo argumento acima para provar que f_2 é uma $\triangle(k)$-identidade, pois $d_2 \leq d_1$ (caso $d_2 > d_1$, então teríamos $\overline{g_2} < \overline{g_1}$, contrariando a hipótese).

Assim, seja t um número par e escreva

$$f_2 = \sum x_{j_1} \ldots x_{j_t} w_j{}' x_{j_{t+r+1}} \ldots x_{j_{d_2}},$$

onde $w_j{}'$ possui grau r e $j = (j_1, \ldots, j_t, j_{t+r+1}, \ldots, j_{d_2})$. Além disso, escreva

$$f - f_1 g_1 = \sum x_{b_1} \ldots x_{b_t} u_b{}' x_{b_{t+r+1}} \ldots x_{b_{d_2}} x_{b_{d_2+1}} \ldots x_{b_n},$$

onde $u_b{}'$ possui grau r e $b = (b_1, \ldots, b_t, b_{t+r+1}, \ldots, b_n)$. Pelos itens (2) e (3), se $b = (j_1, \ldots, j_t, j_{t+r+1}, \ldots, j_{d_2}, b_{d_2+1}, b_{d_2+2}, \ldots, b_n)$, onde

$$x_{b_{d_2+1}} \ldots x_{b_n} = \overline{g_2},$$

então $u_b{}' = \beta w_j{}'$, com β sendo o coeficiente de $\overline{g_2}$ em g_2. Dessa forma, todo k-corte em f_2 é um k-corte em $f - f_1 g_1$, a menos de uma constante multiplicativa β. A informação nova é $t + r \leq d_2$. Como $g_1 < g_2$ temos grau $g_1 \leq$ grau g_2 e portanto $d_1 \geq d_2$. Assim, $t + r \leq d_1$ e portanto

$$u_b{}' = \beta w_j{}' = U - \gamma V,$$

onde U e V são k-cortes de f e f_1, respectivamente. Aqui, γ é o coeficiente de $x_{b_{d_1+1}} \ldots x_{b_n}$ em g_1. Portanto, como f e f_1 são $\triangle(k)$-identidades, segue que f_2 é uma $\triangle(k)$-identidade também. Analogamente, para provar que f_{z+1} é uma $\triangle(k)$-identidade, nós usamos o polinômio

$$f - \sum_{i=1}^{z} f_i g_i$$

e usamos o fato que $d_1 \geq \ldots \geq d_z \geq d_{z+1}$ para mostrar que todo k-corte de f_{z+1} é uma combinação linear dos k-cortes de $f, f_1, \ldots, f_z$. ✓

O lema a seguir é uma variação de um resultado utilizado na prova do célebre teorema de Lewin sobre a representabilidade por matrizes. Sugerimos ao leitor consultar mais detalhes na monografia [3, p. 21].

Lema 3.3.15 *Seja T um T-ideal. Existe uma base β para T, como $K\langle X\rangle$-módulo à esquerda, com as propriedades:*

(1) *Os elementos de β são multi-homogêneos.*

(2) *Se $g_1, g_2 \in \beta$ são diferentes, então $\overline{g_1} \neq \overline{g_2}$. Além disso, se $\overline{g_1} < \overline{g_2}$, então os monômios que formam g_2 não possuem final $\overline{g_1}$.*

Demonstração. Considere M o conjunto formado pelos monômios m tais que $m = \overline{f}$ para algum $f \in T$ e

$$m \neq m'\overline{g},$$

para todo monômio $m' \neq 1$ e $g \in T$.

Agora, dado $m \in M$, seja f um polinômio em T com $\overline{f} = m$. Como o corpo K é infinito, f é escolhido multi-homogêneo. Seja m_1 o maior monômio diferente de m que forma f. Se existem monômios u e m' tais que $m' \in M$ e $m_1 = um'$, então faça

$$f_1 = f - uf',$$

onde $\overline{f'} = m'$ e $f' \in T$ é multi-homogêneo. Assim, temos que f_1 é multi-homogêneo, $\overline{f_1} = m$, e o maior monômio diferente de m que forma f_1 é $m_2 < m_1$. Por indução, mostramos que existe um polinômio multi-homogêneo $g_m \in T$ tal que $\overline{g_m} = m$ e com a propriedade de que se $u \in M$ e $u < m$, então os monômios que formam g_m não possuem final u. Dessa forma, tome $\beta = \{g_m \mid m \in M\}$.

Considerando um polinômio multi-homogêneo qualquer $g \in T$, seja

$$\overline{g} = u_1 m_1 = \overline{u_1 g_{m_1}}$$

seu termo líder, onde u_1 é um monômio, $m_1 \in M$ e $g_{m_1} \in \beta$. Portanto,

$$\overline{g - u_1 g_{m_1}} < \overline{g} \quad \text{e} \quad g - u_1 g_{m_1} \in T.$$

Fazendo esse mesmo argumento com o polinômio $g - u_1 g_{m_1}$, seja

$$\overline{g - u_1 g_{m_1}} = u_2 m_2 = \overline{u_2 g_{m_2}}$$

seu termo líder, onde u_2 é um monômio, $m_2 \in M$ e $g_{m_2} \in \beta$. Obtemos

$$\overline{(g - u_1 g_{m_1}) - u_2 g_{m_2}} < \overline{g - u_1 g_{m_1}} \quad \text{e} \quad g - u_1 g_{m_1} - u_2 g_{m_2} \in T.$$

Dando sequência a esse processo, encontramos elementos $u_3 g_{m_3}, \ldots, u_t g_{m_t}$ sob as mesmas condições, com $g - u_1 g_{m_1} - u_2 g_{m_2} - \ldots - u_t g_{m_t} \in T$. Obviamente, em algum momento esse processo "acaba", pois os polinômios $u_i g_{m_i}$ são multi-homogêneos com mesmo multigrau e

$$\overline{u_i g_{m_i}} \neq \overline{u_j g_{m_j}}$$

para todo $i \neq j$. Então teremos

$$g - u g_{m_1} - u_2 g_{m_2} - \ldots - u_t g_{m_t} = 0$$

para algum t. Logo,

$$g = u g_{m_1} + u_2 g_{m_2} + \ldots + u_t g_{m_t},$$

e portanto β gera T como um $K\langle X\rangle$-módulo à esquerda.

Falta demonstrar a independência linear dos elementos de β. Com efeito, considere

$$\sum_{i=1}^{t} f_i \cdot g_{m_i} = 0, \tag{3.8}$$

onde $f_i \in K\langle X\rangle$, $m_i = \overline{g_{m_i}} \in M$ e $g_{m_i} \in \beta$.

Sem perda de generalidade, suponha $m_1 < m_2 < \ldots < m_t$. Para $i \neq 1$, temos que os monômios que formam g_{m_i} não possuem final m_1. Logo, na igualdade (3.8) temos obrigatoriamente $f_1 m_1 = 0$ e portanto $f_1 = 0$. Aplicando o mesmo raciocínio, concluímos que $f_2 = f_3 = \ldots = f_t = 0$ e assim β é uma base para T como um $K\langle X\rangle$-módulo à esquerda. ✓

O teorema seguinte é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.3.16 ([6]) *Seja $d(n)$ o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$. Se $k \geq 0$ é um inteiro fixado, então existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(n) > 2n + k$$

para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Considere β uma base para o T-ideal

$$T(U_1(K)) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T,$$

como um $K\langle X \rangle$-módulo à esquerda, satisfazendo as condições do Lema 3.3.15. Pelo Lema 3.2.2, sabemos que

$$T(U_n(K)) = \overbrace{T(U_1(K))T(U_1(K)) \dots T(U_1(K))}^{n}.$$

Assim, $T(U_n(K))$ possui uma base, como $K\langle X \rangle$-módulo à esquerda, formada pelos polinômios

$$g = g_1 g_2 \cdots g_n,$$

onde $g_i \in \beta$.

Agora, suponha que exista uma A-identidade p de grau $2n + k$ para $U_n(K)$ e escreva

$$p = \sum w_g g_1 g_2 \dots g_n,$$

onde $w_g \in K\langle X \rangle$ e $g_i \in \beta$. Como os elementos da base β são multi-homogêneos, é válido assumir que todo $w_g g_1 g_2 \dots g_n$ que aparece no somatório é multilinear de grau $2n+k$. Além disso, como os elementos de grau 2 em β são da forma $[x_i, x_j]$, em cada $g = g_1 g_2 \dots g_n$ no máximo k dos g_l's podem ser diferentes de $[x_i, x_j]$.

Pela Definição 3.3.2, temos que $p = p^*$ e, assim, pelo Lema 3.3.5, temos que

$$p = \sum \pm w_g^* g_1^* g_2^* \dots g_n^*. \tag{3.9}$$

Como $[x_i, x_j]^* = \pm(x_i \circ x_j)$, em cada $g_1^* g_2^* \dots g_n^*$ no máximo k dos g_l^* podem ser diferentes de $(x_i \circ x_j)$. Relembrando, chamamos um elemento do tipo $(x_i \circ x_j)$ de produto de Jordan.

Defina os números ϵ_l da seguinte forma:

(i) Em cada $g = g_1^* g_2^* \dots g_n^*$, que aparece no somatório (3.9), considere $i(g)$ o maior índice j tal que g_j^* não é um produto de Jordan. Defina ϵ_1 como sendo o maior $i(g)$.

(ii) Em cada $g = g_1^* g_2^* \dots g_n^*$, onde $g_{\epsilon_l}^*, g_{\epsilon_{(l-1)}}^*, \dots, g_{\epsilon_1}^*$ não são produtos de Jordan, seja $i(g)$ o maior índice j tal que $j < \epsilon_l$ e g_j^* não é produto de Jordan. Defina ϵ_{l+1} como sendo o maior $i(g)$.

Logicamente, não é possível definir ϵ_l a partir de um certo l; por exemplo, não podemos definir $\epsilon_{k+1}, \epsilon_{k+2}, \epsilon_{k+3}, \dots$, pois em $g_1^* g_2^* \dots g_n^*$ no máximo k dos g_l^* não são produtos de Jordan. Assim, considere ϵ_s o último ϵ_l que conseguimos definir. O argumento é: como k está fixado, para n suficientemente grande um (ou mais) dos três casos abaixo ocorre:

Caso (1). $\epsilon_s > \left[\frac{3k+2}{2}\right]$.

Caso (2). Existe L tal que $\epsilon_L - \epsilon_{L+1} > \left[\frac{3k+2}{2}\right]$.

Caso (3). $n - \epsilon_1 > \left[\frac{3k+2}{2}\right]$.

A notação $[x]$ denomina o maior inteiro menor ou igual a x. Além disso, cabe ressaltar que o caso (3) na verdade não pode ocorrer. De fato, uma vez que p é um polinômio par, temos que algum g_n^* não pode ser do tipo $(x_i \circ x_j)$. Caso contrário, como $x_i \circ x_j = x_i x_j + x_j x_i$, a paridade de p seria comprometida. Disso, sempre teremos $\epsilon_1 = n$, e assim, não há como ocorrer o caso (3).

A partir de agora, analisaremos os dois primeiros casos.

Suponha que o *caso* (1) ocorra. Note que se $g = g_1^* g_2^* \ldots g_n^*$ aparece na expressão de p e $g_{\epsilon_s}^*, g_{\epsilon_{(s-1)}}^*, \ldots, g_{\epsilon_1}^*$ não são produtos de Jordan, então em g devem existir no mínimo $z = [(3k+2)/2]$ elementos do tipo $(x_i \circ x_j)$ entre g_1^* e $g_{\epsilon_s}^*$, ou seja,

$$g_{(\epsilon_s)-1}^*, \ldots,\ g_{(\epsilon_s)-(z-1)}^*,\ g_{(\epsilon_s)-z}^*$$

são produtos de Jordan.

Fixe $h_{\epsilon_s} = g_{\epsilon_s}^*,\ h_{(\epsilon_s)+1} = g_{(\epsilon_s)+1}^*, \ldots,\ h_n = g_n^*$, onde $g_{\epsilon_s}^*, g_{\epsilon_{(s-1)}}^*, \ldots, g_{\epsilon_1}^*$ não são produtos de Jordan, e seja

$$h \cdot (h_{\epsilon_s} h_{(\epsilon_s)+1} \ldots h_n),\ h \in K\langle X \rangle,$$

a soma dos elementos $\pm w_g^* g_1^* g_2^* \ldots g_n^*$ que aparecem no somatório (3.9), onde

$$h_{\epsilon_s} = g_{\epsilon_s}^*,\ h_{(\epsilon_s)+1} = g_{(\epsilon_s)+1}^*, \ldots,\ h_n = g_n^*.$$

Pelo Lema 3.3.12 temos que p é uma $\triangle(k)$-identidade. Aplicando exatamente $n - (\epsilon_s - 1)$ vezes o Lema 3.3.14, obtemos que h é uma $\triangle(k)$-identidade. Além disso, pela argumentação acima, temos que h pode ser escrito como

$$h = \sum v_b b_1 b_2 \ldots b_z,$$

onde $b_1, b_2, \ldots, b_z$ são do tipo $(x_i \circ x_j)$ e $v_b \in K\langle X \rangle$. Como $\epsilon_s > \left[\frac{3k+2}{2}\right]$, existe um k-corte f em h definido em algum dos itens do Lema 3.3.13. Esse k-corte, particularmente, é também uma $\triangle(k)$-identidade. Mas isso é um absurdo, pela própria conclusão do Lema 3.3.13.

Diante disso, provamos que para n suficientemente grande, não existem A-identidades de grau $2n + k$ para $U_n(K)$. Fixemos um destes n's. Supondo que $d(n) < 2n + k$, considere uma A-identidade F de grau $d(n)$. Neste caso, temos que

$$F(x_1, \ldots, x_{d(n)})x_{d(n)+1}x_{d(n)+2} \ldots x_{2n+k}$$

seria uma A-identidade para $U_n(K)$, o que novamente é um absurdo. Portanto, $d(n) > 2n + k$.

Com pequenas modificações na demonstração do *caso* (1), podemos provar também o teorema no *caso* (2). Basta observar que se $g = g_1^* g_2^* \ldots g_n^*$ aparece no somatório (3.9) e

$$g^*_{\epsilon_L}, g^*_{\epsilon_{(L-1)}}, \ldots, g^*_{\epsilon_1}$$

não são produtos de Jordan, então em g devem existir no mínimo $z = [(3k+2)/2]$ elementos do tipo $(x_i \circ x_j)$ entre $g^*_{\epsilon_{(L+1)}}$ e $g^*_{\epsilon_L}$, isto é,

$$g^*_{(\epsilon_L)-z},\ g^*_{(\epsilon_L)-(z-1)},\ \ldots,\ g^*_{(\epsilon_L)-1}$$

são produtos de Jordan.

Fixe $q_{\epsilon_L} = g^*_{\epsilon_L},\ q_{(\epsilon_L)+1} = g^*_{(\epsilon_L)+1}, \ldots,\ q_n = g^*_n$, onde $g^*_{\epsilon_L}, g^*_{\epsilon_{(L-1)}}, \ldots, g^*_{\epsilon_1}$ não são produtos de Jordan, e considere

$$q \cdot (q_{\epsilon_L} q_{(\epsilon_L)+1} \ldots q_n),\ q \in K\langle X\rangle,$$

a soma dos elementos $\pm w_g^* g_1^* g_2^* \ldots g_n^*$ que aparecem na expressão de p, com

$$q_{\epsilon_L} = g^*_{\epsilon_L},\ q_{(\epsilon_L)+1} = g^*_{(\epsilon_L)+1}, \ldots,\ q_n = g^*_n.$$

Assim, usamos argumentos análogos ao *caso* (1) e concluímos o resultado. ✓

Retornemos para a Conjetura 3.3.1: se para todo n a álgebra $M_n(K)$ satisfizesse alguma A-identidade de grau $2n + 2$, então em particular a subálgebra $U_n(K)$ também possuiria A-identidades de grau $2n + 2$, o que é uma contradição pelo Teorema 3.3.16, que acabamos de demonstrar. Logo, a conjetura é falsa.

Agora, podemos exibir A-identidades para $U_n(K)$ de grau $[(5n + 1)/2]$. Para isso, considere f' uma A-identidade de grau 5 para $U_2(K)$. Se n é par, $n = 2m$, seja f o produto de m cópias de f' escritas em variáveis distintas, ou seja,

$$f = f'(x_1, \ldots, x_5)f'(x_6, \ldots, x_{10}) \ldots f'(x_{5m-4}, \ldots, x_{5m}).$$

De acordo com o Lema 3.2.2, temos que f é uma A-identidade para $U_n(K)$ de grau $5m = [(5n+1)/2]$. Se $n = 2m + 1$ é ímpar, então

$$p = f \cdot [x_{5m+1}, x_{5m+2}x_{5m+3}]$$

é uma A-identidade para $U_n(K)$ de grau $5m + 3 = [(5n+1)/2]$.

Dessa forma, isso nos leva a crer que o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$ é igual a $[(5n+1)/2] = 2n + [(n+1)/2]$.

Referências Bibliográficas

[1] S.A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463, (1950).

[2] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras, Graduate Course in Algebra*, Springer, Singapore, (1999).

[3] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys and Monog. **122**, (2005), AMS.

[4] D. Gonçalves, *A-identidades Polinomiais em Álgebras Associativas*, Tese de Doutorado, (2009).

[5] D. Gonçalves, P. Koshlukov, *A-Identities for the Grassmann algebra: The Conjecture of Henke and Regev*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**, 2711–2717, (2008).

[6] D. Gonçalves, P. Koshlukov, *A-Identities for upper triangular matrices: a question of Henke and Regev*, Israel J. Math. **186**, 407–426, (2011).

[7] A. Henke, A. Regev, *A-codimensions and A-cocharacters*, Israel J. Math. **133**, 339–355,(2003).

[8] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237–264, (1958).

[9] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** , 429–438,(1973).

[10] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal*, Sibirsk. Matem. Zh. **4**, No. 5 (1963), 1122–1126 (Russian).

[11] Yu. N. Maltsev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices*, Algebra and Logic, **10**, 242–247, (1971).

[12] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **38**, 723–756, (1974). Translation: Math. USSR, Izv. **8**, 727–760, (1974).

[13] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math., **23**, 187–188, (1976).

[14] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 367–373, (1963).