

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre soluções que mudam de sinal via Teoria de Enlace

por

Robson Alves do Nascimento Filho

Brasília

2011

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre soluções que mudam de sinal via Teoria de Enlace

por

Robson Alves do Nascimento Filho *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília
como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de*

MESTRE EM MATEMÁTICA

19 de dezembro de 2011

Comissão Examinadora:

Prof. Marcelo Fernandes Furtado - MAT/UnB - Orientador

Prof. Carlos Alberto Pereira dos Santos - MAT/UnB - Membro

Prof. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA - Membro

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Dedicatória

Ao professor

Mauro Rabelo

E ao meu chapa

Marcelão

Agradecimentos

Ao Marcelão, pela paciência e coragem em ter me aceitado como orientando desde os tempos de graduação. Pelos puxões de orelha e por todos os momentos que passamos nesse período. Valeu meu chapa!

Aos meus pais Robson e Edilene, pelo apoio durante toda a minha vida, e incentivo deles recebido nos momentos mais difíceis. Meus irmãos Bezerra, Rafa e Pretinha pelos momentos de lazer e descontração juntos.

Aos meus amigos, a principal razão de tudo em minha vida. Vocês são a maior riqueza que eu tenho. Valeu galera!

Aos professores da banca examinadora: Carlos Alberto Pereira dos Santos, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Elves Alves de Barros e Silva por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora, e também pelas críticas e sugestões que enriquecem este trabalho.

Aos professores Mauro Rabelo, Célius e Nigel pelas valiosas conversas ao longo dos últimos anos. Um agradecimento especial ao professor Mauro, por tudo que ele representa em minha vida, a quem eu considero como um segundo pai.

Aos professores Luís de Miranda, Ricardo Tchê e a Aline Pinto. Um agradecimento especial a Aline, por ter me incentivado desde o início da minha graduação a participar das atividades de monitoria, de iniciação científica e de ingressar no PETMAT.

Aos professores João Carlos e Raderson, pela paciência nas explicações dos seminários de Análise e pela motivação em estudar certos temas em uma outra linha de pesquisa.

A Deus, pela oportunidade, força e presença na minha vida. Ao Pe. Rafael, pelos conselhos e apoio no momentos difíceis em que me deparei nessa caminhada da vida.

Aos funcionários da pós, que sempre foram atenciosos comigo e conseguiam quebrar um galho pra mim!

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de pontos críticos que mudam de sinal para uma classe de funcionais definidos em espaços de Hilbert. Na prova dos resultados usamos Teoria de Enlace. Como aplicação, obtemos soluções que mudam de sinal para o problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e medida finita, e f é assintoticamente linear no infinito.

Abstract

In this work, we study the existence of sign-changing critical points to a class of functionals defined on Hilbert spaces. For the proof of the results we use Linking Theory. As applications we obtain sign-changing solutions for the problem

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary and finite measure, and f is asymptotically linear at infinity.

Sumário

Introdução	1
1 O conceito de enlace	7
1.1 A definição de Schechter-Tintarev	7
1.2 Alguns exemplos de enlace	12
2 Pontos críticos que mudam de sinal via Teoria de Enlace	20
2.1 Uma relação entre os pontos críticos e o enlace	20
2.2 Uma variação dos Teoremas A e B	45
3 Aplicações	48
3.1 Um problema não ressonante	57
3.2 Um problema ressonante	68
3.3 Problema duplamente ressonante	70
3.4 Problemas com não linearidade do tipo salto no infinito	71
Apêndice	86
Referências Bibliográficas	95

Introdução

Soluções que mudam de sinal para equações elípticas não lineares têm atraído muito a atenção nos últimos 20 anos. Um das razões para esse fato é que elas aparecem naturalmente em modelos matemáticos da Física e da Biologia.

Por exemplo, na Biologia podemos citar as soluções de sistemas que modelam a estabilidade entre duas espécies que competem entre si. Quando os parâmetros de interação tendem ao infinito, as soluções para o sistema apresentam um fenômeno de agregação. Em particular, se a equação limite possui solução que muda de sinal não degenerativa, então os limites das duas componentes da solução positiva do sistema possuem suporte disjuntos que são os fechos de domínios nodais de soluções que mudam de sinal.

Na Física, podemos citar as soluções de sistemas que aparecem no estudo de ondas estacionárias em uma mistura de condensados do tipo Bose-Einstein em dois ou mais diferentes estados hiperfinos. Além disso, destacamos um interessante ponto de investigação que consiste na estabilidade de Equações de Schrödinger não lineares.

As estruturas de soluções que mudam de sinal são mais ricas do que as estruturas de soluções positivas e negativas para equações elípticas lineares e não lineares. Por exemplo, considerando o problema de autovalor de operadores elípticos de segunda ordem em um domínio limitado com condição de fronteira nula, observamos que as autofunções associadas aos autovalores distintos do primeiro possuem a propriedade de mudar de sinal.

Em comparação com as soluções positivas e negativas, as soluções que mudam de sinal possuem propriedades qualitativas mais delicadas. Assim, o seu estudo mostra-se como um interessante desafio matemático.

Nos últimos 20 anos, vários métodos foram desenvolvidos no estudo de soluções que mudam de sinal para equações diferenciais parciais elípticas lineares e não lineares. Na verdade, o estudo de tais soluções tem estimulado o desenvolvimento de novas e sofisticadas técnicas no Cálculo das Variações e na Teoria dos Pontos Críticos. Dentre elas, destacamos os métodos baseados na técnica da variedade de Nehari, na Teoria de Morse e na Teoria de Enlace (em inglês “*Linking*”).

Neste trabalho, usamos a Teoria de Enlace para obter soluções que mudam de sinal para o problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, e f é assintoticamente linear no infinito.

Sob certas condições sobre f , vários autores mostraram a existência de soluções não triviais. Durante os últimos anos, o problema (P) tem sido amplamente investigado na direção de mostrar a existência de uma solução que muda de sinal. Existe na literatura uma vasta lista de trabalhos nessa linha de pesquisa.

Usando a Teoria do Grau, Hofer em [15] mostrou a existência de uma solução que muda de sinal para uma classe de funções f . Considerando f com crescimento superlinear e subcrítico no infinito, Bartsch et al [3, 4] usaram argumentos de enlace e do tipo Morse para mostrar que o problema (P) possui uma solução que muda de sinal. A Teoria de Ljusternik-Schnirelmann foi estabelecida em Li e Wang [16] para o estudo de soluções que mudam de sinal associado a um funcional par. Alguns teoremas do tipo enlace também foram obtidos em espaços de Hilbert parcialmente ordenados. Em 2007, Liu e Wang [17] mostraram a existência de soluções que mudam de sinal para os casos em que f tem crescimento sublinear, crítico e subcrítico no infinito.

Considerando o caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$ a questão de existência de uma tal solução é mais delicada. De fato, uma dificuldade é a perda de compacidade, ou seja, a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ com $2 < p < 2^*$ não é compacta. Nessa direção destacamos os trabalhos de Zou [32, 33] no qual o autor utiliza Teoria de Enlace e o de Bartsch e Wang [3], em que os autores construíram uma série de problemas de Dirichlet na bola e então expandiram a bola para todo o espaço.

Este trabalho está baseado principalmente em Zou [31]. No que segue, apresentamos a estrutura da dissertação, ressaltando os principais resultados por seção.

No Seção 1.1, apresentamos a definição de Schechter-Tintarev [23] para enlace entre certos conjuntos que é adotada neste trabalho. Destacamos que ao longo do século XX, outras definições foram apresentadas, das quais gostaríamos de destacar os trabalhos de Brézis e Nirenberg [7], Rabinowitz [19], Silva [28] e Willem [30]. No entanto, existiam algumas desvantagens nas definições anteriores, se comparada com a definição de Schechter-Tintarev. Ressaltamos ainda que, Schetcher e Zou nos trabalhos [25, 26] apresentaram uma outra definição de enlace mais geral na qual inclui a classe de todos os conjuntos que formam um enlace segundo a definição de Schetcher-Tintarev, isto é, existem conjuntos que enlaçam no sentido de Schetcher-Zou e no entanto, não enlaçam no sentido de

Schetcher-Tintarev.

Na Seção 1.2, apresentamos alguns exemplos de conjuntos que enlaçam. Para mais exemplos, recomendamos a leitura dos trabalhos de Schetcher [20, 21, 22] e Schetcher e Zou [25].

Na Seção 2.1, obtemos uma relação entre a teoria abstrata de enlace e os pontos críticos que mudam de sinal para uma classe de funcionais de classe C^1 definidos em espaços de Hilbert. Mais precisamente, provamos os Teoremas A e B. Destacamos que, devido a quantidade de definições que são necessárias para a compreensão destes teoremas, não os apresentamos nesse momento, mas no Capítulo 2. Na Seção 2.2, conseguimos variações dos resultados obtidos na Seção 2.1, a saber os Teoremas A' e B'.

Estes resultados abstratos são aplicados no Capítulo 3, onde obtemos soluções que mudam de sinal para o problema (P), em que algumas condições sobre f são impostas. No que segue, apresentamos algumas condições.

(B0) $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua;

(B1) $f(x, t)t \geq 0$ para $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = 0, \text{ uniformemente para } x \in \Omega;$$

Estamos interessados no caso em que f é assintoticamente linear no infinito, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} = k_{\pm}(x).$$

Vamos considerar três situações distintas.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \beta_+(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \beta_-(x); \quad (1)$$

$$\liminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} := L(x) \quad \text{e} \quad \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} := K(x); \quad (2)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \theta_{\pm}(x) \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \vartheta_{\pm}(x), \quad (3)$$

uniformemente para $x \in \Omega$.

Seja

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$$

a sequência de autovalores distintos para o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue, consideramos ainda a condição

(B2) existe $c_0 > 0$ tal que

$$F(x, t) := \int_0^t f(x, s) ds \geq \frac{\lambda_{k-1}}{2} t^2 - \frac{c_0}{2}, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}.$$

Usando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com $2 < p < 2^*$, obtemos uma constante $\Lambda_p > 1$ tal que

$$|u|_p \leq \Lambda_p \|u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Veremos no Capítulo 3 que considerando $\alpha \in (0, 1)$ satisfazendo

$$\frac{1}{p} = (1 - \alpha) \left(\frac{N - 2}{2N} \right) + \frac{\alpha}{2},$$

obtemos uma constante $c_p > 1$ tal que

$$|u|_p \leq c_p \|u\|^\alpha |u|_2^{1-\alpha}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, supondo que as condições (B0) e (B1) são válidas, e f satisfaz (1), (2) ou (3), veremos que existe $D_p > 1$ tal que

$$|F(x, t)| \leq \frac{\lambda_1}{4} |t|^2 + D_p |t|^p, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R},$$

em que $2 < p < 2^*$.

Em todos os nossos resultados consideramos a seguinte condição

(B3) sejam Λ_p , c_p e D_p definidos como acima. Considerando

$$T_1 := \min \left\{ \lambda_k^{(1-\alpha)(p-2)}, \lambda_k^{(1-\alpha)} \right\}, \quad T_2 := \min \left\{ \frac{1}{64D_p^2}, (8D_p)^{-1/(p-2)} \right\}$$

e

$$\Lambda_p^* := \min \left\{ \frac{1}{4\Lambda_p^2 c_p^{(p-2)}}, (4\Lambda_p^2 c_p^{(p-2)})^{-1/(p-2)} \right\},$$

então supomos que

$$c_0 \leq \frac{1}{4|\Omega|} (\Lambda_p^*)^2 T_1 T_2,$$

em que c_0 é dado na condição (B2).

Na Seção 3.1, provamos o seguinte resultado de não ressonância.

Teorema 3.1. *Suponha que as condições (B0) – (B3) sejam válidas e que f satisfaz (1) com*

$$\lambda_k < \beta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $\beta_+(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$ ou $\beta_-(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$, então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Na Seção 3.2, considerando uma hipótese adicional sobre f , permitimos que o problema seja ressonante, isto é, que um dos limites assintóticos coincide com um autovalor. A hipótese adicional é a condição de não-quadraticidade, introduzida por Costa e Magalhães em [10], a saber

(B4) vale o seguinte limite

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} (f(x, t)t - 2F(x, t)) = \infty, \quad \forall x \in \Omega.$$

Teorema 3.2. *Suponha que as condições (B0) – (B4) sejam válidas e que f satisfaz (1) com*

$$\lambda_k < \beta_{\pm}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Na Seção 3.3, obtemos o seguinte resultado de dupla ressonância.

Teorema 3.3. *Suponha que as condições (B0) – (B4) sejam válidas e f satisfaz (2) com*

$$\lambda_k \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $L \not\equiv \lambda_k$, então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Vamos denotar por $V_k \subset H_0^1(\Omega)$ o seguinte subespaço

$$V_k := \text{Ker}(-\Delta - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(-\Delta - \lambda_k \text{Id}),$$

em que $k > 1$ é um número natural. Na Seção 3.4 fazemos uso das seguintes condições:

(B5) existe $c_0 > 0$ tal que

$$2F(x, t) \geq \max\{\lambda_{k-1}t^2, \theta_+(x)(t^+)^2 + \theta_-(x)(t^-)^2\} - c_0, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R};$$

(B6)

$$\|v\|^2 \leq \int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx, \quad \forall v \in V_k;$$

(B7) $\vartheta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega;$ (B7)' $\lambda_k \leq \theta_{\pm}(x) \leq \vartheta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega;$ (B8) nenhuma autofunção associada ao autovalor λ_{k+1} satisfaz

$$-\Delta u = \vartheta_+(x)u^+ - \vartheta_-(x)u^-;$$

(B9) não existe função em $V_k \setminus \{0\}$ que satisfaça

$$-\Delta u = \theta_+(x)u^+ - \theta_-(x)u^-;$$

(B9)' nenhuma autofunção associada a λ_k satisfaz

$$-\Delta u = \theta_+(x)u^+ - \theta_-(x)u^-.$$

A seguir, apresentamos os principais resultados obtidos na Seção 3.4.

Teorema 3.4. *Suponha que as condições (B0), (B1), (B3) e (B5) sejam válidas e f satisfaz (3). Suponha ainda que para cada par de números a_+ e b_- no intervalo $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ existam $a_- < \lambda_k$ e $b_+ > \lambda_{k+1}$ tais que*

$$a_{\pm} \leq \theta_{\pm}(x) \leq \vartheta_{\pm}(x) \leq b_{\pm}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Teorema 3.5. *Suponha que as condições (B0), (B1), (B3) e (B5) – (B9) sejam válidas e f satisfaz (3). Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.*

Teorema 3.6. *Suponha que as condições (B0), (B1), (B3), (B5), (B7)', (B8) e (B9)' sejam válidas e f satisfaz (3). Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.*

Os resultados de existência para os Teoremas 3.4 – 3.6 são conhecidos (c.f. Berestycki e deFigueiredo [5], Cac [8], Furtado et al [12, 13] e Habets [14]). No entanto, nesses trabalhos o sinal das solucoes nao foi determinado.

O conceito de enlace

Uma maneira clássica de obter pontos críticos para um determinado funcional I é procurar pelos candidatos naturais, ou seja, os pontos de máximo ou mínimo. Isto é possível desde que o funcional seja limitado superiormente ou inferiormente. No entanto, quando não nos deparamos com essa situação, não existe uma maneira padrão para encontrarmos os pontos críticos.

Uma ideia que se mostrou bastante eficaz para abordar essa questão foi a teoria de enlace (em inglês “*linking*”). Ao longo do século XX, foram apresentadas várias definições de enlace entre certos conjuntos, das quais gostaríamos de destacar aquelas apresentadas em Brézis e Nirenberg [7], Rabinowitz [19], Schechter e Tintarev [23], Silva [28] e Willem [30].

Neste capítulo, apresentamos o conceito de enlace introduzido por Shechter e Tintarev [23], visando estabelecer uma relação entre a teoria clássica de enlace e a mudança de sinal dos pontos críticos de um determinado funcional. Além disso, apresentamos algumas condições para encontrarmos uma estrutura de enlace entre conjuntos.

Ao longo do capítulo, o conjunto E denota um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a norma associada $\|\cdot\|$.

1.1 A definição de Schechter-Tintarev

Definimos o conjunto Φ de tal maneira que os seus elementos $\Gamma \in \Phi$ devem satisfazer as seguintes propriedades:

(P1) $\Gamma(\cdot, \cdot) \in C([0, 1] \times E, E)$;

(P2) $\Gamma(0, \cdot) = \text{Id}$, em que $\text{Id} : E \rightarrow E$ é a aplicação identidade;

(P3) $\Gamma(t, \cdot)$ é um homeomorfismo de E em E para cada $t \in [0, 1)$;

(P4) existe $x_0 \in E$ tal que $\Gamma(1, x) = x_0$, para todo $x \in E$;

(P5) $\Gamma(t, x) \rightarrow x_0$ quando $t \rightarrow 1$, uniformemente em subconjuntos limitados de E .

Note que o conjunto Φ é não-vazio, pois a aplicação $\Gamma : [0, 1] \times E \rightarrow E$ definida por $\Gamma(t, x) = (1 - t)x$ pertence a Φ .

Definimos abaixo o conceito que será chave para os resultados deste trabalho.

Definição 1.1 (Schechter-Tintarev [23]). *Sejam $A, B \subset E$. Dizemos que A enlaça B se $A \cap B = \emptyset$ e, para cada $\Gamma \in \Phi$, existe $t \in [0, 1]$ tal que $\Gamma(t, A) \cap B \neq \emptyset$.*

Nas definições anteriores de enlace, de uma maneira geral, o conjunto A precisava ser compacto e ser a fronteira de uma variedade \mathcal{M} . Os matemáticos diziam que A enlaçava B se

$$A \cap B = \emptyset,$$

e para toda aplicação ϕ de \mathcal{M} em E que restrita a A coincide com a identidade, tivéssemos

$$\phi(A) \cap B \neq \emptyset.$$

Existem algumas desvantagens com respeito a essa definição. Primeiro, é necessário que A seja compacto e, além do mais, que seja a fronteira de uma variedade. Segundo, o enlace vai depender da variedade \mathcal{M} . Por fim, não existe a garantia de que em espaços de dimensão infinita exista a possibilidade de simetria, ou seja, se A enlaça B , então B enlaça A . Assim, a classe de conjuntos que poderiam ser enlaçados segundo essa definição é mais restrita.

Em seguida, apresentamos um resultado que é de grande utilidade para garantir o enlace entre certos tipos de conjuntos.

Proposição 1.2. *Sejam $H \in C(E, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, e $Q \subset E$ tal que $\tilde{H} = H|_Q$ é um homeomorfismo de Q em $\bar{\Omega}$. Se $p \in \Omega$, então $\tilde{H}^{-1}(\partial\Omega)$ enlaça o conjunto $H^{-1}(p)$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\tilde{H}^{-1}(\partial\Omega)$ não enlaça o conjunto $H^{-1}(p)$. Observando que \tilde{H} é um homeomorfismo de Q em $\bar{\Omega}$, e lembrando que homeomorfismos preservam pontos interiores, obtemos que se $p \in \Omega$, então

$$\tilde{H}^{-1}(\partial\Omega) \cap H^{-1}(p) = \emptyset.$$

Nessas condições, existe $\Gamma \in \Phi$ tal que

$$\Gamma(t, \tilde{H}^{-1}(\partial\Omega)) \cap H^{-1}(p) = \emptyset, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1.1)$$

o que implica que

$$H(\Gamma(t, \tilde{H}^{-1}(\partial\Omega))) \cap \{p\} = \emptyset, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

De fato, se não fosse assim, então $p \in H(\Gamma(t_0, \tilde{H}^{-1}(\partial\Omega)))$ para algum $t_0 \in [0, 1]$. Assim, $\Gamma(t_0, \tilde{H}^{-1}(\partial\Omega)) \cap H^{-1}(p) \neq \emptyset$, e obteríamos uma contradição com (1.1).

Em seguida, seja

$$\Theta(t) := H \circ \Gamma(t, \cdot) \circ \tilde{H}^{-1}. \quad (1.3)$$

Usando a continuidade de H e Γ , junto com o fato de \tilde{H} ser um homeomorfismo, obtemos que $\Theta(t) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ para cada $t \in [0, 1]$. Além do mais,

$$\Theta(0) = H \circ \Gamma(0, \cdot) \circ \tilde{H}^{-1} = H \circ \tilde{H}^{-1} = \text{Id em } \Omega.$$

Como $\Gamma \in \Phi$, segue que existe $x_0 \in E$ tal que $\Gamma(1, E) = x_0$. Observe que $H(x_0) \neq p$ pois, se fosse o contrário, teríamos

$$\emptyset \neq H(x_0) \cap \{p\} = H(\Gamma(1, \tilde{H}^{-1}(\partial\Omega))) \cap \{p\} = \emptyset,$$

o que é um absurdo. Logo

$$\Theta(1)x = H(\Gamma(1, \tilde{H}^{-1}(x))) = H(x_0) \neq p, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Dessa forma, está bem definido o grau topológico de Brouwer para a tríade $(\Theta(t), \Omega, p)$. Uma vez que $\Theta(0) = \text{Id}$ e $p \in \Omega$, podemos usar (1.2) e a invariância por homotopia para obter

$$\deg(\Theta(1), \Omega, p) = \deg(\Theta(0), \Omega, p) = 1,$$

e concluir que a equação $\Theta(1)x = p$ possui uma solução $x \in \Omega$. Porém, $\Theta(1)x \neq p$, e portanto obtemos uma contradição. Isso implica que $\tilde{H}^{-1}(\partial\Omega)$ enlaça $H^{-1}(p)$. \square

Um problema na Definição 1.1 que ainda permanece, se comparada com as versões antigas, é que em espaços de dimensão infinita não temos o sentido de simetria para o enlace entre conjuntos, ou seja, se A enlaça B , então B enlaça A . No entanto, sob certas condições podemos contornar essa situação. É isso o que garante nossa próxima

Proposição 1.3. *Sejam $A, B \subset E$ fechados e limitados com $E \setminus A$ conexo por caminhos. Se A enlaça B , então B enlaça A .*

Demonstração. Suponha, por contradição, que B não enlaça A . Dessa forma, como $A \cap B = \emptyset$, existe $\Gamma \in \Phi$ tal que

$$\Gamma(t, B) \cap A = \emptyset, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.4)$$

Usando (P4) existe $x_0 \in E$ tal que $\Gamma(1, E) = \{x_0\}$, e daí $x_0 \notin A$ (pois se fosse o contrário como $B \subset E$, teríamos que a interseção em (1.4) seria não vazia). Por A ser fechado e limitado, podemos assumir que $A \subset \overline{B_R(x_0)}$, em que $\overline{B_R(x_0)}$ é a bola fechada no espaço E centrada em x_0 . Sendo $E \setminus A$ conexo por caminhos, existe um caminho γ ligando o ponto $x_0 \notin A$ ao ponto $x_1 \notin \overline{B_R(x_0)}$. Considere

$$2\varepsilon := \min\{\text{dist}(\gamma([0, 1]), A), \text{dist}(x_1, \overline{B_R(x_0)})\} > 0. \quad (1.5)$$

Como $\Gamma(1, E) = \{x_0\}$ e Γ é contínua na primeira variável, podemos escolher $t_0 \in [0, 1]$ suficientemente próximo de 1, satisfazendo

$$\Gamma(t_0, B) \subset B_\varepsilon(x_0). \quad (1.6)$$

Reparametrize γ de tal modo que o caminho seja dado por $\gamma(t)$, $t_0 \leq t \leq 1$, $\gamma(t_0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

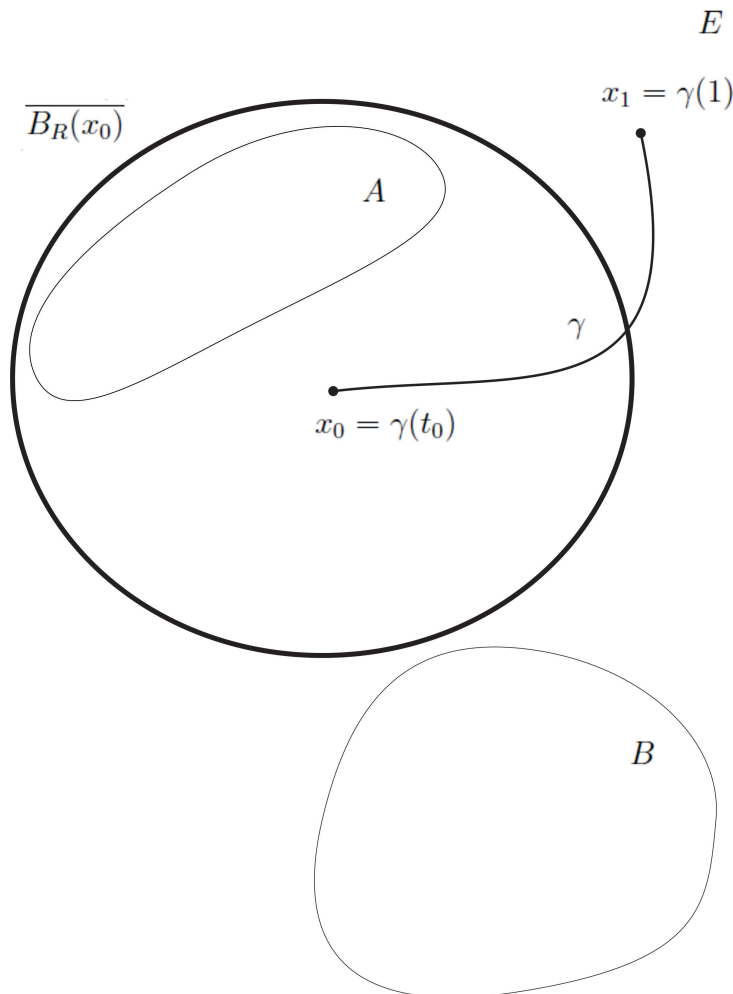


Figura 1.

Observe que se $p \in (\Gamma(t_0, B) + \gamma(t) - x_0) \cap A$ para algum $t \in [t_0, 1]$, então $p = \hat{b} + \gamma(t) - x_0$ com $\hat{b} \in \Gamma(t_0, B)$ e $p \in A$, e portanto

$$\text{dist}(\gamma([0, 1]), A) \leq \|\gamma(t) - p\| = \|\hat{b} - x_0\| < \varepsilon,$$

o que é uma contradição com (1.5). Logo,

$$(\Gamma(t_0, B) + \gamma(t) - x_0) \cap A = \emptyset, \quad \forall t \in [t_0, 1]. \quad (1.7)$$

Por outro lado, se $\hat{p} \in (\Gamma(t_0, B) + x_1 - x_0) \cap \overline{B_R(x_0)}$, então $\hat{p} = \hat{b} + x_1 - x_0$ com $\hat{b} \in \Gamma(t_0, B)$ e $\hat{p} \in \overline{B_R(x_0)}$, e portanto

$$\text{dist}(x_1, \overline{B_R(x_0)}) \leq \|\hat{p} - x_1\| = \|\hat{b} - x_0\| < \varepsilon,$$

e novamente temos uma contradição com (1.5). Logo,

$$(\Gamma(t_0, B) + x_1 - x_0) \cap \overline{B_R(x_0)} = \emptyset. \quad (1.8)$$

Defina

$$\Gamma_1(t, x) := \begin{cases} \Gamma(t, x), & \text{se } t \in [0, t_0], \\ \Gamma(t_0, x) - x_0 + \gamma(t), & \text{se } t \in [t_0, 1]. \end{cases}$$

Como consequência de (1.4) e (1.7), concluímos que $\Gamma_1(t, B) \cap A = \emptyset$ para todo $t \in [0, 1]$. Lembrando que $\Gamma \in \Phi$, temos que Γ_1^{-1} está bem definida. Assim, pelas observações anteriores obtemos que

$$B \cap \Gamma_1^{-1}(t, A) = \emptyset, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.9)$$

Usando (1.8) obtemos que

$$\Gamma_1(1, B) \cap \overline{B_R(x_0)} = \emptyset. \quad (1.10)$$

Afirmamos que existe $\Gamma_2 \in \Phi$ tal que $\Gamma_2(t, \overline{B_R(x_0)}) \subset \overline{B_R(x_0)}$ para todo $t \in [0, 1]$. De fato, se 0 está em $\overline{B_R(x_0)}$, então tome $\Gamma_2(t, u) = (1-t)u$, e para o caso em que 0 não está em $\overline{B_R(x_0)}$, então basta tomar $\Gamma_2(t, u) = (1-t)u + tx_0$. Defina

$$\Gamma_3(t, \cdot) := \begin{cases} \Gamma_1^{-1}(2t, \cdot), & \text{se } t \in [0, 1/2], \\ \Gamma_1^{-1}(1, \Gamma_2(2t-1, \cdot)), & \text{se } t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Vamos verificar que $\Gamma_3 \in \Phi$. Primeiramente, observe que como $\Gamma_2 \in \Phi$, segue que $\Gamma_2(0, \cdot) = \text{Id}$, e em seguida, calculando $\lim_{t \rightarrow 1/2^+} \Gamma_3(t, \cdot)$ e, usando o fato que Γ_1^{-1} está bem definida, obtemos que $\Gamma_3(\cdot, \cdot) \in C([0, 1] \times E, E)$ e portanto Γ_3 satisfaz (P1). Para

verificar (P2), use o fato que $\Gamma \in \Phi$ para concluir que

$$\Gamma_3(0, \cdot) = \Gamma_1^{-1}(0, \cdot) = \Gamma^{-1}(0, \cdot) = \text{Id}.$$

A propriedade (P3) é verificada pelo fato de $\Gamma_1(\cdot, \cdot)$ ser um homeomorfismo. Para verificar (P4) note que, para todo $x \in E$,

$$\Gamma_3(1, x) = \Gamma_1^{-1}(1, \Gamma_2(1, x)) = \Gamma_1^{-1}(1, \bar{x}) =: \hat{x}, \text{ para algum } \hat{x} \in E.$$

Use a continuidade de Γ_1^{-1} e o fato que $\Gamma_2 \in \Phi$ para obter a validade de (P5), e todas essas observações mostram que Γ_3 está em Φ .

Por fim, note que se $t \in [0, 1/2]$, então segue de (1.9) que

$$B \cap \Gamma_3(t, A) = \emptyset.$$

Além disso, como consequência de (1.10) temos que $B \cap \Gamma_1^{-1}(1, \overline{B_R(x_0)}) = \emptyset$, e usando o fato que $A \subset \overline{B_R(x_0)}$ e $\Gamma_2(t, \overline{B_R(x_0)}) \subset \overline{B_R(x_0)}$ segue que, se $t \in (1/2, 1]$, então

$$B \cap \Gamma_3(t, A) = B \cap \Gamma_1^{-1}(1, \Gamma_2([0, 1], A)) \subset B \cap \Gamma_1^{-1}(1, \overline{B_R(x_0)}) = \emptyset.$$

Portanto, construímos uma aplicação $\Gamma_3 \in \Phi$ com a propriedade de que

$$B \cap \Gamma_3(t, A) = \emptyset, \quad \forall t \in [0, 1],$$

o que contradiz o fato de que A enlaça B . Essa contradição mostra que B enlaça A . \square

1.2 Alguns exemplos de enlace

Com o objetivo de tornar mais claro a definição de enlace vista anteriormente, apresentamos vários exemplos de conjuntos que enlaçam.

Lema 1.1. *Sejam $V, W \subset E$ subespaços fechados com $E = V \oplus W$ e $\dim V < \infty$. Sejam ainda $0 < \rho < R$ e $w_0 \in W$ com $\|w_0\| = 1$,*

$$A := \{u = sw_0 + v : v \in V, s \geq 0, \|u\| = R\} \cup [V \cap \overline{B_R(0)}]$$

e

$$B := W \cap \partial B_\rho(0).$$

Então A enlaça B e B enlaça A .

Demonstração. Uma vez que $k := \dim V < \infty$, podemos identificar V com o espaço euclidiano \mathbb{R}^N . Seja

$$Q := \{u = v + sw_0 : v \in V, s \geq 0, \|u\| \leq R\},$$

e observe que a fronteira de Q em \mathbb{R}^{k+1} é exatamente o conjunto A .

Para cada $u \in E$, vamos escrever $u = v + w$ com $v \in V$ e $w \in W$. Defina a função $F : E \rightarrow E$ por

$$F(u) = F(v + w) := v + \|w\|w_0.$$

Para cada $u \in Q$ temos que

$$F(u) = v + \|sw_0\|w_0 = v + sw_0 = u,$$

ou seja, $F|_Q = \text{Id}$. Além disso,

$$\begin{aligned} F^{-1}(\rho w_0) &= \{u \in E : F(u) = \rho w_0\} \\ &= \{u \in E : v + \|w\|w_0 = \rho w_0\} \\ &= \{u \in E : v = 0 \text{ e } \|w\| = \rho\} \\ &= W \cap \partial B_\rho(0) = B. \end{aligned}$$

Após essas observações, note que estamos nas condições da Proposição 1.2 e portanto concluímos que A enlaça B . Por outro lado, A e B são subconjuntos fechados e limitados de E e, além do mais, $E \setminus A$ é conexo por caminhos. Portanto, pela Proposição 1.3, B enlaça A . \square

Lema 1.2. *Sejam $V, W \subset E$ subespaços fechados com $E = V \oplus W$ e $\dim V < \infty$. Se $A := \partial B_R(0) \cap V$ e $B := W$, então A enlaça B .*

Demonstração. Seja $k := \dim V$ e identifique V com o espaço euclidiano \mathbb{R}^k . Defina

$$M := B_R(0) \cap V \quad \text{e} \quad Q := \overline{M}.$$

Para cada $u \in E$ escreva $u = v + w$, com $v \in V, w \in W$ e defina a projeção de E sobre V por

$$F(u) = F(v + w) := v.$$

Note que se $u \in M \subset V$, então $F(u) = u$. Por outro lado, se $u \in \overline{M}$, então existe $(u_n) \subset M$ tal que $u_n \rightarrow u$. Usando a continuidade da projeção obtemos que

$$u_n = F(u_n) \rightarrow F(u) = u,$$

e isso mostra que $F|_Q = \text{Id}$. Além disso,

$$F^{-1}(0) = \{u = v + w \in E : F(u) = 0\} = \{u = v + w \in E : v = 0\} = W.$$

Portanto, segue da Proposição 1.2 que A enlaça B . □

Lema 1.3. *Sejam $B \subset E$ aberto e $A := \{a, b\}$ tais que $a \in B$ e $b \notin \bar{B}$. Então A enlaça ∂B .*

Demonstração. Considerando $\Gamma \in \Phi$, segue que existe $x_0 \in E$ tal que $\Gamma(1, E) = x_0$. Logo, $\Gamma(t, a)$ é uma curva em E ligando o ponto a ao ponto x_0 . Analogamente, $\Gamma(t, b)$ é uma curva em E ligando o ponto b ao ponto x_0 . Dessa forma, se $x_0 \notin B$, então $\Gamma(t, a)$ intersecta ∂B . Por outro lado, se $x_0 \in B$, então $\Gamma(t, b)$ intersecta ∂B . Portanto, A enlaça ∂B .

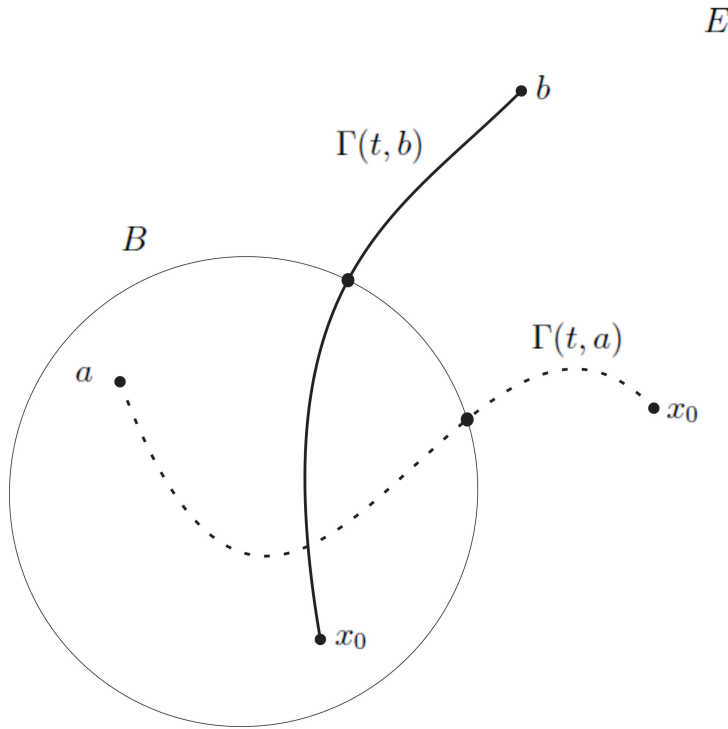


Figura 2.

□

Lema 1.4. *Sejam $V, W \subset E$ subespaços fechados com $E = V \oplus W$, $W = V^\perp$ e $\dim V < \infty$. Sejam ainda $0 < \delta < R$ e $v_0 \in V$ tal que $\|v_0\| = 1$. Se*

$$A := \partial B_R(0) \cap V$$

e

$$B := \{u \in W : \|u\| \geq \delta\} \cup \{u = sv_0 + w : w \in W, s \geq 0, \|u\| = \delta\},$$

então A enlaça B .

Demonstração. Seja $Q = \overline{B_R(0)} \cap V$ e decomponha E na seguinte forma

$$E = \tilde{V} \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus W.$$

Para cada $u \in E$ escreva $u = \tilde{v} + sv_0 + w$, com $\tilde{v} \in \tilde{V}$, $w \in W$, $s \in \mathbb{R}$, e defina

$$H(u) = \begin{cases} \tilde{v} + (s + \delta - (\delta^2 - \|w\|^2)^{1/2})v_0, & \text{se } \|w\| < \delta, \\ \tilde{v} + (s + \delta)v_0, & \text{se } \|w\| \geq \delta. \end{cases}$$

Note que H está bem definida e é contínua, pois

$$\lim_{\|w\| \rightarrow \delta^-} H(u) = \tilde{v} + (s + \delta - (\delta^2 - \delta^2)^{1/2})v_0 = \tilde{v} + (s + \delta)v_0.$$

Seja $u \in Q$. Visto que $V = \tilde{V} \oplus \mathbb{R}v_0$, segue que $u = \tilde{v} + sv_0$, e por termos $w = 0$ na decomposição de u , obtemos que

$$H(u) = \tilde{v} + (s + \delta - (\delta^2 - 0^2)^{1/2})v_0 = \tilde{v} + sv_0 = u,$$

ou seja, $H|_Q = \text{Id}$.

Além disso, afirmamos que $H^{-1}(\delta v_0) = B$. De fato, seja $u = \tilde{v} + sv_0 + w$ com $u \in H^{-1}(\delta v_0)$. Se $\|w\| < \delta$, então

$$\tilde{v} + (s + \delta - (\delta^2 - \|w\|^2)^{1/2})v_0 = \delta v_0,$$

o que implica que $\tilde{v} = 0$ e $s^2 = \delta^2 - \|w\|^2$ com $s \geq 0$. Usando o fato que $\|v_0\| = 1$ e $W = V^\perp$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|sv_0 + w\|^2 &= \langle sv_0 + w, sv_0 + w \rangle \\ &= s^2\|v_0\|^2 + 2s\langle v_0, w \rangle + \|w\|^2 \\ &= s^2 + \|w\|^2 \\ &= \delta^2, \end{aligned}$$

o que mostra que $\|sv_0 + w\| = \delta$. Por outro lado, se $\|w\| \geq \delta$, então $\tilde{v} + (s + \delta)v_0 = \delta v_0$, e daí $\tilde{v} = 0$ e $s = 0$, o que implica que $u = w$. Essas informações nos garantem que $H^{-1}(\delta v_0) = B$. Feita todas essas observações, perceba que estamos nas condições da Proposição 1.2 para concluir que A enlaça B . \square

Lema 1.5. *Sejam $V, W \subset E$ subespaços fechados com $E = V \oplus W$, $W = V^\perp$ e*

$\dim V < \infty$. Sejam ainda $0 < \delta < R_1$ e $v_0 \in V$ tal que $\|v_0\| = 1$. Se

$$A := \partial B_R(0) \cap W$$

e

$$B := \{u = sv_0 + w : s \leq 0, w \in W, \delta \leq \|w\| \leq R_1\} \cup \\ \cup \{u = sv_0 + w : w \in W, s \geq 0, \|u\| = \delta\},$$

então A enlaça B .

Demonstração. Seja $Q = \overline{B_R(0)} \cap V$ e decomponha E na seguinte forma

$$E = \tilde{V} \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus W.$$

Para cada $u \in E$ escreva $u = \tilde{v} + sv_0 + w$, com $\tilde{v} \in \tilde{V}$, e defina

$$H(u) = \begin{cases} \tilde{v} + (s + \delta - (\delta^2 - \|w\|^2)^{1/2})v_0, & \text{se } \|w\| \leq \delta, \\ \tilde{v} + (s + \delta)v_0 + \frac{\|w\| - \delta}{R_1 - \delta}(s^2 + 1)v_0, & \text{se } \delta < \|w\| \leq R_1, \\ \tilde{v} + (s^2 + s + 1 + \delta)v_0, & \text{se } \|w\| \geq R_1. \end{cases}$$

Sem muitas dificuldades mostra-se que H está bem definida e é contínua, bastando para isso analisar $H(u)$ quando $\|w\| \rightarrow \delta^\pm$ e $\|w\| \rightarrow R_1^\pm$. Seguindo o mesmo raciocínio apresentado na demonstração do Lema 1.4, obtém-se que $H|_Q = \text{Id}$ e $H^{-1}(\delta v_0) = B$. Mais uma vez, usando a Proposição 1.2 concluímos que A enlaça B . \square

Proposição 1.4. *Seja $\Omega \subset E$ um aberto limitado e $B \subset \Omega$ não vazio. Então $\partial\Omega$ enlaça B .*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\partial\Omega$ não enlaça B . Como $\partial\Omega \cap B = \emptyset$, segue que existe $\Gamma \in \Phi$ tal que

$$\Gamma(t, \partial\Omega) \cap B = \emptyset, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.11)$$

Decorre da definição de Φ que existe $x_0 \in E$ tal que

$$\Gamma(1, \partial\Omega) := x_0. \quad (1.12)$$

Evidentemente, $x_0 \notin B$.

Afirmamos que, se $v \in B$, então

$$\|\Gamma^{-1}(t, v)\| \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow 1. \quad (1.13)$$

De fato, se (1.13) fosse falso, então teríamos que $\Gamma^{-1}([0, 1], v)$ seria um conjunto limitado. Usando a propriedade (P5), obteríamos que

$$v = \Gamma(t, \Gamma^{-1}(t, v)) \rightarrow x_0 \text{ quando } t \rightarrow 1,$$

o que é um absurdo, pois $v \in B$ e $x_0 \notin B$.

Segue de (1.13) e da limitação de Ω que $\Gamma^{-1}(t, v) \notin \bar{\Omega}$ para t próximo de 1. Observe que $v = \Gamma^{-1}(0, v) \in B \subset \Omega$.

Afirmamos que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\Gamma^{-1}(t_0, v) \in \partial\Omega. \tag{1.14}$$

De fato, defina

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1] : \Gamma^{-1}(s, v) \in \Omega, \text{ para todo } s \in [0, t]\}.$$

Logo $\Gamma^{-1}(t_0, v) \notin \Omega$, pois caso contrário existiria $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\Gamma^{-1}(t, v) \in \Omega$ para cada $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, o que seria uma contradição com a definição de t_0 .

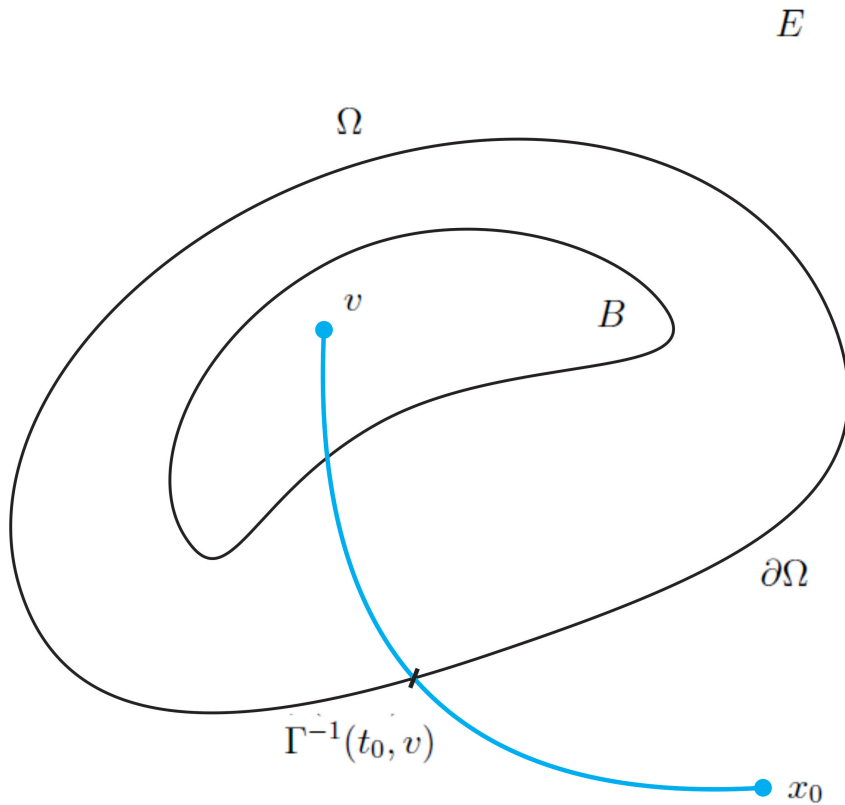


Figura 3.

Dessa forma, usando o fato que $\Gamma^{-1}(t, \cdot)$ é contínua em $[0, 1) \times E$, e fazendo $t \rightarrow t_0$ segue que

$$\Omega \ni \Gamma^{-1}(t, v) \rightarrow \Gamma^{-1}(t_0, v).$$

Assim, (1.14) é verdadeira, e isso implica que $v \in \Gamma(t_0, \partial\Omega)$. No entanto, este fato é uma contradição com (1.11). Portanto, $\partial\Omega$ enlaça B . \square

Lema 1.6. *Suponha que exista em E uma norma $\|\cdot\|_\star$ tal que $\|u\|_\star \leq C_\star \|u\|$ para todo $u \in E$, em que $C_\star > 0$ é uma constante. Além disso, assuma que $\|u_n - u^\star\|_\star \rightarrow 0$ sempre que $u_n \rightarrow u^\star$ em $(E, \|\cdot\|)$. Sejam $V, W \subset E$ subespaços fechados com $E = V \oplus W$ e $\dim V < \infty$. Sejam ainda $0 < \rho < R$, $D_\star > 0$, $p > 2$ e $w_0 \in W$ com $\|w_0\| = 1$, tais que*

$$R^{p-2} \|w_0\|_\star^p + \frac{R \|w_0\|_\star}{1 + D_\star \|w_0\|_\star} > \rho. \quad (1.15)$$

Se

$$A := \{u = sw_0 + v : v \in V, s \geq 0, \|u\| = R\} \cup [V \cap \overline{B_R(0)}]$$

e

$$B := \left\{ u \in W : \frac{\|u\|_\star^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\| \|u\|_\star}{\|u\| + D_\star \|u\|_\star} = \rho \right\},$$

então A enlaça B .

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que $A \cap B = \emptyset$. De fato, suponha que exista $u \in A \cap B$. Se $u = sw_0 + v$ com $\|u\| = R$ e $u \in B$, então temos que $v = 0$ e $s = R$. Usando (1.15) segue que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\|u\|_\star^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\| \|u\|_\star}{\|u\| + D_\star \|u\|_\star} \\ &= \frac{R^p \|w_0\|_\star^p}{R^2} + \frac{R^2 \|w_0\|_\star}{R + D_\star R \|w_0\|_\star} \\ &= R^{p-2} \|w_0\|_\star^p + \frac{R \|w_0\|_\star}{1 + D_\star \|w_0\|_\star} \\ &> \rho, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Por outro lado, se $u \in V \cap \overline{B_R(0)}$, então $u \in V$, o que implica que u não pode estar em B . Assim, temos que $A \cap B = \emptyset$. Seguindo as ideias já apresentadas anteriormente, vamos identificar V com o espaço euclidiano \mathbb{R}^k e definir

$$Q := \{u = sw_0 + v : v \in V, s \geq 0, \|u\| \leq R\}.$$

Então $A = \partial Q$ em \mathbb{R}^{k+1} .

Para cada $u \in E$ escreva $u = v + w \in E$, com $v \in V, w \in W$, e defina

$$\xi(u) := \begin{cases} \frac{\|u\|_*^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\|\|u\|_*}{\|u\| + D_*\|u\|_*}, & \text{se } u \neq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

Seja $(u_n) \subset E$ com $u_n \rightarrow 0$. Usando o fato que $\|u\|_* \leq C_*\|u\|$ e $p > 2$ temos que

$$\begin{aligned} |\xi(u_n)| &= \frac{\|u_n\|_*^p}{\|u_n\|^2} + \frac{\|u_n\|\|u_n\|_*}{\|u_n\| + D_*\|u_n\|_*} \\ &\leq C_*^2\|u_n\|_*^{p-2} + \frac{\|u_n\|_*}{1 + D_*\frac{\|u_n\|_*}{\|u_n\|}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

o que implica que $\xi : E \rightarrow E$ é contínua.

Defina a aplicação $F : E \rightarrow E$ por

$$F(u) = F(v + w) = v + \xi(w)w_0.$$

Note que se $u \neq 0$, então segue da definição de ξ que

$$\begin{aligned} F^{-1}(\rho w_0) &= \{u = v + w \in E : F(u) = \rho w_0\} \\ &= \{u = v + w \in E : v + \xi(w)w_0 = \rho w_0\} \\ &= \{u = v + w \in E : \xi(w) = \rho \text{ e } v = 0\} \\ &= \left\{ u \in W : \frac{\|u\|_*^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\|\|u\|_*}{\|u\| + D_*\|u\|_*} = \rho \right\} \\ &= B, \end{aligned}$$

o que mostra que $F^{-1}(\rho w_0) = B$. Observe que para cada $u = v + sw_0 \in Q$, temos que $s \in [0, R]$ e $F(u) = v + \xi(sw_0)w_0$. Além disso, como $w_0 \neq 0$ segue que $\xi(sw_0) = 0$ se, e somente se $s = 0$. Caso contrário, escrevemos

$$\xi(sw_0) = s^{p-2} \frac{\|w_0\|_*^p}{\|w_0\|^2} + s \frac{\|w_0\|\|w_0\|_*}{\|w_0\| + D_*\|w_0\|_*} := as^{p-2} + sb,$$

em que $a, b > 0$ são duas constantes dependendo apenas de w_0 . Logo, $F_0 = F|_Q$ é um homeomorfismo de Q no fecho de um subconjunto aberto limitado Ω de \mathbb{R}^{k+1} . Considerando $\rho w_0 \in \Omega$, segue da Proposição 1.2 que $F_0^{-1}(\partial\Omega) = \partial Q$ enlaça o conjunto $F^{-1}(\rho w_0) = B$, ou seja, A enlaça B . \square

Pontos críticos que mudam de sinal via Teoria de Enlace

Neste capítulo a relação entre a teoria abstrata de enlace e a mudança de sinal dos pontos críticos de um determinado funcional é estabelecida. Usamos a estrutura de enlace apresentada anteriormente para obter resultados abstratos que, sob certas condições, fornecem pontos críticos que mudam de sinal para funcionais definidos em espaços de Hilbert.

Durante o capítulo, o conjunto E é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a norma associada $\|\cdot\|$.

2.1 Uma relação entre os pontos críticos e o enlace

Seja $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 , com gradiente $I'(u)$ da forma

$$I'(u) = \kappa(u)u - J(u), \quad (2.1)$$

em que $\kappa(u) : E \rightarrow [1/2, 1]$ é uma aplicação localmente Lipschitz, e $J : E \rightarrow E$ é um operador compacto.

Definição 2.1. Dizemos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami, denotada por (Ce), se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$\sup_n |I(u_n)| < \infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) = 0 \quad (2.2)$$

possui uma subsequência convergente. Se $c \in \mathbb{R}$, dizemos que I satisfaz a condição de

Cerami no nível c , denotada por $(Ce)_c$, se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = c \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) = 0 \quad (2.3)$$

possui uma subsequência convergente.

Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é tal que o seu gradiente I' é da forma $I' = \text{Id} - J$, com J sendo um operador compacto. Nesse caso, a verificação da condição de Cerami é equivalente a mostrar que toda sequência satisfazendo (2.2) é limitada. De fato, suponha que a derivada de I é como acima e seja $(u_n) \subset E$ uma sequência limitada satisfazendo (2.2). Como (u_n) é limitada e J é um operador compacto, para alguma subsequência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ temos que $J(u_{n_j}) \rightarrow u$. Usando a limitação de (u_n) obtemos que $\lim_{j \rightarrow \infty} I'(u_{n_j}) = 0$, e daí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} (I'(u_{n_j}) - J(u_{n_j})) = u,$$

o que mostra que I satisfaz (Ce) .

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ vamos definir os seguintes conjuntos

$$\mathcal{K}[a, b] := \{u \in E : I'(u) = 0, a \leq I(u) \leq b\},$$

e

$$I^c := \{u \in E : I(u) \leq c\}.$$

Além disso, considerando $T \subset E$ e $\delta > 0$ definimos

$$(T)_\delta := \{u \in E : \text{dist}(u, T) \leq \delta\}.$$

Lema 2.1. *Se I satisfaz $(Ce)_c$ para todo $c \in [a, b]$, então o conjunto $\mathcal{K}[a, b]$ é compacto.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{K}[a, b]$. Daí, $I'(u_n) = 0$ e $a \leq I(u_n) \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência (u_n) é como em (2.2) e, por I satisfazer $(Ce)_c$, temos que (u_n) possui uma sequência convergente, que denotamos ainda por u_n . Logo $u_n \rightarrow u$ e, utilizando o fato que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, obtemos que $I'(u_n) \rightarrow I'(u)$ e $I(u_n) \rightarrow I(u)$, ou seja,

$$I'(u) = 0 \quad e \quad a \leq I(u) \leq b,$$

o que mostra que $u \in \mathcal{K}[a, b]$. Assim, $\mathcal{K}[a, b]$ é sequencialmente compacto, sendo portanto compacto. \square

No que segue, definimos

$$\mathcal{K} := \{u \in E : I'(u) = 0\} \quad \text{e} \quad \tilde{E} := E \setminus \mathcal{K}.$$

Introduzimos abaixo a definição que ajudará no estudo do problema de Cauchy para as provas dos resultados deste capítulo.

Definição 2.2. Dizemos que $v \in E$ é um vetor pseudo-gradiente para I no ponto $u \in \tilde{E}$ se

$$(PG1) \quad \|v(u)\| \leq 2\|I'(u)\|;$$

$$(PG2) \quad \langle I'(u), v(u) \rangle \geq \frac{1}{2}\|I'(u)\|^2.$$

Um campo pseudo-gradiente para I é uma aplicação localmente Lipschitz $V : \tilde{E} \rightarrow E$ tal que, para cada $u \in \tilde{E}$, o vetor $V(u)$ é um pseudo-gradiente para I em u .

Dado $u \in \tilde{E}$ é sempre possível obter um vetor pseudo-gradiente para I em u . Basta considerar $w \in E$ tal que $\|w\| = 1$ e $I'(u)w \geq \frac{2}{3}\|I'(u)\|$ e definir

$$v = \frac{3}{2}\|I'(u)\|w.$$

Um cálculo direto mostra que o vetor acima satisfaz (PG1) e (PG2). Não é difícil ver que a construção acima pode ser ligeiramente modificada de modo a obter um outro vetor pseudo-gradiente. Desse modo, não temos a unicidade para o vetor pseudo-gradiente. Mais ainda, mostra-se que qualquer combinação convexa de vetores (campos) pseudo-gradiente ainda possui essa mesma propriedade.

Se V é um campo pseudo-gradiente, então o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\sigma(t, u)}{dt} = -V(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u \in \tilde{E}, \end{cases}$$

possui uma única solução (chamada de fluxo) $\sigma : [0, T(u)) \rightarrow E$, em que $T(u) \in (0, \infty]$ é o tempo máximo de existência do fluxo com valor inicial u .

Seja $\mathcal{P} \subset E$ um convexo fechado tal que $\mathcal{P} \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Para $\delta > 0$ dado, defina

$$\pm\mathcal{D}(\delta) := \{u \in E : \text{dist}(u, \pm\mathcal{P}) < \delta\}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{D}^* := \mathcal{D}(\delta) \cup (-\mathcal{D}(\delta)) \quad (2.5)$$

e

$$\mathcal{S} := E \setminus \mathcal{D}^*. \quad (2.6)$$

Sem muitas dificuldades, mostramos que $\pm\mathcal{D}(\delta)$ são conjuntos convexos, \mathcal{D}^* é aberto, $\pm\mathcal{P} \subset \pm\mathcal{D}(\delta/2) \subset \pm\mathcal{D}(\delta)$, e \mathcal{S} é um conjunto fechado. Daqui por diante, consideramos a seguinte condição:

(A1) Existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $J(\pm\mathcal{D}(\delta)) \subset \pm\mathcal{D}(\delta/2)$.

A condição (A1) foi apresentada pela primeira vez no trabalho de Conti, Merizzi e Terracini [9]. Nos últimos anos, essa ideia de vizinhança do cone satisfazendo (A1) vem sendo bastante utilizada nos trabalhos de Bartsch, Liu e Wang, Schechter e Zou, entre outros.

A seguir, apresentamos um resultado que, sob certas condições nos fornece a existência de um campo pseudo-gradiente, que é usado no estudo do problema de Cauchy nas demonstrações dos teoremas deste capítulo. Destacamos que as ideias da sua prova apareceram pela primeira vez no trabalho de Sun [29]. No entanto, neste trabalho o autor assume que

$$J(\partial\mathcal{D}(\delta)) \subset \mathcal{D}(\delta) \quad \text{e} \quad I' := \text{Id} - J.$$

Lema 2.2. *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com gradiente I' da forma (2.1), e suponha que a condição (A1) seja válida. Então existe uma aplicação localmente Lipschitz $L_0 : \tilde{E} \rightarrow E$ tal que $L_0(\pm\mathcal{D}(\delta) \cap \tilde{E}) \subset \pm\mathcal{D}(\delta/2)$ e a aplicação $V : \tilde{E} \rightarrow E$ definida por $V(u) := \kappa(u)u - L_0$ é um campo pseudo-gradiente para o funcional I . Além disso, V e L_0 podem ser escolhidos ímpares, desde que I e κ sejam pares.*

Demonstração. Baseado na definição do conjunto \tilde{E} , observamos que $\|I'(v)\| \neq 0$ para qualquer $v \in \tilde{E}$. Supondo v fixado, definimos

$$\Omega_v := \left\{ u \in \tilde{E} : \|I'(u)\| > \frac{1}{2}\|I'(v)\|, \|J(u) - J(v)\| < \frac{1}{8}\|I'(v)\| \right\}.$$

Primeiramente observe que $\Omega_v \neq \emptyset$, pois $v \in \Omega_v$. Além disso, por I' ser uma função contínua, existe uma vizinhança V_v de $v \in \tilde{E}$ tal que $V_v \subset \Omega_v$, o que mostra que o conjunto Ω_v é aberto. Assim, $\{\Omega_v : v \in \tilde{E}\}$ forma uma cobertura aberta de \tilde{E} . Por \tilde{E} ser um espaço métrico, logo paracompacto, concluímos que a cobertura aberta $\{\Omega_v : v \in \tilde{E}\}$ possui um refinamento localmente finito, digamos $\{\tilde{\Omega}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, em que Λ é um conjunto de índices.

Dado $\lambda \in \Lambda$, apenas um dos seguintes casos pode acontecer:

- (1) $\tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta) = \emptyset$ e $\tilde{\Omega}_\lambda \cap (-\mathcal{D}(\delta)) = \emptyset$;
- (2) $\tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta) \neq \emptyset$ e $\tilde{\Omega}_\lambda \cap (-\mathcal{D}(\delta)) = \emptyset$;
- (3) $\tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta) = \emptyset$ e $\tilde{\Omega}_\lambda \cap (-\mathcal{D}(\delta)) \neq \emptyset$;

(4) $\tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta) \cap (-\mathcal{D}(\delta)) \neq \emptyset$;

(5) $\tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta) \neq \emptyset$, $\tilde{\Omega}_\lambda \cap (-\mathcal{D}(\delta)) \neq \emptyset$ e $\tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta) \cap (-\mathcal{D}(\delta)) \neq \emptyset$.

Se o item (5) acontece, então retiramos $\tilde{\Omega}_\lambda$ da cobertura, e colocamos no seu lugar o conjunto $\{\tilde{\Omega}_\lambda \setminus \overline{\mathcal{D}(\delta)}\} \cup \{\tilde{\Omega}_\lambda \setminus \overline{-\mathcal{D}(\delta)}\}$. Dessa forma, conseguimos uma nova cobertura na qual os abertos satisfazem somente uma das condições (1) – (4). Vamos denotar ainda por $\{\tilde{\Omega}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ essa nova cobertura.

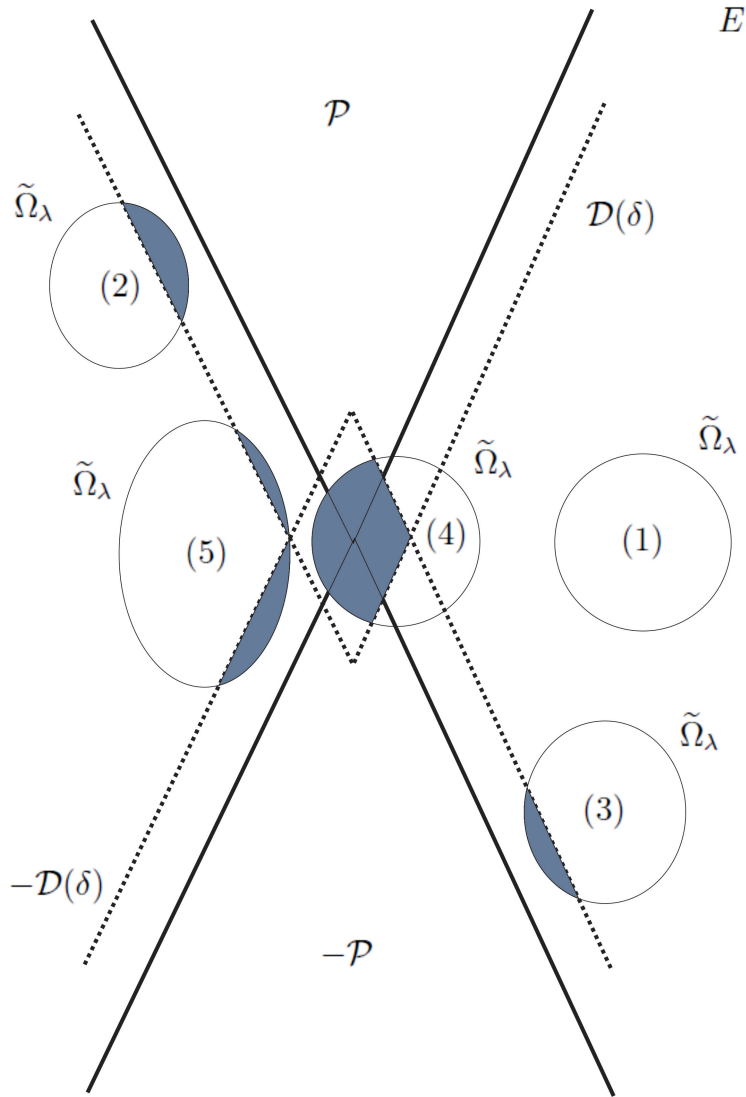


Figura 4.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ e $u \in \tilde{E}$ defina

$$\alpha_\lambda(u) := \text{dist}(u, \tilde{E} \setminus \tilde{\Omega}_\lambda) \quad \text{e} \quad \phi_\lambda(u) := \frac{\alpha_\lambda(u)}{\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda(u)}.$$

Por $\tilde{\Omega}_\lambda$ ser um refinamento localmente finito, segue que existe um número finito de conjuntos $\tilde{\Omega}_\lambda$ que interceptam um vizinhança de $u \in \tilde{E}$. Logo o denominador de ϕ_λ não pode assumir o valor 0. Pela mesma razão, o denominador é uma soma finita, e isso mostra que ϕ_λ está bem definida. Além disso, $0 \leq \phi_\lambda(u) \leq 1$, e por se tratar do quociente de funções que são localmente Lipschitz, temos que $\phi_\lambda : \tilde{E} \rightarrow E$ é uma aplicação localmente Lipschitz. Para cada $\lambda \in \Lambda$, tome a_λ da seguinte forma

- (i) se acontece o caso (1), então escolha $a_\lambda \in \tilde{\Omega}_\lambda$;
- (ii) se acontece o caso (2), então escolha $a_\lambda \in \tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta)$;
- (iii) se acontece o caso (3), então escolha $a_\lambda \in \tilde{\Omega}_\lambda \cap (-\mathcal{D}(\delta))$;
- (iv) se acontece o caso (4), então escolha $a_\lambda \in \tilde{\Omega}_\lambda \cap \mathcal{D}(\delta) \cap (-\mathcal{D}(\delta))$.

Defina a aplicação $L_0 : \tilde{E} \rightarrow E$ por

$$L_0(u) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda(u) J(a_\lambda). \quad (2.7)$$

Como $\tilde{\Omega}_\lambda$ é um refinamento localmente finito de \tilde{E} , a soma em (2.7) percorre apenas um número finito de índices $\lambda \in \Lambda$. Logo, usando o fato que ϕ_λ é localmente Lipschitz e $J_\lambda(a_\lambda)$ não depende de $u \in \tilde{E}$, temos que L_0 é a soma finita de funções que são localmente Lipschitz, e isso implica que L_0 é localmente Lipschitz. Definimos também $V : \tilde{E} \rightarrow E$ por

$$V(u) := \kappa(u)u - L_0(u). \quad (2.8)$$

Uma vez contruídas as funções L_0 e V , o nosso objetivo a partir de agora é mostrar que elas satisfazem as condições enunciadas no Lema 2.2. Para isso, considere $u \in \tilde{E}$. Existe apenas um número finito de índices $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que $u \in \tilde{\Omega}_{\lambda_1} \cap \dots \cap \tilde{\Omega}_{\lambda_k}$. Além do mais, para cada $\lambda_j \in \Lambda$ existe $w_j \in \tilde{E}$ tal que $\tilde{\Omega}_{\lambda_j} \subset \Omega_{w_j}$ com $j = 1, \dots, k$. Logo,

$$L_0(u) = \sum_{j=1}^k \phi_{\lambda_j}(u) J(a_{\lambda_j}),$$

em que $a_{\lambda_j} \in \tilde{\Omega}_{\lambda_j}$ com $j = 1, \dots, k$. Usando o fato que $u \in \tilde{\Omega}_{\lambda_j}$ para cada $j = 1, \dots, k$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|J(u) - J(a_{\lambda_j})\| &= \|J(u) - J(w_j) + J(w_j) - J(a_{\lambda_j})\| \\ &\leq \|J(u) - J(w_j)\| + \|J(w_j) - J(a_{\lambda_j})\| \\ &\leq \frac{1}{4} \|I'(w_j)\| \leq \frac{1}{2} \|I'(u)\|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como consequência de (2.9) e usando o fato que $\sum_{j=1}^k \phi_{\lambda_j}(u) = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|J(u) - L_0(u)\| &= \left\| J(u) - \sum_{j=1}^k \phi_{\lambda_j}(u) J(a_{\lambda_j}) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^k \phi_{\lambda_j}(u) (J(u) - J(a_{\lambda_j})) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|I'(u)\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|V(u)\| &= \|\kappa(u)u - L_0(u)\| \\ &\leq \|\kappa(u)u - J(u)\| + \|J(u) - L_0(u)\| \\ &\leq \|I'(u)\| + \frac{1}{2} \|I'(u)\| \\ &= \frac{3}{2} \|I'(u)\|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Observe que $|\langle I'(u), J(u) - L_0(u) \rangle| \leq \frac{1}{2} \|I'(u)\|^2$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle I'(u), V(u) \rangle &= \langle I'(u), \kappa(u)u - J(u) + J(u) - L_0(u) \rangle \\ &= \|I'(u)\|^2 + \langle I'(u), J(u) - L_0(u) \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} \|I'(u)\|^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

As desigualdades (2.10) e (2.11) implicam que V é um campo pseudo-gradiente para o funcional I .

A seguir, mostramos que $L_0(\pm\mathcal{D}(\delta) \cap \tilde{E}) \subset \pm\mathcal{D}(\delta/2)$. Considerando $u \in \mathcal{D}(\delta) \cap \tilde{E}$, temos que existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$ tais que $u \in \tilde{\Omega}_{\lambda_1} \cap \dots \cap \tilde{\Omega}_{\lambda_k}$. Logo,

$$L_0(u) = \sum_{j=1}^k \phi_{\lambda_j}(u) J(a_{\lambda_j}),$$

em que $u \in \tilde{\Omega}_{\lambda_j} \cap \mathcal{D}(\delta)$ para cada $j = 1, \dots, k$. Pela definição de a_λ temos que $a_{\lambda_j} \in \tilde{\Omega}_{\lambda_j} \cap \mathcal{D}(\delta)$, e usando a condição (A1) segue que $J(a_{\lambda_j}) \in \mathcal{D}(\delta/2)$. Por $\mathcal{D}(\delta/2)$ ser um conjunto convexo, segue que qualquer combinação convexa dos seus elementos ainda está em $\mathcal{D}(\delta/2)$, o que implica que $L_0(\mathcal{D}(\delta) \cap \tilde{E}) \subset \mathcal{D}(\delta/2)$. De maneira análoga, concluímos que $L_0((-\mathcal{D}(\delta)) \cap \tilde{E}) \subset (-\mathcal{D}(\delta/2))$.

A fim de mostrar que L_0 e V podem ser escolhidas ímpares, sempre que I e κ forem

pares, defina as aplicações $\bar{L}_0, V : \tilde{E} \rightarrow E$ por

$$\bar{L}_0(u) := \frac{1}{2}(L_0(u) - L_0(-u)) \quad \text{e} \quad \bar{V} := \kappa(u)u - \bar{L}_0(u),$$

respectivamente. Dessa forma, \bar{L}_0 e \bar{V} são funções ímpares e localmente Lipschitz.

Para provar que $\bar{L}_0(\mathcal{D}(\delta) \cap \tilde{E}) \subset (\mathcal{D}(\delta/2))$ consideramos $u \in \mathcal{D}(\delta) \cap \tilde{E}$. Assim, temos que $-u \in (-\mathcal{D}(\delta)) \cap \tilde{E}$ e, como consequência dos resultados anteriores segue que

$$L_0(u) \in \mathcal{D}(\delta/2) \quad \text{e} \quad -L_0(-u) \in \mathcal{D}(\delta/2).$$

Por $\mathcal{D}(\delta/2)$ ser um conjunto convexo, concluímos que

$$\bar{L}_0(u) := \frac{1}{2}L_0(u) + \frac{1}{2}(-L_0(-u)) \in \mathcal{D}(\delta/2).$$

Dessa forma, seguindo a mesma ideia, concluímos que para $u \in \pm\mathcal{D}(\delta) \cap \tilde{E}$ vale

$$\bar{L}_0(u) := \frac{1}{2}L_0(u) + \frac{1}{2}(-L_0(-u)) \in \pm\mathcal{D}(\delta/2).$$

Por fim, note que o fato de I ser par, implica que I' é uma função ímpar. Logo

$$\begin{aligned} \|\bar{V}\| &= \|\kappa(u)u - \bar{L}_0(u)\| \\ &= \left\| \frac{1}{2}\kappa(u)u - \frac{1}{2}L_0(u) - \frac{1}{2}\kappa(-u)(-u) + \frac{1}{2}L_0(-u) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{2}V(u) - \frac{1}{2}V(-u) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{V(u)}{2} \right\| + \left\| \frac{V(-u)}{2} \right\| \\ &\leq 2\|I'(u)\|^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

e

$$\begin{aligned} \langle I'(u), \bar{V}(u) \rangle &= \left\langle I'(u), \frac{V(u)}{2} - \frac{V(-u)}{2} \right\rangle \\ &\geq \frac{1}{2}\|I'(u)\|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Portanto, as desigualdades (2.12) e (2.13) implicam que \bar{V} é um vetor pseudo-gradiente para o funcional I . \square

A partir de agora vamos denotar por \mathcal{P} um cone de E , ou seja, $\mathcal{P} \subset E$ é um subconjunto convexo fechado satisfazendo

- (C1) $\mathcal{P} \setminus \{0\} \neq \emptyset$;
- (C2) $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$;
- (C3) $t\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ para todo $t \geq 0$;
- (C4) $\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\}$.

Considere o seguinte campo de vetores

$$W(u) := \frac{(1 + \|u\|)^2 V(u)}{(1 + \|u\|)^2 \|V(u)\|^2 + 1}, \quad u \in \tilde{E}, \tag{2.14}$$

em que V é a aplicação localmente Lipschitz fornecida pelo Lema 2.2. Temos que W é um campo localmente Lipschitz em \tilde{E} . Observe que

$$\|W(u)\| \leq \|u\| + 1, \text{ para todo } u \in \tilde{E}. \tag{2.15}$$

De fato, para $u \in \tilde{E}$ e $t := \|u\| + 1$ obtemos que

$$t^2 \|V(u)\|^2 - t \|V(u)\| + 1 \geq 0$$

com discriminante $\Delta = -3\|V(u)\|^2 \leq 0$, e isso mostra que (2.15) é verdadeira.

Defina

$$\Phi^* := \{\Gamma \in \Phi : \Gamma(t, D^*) \subset D^*\}. \tag{2.16}$$

Então $\Gamma(t, u) = (1 - t)u \in \Phi^*$, e portanto $\Phi^* \neq \emptyset$.

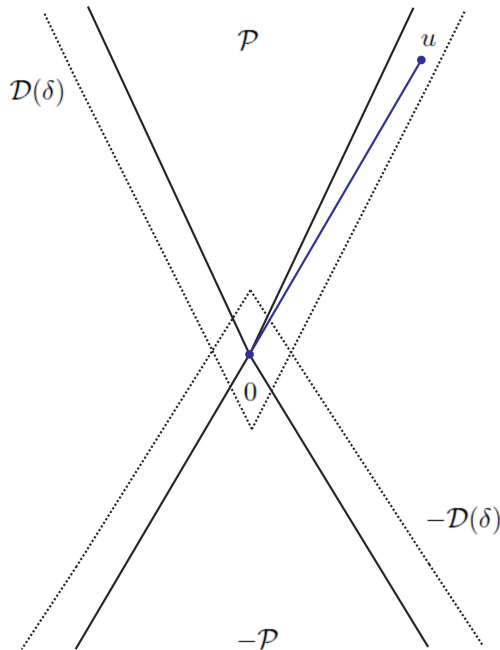


Figura 5.

Teorema A. *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com gradiente da forma (2.1) e suponha que a condição (A1) seja válida. Sejam ainda $A \subset E$ um subconjunto compacto e $B \subset \mathcal{S}$ um subconjunto fechado. Suponha ainda que A enlaça B e*

$$a_0 := \sup_{u \in A} I(u) \leq b_0 := \inf_{u \in B} I(u)$$

e defina

$$d^* := \inf_{\Gamma \in \Phi^*} \sup_{u \in \Gamma([0,1], A) \cap \mathcal{S}} I(u).$$

Então

$$d^* \in \left[b_0, \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) \right].$$

Além disso, se I satisfaz $(Ce)_c$ para algum

$$c \in \left[b_0, \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) \right],$$

então para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\mathcal{K}[d^* - \varepsilon, d^* + \varepsilon] \cap (E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})) \neq \emptyset.$$

Além do mais, se $d^* = b_0$, então $\mathcal{K}[d^*, d^*] \subset B$.

Demonstração. Como A enlaça B e $B \subset \mathcal{S}$, obtemos que $\Gamma([0,1], A) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, e isso mostra que d^* está bem definido. Além disso, visto que a aplicação $\Gamma(t, u) = (1-t)u$ está em Φ^* , obtemos

$$d^* = \inf_{\Gamma \in \Phi^*} \sup_{u \in \Gamma([0,1], A) \cap \mathcal{S}} I(u) \leq \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u). \quad (2.17)$$

Por outro lado, como A enlaça B , existe $b \in \Gamma(t, A) \cap B$ para algum $t \in [0, 1]$. Dessa forma, como $B \subset \mathcal{S}$ segue que

$$b_0 = \inf_{u \in B} I(u) \leq I(b) \leq \sup_{u \in \Gamma([0,1], A) \cap B} I(u) \leq \sup_{u \in \Gamma([0,1], A) \cap \mathcal{S}} I(u),$$

o que implica que

$$b_0 \leq \inf_{\Gamma \in \Phi^*} \sup_{u \in \Gamma([0,1], A) \cap \mathcal{S}} I(u). \quad (2.18)$$

De (2.17) e (2.18) concluímos que

$$d^* \in \left[b_0, \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) \right].$$

Vamos considerar primeiro o caso em que $d^* > b_0$. Suponha, por contradição, que

$$\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0] \cap (E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})) = \emptyset,$$

para algum $\varepsilon_0 > 0$. Consequentemente,

$$\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0] \subset (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P}).$$

Caso 1. $\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0] \neq \emptyset$.

Pelo Lema 2.1, o conjunto $\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0]$ é compacto. Sendo $\mathcal{S} = E \setminus \mathcal{D}^*$ um conjunto fechado com $\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0] \cap \mathcal{S} = \emptyset$, temos que

$$\delta_0 := \text{dist}(\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0], \mathcal{S}) > 0.$$

Afirmamos que existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\frac{(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2}{(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2 + 1} \geq \bar{\varepsilon}, \quad (2.19)$$

sempre que $u \in I^{-1}([d^* - \bar{\varepsilon}, d^* + \bar{\varepsilon}] \setminus (\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0])_{\delta_0/2})$. De fato, se (2.19) não fosse verdadeira, então existiria uma sequência (u_n) tal que $d^* - 1/n \leq I(u_n) \leq d^* + 1/n$ e $u_n \notin (\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0])_{\delta_0/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com

$$\frac{(1 + \|u_n\|)^2 \|I'(u_n)\|^2}{(1 + \|u_n\|)^2 \|I'(u_n)\|^2 + 1} < \frac{1}{n},$$

o que implica que

$$I(u_n) \rightarrow d^* \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\| < \frac{1}{\sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Como $b_0 < d^*$, temos que I satisfaz $(\text{Ce})_{d^*}$. Logo, a menos de subsequência, podemos assumir que $u_n \rightarrow u$. Usando o fato que $I'(u_n) = 0$, segue que $I'(u) = 0$, e da continuidade do funcional I , segue que $I(u_n) \rightarrow I(u)$, o que mostra que $I(u) = d^*$, ou seja, $u \in (\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0])_{\delta_0/2}$, e obtemos uma contradição.

Observe que a desigualdade (2.19) continua válida se diminuirmos o valor de $\bar{\varepsilon}$. Logo, podemos supor que

$$\bar{\varepsilon} < \min\{d^* - b_0, \varepsilon_0/3\}. \quad (2.20)$$

Segue de (2.19) e da definição de W dada em (2.14) que

$$I'(u)W(u) = I'(u) \frac{(1 + \|u\|)^2 V(u)}{(1 + \|u\|)^2 \|V(u)\|^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2} \frac{(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2}{(1 + \|u\|)^2 \|V(u)\|^2 + 1} \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2}{4(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2 + 1} \\
&\geq \frac{1}{8} \frac{(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2}{(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2 + 1} \\
&\geq \frac{\bar{\varepsilon}}{8},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

para todo $u \in I^{-1}([d^* - \bar{\varepsilon}, d^* + \bar{\varepsilon}]) \setminus (\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0])_{\delta_0/2}$.

Sejam

$$\Omega_1 := \{u \in E : |I(u) - d^*| \geq 3\bar{\varepsilon}\}, \quad \Omega_2 := \{u \in E : |I(u) - d^*| \leq 2\bar{\varepsilon}\}$$

e $\vartheta : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\vartheta(u) := \frac{\text{dist}(u, \Omega_1)}{\text{dist}(u, \Omega_1) + \text{dist}(u, \Omega_2)}. \tag{2.22}$$

Pelo Lema 3.13 do Apêndice, a função ϑ está bem definida e é localmente Lipschitz. Seja $\beta : E \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação localmente Lipschitz satisfazendo

$$\beta(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in E \setminus (\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0])_{\delta_0/2}, \\ 0, & \text{se } u \in (\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0])_{\delta_0/3}, \end{cases} \tag{2.23}$$

e $\bar{W} : E \rightarrow E$ a aplicação localmente Lipschitz definida por

$$\bar{W}(u) := \begin{cases} \vartheta(u)\beta(u)W(u), & \text{se } u \in \tilde{E}, \\ 0, & \text{se } u \notin \tilde{E}. \end{cases} \tag{2.24}$$

Considere o seguinte problema de Cauchy

$$(PC)_u \quad \begin{cases} \frac{d\varphi(t, u)}{dt} = -\bar{W}(\varphi(t, u)), \\ \varphi(0, u) = u. \end{cases}$$

Como \bar{W} é localmente Lipschitz, temos que $(PC)_u$ possui uma única solução contínua $\varphi(\cdot, u)$ definida em um intervalo maximal $(t^-(u), t^+(u))$.

Afirmção 1. $t^+(u) = +\infty$ e $t^-(u) = -\infty$.

Suponha, por contradição, que $t^+(u) < +\infty$. Considere $(t_n) \subset (t^-(u), t^+(u))$ uma sequência tal que $t_n \rightarrow t^+(u)$. Segue de (2.15) que $\|\bar{W}(u)\| \leq \|u\| + 1$ para todo $u \in E$, o

que implica que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t_m, u) - \varphi(t_n, u)\| &= \left\| \int_{t_n}^{t_m} \frac{d\varphi(s, u)}{ds} ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_n}^{t_m} \overline{W}(\varphi(s, u)) ds \right\| \\
&\leq \int_{t_n}^{t_m} \|\overline{W}(\varphi(s, u))\| ds \\
&\leq (\|u\| + 1)|t_m - t_n| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

pois $(t_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy. Dessa forma, $(\varphi(t_n, u))$ é uma sequência de Cauchy em E . Logo, $\varphi(t_n, u)$ converge para algum $\tilde{u} \in E$ quando $t_n \rightarrow t^+(u)$. Considerando agora o problema de Cauchy

$$(PC)_{\tilde{u}} \quad \begin{cases} \frac{d\varphi(t, u)}{dt} &= -\overline{W}(\varphi(t, u)), \\ \varphi(t^+(u), u) &= \tilde{u}, \end{cases}$$

obtemos uma solução contínua $\tilde{\varphi}(\cdot, u)$ definida no intervalo $(t^+(u) - \delta, t^+(u) + \delta)$, para algum $\delta > 0$. Pela unicidade de $\varphi(\cdot, u)$ no intervalo $(t^-(u), t^+(u))$, temos que $\tilde{\varphi}$ deve coincidir com φ no intervalo $(t^+(u) - \delta, t^+(u))$. Ou seja, podemos estender $\varphi(\cdot, u)$ continuamente no intervalo $(t^+(u), t^+(u) + \delta)$ de forma que essa extensão seja solução da EDO em $(PC)_u$. Mas isto é absurdo, pois o intervalo $(t^-(u), t^+(u))$ é maximal. Portanto, $t^+(u) = +\infty$. Analogamente, mostramos que $t^-(u) = -\infty$. A dependência contínua de soluções do problema $(PC)_u$ com relação ao dado inicial implica que $\varphi \in C(\mathbb{R} \times E, E)$.

Se $\varphi(t, u) \in \tilde{E}$ então, como \tilde{E} é aberto, podemos usar $(PC)_u$, (2.21) e as definições de ϑ e β para obter

$$\begin{aligned}
\frac{dI(\varphi(t, u))}{dt} &= I'(\varphi(t, u)) \frac{d\varphi(t, u)}{dt} \\
&= -I'(\varphi(t, u)) \vartheta(\varphi(t, u)) \beta(\varphi(t, u)) W(\varphi(t, u)) \\
&\leq -\frac{\vartheta(\varphi(t, u)) \beta(\varphi(t, u))}{8} \frac{(1 + \|\varphi(t, u)\|)^2 \|I'(\varphi(t, u))\|^2}{(1 + \|\varphi(t, u)\|)^2 \|I'(\varphi(t, u))\|^2 + 1} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Observe que o resultado acima também é válido se $\varphi(t, u) \notin \tilde{E}$. Logo a função $I(\varphi(\cdot, u))$ é não-crescente.

Pela definição de d^* , existe $\Gamma \in \Phi^*$ tal que

$$(\Gamma([0, 1], A) \cap \mathcal{S}) \subset I^{d^* + \bar{\varepsilon}}.$$

Note que se $u \in \Gamma([0, 1], A) \cap \mathcal{S}$, então $u \in I^{d^* + \bar{\varepsilon}}$. Por outro lado, se $u \in \Gamma([0, 1], A)$ com

$u \notin \mathcal{S}$, temos que $u \in D^*$. Essas observações mostram que $\Gamma([0, 1], A) \subset (I^{d^*+\bar{\varepsilon}} \cup D^*)$. Defina

$$A_1 := \Gamma([0, 1], A).$$

Afirmção 2. *Existe $T_1 > 0$ tal que $\varphi(T_1, A_1) \subset (I^{d^*-\bar{\varepsilon}/4} \cup D^*)$.*

A demonstração da Afirmção 2 está baseada nos seguintes fatos:

Afirmção 2.1. *Se $u \in \mathcal{D}^*$, então $\varphi(t, u) \in \mathcal{D}^*$ para todo $t \geq 0$.*

Afirmção 2.2. *Se $u \in A_1$ e $u \notin \mathcal{D}^*$, então existe $T_u > 0$ tal que $\varphi(T_u, u) \in I^{d^*-\bar{\varepsilon}/2} \cup \mathcal{D}^*$.*

Vamos assumir que as duas afirmações acima são verdadeiras e provar a Afirmção 2 como segue. Como consequência da Afirmção 2.2, podemos usar a continuidade de φ para obter uma vizinhança U_u de u tal que $\varphi(T_u, U_u) \subset I^{d^*-\bar{\varepsilon}/3} \cup \mathcal{D}^*$. Por A_1 ser compacto e \mathcal{D}^* ser aberto, temos que $A_1 \setminus \mathcal{D}^*$ é compacto. Assim, dada uma cobertura aberta de $A_1 \setminus \mathcal{D}^*$, conseguimos extrair uma subcobertura finita formada pelas vizinhanças $U_{u'_s}$, de onde obtemos $T_1 > 0$ a ser o máximo dos $T_{u'_s}$ em cada uma das vizinhanças $U_{u'_s}$ tal que $\varphi(T_1, A_1 \setminus \mathcal{D}^*) \subset I^{d^*-\bar{\varepsilon}/4} \cup \mathcal{D}^*$. Portanto,

$$\varphi(T_1, A_1) \subset I^{d^*-\bar{\varepsilon}/4} \cup \mathcal{D}^*. \quad (2.25)$$

Vamos agora provar as Afirmções 2.1 e 2.2.

Prova da Afirmção 2.1. Inicialmente lembremos que $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}(\delta) \cup (-\mathcal{D}(\delta))$. Seja $u \in \mathcal{D}(\delta)$ e suponha, por contradição, que exista $t_0 > 0$ tal que $\varphi(t_0, u) \notin \mathcal{D}(\delta)$. Por $\mathcal{D}(\delta)$ ser aberto, existe uma vizinhança V_u de u tal que $V_u \subset \mathcal{D}(\delta)$, e utilizando a teoria de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach, podemos encontrar uma vizinhança $V_{\varphi(t_0, u)}$ de $\varphi(t_0, u)$ tal que $\varphi(t_0, \cdot) : V_u \rightarrow V_{\varphi(t_0, u)}$ é um homeomorfismo (c.f. [11, pg. 67]). Como $\varphi(t_0, u) \notin \mathcal{D}(\delta)$, podemos tomar $w \in V_{\varphi(t_0, u)} \setminus \overline{\mathcal{D}(\delta)}$, de modo que exista $v \in V_u$ tal que $\varphi(t_0, v) = w$. Logo, podemos encontrar $t_1 \in (0, t_0)$ tal que $\varphi(t_1, v) \in \partial\mathcal{D}(\delta)$ e $\varphi(t, v) \notin \overline{\mathcal{D}(\delta)}$ para todo $t \in (t_1, t_0]$.

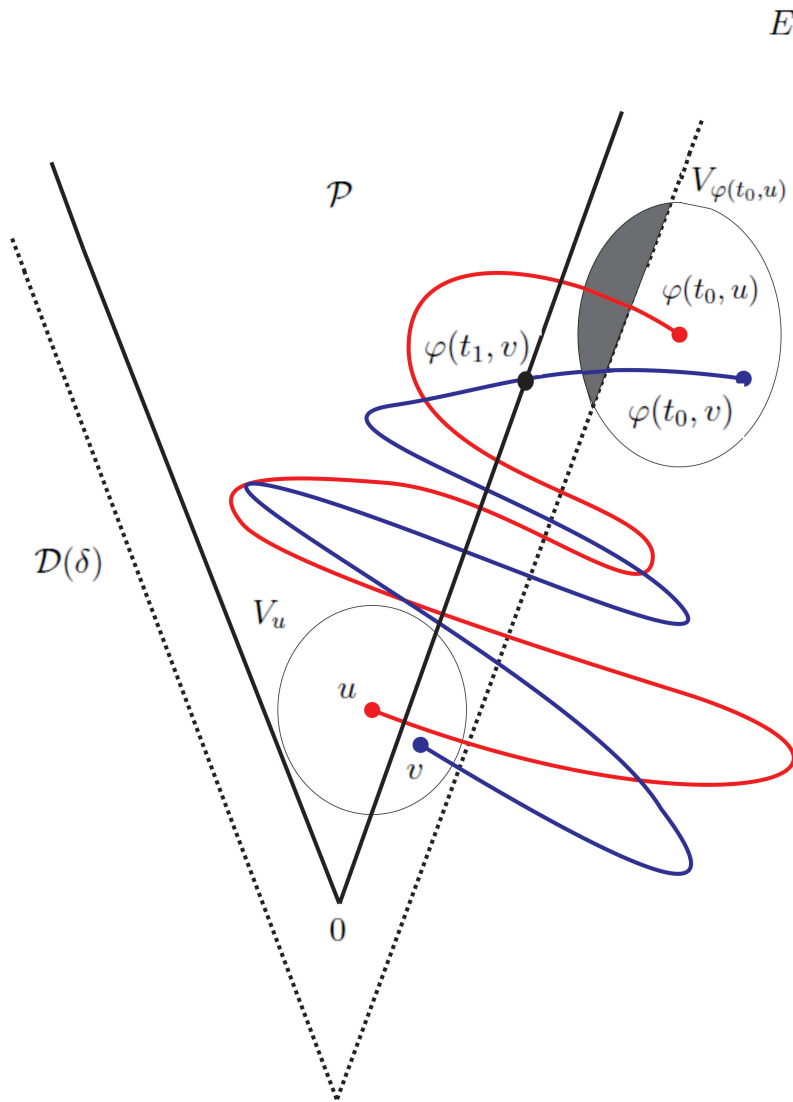


Figura 6.

Por outro lado, para $z \in \overline{\mathcal{D}(\delta)} \cap \mathcal{K}$, segue que $\overline{W}(z) = 0$ e

$$\text{dist}(z + \lambda(-\overline{W}(z)), \overline{\mathcal{D}(\delta)}) = 0, \quad \forall \lambda > 0. \quad (2.26)$$

Para $z \in \overline{\mathcal{D}(\delta)} \cap \tilde{E}$, podemos usar o Lema 2.2 para garantir que $L_0(z) \in \overline{\mathcal{D}(\delta)}$. Lembrando as definições de V, W e \overline{W} em (2.8), (2.14) e (2.24), respectivamente, e usando a propriedade do cone $\mathcal{P} : x\mathcal{P} + y\mathcal{P} \subset (\mathcal{P} + \mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$, para quaisquer $x, y \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} & \text{dist}(z + \lambda(-\overline{W}(z)), \mathcal{P}) \\ &= \text{dist}\left(z - \frac{\lambda\vartheta(z)\beta(z)(1 + \|z\|)^2V(z)}{(1 + \|z\|)^2\|V(z)\|^2 + 1}, \mathcal{P}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{dist} \left(\left(1 - \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2 \kappa(z)}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \right) z + \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} L_0(z), \mathcal{P} \right) \\
&\leq \text{dist} \left(\left(1 - \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2 \kappa(z)}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \right) z + \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} L_0(z), \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2 \kappa(z)}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \right) \mathcal{P} + \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \mathcal{P} \right) \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2 \kappa(z)}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \right) \text{dist}(z, \mathcal{P}) + \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \text{dist}(L_0(z), \mathcal{P}) \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2 \kappa(z)}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \right) \delta + \frac{\lambda \vartheta(z) \beta(z) (1 + \|z\|)^2}{(1 + \|z\|)^2 \|V(z)\|^2 + 1} \frac{\delta}{2} \\
&\leq \delta,
\end{aligned}$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, em que usamos o fato que $k(z) \geq 1/2$. Isto mostra que $z + \lambda(-\overline{W}(z)) \in \overline{\mathcal{D}(\delta)}$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Logo,

$$\text{dist}(z + \lambda(-\overline{W}(z)), \overline{\mathcal{D}(\delta)}) = 0, \quad \forall \lambda > 0 \text{ suficientemente pequeno.} \quad (2.27)$$

De (2.26) e (2.27), segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{dist}(z + \lambda(-\overline{W}(z)), \overline{\mathcal{D}(\delta)})}{\lambda} = 0, \quad \forall z \in \overline{\mathcal{D}(\delta)}.$$

Considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t, \varphi(t_1, v))}{dt} = -\overline{W}(t, \varphi(t_1, v)), \\ \varphi(0, \varphi(t_1, v)) = \varphi(t_1, v) \in \overline{\mathcal{D}(\delta)}, \end{cases}$$

que possui solução única $\varphi(t, \varphi(t_1, v))$. Pelo Lema 3.14 do Apêndice, existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$\varphi(t, \varphi(t_1, v)) \in \overline{\mathcal{D}(\delta)}, \quad \forall t \in [0, \tilde{\delta}).$$

Pela propriedade de semigrupo, $\varphi(t, v) \in \overline{\mathcal{D}(\delta)}$ para todo $t \in [t_1, t_1 + \tilde{\delta})$, o que é uma contradição com a definição de t_1 , e essa contradição mostra que $\varphi(t, u) \in \mathcal{D}(\delta)$ para

todo $t \geq 0$. Tomando agora $u \in -\mathcal{D}(\delta)$, podemos argumentar de maneira análoga para concluir que $\varphi(t, u) \in -\mathcal{D}(\delta)$ para todo $t \geq 0$.

Prova da Afirmação 2.2. Primeiramente note que $A_1 = \Gamma([0, 1], A) \subset I^{d^* + \bar{\varepsilon}} \cup \mathcal{D}^*$. Assim, se $u \in A_1$ e $u \notin \mathcal{D}^*$, então $I(u) \leq d^* + \bar{\varepsilon}$. Observe que se $I(u) \leq d^* - \bar{\varepsilon}$, então

$$I(\varphi(t, u)) \leq I(\varphi(0, u)) = I(u) \leq d^* - \bar{\varepsilon}, \quad \forall t \geq 0,$$

e não há nada a provar. Assim, podemos supor que $I(u) \geq d^* - \bar{\varepsilon}$, o que implica que $u \in I^{-1}[d^* - \bar{\varepsilon}, d^* + \bar{\varepsilon}]$. Se

$$\text{dist}(\varphi([0, \infty), u), \mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0]) \leq \delta_0/2,$$

então existe algum t_u tal que $\text{dist}(\varphi(t_u, u), \mathcal{S}) \geq \delta_0/4$, ou seja, $\varphi(t_u, u) \in \mathcal{D}^*$. Desse modo podemos ainda supor que

$$\text{dist}(\varphi([0, \infty), u), \mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0]) > \delta_0/2 > 0. \quad (2.28)$$

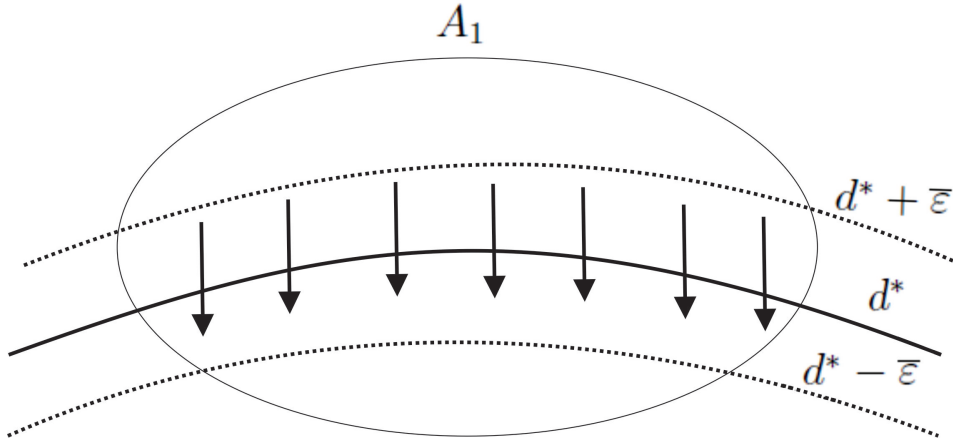


Figura 7.

Suponha que $I(\varphi(t, u)) > d^* - \bar{\varepsilon}$ para todo $t \geq 0$, pois caso contrário já obtemos o que queremos. Assim, usando (2.19), (2.22) e (2.23) temos que

$$\frac{(1 + \|\varphi(t, u)\|)^2 \|I'(\varphi(t, u))\|^2}{(1 + \|\varphi(t, u)\|)^2 \|I'(\varphi(t, u))\|^2 + 1} \geq \bar{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \vartheta(\varphi(t, u)) = \beta(\varphi(t, u)) = 1, \quad (2.29)$$

para todo $t \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} I(\varphi(24, u)) &= I(\varphi(0, u)) + \int_0^{24} \frac{dI(\varphi(t, u))}{dt} dt \\ &= I(u) + \int_0^{24} I'(\varphi(t, u)) \frac{d\varphi(t, u)}{dt} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I(u) - \int_0^{24} \vartheta(\varphi(t, u))\beta(\varphi(t, u))I'(\varphi(t, u))W(\varphi(t, u))dt \\
&\leq I(u) - 3\bar{\varepsilon} \\
&\leq d^* + \bar{\varepsilon} - 3\bar{\varepsilon} = d^* - 2\bar{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Combinando os resultados acima, concluímos que para $u \in A_1$ e $u \notin \mathcal{D}^*$, existe $T_u > 0$ tal que

$$\varphi(T_u, u) \in I^{d^* - \bar{\varepsilon}/2} \cup \mathcal{D}^*.$$

Defina

$$\Gamma^*(t, u) := \begin{cases} \varphi(2T_1s, u), & \text{se } s \in [0, 1/2], \\ \varphi(T_1, \Gamma(2s - 1, u)), & \text{se } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Seguindo as ideias já apresentadas neste trabalho, mostra-se que $\Gamma^* \in \Phi$. Para verificar que $\Gamma^* \in \Phi^*$, vamos mostrar que $\Gamma^*(t, \mathcal{D}^*) \subset \mathcal{D}^*$. Sejam $s \in [0, 1/2]$ e $u \in \mathcal{D}^*$. Assim, $\Gamma^*(s, u) = \varphi(2T_1s, u) \in \mathcal{D}^*$, pois se $u \in \mathcal{D}^*$, então $\varphi(t, u) \in \mathcal{D}^*$ para qualquer $t \geq 0$. Por outro lado, se $s \in [1/2, 1]$ e $u \in \mathcal{D}^*$, então

$$\Gamma^*(s, u) = \varphi(T_1, \Gamma(2s - 1, u)) = \varphi(T_1, \bar{u}),$$

para algum $\bar{u} \in \mathcal{D}^*$, pois $\Gamma \in \Phi^*$, e isso mostra que $\Gamma^* \subset \Phi^*$.

Lembrando que $I(\varphi(\cdot, u))$ é não-crescente, observe que se $u = \varphi(2T_1s, \hat{u})$ e $\hat{u} \in A$, então obtemos que $I(u) \leq I(\hat{u}) \leq a_0$. Assim, usando o fato que $\bar{\varepsilon} < \min\{d^* - b_0, \varepsilon_0/3\}$ segue que, se $s \in [0, 1/2]$, então

$$\begin{aligned}
\Gamma^*(s, A) \cap \mathcal{S} &= \varphi(2T_1s, A) \cap \mathcal{S} \\
&\subset I^{a_0} \cap \mathcal{S} \\
&\subset I^{b_0} \cap \mathcal{S} \\
&\subset I^{d^* - \bar{\varepsilon}} \cap \mathcal{S} \\
&\subset I^{d^* - \bar{\varepsilon}/4} \cap \mathcal{S} \\
&\subset I^{d^* - \bar{\varepsilon}/4}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o fato que $\mathcal{S} = E \setminus \mathcal{D}^*$, segue que, se $s \in [1/2, 1]$, então

$$\begin{aligned}
\Gamma^*(s, A) \cap \mathcal{S} &= \varphi(T_1, \Gamma(2s - 1, A)) \cap \mathcal{S} \\
&= \varphi(T_1, \Gamma([0, 1], A)) \cap \mathcal{S} \\
&= \varphi(T_1, A_1) \cap \mathcal{S} \\
&\subset (I^{d^* - \bar{\varepsilon}/4} \cup \mathcal{D}^*) \cap \mathcal{S} \\
&\subset I^{d^* - \bar{\varepsilon}/4} \cap \mathcal{S} \\
&\subset I^{d^* - \bar{\varepsilon}/4}.
\end{aligned}$$

Portanto, $I(\Gamma^*([0, 1], A) \cap \mathcal{S}) \leq d^* - \bar{\varepsilon}/4$, o que é uma contradição com a definição de d^* . Isso conclui a prova no caso em que $d^* > b_0$ e $\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0] \neq \emptyset$.

Caso 2. $\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0] = \emptyset$.

Note que (2.23) ainda continua válida com $(\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0])_{\delta_0/2} = \emptyset$ e $\beta(u) \equiv 1$. Não é difícil mostrar que (2.29) e (2.30) ainda valem nesse caso. Assim, independente de $\mathcal{K}[d^* - \varepsilon_0, d^* + \varepsilon_0]$ ser vazio ou não, temos que a Afirmação 2 é verdadeira. Dessa forma, podemos proceder como no Caso 1 para obter uma contradição. Isso conclui a prova do Teorema A no caso em que $d^* > b_0$.

Vamos agora considerar o caso em que $d^* = b_0$. Como $B \subset \mathcal{S} = E \setminus \mathcal{D}^*$, é suficiente provar que $\mathcal{K}[d^*, d^*] \cap B \neq \emptyset$. Suponha, por contradição, que $\mathcal{K}[d^*, d^*] \cap B = \emptyset$. Então existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tais que

$$\frac{(1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2}{1 + (1 + \|u\|)^2 \|I'(u)\|^2} \geq \varepsilon_1, \quad \text{sempre que } |I(u) - d^*| < \varepsilon_2 \text{ e } \text{dist}(u, B) < \varepsilon_3. \quad (2.31)$$

De fato, se (2.31) não fosse verdadeira, então existiria uma sequência (u_n) com

$$|I(u_n) - d^*| < 1/n, \quad \text{dist}(u_n, B) < 1/n$$

e

$$\frac{(1 + \|u_n\|)^2 \|I'(u_n)\|^2}{1 + (1 + \|u_n\|)^2 \|I'(u_n)\|^2} < \frac{1}{n}.$$

Consequentemente,

$$(1 + \|u_n\|) \|I'(u_n)\| \rightarrow 0, \quad I(u_n) \rightarrow d^* \quad \text{e} \quad \text{dist}(u_n, B) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo, a menos de subsequência, podemos assumir que $u_n \rightarrow u$. Note que $I'(u_n) \rightarrow 0$, e usando a continuidade de I e da função distância, obtemos que $I(u) = d^*$ e $\text{dist}(u, B) = 0$, o que mostra que $u \in \mathcal{K}[d^*, d^*] \cap B$, e obtemos uma contradição. Observe que (2.31) ainda continua válida se diminuirmos o valor de ε_2 . Assim, podemos supor que

$$\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{16}. \quad (2.32)$$

Sejam

$$\Omega_3 := \{u \in E : \text{dist}(u, B) \leq \varepsilon_3/2, |I(u) - d^*| \leq \varepsilon_2/2\}$$

e

$$\Omega_4 := \{u \in E : \text{dist}(u, B) \leq \varepsilon_3/3, |I(u) - d^*| \leq \varepsilon_2/3\}.$$

Escolha $\Gamma \in \Phi^*$ tal que

$$\sup_{u \in \Gamma([0,1],A) \cap \mathcal{S}} I(u) \leq d^* + \frac{\varepsilon_2}{3}.$$

Como A enlaça B e $B \subset \mathcal{S}$, podemos encontrar $u_0 \in \Gamma([0,1],A) \cap B \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Daí,

$$b_0 \leq I(u_0) \leq \sup_{u \in \Gamma([0,1],A) \cap B \cap \mathcal{S}} I(u) \leq \sup_{u \in \Gamma([0,1],A) \cap \mathcal{S}} I(u) \leq d^* + \frac{\varepsilon_2}{3},$$

e isso mostra que $u_0 \in \Omega_4 \subset \Omega_3$.

Seja $\vartheta_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\vartheta_1(u) = \frac{\text{dist}(u, E \setminus \Omega_3)}{\text{dist}(u, E \setminus \Omega_3) + \text{dist}(u, \Omega_4)}.$$

Um argumento semelhante ao usado no Lema 3.13 do Apêndice garante que a função ϑ_1 está bem definida. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t, u)}{dt} = -\vartheta_1(\varphi(t, u))W(\varphi(t, u)), \\ \varphi(0, u) = u \in E, \end{cases}$$

que possui solução única contínua em E . Observe que

$$\begin{aligned} \frac{dI(\varphi(t, u))}{dt} &= I'(\varphi(t, u)) \frac{d\varphi(t, u)}{dt} \\ &= -\vartheta_1(\varphi(t, u))I'(\varphi(t, u))W(\varphi(t, u)) \\ &\leq -\frac{\varepsilon_1}{8}\vartheta_1(\varphi(t, u)), \end{aligned}$$

e isso mostra que $I(\varphi(\cdot, u))$ é não-crescente.

Se $u \in I^{d^* + \varepsilon_2/3}$, então

$$I(\varphi(t, u)) \leq I(\varphi(0, u)) = I(u) \leq d^* + \frac{\varepsilon_2}{3}, \quad \forall t \geq 0.$$

Se existe $\bar{t} \leq \varepsilon_3/4$ tal que $\varphi(\bar{t}, u) \notin \Omega_4$, então uma das seguintes possibilidades acontece:

- (i) $\text{dist}(\varphi(\bar{t}, u), B) > \frac{\varepsilon_3}{3}$;
- (ii) $I(\varphi(\bar{t}, u)) < d^* - \frac{\varepsilon_2}{3}$.

Observe que se ocorre (i), então $\varphi(t, u) \notin B$ para todo $t \in [0, \varepsilon_3/4]$. Por outro lado, como $d^* = b_0$, obtemos a mesma conclusão para o caso em que (ii) ocorre. Se $\varphi(t, u) \in \Omega_4$ para todo $t \in [0, \varepsilon_3/4]$, então

$$I\left(\varphi\left(\frac{\varepsilon_3}{4}, u\right)\right) = I(\varphi(0, u)) + \int_0^{\varepsilon_3/4} \frac{dI(\varphi(t, u))}{dt} dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq I(u) - \frac{\varepsilon_1}{8} \int_0^{\varepsilon_3/4} \vartheta_1(\varphi(t, u)) dt \\
&\leq d^* + \frac{\varepsilon_2}{3} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{32} \\
&\leq d^* - \frac{\varepsilon_2}{6} = b_0 - \frac{\varepsilon_2}{6}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\varphi(\varepsilon_3/4, u) \notin B$ ou $\varphi(t, u) \notin B$ para todo $t \in [0, \varepsilon_3/4]$ e cada $u \in I^{d^* + \varepsilon_2/3}$. A fim de concluir a prova do teorema destacamos a seguinte

Afirmção 3. *Para quaisquer $u \in A$ e $t \in [0, \varepsilon_3/4]$ temos que $\varphi(t, u) \notin B$.*

Vamos assumir que a afirmação acima é verdadeira e concluir a demonstração do Teorema A como segue. Como consequência da Afirmção 3 e das observações precedentes, concluímos que

$$\varphi([0, \varepsilon_3/4], A) \cap B = \emptyset.$$

Defina

$$\tilde{\Gamma}(t, u) := \begin{cases} \varphi(2t\varepsilon_3/4, u), & t \in [0, 1/2], \\ \varphi(\varepsilon_3/4, \Gamma(2t - 1, u)), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Seguindo as ideias apresentadas anteriormente, mostra-se que $\tilde{\Gamma} \in \Phi$. Com isso, concluímos que $\tilde{\Gamma}([0, 1], A) \cap B = \emptyset$, o que é uma contradição com o fato de que A enlaça B . Portanto, o resultado do teorema segue.

Vamos agora provar a Afirmção 3.

Prova da Afirmção 3. Primeiramente observe que se $u \in A$ e $u \notin \mathcal{S}$, então $u \in \mathcal{D}^*$. Utilizando um argumento similar ao da prova da Afirmção 2.1 obtemos que $\varphi(t, u) \in \mathcal{D}^*$. Logo, $\varphi(t, u) \notin B \subset \mathcal{S}$ para todo $t \geq 0$. Dessa forma, vamos considerar apenas o caso em $u \in A \cap \mathcal{S}$. Pelas observações já feitas, temos que $\varphi(\varepsilon_3/4, u) \notin B$. Além disso, usando (2.31) e o fato que $a_0 \leq b_0 = d^*$ obtemos que

$$\begin{aligned}
I(\varphi(t, u)) &\leq I(u) - \frac{\varepsilon_1}{8} \int_0^t \vartheta_1(\varphi(s, u)) ds \\
&\leq a_0 - \frac{\varepsilon_1}{8} \int_0^t \vartheta_1(\varphi(s, u)) ds \\
&\leq d^* - \frac{\varepsilon_1}{8} \int_0^t \vartheta_1(\varphi(s, u)) ds.
\end{aligned}$$

Se $\varphi(t, u) \in B$, então $I(\varphi(t, u)) \geq b_0 = d^*$, e daí

$$\frac{\varepsilon_1}{8} \int_0^t \vartheta_1(\varphi(s, u)) ds \leq 0,$$

o que mostra que $\vartheta_1(\varphi(s, u)) \equiv 0$ para todo $s \in [0, t]$. Este fato implica que $\varphi(s, u) \in E \setminus \Omega_3$, e uma vez que $\Omega_4 \subset \Omega_3$, segue que $\varphi(s, u) \notin \Omega_4$ para todo $s \in [0, t]$.

Conseqüentemente, $I(\varphi(s, u)) < d^* - \varepsilon_2/3$ ou $\text{dist}(\varphi(s, u), B) > \varepsilon_3/3$ para todo $s \in [0, t]$. Em ambos os casos obtemos que $\varphi(t, u) \notin B$, e isso prova que $\varphi([0, \varepsilon_3/4], A) \cap B = \emptyset$. \square

Teorema B. *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com gradiente da forma (2.1), e suponha que a condição (A1) seja válida. Suponha ainda que $E = V \oplus W$ com $1 < \dim V < \infty$ e*

(I₁) *existe $\alpha > 0$ tal que $I(v) \leq \alpha$, para todo $v \in V$;*

(I₂) *existe $\rho > 0$ tal que $I(w) \geq \alpha$, para todo $w \in B := \{w \in W : \|w\| = \rho\} \subset \mathcal{S}$;*

(I₃) *existem $T_0 > 0$ e $w_0 \in W$ com $\|w_0\| = 1$ tais que $I(sw_0 + v) \leq T_0$ para todo $s \geq 0, v \in V$.*

Se I satisfaz (Ce)_c para algum $c > 0$, então existe uma seqüência $(u_n) \subset E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})$ tal que

$$I'(u_n) \rightarrow 0, \quad I'(u_n) = \frac{T_n}{n}u_n \quad \text{e} \quad I(u_n) \rightarrow c,$$

em que $(T_n) \subset \mathbb{R}$ é uma seqüência limitada e $c \in [\alpha/2, 2T_0]$.

Demonstração. Defina uma aplicação $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ de tal modo que

- 1) $\psi(x) = 0$, para todo $x \in (-\infty, 1/2)$;
- 2) $\psi(x) = 1$, para todo $x \in (1, +\infty)$;
- 3) $0 \leq \psi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dado $u \in E$, vamos escrever $u = v + w$ com $v \in V$ e $w \in W$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o funcional $I_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_n(u) := I(u) - \left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi\left(\frac{\|u\|^2}{n}\right). \quad (2.33)$$

Derivando a expressão acima temos que

$$I'_n(u) = I'(u) - 2\left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi'\left(\frac{\|u\|^2}{n}\right) \frac{u}{n}.$$

Usando a limitação de ψ' e a definição de norma de um operador linear, obtemos que

$$\|I'(u) - I'_n(u)\| \leq \frac{c_1}{n}, \quad (2.34)$$

para alguma constante $c_1 > 0$.

Afirmção 1. O funcional I_n satisfaz (Ce) no nível c se n é suficientemente grande.

De fato, seja (u_k) uma seqüência de Cerami no nível c para o funcional I_n , ou seja,

$$I_n(u_k) \rightarrow c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_k\|)\|I'_n(u_k)\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty.$$

Observe que é sempre possível extrair uma subsequência de (u_k) , que ainda denotamos por (u_k) , tal que uma das seguintes opções acontece:

$$(a) \quad \frac{\|u_k\|^2}{n} > 1;$$

$$(b) \quad \frac{\|u_k\|^2}{n} \leq 1.$$

Se acontece o caso (a), então $\psi'(\|u_k\|^2/n) = 0$. Assim, temos que $I'_n(u_k) = I'(u_k)$ e isto implica que

$$(1 + \|u_k\|)I'_n(u_k) = (1 + \|u_k\|)I'(u_k) \rightarrow 0.$$

Além disso,

$$I(u_k) = I_n(u_k) + \left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi\left(\frac{\|u_k\|^2}{n}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c + T_0 + \frac{1}{n},$$

o que mostra que (u_k) é uma sequência de Cerami para I . Logo, (u_k) possui uma subsequência convergente.

Por outro lado, se o caso (b) ocorre, então (u_k) é limitada. Dessa forma, podemos usar essa limitação para garantir que $\lim_{k \rightarrow \infty} I'_n(u_k) = 0$, ou seja,

$$I'(u_k) - 2\left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi'\left(\frac{\|u_k\|^2}{n}\right) \frac{u_k}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Definindo $b : E \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$b(u) := \kappa(u) - 2\left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi'\left(\frac{\|u\|^2}{n}\right) \frac{1}{n},$$

podemos usar o fato que $\kappa(u) \in [1/2, 1]$, a limitação de ψ' e tomar n suficientemente grande de tal modo que exista $\delta_0 > 0$ tal que

$$b(u) \geq \delta_0 > 0. \quad (2.36)$$

Lembrando que o gradiente de I é da forma

$$I'(u) = \kappa(u)u - J(u),$$

podemos usar (2.35) para garantir que

$$\begin{aligned} b(u_k)u_k - J(u_k) &= \kappa(u_k)u_k - 2\left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi'\left(\frac{\|u_k\|^2}{n}\right) \frac{u_k}{n} - J(u_k) \\ &= I'(u_k) - 2\left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi'\left(\frac{\|u_k\|^2}{n}\right) \frac{u_k}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por (u_k) ser uma sequência limitada e J um operador compacto, existe uma subsequência de (u_k) , que ainda denotamos por (u_k) , tal que $(J(u_k))$ converge. Observando a definição de b , segue que $(b(u_k))$ também converge. Além disso, note que

$$b(u_k)u_k - J(u_k) = o_k(1).$$

Dessa forma, podemos usar (2.36) e obter que

$$u_k = \frac{o_k(1)}{b(u_k)} + \frac{J(u_k)}{b(u_k)} = o_k(1) + \frac{J(u_k)}{b(u_k)},$$

o que mostra que (u_k) converge.

Daqui por diante vamos supor que $n > 2\rho^2$, em que $\rho > 0$ é dado por (I_2) . Desse modo, temos que $\psi(\|w\|^2/n) = 0$ para todo $w \in B$. Logo, $I_n(w) = I(w) \geq \alpha$ para todo $w \in B$ e portanto

$$b_0 := \inf_{u \in B} I_n(u) \geq \alpha. \quad (2.37)$$

Seja $R_n := n^{1/2}$ e observe que, para n grande, temos que $R_n > \rho$. Definindo

$$A_n := \{u = sw_0 + v : v \in V, s \geq 0, \|u\| = R_n\} \cup [V \cap \overline{B_{R_n}(0)}],$$

podemos usar o Lema 1.1 para garantir que A_n enlaça o conjunto B . No que segue, vamos verificar que o funcional I_n e os conjuntos A_n e B satisfazem as condições do Teorema A. De fato, observe que $B \subset \mathcal{S}$ é fechado e $A_n \subset E$ é compacto. Suponha que $s \geq 0$ e $v \in V$ são tais que $\|sw_0 + v\| = R_n$. Então, como $\psi(1) = 1$, podemos usar a hipótese (I_3) para garantir que

$$I_n(sw_0 + v) = I(sw_0 + v) - \left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi\left(\frac{\|sw_0 + v\|^2}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} < \alpha. \quad (2.38)$$

Por outro lado, se $v \in V \cap \overline{B_{R_n}(0)}$, então

$$I_n(v) = I(v) - \left(T_0 + \frac{1}{n}\right) \psi\left(\frac{\|v\|^2}{n}\right) \leq I(v) \leq \alpha, \quad (2.39)$$

por (I_1) . Segue de (2.37)-(2.39) que

$$a_0 := \sup_{u \in A_n} I_n(u) \leq \alpha \leq b_0 = \inf_{u \in B} I_n(u).$$

Dessa forma, segue do Teorema A que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $u_n \in E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})$ tal que

$$I'_n(u_n) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha - \varepsilon \leq b_0 \leq I_n(u_n) \leq \sup_{(t, u_n) \in [0, 1] \times A_n} I_n((1-t)u_n).$$

Tomando $\varepsilon = \alpha/2$, temos que

$$I'_n(u_n) = 0 \quad \text{e} \quad I_n(u_n) \in \left[\alpha/2, \sup_{(t,u_n) \in [0,1] \times A_n} I_n((1-t)u_n) \right]. \quad (2.40)$$

Usando (2.34) segue que

$$\|I'(u_n)\| = \|I'(u_n) - I'_n(u_n)\| \leq \frac{c_1}{n} \rightarrow 0.$$

Considerando $u_n \in A_n$ e $t \in [0, 1]$ temos dois casos a analisar. No primeiro caso temos que, se $u_n = sv + w_0$ com $v \in V$ e $s \geq 0$, então

$$(1-t)u_n = (1-t)(sw_0 + v) = (1-t)sw_0 + (1-t)v = \hat{s}w_0 + \hat{v},$$

em que $\hat{s} \geq 0$ e $\hat{v} \in V$. Para o segundo, temos que se $u_n \in V \cap \overline{B_{R_n}(0)}$, então

$$(1-t)u_n = (1-t)v = \bar{v},$$

em que $\bar{v} \in V$. Logo, como $I_n(u) \leq I(u)$ para todo $u \in E$, usando (I_3) temos que

$$\sup_{(t,u_n) \in [0,1] \times A_n} I_n((1-t)u_n) \leq \sup_{(t,u_n) \in [0,1] \times A_n} I((1-t)u_n) \leq T_0.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \alpha/2 \leq I_n(u_n) &\leq I(u_n) \leq I_n(u_n) + T_0 + \frac{1}{n} \\ &\leq \sup_{(t,u_n) \in [0,1] \times A_n} I_n((1-t)u_n) + T_0 + \frac{1}{n} \\ &\leq 2T_0 + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

e fazendo $n \rightarrow \infty$ concluímos que $I(u_n) \rightarrow c \in [\alpha/2, 2T_0]$. Por fim, escreva

$$I'(u_n) = I'(u_n) - I'_n(u_n) = 2 \left(T_0 + \frac{1}{n} \right) \psi' \left(\frac{\|u_n\|^2}{n} \right) \frac{u_n}{n} = \frac{T_n}{n} u_n,$$

em que a sequência (T_n) é dada por

$$T_n := 2 \left(T_0 + \frac{1}{n} \right) \psi' \left(\frac{\|u_n\|^2}{n} \right).$$

Como $(T_n) \subset \mathbb{R}$ é limitada o teorema está provado. \square

2.2 Uma variação dos Teoremas A e B

Nesta seção, vamos supor que exista em E uma outra norma $\|\cdot\|_*$ tal que $\|u\|_* \leq C_* \|u\|$ para todo $u \in E$, em que $C_* > 0$ é uma constante. Além disso, assumimos que $\|u_n - u^*\|_* \rightarrow 0$ sempre que $u_n \rightharpoonup u^*$ fracamente em $(E, \|\cdot\|)$. Observamos que com essa nova norma o espaço E não precisa herdar a estrutura hilbertiana.

Sejam $V, W \subset E$ subespaços fechados com $W = V^\perp$ e $\dim V < \infty$. Suponha ainda que $(W \setminus \{0\}) \cap (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P}) = \emptyset$, ou seja, os elementos não triviais de W mudam de sinal. Sejam ainda $0 < \rho < R$, $D_* > 0$, $p > 2$ e $w_0 \in W$ com $\|w_0\| = 1$ tais que

$$R^{p-2} \|w_0\|_*^p + \frac{R \|w_0\|_*}{1 + D_* \|w_0\|_*} > \rho.$$

Defina

$$A := \{u = v + sw_0 : v \in V, s \geq 0, \|u\| = R\} \cup [V \cap \overline{B_R(0)}]$$

e

$$B := \left\{ u \in W : \frac{\|u\|_*^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\| \|u\|_*}{\|u\| + D_* \|u\|_*} = \rho \right\}.$$

Então, pelo Lema 1.6, A enlaça o conjunto B . Escolha $a_* \in \mathbb{R}$ de modo que

$$a_* > \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) + 2, \quad (2.41)$$

e defina

$$B^* := B \cap I^{a_*}. \quad (2.42)$$

Para verificar que o conjunto B^* é não-vazio, escolha $\Gamma(t, u) = (1-t)u \in \Phi^*$. Usando o fato que $\Phi^* \subset \Phi$ e A enlaça B , concluímos que existe $(t, a) \in [0, 1] \times A$ tal que $\Gamma(t, a) \in B$. Além disso,

$$I((1-t)a) < \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I(u) + 2 < a_*,$$

o que implica que $\Gamma(t, a) \in I^{a_*}$. Logo $B^* := B \cap I^{a_*} \neq \emptyset$.

Motivados pelas observações anteriores, introduzimos uma outra classe de aplicações para as quais, sob certas condições, obtemos as mesmas conclusões dos Teoremas A e B. Seja

$$\Phi^{**} := \{\Gamma \in \Phi^* : \Gamma([0, 1], A) \subset I^{a_*}\}, \quad (2.43)$$

que claramente é não-vazio, visto que $\Gamma(t, u) = (1-t)u \in \Phi^* \cap \Phi^{**}$.

Lema 2.3. *Existe $C > 0$ tal que $\|u\|_* \leq C$ para todo $u \in B$.*

Demonstração. Seja $(u_k) \subset B$. Note que se $\|u_k\|_* \rightarrow \infty$, então $\|u_k\| \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\rho = \frac{\|u_k\|_*^p}{\|u_k\|} + \frac{\|u_k\| \|u_k\|_*}{\|u_k\| + D^* \|u_k\|_*} \rightarrow \infty$$

quando $k \rightarrow \infty$, o que é um absurdo. \square

No que segue fazemos uso da seguinte condição.

(A2) Assuma que para $a, b > 0$, existe uma constante $c = c(a, b) > 0$ tal que

$$I(u) \leq a \quad \text{e} \quad \|u\|_* \leq b \Rightarrow \|u\| \leq c.$$

A fim de obter os principais resultados dessa seção, é de grande utilidade o seguinte

Lema 2.4. *Suponha que a condição (A2) seja válida, e seja $B^* := B \cap I^{a_*}$ em que a_* é definido em (2.41). Então*

$$\delta_1 := \text{dist}(B^*, \mathcal{P}) > 0.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\text{dist}(B^*, \mathcal{P}) = 0$. Então existem seqüências $(u_n) \subset B^*$ e $(p_n) \subset \mathcal{P}$ tais que $\|u_n - p_n\| \rightarrow 0$. Como $(u_n) \subset B$, segue do Lema 2.3 que existe $b > 0$ tal que $\|u_n\|_* \leq b$, e do fato de que $(u_n) \subset I^{a_*}$ segue que $I(u_n) \leq a_*$. Assim, usando a condição (A2), existe $c = (a_*, b) > 0$ tal que $\|u_n\| \leq c$. Logo, (u_n) é uma seqüência limitada em $(E, \|\cdot\|)$ e portanto em $(E, \|\cdot\|_*)$, o que implica que (p_n) também é limitada em $(E, \|\cdot\|)$ e $(E, \|\cdot\|_*)$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u^* \in B^*$ e $p_n \rightharpoonup p^* \in \mathcal{P}$ fracamente em $(E, \|\cdot\|)$. Lembrando das considerações anteriores, temos que essas observações implicam que $u_n \rightarrow u^*$ em $(E, \|\cdot\|_*)$. Como $u_n \rightharpoonup u^*$, segue que

$$\langle u_n, u \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

Em particular,

$$0 = \langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u^*, v \rangle, \quad \forall v \in V,$$

o que mostra que $u^* \in V^\perp = W$.

Afirmção 1. $u^* \neq 0$.

Suponha, por contradição, que $u^* = 0$. Como $\|u_n - u^*\|_* \rightarrow 0$, segue que

(1) se $\|u_n\|_*/\|u_n\| \rightarrow 0$, então

$$\rho = \frac{\|u_n\|_*^p}{\|u_n\|^2} + \frac{\|u_n\| \|u_n\|_*}{\|u_n\| + D_* \|u_n\|_*} = \|u_n\|_*^{p-2} \left(\frac{\|u_n\|_*}{\|u_n\|} \right)^2 + \frac{\|u_n\|_*}{1 + D_* \left(\frac{\|u_n\|_*}{\|u_n\|} \right)} \rightarrow 0,$$

e obtemos uma contradição;

(2) se $\liminf \|u_n\|_\star / \|u_n\| > 0$, então o mesmo cálculo acima mostra que $\rho = 0$.

Visto que $u^* \neq 0$, observamos que

$$\|u_n - p_n\|_\star \leq C_\star \|u_n - p_n\| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u_n - u^*\|_\star \rightarrow 0,$$

o que implica que $u^* = p^*$. No entanto, isso é uma contradição com o fato de que $(W \setminus \{0\}) \cap (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P}) = \emptyset$. \square

A seguir, apresentamos os principais resultados dessa seção.

Teorema A'. *Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com gradiente I' da forma (2.1). Suponha que as condições (A1) e (A2) sejam válidas e que*

$$a_0 := \sup_{u \in A} I(u) \leq b_0^* := \inf_{u \in B^*} I(u).$$

Se

$$d^* := \inf_{\Gamma \in \Phi^{**}} \sup_{u \in \Gamma([0,1], A) \cap \mathcal{S}} I(u),$$

então

$$d^* \in \left[b_0^*, \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) \right].$$

Além disso, se I satisfaz $(\text{Ce})_c$ para algum

$$c \in \left[b_0^*, \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) \right],$$

então para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\mathcal{K}[d^* - \varepsilon, d^* + \varepsilon] \cap (E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})) \neq \emptyset.$$

Além do mais, se $d^* = b_0^*$, então $\mathcal{K}[d^*, d^*] \subset B^*$.

Baseado no Lema 2.4, podemos assumir que $B^* \subset \mathcal{S} = E \setminus \mathcal{D}^*$ com o $\delta > 0$ da condição (A1) suficientemente pequeno.

Teorema B'. *Suponha que a condição (A2) seja válida. Então, trocando o conjunto B pelo conjunto B^* definido em (2.42), o Teorema B ainda continua válido.*

Observamos que as demonstrações dos Teoremas A' e B' são análogas às dos Teoremas A e B, respectivamente, bastando para isso trocar o conjunto B por B^* . No Teorema B', procedendo como na prova do Teorema B, usamos o Teorema A' com o conjunto B^* .

Aplicações

Neste capítulo vamos usar os Teorema A' e B' apresentados no Capítulo 2, para mostrar a existência de soluções que mudam de sinal para problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave.

Ao longo do capítulo, consideramos E o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ com o produto interno

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

com $u, v \in E$ e norma $\|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2}$. Além disso, consideramos em $L^p(\Omega)$ a norma

$$\|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Para o estudo do problema (P), algumas hipóteses sobre f são impostas. Durante o capítulo, vamos assumir que

(B0) $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua;

(B1) $f(x, t)t \geq 0$ para $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t)}{t} = 0, \quad \text{uniformemente para } x \in \Omega.$$

Estamos interessados no caso em que f é assintoticamente linear no infinito, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} = k_{\pm}(x).$$

Vamos considerar três situações distintas.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \beta_+(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \beta_-(x); \quad (3.1)$$

$$\liminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} := L(x) \quad \text{e} \quad \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t} := K(x); \quad (3.2)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \theta_{\pm}(x) \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} := \vartheta_{\pm}(x), \quad (3.3)$$

uniformemente para $x \in \Omega$.

Lema 3.1. *Suponha que as condições (B0) e (B1) sejam válidas. Suponha ainda que ocorra (3.1), (3.2) ou (3.3) com as funções limites em $L^\infty(\Omega)$. Então dado $\varepsilon > 0$ e $2 \leq p < 2^*$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1}, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Em particular, existe $\Lambda_0 > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq \Lambda_0|t| \quad \text{e} \quad |F(x, t)| \leq \frac{\Lambda_0}{2}|t|^2, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Demonstração. Inicialmente, suponha que (3.1) seja válida e considere o caso em que $p = 2$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar a condição (B1) para obter $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon|t|, \quad \forall x \in \Omega, |t| < \delta, \quad (3.6)$$

e portanto

$$|F(x, t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2, \quad \forall x \in \Omega, |t| < \delta. \quad (3.7)$$

Usando (3.1), segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x, t)}{t} - \beta_+(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega, t > R,$$

o que implica que

$$|f(x, t)| < (\beta_+(x) + \varepsilon)t, \quad \forall x \in \Omega, t > R. \quad (3.8)$$

Para $\delta < t < R$, usamos a continuidade de f para obter $M > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq M. \quad (3.9)$$

Logo, para $x \in \Omega$ e $t > \delta$ segue de (3.8) e (3.9) que

$$|f(x, t)| \leq (\beta_+(x) + \varepsilon)t + M < Kt,$$

em que $K = |\beta_+|_\infty + \varepsilon + \frac{M}{\delta}$. De maneira análoga, podemos usar novamente (3.1) e obter que

$$|f(x, t)| < \tilde{K}|t|, \quad \forall x \in \Omega, \quad t < -\delta.$$

Com essas observações, concluímos que existe uma constante $\Lambda_0 > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq \Lambda_0|t|, \quad \forall x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Integrando a expressão anterior obtemos que

$$|F(x, t)| \leq \frac{\Lambda_0}{2}|t|^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

No que segue, consideramos o caso em que $2 < p < 2^*$. Usando (3.1) temos que

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(x, t)}{t^{p-1}} = 0,$$

uniformemente para $x \in \Omega$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|f(x, t)| < \varepsilon|t|^{p-1}, \quad \forall x \in \Omega, \quad |t| > R.$$

Para $\delta < |t| < R$, usamos a continuidade de f para obter $M > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq M.$$

Logo, para $x \in \Omega$ e $\delta < |t| < R$ segue que

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon|t|^{p-1} + M \leq C_\varepsilon|t|^{p-1}, \quad (3.10)$$

em que $C_\varepsilon = \varepsilon + \frac{M}{\delta^{p-1}}$. Assim, podemos usar (3.6) e (3.10) para concluir que

$$|f(x, t)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{p-1}, \quad \forall x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por fim destacamos que nos casos em que (3.2) e (3.3) são válidos a prova é feita de maneira análoga, e portanto o resultado acima continua válido. \square

Para o problema (P) associamos o funcional $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) := \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

Usando o Lema 3.15 do Apêndice temos que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com derivada

$$I'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in E.$$

Observe que

$$I'(u) = u - J(u),$$

com $J(u) \in E'$ dado por

$$J(u)v := \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in E.$$

Segue do Lema 3.15 do Apêndice que J é um operador compacto.

Ao longo do capítulo, consideramos o cone das funções não negativas em E , a saber

$$\mathcal{P} := \{u \in E : u(x) \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Além disso, definimos

$$\pm \mathcal{D}(\mu_0) := \{u \in E : \text{dist}(u, \pm \mathcal{P}) < \mu_0\}.$$

Com o objetivo de verificar a condição (A1) do capítulo anterior, provamos o seguinte

Lema 3.2. *Suponha que as condições (B0) e (B1) sejam válidas. Então existe $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $J(\pm \mathcal{D}(\mu_0)) \subset \pm \mathcal{D}(\mu_0/2)$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que existe $\mu_0 > 0$ pequeno tal que

$$\text{dist}(J(u), -\mathcal{P}) < \frac{\mu_0}{2},$$

para cada $u \in -\mathcal{D}(\mu_0)$. Para o caso em que $u \in \mathcal{D}(\mu_0)$ a prova é análoga. Para cada $u \in E$ temos que

$$|u^+|_2 = |u - (-u^-)|_2 = \min_{w \in (-\mathcal{P})} |u - w|_2.$$

De fato, por \mathcal{P} ser um subconjunto convexo fechado do espaço de Hilbert E , pelo Lema 3.16 do Apêndice é suficiente mostrarmos que

$$\langle u - (-u^-), v - u^- \rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad \forall v \in -\mathcal{P},$$

o que é óbvio, pois se $v \in -\mathcal{P}$, então

$$\langle u - (-u^-), v - u^- \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u^+, v - u^- \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u^+ v dx \leq 0.$$

Assim, usando a desigualdade de Poincaré, temos que

$$\begin{aligned} \|u^+\|_2 &= \min_{w \in (-\mathcal{P})} \|u - w\|_2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} \min_{w \in (-\mathcal{P})} \|u - w\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} \text{dist}(u, -\mathcal{P}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando (3.4), temos que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x, t)t \leq \varepsilon t^2 + C_\varepsilon |t|^p, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Considerando $J(u) = v$, temos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(v, -\mathcal{P}) &= \inf_{z \in \mathcal{P}} \|v - (-z)\| \\ &= \inf_{z \in \mathcal{P}} \|v + z\| \\ &\leq \|v + v^-\| = \|v^+\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{dist}(v, -\mathcal{P}) \|v^+\| &\leq \|v^+\|^2 \\ &= \langle v, v^+ \rangle \\ &= \int_{\Omega} f(x, u) v^+ dx. \end{aligned}$$

Além disso, podemos usar a condição (B1) para obter que se $u(x) \leq 0$, então $f(x, u) \leq 0$.

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, u) v^+ dx &= \int_{\{x \in \Omega: u(x) > 0\}} f(x, u) v^+ dx + \int_{\{x \in \Omega: u(x) \leq 0\}} f(x, u) v^+ dx \\ &\leq \int_{\{x \in \Omega: u(x) > 0\}} f(x, u^+) v^+ dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, u^+) v^+ dx. \end{aligned}$$

Observe que, se escolhermos $p < 3$, podemos usar a desigualdade de Hölder com expoentes

$s := 2/(p-1) > 1$ e $s' := 2/(3-p)$, juntamente com a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s'}(\Omega)$ e (3.11) para obter que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u^+|^{p-1} |v^+| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |u^+|^2 dx \right)^{\frac{p-1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v^+|^{s'} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \\ &\leq C \text{dist}(u, -\mathcal{P})^{p-1} \|v^+\|. \end{aligned}$$

Usando (3.12) e a observação acima, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, u^+) v^+ dx &\leq \int_{\Omega} (\varepsilon |u^+| + C_{\varepsilon} |u^+|^{p-1}) |v^+| dx \\ &\leq \left(\frac{2}{5} \text{dist}(u, -\mathcal{P}) + C(\text{dist}(u, -\mathcal{P}))^{p-1} \right) \|v^+\|. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\text{dist}(J(u), -\mathcal{P}) \leq \frac{2}{5} \text{dist}(u, -\mathcal{P}) + C(\text{dist}(u, -\mathcal{P}))^{p-1}.$$

Logo, para cada $u \in -\mathcal{D}(\mu_0)$ existe $\mu_0 > 0$ pequeno tal que $\text{dist}(J(u), -\mathcal{P}) < \mu_0/2$, o que conclui a prova do lema. \square

Seja

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$$

a sequência de autovalores distintos para o problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

É importante destacar que o primeiro autovalor λ_1 é simples, ou seja, $\dim \text{Ker}(-\Delta - \lambda_1 \text{Id}) = 1$ e a autofunção φ_1 associada ao autovalor λ_1 possui sinal definido, digamos positivo. Além disso, cada λ_k possui multiplicidade finita e as demais autofunções φ_k associadas a λ_k mudam de sinal. No que segue, denotamos por $V_k \subset H_0^1(\Omega)$ o seguinte subespaço

$$V_k := \text{Ker}(-\Delta - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(-\Delta - \lambda_k \text{Id}),$$

em que $k > 1$ é um número natural. Vamos decompor o espaço E da seguinte forma

$$E = V_{k-1} \oplus V_{k-1}^{\perp}.$$

Observe que todas as funções em V_1^{\perp} mudam de sinal. De fato, seja $w \in V_1^{\perp}$ e lembre que

a seguinte equação é satisfeita no sentido fraco

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1.$$

Logo, para todo $w \in V_1^\perp$, temos que

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \nabla w dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 w dx.$$

Usando a ortogonalidade das autofunções em E , temos que

$$\lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 w dx = 0.$$

Como $\varphi_1 > 0$, a igualdade acima implica que w muda de sinal.

A caracterização variacional dos autovalores nos fornece as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} \|v\|^2 \leq \lambda_k |v|^2, & \forall v \in V_k, \\ \lambda_{k+1} |w|_2^2 \leq \|w\|^2, & \forall w \in V_k^\perp. \end{cases} \quad (3.13)$$

Em particular, temos a desigualdade de Poincaré

$$|u|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|u\|^2, \quad \forall u \in E. \quad (3.14)$$

Agora, estamos prontos para introduzir a condição

(B2) existe $c_0 > 0$ tal que

$$F(x, t) \geq \frac{\lambda_{k-1}}{2} t^2 - \frac{c_0}{2}, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}.$$

No que segue, vamos fazer algumas observações para impor uma condição que é usada em todos os teoremas apresentados neste capítulo.

Inicialmente, observe que podemos usar a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com $2 < p < 2^*$, para obter uma constante $\Lambda_p > 1$ tal que

$$|u|_p \leq \Lambda_p \|u\|, \quad \forall u \in E. \quad (3.15)$$

Considerando $u \in E$ e fixado $p \in (2, 2^*)$ podemos usar as desigualdades $1/2^* < 1/p < 1/2$ para obter $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{p} = (1 - \alpha) \left(\frac{N - 2}{2N} \right) + \frac{\alpha}{2}. \quad (3.16)$$

Segue então da desigualdade de Hölder que

$$\int_{\Omega} |u|^p dx = \int_{\Omega} |u|^{\alpha p} |u|^{(1-\alpha)p} dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha p \frac{2^*}{\alpha p}} dx \right)^{\frac{\alpha p}{2^*}} \left(\int_{\Omega} |u|^{(1-\alpha)p \frac{2}{(1-\alpha)p}} dx \right)^{\frac{(1-\alpha)p}{2}},$$

ou seja,

$$|u|_p \leq |u|_{2^*}^{\alpha} |u|_2^{1-\alpha}.$$

Usando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, temos que existe $c_p > 1$ tal que

$$|u|_p \leq c_p \|u\|^{\alpha} |u|_2^{1-\alpha}, \quad \forall u \in E. \quad (3.17)$$

Observe que, usando o Lema 3.1 com $\varepsilon = \lambda_1/2$ temos que

$$|F(x, t)| \leq \frac{\lambda_1}{4} |t|^2 + D_p |t|^p, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

em que $2 < p < 2^*$.

Para enunciar os nossos primeiros resultados, apresentamos a condição

(B3) sejam Λ_p , c_p e D_p satisfazendo (3.15), (3.17) e (3.18), respectivamente. Considerando

$$T_1 := \min \left\{ \lambda_k^{(1-\alpha)(p-2)}, \lambda_k^{(1-\alpha)} \right\}, \quad T_2 := \min \left\{ \frac{1}{64D_p^2}, (8D_p)^{-1/(p-2)} \right\}$$

e

$$\Lambda_p^* := \min \left\{ \frac{1}{4\Lambda_p^2 c_p^{(p-2)}}, (4\Lambda_p^2 c_p^{(p-2)})^{-1/(p-2)} \right\},$$

então supomos que

$$c_0 \leq \frac{1}{4|\Omega|} (\Lambda_p^*)^2 T_1 T_2,$$

em que c_0 é dado na condição (B2).

Teorema 3.1. *Suponha que as condições (B0) – (B3) sejam válidas e que f satisfaz (3.1) com*

$$\lambda_k < \beta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $\beta_+(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$ ou $\beta_-(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$, então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

No nosso próximo resultado, considerando a hipótese de não quadraticidade de Costa-Magalhães [10], permitimos que o problema (P) seja ressonante.

(B4) vale o seguinte limite

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} (f(x, t)t - 2F(x, t)) = \infty, \quad \forall x \in \Omega.$$

Teorema 3.2. *Suponha que as condições (B0) – (B4) sejam válidas e que f satisfaz (3.1) com*

$$\lambda_k < \beta_{\pm}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Considerando f satisfazendo (3.2) obtemos um resultado de dupla ressonância. Nessa direção, para os resultados de existência podemos citar [5, 12, 13]. No entanto, nestes trabalhos o sinal da solução não foi determinado.

Teorema 3.3. *Suponha que as condições (B0) – (B4) sejam válidas e f satisfaz (3.2) com*

$$\lambda_k \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $L \not\equiv \lambda_k$, então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

A estratégia usada para provar os Teoremas 3.1-3.3 é mostrar que para determinados conjuntos A , B^* e o funcional I associado ao problema (P), temos que todas as condições impostas pelo Teorema A' são satisfeitas.

No que segue, consideramos as condições

(B5) existe $c_0 > 0$ tal que

$$2F(x, t) \geq \max\{\lambda_{k-1}t^2, \theta_+(x)(t^+)^2 + \theta_-(x)(t^-)^2\} - c_0, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R};$$

(B6)

$$\|v\|^2 \leq \int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx, \quad \forall v \in V_k;$$

(B7) $\vartheta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}$, $\forall x \in \Omega$;

(B7)' $\lambda_k \leq \theta_{\pm}(x) \leq \vartheta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}$, $\forall x \in \Omega$;

(B8) nenhuma autofunção associada ao autovalor λ_{k+1} satisfaz

$$-\Delta u = \vartheta_+(x)u^+ - \vartheta_-(x)u^-;$$

(B9) não existe função em $V_k \setminus \{0\}$ que satisfaça

$$-\Delta u = \theta_+(x)u^+ - \theta_-(x)u^-;$$

(B9)' nenhuma autofunção associada a λ_k satisfaz

$$-\Delta u = \theta_+(x)u^+ - \theta_-(x)u^-.$$

Teorema 3.4. *Suponha que as condições (B0), (B1), (B3) e (B5) sejam válidas e f satisfaz (3.3). Suponha ainda que para cada par de números a_+ e b_- no intervalo $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ existam $a_- < \lambda_k$ e $b_+ > \lambda_{k+1}$ tais que*

$$a_{\pm} \leq \theta_{\pm}(x) \leq \vartheta_{\pm}(x) \leq b_{\pm}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Teorema 3.5. *Suponha que as condições (B0), (B1), (B3) e (B5) – (B9) sejam válidas e f satisfaz (3.3). Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.*

Teorema 3.6. *Suponha que as condições (B0), (B1), (B3), (B5), (B7)', (B8) e (B9)' sejam válidas e f satisfaz (3.3). Então o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.*

Os resultados de existência para os Teoremas 3.4-3.6 são conhecidos (c.f. Berestycki e deFigueiredo [5], Căc [8], Furtado et al [12, 13] e Habets [14]). No entanto, nesses trabalhos o sinal das soluções não foi determinado.

Para provar os Teoremas 3.4-3.6 mostramos que, para o conjunto B^* definido na Seção 3.1 e o funcional I associado ao problema (P), todas as condições geométricas do Teorema B' são satisfeitas.

3.1 Um problema não ressonante

Nesta seção, provamos o Teorema 3.1. Destacamos que a sua prova é feita em vários passos, onde vamos obter resultados que nos permitem usar o Teorema A'.

Lema 3.3. *Suponha que as condições (B0) e (B1) sejam válidas e que f satisfaz (3.1) com*

$$\lambda_k < \beta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $\beta_+(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$ ou $\beta_-(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$, então $I(v) \rightarrow -\infty$ quando $\|v\| \rightarrow \infty$, $v \in V_k$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, podemos usar (3.1) para obter $R_1 = R_1(\varepsilon) > 0$ tal que

$$f(x, t) > (\beta_+(x) - \varepsilon)t, \quad \forall x \in \Omega, t > R_1.$$

Assim, se $t > R_1$, então

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \int_0^t f(x, s)ds = \int_0^{R_1} f(x, s)ds + \int_{R_1}^t f(x, s)ds \\ &\geq F(x, R_1) + (\beta_+(x) - \varepsilon)\frac{t^2}{2} - (\beta_+(x) - \varepsilon)\frac{R_1^2}{2} \\ &\geq (\beta_+(x) - \varepsilon)\frac{t^2}{2} - c_1. \end{aligned}$$

para alguma constante $c_1 > 0$. Podemos usar a continuidade de F para escrever

$$F(x, t) \geq (\beta_+(x) - \varepsilon)\frac{t^2}{2} - c_2, \quad \forall x \in \Omega, t \geq 0.$$

De maneira análoga, podemos usar novamente (3.1) e a condição (B1) para obtermos $c_3 > 0$ tal que

$$F(x, t) \geq (\beta_-(x) - \varepsilon)\frac{t^2}{2} - c_3, \quad \forall x \in \Omega, t < 0.$$

Logo, existe $c > 0$ tal que

$$F(x, t) \geq (\min\{\beta_-(x), \beta_+(x)\} - \varepsilon)\frac{t^2}{2} - c, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Dessa forma, podemos usar (3.19) e a desigualdade de Poincaré para concluir que, para todo $v \in V_k$, vale

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{\|v\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, v)dx \\ &\leq \frac{\|v\|^2}{2} - \int_{\Omega} (\min\{\beta_-(x), \beta_+(x)\} - \varepsilon)\frac{|v|^2}{2} dx + \int_{\Omega} cdx \\ &= \frac{\|v\|^2}{2} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \min\{\beta_-(x), \beta_+(x)\}|v|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + c|\Omega| \\ &\leq \frac{\|v\|^2}{2} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \min\{\beta_-(x), \beta_+(x)\}|v|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \|v\|^2 + c|\Omega|. \end{aligned}$$

Definindo

$$C(x) := \min\{\beta_-(x), \beta_+(x)\},$$

temos que $C(x) > \lambda_k$ para todo $x \in \Omega$ e portanto segue do Lema 3.17 do Apêndice que

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} C(x)v^2 dx \leq -\delta\|v\|^2,$$

em que $\delta > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} I(v) &\leq -\frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\|v\|^2 + c|\Omega| \\ &= \frac{\|v\|^2}{2} \left(-\delta + \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \right) + c|\Omega|. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon < \delta\lambda_1$, concluímos que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty, v \in V_k} I(v) = -\infty.$$

□

Observamos que o resultado acima ainda continua válido se considerarmos apenas que

$$\lambda_k < \beta_{\pm}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Lema 3.4. *Suponha que a condição (B2) seja válida. Então*

$$I(v) \leq \frac{c_0|\Omega|}{2}, \quad \forall v \in V_{k-1}.$$

Demonstração. Basta usar (B2) e a desigualdade variacional para $v \in V_{k-1}$ e concluir que

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{\|v\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, v) dx \\ &\leq \frac{\|v\|^2}{2} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda_{k-1} v^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c_0 dx \\ &\leq \frac{c_0|\Omega|}{2}. \end{aligned}$$

□

Lembrando da expressão de $\alpha \in (0, 1)$ em (3.16), vamos definir, para $2 < p < 2^*$, a aplicação $\xi : E \rightarrow E$ dada por

$$\xi(u) = \begin{cases} \frac{|u|_p^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\| |u|_p}{\|u\| + \lambda_k^\beta |u|_p}, & \text{se } u \neq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0, \end{cases}$$

em que $\beta = (1 - \alpha)(p - 2)$. Além disso, a partir de agora, para $\rho > 0$ vamos considerar o seguinte conjunto

$$B := \{u \in V_{k-1}^\perp : \xi(u) = \rho\}.$$

Lema 3.5. *A aplicação ξ é contínua e*

$$\frac{\lambda_k^{\beta/2}}{4\Lambda_p^2 c_p^{p-2}} \rho \leq \max\{\|u\|, \|u\|^{p-2}\}, \quad \forall u \in B.$$

Demonstração. A continuidade de ξ segue de argumentos já apresentados anteriormente. Para a segunda parte, considerando $u \in B$ podemos usar (3.15) e o fato que

$$2(\|u\| \lambda_k^\beta |u|_p)^{1/2} \leq \|u\| + \lambda_k^\beta |u|_p$$

para obter que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{|u|_p^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\| |u|_p}{\|u\| + \lambda_k^\beta |u|_p} \\ &\leq |u|_p^{p-2} \left(\frac{|u|_p^2}{\|u\|^2} \right) + \frac{\|u\| |u|_p}{2(\|u\| \lambda_k^\beta |u|_p)^{1/2}} \\ &\leq \Lambda_p^2 |u|_p^{p-2} + \frac{(\|u\| |u|_p)^{1/2}}{2\lambda_k^{\beta/2}} \\ &\leq \Lambda_p^2 |u|_p^{p-2} + \frac{\Lambda_p^{1/2} \|u\|}{2\lambda_k^{\beta/2}}. \end{aligned}$$

Observando que para $u \in V_{k-1}^\perp$ vale a seguinte desigualdade variacional

$$\lambda_k |u|_2^2 \leq \|u\|^2, \quad (3.20)$$

podemos usar (3.17) e (3.20) para obter que

$$\begin{aligned} |u|_p^{p-2} &\leq c_p^{p-2} \|u\|^{\alpha(p-2)} |u|_2^{(1-\alpha)(p-2)} \\ &\leq c_p^{p-2} \|u\|^{p-2} \lambda_k^{-(1-\alpha)(p-2)/2}. \end{aligned}$$

Assim, lembrando que $\Lambda_p > 1$ e $c_p > 1$, segue que

$$\begin{aligned} \rho &\leq \Lambda_p^2 c_p^{p-2} \|u\|^{p-2} \lambda_k^{-\beta/2} + \frac{\Lambda_p^{1/2} \|u\|}{2\lambda_k^{\beta/2}} \\ &\leq \frac{\Lambda_p^2 c_p^{p-2} \|u\|^{p-2}}{\lambda_k^{\beta/2}} + \frac{\Lambda_p^{1/2} \|u\|}{2\lambda_k^{\beta/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2\Lambda_p^2 c_p^{p-2} \|u\|^{p-2}}{\lambda_k^{\beta/2}} + \frac{2\Lambda_p^2 c_p^{p-2} \|u\|}{\lambda_k^{\beta/2}} \\
&\leq \frac{4\Lambda_p^2 c_p^{p-2}}{\lambda_k^{\beta/2}} \max \{ \|u\|^{p-2}, \|u\| \},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\frac{\lambda_k^{\beta/2}}{4\Lambda_p^2 c_p^{p-2}} \rho \leq \max \{ \|u\|, \|u\|^{p-2} \}. \quad (3.21)$$

□

Lema 3.6. *Para cada $u \in B$ temos que*

$$\|u\| \geq \Lambda_p^* \min \left\{ \lambda_k^{(1-\alpha)(p-2)/2}, \lambda_k^{(1-\alpha)/2} \right\} \min \{ \rho, \rho^{1/(p-2)} \}.$$

Demonstração. Defina

$$A_{\lambda_k, \rho} := \min \left\{ \lambda_k^{(1-\alpha)(p-2)/2}, \lambda_k^{(1-\alpha)/2} \right\} \min \{ \rho, \rho^{1/(p-2)} \} \min \left\{ \frac{1}{4\Lambda_p^2 c_p^{p-2}}, (4\Lambda_p^2 c_p^{p-2})^{-1/(p-2)} \right\}.$$

Assim, segue de (3.21) que

$$A_{\lambda_k, \rho} \leq \lambda_k^{(1-\alpha)(p-2)/2} \rho \frac{1}{4\Lambda_p^2 c_p^{p-2}} \leq \max \{ \|u\|, \|u\|^{p-2} \}.$$

Observe que se $0 < \|u\| < 1$, então temos pela expressão acima que

$$A_{\lambda_k, \rho} \leq \max \{ \|u\|, \|u\|^{p-2} \} = \|u\|.$$

Por outro lado, segue novamente da definição de $A_{\lambda_k, \rho}$ que

$$A_{\lambda_k, \rho} \leq \lambda_k^{(1-\alpha)/2} \rho^{1/(p-2)} \frac{1}{(4\Lambda_p^2 c_p^{p-2})^{1/(p-2)}}.$$

Assim, se $\|u\| \geq 1$, então segue da expressão acima e de (3.21) que

$$A_{\lambda_k, \rho} \leq (\max \{ \|u\|, \|u\|^{p-2} \})^{\frac{1}{p-2}} = (\|u\|^{p-2})^{\frac{1}{p-2}} = \|u\|,$$

o que conclui o lema. □

Lema 3.7. *Suponha que as condições (B0) – (B3) sejam válidas. Então, para todo $u \in B$, temos que*

$$I(u) \geq \frac{c_0 |\Omega|}{2}.$$

Demonstração. Inicialmente, observe que se $u \in B$, então

$$\rho = \frac{|u|_p^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\||u|_p}{\|u\| + \lambda_k^\beta |u|_p} \geq \frac{|u|_p^p}{\|u\|^2}. \quad (3.22)$$

Lembrando que

$$F(x, t) \leq \frac{\lambda_1}{4}|t|^2 + D_p|t|^p, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R},$$

podemos usar a desigualdade de Poincaré e (3.22) para obter que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\lambda_1}{4}|u|_2^2 - D_p|u|_p^p \\ &\geq \frac{\|u\|^2}{4} - D_p|u|_p^p \\ &= \|u\|^2 \left(\frac{1}{4} - D_p \frac{|u|_p^p}{\|u\|^2} \right) \\ &\geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{4} - D_p \rho \right). \end{aligned}$$

Em seguida, tomando $\rho = 1/8D_p$ temos que

$$I(u) \geq \frac{\|u\|^2}{8}.$$

Por fim, lembrando que

$$T_1 = \min \left\{ \lambda_k^{(1-\alpha)(p-2)}, \lambda_k^{(1-\alpha)} \right\} \quad \text{e} \quad T_2 = \min \left\{ \frac{1}{64D_p^2}, (8D_p)^{-1/(p-2)} \right\},$$

podemos usar o Lema 3.6 e a condição (B3) para concluir que

$$I(u) \geq \frac{1}{8}(\Lambda_p^*)^2 T_1 T_2 \geq \frac{c_0 |\Omega|}{2}.$$

□

Lema 3.8. *Suponha que as condições (B0) e (B1) sejam válidas e f satisfaz (3.1) com*

$$\lambda_k < \beta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Se $\beta_+(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$ ou $\beta_-(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$, então o funcional I satisfaz a condição de Cerami.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cerami para o funcional I , isto é,

$$I(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

Como já visto anteriormente, devido ao fato do gradiente de I ser da forma $\text{Id} - J$ com J sendo um operador compacto, é suficiente provarmos que a sequência (u_n) é limitada. Usando um argumento de contradição, vamos supor que (u_n) não seja limitada. Logo, a menos de subsequência, podemos supor que $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Definindo

$$z_n := \frac{u_n}{\|u_n\|},$$

temos que (z_n) é uma sequência limitada em E , o que implica que, a menos de subsequência, devemos ter

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_n \rightharpoonup z, & \text{fracamente em } E, \\ z_n \rightarrow z, & \text{em } L^p(\Omega) \text{ para } p \in (2, 2^*), \\ z_n(x) \rightarrow z(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |z_n(x)| \leq \Psi_r(x) & \text{q.t.p. em } \Omega \text{ com } r \in (2, 2^*) \text{ e } \Psi_r \in L^r(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Fixada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$o_n(1) = I'(u_n)\phi = \langle u_n, \phi \rangle - \int_{\Omega} f(x, u_n)\phi dx.$$

Dividindo a expressão acima por $\|u_n\|$, obtemos

$$o_n(1) = \langle z_n, \phi \rangle - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \phi dx. \quad (3.24)$$

A convergência fraca em (3.23) implica que $\langle z_n, \phi \rangle \rightarrow \langle z, \phi \rangle$. Além disso, usando as limitações em (3.5) e em (3.23) segue que

$$\left| \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \phi \right| = \left| \frac{f(x, z_n \|u_n\|)}{z_n \|u_n\|} z_n \phi \right| \leq \Lambda_0 |z_n| |\phi|_{\infty} \leq \Lambda_0 \Psi_1(x) |\phi|_{\infty}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

com $\Lambda_0 \Psi_1 |\phi|_{\infty} \in L^1(\Omega)$. Escreva $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_0 \cup \Omega_+$, em que

$$\Omega_- := \{x \in \Omega : z(x) < 0\}, \quad \Omega_0 := \{x \in \Omega : z(x) = 0\}$$

e

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega : z(x) > 0\}.$$

Lembremos ainda que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, t)}{t} = \beta_+(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{f(x, t)}{t} = \beta_-(x).$$

Note que, se $x \in \Omega_+$, então $z_n(x)\|u_n\| \rightarrow \infty$. Assim, os limites acima implicam que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, z_n(x)\|u_n\|)}{z_n(x)\|u_n\|} z_n \phi = \beta_+(x) z \phi, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, z_n(x)\|u_n\|)}{z_n(x)\|u_n\|} z_n \phi = \beta_-(x) z \phi, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-.$$

Por fim, se $x \in \Omega_0$, então a desigualdade (3.5) nos garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \phi = 0.$$

Assim, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e passar a expressão (3.24) ao limite para concluir que

$$\begin{aligned} \langle z, \phi \rangle &= \int_{\Omega_+} \beta_+(x) z \phi dx + \int_{\Omega_-} \beta_-(x) z \phi dx \\ &= \int_{\Omega} (\beta_+(x) z^+ - \beta_-(x) z^-) \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por densidade, a expressão acima vale para $\phi \in E$. Logo, a função $z \in E$ satisfaz, no sentido fraco, o problema

$$\begin{cases} -\Delta z = \beta_+(x) z^+ - \beta_-(x) z^-, & \text{em } \Omega, \\ z = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que

$$o_n(1) = \frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} - \int_{\Omega} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} dx. \quad (3.26)$$

Usando as limitações (3.5) e (3.23) segue que

$$\left| \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} \right| = \left| \frac{F(x, z_n\|u_n\|)}{z_n^2\|u_n\|^2} z_n^2 \right| \leq \frac{\Lambda_0}{2} |z_n|^2 \leq \frac{\Lambda_0}{2} \Psi_2(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

com $\frac{\Lambda_0}{2} \Psi_2 \in L^1(\Omega)$. Usando a regra de L'Hôpital temos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{2F(x, t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} = \beta_{\pm}(x).$$

Desse modo, podemos proceder como acima para obter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2F(x, z_n \|u_n\|)}{z_n^2 \|z_n\|^2} z_n^2 = \frac{1}{2} \beta_+(x) z^2, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} \beta_-(x) z^2, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} = 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_0.$$

Logo, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e passar a expressão (3.26) ao limite para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_+} \beta_+(x) z^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_-} \beta_-(x) z^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\beta_+(x)(z^+)^2 + \beta_-(x)(z^-)^2) dx, \end{aligned}$$

o que mostra que $\int_{\Omega} \beta_+(z^+)^2 + \beta_-(z^-)^2 dx = 1$. Tomando $\phi = z$ em (3.25), segue que

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \int_{\Omega} (\beta_+ z^+ - \beta_- z^-)(z^+ - z^-) dx \\ &= \int_{\Omega} (\beta_+(z^+)^2 + \beta_-(z^-)^2) dx = 1, \end{aligned}$$

e isso implica que $z \neq 0$.

Defina

$$q(x) := \begin{cases} \beta_+(x), & \text{se } z(x) \geq 0, \\ \beta_-(x), & \text{se } z(x) < 0. \end{cases}$$

Para $z \in E$, escrevemos $z = v + w$ com $v \in V_k$ e $w \in V_k^\perp$. Logo z satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta z = q(x)z, & \text{em } \Omega, \\ z = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que a formulação variacional desse problema é dada por

$$\langle z, \phi \rangle = \int_{\Omega} q(x) z \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tomando $\phi = v - w$ na expressão acima, obtemos que

$$\|v\|^2 - \|w\|^2 = \int_{\Omega} q(x) v^2 dx - \int_{\Omega} q(x) w^2 dx.$$

Usando a igualdade acima, a definição de q e as desigualdades variacionais em V_k e V_k^\perp , segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|w\|^2 - \lambda_{k+1}|w|_2^2 \\ &\leq \|w\|^2 - \int_{\Omega} q(x)w^2 dx \\ &= \|v\|^2 - \int_{\Omega} q(x)v^2 dx \\ &\leq \|v\|^2 - \lambda_k|v|_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\int_{\Omega} q(x)v^2 dx = \int_{\Omega} \lambda_k v^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} q(x)w^2 dx = \int_{\Omega} \lambda_{k+1} w^2 dx.$$

Assim, temos que $v = 0$, pois se $v \neq 0$, então $q(x) = \lambda_k$, o que é um absurdo com o fato de que $\beta_{\pm}(x) > \lambda_k$ para todo $x \in \Omega$. Por outro lado, como $z \neq 0$ temos que $w \neq 0$. Logo

$$0 \leq \int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - q(x))(z^+)^2 dx = \int_{\Omega} (q(x) - \lambda_{k+1})(z^-)^2 dx \leq 0,$$

o que mostra que

$$\int_{\Omega} (q(x) - \lambda_{k+1})(z^+)^2 dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} (q(x) - \lambda_{k+1})(z^-)^2 dx = 0. \quad (3.27)$$

Como $q(x) < \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$, segue que $z^+ = 0$ em Ω . Dessa forma, $z = -z^-$ satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta z = \beta_-(x)z, & \text{em } \Omega, \\ z = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que $\beta_-(x) \leq \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega$, temos que se $\beta_-(x) = \lambda_{k+1}$ em Ω , então z é uma autofunção com sinal definido associada ao autovalor λ_{k+1} , o que não pode acontecer. Por outro lado, se $\beta_-(x) < \lambda_{k+1}$ em Ω , então segue de (3.27) que $z^- = 0$, o que implica que $z = 0$, o que é um absurdo. Logo, (u_n) é limitada e portanto o funcional I satisfaz a condição de Cerami. \square

A seguir, apresentamos os conjuntos A e B^* para os quais aplicaremos o Teorema A'. Seja

$$A := \{u = v + s\varphi_k : v \in V_{k-1}, s \geq 0, \|u\| = R\} \cup [V_{k-1} \cap \overline{B_R(0)}],$$

em que φ_k é uma autofunção normalizada associada ao autovalor λ_k . Escolhendo

$$a_\star > \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) + 2,$$

definimos

$$B^\star := B \cap I^{a_\star},$$

em que

$$B := \left\{ u \in V_{k-1}^\perp : \frac{|u|_p^p}{\|u\|^2} + \frac{\|u\| |u|_p}{\|u\| + \lambda_k^\beta |u|_p} = \rho \right\},$$

com $\rho < R$. Pelo Lema 1.6, temos que A enlaça o conjunto B . Nos Lemas 2.3 e 2.4 trocamos $\|\cdot\|_\star$ por $|\cdot|_p$. Então, pelo Lema 2.4, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\delta_1 := \text{dist}(B^\star, \mathcal{P}) > 0.$$

Estamos prontos para a

Prova do Teorema 3.1. Primeiramente, observe que o Lema 3.2 implica na condição (A1) do Teorema A'. Em seguida, vamos verificar que a condição (A2) é satisfeita. De fato, suponha que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que

$$I(u) \leq a \quad \text{e} \quad |u|_p \leq b.$$

Usando (3.18) e a imersão $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, com $2 < p < 2^*$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= 2I(u) + 2 \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\leq 2a + 2 \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda_1}{4} |u|^2 + D_p |u|^p \right) dx \\ &\leq 2a + \tilde{c} |u|_p^2 + \tilde{D}_p |u|_p^p \\ &\leq 2a + \tilde{d} b^2 + \tilde{D}_p b^p = c(a, b), \end{aligned}$$

o que mostra que (A2) é satisfeita.

No que segue, vamos mostrar que

$$\sup_{u \in A} I(u) \leq \frac{c_0 |\Omega|}{2},$$

em que $c_0 > 0$ é dado em (B2). De fato, se $u = s\varphi_k + v \in A$ com $v \in V_{k-1}$, $s \geq 0$ e

$\|u\| = R$, então, como $u \in V_k$, segue do Lema 3.3 que

$$I(u) \leq \frac{c_0|\Omega|}{2}.$$

Por outro lado, se $u \in V_{k-1} \cap \overline{B_R(0)} \subset V_{k-1}$, então a desigualdade acima ainda é válida, de acordo com o Lema 3.4. Logo,

$$a_0 := \sup_{u \in A} I(u) \leq \frac{c_0|\Omega|}{2}.$$

Lembrando que $B^* = B \cap I^{a_*} \subset B$, o Lema 3.7 garante que

$$b_0^* := \inf_{u \in B^*} I(u) \geq \inf_{u \in B} I(u) \geq \frac{c_0|\Omega|}{2}.$$

Logo,

$$a_0 = \sup_{u \in A} I(u) \leq b_0^* = \inf_{u \in B^*} I(u).$$

Por fim, o Lema 3.8 nos garante que o funcional I satisfaz a condição de Cerami. Dessa forma, todas as condições do Teorema A' são satisfeitas. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ temos que existe $u \in E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})$ tal que

$$I'(u) = 0 \quad \text{e} \quad I(u) \in \left[b_0^* - \varepsilon, \sup_{(t,u) \in [0,1] \times A} I((1-t)u) + \varepsilon \right],$$

o que implica que u é um ponto crítico do funcional I que muda de sinal, e portanto o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

3.2 Um problema ressonante

Nessa seção vamos provar o Teorema 3.2. Considere os conjuntos A e B^* como na prova do Teorema 3.1. Observe que a condição (A1) imposta pelo Teorema A' é satisfeita pelo Lema 3.2 e a condição (A2) segue dos mesmos argumentos apresentados anteriormente. Além disso, os Lemas 3.3 e 3.4 garantem que as condições geométricas para o conjunto A são satisfeitas, e o Lema 3.7 garante que a condição geométrica para o conjunto B^* é satisfeita. Para concluir a prova do teorema, resta provar que o funcional I satisfaz a condição de Cerami. Para tanto, seja $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cerami para o funcional I , isto é,

$$I(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|I'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

Desse modo, $I'(u_n)u_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e portanto

$$2c + o_n(1) = 2I(u_n) - I'(u_n)u_n = \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]dx. \quad (3.28)$$

Usando a limitação em (3.5), temos que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 = c + o_n(1) + \int_{\Omega} F(x, u_n)dx \leq c + o_n(1) + \int_{\Omega} \frac{\Lambda_0}{2}u_n^2 dx. \quad (3.29)$$

Suponha, por contradição, que (u_n) não seja limitada. Logo, a menos de subsequência, temos que $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Definindo

$$z_n := \frac{u_n}{\|u_n\|},$$

temos que (z_n) é uma sequência limitada em E . Logo, a menos de subsequência, podemos supor que z_n converge fraco para z em E , forte em $L^2(\Omega)$ e q.t.p. em Ω . Assim, dividindo a expressão (3.29) por $\|u_n\|^2$ obtemos que

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2} dx = \int_{\Omega} z^2 dx,$$

o que implica que $z \neq 0$. Dessa forma, definindo o conjunto

$$\tilde{\Omega} := \{x \in \Omega : z(x) \neq 0\},$$

temos que $\tilde{\Omega}$ possui medida positiva. Além disso

$$|u_n(x)|^2 = |z_n(x)|^2 \|u_n(x)\|^2 \rightarrow \infty, \quad \text{q.t.p. em } \tilde{\Omega}.$$

Podemos usar a condição (B4) para garantir que, dado $M > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$f(x, t)t - 2F(x, t) > M, \quad \forall x \in \Omega, |t| > R.$$

Usando a continuidade de $f(x, t)t - 2F(x, t)$ em $\Omega \times [-R, R]$, segue que existe $C > 0$ tal que

$$f(x, t)t - 2F(x, t) > -C, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]dx &= \\ &= \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]dx + \int_{\tilde{\Omega}} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)]dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq - \int_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}} C dx + \int_{\tilde{\Omega}} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx \\
&= -C|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| + \int_{\tilde{\Omega}} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx.
\end{aligned}$$

Por fim, usando o Lema de Fatou e a condição (B4), temos que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx &\geq \\
&\geq -C|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\Omega}} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx \\
&\geq -C|\Omega \setminus \tilde{\Omega}| + \int_{\tilde{\Omega}} \liminf_{n \rightarrow \infty} [f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n)] dx \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição com (3.28). Logo, (u_n) é limitada, e portanto I satisfaz a condição de Cerami. Dessa forma, todas as condições do Teorema A' são satisfeitas e portanto existe uma solução u que muda de sinal para o problema (P).

3.3 Problema duplamente ressonante

Nessa seção vamos provar o Teorema 3.3. Inicialmente, observe que a condição (A1) é satisfeita pelo Lema 3.2 e a condição (A2) é verificada de maneira análoga à apresentada na prova do Teorema 3.1. Além disso, considerando os conjuntos A e B^* como definidos na prova do Teorema 3.1, temos que a condição geométrica do conjunto B^* para o Teorema A' é satisfeita pelo Lema 3.7 e a condição de Cerami é satisfeita usando um argumento idêntico ao apresentado na prova do Teorema 3.2. Assim, para aplicarmos o Teorema A', resta mostrar que as condições geométricas do conjunto A são satisfeitas para o Teorema A'. Para isso, precisamos da seguinte

Afirmção 1. $I(v) \rightarrow -\infty$ quando $\|v\| \rightarrow \infty$ para todo $v \in V_k$.

Supondo que a afirmação acima é verdadeira, podemos proceder como na prova dos Teoremas 3.1 e 3.2 para garantir que todas as condições do Teorema A' são satisfeitas e, conseqüentemente, podemos concluir que o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Prova da Afirmção 1. Uma vez que $L(x) \geq \lambda_k$ com $L \not\equiv \lambda_k$, podemos usar o Lema 3.17 do Apêndice para garantir que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} L(x)v^2 dx \leq -\delta\|v\|^2, \quad \forall v \in V_k. \quad (3.30)$$

Além disso, segue de (3.2) que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$L(x) - \varepsilon \leq \frac{2F(x, t)}{t^2}, \quad \forall x \in \Omega, |t| > R,$$

ou seja,

$$L(x) \frac{t^2}{2} - \varepsilon \frac{t^2}{2} \leq F(x, t), \quad \forall x \in \Omega, |t| > R.$$

Em seguida, podemos usar a continuidade de F em $\bar{\Omega} \times [-R, R]$ para concluir que

$$L(x) \frac{t^2}{2} - F(x, t) \leq \varepsilon \frac{t^2}{2} + C, \quad \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}$$

Conseqüentemente, podemos usar a expressão acima, (3.30) e a desigualdade de Poincaré para obter que

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} L(x) v^2 dx + \int_{\Omega} \left(L(x) \frac{v^2}{2} - F(x, v) \right) dx \\ &\leq -\frac{\delta}{2} \|v\|^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon v^2 + C \right) dx \\ &\leq \|v\|^2 \left(-\frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \right) + C|\Omega|. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon < \delta\lambda_1$, concluimos que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty, v \in V_k} I(v) = -\infty.$$

3.4 Problemas com não linearidade do tipo salto no infinito

Nessa seção apresentamos as provas dos Teoremas 3.4, 3.5 e 3.6. Para isso alguns lemas são necessários.

Lema 3.9. *Para cada par de números a_+ e b_- no intervalo $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$, existem $a_- < \lambda_k$ e $b_+ > \lambda_{k+1}$ tais que*

$$\|v\|^2 < \int_{\Omega} [a_+(v^+)^2 + a_-(v^-)^2] dx, \quad \forall v \in V_k \setminus \{0\} \quad (3.31)$$

e

$$\|w\|^2 > \int_{\Omega} [b_+(w^+)^2 + b_-(w^-)^2] dx, \quad \forall w \in V_k^\perp \setminus \{0\}. \quad (3.32)$$

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que vale (3.31). Para iso, defina

$$\Sigma := \{v \in V_k : |v|_2 = 1\}$$

e

$$g(v) := \|v\|^2 - \int_{\Omega} a_+(v^+)^2 dx - \int_{\Omega} \lambda_k (v^-)^2 dx.$$

Como $\dim V_k < \infty$, segue que o valor

$$m_0 := \max_{v \in \Sigma} g(v)$$

é atingido em algum ponto $z \in \Sigma$. Dessa forma, usamos a desigualdade variacional em V_k e o fato que $\lambda_k < a_+$ para garantir que

$$\begin{aligned} m_0 &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} a_+(z^+)^2 dx - \int_{\Omega} \lambda_k (z^-)^2 dx \\ &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_k z^2 + \int_{\Omega} (\lambda_k - a_+)(z^+)^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Afirmamos que $m_0 < 0$. De fato, como $z \neq 0$, note que se

$$\|z\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_k z^2 = 0,$$

então z é uma autofunção associada a λ_k . Lembrando que $\lambda_k > \lambda_1$, concluímos que z muda de sinal. Logo, $z^+ \not\equiv 0$ e usando o fato que $a_+ > \lambda_k$ segue que

$$\int_{\Omega} (\lambda_k - a_+)(z^+)^2 dx < 0.$$

Por outro lado, se

$$\int_{\Omega} (\lambda_k - a_+)(z^+)^2 dx = 0,$$

então temos que $z^+ \equiv 0$, o que mostra que z não muda de sinal, e portanto

$$\|z\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_k z^2 < 0.$$

Essas observações mostram que $m_0 < 0$. Assim, para qualquer $v \in V_k \setminus \{0\}$ podemos aplicar a função g em $v/|v|_2$ e obter que

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} [a_+(v^+)^2 + a_-(v^-)^2] dx \leq m_0 |v|_2^2 + \int_{\Omega} (\lambda_k - a_-)(v^-)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= (m_0 + \lambda_k - a_-)|v|_2^2 - (\lambda_k - a_-)|v^+|_2^2 \\
&\leq (m_0 + \lambda_k - a_-)|v|_2^2 \\
&< 0,
\end{aligned}$$

desde que $\lambda_k + m_0 < a_- < \lambda_k$. Tal escolha é possível pois $m_0 < 0$.

Para provar (3.32) defina

$$\tilde{\Sigma} := \{w \in V_k^\perp : |w|_2 = 1\}$$

e

$$d_0 := \inf_{w \in \tilde{\Sigma}} \left(\|w\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_{k+1}(w^+)^2 dx - \int_{\Omega} b_-(w^-)^2 dx \right).$$

Usando a desigualdade variacional em V_k^\perp , temos que para qualquer $w \in V_k^\perp$

$$\|w\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_{k+1}(w^+)^2 dx - \int_{\Omega} b_-(w^-)^2 dx = \|w\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_{k+1}(w)^2 dx + \int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - b_-)(w^-)^2 dx \geq 0,$$

o que implica que $d_0 \geq 0$. Note ainda que, para mostrarmos (3.32), é suficiente verificar que $d_0 > 0$. De fato, se $d_0 > 0$, então para qualquer $w \in V_k^\perp \setminus \{0\}$ temos que

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 - \int_{\Omega} [b_+(w^+)^2 + b_-(w^-)^2] dx &\geq d_0|w|_2^2 + (\lambda_{k+1} - b_+)|w^-|^2 \\
&= (d_0 + \lambda_{k+1} - b_+)|w|_2^2 - (\lambda_{k+1} - b_+)|v^+|_2^2 \\
&\geq (d_0 + \lambda_{k+1} - b_+)|w|_2^2 > 0,
\end{aligned}$$

desde que $\lambda_{k+1} < b_+ < \lambda_{k+1} + d_0$. Tal escolha é sempre possível se $d_0 > 0$. Para mostrar que $d_0 > 0$, vamos supor, por contradição, que exista uma sequência $(w_n) \subset V_k^\perp$ com $|w_n|_2 = 1$ tal que

$$d_n := \|w_n\|^2 - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} w_n^2 dx + \int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - b_-)(w_n^-)^2 dx \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\|w_n\|^2 \leq d_n + \lambda_{k+1},$$

o que mostra que (w_n) é uma sequência limitada em E . Assim, a menos de subsequência, podemos supor que (w_n) converge fraco para w em E e forte em $L^2(\Omega)$. Consequentemente temos que $|w|_2 = 1$. Em seguida, usando o fato de que a função $\|\cdot\|^2$ é fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente, a convergência forte em $L^2(\Omega)$ e $w_n^- \rightarrow w^-$

em $L^2(\Omega)$, segue que

$$0 \leq \|w\|^2 - \lambda_{k+1} \int_{\Omega} w^2 dx + \int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - b_-)(w^-)^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_n = 0. \quad (3.33)$$

Por fim, usando a desigualdade variacional em V_k^\perp temos que

$$\int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - b_-)(w^-)^2 dx \leq 0.$$

Uma vez que $b_- < \lambda_{k+1}$ segue que

$$\int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - b_-)(w^-)^2 dx = 0,$$

o que implica que $w^- \equiv 0$. Dessa forma, podemos usar essa última observação e novamente a desigualdade variacional em V_k^\perp para garantir que a expressão (3.33) se reduz a

$$\|w\|^2 = \int_{\Omega} \lambda_{k+1} w^2 dx.$$

Lembrando que $|w|_2 = 1$, ou seja, $w \not\equiv 0$, podemos usar a igualdade acima para garantir que w é uma autofunção não negativa associada a λ_{k+1} , o que é um absurdo visto que as autofunções associadas ao autovalor λ_{k+1} mudam de sinal. \square

Lema 3.10. *Suponha que f satisfaz (3.3). Suponha ainda que para cada par de números a_+ e b_- no intervalo $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ existam $a_- < \lambda_k$ e $b_+ > \lambda_{k+1}$ tais que*

$$a_{\pm} \leq \theta_{\pm}(x) \leq \vartheta_{\pm}(x) \leq b_{\pm}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Então o funcional I satisfaz a condição de Cerami.

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cerami do funcional I . É suficiente mostrarmos que (u_n) é limitada. Argumentando por contradição vamos supor que, a menos de subsequência, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Definindo

$$z_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

temos que (z_n) é uma sequência limitada em E . Logo, a menos de subsequência, podemos supor que

$$\begin{cases} z_n \rightharpoonup z, & \text{fracamente em } E, \\ z_n \rightarrow z, & \text{em } L^2(\Omega), \\ z_n(x) \rightarrow z(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |z_n(x)| \leq \Psi_2(x) & \text{q.t.p. em } \Omega \text{ e } \Psi_2 \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.34)$$

Definindo

$$\Phi_n(x) := \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \quad (3.35)$$

podemos usar (3.5) para garantir que, para $x \in \Omega$ fixado, temos que

$$|\Phi(x, u_n)| \leq \Lambda_0 |z_n| \leq \Lambda_0 \Psi_2(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \quad (3.36)$$

e isso mostra que $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, podemos supor que

$$\Phi_n \rightharpoonup \Phi, \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega). \quad (3.37)$$

Agora, lembremos que

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} = \theta_{\pm}(x) \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x, t)}{t} = \vartheta_{\pm}(x).$$

Assim, se $x \in \Omega_+ = \{x \in \Omega : z(x) > 0\}$, podemos usar (3.34) para garantir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, z_n \|u_n\|)}{z_n \|u_n\|} z_n = z(x) \theta_+(x)$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, z_n \|u_n\|)}{z_n \|u_n\|} z_n = z(x) \vartheta_+(x).$$

Observe que, como

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = z(x) \theta_+(x)$$

uniformemente para $x \in \Omega_+$, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\Phi_n(x) \geq z(x) \theta_+(x) - \varepsilon, \quad \text{sempre que } n \geq n_0.$$

Uma vez que $\Phi_n \rightharpoonup \Phi$, podemos usar o Lema 3.18 do Apêndice para garantir que

$$\Phi(x) \geq z(x) \theta_+(x) - \varepsilon.$$

Logo,

$$z(x) \theta_+(x) - \varepsilon \leq \Phi(x) \leq z(x) \vartheta_+(x) + \varepsilon, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que

$$z(x) \theta_+(x) \leq \Phi(x) \leq z(x) \vartheta_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+. \quad (3.38)$$

Por outro lado, se $x \in \Omega_- = \{x \in \Omega : z(x) < 0\}$, então usamos novamente (3.36) para

garantir que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, z_n \|u_n\|)}{z_n \|u_n\|} z_n = - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, z_n \|u_n\|)}{z_n \|u_n\|} (-z_n) = z(x) \vartheta_-(x).$$

Logo,

$$z(x) \vartheta_-(x) \leq \Phi(x) \leq z(x) \theta_-(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-. \quad (3.39)$$

Além disso, note que se $x \in \Omega_0 = \{x \in \Omega : z(x) = 0\}$, então segue de (3.34) e (3.36) que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = 0. \quad (3.40)$$

Definindo

$$q(x) := \begin{cases} \frac{\Phi(x)}{z(x)}, & \text{se } x \in \Omega_- \cup \Omega_+, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_0, \end{cases}$$

podemos concluir que

$$\theta_+(x) \leq q(x) \leq \vartheta_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+ \quad (3.41)$$

e

$$\theta_-(x) \leq q(x) \leq \vartheta_-(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-. \quad (3.42)$$

Fixada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$o_n(1) = I'(u_n)\phi = \langle u_n, \phi \rangle - \int_{\Omega} f(x, u_n)\phi dx. \quad (3.43)$$

Dividindo a expressão acima por $\|u_n\|$ obtemos

$$o_n(1) = \langle z_n, \phi \rangle - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} \phi dx. \quad (3.44)$$

Usando a convergência fraca em (3.34) temos que $\langle z_n, \phi \rangle \rightarrow \langle z, \phi \rangle$. Note ainda que,

$$\Phi_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega_0$$

e (Φ_n) é limitada em $L^2(\Omega_0)$. Assim, podemos aplicar o Lema 3.19 do Apêndice para garantir que

$$\Phi_n \rightharpoonup 0, \quad \text{em } L^2(\Omega_0).$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \Phi_n(x)\phi dx = \int_{\Omega_- \cup \Omega_+} \Phi_n(x)\phi dx + \int_{\Omega_0} \Phi_n(x)\phi dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \Phi_n(x) \phi \chi_{\Omega_- \cup \Omega_+} dx + \int_{\Omega_0} \Phi_n(x) \phi dx \\
&\rightarrow \int_{\Omega} \Phi(x) \phi dx,
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Passando a expressão (3.44) ao limite, obtemos que

$$0 = \langle z, \phi \rangle - \int_{\Omega} \Phi(x) \phi dx = \langle z, \phi \rangle - \int_{\Omega} q(x) z \phi dx. \quad (3.45)$$

Assim, $z \in E$ é solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta z = q(x)z, & \text{em } \Omega, \\ z = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Escrevendo $z = v + w$ com $v \in V_k$ e $w \in V_k^\perp$, podemos tomar $\phi = v - w$ em (3.45) para garantir que

$$\|v\|^2 - \|w\|^2 = \int_{\Omega} q(x) v^2 dx - \int_{\Omega} q(x) w^2 dx. \quad (3.46)$$

Lembrando que

$$a_{\pm} \leq \theta_{\pm}(x) \leq \vartheta_{\pm}(x) \leq b_{\pm}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

podemos usar o Lema 3.9 para obter que

$$\|v\|^2 < \int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx, \quad \forall v \in V_k \setminus \{0\} \quad (3.47)$$

e

$$\|w\|^2 > \int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx, \quad \forall w \in V_k^\perp \setminus \{0\}. \quad (3.48)$$

Observe que usando (3.41), (3.42) e (3.46)-(3.48), temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx - \|v\|^2 \\
&\leq \int_{\Omega} q(x) v^2 dx - \|v\|^2 \\
&= \int_{\Omega} q(x) w^2 dx - \|w\|^2 \\
&\leq \int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx - \|w\|^2 \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx = \|v\|^2 \quad (3.49)$$

e

$$\int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx = \|w\|^2. \quad (3.50)$$

Dessa forma, podemos usar as expressões (3.47) e (3.48) mais uma vez, para obter que $v = w = 0$, e isso implica que $z = 0$. Por fim, note que tomando $\phi = u_n/\|u_n\|^2$ em (3.43) segue que

$$o_n(1) = I'(u_n) \frac{u_n}{\|u_n\|^2} = 1 - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n(x) dx = 1 - \int_{\Omega} \Phi_n(x) z_n(x) dx. \quad (3.51)$$

Como $\Phi_n \rightarrow \Phi$ em $L^2(\Omega)$ e $z_n \rightarrow 0$ converge forte em $L^2(\Omega)$, então temos que

$$\int_{\Omega} \Phi_n z_n dx \rightarrow \int_{\Omega} \Phi z dx = 0.$$

Passando a expressão (3.51) ao limite obtemos que $0 = 1$. Essa contradição mostra que (u_n) é limitada, e portanto o funcional I satisfaz a condição de Cerami. \square

Agora, estamos prontos para obter a nossa

Prova do Teorema 3.4. Inicialmente, observe que a condição (A1) segue do Lema 3.2 e a condição (A2) é verificada de maneira idêntica à apresentada na prova do Teorema 3.1. No que segue, vamos verificar que as condições (I_1) , (I_2) e (I_3) do Teorema B' são satisfeitas para os conjuntos $B^* := B \cap I^{a^*}$, $V := V_{k-1}$ e $W := V^\perp$. Para verificar (I_1) , note que pelo Lema 3.4 temos que

$$I(v) \leq \frac{c_0|\Omega|}{2}, \quad \forall v \in V_{k-1},$$

e tomando $\alpha = c_0|\Omega|/2$ mostramos que a condição (I_1) é satisfeita. Observe que a condição (B5) implica na condição (B2). Logo, pelo Lema 3.7 temos que

$$I(w) \geq \frac{c_0|\Omega|}{2}, \quad \forall w \in B.$$

Como $B^* \subset B$, segue que

$$I(w) \geq \frac{c_0|\Omega|}{2}, \quad \forall w \in B^*,$$

o que mostra que a condição (I_2) é satisfeita. Para verificar a condição (I_3) , considere $u = s\varphi_k + v$, em que $v \in V_{k-1}$ e $s \geq 0$. Usando a condição (B5) temos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\ &\leq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\max \{ \lambda_{k-1} u^2, \theta_+(x)(u^+)^2 + \theta_-(x)(u^-)^2 \} - c_0) dx. \end{aligned}$$

Considerando u como definido anteriormente, temos que $u \in V_k$. Assim, podemos usar a desigualdade (3.31) no Lema 3.9 para garantir que

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} [\theta_+(x)(u^+)^2 + \theta_-(x)(u^-)^2] dx + \frac{c_0|\Omega|}{2} \\ &\leq \frac{c_0|\Omega|}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a condição (I_3) é satisfeita. Pelo Lema 3.10, o funcional I satisfaz a condição de Cerami. Assim, todas as condições do Teorema B' são satisfeitas. Como consequência, existe uma sequência $(u_n) \subset E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})$ tal que

$$I'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad I(u_n) \in \left[\frac{c_0|\Omega|}{4}, c_0|\Omega| \right].$$

Aplicando o Lema 3.10 temos que (u_n) possui uma subsequência convergente para u . Denotando ainda por (u_n) essa subsequência convergente, temos que

$$I'(u) = 0 \quad \text{e} \quad I(u) \in \left[\frac{c_0|\Omega|}{4}, c_0|\Omega| \right].$$

Afirmamos que u muda de sinal. De fato, note que

$$o_n(1) = I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx.$$

Usando a limitação em (3.4), segue que para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\|u_n^+\|^2 = \int_{\Omega} f(x, u_n^+)u_n^+ dx + o_n(1) \leq \varepsilon|u_n^+|_2^2 + C|u_n^+|_p^p + o_n(1).$$

No que segue, usamos a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com $2 < p < 2^*$, para concluir que

$$\|u_n^+\|^2 \leq \varepsilon D \|u_n^+\|^2 + C_1 \|u_n^+\|^p + o_n(1).$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ de tal modo que $\varepsilon D < 1$, segue que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < \delta_0 \leq \|u_n^+\|^{p-2} + o_n(1).$$

Usando o mesmo argumento acima, mostramos que existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|u_n^-\|^{p-2} \geq \delta_1 > 0$. Como $u_n^{\pm} \rightarrow u^{\pm}$, concluímos que o limite u da sequência u_n muda de sinal, e portanto o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Lema 3.11. *Suponha que f satisfaz (3.3). Suponha ainda que as condições (B6) – (B9)*

sejam válidas. Então o funcional I satisfaz a condição de Cerami.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cerami para o funcional I . Suponha, por contradição, que (u_n) não seja limitada. Logo, a menos de subsequência, temos que $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Definindo

$$z_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

temos que (z_n) é uma sequência limitada em E . Logo, a menos de subsequência, podemos supor que

$$\begin{cases} z_n \rightharpoonup z, & \text{fracamente em } E, \\ z_n \rightarrow z, & \text{em } L^2(\Omega), \\ z_n(x) \rightarrow z(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |z_n(x)| \leq \Psi_2(x) & \text{q.t.p. em } \Omega \text{ e } \Psi_2 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Definindo

$$\Phi_n(x) = \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|}$$

segue que $\Phi_n \rightharpoonup \Phi$ em $L^2(\Omega)$. Podemos proceder como na prova do Lema 3.10 para concluir que

$$z(x)\theta_+(x) \leq \Phi(x) \leq z(x)\vartheta_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+$$

e

$$z(x)\vartheta_-(x) \leq \Phi(x) \leq z(x)\theta_-(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-.$$

Definindo

$$q(x) = \begin{cases} \frac{\Phi(x)}{z(x)}, & \text{se } x \in \Omega_- \cup \Omega_+, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_0, \end{cases}$$

podemos concluir que

$$\theta_+(x) \leq q(x) \leq \vartheta_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+$$

e

$$\theta_-(x) \leq q(x) \leq \vartheta_-(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-.$$

Fixada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$o_n(1) = I'(u_n)\phi = \langle u_n, \phi \rangle - \int_{\Omega} f(x, u_n)\phi dx. \quad (3.52)$$

Podemos proceder como na prova do Lema 3.10 para garantir que

$$0 = \langle z, \phi \rangle - \int_{\Omega} \Phi(x) \phi dx = \langle z, \phi \rangle - \int_{\Omega} q(x) z \phi dx.$$

Escrevendo $z = v + w$ com $v \in V_k$ e $w \in V_k^{\perp}$, podemos tomar $\phi = v - w$ na expressão acima e concluir que

$$\|v\|^2 - \|w\|^2 = \int_{\Omega} q(x) v^2 dx - \int_{\Omega} q(x) w^2 dx. \quad (3.53)$$

Usando as condições (B6), (B7) e a desigualdade variacional em V_k^{\perp} temos que

$$\|v\|^2 \leq \int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx, \quad \forall v \in V_k$$

e

$$\|w\|^2 \geq \lambda_{k+1} |w|_2^2 \geq \int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx, \quad \forall w \in V_k^{\perp}.$$

Mais uma vez, podemos proceder como na prova do Lema 3.10 para concluir que

$$\int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx = \|v\|^2$$

e

$$\int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx = \|w\|^2.$$

Usando a condição (B7) e a desigualdade variacional em V_k^{\perp} temos que

$$\lambda_{k+1} |w|_2^2 \geq \int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx = \|w\|^2 \geq \lambda_{k+1} |w|_2^2.$$

Observe que, se $w \neq 0$, então w é uma autofunção associada a λ_{k+1} e, podemos usar a expressão anterior para obter que

$$\int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - \vartheta_+(x))(w^+)^2 dx = \int_{\Omega} (\vartheta_-(x) - \lambda_{k+1})(w^-)^2 dx.$$

Logo, temos que se $w(x) > 0$, então $\vartheta_+(x) = \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega_+$ e se $w(x) < 0$, então $\vartheta_-(x) = \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega_-$. Dessa forma, temos que

$$-\Delta w = \lambda_{k+1} w = \vartheta_+(x) w^+ - \vartheta_-(x) w^-,$$

o que contraria a condição (B8). Portanto, devemos ter que $w = 0$. Logo, a expressão

(3.53) se reduz a

$$\int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx = \int_{\Omega} q(x)v^2 dx,$$

o que implica que $q(x) = \theta_+(x)$ se $v(x) > 0$ e $q(x) = \theta_-(x)$ se $v(x) < 0$. Dessa forma, temos que

$$-\Delta v = q(x)v = \theta_+(x)v^+ - \theta_-(x)v^-.$$

No entanto, usando a condição (B9) devemos ter que $v = 0$, o que implica portanto que $z = 0$. Por fim, tomando $\phi = u_n/\|u_n\|^2$ em (3.52) segue que

$$o_n(1) = 1 - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n(x) dx = 1 - \int_{\Omega} \Phi_n(x) z_n(x) dx.$$

Como $\Phi_n \rightharpoonup \Phi$ em $L^2(\Omega)$ e $z_n \rightarrow 0$ converge forte em $L^2(\Omega)$, então passamos a expressão acima ao limite para obter que $0 = 1$. Essa contradição mostra que (u_n) é limitada, e portanto o funcional I satisfaz a condição de Cerami. \square

Lema 3.12. *Suponha que f satisfaz (3.3). Suponha ainda que as condições (B7)', (B8) e (B9)' sejam válidas. Então o funcional I satisfaz a condição de Cerami.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cerami para o funcional I . Suponha, por contradição, que (u_n) não seja limitada. Logo, a menos de subsequência, temos que $\|u_n\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Definindo

$$z_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

temos que (z_n) é uma sequência limitada em E . Logo, a menos de subsequência, podemos supor que

$$\begin{cases} z_n \rightharpoonup z, & \text{fracamente em } E, \\ z_n \rightarrow z, & \text{em } L^2(\Omega), \\ z_n(x) \rightarrow z(x), & \text{q.t.p. em } \Omega, \\ |z_n(x)| \leq \Psi_2(x) & \text{q.t.p. em } \Omega \text{ e } \Psi_2 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Definindo

$$\Phi_n(x) = \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|}$$

segue que $\Phi_n \rightharpoonup \Phi$ em $L^2(\Omega)$. Podemos proceder como na prova do Lema 3.10 para concluir que

$$z(x)\theta_+(x) \leq \Phi(x) \leq z(x)\vartheta_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+$$

e

$$z(x)\vartheta_-(x) \leq \Phi(x) \leq z(x)\theta_-(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-.$$

Definindo

$$q(x) = \begin{cases} \frac{\Phi(x)}{z(x)}, & \text{se } x \in \Omega_- \cup \Omega_+, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega_0, \end{cases}$$

podemos concluir que

$$\theta_+(x) \leq q(x) \leq \vartheta_+(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+$$

e

$$\theta_-(x) \leq q(x) \leq \vartheta_-(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega_-.$$

Fixada $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$o_n(1) = I'(u_n)\phi = \langle u_n, \phi \rangle - \int_{\Omega} f(x, u_n)\phi dx. \quad (3.54)$$

Podemos proceder como na prova do Lema 3.10 para garantir que

$$0 = \langle z, \phi \rangle - \int_{\Omega} \Phi(x)\phi dx = \langle z, \phi \rangle - \int_{\Omega} q(x)z\phi dx.$$

Escrevendo $z = v + w$ com $v \in V_k$ e $w \in V_k^\perp$, podemos tomar $\phi = v - w$ na expressão acima e concluir que

$$\|v\|^2 - \|w\|^2 = \int_{\Omega} q(x)v^2 dx - \int_{\Omega} q(x)w^2 dx.$$

Lembrando a condição (B7)', segue que

$$\lambda_k \leq \theta_{\pm}(x) \leq \vartheta_{\pm}(x) \leq \lambda_{k+1}, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Podemos usar as desigualdades variacionais em V_k e V_k^\perp para obter que

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &\leq \int_{\Omega} \lambda_k v^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda_k ((v^+)^2 + (v^-)^2) dx \\ &\leq \int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx, \quad \forall v \in V_k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &\geq \int_{\Omega} \lambda_{k+1} w^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \lambda_k ((w^+)^2 + (w^-)^2) dx \end{aligned}$$

$$\geq \int_{\Omega} [\vartheta_+(w^+)^2 + \vartheta_-(w^-)^2] dx, \quad \forall w \in V_k^\perp.$$

Mais uma vez, podemos proceder como na prova do Lema 3.10 para concluir que

$$\int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx = \|v\|^2$$

e

$$\int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx = \|w\|^2.$$

Usando a condição (B7)' e a desigualdade variacional em V_k^\perp temos que

$$\lambda_{k+1}|w|_2^2 \geq \int_{\Omega} [\vartheta_+(x)(w^+)^2 + \vartheta_-(x)(w^-)^2] dx = \|w\|^2 \geq \lambda_{k+1}|w|_2^2.$$

Observe que, se $w \neq 0$, então w é uma autofunção associada a λ_{k+1} e, podemos usar a expressão anterior para obter que

$$\int_{\Omega} (\lambda_{k+1} - \vartheta_+(x))(w^+)^2 dx = \int_{\Omega} (\vartheta_-(x) - \lambda_{k+1})(w^-)^2 dx.$$

Logo, temos que se $w(x) > 0$, então $\vartheta_+(x) = \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega_+$ e se $w(x) < 0$, então $\vartheta_-(x) = \lambda_{k+1}$ para todo $x \in \Omega_-$. Dessa forma, temos que

$$-\Delta w = \lambda_{k+1}w = \vartheta_+(x)w^+ - \vartheta_-(x)w^-,$$

o que contradiz a condição (B8). Portanto, devemos ter $w = 0$. Mais uma vez, podemos usar a condição (B7)' e a desigualdade variacional em V_k para garantir que

$$\lambda_k|v|_2^2 \leq \int_{\Omega} [\theta_+(x)(v^+)^2 + \theta_-(x)(v^-)^2] dx = \|v\|^2 \leq \lambda_k|v|_2^2.$$

Note que, se $v \neq 0$, então v é uma autofunção associada a λ_k e, podemos usar a expressão anterior para obter que

$$\int_{\Omega} (\lambda_k - \theta_+(x))(v^+)^2 dx = \int_{\Omega} (\theta_-(x) - \lambda_k)(v^-)^2 dx.$$

Consequentemente, temos que se $v(x) > 0$, então $\theta_+(x) = \lambda_k$ para todo $x \in \Omega_+$ e se $v(x) < 0$, então $\theta_-(x) = \lambda_k$ para todo $x \in \Omega_-$. Dessa forma, temos que

$$-\Delta v = \lambda_k v = \theta_+(x)v^+ - \theta_-(x)v^-,$$

o que contradiz a condição (B9)'. Logo, devemos ter $v = 0$, o que implica que $z = 0$. Por

fim, tomando $\phi = u_n/\|u_n\|^2$ em (3.54) segue que

$$o_n(1) = 1 - \int_{\Omega} \frac{f(x, u_n)}{\|u_n\|} z_n(x) dx = 1 - \int_{\Omega} \Phi_n(x) z_n(x) dx.$$

Como $\Phi_n \rightharpoonup \Phi$ em $L^2(\Omega)$ e $z_n \rightarrow 0$ converge forte em $L^2(\Omega)$, então passamos a expressão acima ao limite para obter que $0 = 1$. Essa contradição mostra que (u_n) é limitada, e portanto o funcional I satisfaz a condição de Cerami. \square

Prova dos Teoremas 3.5 e 3.6. Seguindo a prova do Teorema 3.4, temos que todas as condições do Teorema B' são verificadas. Como consequência, conseguimos uma sequência $(u_n) \subset E \setminus (-\mathcal{P} \cup \mathcal{P})$ tal que

$$I'(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad I(u_n) \in \left[\frac{c_0|\Omega|}{4}, c_0|\Omega| \right].$$

Aplicando os Lemas 3.11 e 3.12 temos que (u_n) possui uma subsequência convergente para u . Denotando ainda por (u_n) essa subsequência convergente, temos que

$$I'(u) = 0 \quad \text{e} \quad I(u) \in \left[\frac{c_0|\Omega|}{4}, c_0|\Omega| \right].$$

Procedendo como na prova do Teorema 3.4 mostramos que u muda de sinal. Portanto, o problema (P) possui uma solução que muda de sinal.

Apêndice

A seguir, apresentamos alguns resultados que facilitam a compreensão do trabalho desenvolvido nessa dissertação.

Lema 3.13. *Sejam $A, B \subset E$ conjuntos fechados não-vazios tais que $A \cap B = \emptyset$. Então a aplicação*

$$\vartheta(u) = \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)}$$

está bem definida e é localmente Lipschitz.

Demonstração. A fim de verificar que ϑ está bem definida, vamos mostrar que o seu denominador é sempre positivo. Suponha, por contradição, que $\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B) = 0$. Como $\text{dist}(u, A) = 0$ e A é um conjunto fechado, temos que $u \in A$, e analogamente, $u \in B$, o que é uma contradição. Logo ϑ está bem definida.

Observe agora que $0 \leq \vartheta \leq 1$, $\vartheta \equiv 1$ em B e $\vartheta \equiv 0$ em A . Além disso, note que dado um conjunto $C \subset E$, a função distância $u \mapsto \text{dist}(u, C)$, com $v \in E$, é Lipschitz. De fato, sejam $u, v \in E$. Para todo $w \in C$, usamos a desigualdade triangular para obter

$$\|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|.$$

Tomando o ínfimo em $w \in C$ dos dois lados da desigualdade, obtemos

$$\text{dist}(u, C) \leq \|u - v\| + \text{dist}(v, C),$$

ou seja,

$$\text{dist}(u, C) - \text{dist}(v, C) \leq \|u - v\|.$$

Analogamente, obtemos

$$\text{dist}(v, C) - \text{dist}(u, C) \leq \|u - v\|.$$

Logo,

$$|\text{dist}(u, C) - \text{dist}(v, C)| \leq \|u - v\|,$$

e isso mostra que a função distância é Lipschitz.

Agora, fixe $u \in E$. Como $\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B) > 0$ e a função distância é contínua, pois é lipschitziana, então existe uma vizinhança V_u de u tal que $\text{dist}(v, A) + \text{dist}(v, B) \geq \frac{1}{K_u} > 0$, para todo $v \in V_u$ e para alguma constante $K_u > 0$. Sendo assim, para quaisquer $v, w \in V_u$ obtemos

$$\begin{aligned} |\vartheta(v) - \vartheta(w)| &= \left| \frac{\text{dist}(v, A)}{\text{dist}(v, A) + \text{dist}(v, B)} - \frac{\text{dist}(w, A)}{\text{dist}(w, A) + \text{dist}(w, B)} \right| \\ &= \left| \frac{\text{dist}(v, A)\text{dist}(w, B) - \text{dist}(w, A)\text{dist}(v, B)}{[\text{dist}(v, A) + \text{dist}(v, B)][\text{dist}(w, A) + \text{dist}(w, B)]} \right| \\ &= \left| \frac{\text{dist}(w, B)[\text{dist}(v, A) - \text{dist}(w, A)] + \text{dist}(w, A)[\text{dist}(w, B) - \text{dist}(v, B)]}{[\text{dist}(v, A) + \text{dist}(v, B)][\text{dist}(w, A) + \text{dist}(w, B)]} \right| \\ &\leq \frac{\text{dist}(w, B)|\text{dist}(v, A) - \text{dist}(w, A)| + \text{dist}(w, A)|\text{dist}(w, B) - \text{dist}(v, B)|}{[\text{dist}(v, A) + \text{dist}(v, B)][\text{dist}(w, A) + \text{dist}(w, B)]} \\ &\leq \frac{\|v - w\|[\text{dist}(w, B) + \text{dist}(w, A)]}{[\text{dist}(v, A) + \text{dist}(v, B)][\text{dist}(w, A) + \text{dist}(w, B)]} \\ &= \frac{\|v - w\|}{[\text{dist}(v, A) + \text{dist}(v, B)]} \\ &\leq K_u \|v - w\|. \end{aligned}$$

Portanto, ϑ é localmente Lipschitz. □

O seguinte lema pode ser encontrado em [6, Teorema 1] ou ainda em [11, Teorema 4.1].

Lema 3.14. *Sejam E um espaço de Banach, $\mathcal{M} \subset E$ um subconjunto convexo fechado e $H : \mathcal{M} \rightarrow E$ uma aplicação localmente Lipschitz tais que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{dist}(u + \lambda H(u), \mathcal{M})}{\lambda} = 0, \quad \forall u \in \mathcal{M}.$$

Então para algum $u_0 \in \mathcal{M}$ dado, existe $\delta > 0$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d\varphi(t, u_0)}{dt} = W(\varphi(t, u_0)) \\ \varphi(0, u_0) = u_0, \end{cases}$$

possui única solução $\varphi(t, u_0)$ definida em $[0, \delta)$. Além disso, $\varphi(t, u_0) \in \mathcal{M}$ para todo $t \in [0, \delta)$.

Lema 3.15. *Suponha que as condições (B0) e (B1) sejam válidas. Suponha ainda que f satisfaz (3.1), (3.2) ou (3.3) com as funções limites em $L^\infty(\Omega)$. Então o funcional I associado ao problema (P) é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$ com*

$$I'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, definindo

$$J(u)v := \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

temos que J é um operador compacto.

Demonstração. Inicialmente, definindo

$$J_0(u) := \frac{\|u\|^2}{2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

vamos mostrar que J_0 e J são de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$, e portanto $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. É suficiente mostrarmos a existência da derivada de Gâteaux. Para tanto, dado $u \in H_0^1(\Omega)$, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_0(u + tv) - J_0(u)}{t} &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|u + tv\|^2 - \|u\|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} [2\langle u, v \rangle - t\|v\|^2] \\ &= \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em $H_0^1(\Omega)$. Isso mostra que a derivada de Gâteaux para J_0 existe e é dada por

$$J_0'(u)v = \langle u, v \rangle.$$

Para mostrar a continuidade, considere $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ com $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$, temos que, para n suficientemente grande,

$$|(J_0'(u_n) - J_0'(u))v| = |J_0'(u_n - u)v|$$

$$\begin{aligned}
&= |\langle u_n - u, v \rangle| \\
&\leq \|u_n - u\| \|v\| \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|J'_0(u_n) - J'_0(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), \|v\| \leq 1} |(J'_0(u_n) - J'_0(u))v| \leq \varepsilon.$$

Logo,

$$\|J'_0(u_n) - J'_0(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, o que mostra que J'_0 é contínuo e portanto $J_0 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Para a segunda parte, fixados $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e $t \in [0, 1]$, segue do Teorema do Valor Médio que

$$\frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u + \theta tv)v,$$

em que $F(x, s) = \int_0^s f(x, y)dy$. Vamos provar que $f(x, u + \theta tv)v$ é limitada por uma função em $L^1(\Omega)$. Para tanto, note que (3.4) implica que

$$|f(x, u + \theta tv)v| \leq c_1|u + \theta tv||v| + c_2|u + \theta tv|^{p-1}|v|.$$

Usando a desigualdade de Young com expoentes p e p' , temos que

$$\begin{aligned}
|u + \theta tv|^{p-1}|v| &\leq \frac{|u + \theta tv|^{p'(p-1)}}{p'} + \frac{|v|^p}{p} \\
&\leq \frac{2^{p-1}(|u|^p + |\theta t|^p|v|^p)}{p'} + \frac{|v|^p}{p} \\
&= c_3|u|^p + c_4|v|^p \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x, u + \theta tv)v| \leq g(x) \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} dx &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, u + \theta tv)v dx \\
&= \int_{\Omega} \lim_{t \rightarrow 0} f(x, u + \theta tv)v dx \\
&= \int_{\Omega} f(x, u)v dx.
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$J(u)v = \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

segue que J é um operador linear e

$$\begin{aligned} |J(u)v| &= \left| \int_{\Omega} f(x, u)v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x, u)v| dx \\ &\leq \int_{\Omega} (c_1|u| + c_2|u|^{p-1})|v| dx \\ &\leq c_1|u|_{p'}|v|_p + c_2|u|_{p'}^{p-1}|v|_p. \end{aligned}$$

Usando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, temos que

$$|J(u)v| \leq c_3\|v\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

o que mostra que $J(u) \in L^p(\Omega)'$.

No que segue, vamos mostrar que J é contínua em u . Para isso, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Usando a desigualdade de Hölder e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} |(J(u_n) - J(u))v| &= \left| \int_{\Omega} (f(x, u_n) - f(x, u))v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x, u_n) - f(x, u)||v| dx \\ &\leq |f(x, u_n) - f(x, u)|_{p'}|v|_p \\ &\leq c_4|f(x, u_n) - f(x, u)|_{p'}\|v\|. \end{aligned}$$

Note ainda que, para cada $u \in L^p(\Omega)$ temos que $f(x, u(x))$ é contínua em $L^{p'}(\Omega)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(J(u_n) - J(u))v| \leq \varepsilon\|v\|, \quad \text{sempre que } n \geq n_0.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J(u_n) - J(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{|(J(u_n) - J(u))v|}{\|v\|} = 0,$$

o que implica que J é contínuo em u . Como $J_0 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ concluímos que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Por fim, vamos mostrar que J é compacto. Seja (u_n) um sequência limitada. Logo, a

menos de subsequência, temos que

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Como $f(x, u_n)$ converge para $f(x, u)$ em $L^{p'}(\Omega)$ e o operador J é linear e limitado, segue dos argumentos anteriores que

$$J(u_n) \rightarrow J(u),$$

o que implica que J é compacto. □

Lema 3.16. *Seja H um espaço de Hilbert e $\emptyset \neq M \subset H$ um subconjunto convexo fechado. Então para cada $h \in H$ existe um único elemento $m \in M$ tal que*

$$\|h - m\| = \min_{v \in M} \|h - v\| = \text{dist}(h, M). \quad (3.55)$$

Além disso, m é caracterizado pela propriedade de que

$$\langle h - m, v - m \rangle_H \leq 0 \quad \forall v \in M. \quad (3.56)$$

Demonstração. Seja $(v_n) \subset M$ uma seqüência minimizante para (3.55), isto é,

$$d_n = \|h - v_n\| \rightarrow d = \inf_{v \in M} \|h - v\|.$$

Afirmção 1. (v_n) é uma seqüência de Cauchy.

De fato, pela lei do paralelogramo sabemos que

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{a-b}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \forall a, b \in H.$$

Assim, tomando $a = h - v_n$ e $b = h - v_m$ segue que

$$\left\| h - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Como $\frac{v_n + v_m}{2} \in H$ temos que $\left\| h - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \geq d^2$. Logo

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2,$$

o que implica que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|v_n - v_m\| = 0.$$

Portanto, (v_n) converge para algum elemento $m \in M$ com $d = \|h - m\|$.

A seguir, mostramos a equivalência entre (3.55) e (3.56). Suponha que $m \in M$ satisfaz (3.55) e considere $\bar{m} \in M$. Por M ser convexo temos que

$$v = (1 - t)m + t\bar{m} \in M, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Logo

$$\|h - m\| \leq \|h - [(1 - t)m + t\bar{m}]\| = \|(h - m) - t(\bar{m} - m)\|,$$

e daí

$$\|h - m\|^2 \leq \|h - m\|^2 - 2t\langle h - m, \bar{m} - m \rangle_H + t^2\|\bar{m} - m\|^2,$$

o que implica que $2\langle h - m, \bar{m} - m \rangle_H \leq t\|\bar{m} - m\|^2$ para todo $t \in [0, 1]$. Fazendo $t \rightarrow 0$ obtemos (3.56).

Reciprocamente, suponha que m satisfaz (3.56). Então temos que

$$\|m - h\|^2 - \|v - h\|^2 = 2\langle h - m, v - m \rangle_H - \|m - v\|^2 \leq 0 \quad \forall v \in H,$$

o que implica que vale (3.55).

Para a unicidade, suponha que existam m_1 e m_2 satisfazendo (3.56). Assim, temos que

$$\langle h - m_1, v - m_1 \rangle_H \leq 0 \quad \forall v \in M \tag{3.57}$$

e

$$\langle h - m_2, v - m_2 \rangle_H \leq 0 \quad \forall v \in M. \tag{3.58}$$

Tomando $v = m_2$ em (3.57) e $v = m_1$ em (3.58) segue que

$$\begin{aligned} \langle m_1 - m_2, m_1 - m_2 \rangle_H &= \langle m_1 - h + h - m_2, m_1 - m_2 \rangle_H \\ &= \langle m_1 - h, m_1 - m_2 \rangle_H + \langle h - m_2, m_1 - m_2 \rangle_H \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

o que mostra que $m_1 = m_2$. □

Lema 3.17. *Suponha $C \in L^\infty(\Omega)$ é tal que $C(x) > \lambda_k$ para todo $x \in \Omega$. Então existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} C(x)|v|^2 dx \leq -\delta\|v\|^2, \quad \forall v \in V_k.$$

O resultado ainda vale se $C(x) \geq \lambda_k$ e $C \not\equiv \lambda_k$.

Demonstração. Defina

$$g(v) := \|v\|^2 - \int_{\Omega} C(x)|v|^2 dx$$

e considere o conjunto

$$\Sigma := \{v \in V_k : \|v\| = 1\}.$$

Como $\dim V_k < \infty$ segue que existe algum $\bar{v} \in \Sigma$ tal que

$$\max_{v \in \Sigma} g(v) = g(\bar{v}).$$

Usando a desigualdade variacional em V_k segue que

$$g(v) \leq \int_{\Omega} [\lambda_k - C(x)]v^2 dx \leq 0, \quad \forall v \in \Sigma.$$

Afirmção 1. $g(\bar{v}) < 0$.

Suponha, por contradição, que $g(\bar{v}) = 0$. Assim, usando a desigualdade variacional em V_k obtemos que

$$0 = \|\bar{v}\|^2 - \int_{\Omega} C(x)|\bar{v}|^2 dx \leq \int_{\Omega} (\lambda_k - C(x))|\bar{v}|^2 dx \leq \|u\|^2 - \lambda_k \|u\|_2^2 \leq 0.$$

Logo

$$\int_{\Omega} (\lambda_k - C(x))|\bar{v}|^2 dx = 0, \quad (3.59)$$

o que implica que $\bar{v} = 0$, de onde segue a contradição com o fato de que $\|\bar{v}\| = 1$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $g(\bar{v}) < -\delta$. Em seguida, aplicando a função g em $v/\|v\|$ concluímos que

$$\|v\|^2 - \int_{\Omega} C(x)|v|^2 dx \leq -\delta\|v\|^2, \quad \forall v \in V_k.$$

No caso em que $C(x) \geq \lambda_k$ e $C \not\equiv \lambda_k$ a expressão (3.59) implica que $\bar{v} = 0$ em todo o conjunto $\{x \in \Omega : C(x) > \lambda_k\}$. Dessa forma, \bar{v} é uma λ_k -autofunção que se anula em um conjunto de medida positiva. Como $\bar{v} \in (-\Delta + \lambda_k \text{Id})$, o princípio da continuação única nos garante que $\bar{v} = 0$. A prova agora é igual a anterior. \square

Lema 3.18. *Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis tais que $f_n \geq 0$. Se $f_n \rightharpoonup f$ em $L^2(\Omega)$, então $f \geq 0$.*

Demonstração. Observe que

$$0 \leq \int_{\Omega} f_n f^- dx = \langle f_n, f^- \rangle_{L^2(\Omega)} \rightarrow \langle f, f^- \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f f^- dx.$$

Logo,

$$0 \leq \int_{\Omega} f f^- dx = - \int_{\Omega} (f^-)^2 dx.$$

Como $f^- \geq 0$, devemos ter

$$\int_{\Omega} (f^-)^2 dx = 0,$$

o que implica que $f^- \equiv 0$. Portanto, $f = f^+ \geq 0$. □

O seguinte resultado pode ser encontrado em [18, Lema 4.8].

Lema 3.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e considere $(f_n) \subset L^p(\Omega)$. Se (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω , então $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.*

Referências Bibliográficas

- [1] T. Bartsch, *Critical point theory on partially ordered Hilbert spaces*, J. Func. Anal. **186** (2001), 117-152.
 - [2] T. Bartsch, Z. Liu, T. Weth, *Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 25-42.
 - [3] T. Bartsch, Z. Q. Wang, *Sign changing solutions of nonlinear Schrödinger equations*, Topol Methods Nonlinear Anal **13** (1999), 191-198.
 - [4] T. Bartsch, K. G. Chang e Z. Q. Wang, *On the Morse index of sign changing solutions of nonlinear elliptic problems*, Math Z, **233** (2000), 655-677
 - [5] H. Berestycki and D. G. de Figueiredo, *Double resonance in semilinear elliptic problems*, Comm. Partial Diff. Eqs., **6** (1981), 91-120.
 - [6] H. Brézis, *On a characterization of flow invariant sets*, Comm. Pure. Appl. Math. **23** (1970), 261-263.
 - [7] H. Brézis e L. Nirenberg, *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 939-964.
 - [8] N. P. Căc, *On nontrivial solutions of a Dirichlet problem whose jumping nonlinearity crosses a multiple eigenvalue*, J. Diff. Eqs., **80** (1989), 379-404.
 - [9] M. Conti, L. Merizzi, e S. Terracini, *Remarks on variational methods and lower-upper solutions*, NoDEA: Nonl. Diff. Eqs. Appli., **6** (1999), 371-393.
 - [10] D. G. Costa e C. A. Magalhães, *Variational elliptic problems which are non-quadratic at infinity*, Nonlinear Anal. TMA, **23** (1994), 1401-1412.
 - [11] K. Deimling, *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 596. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
-

-
- [12] M. F. Furtado, L. A. Maia e E. A. B. Silva, *On a double resonant problem in \mathbb{R}^N* , Diff. Integral Eqs, **15** (2002), 1335-1344.
- [13] M. F. Furtado, L. A. Maia e E. A. B. Silva, *Solutions for a resonant elliptic system with coupling in \mathbb{R}^N* , Comm. Partial Diff. Eqs., **27** (2002), 1515-1536.
- [14] P. Habets, E. Serra e M. Tarallo, *Multiplicity results for boundary value problems with potentials oscillating around resonance*, J. Diff. Eqs. **138** (1997), 133-156.
- [15] H. Hofer, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. **261** (1982), 493-514.
- [16] S. Li e Z. Q. Wang, *Ljusternik-Schnirelman theory in partially ordered Hilbert spaces*, Tran. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 3207-3227.
- [17] Z. Liu e Z. Q. Wang, *Sign-changing solutions of nonlinear elliptic equations*, International Conference on Variational Methods, Tianjin, China, May 20-26, 2007, 149-273.
- [18] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, 1994.
- [19] P. Rabinowitz, *Minimax methods and their application to partial differential equations*, Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations (Berkeley, Calif., 1983), 307-320, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **2** (1984), Springer, New York.
- [20] M. Schechter, *Critical point theory with weak-to-weak linking*, Commun. Pure Appl. Math., **51** (1998), 1247-1254.
- [21] M. Schechter, *Linking Methods in Critical Point Theory*, Birkhauser, Boston, 1999.
- [22] M. Schechter, *Minimax Systems and Critical Point Theory*, Birkhauser, 2009.
- [23] M. Schechter e K. Tintarev, *Pairs of critical points produced by linking subsets with applications to semilinear elliptic problems*, Bull. Soc. Math. Belg. **44** (1992) 249-261.
- [24] M. Schechter e W. Zou, *Sign-changing critical points from linking type theorems*, Trans. AMS vol 358, **12** (2006), 5293-5318.
- [25] M. Schechter e W. Zou, *Weak linking*, Nonlinear Anal. TMA, **55**, (2003), 695-706.
- [26] M. Schechter e W. Zou, *Weak linking theorems and Schrödinger equations with critical Sobolev exponent*, Control, Optim. Calculus Variations, **9** (2003), 601-619.
- [27] M. Schechter e W. Zou, *Critical Point Theory and its Applications*, Springer, 2006.
-

-
- [28] E. A. de B. Silva, *Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonlinear Analysis TMA **16** (1991) 455-477.
- [29] J. Sun, *The Schauder condition in the critical point theory*, Chinese Sci. Bull., **31** (1986), 1157-1162.
- [30] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhauser, 1996.
- [31] W. Zou, *Sign-changing critical point theory*, Springer, 2008.
- [32] W. Zou, *Sign-changing saddle point*, J. Funct. Anal., **219** (2005), 433-468.
- [33] W. Zou, *On finding sign-changing solutions*, J. Funct. Anal., **234** (2006), 364-419.
-