

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Solução Analítica da Equação de Schrödinger Não Linear

Alisson Xavier Martins

ORIENTADOR:

Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Brasília, 30 de junho de 2011

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Solução Analítica da Equação de Schrödinger Não Linear

Alisson Xavier Martins

junho 2011

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida. Agradeço aos meus pais pelo amor, carinho e pela vida. Agradeço aos meus irmãos simplesmente por existirem e serem essenciais nessa trajetória. Agradeço a toda minha família em especial ao meu tio Marcelo Ramos que sempre incentivou e me deu conselhos que foram fundamentais para alcançar meus objetivos. Agradeço aos meus colegas de estudo em especial o Paulo Marciano e de moradia na casa do estudante na UnB em especial ao Edimilson e Fabiana. Agradeço aos colegas Marcelo, Rubens e Raimunda por toda ajuda na colina. Agradeço aos meus amigos conterrâneos em especial ao José Assunção e a Rosângela por todo apoio e ajuda ao longo desta caminhada. Agradeço ao meu orientador pela paciência e ensinamentos que foram fundamentais no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço aos professores do instituto de física, Anníbal Figueiredo, Marco Amato e o José Wadih Maluf em especial agradeço ao professor Ademir Eugênio pelos conselhos e por toda ajuda durante o curso de mestrado. Agradeço aos professores de graduação Augusto, Cláudio Nassif, Flávio, Jonas, Paulo Marcelo, Regina e Romuel os quais foram importantes na minha formação. E finalmente ao CNPq, ao Instituto de Física e a Universidade de Brasília, por todo apoio necessário para realização desse mestrado.

Sumário

Agradecimentos	i
Sumário	ii
Resumo	ii
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Introdução aos Grupos e Álgebras de Lie	4
2.1 Grupos	5
2.1.1 Propriedades Algébricas	5
2.1.2 Propriedades Topológicas	6
2.1.3 Variedades Diferenciáveis	6
2.2 Grupos de Lie	7
2.3 Álgebras de Lie	7
3 Simetrias e Equações Diferenciais	13
3.1 EDPs escalares com duas variáveis dependentes	13
3.2 Soluções invariantes	20
3.3 Simetrias não-clássicas	20
4 Solução analítica da equação de Schrödinger não linear	23
4.1 Simetrias e Álgebras de Lie	25
4.2 Simetrias não clássicas e Soluções invariantes	29
5 Conclusões e Perspectivas	39
Referências Bibliográficas	40
4.1 Gráfico da Onda Solitária	38

Resumo

O estudo da equação de Schrödinger é de grande importância para compreender os aspectos fundamentais da matéria. A busca por soluções desta equação é de grande interesse tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista experimental. Apesar dessa importância, não temos muitas soluções analíticas dessa equação. Nesse contexto, apresentamos nessa dissertação um estudo das simetrias de Lie, simetrias não-clássicas e soluções invariantes da equação de Schrödinger não-linear. Mostramos que no caso (1+1) dimensional não existe simetria, além das simetrias encontradas via geradores de simetria de Lie e com um gerador de simetria encontramos uma solução invariante para a equação de Schrödinger não-linear.

Abstract

The study of Schrödinger equation is of great importance for understanding the fundamental aspect of matter. The search for solutions of this equation is of great interest both from the standpoint of theoretical and experimental point of view. Despite of importance we have many analytical solutions of this equation. In this context, we present in this thesis a study of Lie symmetries, non-classical symmetries and invariant solutions of the Schrödinger nonlinear equation. We show that if (1+1) dimensional symmetry does not exist beyond the symmetries found with the Lie symmetry generators and a generator of symmetry we find a invariant solution to the nonlinear Schrödinger equation.

Capítulo 1

Introdução

As equações diferenciais têm sua origem histórica com Newton [1]. Na busca de uma formulação geral que pudesse descrever a dinâmica dos fenômenos em uma determinada escala, Newton propôs uma equação que consiste em uma das três leis da mecânica clássica. As equações da mecânica forneceram a motivação para o desenvolvimento das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler. Por outro lado, muitos problemas físicos envolvem mais de uma variável independente, sendo descritas por equações diferenciais parciais (EDP). Existem alguns métodos para se tratar EDPs, sendo um exemplo o método de separação de variáveis [1, 2].

Uma abordagem importante para o estudo de equações diferenciais foi desenvolvido no final século XIX por Lie, que apresentou uma formulação aplicando métodos de transformações locais de grupos [3]. Soluções que permanecem invariantes sob transformações de um grupo de simetria são chamadas de soluções invariantes [4–7]. Simetrias não-clássicas foram introduzidas por Bluman e Cole, e baseiam-se na idéia de que a solução analítica requerida é invariante sob transformações de simetria preservando ambos a forma da equação diferencial e a condição de invariância [7]. Esse método é menos restritivo no sentido que existem mais simetrias não-clássicas, que simetrias de Lie, o último sendo um subconjunto do primeiro [8]. Essas técnicas de grupos de Lie foram aplicadas em várias situações de problemas da mecânica clássica, mas também no contexto de equações da mecânica quântica, como a equação de Schrödinger.

Em 1925, Schrödinger propôs uma equação para descrever a dinâmica de sistemas subatômicos fundando juntamente com Dirac e Heisenberg a mecânica quântica [9, 10]. Neste caso, o estado de um sistema quântico é representado por vetores normalizados $|\psi\rangle$ de um espaço de Hilbert \mathcal{H} ou equivalentemente por uma função de onda $\psi(x)$. A densi-

dade de probabilidade de uma partícula ser encontrada em um ponto é dada por $|\psi(x)|^2$. Observáveis físicos são representados por operadores hermitianos (auto-adjuntos) $A^\dagger = A$ definidos no espaço \mathcal{H} . O valor esperado de um observável A é dado por $\langle \psi | A | \psi \rangle$, e a evolução temporal do sistema obedece a equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H\psi(x),$$

onde, \hbar é a constante de Planck que tomaremos $\hbar = 1$ (unidade natural). Uma extensão da equação de Schrödinger é a equação de Gross-Pitaevskii [11] que descreve uma variedade de fenômenos interessantes, como o condensado de Bose-Einstein [12, 13]. A equação de Gross-Pitaevskii é dada por

$$i \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(r, t) + g |\psi(r, t)|^2 \right] \psi(r, t),$$

onde m é a massa, $V_{ext}(r, t)$ é o potencial de interação, $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ é a intensidade da interação interatômica e a é o comprimento de espalhamento atômico.

A pesquisa por soluções analíticas dessa equação e generalizações, incluindo potências quinticas no potencial de autointeração, tem se dado em diferentes perspectivas [11, 14], incluindo a análise através dos métodos de Lie [15–19]. Esses resultados exploram simetrias de Lie, simetrias não-clássicas e as soluções invariantes da equação de Schrödinger não-linear, no entanto, esses resultados são parciais, como por exemplo podemos ver no artigo [20] no qual os autores fazem uma redução da equação de Schrödinger não-linear cubica (3+1) dimensões via simetria não-clássica, mas não obteve soluções invariantes desta equação. O propósito do presente trabalho é determinar se é possível obter soluções adicionais em (1+1) dimensões da equação de Schrodinger não-linear utilizando simetrias não-clássicas. Para implementar os cálculos, fazemos uso sistemático do pacote de cálculo simbólico SADE (Symmetry Analysis Differential Equation) [8], utilizado com sucesso na análise de outras equações da física, como a equação de Fock-Planck e a equação de Gross-Neveu [21–25].

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, tratamos os fundamentos matemáticos que são a base de simetrias contínuas de equações diferenciais. Fazemos um desenvolvimento teórico de variedades diferenciáveis. Uma variedade diferenciável com estrutura de grupo é dita grupo de Lie.

No capítulo 3, introduzimos métodos de soluções invariantes de EDPs utilizando simetrias de Lie e simetrias não-clássicas. A construção de soluções invariantes por simetria de Lie ocorre através de um mapeamento de um conjunto de soluções invariantes nela

mesma e soluções invariantes por simetria não clássica ocorre via uma solução invariante que é mapeada em si mesma.

No capítulo 4, apresentamos soluções analíticas obtidas com métodos de simetrias. Encontramos os geradores de simetrias de Lie e com esses geradores construímos a álgebra de Lie, também encontramos os geradores de simetria não-clássica e discutimos porque neste último caso reobtemos apenas as próprias simetrias de Lie.

Capítulo 2

Introdução aos Grupos e Álgebras de Lie

Vamos aqui fazer uma revisão sobre grupos e álgebras de Lie, desenvolvidos inicialmente por Lie para o estudo de soluções e classificação de equações diferenciais utilizando grupos de simetrias contínuas que denominamos aqui grupos de Lie. A revisão aqui apresentada segue as referências [26–29]. Nesta primeira parte iniciamos com a noção de grupo e conduzimos até a noção de grupos e álgebras de Lie.

2.1 Grupos

2.1.1 Propriedades Algébricas

Um grupo é um conjunto dotado de uma lei de composição (\cdot) satisfazendo os seguintes axiomas:

I-Associatividade: seja a, b, c elementos de G então $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

II-Elemento Identidade: existe um elemento de G que denotamos por e e denominado elemento neutro ou unidade de G tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$, para todo $a \in G$.

III-Elemento Inverso: existe um elemento $a \in G$ denotado por a^{-1} e denominado inversa de a tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Caso a lei de composição seja comutativa, ou seja, se $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in G$, dizemos que G é um grupo comutativo ou abeliano.

2.1.2 Propriedades Topológicas

Seja S um conjunto e seja uma coleção $D = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ de conjuntos de S ($A_1, A_2, A_3, \dots \subset S$). Dizemos que D define uma topologia em S se as seguintes condições forem satisfeitas, para todo $A_1, A_2 \in D$:

I- A união de dois conjuntos pertence à D :

$$A_1 \cup A_2 \in D;$$

II- A intersecção de dois conjuntos pertence à D :

$$A_1 \cap A_2 \in D;$$

III- O conjunto S pertence à D :

$$S \in D.$$

O espaço S , munido da topologia D é dito ser um espaço topológico, e os elementos de D são chamados abertos de S . Uma vizinhança de um ponto $p \in S$ é um conjunto $V \subset S$ que contenha um aberto de S .

Podemos então falar de aplicações contínuas entre dois espaços topológicos S e S' . Seja $f : S \rightarrow S'$ uma aplicação. A aplicação é dita contínua no ponto $p \in S$ se para qualquer vizinhança V' de $f(p)$ existir uma vizinhança V de p tal que $f(V) \subset V'$. Um grupo que possui a estrutura de espaço topológico é dito ser um grupo topológico.

2.1.3 Variedades Diferenciáveis

Um espaço topológico é dito ser uma variedade se para todo ponto $p \in S$ existe uma vizinhança V_p que seja levada em um conjunto aberto de R^n para algum n , por uma aplicação bijetiva $\phi_{V_p} : V_p \rightarrow R^n$ contínua, no sentido dado acima. O menor valor possível de n é denominado dimensão da variedade S . Dessa maneira, é possível definir sistemas de coordenadas nas vizinhanças de todos os pontos de S , as coordenadas de p sendo dadas por

$$\phi_{V_p}(p) \equiv (x^1(p), \dots, x^n(p)). \quad (2.1)$$

A associação ϕ_{V_p} é denominada de carta (mapa) na vizinhança V_p . Dessa maneira, podemos usar os abertos da topologia definida em S para construir conjunto de cartas de maneira a recobrir S , cartas estas que podem ter intersecções não-nulas. Esse conjunto é denominado de Atlas em S .

Vamos supor que um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças V_r e V_s . Sabemos que $U = V_r \cap V_s$ é também uma vizinhança de p . Temos assim definidos dois

sistemas de coordenadas em U , dados pelas cartas ϕ_{V_r} e ϕ_{V_s} , que denotamos por $\{x^i\}$ e $\{y^i\}$, respectivamente, com $(i = 1, \dots, n)$. Podemos passar livremente de um sistema de coordenada para outro da seguinte maneira:

$$(x^1, \dots, x^n) = \phi_{V_s} \circ \phi_{V_r}^{-1}(y^1, \dots, y^n), \quad (2.2)$$

ou

$$(y^1, \dots, y^n) = \phi_{V_r} \circ \phi_{V_s}^{-1}(x^1, \dots, x^n). \quad (2.3)$$

Dessa forma, definimos uma mudança de sistema de coordenadas em U . Dizemos então que S é uma variedade C^k se as funções que fazem as mudanças de coordenadas nas intersecções de duas cartas forem C^k (contínuas e k vezes diferenciáveis). Uma variedade C^1 é também denominada de variedade diferenciável, enquanto que uma variedade C^∞ é dita ser uma variedade suave.

A variedade é um espaço topológico que localmente pode ser aproximado por um espaço euclidiano, ou seja, localmente ambos têm as mesmas propriedades.

Exemplo: Todo ponto na superfície da esfera unitária $S^2 \subset R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Localmente S^2 e R^2 são topologicamente equivalentes mas globalmente são distintos.

2.2 Grupos de Lie

Seja S um grupo com uma estrutura da variedade diferenciável. Podemos então associar a cada ponto $p \in S$ um conjunto de coordenadas $\alpha_i^p = \phi_i(p)$. A lei de composição do grupo pode então ser expressa em termos das coordenadas dos elementos do grupo, ou seja, se $p, q, r \in S$ e $r = p \cdot q$, onde \cdot é a lei de composição, então temos que

$$\alpha_i^r = \phi_i(\alpha^p, \alpha^q). \quad (2.4)$$

Se as funções f_i forem analíticas, i. e. funções C^∞ , então S é dito ser um grupo de Lie.

2.3 Álgebras de Lie

As simetrias contínuas de um sistema de equações diferenciais formam um grupo de Lie. Vamos agora mostrar que os elementos de uma vizinhança da identidade, isto é, as

transformações infinitesimais permite determinar o subgrupo de Lie conexo à identidade. Para tal, tomemos o grupo de simetria S a m parâmetros $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ onde (m é a dimensão de S) agindo no espaço F das funções de classe C^1 em R^n . Denotamos então um elemento de S por $g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, e assumimos, sem perda de generalidade, que a parametrização é tal que $g(0, \dots, 0)$ corresponde ao elemento identidade de S , ou seja, à transformação identidade. A ação de um elemento de S em F é dada por ($f \in F$):

$$f'(x) = f(x') = g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) f(x), \quad (2.5)$$

onde $x \equiv (x^1, \dots, x^n)$ e $x' = g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) x$. Tomemos agora $\alpha_i = 0$ exceto para $i = k$ para o qual $\alpha_k \ll 1$. Expandindo $g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, em torno de $\alpha_i = 0$

$$x'^i = \left(1 + \alpha^k \frac{\partial g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha^k}\right) x^i, \quad (2.6)$$

definimos então,

$$\eta_k^i(x) = x^i \frac{\partial g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha^k}, \quad (2.7)$$

podemos então reescrever a transformação como,

$$x'^i - x^i = \alpha^k \eta_k^i(x), \quad (2.8)$$

para certas funções η^i . Expandindo o lado esquerdo de Eq. (2.5) obtemos

$$f'(x) = f(x + \alpha_k \eta) = \left(1 + \alpha_k \sum_{i,k} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) f(x) \quad (2.9)$$

$$= g(0, \dots, \alpha_k, \dots, 0), \quad (2.10)$$

com $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$. Da mesma maneira, podemos mostrar que tomando todos os α_i não-nulos e $\alpha_i \ll 1$ temos que:

$$f'(x) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) f(x) = \left(1 + \sum_{i,k} \alpha_k \eta_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) f(x). \quad (2.11)$$

Dizemos então que os operadores

$$I_k = \sum_i \eta_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

são os geradores infinitesimais do grupo de Lie S .

Exemplo: Geradores infinitesimais do grupo $SO(2)$ (grupo das rotações infinitesimais no plano).

Para uma rotação θ em torno do eixo z , temos:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta.\end{aligned}$$

Para uma transformação infinitesimal com $\theta \approx d\theta$ temos:

$$\cos \theta \approx 1 \quad \text{e} \quad \sin \theta \approx \delta\theta,$$

Portanto:

$$\begin{aligned}x' &= x + y\delta\theta, \\y' &= -x\delta\theta + y,\end{aligned}$$

e assim:

$$\begin{aligned}x' &= x + y\delta\theta = f_1(x, y; \delta\theta), \\y' &= -x\delta\theta + y = f_2(x, y; \delta\theta).\end{aligned}$$

Como $SO(2)$ é um grupo a um parâmetro, temos:

$$\eta_1^1(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y, \delta\theta)}{\partial \theta} = y, \quad \eta_1^2(x, y) = \frac{\partial f_2(x, y, \delta\theta)}{\partial \theta} = -x,$$

o que nos dá o gerador infinitesimal de $SO(2)$:

$$I_1 = \eta_1^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

O termo gerador vem do fato de que os operadores I_k permitem construir o grupo S , como veremos a seguir. Eles representam no nosso caso transformações infinitesimais de simetria. Tomemos um elemento de S com parâmetros $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ agindo em um elemento $f \in F$. O resultado é um elemento de F , denotados por $F[\alpha]$, enquanto que o elemento original é denotado por $F[0]$, ou suscintamente:

$$f[\alpha] = g(\alpha) f[0]. \quad (2.13)$$

Multiplicando à esquerda por $g(\beta)$ obtemos outro elemento de F tal que:

$$g(\beta) f[\alpha] = g(\beta) g(\alpha) f[0] = f[\gamma], \quad (2.14)$$

onde os parâmetros $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ são dados pela Eq. (2.4) função de α e β :

$$\gamma_i = h_i(\beta, \alpha). \quad (2.15)$$

Podemos também escrever que

$$\beta_i = h_i(\gamma, \tilde{\alpha}) \quad (2.16)$$

onde $\tilde{\alpha}_a$ são os parâmetros da inversa do elemento com parâmetros α_a , de modo que obtemos de (2.14):

$$g(h(\gamma, \tilde{\alpha})) f[\alpha] = f[\gamma], \quad (2.17)$$

onde temos dois conjuntos de parâmetros independentes, α e γ . Se supormos que α é próximo de γ , i.e. $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\gamma}_i + \epsilon \tilde{\xi}_i$ e usando Eq. (2.11) e (2.12), temos que

$$g(h(\gamma, \tilde{\alpha})) = 1 + \sum_{i,k} \frac{\partial h_j(\gamma, \beta)}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta=\tilde{\gamma}} \epsilon \tilde{\xi}_i I_j, \quad (2.18)$$

e de (2.17) decorre que

$$\epsilon \sum_{i,k} \frac{\partial h_j(\gamma, \beta)}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta=\tilde{\gamma}} \epsilon \tilde{\xi}_i I_j f[\alpha] = f[\gamma] - f[\alpha] = - \sum_i \frac{\partial f[\gamma]}{\partial \gamma_i} \tilde{\xi}_i, \quad (2.19)$$

E como (2.19) é verdadeira para qualquer ξ_i , temos

$$\sum_j S_{ij} I_j f[\gamma] = \frac{\partial f[\gamma]}{\partial \gamma_i}, \quad (2.20)$$

com

$$S_{ij} = - \frac{\partial h_j(\gamma, \beta)}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta=\tilde{\gamma}}, \quad (2.21)$$

que é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para $f[\alpha]$, com a condição inicial

$$f[\alpha] \Big|_{\alpha=0} = f[0]. \quad (2.22)$$

A equação (2.20) em conjunto com (2.22) determina $F[\alpha]$ de forma única. Assim se os geradores infinitesimais de dois grupos S e S' coincidem, então $S \equiv S'$ necessariamente. A condição suficiente e necessária para que (2.20) tenha solução é

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_j \partial \gamma_i}. \quad (2.23)$$

A relação (2.20) nos dá que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_i \partial \gamma_k} &= \sum_k \left[\frac{\partial S_{ik}}{\partial \gamma_b} I_k f[\gamma] + S_{ik} I_k \frac{\partial f[\gamma]}{\partial \gamma_j} \right] \\ &= \sum_k \left[\frac{\partial S_{ik}}{\partial \gamma_b} I_k f[\gamma] + \sum_l S_{ik} S_{jl} I_k I_l f[\gamma] \right], \end{aligned}$$

e assim temos de (2.23) que

$$\sum_{k,l} S_{ik} S_{jl} (I_k I_l - I_l I_k) f[\gamma] = \sum_k \left[\frac{\partial S_{jk}}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial S_{ik}}{\partial \gamma_j} \right] I_k, \quad (2.24)$$

Tomando $\gamma(0, \dots, 0)$ (o elemento identidade) implica que:

$$S_{ik} = \delta_{ij}, \quad (2.25)$$

e como (2.24) vale para toda função f , obtemos finalmente:

$$I_i I_j - I_j I_i = \sum_k C_{ij}^k I_k, \quad (2.26)$$

que são as relações de comutação entre os geradores do grupo, e C_{ij}^k são as constantes de estrutura que caracterizam o grupo.

Como (2.23) são também condições suficientes, se conhecermos um conjunto de operadores lineares $\{I_i\}$ que satisfazem (2.26), poderemos integrar (2.20) e assim construir o correspondente grupo de Lie para sua parte formada pelos elementos continuamente conexos a identidade. É evidente de (2.26) que as constantes de estrutura possuem a seguinte propriedade:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \quad (2.27)$$

Pode-se mostrar também que dois grupos que possuem o mesmo conjunto de constantes de estrutura são isomorfos. Os geradores infinitesimais I_i geram um espaço vetorial de dimensão m . Podemos então escolher uma outra base nesse espaço formada por m vetores \tilde{I}_i linearmente independentes, para os quais temos:

$$\tilde{I}_i = \sum_j M_{ij} I_j, \quad (2.28)$$

$$I_i = \sum_j M_{ij}^{-1} I_j, \quad (2.29)$$

A relação (2.26) se escreve então como

$$\sum_{k,l} M_{il}^{-1} M_{jk}^{-1} (\tilde{I}_l \tilde{I}_k - \tilde{I}_k \tilde{I}_l) = \sum_{k,l} C_{ij}^k M_{kl}^{-1} I_l, \quad (2.30)$$

ou ainda

$$\tilde{I}_l \tilde{I}_k - \tilde{I}_k \tilde{I}_l = \sum_{i,j,k,p} M_{li} M_{kj} C_{ij}^k M_{kp}^{-1} I_p, \quad (2.31)$$

E podemos então definir as constantes de estrutura transformadas por

$$\tilde{C}_{lq}^p = \sum_{i,j,k} M_{li} M_{qj} C_{ij}^k M_{kp}^{-1}. \quad (2.32)$$

O espaço vetorial gerado pelos geradores I_i de um grupo de Lie, munido da operação de comutação

$$[A, B] \equiv AB - BA, \quad (2.33)$$

possui uma estrutura de álgebra, notando apenas que o comutador de dois elementos do espaço vetorial é um outro elemento do espaço, como podemos ver de (2.26). O comutador (2.33) satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0, \quad (2.34)$$

e dizemos que temos uma estrutura de álgebra de Lie. Em conclusão, todo grupo de Lie tem associado uma álgebra de Lie, que por sua vez pode ser usada para reconstruir o grupo. Mais ainda, toda a álgebra de Lie permite gerar um grupo de Lie.

Capítulo 3

Simetrias e Equações Diferenciais

Neste capítulo, vamos apresentar como obter as simetrias de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Esta revisão se baseia nas referências [8, 30].

3.1 EDPs escalares com duas variáveis dependentes

Para simplificar a apresentação, vamos considerar EDPs com uma variável dependente u , e duas variáveis independentes, x e t . Uma transformação de ponto é um difeomorfismo no espaço da variável dependente u , e das variáveis independentes x e t .

$$\Gamma : (x, t, u) \mapsto (\hat{x}(x, t, u), \hat{t}(x, t, u), \hat{u}(x, t, u)). \quad (3.1)$$

Essa transformação mapeia a superfície $u = u(x, t)$ em R^3 para a seguinte (que é parametrizada por x, t e u):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}(x, t, u), \\ \hat{t} &= \hat{t}(x, t, u), \\ \hat{u} &= \hat{u}(x, t, u). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para poder determinar como o difeomorfismo em (3.2) atua em uma dada equação diferencial, precisamos calcular a maneira como esse difeomorfismo induz uma prolongação de uma dada transformação. Para isso, introduzimos a seguinte derivada total

$$\begin{aligned} D_x &= \partial_x + u_x \partial_u + u_{xx} \partial_{u_t} + \dots, \\ D_t &= \partial_t + u_t \partial_u + u_{xt} \partial_{u_t} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

(Derivadas totais tratam a variável dependente u e suas derivadas como funções de variáveis independentes). As duas primeiras equações de (3.2) podem ser invertidas (localmente) para obter x e t em termos de \hat{x} e \hat{t} , desde que o jacobiano seja diferente de zero, ou seja,

$$J \equiv \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{vmatrix} \neq 0. \quad \text{quando} \quad u = u(x, t). \quad (3.4)$$

Se (3.4) é satisfeita, então a última equação de (3.2) pode ser reescrita como

$$\hat{u} = \hat{u}(x, t). \quad (3.5)$$

Aplicando a regra da cadeia para (3.5), obtemos

$$\begin{bmatrix} D_x \hat{u} \\ D_t \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{\hat{x}} \\ \hat{u}_{\hat{t}} \end{bmatrix},$$

e portanto (pela regra de Cramer)

$$\hat{u}_{\hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u} & D_t \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \quad \hat{u}_{\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u} \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Prolongações de ordem superior são obtidas recursivamente repetindo-se o argumento acima.

Se \hat{u}_J é qualquer derivada de \hat{u} com relação a \hat{x} e \hat{t} então

$$\begin{aligned} \hat{u}_J \hat{x} &\equiv \frac{\partial \hat{u}_J}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u} & D_t \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \\ \hat{u}_J \hat{t} &\equiv \frac{\partial \hat{u}_J}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Estamos agora em condições de definir simetrias pontuais de uma EDP de enésima ordem:

$$\Delta(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0. \quad (3.8)$$

Por simplicidade, vamos considerar EDPs da forma

$$\Delta = u_\sigma - \omega(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0, \quad (3.9)$$

onde u_σ é uma das derivadas de enésima ordem de u e ω é independente de u_σ . A transformação de ponto Γ é uma simetria de (3.8) se

$$\Delta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}, \hat{u}_{\hat{x}}, \hat{u}_{\hat{t}}, \dots) = 0 \quad \text{quando} \quad (3.8) \quad \text{vale.} \quad (3.10)$$

Como o conjunto das simetrias de uma EDP forma um grupo de Lie, basta determinar as respectivas transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \varepsilon\xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{t} &= t + \varepsilon\tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u} &= u + \varepsilon\eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{3.11}$$

essas simetrias são também denominadas grupos de Lie a um parâmetro. Com gerador:

$$G = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \eta\partial_u.\tag{3.12}$$

Equivalentemente, obtemos $(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u})$ pela resolução de

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}); \quad \frac{d\hat{t}}{d\varepsilon} = \tau(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}); \quad \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}),$$

sujeitas às condições iniciais equação

$$(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u})|_{\varepsilon=0} = (x, t, u).$$

Uma superfície $u = u(x, t)$ é mapeada nela mesma pelo grupo de transformações gerado por G se

$$G(u - u(x, t)) = 0 \quad \text{quando} \quad u = u(x, t).\tag{3.13}$$

Esta condição pode ser expressa pela função característica como

$$Q = \eta - \xi u_x - \tau u_t = 0.\tag{3.14}$$

De (3.13), a superfície é invariante desde que

$$Q = 0, \quad \text{quando} \quad u = u(x, t) \quad .\tag{3.15}$$

A equação (3.15) é chamada de *condição de superfície invariante* e é utilizada para obter soluções exatas de EDPs. A prolongação da transformação de ponto (3.11) para derivadas de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\hat{u}_{\hat{x}} &= u_x + \varepsilon\eta^x(x, t, u, u_x, u_t) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u}_{\hat{t}} &= u_t + \varepsilon\eta^t(x, t, u, u_x, u_t) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde, de (3.6),

$$\begin{aligned}\eta^x(x, t, u, u_x, u_t) &= D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau, \\ \eta^t(x, t, u, u_x, u_t) &= D_t \eta - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau.\end{aligned}\quad (3.17)$$

A transformação pode ser prolongada para derivadas de ordem superior recursivamente usando (3.7). Suponhamos que

$$\hat{u}_J = u_J + \varepsilon \eta^J + O(\varepsilon^2), \quad (3.18)$$

onde

$$u_J \equiv \frac{\partial^{j_1+j_2} u}{\partial x^{j_1} \partial t^{j_2}}, \quad \hat{u}_J \equiv \frac{\partial^{j_1+j_2} \hat{u}}{\partial \hat{x}^{j_1} \partial \hat{t}^{j_2}}, \quad (3.19)$$

para alguns números j_1 e j_2 . Então (3.7) fornece

$$\begin{aligned}\hat{u}_{J\hat{x}} &= u_{Jx} + \varepsilon \eta^{Jx} + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u}_{J\hat{t}} &= u_{Jt} + \varepsilon \eta^{Jt} + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\quad (3.20)$$

onde

$$\begin{aligned}\eta^{Jx} &= D_x \eta^J - u_{Jx} D_x \xi - u_{Jt} D_x \tau, \\ \eta^{Jt} &= D_t \eta^J - u_{Jx} D_t \xi - u_{Jt} D_t \tau.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Alternativamente, podemos expressar as funções η^j em termos da característica, por exemplo,

$$\begin{aligned}\eta^x &= D_x Q + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}, \\ \eta^t &= D_t Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Termos de ordem superior são obtidos por indução em j_1 e j_2 :

$$\eta^J = D_J Q + \xi D_J u_x + \tau D_J u_t, \quad (3.23)$$

onde

$$D_J \equiv D_x^{j_1} D_t^{j_2}. \quad (3.24)$$

O gerador infinitesimal é prolongado por derivadas adicionando-se todos os termos da forma $\eta^j \partial_{u_j}$ acima até a ordem desejada. Por exemplo

$$G^1 = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \eta \partial_u + \eta^x \partial_{u_x} + \eta^t \partial_{u_t} = G + \eta^x \partial_{u_x} + \eta^t \partial_{u_t}, \quad (3.25)$$

$$G^2 = G^1 + \eta^{xx} \partial_{u_{xx}} + \eta^{xt} \partial_{u_{xt}} + \eta^{tt} \partial_{u_{tt}}. \quad (3.26)$$

De agora em diante, adotaremos a convenção de que o gerador seja prolongado quantas vezes forem necessárias para descrever a ação do grupo em todas as variáveis. Para encontrar a simetria de Lie de ponto necessitamos da expressão (3.21). Simetrias de Lie de ponto são obtidas diferenciando a condição de simetria (3.10) com relação a ε . Obtemos assim a condição de simetria linearizada:

$$G^{(2)} \Delta = 0 \quad \text{quando} \quad \Delta = 0. \quad (3.27)$$

Como exemplo tomemos a equação

$$u_t = u_x^2 \quad (3.28)$$

A condição de simetria linearizada é

$$\eta^t = 2u_x \eta^x, \quad \text{quando} \quad (3.28) \quad \text{vale.} \quad (3.29)$$

Escrevendo explicitamente e usando (3.28) para eliminar u_t , obtemos

$$\begin{aligned} & \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t) u_x^2 - \xi_u u_x^3 - \tau_u u_x^4 \\ &= 2u_x (\eta_x + (\eta_u - \xi_x) u_x + (\eta_u - \xi_x) u_x^2 - \tau_u u_x^3) \end{aligned}$$

Depois igualando os termos de coeficiente de u_x , teremos um sistema de equações determinantes:

$$\tau_u = 0, \quad (3.30)$$

$$\xi_u + 2\tau_x = 0, \quad (3.31)$$

$$\eta_u + \tau_t - 2\xi_x = 0, \quad (3.32)$$

$$\xi_t + 2\eta_x = 0, \quad (3.33)$$

$$\eta_t = 0. \quad (3.34)$$

Iniciamos resolvendo (3.30) obtemos:

$$\tau = A(x, t).$$

onde A é uma função arbitrária. A solução geral de (3.31) é assim dada por:

$$\xi = -2A_x u + B(x, t), \quad (3.35)$$

e de (3.32)

$$\eta = -2A_{xx}u^2 + (2B_x - A_t)u + C(x, t).$$

para algumas funções B e C . Substituindo estes resultados em (3.33) e (3.34), obtemos:

$$-4A_{xxx}u^2 + 4(2B_{xx} - A_{xt})u + B_t + 2C_x = 0, \quad (3.36)$$

$$-2A_{xxx}t^2 + (2B_{xt} - A_{tt})u + C_t = 0. \quad (3.37)$$

As funções A, B e C são independentes de u , assim (3.36) e (3.37) podem ser decompostas igualando coeficientes de u , as seguintes equações:

$$C_t = 0, \quad (3.38)$$

$$B_t + 2C_x = 0, \quad (3.39)$$

$$2B_{xt} + A_{tt} = 0, \quad (3.40)$$

$$B_{xx} - A_{xt} = 0, \quad (3.41)$$

$$A_{xxt} = 0, \quad (3.42)$$

$$A_{xxx} = 0. \quad (3.43)$$

Das equações (3.38), (3.39) e (3.40), obtemos:

$$\begin{aligned} C &= \alpha(x), B = \alpha'(x)t + \beta(x), \\ A &= \alpha''(x)t^2 + \gamma(x)t + \delta(x). \end{aligned} \quad (3.44)$$

As funções α, β, γ e δ são funções de x determinadas pela substituição de (3.44) em (3.41), (3.42) e (3.43). Igualando os coeficientes de potências de t , e resolvendo obtemos

finalmente

$$\begin{aligned}
 \xi &= -4c_1tx - 2c_2t + c_4\left(\frac{1}{2}x^2 - 2tu\right) + c_6x + c_7 - 4c_8xu - 2c_9u, \\
 \tau &= -4c_1t^2 - c_4xt + c_5t + c_8x^2 + c_9x + 2c_{10}, \\
 \eta &= 4c_1x^2 + c_2x + c_3 + c_4xu + c_5u + 2c_6u - 4c_8u^2.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

que contêm 10 constantes arbitrárias, significando que a álgebra de Lie tem 10 dimensões.

A álgebra de simetria infinitesimal da equação (3.28), é então definida pelos geradores:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= -4tx\frac{\partial}{\partial x} - 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + 4t^2\frac{\partial}{\partial u}, \\
 G_2 &= -2t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u}, \\
 G_3 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\
 G_4 &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2tu\right)\frac{\partial}{\partial x} + 4xt^2\frac{\partial}{\partial t} + xu\frac{\partial}{\partial u}, \\
 G_5 &= t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}, \\
 G_6 &= -x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, \\
 G_7 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
 G_8 &= -4ux\frac{\partial}{\partial t} + x^2\frac{\partial}{\partial t} - 4u^2\frac{\partial}{\partial u}, \\
 G_9 &= -2u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}, \\
 G_{10} &= -2t\frac{\partial}{\partial t},
 \end{aligned}$$

3.2 Soluções invariantes

Existem na literatura diferentes métodos de soluções de EDPs. Nesta seção vamos introduzir o método das características, que consiste em obter soluções invariantes por um determinado grupo de simetria. Tomemos o gerador

$$G = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

Uma solução $u(x, t)$ é invariante pela transformação gerado por G se:

$$Q \equiv \eta - \xi u_x - \tau u_t = 0, \quad (3.46)$$

que é usualmente mais fácil de resolver que a equação original. Resolvemos a condição de superfície invariante com as equações características

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\eta}. \quad (3.47)$$

Introduzimos então coordenadas canônicas $r(x, t, u)$ e $v(x, t, u)$ que são duas integrais primeiras de (3.47) funcionalmente independentes. A solução da condição de superfície é dada por:

$$v = F(r). \quad (3.48)$$

Podemos tomar como exemplo o gerador

$$G = cG_1 + G_2 = c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

A condição de superfície invariante é:

$$cu_x + u_t = 0,$$

assim as equações características são:

$$\frac{dx}{c} = \frac{dt}{1}.$$

Com uma quadratura nas equações características obtemos, $r = x - ct$ e $u = F(r)$ como solução invariante, é também conhecida como solução de onda.

3.3 Simetrias não-clássicas

Nesta seção vamos apresentar uma classe de grupo de transformações mais gerais gerais em um sentido que as transformações de Lie e que podem levar a soluções invariantes de uma EDP. Consideremos EDPs que possuem a seguinte forma,

$$\Delta_\beta \equiv u_{\sigma_\beta} - w_\beta \left(x, u^{(n)} \right) = 0, \quad \beta = 1, \dots, M. \quad (3.49)$$

onde $u = (u^1, \dots, u^n)$ são variáveis dependentes e $x = (x^1, \dots, x^n)$ são as variáveis independentes; $u^{(n)}$ representa o conjunto de variáveis dependentes e suas derivadas de ordem n ou menores. Cada $u_{\sigma\beta}$ é a maior derivada para algum u_σ .

$$G^{(J)} \Delta_\beta = 0$$

As transformações infinitesimais de simetria são,

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x + \varepsilon \theta^i(x, t, u), \\ \hat{u} &= u + \varepsilon \eta_\alpha(x, t, u),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= x + \varepsilon \theta^i(x, t, u), \\ u' &= u + \varepsilon \eta_\alpha(x, t, u),\end{aligned}$$

onde ε é o parâmetro infinitesimal do grupo e θ^i e η_α são funções de variáveis dependentes e variáveis independentes juntas. O gerador infinitesimal de simetria é dado por

$$G = \sum_i \theta^i(x, u) \partial_{x^i} + \sum_\alpha \eta_\alpha(x, u) \partial_{u^\alpha}.$$

A característica Q do grupo é ,

$$Q_\alpha = \eta_\alpha - \sum_i \theta^i u_{x^i}^\alpha \quad \alpha = 1, \dots, M$$

O conjunto das transformações infinitesimais, com seus respectivos geradores $\{G_1, \dots, G_n\}$ forma uma álgebra de Lie n -dimensional com relação ao produto definido pelo comutador de dois geradores:

$$[G_i, G_j] = \sum_k C_{ij}^k G_k$$

Os geradores infinitesimais prolongados podem ser expressos por uma fórmula geral,

$$G^{(J)} = \sum_i \theta^i(x, u) \partial_{x^i} + \sum_\alpha \eta_\alpha(x, u) \partial_{u^\alpha} + \sum_{\alpha, J} \eta_\alpha^J \partial_{u_\alpha^J}. \quad (3.50)$$

onde

$$u_\alpha^J = D_J u^\alpha, \quad (3.51)$$

em que

$$D_J = D_{x^1}^{j_1} D_{x^2}^{j_2} \dots D_{x^M}^{j_M}, \quad (3.52)$$

sendo J_R um número inteiro e Podemos agora definir simetria não clássica como uma transformação que mantém invariante não apenas a equação original, mas também a própria condição de invariância:

$$G^{(J)} \Delta = 0, \quad (3.53)$$

e

$$G^{(J)} Q = 0, \quad (3.54)$$

com J grande o suficiente. O sistema determinante que daí decorre é não linear nas incógnitas η_α e θ^i . O conjunto de todas as simetrias não-clássicas inclui as simetrias de Lie e não formam um espaço vetorial (portanto não formam uma álgebra). Como consequência e sem perda de generalidade podemos considerar $\theta^1 = 1$ ou $\theta^1 = 0$. Neste último caso podemos considerar $\theta^2 = 1$ ou $\theta^2 = 0$ e assim por diante. Uma propriedade útil é que se G for um gerador de simetria não clássica, então $F(x, u)G$ também será. O sistema de equações não-lineares obtidos é muito complicado e portanto o uso de computação algébrica se faz necessário. As técnicas introduzidas neste capítulo serão exploradas no capítulo seguinte com o auxílio do SADE [8].

Capítulo 4

Solução analítica da equação de Schrödinger não linear

Neste capítulo apresentamos soluções analíticas da ESNL. A análise foi feita em (1+1)dimensões, ou seja, uma dimensão de espaço e uma de tempo. Extensões para (2+1) e para (3+1) seguem a mesma metodologia, mas a complexidade dos cálculos aumenta substancialmente. Para esse estudo utilizamos o pacote SADE para busca a busca por simetrias e determinação de soluções invariantes de equações diferenciais parciais não-lineares. Na primeira seção encontramos os geradores de simetria de Lie. Na segunda seção construímos soluções invariantes por simetrias não-clássica. A EDP de nosso interesse é a ESNL quántica dependente do tempo:

$$\Delta(x, t, \psi, \psi_x, \dots) = i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - a_0 \psi - a_1 \psi |\psi|^2 - a_2 \psi |\psi|^4 = 0 \quad (4.1)$$

na qual a função de onda e seu complexo conjugado são dados por

$$\psi = \phi_1 + i\phi_2 \quad \text{e} \quad \psi^* = \phi_1 - i\phi_2$$

com a_0 , a_1 e a_2 sendo coeficientes e $\hbar = 1$. Temos dois valores para θ , $\theta_1 = 0$ e $\theta_1 = 1$. Para o cálculo computacional, é conveniente separar as partes real(A) e imaginária(B) da equação (4.1):

$$A = -\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1^2}{\partial x^2} - a_0 \phi_1 - a_1 (\phi_1)^3 - a_1 \phi_1 (\phi_2)^2 - a_2 (\phi_1)^5 - 2a_2 (\phi_1)^3 (\phi_2)^2 - a_2 \phi_1 (\phi_2)^4 = 0,$$

$$B = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2^2}{\partial x^2} - a_1 (\phi_2)^3 - a_1 (\phi_1)^2 \phi_2 - a_2 (\phi_1)^4 \phi_2 - 2a_2 (\phi_1)^2 (\phi_2)^3 - a_2 (\phi_2)^5 - a_0 \phi_2.$$

A transformação infinitesimal de simetria é então:

$$\begin{aligned} \phi_1' &= \phi_1 + \epsilon \eta_1 (x, t, \phi_1, \phi_2), \\ \phi_2' &= \phi_2 + \epsilon \eta_2 (x, t, \phi_1, \phi_2), \\ t' &= t + \epsilon \theta_1 (x, t, \phi_1, \phi_2), \\ x' &= x + \epsilon \theta_2 (x, t, \phi_1, \phi_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Gerador de simetria de Lie:

$$G = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \phi_2} + \theta_1 \frac{\partial}{\partial t} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

4.1 Simetrias e Álgebras de Lie

Nesta seção determinamos as simetrias de Lie associadas à ESNL para diferentes coeficientes.

Caso1: $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. Geradores de Simetria:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
 G_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
 G_3 &= \phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_1} - \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
 G_4 &= \phi_2 x \frac{\partial}{\partial \phi_1} - \phi_1 x \frac{\partial}{\partial \phi_2} - 2t \frac{\partial}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

A relação de comutação entre os geradores é dada pela seguinte tabela, a entrada linha i e coluna j representa $[G_i, G_j]$:

Álgebra de Lie da ESNL				
$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4
G_1	0	0	0	$-2G_2$
G_2	0	0	0	G_3
G_3	0	0	0	0
G_4	$2G_2$	$-G_3$	0	0

CASO2: $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, a_2 = 0$. Geradores de Simetria:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
 G_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
 G_3 &= -\phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
 G_4 &= -\phi_2 x \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 x \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial x}, \\
 G_5 &= (-\phi_1 + 2\phi_2 a_0 t) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + (-2\phi_1 a_0 t - 2\phi_2) \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Elementos da álgebra Lie:

Álgebra de Lie da ESNL					
$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
G_1	0	0	0	$2G_2$	$2G_1 - 2a_0G_3$
G_2	0	0	0	G_3	G_2
G_3	0	0	0	0	0
G_4	$-2G_2$	$-G_3$	0	0	$-G_4$
G_5	$-2G_1 + 2a_0G_3$	$-G_2$	0	G_4	0

CASO3: $a_0 \neq 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0$. Geradores de Simetria:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
G_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_3 &= -\phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
G_4 &= -\phi_2 x \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 x \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_5 &= \left(\frac{-1}{2} \phi_1 + 2\phi_2 a_0 t \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \left(-2\phi_1 a_0 t - \frac{1}{2} \phi_2 \right) \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_6 &= \left(-\frac{1}{2} \phi_1 + 2\phi_2 a_0 t \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + (-2\phi_1 a_0 t - 2\phi_2) \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2xt \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Elementos da álgebra Lie:

Álgebra de Lie da ESNL						
$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	0	0	$2G_2$	$2G_1 - 2a_0G_3$	$2G_5$
G_2	0	0	0	G_3	G_2	G_4
G_3	0	0	0	0	0	0
G_4	$-2G_2$	$-G_3$	0	0	$-G_4$	0
G_5	$-2G_1 + 2a_0G_3$	$-G_2$	0	G_4	0	$2G_6$
G_6	$-2G_5$	$-G_4$	0	0	$-2G_6$	0

CASO4: $a_0 \neq 0, a_1 = 0, a_2 = 0$. Geradores de Simetria:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
G_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_3 &= \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
G_4 &= -\phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
G_5 &= -\phi_2 x \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 x \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_6 &= \left(-\phi_1 t - \frac{1}{2} \phi_2 x^2 + \phi_2 a_0 t^2 \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \left(\frac{1}{2} \phi_1 x^2 - \phi_1 a_0 t^2 - \phi_2 t \right) \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2xt \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_7 &= 2\phi_2 a_0 t \frac{\partial}{\partial \phi_1} - 2\phi_1 a_0 t \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Elementos da álgebra Lie:

Álgebra de Lie da ESNL							
$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7
G_1	0	0	0	0	$2G_2$	$-G_3 + 2G_7$	$2G_1 - 2a_0 G_4$
G_2	0	0	0	0	G_4	G_5	G_2
G_3	0	0	0	0	0	0	0
G_4	0	0	0	0	0	0	0
G_5	$-2G_2$	$-G_4$	0	0	0	0	$-G_5$
G_6	$G_3 - 2G_7$	$-G_5$	0	0	0	0	$-2G_6$
G_7	$-2G_1 + 2a_0 G_4$	$-G_2$	0	0	G_5	$2G_6$	0

CASO5: $a_0 = 0, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. Geradores de Simetria:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
G_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_3 &= -\phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
G_4 &= -\phi_2 x \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 x \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Elementos da álgebra de Lie:

Álgebra de Lie da ESNL				
$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4
G_1	0	0	0	$2G_2$
G_2	0	0	0	G_3
G_3	0	0	0	0
G_4	$-2G_2$	$-G_3$	0	0

CASO6: $a_0 = 0, a_1 \neq 0, a_2 = 0$. Geradores de Simetria:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
 G_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
 G_3 &= -\phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
 G_4 &= -\phi_2 x \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 x \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial x}, \\
 G_5 &= -\phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} - \phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Elementos da álgebra Lie:

Álgebra de Lie da ESNL					
$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
G_1	0	0	0	$2G_2$	$2G_1$
G_2	0	0	0	G_3	G_2
G_3	0	0	0	0	0
G_4	$-2G_2$	$-G_3$	0	0	$-G_4$
G_5	$-2G_1$	$-G_2$	0	G_4	0

CASO7: $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 \neq 0$. Geradores de simetria:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
G_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_3 &= -\phi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_2}, \\
G_4 &= -\phi_2 x \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \phi_1 x \frac{\partial}{\partial \phi_2} - 2t \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_5 &= -\frac{1}{2} \phi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \frac{1}{2} \phi_2 t \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \\
G_6 &= \left(-\phi_1 t - \frac{1}{2} \phi_2 x^2 \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \left(\frac{1}{2} \phi_1 x^2 - \phi_2 t \right) \frac{\partial}{\partial \phi_2} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2xt \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Elementos da álgebra Lie:

Álgebra de Lie da ESNL						
$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	0	0	$2G_2$	$2G_1$	$2G_5$
G_2	0	0	0	G_3	G_2	G_4
G_3	0	0	0	0	0	0
G_4	$-2G_2$	$-G_3$	0	0	$-G_4$	0
G_5	$-2G_1$	$-G_2$	0	G_4	0	$2G_6$
G_6	$-2G_5$	$-G_4$	0	0	$-2G_6$	0

4.2 Simetrias não clássicas e Soluções invariantes

Temos dois casos de simetria não-clássica $\theta_1 = 0$ e $\theta_1 = 1$ para serem estudados.

Vamos considerar inicialmente o segundo caso:

$$G = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \phi_2} + \frac{\partial}{\partial t} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.9)$$

A condição de superfície invariante, $Q_i = 0$ se escreve como:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \eta_1 - \theta_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \eta_2 - \theta_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x}, \quad (4.11)$$

e o gerador de infinitesimal de simetria prolongado como:

$$G^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial \phi_2} + \eta_2^x \frac{\partial}{\partial \phi_{2x}} + \eta_1^x \frac{\partial}{\partial \phi_{1x}} + \eta_2^t \frac{\partial}{\partial \phi_{2t}} + \eta_1^t \frac{\partial}{\partial \phi_{1t}} + \eta_2^{xx} \frac{\partial}{\partial \phi_{2xx}} + \eta_1^{xx} \frac{\partial}{\partial \phi_{1xx}}. \quad (4.12)$$

A condição de simetria linearizada para a simetria não-clássica é

$$G^{(2)}A = 0, \\ -2\eta_2 a_1 \phi_1 \phi_2 - 4\eta_2 a_2 \phi_1^3 \phi_2 - 4\eta_2 a_2 \phi_1 \phi_2^3 - \eta_1 a_0 - 3\eta_1 a_1 \phi_1 \phi_2^2 \\ -2\eta_1 a_1 \phi_1 \phi_2 - 5\eta_1 a_2 \phi_1^4 - 6\eta_1 a_2 \phi_1^2 \phi_2^2 - \eta_1 a_2 \phi_1 \phi_2^4 - \eta_2^t + \eta_1^{xx} = 0 \quad (4.13)$$

$$G^{(2)}B = 0, \\ -\eta_2 a_0 - \eta_2 a_1 \phi_1^2 - 3\eta_2 a_1 \phi_2^2 - \eta_2 a_2 \phi_1^4 - 6\eta_2 a_2 \phi_1 \phi_2^2 - 5\eta_2 a_2 \phi_2^4 - 2\eta_1 \phi_1 \phi_2 \\ -4\eta_1 a_2 \phi_1^3 \phi_2 - 4\eta_1 a_2 \phi_1 \phi_2^3 - \eta_1^t + \eta_2^{xx} = 0, \quad (4.14)$$

Substituindo (4.10) e (4.11) nas equações determinantes para eliminar as derivadas temporais. Isolando ϕ_{xx} e ϕ_{2xx} na equação (4.1) e substituindo nos respectivos termos ϕ_{1xx} e ϕ_{2xx} das equações (4.13) e (4.14). Obtemos duas equações que dependem de ϕ_{1x} e ϕ_{2x} . Igualando a zero os coeficientes das potências de ϕ_{1x} e ϕ_{2x} obtemos um conjunto de 15 equações:

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \phi_1^2} = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \phi_2^2} = 0, \quad (4.17)$$

$$\theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \phi_2^2} = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial \phi_1^2} - \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} = 0, \quad (4.19)$$

$$\theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial \phi_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial \phi_2} = 0, \quad (4.20)$$

$$\theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} - \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial \phi_2} + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} - \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial \phi_1} - \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} = 0, \quad (4.22)$$

$$-2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x \partial \phi_1} - \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \phi_1^2} = 0, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & -\theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) \eta_1 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) \eta_2 + \theta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} - \theta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_1} - 4 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^3 \phi_2^2 \\ & - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1 \phi_2^4 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_1 \phi_2^2 + 2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x \partial \phi_1} - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_0 \phi_1 \\ & - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^5 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_1^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x \partial \phi_1} - \theta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_1} + \theta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) \eta_1 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) \eta_2 - \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - 2\theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \\ & - 4 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^2 \phi_2^3 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1^2 \phi_2 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^4 \phi_2 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_2^5 \\ & - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_0 \phi_2 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_2^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x \partial \phi_1} - \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1 \phi_2^4 - 6 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^3 \phi_2^2 \\
& - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^2 \phi_2^3 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^4 \phi_2 - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1 \phi_2^2 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_1^2 \phi_2 \\
& - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_0 \phi_1 - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^5 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_2^5 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_0 \phi_2 - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1^3 \\
& - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_2^3 + \theta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_2} + \theta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) \eta_2 + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) \eta_1 = 0, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x \partial \phi_2} - \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1 \phi_2^4 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^3 \phi_2^2 - 6 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^2 \phi_2^3 - \\
& 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^4 \phi_2 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1 \phi_2^2 - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_1^2 \phi_2 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_0 \phi_1 \\
& - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^5 - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_2^5 - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_0 \phi_2 - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1^3 \\
& - 3 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_2^3 - \theta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_2} - \theta_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} - \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} \right) \eta_2 + 3 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_2} \right) = 0, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4a_2 \phi_1 \phi_2^3 \eta_1 - 6a_2 \phi_1^2 \phi_2^2 \eta_2 - 4a_2 \phi_1^3 \phi_2 \eta_1 - 5a_2 \phi_2^4 \eta_2 - a_2 \phi_1^4 \eta_2 - a_0 \eta_2 + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} - 2a_1 \phi_1 \phi_2 \eta_1 \\
& - 3a_1 \phi_2^2 \eta_2 - a_1 \phi_1^2 \eta_2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1 \phi_2^4 + 2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^3 \phi_2^2 + 2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^2 \phi_2^3 + \\
& \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^4 \phi_2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1 \phi_2^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_1^2 \phi_2 - 4 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_2 \phi_1^2 \phi_2^3 \\
& - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_2 \phi_1^4 \phi_2 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_1 \phi_1^2 \phi_2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_0 \phi_1 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^5 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_2^5 \\
& + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_0 \phi_2 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_2 \phi_2^5 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_0 \phi_2 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_1 \phi_2^3 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1^3 + \\
& \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_2^3 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_1} \right) + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_2} \right) \eta_2 - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) \eta_1 + \\
& + 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) \eta_2 + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = 0, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \theta_2 \right) - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) \eta_1 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_1} \right) + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \phi_2} \right) \eta_2 - 4a_2 \phi_1 \phi_2^3 \eta_1 \\
& - 6a_2 \phi_1^2 \phi_2^2 \eta_2 - 4a_2 \phi_1^3 \phi_2 \eta_1 - a_2 \phi_1^4 \eta_2 - 5a_2 \phi_2^4 \eta_2 - a_0 \eta_2 \\
& + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) \eta_2 + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1 \phi_2^4 + 2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^3 \phi_2^2 \\
& + 2 \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^2 \phi_2^3 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_1^4 \phi_2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1 \phi_2^2 \\
& + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_1^2 \phi_2 - 4 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_2 \phi_1^2 \phi_2^3 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_2 \phi_1^4 \phi_2 \\
& - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_1 \phi_1^2 \phi_2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_0 \phi_2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_1 \phi_1^3 \\
& + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_1 \phi_2^3 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_2 \phi_2^5 - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_0 \phi_2 \\
& - 2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) a_1 \phi_2^3 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_0 \phi_1 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_1} \right) a_2 \phi_1^5 \\
& + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial \phi_2} \right) a_2 \phi_2^5 + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - 2a_1 \phi_1 \phi_2 \eta_1 - a_1 \phi_1^2 \eta_2 - 3a_1 \phi_2^2 \eta_2 = 0. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Começamos resolvendo as treze primeiras equações. Tais equações podem ser reduzidas a forma involutiva(triangularizada) com o auxílio de computação algébrica [20]. Como o sistema é não-linear, obtemos por essa decomposição três casos(ramos). No primeiro caso, após algumas manipulações obtemos que

$$\begin{aligned}
\eta_1(x, t, \phi_1, \phi_2) &= f_1(x, t) \phi_1 + f_2(x, t) \phi_1 + f_3(x, t), \\
\eta_2(x, t, \phi_1, \phi_2) &= f_4(x, t) \phi_1 + f_5(x, t) \phi_1 + f_6(x, t), \\
\theta_2(x, t, \phi_1, \phi_2) &= f_7(x, t). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

com f_i , $i = 1, \dots, 7$ satisfazendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{1}{2} f_7 f_2 + \frac{1}{2} f_7 f_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_7}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial f_5}{\partial x} - \frac{1}{2} f_7 f_2 - \frac{1}{2} f_7 f_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_7}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{1}{2} f_7 f_5 - \frac{1}{2} f_7 f_1 + \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_7 + \frac{1}{2} \frac{\partial f_7}{\partial t} &= 0, \\
\frac{\partial f_4}{\partial x} - \frac{1}{2} f_7 f_1 + \frac{1}{2} f_7 f_5 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} f_7 - \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_7 &= 0. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Substituímos também η_1 , η_2 e θ_2 nas duas equações restantes e igualando a zero os coeficientes de potências ϕ_1 e ϕ_2 . Obtemos 27 equações:

$$3a_1f_3 = 0, \quad (4.32)$$

$$2a_1f_3 = 0, \quad (4.33)$$

$$a_1f_3 = 0, \quad (4.34)$$

$$3a_1f_6 = 0, \quad (4.35)$$

$$2a_1f_6 = 0, \quad (4.36)$$

$$a_1f_6 = 0, \quad (4.37)$$

$$6a_2f_3 = 0, \quad (4.38)$$

$$5a_2f_3 = 0, \quad (4.39)$$

$$4a_2f_3 = 0, \quad (4.40)$$

$$a_2f_3 = 0, \quad (4.41)$$

$$6a_2f_6 = 0, \quad (4.42)$$

$$5a_2f_6 = 0, \quad (4.43)$$

$$4a_2f_6 = 0, \quad (4.44)$$

$$a_2f_6 = 0, \quad (4.45)$$

$$2a_1f_1 + 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) a_1 = 0, \quad (4.46)$$

$$2a_1f_2 + 2f_4a_1 = 0; \quad (4.47)$$

$$4a_2f_1 + 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) a_2 = 0, \quad (4.48)$$

$$4f_4a_2 + 4a_2f_2 = 0, \quad (4.49)$$

$$2f_5a_1 + 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) a_1 = 0, \quad (4.50)$$

$$4f_5a_2 + 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) a_2 = 0, \quad (4.51)$$

$$4f_5a_2 + 4 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) a_2 + 4a_2f_1 = 0, \quad (4.52)$$

$$-f_1f_2 - f_4f_5 - 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) a_0 - \frac{\partial f_4}{\partial t} - 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_4 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0, \quad (4.53)$$

$$f_4f_5 + \frac{\partial f_2}{\partial t} - 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) a_0 + 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_2 + f_1f_2 + \frac{\partial^2 f_5}{\partial x^2} = 0, \quad (4.54)$$

$$-\frac{\partial f_5}{\partial t} - f_2f_4 - (f_2)^2 + f_5f_1 - 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_5 - (f_5)^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 0, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} + (f_1)^2 + f_2f_4 + (f_4)^2 - f_5f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial t} + 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_1 = 0, \quad (4.56)$$

$$-a_0f_3 - f_5f_6 - \frac{\partial f_6}{\partial t} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_6 - f_2f_3 - f_4f_3 + f_1f_6 = 0, \quad (4.57)$$

$$f_4f_6 + f_1f_3 + f_2f_6 - f_5f_3 + \frac{\partial^2 f_6}{\partial x^2} f_6 + 2 \left(\frac{\partial f_7}{\partial x} \right) f_3 - a_0f_6 + \frac{\partial f_3}{\partial t} = 0. \quad (4.58)$$

Algumas dessas equações são trivialmente solúveis e nos dão $f_3 = 0$, $f_6 = 0$ e $f_4 = -f_2$. Normalmente reduzindo à forma involutiva obtemos 6 ramos possíveis. O primeiro é dado pelas equações $a_1 = 0$:

$$\frac{\partial^2 f_5}{\partial t^2} = 12f_5 \frac{\partial f_5}{\partial t} - 16f_5^3 \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} = -4f_5^2 + \frac{\partial f_5}{\partial t} \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial t} = -2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + 4f_7 f_5 \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = 4f_5 f_2 - 4a_0 f_5 \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial x} = -2f_5 \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial x} = 0 \quad (4.64)$$

$$f_5 = f_1 \quad (4.65)$$

com solução:

$$f_1(x, t) = f_5(x, t) = \frac{(-c_1 t - c_2)}{(2c_1 t^2 + 4c_2 t + 4)}, \quad (4.66)$$

$$f_2(x, t) = \frac{(4a_0 c_1 t^2 + 8a_0 c_2 t - c_1 x^2 + 4c_3 x + 4c_4)}{(4c_1 t^2 + 8c_2 t + 8)}, \quad (4.67)$$

$$f_7(x, t) = ((c_1 x - 2c_3)t + xc_2 + c_5)(c_1 t^2 + 2c_2 t + 2), \quad (4.68)$$

$$f_4(x, t) = -f_2(x, t), \quad (4.69)$$

$$f_3(x, t) = f_6(x, t) = 0. \quad (4.70)$$

$$(4.71)$$

O gerador de simetria é então escrito na forma:

$$\begin{aligned} G = & \left(\frac{(-c_1 t - c_2) \phi_1}{2c_1 t^2 + 4c_2 t + 4} + \frac{(4a_0 c_1 t^2 + 8a_0 c_2 t - c_1 x^2 + 4c_3 x + 4c_4) \phi_2}{4c_1 t^2 + 8c_2 t + 8} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} \\ & + \left(-\frac{(4a_0 c_1 t^2 + 8a_0 c_2 t - c_1 x^2 + 4c_3 x + 4c_4) \phi_1}{4c_1 t^2 + 8c_2 t + 8} + \frac{(-c_1 t - c_2) \phi_2}{2c_1 t^2 + 4c_2 t + 4} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_2} + \frac{\partial}{\partial t} \\ & + \left(\frac{((c_1 x - 2c_3)t + xc_2 + c_5)}{c_1 t^2 + 2c_2 t + 2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde os c_i 's são constantes arbitrárias. É possível mostrar que o gerador obtido é uma combinação de simetrias de Lie, o mesmo acontecendo com os demais cinco ramos. Como exemplo de como obter uma solução invariante, tomando $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ no gerador

acima obtemos o seguinte gerador

$$G = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c_5}{2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.73)$$

que satisfaz $G = G_1 + \frac{c_5}{2} G_2$.

As equações características são,

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c_5/2} \quad (4.74)$$

cuja solução é

$$\phi_1(x, t) = F_1 \left(\frac{-2x + tc_5}{c_5} \right) \quad \text{e} \quad \phi_2(x, t) = F_2 \left(\frac{-2x + tc_5}{c_5} \right). \quad (4.75)$$

Substituindo (4.75) na parte real e imaginária de (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} A &= - \left(\frac{d}{d\xi_1} F_2(\xi_1) \right) c_5^2 + 4 \frac{d^2}{d\xi_1^2} F_1(\xi_1) - a_0 F_1(\xi_1) c_5^2 - a_2 (F_1(\xi_1))^5 c_5^2 \\ &\quad - 2a_2 (F_1(\xi_1))^3 (F_2(\xi_1))^2 c_5^2 - a_2 F_1(\xi_1) (F_2(\xi_1))^4 c_5^2 = 0, \\ B &= -2a_2 (F_1(\xi_1))^2 (F_2(\xi_1))^3 c_5^2 + \left(\frac{d}{d\xi_1} F_1(\xi_1) \right) c_5^2 - a_0 F_2(\xi_1) c_5^2 \\ &\quad - a_2 (F_1(\xi_1))^4 F_2(\xi_1) c_5^2 + 4 \frac{d^2}{d\xi_1^2} F_2(\xi_1) - a_2 (F_2(\xi_1))^5 c_5^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Para esse sistema não foi possível encontrar uma solução fechada. No entanto, uma solução particular permitiria obter uma solução da equação original (4.1). Essa equação admite o gerador de simetria(obtido utilizando o pacote SADE [8]):

$$G = \left(\frac{-1}{2} F_1 + \frac{1}{8} F_2 c_5^2 \xi_1 \right) D_{F_1} + \left(\frac{-1}{8} c_5^2 F_1 \xi_1 - \frac{1}{2} F_2 \right) D_{F_2} + \xi_1 D_{\xi_1} \quad (4.77)$$

que é um gerador de simetria de Lie de (4.76) se

$$a_0 = \frac{1}{16} c_5^2. \quad (4.78)$$

A solução invariante de (4.76) correspondendo a (4.77) é:

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= \frac{c_1 \sin\left(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1\right) + c_2 \cos\left(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1\right)}{\sqrt{\xi_1}}, \\ F_2(\xi_1) &= -\frac{-c_1 \cos\left(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1\right)}{\sqrt{\xi_1}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Substituindo (4.79) na ESNL obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(a_2 c_5^2 c_1^4 - 3 + a_2 c_5^2 c_2^4 + 2a_2 c_5^2 c_2^2 c_1^2)(-c_1 \cos(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1) + c_2 \sin(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1))}{\xi_1^{5/2}} &= 0, \\ -\frac{(a_2 c_5^2 c_1^4 - 3 + a_2 c_5^2 c_2^4 + 2a_2 c_5^2 c_2^2 c_1^2)(c_1 \sin(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1) + c_2 \cos(\frac{1}{8} c_5^2 \xi_1))}{\xi_1^{5/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Igualando a zeros coeficientes de F_1 e F_2 em (4.80), obtemos

$$c_1 = \sqrt{\frac{-c_2^2 c_5 \sqrt{a_2} + \sqrt{3}}{c_5 \sqrt{a_2}}}. \quad (4.81)$$

Substituindo (4.78) e (4.81) em (4.79) obtemos, a solução da ESNL,

$$\begin{aligned} \phi_1(x, t) &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{\frac{-2x + 4t\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_0}}}} \left(\left(\frac{1}{4} \sqrt{4} \sqrt{\frac{-4c_2^2 \sqrt{a_0} \sqrt{a_2} + \sqrt{3}}{\sqrt{a_0} \sqrt{a_2}}} \right) \right. \\ &\times \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) + c_2 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) \left. \right) \\ \phi_2(x, t) &= -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{\frac{-2x + 4t\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_0}}}} \left(\frac{-1}{4} \sqrt{4} \sqrt{\frac{-4c_2^2 \sqrt{a_0} \sqrt{a_2} + \sqrt{3}}{\sqrt{a_0} \sqrt{a_2}}} \right. \\ &\times \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) + C_2 \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) \left. \right). \quad (4.82) \end{aligned}$$

A função de onda em si não tem significado físico e sim o seu módulo quadrado que representa uma densidade de probabilidade, que é dada por,

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)|^2 &= \frac{4\sqrt{a_0}}{-2x + 4t\sqrt{a_0}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-4c_2^2 \sqrt{a_0} \sqrt{a_2} + \sqrt{3}}{\sqrt{a_0} \sqrt{a_2}}} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) \right. \\ &+ c_2 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) \left. \right)^2 + \frac{4\sqrt{a_0}}{-2x + 4t\sqrt{a_0}} \left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{-4c_2^2 \sqrt{a_0} \sqrt{a_2} + \sqrt{3}}{\sqrt{a_0} \sqrt{a_2}}} \right. \\ &\times \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) + c_2 \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{a_0} (-2x + 4t\sqrt{a_0}) \right) \left. \right)^2. \quad (4.83) \end{aligned}$$

Abaixo temos o gráfico da densidade de probabilidade.

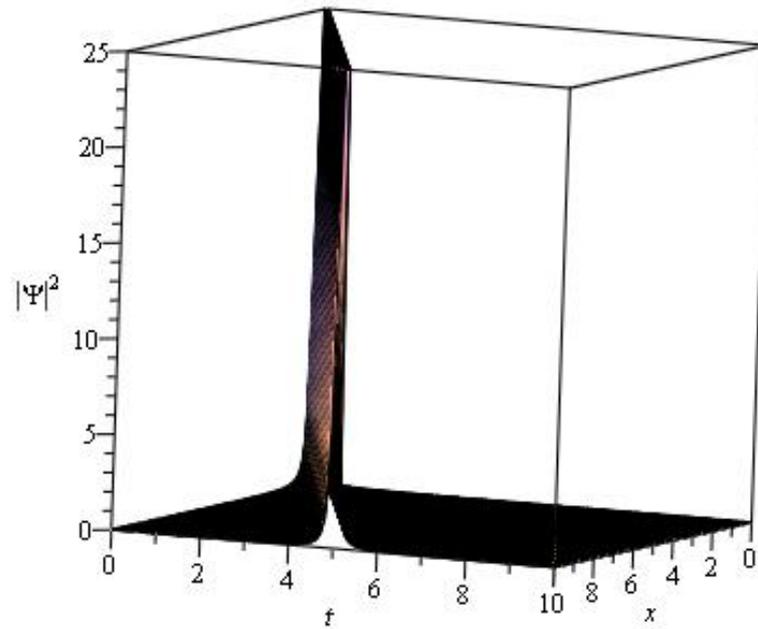


Figura 4.1: Gráfico da Onda Solitária

Ondas Solitárias são ondas que mantêm sua forma inalterada a medida que se propaga.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, estudamos métodos de simetria de Lie e simetrias não-clássicas, para obter soluções invariantes para a equação de Schrödinger não-linear.

No segundo capítulo, introduzimos conceitos fundamentais como espaço topológico e variedades diferenciais e a partir desses conceitos foi possível definir um grupo de Lie. Consideramos um grupo de simetria e obtemos geradores infinitesimais de simetria. Mostramos que esses geradores formam um espaço vetorial e possuem uma álgebra de Lie.

No terceiro capítulo, alguns conceitos foram introduzidos para obtermos as simetrias e soluções invariantes. Iniciamos estudando transformações locais para EDPs de duas variáveis e foram obtidos os geradores infinitesimais de simetria e com um exemplo ilustramos o método. Na segunda seção, de posse de uma determinada simetria mostramos como construir uma solução invariante, utilizando o método da característica. Na terceira seção, construímos soluções invariantes por uma simetria não clássica (impomos uma restrição no gerador de simetria).

No capítulo quatro, apresentamos os resultados obtidos com o auxílio do pacote computacional SADE. Na primeira seção, obtemos as simetrias e a álgebra associada a simetria para diferentes coeficientes da equação. Na segunda seção, estudamos simetrias não clássicas, essas simetrias nos permitiu obter novamente todas as simetrias de Lie, mas para a ENSL(1+1). Não encontramos simetrias diferentes das obtidas via simetria Lie. Para dois casos obtivemos soluções invariantes.

Como perspectiva para trabalhos futuros continuaremos investigando soluções invariantes por simetrias não-clássicas para o caso da ENSL para os casos (2+1) e (3+1) dimensionais. Estudaremos também as leis de conservação e outras simetrias. Outra proposta é estudar a estabilidade de soluções da ENSL obtidas e considerar outros campos.

Referências Bibliográficas

- [1] Boyce. W. E, DiPrima. Richard. C, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, Rio de janeiro, (2002).
- [2] Machado. K. D, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*, UEPG, (2004).
- [3] Ibragimov. N. H, *Lie group analysis: classical heritage*, ALGA Publications, (2004).
- [4] Olver. P. J, *J. Diff. Geom* **14**, 497-542, (1979).
- [5] Ovsjannikov. L. V, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, (1982).
- [6] Olver. P. J, Rosenau. P, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **47**, 263-278, (1987).
- [7] Bluman. G. W, Cole. J. D, *J. Math. Mech* **18**, 1025-1042, (1969).
- [8] Rocha. Filho. T. M, A. Figueiredo, *Computer Physics Communications*, **182**, 467-476, (2010).
- [9] Sakurai. J .J, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (1994).
- [10] Cohen-Tannoudji C. Diu. B, *Quantum Mechanics*, Wiley, (1977).
- [11] Carr. L. D, Clark. C, Reinhardt. W. P, *Physical Review A*, **62**, 10, (2000).
- [12] Kasprzak. J. Richard, M. Kundermann, S. Baas, A. Jeambrun, P. Keeling, J. M. J, Marchetti , F. , Szymanska, M. Andre,R., Staehli. J., et al., *Nature*, **443**, 6, (2006).
- [13] Andrews. M. R, Townsend. C. G, Miesner. H. J, Durfee. , D. S, Kurn. D. M, Ketterle. W, *Science*, **275** , 637-641, (1997).
- [14] Carr. L. D, Clark. C, Reinhardt. W. P, *Physical Review A*, **62**, 10, (2000).
- [15] Gagnon. L, Winternitz. P, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 30, (1989).

-
- [16] Fushchich. W, Moskaliuk. S, *Lettere Al Nuovo Cimento*, **31**, 571-576, (1981).
- [17] Gagnon. L, Winternitz. P, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **21**, 20, (1988).
- [18] Gagnon. L, Winternitz. P, *Physical Review A*, **39**, 11, (1989).
- [19] Gagnon. L, Winternitz. P, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **26**, 17, (1993).
- [20] Mansfield. E. L, Reid. G. J, Clarkson. P. A, *Computer physics communications*, **115**, 29, (1998).
- [21] Rocha. P. M. M, *Simetrias e Soluções clássicas do modelo de Gross-Neveu*, Universidade de Brasília, (2011)
- [22] Silva. E. M., Rocha. Filho. T. M, Santana. A. E, *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing (2006).
- [23] Santana. A. E, Cardeal. J, F. Khanna, Montigny, M, Rocha. Filho. T. M, Centro, (2006).
- [24] Cardeal .J, Santana. A. E, Rocha. Filho. T. M, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **308**, 9, (2002).
- [25] Santana. A. E, Ribeiro. Filho. A, Vianna. J. D. M, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **22**, 11, (2000).
- [26] Rocha. Filho. T. M, *Mecânica Clássica*, Universidade de Brasília, (2009).
- [27] Olver . P. J, *Applications of Lie Groups to Differential equations*, Springer , (2000).
- [28] Gilmore. R, *Lie Group, Physics and Geometry*, Cambridge, (2008).
- [29] Bassalo. J. M. F, *Teoria de Grupos*, Person, (2008).
- [30] Hydon. P. E, *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*, Cambridge University Press, (2000).