



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**AMPLIFICAÇÃO DE MÁGNONS E DESMAGNETIZAÇÃO
DE POÇOS QUÂNTICOS DE (Ga,Mn)As INDUZIDA POR
CAMPO DE LASER**

HANNA DEGANI MIKHAIL

ORIENTADOR:

PROF. DR. ANTONIO LUCIANO DE ALMEIDA FONSECA

BRASÍLIA

OUTUBRO DE 2011

Hanna Degani Mikhail

Amplificação de Mágns e Desmagnetização de Poços Quânticos de (Ga,Mn)As Induzida por Campo de Laser

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Antonio Luciano de Almeida Fonseca

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

BRASÍLIA
OUTUBRO DE 2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de Brasília. Acervo 993584.

Mikhail, Hanna Degani.
M636a Amplificação de mágnons e desmagnetização de poços quânticos de (Ga,Mn) As induzida por campo de laser / Hanna Degani Mikhail.
133 f. : il. ; 30 cm.

Tese (doutorado) - Universidade de Brasília, Programa de Pós-Graduação em Física, 2011.
Inclui bibliografia.
Orientação: Antonio Luciano de Almeida Fonseca.

1. Schrodinger, Equação de. 2. Semicondutores. 3. Ferromagnetismo. I. Fonseca, Antonio Luciano de Almeida. II. Título.

ODU 538.221

“Amplificação de mágnons e desmagnetização de poços quânticos de (Ga, Mn) As induzida por campo de laser”

Por

Hanna Degani Mikhail

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

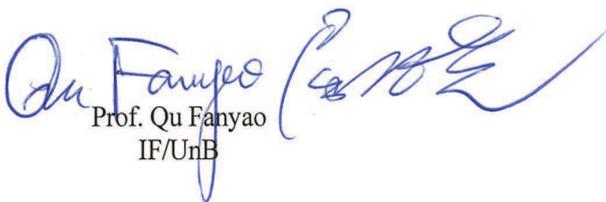
Aprovada por:



Prof. Antônio Luciano de Almeida Fonseca
IF/UnB



Prof. Geraldo José da Silva
IF/UnB



Prof. Qu Fanyao
IF/UnB



Prof. Noélio Oliveira Dantas
U.F.U



Prof. Marco Antônio Amato
IF/UnB

Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo teórico para determinar a taxa de geração de mágnons e a consequente redução da magnetização de um poço quântico semiconductor magnético diluído de (Ga,Mn)As, devido a processos de espalhamento buraco-mágnon, induzidos pela interação do gás de buracos quase-bidimensional com campo *laser*. Para este fim, escrevemos a equação de Schrödinger (na aproximação da massa efetiva) para um buraco confinado por um potencial unidimensional ideal na direção- z , interagindo com o campo *laser* aplicado. Determinamos a função de onda do sistema a partir da solução da equação de Schrödinger, e efetuamos o cálculo dos elementos da matriz de espalhamento buraco-mágnon. A interação buraco-mágnon foi tratada pela teoria da perturbação de primeira ordem, considerando somente mágnons associados à precessão dos *spins* localizados dos íons de Mn. A partir dos elementos da matriz de espalhamento, obtivemos a probabilidade de transição por unidade de tempo, considerando processos de transição acompanhados de absorção/emissão de ambos, mágnons e fótons (com a mesma frequência do campo *laser*) simultaneamente. Em seguida, determinamos a equação cinética obedecida pela população de mágnons, que também nos fornece o coeficiente de amplificação dos mesmos. Finalmente, calculamos a desmagnetização a partir de sua relação com o número de mágnons presente no sistema.

Aplicando o modelo descrito acima para transições intra sub-bandas, com um campo *laser* forte, verificamos que a amplificação da população de mágnons se torna apreciável quando a amplitude do campo elétrico associado ao *laser* supera o campo crítico, da ordem de 10^8 V/m, levando a coeficientes de amplificação de mágnons entre 10^{11} e 10^{12} s⁻¹. A desmagnetização mostrou forte dependência com a largura do poço quântico e com a intensidade do campo elétrico, sendo tanto maior quanto menor a largura do poço e maior a intensidade do campo elétrico associado ao *laser*. Obtivemos uma redução tanto nos valores do coeficiente de amplificação quanto da desmagnetização, quando consideramos transições inter sub-bandas com um campo *laser* forte ou transições intra (inter) sub-bandas com dois campos *laser's* aplicados (um no regime de campo forte e outro no de campo fraco).

Palavras-Chave: Semicondutores Magnéticos Diluídos, (Ga,Mn)As, Poço Quântico, Desmagnetização, Mágnons.

Abstract

In this work we carried out a theoretical study in order to determine the magnons growth rate and therefore the drop on the magnetization of a (Ga,Mn)As diluted magnetic semiconductor quantum well, due to hole–magnon scattering processes, induced by the interaction of quasi-two dimensional hole gas under a laser field. For this purpose, we wrote the Schrödinger equation (under the effective mass approximation) for a confined hole in an ideal one–dimensional potential at the z –direction, interacting with the applied laser field. We determined the wave function of the system by solving the Schrödinger equation, and we calculated the elements of the hole-magnon scattering matrix. The hole-magnon interaction was treated under a first-order perturbation theory, considering only the magnons associated with the localized spin precession at the Mn ions. From the scattering matrix elements, we obtained the rate transition probability, considering transition processes accompanied by absorption/emission of both magnons and photons (under the same laser field frequency) simultaneously. Following, we determined the kinetic equation obeyed by the population of magnons, which also provides their amplification coefficient. Finally, we calculated the demagnetization from its relationship with the number of magnons of the system.

When applying the model mentioned above to intra-subband transitions under a strong laser field, we verified an appreciably increase in the population of magnons when the amplitude of the electric part of the laser field overcomes a critical value, on the order of 10^8 V/m, allowing an magnon amplification coefficient between 10^{11} and 10^{12} s⁻¹. The demagnetization showed a strong dependence on the width of the quantum well as well as the electric field intensity, being as higher as the smaller is the width of the well and the higher is the electric field intensity due to laser. We obtained a drop on the values of the amplification coefficient as well as for the demagnetization when considering inter-subband transitions under a strong laser field or intra (inter)-subband transitions with two applied laser fields (one at the strong and the other at the weak regime).

Keywords: Diluted Magnetic Semiconductors, (Ga,Mn)As, Quantum Well, Demagnetization, Magnons.

Lista de Figuras

- 3.1 Esquema do poço quântico, mostrando o sistema de referência utilizado, a direção de crescimento (direção-z) e a largura do poço, além das direções de propagação (direção-z) e de polarização (direção || ao plano xOy) do campo *laser*. A região mais escura representa o poço quântico de (Ga,Mn)As e as regiões claras representam as barreiras de potencial (por exemplo, AlAs ou (Al,Ga)As). p. 35
- 4.1 Esquema da geometria de espalhamento buraco-mágnon, mostrando a posição relativa entre os vetores de onda \mathbf{k}_{\parallel} , \mathbf{q}_{\parallel} e $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}$, juntamente com a definição do ângulo $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ p. 52
- 4.2 Gráfico de $\gamma_{q_{\parallel}}$ contra E_0 para os vetores de onda da TABELA 4.6, referente ao poço de 25 nm de largura. p. 63
- 4.3 Gráfico de $\gamma_{q_{\parallel}}$ contra E_0/E_0^c para os vetores de onda da TABELA 4.6, referente ao poço de 25 nm de largura. p. 63
- 4.4 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm. p. 65
- 4.5 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm, onde é possível notar o comportamento diferente do poço de $L_z = 5$ nm. p. 66
- 4.6 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 1, 2, 3, 4$ e 5 nm. p. 67
- 4.7 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0/E_D para $L_z = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm. p. 71
- 4.8 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0/E_D para $L_z = 1, 2, 3, 4$ e 5 nm. p. 72
- 4.9 Gráficos comparativos de $\gamma_{q_{\parallel}}$ (inter sub-banda) em função de L_z para vários E_0 , mostrando o deslocamento do máximo de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para L_z decrescentes com o aumento do campo. p. 80
- 4.10 [continuação da FIGURA 4.9] Gráficos comparativos de $\gamma_{q_{\parallel}}$ (inter sub-banda) em função de L_z para vários E_0 , mostrando o deslocamento do máximo de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para L_z decrescentes com o aumento do campo. p. 81

Lista de Figuras

- 4.11 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm. p. 82
- 4.12 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm, comparando o efeito de desmagnetização considerando somente transições intra sub-bandas (linhas tracejadas) com o efeito de desmagnetização considerando somente transições inter sub-bandas (linhas contínuas). p. 83
- 5.1 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_{01} para $L_z = 10, 15, 20$ e 25 nm, para transições intra sub-bandas, com dois campos *laser's* aplicados, um no regime de campo intenso e outro no de campo fraco. p. 105
- 5.2 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_{01} para $L_z = 10, 15, 20$ e 25 nm, para transições inter sub-bandas, na presença de dois campos *laser's*, um no regime de campo intenso e outro no de campo fraco. p. 110
- 5.3 Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_{01} para $L_z = 10, 15, 20$ e 25 nm, comparando o efeito de desmagnetização considerando somente transições intra sub-banda (linhas tracejadas) com o efeito de desmagnetização considerando somente transições inter sub-banda (linhas contínuas). Poço interagindo com dois campos *laser's*, um no regime intenso e outro no regime fraco. p. 110

Lista de Tabelas

- 3.1 Simbologia utilizada para buracos, mágnons e fótons nos diagramas (esquemáticos) representativos dos processos de espalhamento. p. 42
- 4.1 Parâmetros utilizados para estimar a ordem de grandeza do coeficiente de amplificação de mágnons e do efeito de desmagnetização de um semicondutor magnético diluído de $(\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{As}$, na presença de um campo *laser* intenso. p. 58
- 4.2 Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 5 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram $129 \text{ meV}, 0,5605 \text{ nm}^{-1}$ e $2,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 59
- 4.3 Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram $130 \text{ meV}, 0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 60
- 4.4 Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram $150 \text{ meV}, 0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 60
- 4.5 Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram $173 \text{ meV}, 1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 61
- 4.6 Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram $196 \text{ meV}, 1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 62

Lista de Tabelas

- 4.7 Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 30$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 220 meV, $1,3729 \text{ nm}^{-1}$ e $1,5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 62
- 4.8 Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 33$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 234 meV, $1,4399 \text{ nm}^{-1}$ e $1,65 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 62
- 4.9 Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , para $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm. p. 64
- 4.10 Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $L_z = 1, 2, 3, 4, 5$ e 10 nm. p. 66
- 4.11 Constantes a_j e b_j da equação (4.56) para a desmagnetização aproximada. p. 70
- 4.12 Desmagnetização aproximada, como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $E_D = 2 \times 10^8 \text{ V/m}$ e $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm. p. 71
- 4.13 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 130 meV, $0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 76
- 4.14 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 150 meV, $0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 76
- 4.15 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 173 meV, $1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 77
- 4.16 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F, k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 196 meV, $1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 77

Lista de Tabelas

- 4.17 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 30$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 220 meV, $1,3729 \text{ nm}^{-1}$ e $1,5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 78
- 4.18 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 33$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 234 meV, $1,4399 \text{ nm}^{-1}$ e $1,65 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 78
- 4.19 Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm para transições inter sub-bandas. p. 79
- 4.20 Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $L_z = 1, 2, 3, 4, 5$ e 10 nm para transições inter sub-bandas. p. 79
- 5.1 Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 130 meV, $0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 102
- 5.2 Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 150 meV, $0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 102
- 5.3 Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 173 meV, $1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 103
- 5.4 Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 196 meV, $1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 103
- 5.5 Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_{01} , com $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm para transições intra sub-banda, na presença de dois campos *laser's*. p. 104

Lista de Tabelas

- 5.6 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 130 meV, $0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 107
- 5.7 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 150 meV, $0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 107
- 5.8 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 173 meV, $1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 108
- 5.9 Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 196 meV, $1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente. p. 108
- 5.10 Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_{01} , com $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm para transições inter sub-banda, na presença de dois campos *laser's*. p. 109

Lista de Símbolos

SÍMBOLO	NOME	UNIDADE S.I.	1ª APARIÇÃO
a_o	Parâmetro ou constante de rede do (Ga,Mn)As	m	Pág. 26
a_o^{GaAs}	Parâmetro ou constante de rede do GaAs	m	Pág. 26
$a(\kappa \rightarrow \kappa')$	Elementos da matriz de transição	1	Pág. 39
$\mathbf{A}(t)$	Potencial vetor magnético	$\text{T} \cdot \text{m} = \text{N/A}$	Pág. 36
$\mathbf{A}_i(t)$	Potencial vetor magnético associado aos campos forte ($i = 1$) e fraco ($i = 2$), quando ambos estão presentes	$\text{T} \cdot \text{m} = \text{N/A}$	Pág. 84
\mathbf{A}_0, A_0	Amplitude do potencial vetor magnético	$\text{T} \cdot \text{m} = \text{N/A}$	Pág. 36
\mathbf{A}_i, A_{0i}	Amplitude do potencial vetor magnético associado aos campos forte ($i = 1$) e fraco ($i = 2$), quando ambos estão presentes	$\text{T} \cdot \text{m} = \text{N/A}$	Pág. 84
A	Área	m^2	Pág. 37
$\hat{b}_{\mathbf{q}}$	Operador aniquilação de mágnons com vetor de onda \mathbf{q}	1	Pág. 34
$\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$	Operador criação de mágnons com vetor de onda \mathbf{q}	1	Pág. 34
\mathbf{B}	Campo indução magnética	T	Pág. 37
c	Velocidade da luz no vácuo	m/s	Pág. 36
C	Constante de acoplamento buraco-mágnon	J	Pág. 38
d_{cc}	Distância entre cátions vizinhos	m	Pág. 28
$d_{\text{Ga-As}}$	Distância ou comprimento de ligação Ga-As	m	Pág. 27
$d_{\text{Mn-As}}$	Distância ou comprimento de ligação Mn-As	m	Pág. 27
e	Carga elementar, $e < 0$	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$	Pág. 36
$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$	Vetor unitário paralelo ao plano xOy	1	Pág. 36
$\mathbf{E}(t)$	Campo elétrico	$\text{N/C} = \text{V/m}$	Pág. 40
$\mathbf{E}_i(t)$	Campo elétrico associado aos campos forte ($i = 1$) e fraco ($i = 2$), quando ambos estão presentes	$\text{N/C} = \text{V/m}$	Pág. 86
\mathbf{E}_0, E_0	Amplitude do campo elétrico	$\text{N/C} = \text{V/m}$	Pág. 40
\mathbf{E}_{0i}, E_{0i}	Amplitude do campo elétrico associado aos campos forte ($i = 1$) e fraco ($i = 2$), quando ambos estão presentes	$\text{N/C} = \text{V/m}$	Pág. 86
\mathbf{E}_D, E_D	Intensidade do campo elétrico limite de dano à amostra	$\text{N/C} = \text{V/m}$	Pág. 64
E_0^c	Campo elétrico crítico	$\text{N/C} = \text{V/m}$	Pág. 55
E_{01}^c	Campo elétrico crítico associado ao campo <i>laser</i> 1	$\text{N/C} = \text{V/m}$	Pág. 99
$\mathcal{E}_0 = \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L_z^2} \right)$	Energia do estado fundamental do buraco em um poço de potencial infinito de largura L_z	J	Pág. 37
\mathcal{E}_F	Energia de Fermi	J	Pág. 29
\mathcal{E}_g	Gap de energia	J	Pág. 28
$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0 - \frac{I S \sigma}{2}$	Energia total do buraco no poço quântico semicondutor magnético, incluindo o <i>spin</i>	J	Pág. 38
$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0$	Energia total do buraco no poço quântico semicondutor magnético, sem a contribuição devido ao <i>spin</i>	J	Pág. 38
$f_{\kappa} \equiv f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \equiv f[\mathcal{E}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma)]$	Função de distribuição de férmions	1	Pág. 43
$\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')$	Função auxiliar	1	Pág. 40
g	Fator magnético ou de Landé	1	Pág. 30

continua na próxima página

Lista de Símbolos

continuação

SÍMBOLO	NOME	UNIDADE S.I.	1ª APARIÇÃO
h	Constante de Planck	J · s	Pág. 36
$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	Constante de Dirac	J · s	Pág. 36
\hat{H}	Operador hamiltoniano	J	Pág. 36
$i = \sqrt{-1}$	Imaginário puro	1	Pág. 36
I	Intensidade do campo <i>laser</i>	W/m ²	Pág. 70
$\mathcal{I}(\ell, \ell')$	Função auxiliar	J ⁻¹	Pág. 47
$\mathcal{I}_2(\ell, \ell')$	Função auxiliar	J ⁻¹	Pág. 94
$J_{pd} \equiv \beta$	Constante ou parâmetro de troca $p-d$	J · m ³	Pág. 30
$J \equiv N_0 \beta x$	Constante ou parâmetro de troca $p-d$ efetivo	J	Pág. 37
$\mathcal{J}_n(x)$	Função de Bessel de ordem n	1	Pág. 40
k_B	Constante de Boltzmann	J/K	Pág. 47
k_F	Vetor de onda de Fermi	m ⁻¹	Pág. 55
$k_i, i = 1, 2, 3, 4$	Limites inferior e superior de integração para dk_{\parallel}	m ⁻¹	Pág. 49
$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$	Vetor de onda do buraco	m ⁻¹	Pág. 37
$\mathbf{k}_{\parallel} = (k_x, k_y)$	Vetor de onda do buraco no plano do poço quântico	m ⁻¹	Pág. 37
$\mathcal{K}(\ell, \ell')$	Função auxiliar	J	Pág. 53
$\mathcal{K}_2(\ell, \ell')$	Função auxiliar	J	Pág. 96
L_i	Comprimento na direção i ($i = x, y, z$)	m	Pág. 34
ℓ, ℓ'	Número quântico associado ao movimento do buraco na direção perpendicular ao plano do poço quântico	1	Pág. 37
ℓ_b	Livre caminho médio do buraco	m	Pág. 35
m_0	Massa do elétron livre	kg	Pág. 58
m^*	Massa efetiva do buraco próximo ao topo da banda de valência	kg	Pág. 36
\mathbf{M}	Magnetização ou densidade de momentos magnéticos	A/m	Pág. 34
M_z	Componente z do vetor magnetização, na presença de mágnons	A/m	Pág. 34
M_0	Magnetização total da amostra na ausência de mágnons	A/m	Pág. 34
n	Ordem da função de Bessel $\mathcal{J}_n(x)$	1	Pág. 40
n_h	Concentração ou densidade buracos	m ⁻³	Pág. 29
$n_h^{(2D)}$	Concentração ou densidade bidimensional de buracos	m ⁻²	Pág. 58
$N_c = \Omega_{c.u.}^{-1}$	Número de sítios cátions ou de células unitárias	1	Pág. 38
$N_{Mn} = xN_0$	Concentração ou densidade de <i>spins</i> de íons de Mn	m ⁻³	Pág. 25
$N_0 = N_c/V$	Concentração ou densidade de sítios cátions	m ⁻³	Pág. 25
$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$	Operador número de mágnons com vetor de onda \mathbf{q}	1	Pág. 34
p	Porcentagem de buracos não compensados	1	Pág. 58
P	Fator de fase: $P_{\text{sen}} = e^{iq_z L_z/2}$ e $P_{\text{cos}} = i e^{iq_z L_z/2}$	1	Pág. 40
$\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$	Vetor de onda do mágnon	m ⁻¹	Pág. 34
$\mathbf{q}_{\parallel} = (q_x, q_y)$	Vetor de onda do mágnon no plano do poço quântico	m ⁻¹	Pág. 38
$\mathbf{r} = (x, y, z)$	Vetor posição do portador de carga	m	Pág. 34
$\mathbf{r}_{\parallel} = (x, y)$	Vetor posição do portador de carga no plano do poço quântico	m	Pág. 37
R_{Ga}	Raio covalente do Ga	m	Pág. 27
R_{Mn}	Raio covalente do Mn	m	Pág. 27
$\mathcal{R}_n(t)$	Função auxiliar	s	Pág. 125
$\mathcal{R}_{\mu\nu}(t)$	Função auxiliar	s	Pág. 87
\hat{s}	Operador de <i>spin</i> para os buracos	1	Pág. 36
s	Autovalor do operador \hat{s}	1	Pág. 36
\hat{S}	Operador de <i>spin</i> para os íons de Mn	1	Pág. 36
S	Autovalor do operador \hat{S}	1	Pág. 30
t	Tempo	s	Pág. 36

continua na próxima página

Lista de Símbolos

continuação

SÍMBOLO	NOME	UNIDADE S.I.	1ª APARIÇÃO
T	Temperatura	K	Pág. 48
T_C	Temperatura de Curie	K	Pág. 24
$T(\kappa \rightarrow \kappa')$	Probabilidade de transição, por unidade de tempo, do estado inicial $i = \kappa$ para o estado final $f = \kappa'$	s^{-1}	Pág. 40
v_d, v_d	Velocidade de arrasto dos buracos devido ao campo <i>laser</i>	m/s	Pág. 55
v_{d_1}, v_{d_1}	Velocidade de arrasto dos buracos devido ao campo <i>laser</i> 1	m/s	Pág. 99
v_D, v_D	Velocidade de arrasto limite de dano	m/s	Pág. 69
v_{fase}, v_{fase}	Velocidade de fase das ondas de <i>spin</i>	m/s	Pág. 55
v_F, v_F	Velocidade de Fermi	m/s	Pág. 55
V	Volume	m^3	Pág. 34
\hat{V}	Operador energia potencial	J	Pág. 36
x	Concentração fracional de íons de Mn presente no poço quântico	1	Pág. 25
α	Integral de troca do portadores tipo <i>s</i> da banda de condução com os elétrons <i>d</i> do Mn	$J \cdot m^3$	Pág. 32
β	Integral de troca do portadores tipo <i>p</i> da banda de valência com os elétrons <i>d</i> do Mn	$J \cdot m^3$	Pág. 30
$\gamma_{q_{\parallel}}$	Coefficiente de amplificação (amortecimento) de mágnons	s^{-1}	Pág. 45
$\delta^{(n)}(x)$	Delta de Dirac <i>n</i> -dimensional	$[x]^{-n}$	Pág. 40
$\epsilon = \pm 1$	Variável para ± 1	1	Pág. 91
$\epsilon = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell' \sigma'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} - \hbar \omega_{\mathbf{q}}$	Variável auxiliar	J	Pág. 47
$\tilde{\epsilon} = \epsilon - v \hbar \omega_2$	Variável auxiliar	J	Pág. 93
$\Theta(x)$	Função passo unitário de Heaviside	1	Pág. 48
$\kappa = \{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma\}$	Conjunto de números quânticos que especifica a função de onda não perturbada do buraco	–	Pág. 39
$\lambda = \frac{\hbar e \mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_0}{m^* \omega}$	Parâmetro energético devido à interação do campo <i>laser</i> com o buraco	J	Pág. 40
$\lambda_i = \frac{\hbar e \mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_{0i}}{m^* \omega_i}$	Parâmetro energético devido à interação do campo <i>laser</i> forte ($i = 1$) ou fraco ($i = 2$) com o buraco	J	Pág. 86
λ_L	Comprimento de onda do campo <i>laser</i>	m	Pág. 35
Λ	Variável auxiliar	m^{-2}	Pág. 50
$\tilde{\Lambda}$	Variável auxiliar	m^{-2}	Pág. 97
μ	Momento magnético	$A \cdot m^2$	Pág. 37
μ	Intensidade do momento magnético	$A \cdot m^2$	Pág. 34
	Ordem da função de Bessel $\mathcal{J}_{\mu}(x)$, associado ao campo <i>laser</i> 1	1	Pág. 87
μ_B	Magneton de Bohr	$A \cdot m^2$	Pág. 30
ν	Ordem da função de Bessel $\mathcal{J}_{\nu}(x)$, associado ao campo <i>laser</i> 2	1	Pág. 87
Ξ	Variável auxiliar	$m^{-1/2}$	Pág. 68
σ	Projeção de <i>spin</i> sobre o eixo- <i>z</i> , $\sigma = +1$ para \uparrow e $\sigma = -1$ para \downarrow	1	Pág. 36
τ	Tempo	s	Pág. 37
τ_m	Tempo de vida dos mágnons	s	Pág. 56
$\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$	Ângulo entre os vetores de onda \mathbf{k}_{\parallel} e \mathbf{q}_{\parallel}	s	Pág. 49
$\Psi(\mathbf{r}, t)$	Função de onda	$m^{-3/2}$	Pág. 36
ω	Frequência angular	s^{-1}	Pág. 34
ω_i	Frequência angular associada aos campos forte ($i = 1$) e fraco ($i = 2$), quando ambos estão presentes	s^{-1}	Pág. 84
ω_D	Frequência angular limite de dano da amostra	s^{-1}	Pág. 69
$\omega_{\mathbf{q}}$	Frequência angular dos mágnons	s^{-1}	Pág. 38
ω_s	Frequência de <i>spin-splitting</i> entre sub-bandas de <i>spins</i> no poço	s^{-1}	Pág. 37

continua na próxima página

Lista de Símbolos

continuação

SÍMBOLO	NOME	UNIDADE S.I.	1ª APARIÇÃO
Ω	Variável auxiliar	J	Pág. 53
$\tilde{\Omega}$	Variável auxiliar	J	Pág. 96
$\Omega_{c.u.}$	Volume de uma célula unitária convencional <i>zinblende</i>	m ³	Pág. 30
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	Operador nabla	m ⁻¹	Pág. 36
$\nabla_{\parallel} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$	Operador nabla bidimensional	m ⁻¹	Pág. 116
$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$	Operador laplaciano	m ⁻²	Pág. 69
$\nabla_{\parallel}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$	Operador laplaciano bidimensional	m ⁻²	Pág. 115
$\langle \dots \rangle$	Média estatística	-	Pág. 34
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas	(m, m, m)	-
(ρ, θ, z)	Coordenadas cilíndricas polares	(m, rad, m)	-

Sumário

1	Introdução	p. 20
2	Fundamentos	p. 23
2.1	Semicondutores Ordinários	p. 23
2.2	Semicondutores Magnéticos	p. 23
2.3	Semicondutores Magnéticos Diluídos	p. 24
2.4	$(\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{As}$	p. 25
2.4.1	Crescimento de $(\text{Ga},\text{Mn})\text{As}$ por LT-MBE	p. 25
2.4.2	Propriedades Estruturais	p. 26
2.4.3	Propriedades Eletrônicas	p. 28
2.4.4	Propriedades Magnéticas	p. 29
2.4.5	Mecanismos de Compensação de Carga	p. 30
2.4.6	Origens do Ferromagnetismo	p. 32
2.4.7	Efeitos de Desordem	p. 32
3	Interação <i>Laser</i> – GBQ2D	p. 34
3.1	Especificação do Problema	p. 35
3.2	Equação de Schrödinger	p. 36
3.3	Probabilidade de Transição	p. 39
3.4	Equação Cinética	p. 42
3.5	Coeficiente de Amplificação de Mágnons	p. 45

Sumário

4 Regime de Campo Forte	p. 47
4.1 Gás de Buracos Degenerado	p. 48
4.2 Mudança na Magnetização	p. 56
4.2.1 Transições Intra Sub-Bandas ($\ell' = \ell$)	p. 57
RESULTADOS E DISCUSSÃO	p. 58
4.2.2 Transições Inter Sub-Bandas ($\ell' \neq \ell$)	p. 74
RESULTADOS E DISCUSSÃO	p. 75
5 Campo Forte e Campo Fraco Simultâneos	p. 84
5.1 Equação de Schrödinger	p. 84
5.2 Probabilidade de Transição	p. 85
5.3 Equação Cinética	p. 90
5.4 Coeficiente de Amplificação de Mágons	p. 93
5.5 Gás de Buracos Degenerado	p. 94
5.6 Mudança na Magnetização	p. 100
5.6.1 Transições Intra Sub-Bandas ($\ell' = \ell$)	p. 100
RESULTADOS E DISCUSSÃO	p. 101
5.6.2 Transições Inter Sub-Bandas ($\ell' \neq \ell$)	p. 105
RESULTADOS E DISCUSSÃO	p. 106
6 Conclusão	p. 111
6.1 Campo Forte	p. 111
6.2 Campo Forte e Fraco	p. 113
Apêndice A – Solução da Equação de Schrödinger	p. 115
A.1 Solução da Equação de Schrödinger	p. 115

Sumário

Apêndice B – Cálculo da Probabilidade de Transição	p. 121
B.1 Probabilidade de Transição	p. 121
Referências Bibliográficas	p. 128

1 Introdução

O estudo da dinâmica de desmagnetização ultra-rápida induzida por luz tem recebido grande interesse nos últimos anos, tanto de experimentais quanto de teóricos [1–10]. As investigações nesta área são de interesse para a física básica, no que se refere aos processos que ocorrem nos ferromagnetos em pequenas escalas de tempo, como também na área tecnológica, principalmente em relação à possibilidade prática de registrar informações de forma ultra-rápida em memórias magnéticas. Desta forma, a manipulação tanto da intensidade quanto da direção da magnetização em nanoestruturas semicondutoras magnéticas diluídas é de grande importância para o desenvolvimento de dispositivos em *spintronics* [11]. Vários experimentos tem confirmado a desmagnetização ultra-rápida em sistemas magnéticos [12–15], o que leva a acreditar que a rápida dinâmica de magnetização é devido ao tempo de relaxação da ordem de poucas dezenas de picossegundos. A desmagnetização induzida por luz foi recentemente observada em semicondutores magnéticos diluídos do tipo (III,Mn)V [16,17], onde se verificou a completa destruição da ordem ferromagnética em menos de um picossegundo.

O modelo teórico mais utilizado para explicar o processo de desmagnetização induzida por *laser* em semicondutores ferromagnéticos [como o (Ga,Mn)As], é chamado de modelo das três temperaturas. Neste modelo, o sistema é dividido em três reservatórios interagentes [3,7,10]: portadores de carga, rede e *spins*. O campo *laser* incidente injeta energia no sistema de portadores, aumentando a temperatura associada a este sistema (energia cinética), que por sua vez transfere parte dessa energia para os dois outros sistemas (rede e *spins*). Este modelo possui duas deficiências básicas: primeiro, trata os sistemas de portadores e de *spins* separados, e portanto não pode representar bem o magnetismo itinerante; segundo, os subsistemas trocam apenas energia, mas não momento angular orbital e de *spin*, trocas estas necessárias para uma correta descrição física do processo de desmagnetização [18,19].

A primeira deficiência (separação dos subsistemas de carga e de *spin*) é menos problemática no caso de semicondutores magnéticos diluídos do que em ferromagnetos metálicos. Em semicondutores magnéticos diluídos de (Ga,Mn)As, a maior contribuição para a magnetização macroscópica é devido aos *spins* localizados dos íons de Mn [20]. Isto ocorre devido aos seguintes fatos experimentais: (i) o *spin* dos íons de Mn^{2+} (5/2) é superior ao dos buracos

(1/2) [21]; (ii) a densidade de buracos é menor do que a densidade de íons de Mn, devido aos efeitos de compensação de carga [17]; e (iii) os portadores de carga não são completamente polarizados no equilíbrio térmico [22]. Portanto, nestes sistemas, a divisão entre portadores de carga e *spins* em reservatórios separados é uma aproximação satisfatória. Quanto à deficiência relativa à transferência de momento angular entre os subsistemas, equações adicionais levando em conta o balanço entre o momento angular dos fótons incidentes, dos portadores de carga (orbital e de *spin*) e da rede, podem ser adicionadas ao modelo [23].

Outros modelos têm sido aplicado ao estudo da ultra-rápida desmagnetização. Em particular, para o estudo de semicondutores magnéticos diluídos, como o (Ga,Mn)As, têm se destacado o modelo no qual a desmagnetização ocorre devido a espalhamento (dependente de *spin*) entre buracos aquecidos (devido a incidência de campos *laser*) e *spins* dos íons localizados de Mn [1], sendo a interação efetiva entre os *spins* itinerantes (buracos) e os *spins* localizados (Mn) tratada dentro do modelo de troca $p-d$ [24,25].

Além da ultra-rápida desmagnetização de semicondutores (III,Mn)V, vários estudos têm mostrado a possibilidade de aumento ultra-rápido na magnetização por meio do aumento da densidade de buracos (buracos fotoexcitados) induzida por um pulso *laser* de duração de femtosegundos na região do ultravioleta [21,26]. Este fenômeno é possível somente devido à natureza do ordenamento ferromagnético mediado por portadores observado em semicondutores magnéticos diluídos (III,Mn)V.

Uma revisão dos aspectos teóricos e experimentais sobre manipulação óptica ultra-rápida do ordenamento magnético, incluindo estudos de vários materiais (ferromagnetos metálicos, semicondutores magnéticos, dielétricos magnéticos, semimetais magnéticos e semicondutores magnéticos diluídos), pode ser encontrada nas referências [17,20].

O presente trabalho tem por objetivo investigar os efeitos de campos eletromagnéticos em poços quânticos semicondutores, dopados com pequenas porcentagens de íons magnéticos. Especificamente, estudamos a amplificação da população de mágnons e a consequente redução da magnetização de poços quânticos de (Ga,Mn)As, devido a processos de espalhamento buraco-mágnon induzidos pela interação do gás de buracos quase-bidimensional com o(s) campo(s) *laser*(s), responsável por injetar energia no sistema de portadores. Com isso, esperamos entender melhor o processo de desmagnetização por meio da aplicação de campo(s) eletromagnético(s). O trabalho se justifica pelo amplo leque de questões ainda não satisfatoriamente resolvidas e a importância em colaborar com os fundamentos da eletrônica de *spin*, cujo futuro parece bastante promissor.

A tese está organizada em seis capítulos, incluindo esta introdução. O capítulo 2 inicia

tratando brevemente da relação entre semicondutores ordinários, magnéticos e magnéticos diluídos, focando principalmente neste último, objeto desta tese. Em seguida, descrevemos o processo de crescimento do (Ga,Mn)As pelo método de Epitaxia de Feixe Molecular a Baixas Temperaturas, as principais propriedades estruturais, eletrônicas e magnéticas do semicondutor magnético diluído (Ga,Mn)As, limitando às necessárias ao desenvolvimento deste trabalho. O capítulo termina com uma abordagem dos principais defeitos pontuais apresentados pelo (Ga,Mn)As crescido epitaxialmente e sua relação com os mecanismos de compensação de carga, as origens do ferromagnetismo mediado por portadores e os efeitos relacionados à desordem posicional dos dopantes magnéticos.

No capítulo 3, desenvolvemos o modelo da geração de mágnons e consequente desmagnetização de um poço quântico semicondutor magnético diluído de (Ga,Mn)As via campo *laser*. Iniciamos pela solução da equação de Schrödinger para um buraco confinado por um potencial unidimensional ideal, na presença do campo *laser*. Esta solução é então utilizada no cálculo dos elementos da matriz de espalhamento buraco-mágnon e da probabilidade de transição por unidade de tempo. Finalmente, obtemos a equação cinética para a população de mágnons, o coeficiente de amplificação e a desmagnetização resultante do sistema.

O capítulo 4 trata da aplicação específica do modelo para a interação de um gás de buracos quase-bidimensional degenerado com um campo *laser* no regime de campo forte ou intenso. Analisamos os casos de transições intra sub-bandas e inter sub-bandas separadamente, para poços quânticos de várias larguras.

A extensão do modelo para dois campos *laser's*, um dos quais no regime de campo forte e o outro no regime de campo fraco, atuando simultaneamente sobre o gás de buracos quase-bidimensional, é realizada no capítulo 5. Novamente, analisamos transições intra e inter sub-bandas separadamente. Finalmente, as principais conclusões obtidas nos capítulos 4 e 5 estão sumarizadas no capítulo 6.

2 Fundamentos

2.1 Semicondutores Ordinários

Semicondutores ordinários (não magnéticos), tais como o silício (Si), germânio (Ge) e arseneto de gálio (GaAs), não possuem íons magnéticos em sua constituição, e portanto não apresentam propriedades magnéticas, tais como ferromagnetismo ou antiferromagnetismo [27]. Devido ao fato destes materiais possuírem fator g magnético muito pequeno (por exemplo, o fator g efetivo do GaAs *bulk* vale $g^* \simeq -0,44$ [28]), seria necessário campos magnéticos intensos para se conseguir uma diferença de energia entre as sub-bandas de *spin-up* e *spin-down* suficiente para que estes possam ser filtrados ou controlados por meio de campos externos aplicados [29]. Desta forma, apesar de sua inquestionável importância tecnológica, estes materiais não são atrativos para aplicações em novos dispositivos que combinem propriedades semicondutoras com propriedades magnéticas.

2.2 Semicondutores Magnéticos

Nos semicondutores magnéticos, tais como os calcogenetos de európio (EuO, EuS, EuTe e EuSe), elementos magnéticos estão presentes em sub-redes periódicas, e assim estes materiais exibem tanto propriedades magnéticas quanto semicondutoras, desde que a densidade de portadores seja suficientemente alta [30]. Outros exemplos de semicondutores magnéticos são: (Eu,Gd)S, HgCr₂Se₄ e CdCr₂Se₄ [31]. Uma diferença marcante entre semicondutores magnéticos e não magnéticos, além obviamente de suas propriedades magnéticas, é o comportamento do *gap* óptico com a diminuição da temperatura. Semicondutores magnéticos experimentam um deslocamento (gigante) da absorção óptica para o vermelho (redução do *gap*) a baixas temperaturas, enquanto semicondutores não magnéticos apresentam deslocamento para o azul (aumento do *gap*) com a diminuição da temperatura [30].

A dificuldade em se incorporar semicondutores magnéticos em dispositivos eletrônicos e opto-eletrônicos está principalmente em sua difícil preparação [29] e em sua estrutura

crystalina, muito diferente da estrutura cristalina dos semicondutores utilizados na maioria dos dispositivos, tal como a do Si e do GaAs, dificultando a integração dos semicondutores magnéticos com os semicondutores não magnéticos mais utilizados na indústria.

2.3 Semicondutores Magnéticos Diluídos

Semicondutores magnéticos diluídos (DMS – *Diluted Magnetic Semiconductors*), também conhecidos como semicondutores semimagnéticos, são ligas de semicondutores não magnéticos, tal como o GaAs e o CdTe, com elementos magnéticos, como o manganês (Mn). Nestes materiais, os elementos magnéticos (metais de transição ou elementos de terras-raras) são incorporados substitucionalmente na sub-rede dos cátions (no caso do (Ga,Mn)As, os elementos magnéticos Mn são incorporados aleatoriamente na sub-rede do Ga). Alguns exemplos de semicondutores magnéticos diluídos da família II–VI são (Cd,Mn)Te, (Zn,Mn)S, (Zn,Mn)Se e (Hg,Mn)Te [32]; exemplos de semicondutores III–V são (In,Mn)As, (Ga,Mn)As e (Ga,Mn)Sb [33].

Semicondutores magnéticos diluídos apresentam propriedades magnéticas e semicondutoras simultaneamente, fazendo com que estes materiais sejam de grande interesse, tanto do ponto de vista de novas propriedades físicas como para fabricação/aplicação em dispositivos com novas funcionalidades. Como o ordenamento ferromagnético apresentado por estes materiais depende da concentração de íons magnéticos, é necessário dopar o semicondutor hospedeiro com uma quantidade suficiente de elementos magnéticos. Isto requer dopagem com elementos magnéticos além de seu limite de solubilidade no semicondutor hospedeiro, processo este conseguido com sucesso através de Epitaxia por Feixe Molecular a Baixas Temperaturas, LT-MBE (*Low-Temperature Molecular Beam Epitaxial*) [34].

Além disso, as propriedades magnéticas de semicondutores magnéticos diluídos podem variar tanto com a concentração de íons magnéticos quanto com a concentração de portadores. A concentração destes últimos pode ser modificada tanto por meio de codopagem quanto por meios externos, como aplicação de campos elétricos [35], magnéticos [36] ou incidência de luz [11,37].

O principal problema a ser resolvido para que dispositivos construídos com estes materiais possam operar a temperatura ambiente, é fazer com que a temperatura de Curie T_C destes materiais se elevem acima de 300K, a partir do atual recorde de 173K observado para o (Ga,Mn)As [38,39]. Temperaturas de transição ferromagnética crescentes têm sido obtidas melhorando a qualidade das amostras [39–42], realizado tratamentos térmicos para redução

de defeitos intersticiais [38,39,43–45] e elevando a concentração de dopantes magnéticos e de portadores [38,39,46], sendo que os últimos podem ser variados independentemente da dopagem com íons magnéticos por codopagem com doadores ou aceitadores não magnéticos [25]. Espera-se que com o melhor controle estequiométrico [38,42] durante o crescimento do (Ga,As)Mn com dopagens acima de 10% e redução de defeitos intersticiais por tratamentos térmicos, a temperatura de Curie deste material possa atingir e mesmo superar a temperatura ambiente [39].

Deste ponto em diante, restringimos a discussão às características básicas dos semicondutores magnéticos diluídos formados a partir de compostos semicondutores hospedeiros III–V, em particular do (Ga,Mn)As.

2.4 (Ga_{1-x},Mn_x)As

Esta seção apresenta uma breve revisão do processo de crescimento, das principais propriedades estruturais, eletrônicas e magnéticas do (Ga,Mn)As. Os mecanismos de compensação de carga, as origens do ferromagnetismo e os efeitos de desordem nas propriedades do semicondutor ferromagnético (Ga,Mn)As são discutidas brevemente.

2.4.1 Crescimento de (Ga,Mn)As por LT–MBE

O (Ga,Mn)As é uma liga homogênea do semicondutor hospedeiro não magnético GaAs com o elemento magnético Mn, com concentrações acima do limite de solubilidade do Mn no GaAs, que é da ordem de 10^{18} cm^{-3} [29]. Filmes de (Ga,Mn)As são crescidos epitaxialmente sobre um substrato de GaAs(001) por LT–MBE. Na temperatura de equilíbrio, a solubilidade dos átomos dos metais de transição é muito baixa em semicondutores III–V [47], e assim, no crescimento de (Ga,Mn)As sob condições de equilíbrio térmico, x está limitado a $x \lesssim 0,001$ [48], onde x é a concentração fracional de Mn na liga (Ga_{1-x},Mn_x)As.¹ Crescido por MBE fora do equilíbrio a baixas temperaturas (em torno de 250°C), consegue-se evitar a segregação superficial de Mn e a formação de uma segunda fase de MnAs [31]. O processo de crescimento a baixas temperaturas é necessário para que não haja energia térmica suficiente para a formação de uma segunda fase (segregação de MnAs, que possui a mesma estrutura hexagonal do NiAs).

¹Com $N_o \approx 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ sendo a concentração de sítios cátions; $N_{\text{Mn}} \approx 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ a concentração de Mn no limite de solubilidade e $x = \frac{N_{\text{Mn}}}{N_o}$ a concentração fracional de dopantes, temos que $x \approx 0,001$ no equilíbrio térmico.

Outro tipo de estrutura semicondutora ferromagnética (não homogênea) pode ser obtida pelo crescimento de um filme heterogêneo de GaAs:MnAs, a partir de uma camada de (Ga,Mn)As crescido por LT-MBE, onde partículas ferromagnéticas esféricas de MnAs com diâmetros da ordem de nanômetros, estão imersas em uma matriz de GaAs [49]. A fase MnAs- α é ferromagnética com estrutura hexagonal (com $a = 0,3724\text{ nm}$ e $c = 0,5706\text{ nm}$). Em amostras *bulk*, uma transformação de fase MnAs- $\alpha \rightarrow$ MnAs- β (fase paramagnética, com estrutura ortorrômbica) toma lugar a 40°C [49].

Mais detalhes sobre o método de crescimento de (Ga,Mn)As por LT-MBE podem ser encontrados em [47, 49–51].

2.4.2 Propriedades Estruturais

Átomos isolados de ³¹Ga e ³³As possuem configurações eletrônicas [Ar]3d¹⁰4s²4p¹ e [Ar]3d¹⁰4s²4p³, respectivamente. O átomo de Ga (grupo III da tabela periódica) contém três elétrons de valência em sua última camada e o átomo de As (grupo V), cinco elétrons. Em compostos III-V, como o GaAs, as ligações covalentes tornam-se parcialmente iônicas devido à transferência de elétrons do elemento do grupo III para o elemento do grupo V [27], formando uma sub-rede de cátions (Ga³⁺) e uma de ânions (As³⁻). Em um sólido, cada átomo de Ga (As) se encontra no centro de um tetraedro regular, cujos vértices são ocupados por átomos de As (Ga), formando assim ligações tetraédricas, de forma que o GaAs se cristaliza em uma estrutura do tipo *zincblende* [52]. Esta estrutura consiste de duas redes de Bravais cúbicas de face centradas (CFC) interpenetradas, deslocadas por 1/4 do comprimento da diagonal principal e na direção desta. Uma das redes CFC é a sub-rede de Ga (cátions), e a outra de As (ânions). A constante de rede experimental da célula cúbica convencional (contendo oito átomos, sendo quatro Ga e quatro As) do GaAs vale $a_0^{\text{GaAs}} = 0,56533\text{ nm}$ [47]. A rede do tipo *zincblende* (CFC) tem como rede recíproca uma rede cúbica de corpo centrado (CCC), de tal forma que sua primeira Zona de Brillouin é um octaedro truncado [53].

Dopando o semicondutor GaAs com Mn, obtemos o semicondutor magnético diluído (Ga,Mn)As. Como existem quatro sítios cátions por célula convencional, temos que a concentração (ou densidade) de sítios cátions é dada por $N_0 = 4/a_0^3$. Desta forma, a concentração fracional de impurezas magnéticas presentes na liga ternária (Ga_{1-x}Mn_x)As, $x = \frac{N_{\text{Mn}}}{N_0}$, é dado por $x = \frac{N_{\text{Mn}}}{4/a_0^3}$, ou $N_{\text{Mn}} = \frac{4x}{a_0^3}$, onde a_0 é a constante de rede do (Ga_{1-x}Mn_x)As e N_{Mn} é a concentração (ou densidade) de íons de Mn.

Medidas de difração de raios-x confirmam que o (Ga,Mn)As crescido epitaxialmente

também possui estrutura *zincblende* [50], sendo que a constante de rede do (Ga_{1-x}Mn_x)As, em função da composição x de Mn, segue a lei de Vegard, ou seja, a_0 aumenta linearmente com x [47]. A dependência experimental da constante de rede do (Ga,Mn)As com a composição total² x de Mn é [34]

$$a_0(x) = a_0^{\text{GaAs}} + 0,32x \text{ (\AA)}, \quad (2.1)$$

onde $x \in [0,1]$, sendo os extremos correspondentes às ligas binárias GaAs e MnAs (com estrutura hipotética *zincblende*), respectivamente. A constante de rede *zincblende* hipotética do MnAs, $a_{\text{MnAs}}^{\text{zincblende}} \simeq 0,6 \text{ nm}$, é obtida por extrapolação [29] de a_0 para $x = 1$ ou 100%.

Cálculos realizados utilizando a Teoria do Funcional da Densidade [54], mostraram que o aumento da constante de rede do (Ga,Mn)As em relação ao GaAs, observado experimentalmente [34], está associada a Mn intersticial e anti-sítios de As (átomos de As localizados em sítios da sub-rede de cátions), pois o Mn substitucional tende a diminuir a constante de rede do (Ga,Mn)As, já que o raio covalente do Mn ($R_{\text{Mn}} = 1,17 \text{ \AA}$) é *menor* do que o raio covalente do Ga ($R_{\text{Ga}} = 1,25 \text{ \AA}$).³ A maior influência no aumento da constante de rede do (Ga,Mn)As obtido neste trabalho [54] foi devido a defeitos intersticiais de Mn avizinado por As, seguido por anti-sítios de As.

Entretanto, medidas experimentais da constante de rede de filmes de (Ga,Mn)As realizadas antes e depois de efetuar tratamentos térmicos em várias amostras de (Ga,Mn)As mostraram [55] que a constante de rede do (Ga,Mn)As é intrinsecamente maior do que a constante de rede do GaAs, além de demonstrar que a constante de rede aumenta linearmente com a concentração de Mn_i, em contradição aos resultados obtidos pela teoria do funcional da densidade [54].

A partir das distâncias de ligação Ga-As e Mn-As, obtidas experimentalmente [34, 52] para um filme fino de (Ga,Mn)As, pode-se inferir sobre o efeito do Mn sobre o parâmetro de rede do (Ga,Mn)As. Estas distâncias são: $d_{\text{Ga-As}} = 0,244 \text{ nm}$; $d_{\text{Mn-As}} = 0,249 - 0,250 \text{ nm}$; e $d_{\text{Mn-As}}^{\text{zincblende}} = 0,259 \text{ nm}$, sendo a última calculada. No cálculo teórico da distância de ligação Mn-As, considera-se um *cluster* de MnAs, com estrutura MnAs₄, onde o átomo de Mn ocupa posição central [56]. Com base nestes valores, pode-se verificar que a inclusão de Mn tende a expandir a rede do GaAs, resultando em uma constante de rede ligeiramente maior, além de proporcional ao conteúdo x de Mn. Podemos também obter o parâmetro de rede real da liga

²A concentração total de impurezas de Mn inclui Mn substitucional (Mn_{Ga}) e Mn intersticial (Mn_i).

³Isto não deve ser considerado como uma boa justificativa, desde que as ligações formadas entre Ga e As na formação do semicondutor GaAs possui caráter parcialmente iônico [27], e o raio iônico do Mn²⁺ (0,83 Å) é *maior* do que o raio iônico do Ga³⁺ (0,62 Å).

a partir de medidas da distância média entre cátions vizinhos, d_{cc} . Para estruturas *zincblende* temos $a_0 = \sqrt{2}d_{cc}$.

Além de sua importância fundamental, o conhecimento do parâmetro de rede é de interesse prático, pois fornece um meio conveniente de determinar a concentração de impurezas presente na composição do semicondutor magnético diluído a partir de medidas dos parâmetros estruturais da liga [32].

2.4.3 Propriedades Eletrônicas

O GaAs é um semicondutor de *gap* direto, com extremos das bandas de valência e de condução localizadas no ponto Γ [57]. O *band gap* do GaAs e de suas ligas (diluídas), a temperatura ambiente, é $\mathcal{E}_g = 1,43\text{eV}$ [47]. Dopagem do GaAs com Mn, incorporado no semicondutor hospedeiro como defeitos substitucional (Mn ocupa sítios da sub-rede do Ga), fornece tanto momentos magnéticos (devido à camada $3d$ incompleta do Mn) quanto portadores de carga positivos – buracos (o Mn atua como impureza aceitadora, desde que muito provavelmente é incorporado no GaAs como Mn^{2+} no lugar de Ga^{3+}). Desta forma, o (Ga,Mn)As tem caráter metálico (condutor), desde que a densidade de portadores seja suficientemente alta.

A estrutura de bandas da liga ternária (Ga_{1-x}Mn_x)As, na ausência de campos magnéticos externos, deve se assemelhar qualitativamente à estrutura de bandas do semicondutor GaAs, afastando quantitativamente desta, em direção à estrutura de banda do MnAs (*zincblende* hipotético) em função da concentração fracional x de Mn. Somado a esta diferença, a introdução da camada $3d^5$ devido aos íons de Mn leva à inclusão de dois níveis (um ocupado e outro vazio), além de efeitos de hibridização com a banda de valência [32]. Desde que estamos interessados em concentrações relativamente pequenas dos íons magnéticos, em torno de $x \simeq 0,05$, o efeito do Mn incorporado sobre os parâmetros da estrutura de bandas é negligenciável [58] na ausência de campos magnéticos externos. Entretanto, devido ao forte acoplamento $p-d$, a estrutura de banda muda drasticamente na presença de campos magnéticos externos [59].

Medidas do coeficiente Hall ordinário (ou normal, em contraposição ao coeficiente Hall anômalo) mostram que os portadores de carga no (Ga,Mn)As são positivos (buracos), com concentração de portadores da mesma ordem de N_{Mn} , a densidade de íons de Mn [47, 50].

Para concentrações intermediárias x de Mn, (Ga,Mn)As apresenta comportamento metálico (lado metálico da transição metal–isolante), enquanto que para concentrações muito baixas

ou muito altas de Mn, (Ga,Mn)As apresenta comportamento isolante (se encontra no lado isolante da transição metal–isolante) [29]. Ou seja, o semiconductor magnético diluído (Ga_{1-x}Mn_x)As, com x entre 0,035 e 0,053⁴ é um condutor do tipo- p . Por exemplo, amostras com $x = 0,05$ e concentração de buracos igual a $n_h = 3,3 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, apresentam caráter metálico [61]. Entretanto, (Ga,Mn)As é isolante (mau condutor) para concentrações muito baixas ou muito altas de Mn. Por exemplo, amostras com $x = 0,01$ e $n_h = 2,8 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ apresentam caráter isolante [61]. Uma possível explicação para o surgimento da fase isolante em altas concentrações de Mn está associado ao aumento da concentração de Mn intersticial, que atua como duplo doador [11, 31], e portanto reduz a densidade de buracos.

A energia de Fermi (\mathcal{E}_F) do sistema também é afetada pela concentração de portadores. A energia de Fermi do (Ga,Mn)As, no estado *bulk*, situa-se em torno de $\mathcal{E}_F \simeq 300 \text{ meV}$ [34] (medida a partir do topo da banda de valência, com valores crescentes em direção à região concava do diagrama de dispersão). Valores teóricos, calculados pela teoria do campo médio, reportam [58] energia de Fermi igual a $\mathcal{E}_F = 195 \text{ meV}$ para $n_h = 3,5 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, e vetores de onda do buraco entre 0 e $3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$. Como a densidade de portadores presente no (Ga,Mn)As pode ser modificada independentemente do conteúdo de Mn, já que o (Ga,Mn)As pode ser codopado com impurezas doadoras (por exemplo, Si_{Ga} ou Se_{As} são doadores simples no GaAs) ou aceitadores (por exemplo, C_{As} ou Be_{Ga} são aceitadores simples no GaAs) [25], podemos alterar a energia de Fermi do sistema, desde que esta depende da concentração de portadores.

2.4.4 Propriedades Magnéticas

Medidas de efeito Hall mostraram a existência de efeito Hall anômalo em amostras de (Ga,Mn)As, indicando a presença de ordenamento ferromagnético a baixas temperaturas [50]. Para concentrações de Mn intermediárias, filmes de (Ga,Mn)As são ferromagnéticos para $T < T_C$ e paramagnético para $T > T_C$. A temperatura de transição do (Ga,Mn)As depende de vários fatores, dentre eles a concentração de dopantes magnéticos, a concentração de portadores de carga e a realização ou não de tratamentos térmicos pós crescimento por LT-MBE. Alguns valores reportados são $T_C \simeq 110 \text{ K}$ para $x = 0,05$ sem tratamento térmico [34] e $T_C \simeq 173 \text{ K}$ para $x = 0,08$ com tratamento térmico [38]. Cálculos realizados dentro da aproximação do campo médio estimam que a temperatura T_C seja diretamente proporcional à concentração de íons magnéticos substitucional e à raiz cúbica da concentração de buracos, ou seja, $T_C \sim N_{\text{Mn}} n_h^{1/3}$ [25].

⁴Estes limites não são rígidos. Por exemplo, na referência [60], obtiveram que o (Ga,Mn)As é condutor (metálico) para concentrações de Mn $0,03 \lesssim x \lesssim 0,08$.

O (Ga,Mn)As apresenta ferromagnetismo mediado por portadores [25,33,58], e por isto também é referenciado como um semiconductor ferromagnético. O acoplamento entre os *spins* do sistema de buracos itinerante com os *spins* localizados do sistema de íons magnéticos é caracterizado pela constante de troca J_{pd} ou, de forma equivalente, $N_o\beta$, onde β é a integral de troca entre os portadores na banda p de valência e os elétrons localizados na camada d do íon de Mn. O valor da constante de troca, a partir de dados de fotoemissão [56] é $|J_{pd}| = 54 \pm 9 \text{ meV nm}^3$ ou $|N_o\beta| = 1,2 \pm 0,2 \text{ eV}$ [25], onde $N_o = 1/\Omega_{c.u.}$ é o número de sítios cátions por unidade de volume (ou número de células unitárias por unidade de volume, que contém dois átomos, um cátion e um ânion) e $\Omega_{c.u.} = a_o^3/4$ é o volume de uma célula unitária convencional (c.u.) – pois cada célula *zincblende* convencional contém oito átomos, quatro cátions e quatro ânions e portanto, a célula unitária contém uma base de dois átomos, um cátion e um ânion.⁵

Os íons localizados de Mn²⁺ possuem *spin* $S = 5/2$, inferido a partir da magnetização de saturação a baixas temperaturas, e portam momento magnético igual a $-Sg\mu_B$, onde $g = 2,0$ é o fator magnético do Mn e μ_B é o magneton de Bohr [58]. Devido à interação antiferromagnética entre o sistema de *spins* localizados e o sistema de *spins* itinerante, o valor esperado da magnetização para Mn tem sentido contrário ao valor esperado da magnetização dos buracos. Isto é comprovado pelo fato do *spin* médio de saturação do Mn, igual a $5/2$, ser oposto ao *spin* médio de saturação dos buracos, igual a $-1/2$, em baixas temperaturas [62]. Além disso, a magnetização espontânea do semiconductor ferromagnético (Ga,Mn)As resulta do desbalanço entre a população de *spins-up* e *spins-down* do sistema de portadores [22]. Desta forma, o acoplamento entre os íons de Mn se dá através dos buracos, que se acoplam antiferromagneticamente (AFM) aos íons magnéticos, levando a uma interação ferromagnética (FM) entre os íons de Mn: $S_{Mn}\uparrow \xleftrightarrow{AFM} s_b\downarrow \xleftrightarrow{AFM} S_{Mn}\uparrow \implies S_{Mn}\uparrow \xleftrightarrow{FM} S_{Mn}\uparrow$.

2.4.5 Mecanismos de Compensação de Carga

Átomos de Mn substitucional, denotado por Mn_{Ga}, atuam como impurezas aceitadoras no GaAs, doando um buraco por Mn, pois o Mn é um elemento do grupo II (Mn: [Ar]3d⁵4s²), e substitui o Ga, que é do grupo III (Ga: [Ar]3d¹⁰4s²4p¹). Assim, os dois elétrons 4s do Mn participam das ligações químicas da mesma forma como os dois elétrons 4s do Ga [25], e o elétron que está faltando devido à substituição do Ga pelo Mn é o buraco introduzido por cada Mn incorporado substitucionalmente no semiconductor hospedeiro GaAs. Dois tipos de defeitos doadores contribuem para a compensação de carga observada experimentalmente

⁵Os três parâmetros de troca utilizados na descrição de semicondutores magnéticos e semicondutores magnéticos diluídos são relacionados por $\beta \equiv J_{pd}$, $N_o\beta \equiv J_o$ e $J_{pd} \equiv J_o\Omega_{c.u.} = J_o/N_o$ [25].

em amostras de (Ga,Mn)As: íons de Mn intersticiais, que leva ao mecanismo de auto-compensação de carga, e átomos de As que ocupam sítios da sub-rede dos cátions (Ga).

Mn intersticial, denotado por Mn_i, é duplo doador no (Ga,Mn)As, e portanto, cada defeito Mn_i compensa dois buracos [41] fornecidos pelo Mn substitucional. Vários trabalhos experimentais [38,39,43–46,55] e teóricos [39,43] têm mostrado que estes defeitos intersticiais são altamente metaestáveis, já que a concentração destes pode ser substancialmente reduzida por tratamentos térmicos, realizados após o crescimento das amostras, a temperaturas próximas da temperatura de crescimento. Tratamento térmico realizado a temperaturas inferiores a de crescimento, ~ 240°C, mostrou que a concentração de defeitos intersticiais pode ser bastante reduzida, e conseqüentemente a concentração de buracos elevada [55]. Tratamento térmico realizado a temperaturas ligeiramente maiores do que a de crescimento, igual a 282°C, para amostras com $x > 0,045$, elevou a concentrações de buracos de $6 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ para $1 \times 10^{21} \text{ cm}^{-3}$ [44].

O (Ga,Mn)As, assim como o GaAs crescido a baixas temperaturas (< 300°C), leva a excesso de As [31], que ocupa sítios da sub-rede do Ga, e por isso são chamados de defeitos tipo anti-sítios de As, denotados por As_{Ga}, que também é duplo doador [41]. Como os anti-sítios de As são estáveis até temperaturas em torno de 450°C [63], muito acima da temperatura na qual inicia a precipitação de Mn ($\geq 300^\circ\text{C}$ [43]), os defeitos de anti-sítios não podem ser reduzidos utilizando tratamentos térmicos. Assim, para reduzir este tipo de defeito, é necessário maior controle estequiométrico durante o crescimento por LT-MBE [38,39,42].

Estudos da estabilidade de impurezas neutras A^0 (Mn³⁺) versus impurezas ionizadas negativamente A^- (Mn²⁺) em filmes finos de (Ga,Mn)As crescidos por LT-MBE têm sido realizado [56]. Seus resultados, apesar de não completamente conclusivos, levam a acreditar que a configuração mais provável do Mn incorporado no GaAs é negativamente ionizada, A^- (Mn²⁺). Medidas experimentais de Dicroísmo Circular Magnético [64] e Ressonância Paramagnética Eletrônica [65] confirmam a prevalência desta última configuração. Isto está de acordo com o fato experimental de que a condutividade apresentada pelo (Ga,Mn)As é do tipo-*p*, e desde que os defeitos Mn_i e As_{Ga} são ambos duplo doadores, deve haver maior densidade de defeitos substitucionais aceitadores simples (Mn_{Ga}) do que duas vezes a soma da densidade de defeitos intersticiais (Mn_i) e de anti-sítios de As (As_{Ga}).

Devido a estes mecanismos de compensação de carga, a concentração de buracos observada experimentalmente está em torno de 10 a 30% [66] da concentração nominal de Mn.

2.4.6 Origens do Ferromagnetismo

O semicondutor (Ga,Mn)As pode ser feito completamente compensado – sem portadores de carga — utilizando estanho (Sn_{Ca}) como dopante doador (simples) [34]. Amostras com completa compensação de portadores tem mostrado que a interação magnética entre *spins* dos íons de Mn acoplam antiferromagneticamente [29,34]. Assim, o ferromagnetismo apresentado pelo (Ga,Mn)As é muito provavelmente mediado pelos buracos, desde que o íon de Mn produz os estados aceitadores mais rasos em semicondutores III–V entre os metais de transição e produz altas concentrações de buracos [67]. Uma evidência experimental para este fato é que ferromagnetismo no (Ga,Mn)As somente é observado para concentração fracional de Mn acima de 1% [25].

Os parâmetros que caracterizam a intensidade da interação de troca são $N_o\alpha$, a integral de troca para a banda de condução (troca $s-d$) e $N_o\beta$, a integral de troca para a banda de valência (troca $p-d$) [32]. Para o semicondutor magnético diluído (Ga,Mn)As, cujo ferromagnetismo é mediado por buracos da banda de valência, a integral de troca $N_o\beta$ é de maior importância. A partir de medidas de espectroscopia de fotoemissão [56], determinou-se $N_o\beta = -1,2 \pm 0,2$ eV, para impurezas magnéticas aceitadoras Mn²⁺, com $S = 5/2$ e $x \approx 0,074$. O sinal negativo de $N_o\beta$ significa que a interação de troca $p-d$ no (Ga,Mn)As é antiferromagnética. Nota-se que, devido ao caráter antiferromagnético do acoplamento $p-d$ ($N_o\beta < 0$), a polarização dos *spins* dos buracos é orientado em direção oposta à polarização dos *spins* localizados do Mn [58]. Para o estado Mn²⁺, os estados de *spin-up* são completamente ocupados (5 elétrons com *spin-up* na camada 3d do Mn). Assim o momento angular orbital associado aos elétrons localizados nos íons magnéticos é nulo, $L = 0$ [58]. Já os buracos são caracterizados por um momento angular não nulo.

2.4.7 Efeitos de Desordem

Cálculos realizados com a aproximação do campo médio, incluindo efeitos de desordem posicional de impurezas substitucionais de Mn, mostraram que a aleatoriedade na posição do Mn leva a um aumento na temperatura T_C , indicando que o comportamento ferromagnético do (Ga,Mn)As é sensível também a desordem, além da densidade de íons magnéticos e de portadores [62].

A explicação para o efeito da desordem sobre T_C está associada ao fato de que os portadores (buracos) permanecem mais tempo em regiões de alta concentração de Mn (devido ao aumento da taxa de espalhamento, seu livre caminho médio diminui nestas regiões),

aumentando a intensidade do acoplamento de troca [44, 66, 68, 69]. Outros modelos, como ondas de *spins* [62], teoria do funcional da densidade [70, 71], Hartree–Fock [61], entre outros, também estão sendo utilizados para elucidar os efeitos de desordem no ferromagnetismo mediado por portadores no semicondutor $(\text{Ga}, \text{Mn})\text{As}$.

3 Interação Campo Laser– Gás de Buracos Quase–Bidimensional

O modelo físico proposto aqui pode ser entendido como segue. A partir de um ponto de vista macroscópico, um ferromagneto pode ser visto como um meio contínuo caracterizado por uma densidade de momentos magnéticos (magnetização) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Pode ser mostrado que para fraca oscilação de $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ em torno de sua direção de equilíbrio, suposta como a direção $-z$, o valor de sua componente $-z$, M_z , pode ser expresso em termos dos operadores criação $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ e aniquilação $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ de mágnons com vetor de onda \mathbf{q} , como [72,73]

$$\begin{aligned} M_z &= M_0 - \left(\frac{\mu}{V}\right) \sum_{\mathbf{q}} \langle \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}} \rangle \\ &= M_0 - \left(\frac{\mu}{V}\right) \sum_{\mathbf{q}} \langle \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Em (3.1), $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}}$ é o operador número de mágnons com vetor de onda \mathbf{q} , M_0 é a magnetização total da amostra na ausência de mágnons, M_z é a magnetização da amostra quando mágnons estão presentes, V é o volume do cristal e $\sum_{\mathbf{q}} \langle \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \rangle$ é o número total de ferromagnons, cada um dos quais reduz o momento magnético da amostra por μ . Aqui, $\langle \dots \rangle$ significa média estatística. Portanto, se ondas de *spins* forem excitadas por alguma ação externa (campo *laser*) a ponto de causar amplificação (crescimento) da população de mágnons, a magnetização da amostra relativa ao nível de saturação deve decrescer.

A fim de fundamentar o modelo físico descrito e obter o tamanho do efeito de desmagnetização nós necessitamos avaliar a amplificação da população de mágnons devido a ação do campo *laser*. Para ser mais específico, nós consideramos a interação de buracos quase–bidimensionais com os *spins* dos íons de Mn localizados (a densidade de *spins* devido aos íons de Mn participando no ferromagnetismo é da ordem de 10^{21} cm^{-3}) em um poço quântico de $(\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{As}$ de largura L_z , com temperatura de Curie da ordem de 110K na presença de um campo *laser* de frequência ω . Então calculamos primeiro os elementos da matriz de espalhamento buraco–mágnon, depois obtemos a taxa de mudança da população de mágnons e estimamos o valor limite da intensidade do campo para amplificação de mágnons.

A mudança na magnetização na estrutura semicondutora magnética é finalmente calculada usando a equação (3.1).

3.1 Especificação do Problema

Neste trabalho, consideramos a interação de um buraco com uma onda eletromagnética plana propagando na direção normal à interface do poço quântico (direção $-z$) e com direção de polarização paralela ao plano do poço quântico (plano xOy). A FIGURA 3.1 mostra um esquema do modelo. Consideramos que as ondas eletromagnéticas penetram bem dentro da amostra e supomos que seu comprimento de onda é maior do que o livre caminho médio dos portadores e maior do que a largura do poço de potencial¹, de tal forma que a dependência espacial das ondas *laser* pode ser negligenciada. Esta suposição não é essencial, mais pode simplificar consideravelmente o tratamento matemático.

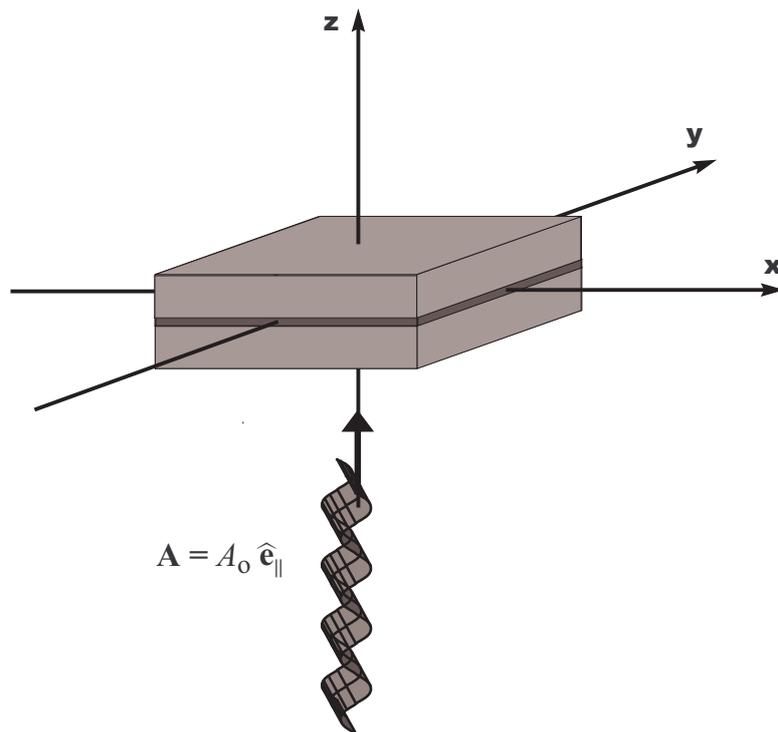


FIGURA 3.1: Esquema do poço quântico, mostrando o sistema de referência utilizado, a direção de crescimento (direção $-z$) e a largura do poço, além das direções de propagação (direção $-z$) e de polarização (direção \parallel ao plano xOy) do campo *laser*. A região mais escura representa o poço quântico de $(\text{Ga,Mn})\text{As}$ e as regiões claras representam as barreiras de potencial (por exemplo, AlAs ou $(\text{Al,Ga})\text{As}$).

¹O livre caminho médio dos portadores em semicondutores magnéticos diluídos $(\text{III}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{V}$, com $x = 5\%$, é $\ell_b \sim 3\text{ nm}$ [74]; o *laser* de menor comprimento de onda utilizado neste trabalho possui $\lambda_L = 10,6\ \mu\text{m}$, e portanto $\lambda_L \gg \ell_b$. Assim, a condição citada é satisfeita para poços quânticos de largura maior que 3nm.

3.2 Equação de Schrödinger

Equação de Schrödinger A equação de Schrödinger dependente do tempo, $\hat{\mathcal{H}}\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$, para um buraco no poço de potencial infinito $\hat{V}(z)$, na presença do campo eletromagnético, especificado pelo potencial vetor magnético $\mathbf{A}(t)$, é dado por²

$$\left\{ \frac{1}{2m^*} \left[-i\hbar \nabla - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(t) \right]^2 + \hat{V}(z) \right\} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

onde $e < 0$ é a carga elementar³; $|e|$ é a carga do buraco; c é a velocidade da luz no vácuo; m^* é a massa efetiva do buraco; $\sigma = +1$ (-1) para sub-banda *spin-up* (*-down*) do buraco na heteroestrutura semicondutora magnética e $\left[-i\hbar \nabla - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(t) \right]$ é o momento na presença do campo eletromagnético⁴. $\hat{V}(z)$ é o potencial de confinamento na direção- z , que representa o potencial na direção perpendicular à interface do poço, e foi modelado como um poço retangular ideal de largura L_z [76]

$$\hat{V}(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < z < L_z \\ \infty & \text{para } z < 0 \text{ ou } z > L_z. \end{cases} \quad (3.3)$$

Potencial Vetor Magnético Consideramos uma onda eletromagnética plana se propagando na direção- z , polarizada no plano xOy . Assim, negligenciando a dependência espacial das ondas *laser*, podemos expressar o potencial vetor magnético como

$$\mathbf{A}(t) = A_0 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cos(\omega t), \quad (3.4)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ é o vetor unitário paralelo à interface do poço, ω é a frequência angular do campo *laser* e A_0 sua amplitude.

Spin do Buraco Os termos do hamiltoniano em (3.2) não dependem das componentes x e y do operador de *spin*, e assim o operador de *spin* na direção- z comuta com o hamiltoniano [77]. Portanto, a inclusão dos efeitos devido ao *spin* pode ser levado em conta adicionando à energia dos buracos o termo⁵

²No sistema gaussiano. Para utilizar o sistema internacional, basta omitir a velocidade da luz no denominador do termo $-|e|\mathbf{A}(t)$.

³Aqui, utilizamos a carga do elétron com sinal, como em [75], página 130.

⁴Onde \mathbf{p} é chamado de momento canônico, para distingui-lo do momento cinemático (ou mecânico), denotado por $\mathbf{\Pi}$, [75], páginas 130–131. Assim, para um elétron, temos $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \frac{e\mathbf{A}}{c} = -i\hbar \nabla - \frac{e\mathbf{A}}{c}$. Para um buraco, temos $\mathbf{\Pi} = \mathbf{p} - \frac{|e|\mathbf{A}}{c} = -i\hbar \nabla - \frac{|e|\mathbf{A}}{c}$.

⁵Para levar em conta o *spin* do buraco, devemos incluir no hamiltoniano o termo $-J\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{s}}\Psi_\sigma = -\frac{JS\sigma}{2}\Psi_\sigma$.

$$-\frac{JS\sigma}{2}, \quad \text{com } \sigma = \begin{cases} +1 & \text{para } \textit{spin-up} (\uparrow) \\ -1 & \text{para } \textit{spin-down} (\downarrow) \end{cases} \quad (3.5)$$

onde σ é o autovalor do *spin*, J é o parâmetro de troca $p-d$ efetivo entre os *spins* localizados e os *spins* dos portadores [17] ($s = 1/2$ para os buracos)⁶ e S é o valor dos *spins* localizados ($S = 5/2$ para os íons de Mn). Na equação anterior, desprezamos a contribuição de Zeeman⁷ desde que ele é muito menor do que o *splitting* $s, p-d$ [81]. Portanto, a equação (3.2) fica

$$\left\{ \frac{1}{2m^*} \left[-i\hbar\nabla - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(t) \right]^2 + \hat{\mathcal{V}}(z) - \frac{JS\sigma}{2} \right\} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Solução da Equação de Schrödinger A solução da equação (3.6) pode ser obtida por meio do método de separação de variáveis (veja Apêndice A, página 115), resultando em

$$\Psi_{\mathbf{k}_\parallel \ell \sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{AL_z}} \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \exp\left\{ i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel - \frac{i}{\hbar} \int^t \left[\mathcal{E}_0 \ell^2 - \frac{JS\sigma}{2} + \frac{1}{2m^*} \left(\hbar \mathbf{k}_\parallel - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right] d\tau \right\}. \quad (3.7)$$

Podemos utilizar a integral (ou parâmetro) de troca J na forma

$$J = N_o \beta x \quad (3.8)$$

e o termo da energia de interação entre os *spins* localizados dos íons de Mn e o *spin* do buraco itinerante como

$$-\frac{JS\sigma}{2} = -\frac{N_o \beta x S \sigma}{2} = -\frac{\hbar}{2} \left(\frac{N_o \beta S x}{\hbar} \right) \sigma = -\frac{\hbar}{2} \omega_s \sigma, \quad (3.9)$$

onde definimos ω_s como

$$\omega_s = \frac{N_o \beta S x}{\hbar}. \quad (3.10)$$

Colocando (3.8) e (3.9) em (3.7), temos

$$\boxed{\Psi_{\mathbf{k}_\parallel \ell \sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{AL_z}} \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \exp\left\{ i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel - \frac{i}{\hbar} \int^t \left[\mathcal{E}_0 \ell^2 - \frac{\hbar \omega_s \sigma}{2} + \frac{1}{2m^*} \left(\hbar \mathbf{k}_\parallel - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right] d\tau \right\}.} \quad (3.11)$$

⁶De acordo com Cibert, J. e Scalbert, D., em [78], página 393, o parâmetro β se aplica ao *spin* do buraco, e não ao seu momento angular total. Para o caso do semiconductor magnético diluído (Ga,Mn)As *bulk*, utiliza-se $\hat{\mathcal{H}}_{pd} = (1/3)N_o \beta x \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{j}}$ [79], com a projeção do momento angular total dos buracos $j_z = \pm \frac{1}{2}$ para buracos leves e $j_z = \pm \frac{3}{2}$ para buracos pesados [32, 36]. No nosso modelo, utilizamos somente a banda de buracos pesados, de forma que utilizar $N_o \beta x \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{s}}$, com projeção de *spin* $s = \pm \frac{1}{2}$ para os buracos pesados é completamente equivalente a utilizar $(1/3)N_o \beta x \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle \cdot \hat{\mathbf{j}}$ com $j_z = \pm \frac{3}{2}$.

⁷O termo correspondente ao efeito Zeeman é dado pela inclusão do termo $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ ao hamiltoniano (como em [80], página 463), onde $\boldsymbol{\mu}$ é o momento de dipolo magnético e \mathbf{B} o campo indução magnética.

Nas equações (3.8) e (3.11), $A = L_x L_y$ é a área de normalização, $\mathcal{E}_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L_z^2}$ é a energia do estado fundamental de um poço quântico ideal de largura L_z , $\omega_s = \frac{N_o \beta S x}{\hbar}$ é a frequência de *spin-splitting* entre sub-bandas de *spin* do poço quântico semiconductor magnético diluído, \mathbf{k}_{\parallel} e \mathbf{r}_{\parallel} são as componentes dos vetores de onda e de posição do portador paralelo ao plano do poço quântico, respectivamente.

A energia total do buraco, na ausência do campo eletromagnético, é dada por (veja Apêndice A, página 120)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} &= \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0 - \frac{JS\sigma}{2} \\ &= \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \frac{JS\sigma}{2} \\ &= \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \frac{\sigma \hbar \omega_s}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0. \quad (3.13)$$

Operador de campo para os mágnons Mágnons em semicondutores magnéticos diluídos estão associados tanto à precessão de *spins* ferromagnéticos localizados (devido aos íons de Mn) [82] quanto à precessão de *spins* do sistema de portadores itinerantes [83]. Neste trabalho, focamos sobre o sistema de *spins* localizados, para o qual podemos escrever o operador campo de mágnons como

$$\phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) = C e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}} t)}, \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{q} = (q_{\parallel}, q_z)$ é o vetor de onda dos mágnons, $\omega_{\mathbf{q}}$ é a frequência dos mágnons,

$$C = \left(\frac{S}{2N_c} \right)^{1/2} (N_o \beta x) \quad (3.15)$$

é a constante de normalização do operador campo para os mágnons [81], N_c é o número de sítios cátions e $\mathbf{q}_{\parallel} = (q_x, q_y)$ é a componente do vetor de onda do mágnon paralelo ao plano do poço.⁸

⁸Podemos ver o operador campo para mágnons de outro ponto de vista. O acoplamento $p-d$ entre buraco-mágnon é dado por $M_{pd} = -J \sqrt{\frac{S}{2N_c}}$, sendo N_c o número de sítios cátions em um cristal de volume V , como em [81, 84]. M_{pd} possui dimensão de *energia*, e assim não se enquadra como um fator de normalização no sentido usual para a função de onda dos mágnons, que deve ter dimensão de *volume*^{-1/2}, de tal forma que $\int \phi^\dagger \phi d^3 r = 1$. Assim, escrevemos $\phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) = V^{-1/2} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}} t)}$, e portanto, $-J(S/2N_o)^{1/2} \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) = -J(S/2N_o)^{1/2} V^{-1/2} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}} t)} = -J(S/2N_o V)^{1/2} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}} t)}$ e assim, $-J(S/2N_c)^{1/2} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}} t)} = M_{sd} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}} t)}$, onde N_o é o número de sítios cátions por unidade de volume e $N_c = N_o V$ é o número total de sítios cátions presente na

Como se sabe, em materiais magnéticos *bulk*, ondas de *spins* são livres para propagar em todas as três dimensões, resultando em uma dispersão contínua de ondas de *spins* de energia $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ com momento tridimensional \mathbf{q} . Se nós restringimos uma das dimensões (dito a direção- z) como na geometria de um filme fino (em escala nanométrica), devido ao confinamento dos dois contornos (interfaces), as ondas de *spins* são espalhadas para frente e para trás entre os contornos. Se a espessura do filme for igual a um múltiplo integral de meio comprimento de onda projetado ao longo da direção- z , ondas estacionárias são formadas [85]. Tais ondas de *spins* estacionárias podem ser consideradas como oscilações da magnetização que são não-uniformes na direção normal à superfície e que propagam-se livremente nas duas outras dimensões. Portanto, a relação de dispersão (no espaço dos momentos) é dada por uma série de ramos de ondas de *spins* quantizados no plano perpendicular q_z e contínuos no plano de q_x e q_y . Por motivo de simplicidade, nós desprezamos o efeito do confinamento dos mágnons e assumimos uma relação de dispersão de energia das ondas de *spins* $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$, com momento tridimensional \mathbf{q} .

3.3 Probabilidade de Transição

Tratando a interação portador-mágnon como uma perturbação dependente do tempo de primeira ordem, os elementos da matriz de transição entre o estado inicial $|\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma\rangle$ e o estado final $|\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'\rangle$ do buraco, são dados por

$$\begin{aligned} a(\kappa \rightarrow \kappa') &= a(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma \rightarrow \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma') \\ a(\kappa \rightarrow \kappa') &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t') | \mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma \rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$\langle \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) | \mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma \rangle = \int d^2r_{\parallel} \int dz \Psi_{\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma}(\mathbf{r}, t). \quad (3.17)$$

$\kappa = \{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma\}$ e $\kappa' = \{\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'\}$ é uma forma abreviada de denotar o conjunto de números quânticos que especifica a função de onda não perturbada do estado inicial e final do portador, respectivamente, e $d^2r_{\parallel} = dx dy$.

A probabilidade de transição, por unidade de tempo, do estado inicial para o estado final,

amostra de volume V . No caso de um semiconductor magnético (não diluído), o número de sítios cátions coincide com o número de *spins* localizados devido aos íons magnéticos.

$T(\kappa \rightarrow \kappa')$, é dada pelo quadrado do módulo de $a(\kappa \rightarrow \kappa')$ dividido por t , ou seja

$$\begin{aligned} T(\kappa \rightarrow \kappa') &= \frac{|a(\kappa \rightarrow \kappa')|^2}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left| -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t') | \mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma \rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.11) e (3.14) em (3.18), obtemos (veja Apêndice B, página 121)

$$T(\kappa \rightarrow \kappa') = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} T(n; \kappa \rightarrow \kappa') \quad (3.19)$$

com

$$\begin{aligned} T(n; \kappa \rightarrow \kappa') &= \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\ &\quad \times \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde o fator $\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')$ é dado por

$$\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell') = \frac{\begin{cases} \text{sen}(q_z L_z/2) \\ \text{cos}(q_z L_z/2) \end{cases}}{(q_z L_z/2)} \frac{4\ell'\ell(q_z L_z/\pi)^2 P}{4\ell'^2\ell^2 - [\ell'^2 + \ell^2 - (q_z L_z/\pi)^2]^2}, \quad (3.21)$$

sendo que a função $\text{sen}(\dots)$ é utilizada quando ℓ e ℓ' são ambos pares ou ímpares, e $\text{cos}(\dots)$ é usada quando um desses números é par e o outro ímpar. P é um fator de fase ($P_{\text{sen}} = e^{iq_z L_z/2}$ e $P_{\text{cos}} = ie^{iq_z L_z/2}$), com $|P|^2 = 1$; $\mathcal{J}_n(\dots)$ é a função de Bessel de ordem n ; λ é um parâmetro do campo *laser* (note que $\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}$), definido como

$$\lambda \equiv \frac{\hbar |e| \mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_0}{m^* \omega}. \quad (3.22)$$

Aqui, \mathbf{E}_0 é a amplitude da componente elétrica do campo *laser*.⁹

Assim, a probabilidade de transição, por unidade de tempo, entre o estado inicial e o estado final, em uma notação mais conveniente para os nossos propósitos, é dado por

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell') = T(\kappa \rightarrow \kappa') = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} T(n; \kappa \rightarrow \kappa')$$

⁹A relação entre as amplitudes dos campos $\mathbf{E}(t)$ e $\mathbf{A}(t)$ é: $\mathbf{E}(t) = -(1/c)\partial\mathbf{A}(t)/\partial t = (\omega/c)\mathbf{A}_0 \text{sen}(\omega t)$. Escolhendo $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \text{sen}(\omega t)$, temos que $\mathbf{E}_0 = (\omega/c)\mathbf{A}_0$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right]. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Para determinarmos a probabilidade de transição por unidade de tempo para transições a partir do estado inicial $|\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma\rangle$ para todos os estados finais possíveis $|\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'\rangle$ acompanhado por absorção ou emissão de mágnons, devemos somar $T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell')$ sobre todos os \mathbf{k}' , que é o mesmo que somar em \mathbf{k}'_{\parallel} e em ℓ' . Portanto, somando primeiro somente em \mathbf{k}' , e trocando a soma discreta por uma soma contínua, temos:

$$\begin{aligned}
T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') &= \sum_{\mathbf{k}'_{\parallel} \neq \mathbf{k}_{\parallel}} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell') \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 \mathbf{k}'_{\parallel} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell') \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} \int d^2 \mathbf{k}'_{\parallel} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\
&\quad \times \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right] \\
&= \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right], \quad (3.24)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}$ devido à função $\delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel})$.

Então, somando em ℓ' , temos que a probabilidade total, por unidade de tempo, de transição do estado inicial para todos os estados finais possíveis, acompanhado de emissão de mágnons, é dado por

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell) = \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \quad (3.25)$$

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell) = \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\ell'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right].$$

(3.26)

Nesta equação, os termos com $n < 0$ correspondem à emissão de $|n|$ fótons, enquanto que os termos com $n > 0$ correspondem à absorção de $|n|$ fótons do campo *laser*.

3.4 Equação Cinética

Com a taxa de probabilidade de transição em mãos, podemos calcular a taxa de variação da população de mágnons no sistema. Levando em conta todas as possibilidades de espalhamento dos portadores do estado inicial para o final com absorção ou emissão de mágnons e, simultaneamente, com absorção ou emissão de fótons, e todas as possibilidades de espalhamento dos portadores do estado final para o inicial com absorção ou emissão de mágnons e, simultaneamente, com absorção ou emissão de fótons, obtemos a equação cinética para a população de mágnons.

Equação Cinética A taxa de variação da população de mágnons, dN_q/dt , pode ser escrita esquematicamente como [86,87]

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_q}{dt} = & \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell \\ \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell'}} \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa' \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \right. \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \left. \right\} \\
 = & \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell \\ \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell'}} \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa' \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \right. \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa' \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \\
 & + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \\
 & - \begin{array}{c} \begin{array}{c} \kappa \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \text{---} \rightarrow \text{---} \\ \kappa' \end{array} \\ \hbar\omega_q \end{array} \left. \right\} \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

onde o estado inicial do portador é especificado por $\kappa \rightarrow [\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma]$, enquanto que o estado final do mesmo é especificado por $\kappa' \rightarrow [\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma']$. O significado dos símbolos utilizados nos diagramas acima estão descritos na TABELA 3.1.

(QUASE) PARTÍCULA	DESCRIÇÃO DA LINHA	ESQUEMA
Buracos	linha reta contínua	\longrightarrow
Mágnons	linha ondulada	\rightsquigarrow
Fótons	linha reta descontínua	$\text{---}\longrightarrow\text{---}$

TABELA 3.1: Simbologia utilizada para buracos, mágnons e fótons nos diagramas (esquemáticos) representativos dos processos de espalhamento.

Como em [86–89], a equação cinética esquemática acima pode ser convertida em uma equação matemática, utilizando para isto a probabilidade de transição por unidade de tempo correspondente a cada diagrama, juntamente com os fatores de população, que levam em conta o princípio de exclusão de Pauli, garantindo que só ocorra transições de estados ocupados por buracos para estados não ocupados pelos mesmos. Afim de realizar esta transformação, consideramos a probabilidade de transição por unidade de tempo escrita na seguinte forma generalizada

$$T(\kappa \rightarrow \kappa') = \sum_{\epsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} T(\epsilon, n; \kappa \rightarrow \kappa') \quad (3.28)$$

com

$$T(\epsilon, n; \kappa \rightarrow \kappa') = \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \epsilon \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\ \times \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \epsilon \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right], \quad (3.29)$$

onde $\epsilon = \pm 1$ e $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \epsilon \mathbf{q}_{\parallel}$. Somando os oito termos que figuram nas duas primeiras linhas da equação (3.27), temos

$$\frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & T(\epsilon = -1, n; \kappa \rightarrow \kappa') (\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & - T(\epsilon = +1, n; \kappa \rightarrow \kappa') \mathcal{N}_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & + T(\epsilon = -1, -n; \kappa \rightarrow \kappa') (\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & - T(\epsilon = +1, -n; \kappa \rightarrow \kappa') \mathcal{N}_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & + T(\epsilon = -1, n; \kappa' \rightarrow \kappa) (\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & - T(\epsilon = +1, n; \kappa' \rightarrow \kappa) \mathcal{N}_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & + T(\epsilon = -1, -n; \kappa' \rightarrow \kappa) (\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & - T(\epsilon = +1, -n; \kappa' \rightarrow \kappa) \mathcal{N}_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \end{aligned} \right\}. \quad (3.30)$$

A partir da equação (3.29) e do fato de $\delta(x)$ ser par, podemos verificar que

$$T(\epsilon, n; \kappa \rightarrow \kappa') = T(-\epsilon, -n; \kappa' \rightarrow \kappa). \quad (3.31)$$

Aplicando esta relação para os quatro últimos termos da equação (3.30), verificamos que os termos equidistantes têm probabilidades de transição idênticas, e portanto podem ser

colocados em evidência, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{n=1}^{+\infty} \{ & T(\epsilon = -1, n; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, n; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} + \\ & + T(\epsilon = -1, -n; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, -n; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} \}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, notando que o primeiro e o terceiro termos da equação acima (idem para o segundo e o quarto termos) só diferem no sinal de n , podemos representá-los por um só termo, bastando para isso trocar a soma $\sum_{n=1}^{+\infty}$ por $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty}$ [90]. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \{ & T(\epsilon = -1, n; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, n; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} \}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Finalmente, voltamos à equação original ($\epsilon = +1$), e portanto mantemos somente o segundo termo da equação (3.33). Deste ponto em diante $\epsilon = +1$, e podemos suprimi-lo nas equações subsequentes. Temos então

$$\frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} T(n; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \}. \quad (3.34)$$

Substituindo $T(n; \kappa \rightarrow \kappa')$, lembrando que

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell) = \sum_{\mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} T(n; \kappa \rightarrow \kappa') \quad (3.35)$$

e substituindo (3.26) para $T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega] \times \\ \times \left\{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] - N_{\mathbf{q}} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}] f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \equiv f[\mathcal{E}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma)]$ é a função de distribuição do portador na ℓ -ésima sub-banda do poço quântico e σ -ésima sub-banda de *spin*. Os fatores de população dos portadores, f e $1 - f$, garantem que só ocorra transição quando o estado inicial no evento de espalhamento esteja ocupado e o estado final vazio, em concordância com o princípio de exclusão de Pauli [91].

Assim, na equação (3.36), o termo $\left\{(\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1)f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}]\right\}$ considera a criação (emissão) de mágns (fator $[\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1]$) a partir da transição de um buraco do estado inicialmente ocupado κ' (fator $f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}$) para o estado final desocupado κ (fator $[1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}]$). De forma similar, o termo $\left\{\mathcal{N}_{\mathbf{q}} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}] f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}\right\}$ leva em conta a aniquilação (absorção) de mágns (fator $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$) a partir da transição de um buraco do estado inicialmente ocupado κ (fator $f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}$) para o estado final desocupado κ' (fator $[1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}]$).

3.5 Coeficiente de Amplificação de Mágns

Levando em conta novamente a equação (3.26), e que $T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell) = \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell')$, podemos reescrever (3.36) para a taxa de mudança da população de mágns, $\frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{dt}$, de forma compacta como

$$\frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \left\{ (\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1) f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] - \mathcal{N}_{\mathbf{q}} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}] f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right\}. \quad (3.37)$$

Assumindo que a população de mágns satisfaz a condição $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} \gg 1$, de tal forma que $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} + 1 \simeq \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{dt} &= \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \left\{ \mathcal{N}_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] - \mathcal{N}_{\mathbf{q}} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}] f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \left[f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} (1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}) - (1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}) f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right] \right\} \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \\ &= \left\{ \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \left[f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} + f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right] \right\} \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \\ &= \left\{ \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \left[f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right] \right\} \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

ou seja,

$$\frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{dt} = \gamma_{q_{\parallel}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}, \quad (3.39)$$

onde $\gamma_{q_{\parallel}}$ é o coeficiente de amortecimento (amplificação) de mágns. Comparando as equações (3.38) e (3.39), vemos que $\gamma_{q_{\parallel}}$ pode ser expresso como

$$\gamma_{q_{\parallel}} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell} \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \left[f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right]$$

$$\begin{aligned} \gamma_{q_{\parallel}} = & \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 [f_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}] \times \\ & \times \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Neste ponto é importante notar que o crescimento exponencial da população de mágnons, implícito na equação (3.39), é válido somente no estágio inicial do processo de amplificação. Mecanismos de amortecimento não lineares, tais como interação mágnon–mágnon, são responsáveis por limitar o crescimento do número de mágnons [84]. Em baixas temperaturas (em relação à temperatura de Curie do sistema), estes mecanismos não lineares de amortecimento se anulam [92], e portanto podem ser negligenciados para $T \simeq 0\text{K}$.

Transições Intra Sub-Bandas: ($\ell' = \ell$) Dentro de uma mesma sub-banda do poço quântico (mesmo ℓ), temos as sub-bandas de *spin-up* e *spin-down*. No nosso modelo de transições intra sub-bandas, estamos considerando que o buraco realiza uma transição de um estado de *spin-down* majoritário [93] para um estado de *spin-up* minoritário. Assim, teremos para o estado inicial, *spin-down* ($\sigma = -1$) e para o estado final, *spin-up* ($\sigma' = +1$). Portanto, ficamos com $(\sigma' - \sigma) = +2$. Neste caso, a equação (3.40) toma a forma

$$\gamma_{q_{\parallel}} = \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell)|^2 [f_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell\sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_s - n\hbar\omega]. \quad (3.41)$$

Depois de efetuarmos a primeira soma em ℓ indicada em (3.41), a variável ℓ não aparece mais no somando e, usando a relação $\sum_{\ell=1}^{\ell_{\text{máx}}} 1 = \ell_{\text{máx}}$ para a soma em ℓ restante [94], obtemos

$$\gamma_{q_{\parallel}} = \frac{2\pi\ell_{\text{máx}}}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell)|^2 [f_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell\sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_s - n\hbar\omega]. \quad (3.42)$$

Transições Inter Sub-Bandas: ($\ell' \neq \ell$) No caso de transições inter sub-bandas, $\ell' \neq \ell$, para transições do estado de *spin-down* para o estado de *spin-up*, a equação (3.40) para o coeficiente $\gamma_{q_{\parallel}}$ fica

$$\gamma_{q_{\parallel}} = \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 [f_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_s - n\hbar\omega]. \quad (3.43)$$

4 Regime de Campo Forte

No regime de campo forte ou intenso, $\lambda \gg \hbar\omega$ e o argumento da função de Bessel é grande, exceto quando a ordem de $n = \varepsilon/\hbar\omega$ for igual à ordem do argumento $\lambda/\hbar\omega$. Portanto, a soma sobre n na equação (3.40) pode ser escrita aproximadamente como [88]

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \delta[\varepsilon - n\hbar\omega] \simeq \frac{1}{2} [\delta(\varepsilon - \lambda) + \delta(\varepsilon + \lambda)], \quad (4.1)$$

onde $\varepsilon = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s$. A primeira função δ corresponde à emissão e a segunda à absorção de $\lambda/\hbar\omega$ fótons [95–97].

Assumindo $\lambda \gg k_B T$, \mathcal{E}_F ($k_B T$ é a energia térmica e \mathcal{E}_F , a energia de Fermi), o processo de absorção de fótons do campo *laser* domina sobre a emissão, e podemos negligenciar a contribuição do termo de emissão [$\sim \delta(\varepsilon - \lambda)$] frente ao termo de absorção [$\sim \delta(\varepsilon + \lambda)$] [98], de forma que a equação (3.40) se reduz a

$$\begin{aligned} \gamma_{q_{\parallel}} &= \frac{\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 [f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda] \\ &= \frac{\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{I}(\ell, \ell'), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde

$$\mathcal{I}(\ell, \ell') \equiv \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} [f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda]. \quad (4.3)$$

A soma discreta sobre \mathbf{k}_{\parallel} pode ser aproximada como uma integral, ou seja,

$$\sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \longrightarrow \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \quad (4.4)$$

então,

$$\mathcal{I}(\ell, \ell') = \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} [f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda]. \quad (4.5)$$

Para realizar a integração indicada em (4.5) devemos utilizar uma forma explícita para a função de distribuição dos portadores de carga, $f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}$. No caso geral, $f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}$ é a função de distribuição de Fermi–Dirac. No caso de um gás de portadores degenerado, podemos aproximar a função de Fermi–Dirac pela função passo unitário de Heaviside. No caso de um gás de portadores não–degenerado, podemos utilizar a função de distribuição ou estatística clássica de Maxwell–Boltzmann.

4.1 Gás de Buracos Degenerado

Para o caso de um gás de buracos degenerado, a integração de (4.5) pode ser realizada aproximando a função de distribuição dos portadores $f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} \equiv f[\mathcal{E}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma)]$ pela função passo unitário de Heaviside, $\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma})$, onde \mathcal{E}_F é a energia de Fermi. A função passo é definida como

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Lembrado que, a temperaturas $T \simeq 0\text{K}$, todos os estados estão ocupados para energias menores do que a energia de Fermi e todos os estados com energia maior do que a energia de Fermi estão vazios, a forma adequada para este caso, com origem deslocada para \mathcal{E}_F e invertendo o degrau, é

$$f(\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}) \simeq \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} < \mathcal{E}_F \\ 0 & \text{se } \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} > \mathcal{E}_F. \end{cases} \quad (4.7)$$

O termo $[f_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}]$ sob o sinal de integral em (4.5) pode agora ser escrito como $[\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'}) - \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma})]$. Este termo assume o valor 1 somente quando a relação $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} < \mathcal{E}_F < \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}$ for satisfeita. Esta condição é necessária para que $\gamma_{q_{\parallel}}$ seja positivo (amplificação de mágnons). Os casos onde $[\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'}) - \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma})] \leq 0$ correspondem a amortecimento da população de mágnons (pois $I(\ell, \ell') < 0$) ou ausência de interação buraco–mágnons ($I(\ell, \ell') = 0$), e não serão analisados neste trabalho. Assim, com a função passo de Heaviside e no caso geral de transições intra ou inter sub–bandas, a equação (4.5) toma a seguinte forma, em coordenadas cilíndricas polares:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\ell, \ell') &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \left[\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}) - \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}) \right] \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right] \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \left[\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \lambda) - \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}) \right] \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right] \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 k_{\parallel} \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right] \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_1}^{k_2} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel})^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right] \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_1}^{k_2} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel}}{m^*} + \frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right], \quad (4.8)
\end{aligned}$$

onde os limites de integração k_1 e k_2 são obtidos a seguir, a partir das condições de integrabilidade [99] da equação (4.8). Aqui, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \lambda$ ou, de forma equivalente, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} + \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \lambda$, devido à presença da função δ no integrando.

1ª Condição de Integrabilidade Da função δ , tiramos que a integral em $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ será não nula somente se o argumento da função δ estiver no intervalo de integração.¹ Assim,

$$0 \leq \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel}}{m^*} + \frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right] < \frac{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}}{m^*}, \quad (4.9)$$

e portanto, como o termo à direita envolve apenas os módulos dos vetores de ondas do buraco e do mágnon no plano do poço quântico, sendo claro que este termo deve ser maior ou igual a zero, temos que a seguinte condição de integrabilidade deve ser satisfeita:

$$\frac{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}}{m^*} > \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel}}{m^*} + \frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda. \quad (4.10)$$

2ª Condição de Integrabilidade A diferença entre as funções de distribuição do buraco no estado final e inicial resulta igual a 1 somente se

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} < \mathcal{E}_F < \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}. \quad (4.11)$$

Analisemos cada uma das relações da desigualdade acima separadamente. A relação da

¹Com o argumento da função delta colocado em termos da energia, e não do ângulo. Isto pode ser feito mudando de variável: $\xi = (\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel} / m^*) \cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}})$, com $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ sendo o ângulo entre k_{\parallel} e q_{\parallel} , $\int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \rightarrow 4 \left(\frac{m^*}{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}} \right) \int_0^{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel} / m^*} \frac{d\xi}{|\sin(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}})|}$, onde $\sin(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) = \left(\frac{m^*}{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}} \right) \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 - \xi^2}$. Então, para $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \in (0, \pi/2]$ temos que $\xi \in \left[0, \frac{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}}{m^*} \right)$.

esquerda é

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} &< \mathcal{E}_F \\
 \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \lambda &< \mathcal{E}_F \\
 \frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2\mathcal{E}_0 - \frac{\sigma\hbar\omega_s}{2} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \lambda &< \mathcal{E}_F,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde utilizamos $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} + \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \lambda$. Temos então que

$$\frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} < \mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \lambda. \tag{4.13}$$

Analogamente, a relação da direita fica

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_F &< \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} \\
 \mathcal{E}_F &< \frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2\mathcal{E}_0 - \frac{\sigma\hbar\omega_s}{2} \\
 \frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} &> \mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Juntando as relações (4.13) e (4.14) obtemos os limites de k_{\parallel} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s < \frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} < \mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \lambda \\
 \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s \right) \right]^{1/2} < k_{\parallel} < \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \lambda \right) \right]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Então, os limites de integração em k_{\parallel} estão entre k_1 e k_2 , sendo

$$k_1 = \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s \right) \right]^{1/2} \tag{4.16}$$

e

$$k_2 = \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \lambda \right) \right]^{1/2}. \tag{4.17}$$

Multiplicando (4.10) por $\frac{2m^*}{\hbar^2}$,

$$2k_{\parallel}q_{\parallel} > 2\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}^2 + \underbrace{\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\ell'^2\mathcal{E}_0 - \ell^2\mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma'-\sigma)}{2}\hbar\omega_s + \lambda \right)}_{\Lambda} \tag{4.18}$$

$$q_{\parallel}^2 + 2k_{\parallel}q_{\parallel}[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1] + \Lambda < 0 \quad (4.19)$$

$$\left\{ q_{\parallel} + k_{\parallel}[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1] - \sqrt{k_{\parallel}^2[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1]^2 - \Lambda} \right\} \left\{ q_{\parallel} + k_{\parallel}[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1] + \sqrt{k_{\parallel}^2[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1]^2 - \Lambda} \right\} < 0 \quad (4.20)$$

que é verdade somente se os termos entre chaves possuírem sinais opostos. Há duas possibilidades: (a) o primeiro termo positivo e o segundo negativo e (b) o primeiro termo negativo e o segundo positivo. A primeira alternativa leva a um limite superior *menor* do que o limite inferior, e portanto não tem sentido físico. A segunda alternativa leva a

$$-\sqrt{k_{\parallel}^2[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1]^2 - \Lambda} < q_{\parallel} + k_{\parallel}[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1] < \sqrt{k_{\parallel}^2[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1]^2 - \Lambda}. \quad (4.21)$$

A desigualdade do lado esquerdo leva ao limite inferior e a do lado direito ao limite superior. O limite inferior resulta igual a

$$\begin{aligned} q_{\parallel} &> -\sqrt{k_{\parallel}^2[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1]^2 - \Lambda} - k_{\parallel}[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1] \\ q_{\parallel} &> -\sqrt{4k_{\parallel}^2 - \Lambda} + 2k_{\parallel}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

para $\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) = -1$, enquanto o limite superior é dado por

$$\begin{aligned} q_{\parallel} &< \sqrt{k_{\parallel}^2[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1]^2 - \Lambda} - k_{\parallel}[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1] \\ q_{\parallel} &< \sqrt{k_{\parallel}^2 - \Lambda} + k_{\parallel}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

para $\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) = 0$. Finalmente, desprezando o termo Λ , obtemos o limite aproximado

$$0 < q_{\parallel} < 2k_{\parallel}. \quad (4.24)$$

Além disso, podemos utilizar $q_{\parallel} < 2k_{\parallel}$ juntamente com o valor mínimo de k_{\parallel} para obtermos o limite superior de q_{\parallel} , a menos do termo desprezado em (4.24). Assim, com $q_{\parallel} < 2k_{\parallel}$, temos

$$q_{\parallel} < \sqrt{\frac{8m^*}{\hbar^2}(\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \sigma\hbar\omega_s/2)}. \quad (4.25)$$

Para a realização dos cálculos, adotamos metade deste valor, ou seja

$$q_{\parallel} \simeq \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}(\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \sigma\hbar\omega_s/2)}, \quad (4.26)$$

como valor limite (ou máximo) para q_{\parallel} .

Pelo uso da conservação do momento linear e da geometria do espalhamento buraco-

mágnon, o vetor de onda do portador de carga confinado no plano perpendicular à direção de crescimento da nanoestrutura leva ao confinamento do vetor de onda do mágnon neste plano (o plano do campo elétrico do *laser*). Assim, mágnons com vetores de onda confinados no domínio mostrado na equação (4.24) podem interagir com os buracos arrastados no campo *laser* externo. Por confinamento do vetor de onda dos mágnons entendemos aqueles vetores de onda dos mágnons que estão disponíveis para a interação com os portadores durante o processo de espalhamento na presença do campo *laser*. Por outro lado, a conservação do momento linear ao longo da direção de crescimento (eixo- z) leva aos valores mínimo e máximo $q_z = (\ell' - \ell) \frac{\pi}{L_z}$ e $q_z = (\ell' + \ell) \frac{\pi}{L_z}$, respectivamente, que representa a mudança no momento linear entre os dois subsistemas ao longo desta direção.

Podemos considerar, sem perda de generalidade, o vetor de onda \mathbf{k}_{\parallel} ao longo do eixo x e \mathbf{q}_{\parallel} formando um ângulo $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ como \mathbf{k}_{\parallel} no plano do poço quântico, como mostrado esquematicamente na FIGURA 4.1. Então $\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel} = k_{\parallel} q_{\parallel} \cos(\widehat{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{q}_{\parallel}}) = k_{\parallel} q_{\parallel} \cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}})$.

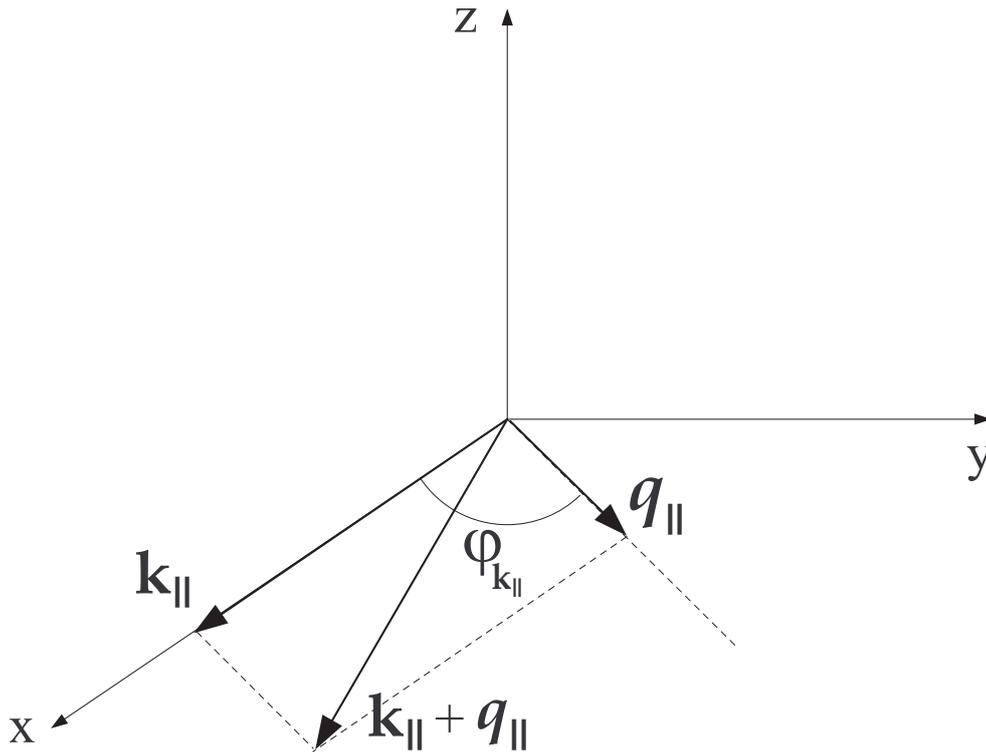


FIGURA 4.1: Esquema da geometria de espalhamento buraco-mágnon, mostrando a posição relativa entre os vetores de onda \mathbf{k}_{\parallel} , \mathbf{q}_{\parallel} e $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}$, juntamente com a definição do ângulo $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$.

Assim, podemos efetuar a integral:

$$\begin{aligned}
I(\ell, \ell') &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_1}^{k_2} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\frac{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel} \cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}})}{m^*} + \frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right] \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \int_{k_1}^{k_2} \frac{k_{\parallel}}{k_{\parallel}} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) + \frac{m^*}{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right) \right] \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \int_{k_1}^{k_2} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) + \frac{m^*}{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}} \Omega \right] \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \int_{k_1}^{k_2} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{j=1}^2 \frac{\delta(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} - \varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)})}{|\text{sen}(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)})|} \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \int_{k_1}^{k_2} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right) \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \Omega^2}} \sum_{j=1}^2 \delta(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} - \varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_1}^{k_2} \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \Omega^2}} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{j=1}^2 \delta(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} - \varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) \\
&= 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_1}^{k_2} \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \Omega^2}} dk_{\parallel} \\
&= \frac{A}{2\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right)^2 \left\{ \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_2^2 - \Omega^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_1^2 - \Omega^2 \right]^{1/2} \right\} \\
&= \frac{A}{2\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right)^2 \mathcal{K}(\ell, \ell')
\end{aligned} \tag{4.27}$$

com

$$\Omega = \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar\omega_s + \lambda \right) \tag{4.28}$$

e

$$\mathcal{K}(\ell, \ell') = \left\{ \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_2^2 - \Omega^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_1^2 - \Omega^2 \right]^{1/2} \right\} \tag{4.29}$$

onde utilizamos a propriedade $\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$, $g(x_i) = 0$ e $g'(x) = dg/dx$, com $g(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) = \cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) + \left(\frac{m^*}{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}} \right) \Omega$ e $g'(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) = -\text{sen}(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}})$ e assim $\cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) = -\left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right) \frac{\Omega}{k_{\parallel}}$ e então $g'(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) = -\left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right) \frac{1}{k_{\parallel}} \sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \Omega^2}$. Assim, a integral em $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ foi resolvida, utilizando duas raízes simétricas $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)} = \pm \tilde{\varphi}$ em relação à direção definida por \mathbf{k}_{\parallel} .

Voltando à equação (4.2) para $\gamma_{q_{\parallel}}$, e substituindo as relações para $I(\ell, \ell')$ da equação (4.27) e $C = \left(\frac{S}{2N_c}\right)^{1/2} (N_o \beta x)$ da equação (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma_{q_{\parallel}} &= \frac{\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 I(\ell, \ell') \\
&= \frac{\pi}{\hbar} \left(\frac{S}{2N_c}\right) (N_o \beta x)^2 \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \frac{A}{2\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}}\right)^2 \mathcal{K}(\ell, \ell') \\
&= \frac{(N_o \beta x)^2 S A m^{*2}}{4\pi \hbar^5 N_c q_{\parallel}^2} \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{K}(\ell, \ell') \\
&= \frac{(N_o \beta x)^2 S m^{*2}}{4\pi \hbar^5 L_z (N_c/V) q_{\parallel}^2} \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{K}(\ell, \ell'), \tag{4.30}
\end{aligned}$$

onde multiplicamos e dividimos por L_z e colocamos $V = AL_z$.

Segue a partir da equação (4.30) que para $\gamma_{q_{\parallel}}$ positivo a população de mágnons deve crescer (amplificação) como um resultado indireto da presença do campo *laser* intenso, enquanto que para $\gamma_{q_{\parallel}}$ negativo, a população de mágnons deve diminuir (amortecimento). Portanto, para que ocorra amplificação da população de mágnons ($\gamma_{q_{\parallel}} > 0$) devemos ter $\mathcal{K}(\ell, \ell') > 0$ na equação (4.30). Substituindo (4.16) para k_1 , (4.17) para k_2 e (4.28) para Ω em (4.29) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\ell, \ell') &= \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*}\right)^2 \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_o + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s - \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \lambda \right) \right] - \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_o - \ell^2 \mathcal{E}_o - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar \omega_s + \lambda \right)^2 \right]^{1/2} + \\
&\quad - \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*}\right)^2 \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_o + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s \right) \right] - \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_o - \ell^2 \mathcal{E}_o - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar \omega_s + \lambda \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

que é positivo se o radicando do primeiro termo for maior do que o radicando do segundo, ou seja, se

$$-\hbar \omega_{\mathbf{q}} + \lambda > 0$$

ou,

$$\lambda > \hbar \omega_{\mathbf{q}}. \tag{4.32}$$

Juntando esta condição de amplificação com a condição $\lambda > \mathcal{E}_F$, necessária para que o processo de absorção de fótons do campo *laser* domine sobre o processo de emissão (veja a equação (4.1) e o parágrafo que lhe segue), temos finalmente que a condição para obter amplificação da população de mágnons pode ser escrita como

$$\lambda > \max(\mathcal{E}_F, \hbar\omega_{\mathbf{q}}), \quad (4.33)$$

com “max” significando a função que retorna o valor máximo entre seus argumentos. A partir desta relação, podemos obter a intensidade limite ou crítica do campo elétrico para atingir amplificação. Considerando o caso em que o vetor de onda \mathbf{q}_{\parallel} é paralelo ao campo \mathbf{E}_0 , e utilizando a definição de λ , equação (3.22), temos

$$E_0 > \left(\frac{m^* \omega}{\hbar |e| q_{\parallel}} \right) \max(\mathcal{E}_F, \hbar\omega_{\mathbf{q}}). \quad (4.34)$$

Portanto, a amplitude crítica do campo elétrico, E_0^c , acima do qual ocorre amplificação da população de mágnons, é dada por

$$E_0^c = \left(\frac{m^* \omega}{\hbar |e| q_{\parallel}} \right) \max(\mathcal{E}_F, \hbar\omega_{\mathbf{q}}). \quad (4.35)$$

No caso em que $\hbar\omega_{\mathbf{q}} > \mathcal{E}_F$, temos (veja (4.33))

$$\lambda > \hbar\omega_{\mathbf{q}} \longrightarrow \frac{\hbar |e| q_{\parallel} E_0}{m^* \omega} > \hbar\omega_{\mathbf{q}} \longrightarrow \frac{|e| E_0}{m^* \omega} > \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q_{\parallel}} \quad (4.36)$$

$$v_d > v_{\text{fase}},$$

onde definimos $v_d = \frac{|e| E_0}{m^* \omega}$ como a velocidade de arrasto dos buracos no poço quântico imposto pelo campo *laser* intenso e $v_{\text{fase}} = \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q_{\parallel}}$ como a velocidade de fase das ondas de *spin*. Então, $\gamma_{q_{\parallel}}$ deve ser positivo sempre que a velocidade de arrasto dos buracos exceder a velocidade de fase das ondas de *spin*, no caso em que $\hbar\omega_{\mathbf{q}} > \mathcal{E}_F$, em completa analogia ao caso do amortecimento negativo de Landau [100] que ocorre em um plasma quando ondas de plasma interagem com elétrons na presença de um campo elétrico externo.

No caso em que $\hbar\omega_{\mathbf{q}} < \mathcal{E}_F$, temos²

$$\lambda > \mathcal{E}_F \longrightarrow \frac{\hbar |e| q_{\parallel} E_0}{m^* \omega} > \frac{\hbar k_F v_F}{2} + \ell_F^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\sigma_F J S}{2} \longrightarrow \frac{|e| E_0}{m^* \omega} > \left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}} \right) v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}}$$

$$v_d > \left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}} \right) v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}}, \quad (4.37)$$

²Escrevendo a energia de Fermi dos buracos como $\mathcal{E}_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} + \ell_F^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\sigma_F J S}{2} = \frac{\hbar k_F v_F}{2} + \ell_F^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\sigma_F J S}{2}$, com v_F e k_F sendo a velocidade de Fermi e o vetor de onda de Fermi paralelos à interface do poço quântico, respectivamente.

onde usamos $JS = N_o \beta x S = \hbar \omega_s$. Portanto, ocorre amplificação, $\gamma_{q_{\parallel}} > 0$, desde que a velocidade de arrasto dos buracos sob campo *laser* intenso exceda a velocidade $\left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}}\right)v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_o}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}}$.

Voltando na equação (3.39), e resolvendo para o número de mágnons $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$, obtemos

$$\frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{dt} = \gamma_{q_{\parallel}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \implies \frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} = \gamma_{q_{\parallel}} dt \implies \int_{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}^{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)} \frac{d\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} = \int_0^t \gamma_{q_{\parallel}} dt' \implies \ln\left(\frac{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t)}{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}\right) = \gamma_{q_{\parallel}} t$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}}(t) = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\gamma_{q_{\parallel}} t), \quad (4.38)$$

onde $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}$ é a função de distribuição (Bose) no equilíbrio de mágnons.

Desde que a população de mágnons não deve crescer indefinidamente no decorrer do tempo por causa dos mecanismos de relaxação (tais como processos não lineares, entre outros possíveis mecanismos de relaxação), ela satura em algum instante $t = \tau_m$, sendo τ_m o tempo de vida dos mágnons. Assim, o número de ocupação de mágnons no nível de saturação, $\overline{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}}$, deve ser

$$\overline{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}} = \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\overline{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m), \quad (4.39)$$

onde $\overline{\gamma}_{q_{\parallel}}$ é o coeficiente de amplificação de mágnons no nível de saturação.

4.2 Mudança na Magnetização

A mudança na magnetização devido à presença dos mágnons indiretamente gerados pelo campo *laser* intenso é, a partir da equação (3.1), dado por

$$\begin{aligned} \Delta M &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \sum_{\mathbf{q}} \overline{\mathcal{N}}_{\mathbf{q}} = -\left(\frac{\mu}{V}\right) \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\overline{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m) \\ &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{q_z^{\min}}^{q_z^{\max}} dq_z \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\overline{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m) \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde a soma discreta sobre \mathbf{q} foi aproximada como uma soma contínua em coordenadas cilíndricas polares. O sinal negativo na equação (4.40) significa diminuição na magnetização, dado que uma instabilidade na população de mágnons foi criada via campo *laser* intenso.

Devido à conservação do momento linear na direção z , temos: $q_z^{\min} = k'_z - k_z = \ell' \pi / L_z - \ell \pi / L_z$ e $q_z^{\max} = k'_z + k_z = \ell' \pi / L_z + \ell \pi / L_z$, e assim

$$q_z^{\min} = (\ell' - \ell) \frac{\pi}{L_z} \quad \text{e} \quad q_z^{\max} = (\ell' + \ell) \frac{\pi}{L_z}. \quad (4.41)$$

4.2.1 Transições Intra Sub-Bandas ($\ell' = \ell$)

Para transições intra sub-bandas, as equações (4.41) mostram que os limites de integração de q_z são dados por:

$$0 \leq q_z \leq 2\ell\pi/L_z. \quad (4.42)$$

Como $\ell' = \ell$, a função $\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell)$, dada pela equação (3.21), é utilizada com a função $\text{sen}(\dots)$, e se simplifica para

$$\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell) = \frac{\text{sen}(q_z L_z / 2)}{(q_z L_z / 2)} \left[\frac{4\ell^2 P}{4\ell^2 - (q_z L_z / \pi)^2} \right]. \quad (4.43)$$

Segue que q_{\parallel} não pode assumir nenhum dos valores extremos de (4.42), onde a função $\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell)$ torna-se indefinida. Portanto, os limites de q_z são

$$0 < q_z < 2\ell\pi/L_z. \quad (4.44)$$

Assumindo que $q_z L_z \ll 1$ (que significa que o comprimento de onda das ondas de *spin* são muito maiores do que a largura do poço), verifica-se³ que $|\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell)|^2 \approx 1$ e assim $\bar{\gamma}_{q_{\parallel}}$ torna-se independente de q_z . Portanto, podemos resolver as integrais em q_z e ϕ que figuram na equação (4.40) diretamente. Substituindo os limites dados por (4.44) na equação (4.40) e considerando o número de ocupação de mágnons no equilíbrio térmico independente de \mathbf{q} , podemos retirar $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}$ do sinal de integração. Portanto, ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta M &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\ell\pi/L_z} dq_z \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m) \\ &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \ell}{2\pi L_z} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Agora, para a primeira sub-banda do poço $\ell' = \ell = 1$, e utilizando a equação (4.30), podemos escrever o coeficiente de amplificação e o argumento da exponencial, $\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m$, como

$$\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} = \frac{(N_o \beta x)^2 S m^{*2}}{4\pi \hbar^5 L_z (N_c / V) q_{\parallel}^2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 \mathcal{K}(1, 1), \quad (4.46)$$

$$\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m = \frac{(N_o \beta x)^2 S m^{*2} \tau_m}{4\pi \hbar^5 L_z (N_c / V) q_{\parallel}^2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 \mathcal{K}(1, 1). \quad (4.47)$$

³Para isto, basta tomar o limite de $\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell' = \ell)$ quando $q_z L_z \rightarrow 0$, lembrando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ e que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

Resultados e Discussão

ANÁLISE NUMÉRICA DIRETA Para avaliar uma estimativa da ordem de grandeza do coeficiente de amplificação de mágnons e do efeito de desmagnetização em um semiconductor magnético diluído típico, tal como o $(\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{As}$ (que são criados pela dopagem com $\sim 5\%$ em fração molar de Mn em GaAs), na presença de um campo *laser* forte com amplitude do campo elétrico E_0 e frequência ω , assumimos os parâmetros resumidos na TABELA 4.1 [25, 34, 54, 55]. Para o poço quântico semiconductor magnético diluído de $(\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{As}$, a sub-banda dos buracos pesados (hh) domina sobre as demais sub-bandas [101–103] e assim utilizamos a massa efetiva correspondente aos buracos pesados, $m^* = 0,5m_0$.

$x \simeq 5\%$	concentração fracional de Mn	$p = 10\%$	porcentagem de buracos não compensados
$ N_0\beta \simeq 1,2\text{eV}$	constante de troca p-d	$a_0(\text{Å}) = 5,653 + 0,32x$	parâmetro de rede da liga
$m^* = 0,5m_0$	massa efetiva dos portadores (hh)	$\omega_q \sim 10^{11}\text{s}^{-1}$	frequência dos mágnons†
$m_0 \simeq 9,109 \times 10^{-31}\text{kg}$	massa do elétron livre	$\mathcal{N}_q^{(0)} \sim 0,8$	nº de ocupação de mágnons no equilíbrio
$S = 5/2$	<i>spin</i> do Mn	$\tau_m \simeq 10^{-11}\text{s}$	tempo de espalhamento mágnon-mágnon
$N_0 \sim 10^{21}\text{cm}^{-3}$	densidade de sítios cátions	$\omega = 1,778 \times 10^{14}\text{s}^{-1}$	frequência do campo <i>laser</i> intenso

†dispersão negligenciada

TABELA 4.1: Parâmetros utilizados para estimar a ordem de grandeza do coeficiente de amplificação de mágnons e do efeito de desmagnetização de um semiconductor magnético diluído de $(\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{As}$, na presença de um campo *laser* intenso.

Para realizar os cálculos, precisamos de uma estimativa da energia de Fermi para cada sistema. Esta pode ser obtida por meio de sua relação com a concentração dos portadores (buracos). A densidade de buracos quase-bidimensional $n_h^{(2D)}$ pode ser escrita em termos da densidade tridimensional por meio da relação aproximada $n_h^{(2D)} = L_z n_h$, onde n_h denota a densidade de buracos 3D e L_z a largura do poço quântico [104]. Devido aos mecanismos de compensação de carga, a concentração de buracos observada experimentalmente está em torno de 10 a 30% da concentração nominal de Mn [66], ou seja, $n_h = pN_{\text{Mn}} = pxN_0$, onde p é a porcentagem de buracos não compensados. Neste trabalho, adotamos $p = 10\%$. Desta forma, obtemos a densidade bidimensional de buracos compatível com os dados experimentais [103, 105]. Assim, temos

$$n_h^{(2D)} = L_z n_h = L_z p N_{\text{Mn}} = px L_z N_0. \quad (4.48)$$

A partir da densidade bidimensional, calculamos o vetor de onda de Fermi bidimensional, $k_F = \sqrt{4\pi n_h^{(2D)}}$ e a energia de Fermi, $\mathcal{E}_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} + \ell_F^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\sigma_F \hbar \omega_s}{2}$. Os valores obtidos para a energia de Fermi foram 129, 130, 150, 173, 196, 220 e 234 meV para poço de 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 33 nm, respectivamente. A ordem de grandeza da energia de Fermi, $O(\mathcal{E}_F) = 10^2\text{meV}$, está em concordância com valores reportados⁴ na literatura [66, 106–108].

⁴Em todo este trabalho, estamos considerando a energia dos buracos positiva, como na referência [66], ou

Os valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ foram calculados para vários vetores de onda dos mágnons q_{\parallel} e para várias intensidades do campo elétrico E_0 a partir do campo crítico E_0^c . Alguns dos valores calculados estão mostrados nas TABELAS 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, para poço de largura igual a 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 33 nm, respectivamente. Os valores calculados de $\frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ não dependem do valor particular de q_{\parallel} , mas sim do campo elétrico e do $q_{\parallel}^{\text{máx}}$. A estimativa da desmagnetização será discutida posteriormente, nesta mesma seção. Nota-se que, para vetores de onda menores do que o limite superior dado pela equação (4.26), o aumento da intensidade do campo *laser* leva ao aumento da população de mágnons. Os gráficos das FIGURAS 4.2 e 4.3 mostram a dependência do coeficiente de crescimento da população de mágnons com a amplitude do campo elétrico do *laser* e com o campo elétrico relativo ao campo crítico, respectivamente, para $L_z = 25$ nm. Pela análise destes gráficos podemos observar que: (i) o valor máximo atingido pelo campo elétrico é tanto maior quanto menor o vetor de onda do mágnon; (ii) o intervalo de E_0 , no qual é possível a amplificação da população de mágnons, aumenta com a diminuição do vetor de onda (aumenta com o afastamento de q_{\parallel} em relação ao limite superior, $q_{\parallel}^{\text{máx}}$); (iii) a partir do campo crítico, a amplificação é acentuada (observada pelo aumento na taxa de variação de $\gamma_{q_{\parallel}}$ em relação a E_0 ou em relação a E_0/E_0^c), e este aumento da amplificação é tanto maior quanto menor q_{\parallel} ; (iv) o campo crítico separa as curvas em duas regiões: $E_0 < E_0^c$, onde $\gamma_{q_{\parallel}}$ aumenta de forma (aproximadamente) linear com o aumento do campo e $E_0 > E_0^c$, onde $\gamma_{q_{\parallel}}$ aumenta de forma (aproximadamente) exponencial com o aumento da intensidade do campo.

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{12} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{12} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
5,6049	1,7676	1,7676	1,5696	2,3844	52
		2,0328	1,8042	2,5569	42
		2,2979	2,2583	2,7186	20
3,9234	2,5252	2,5252	2,2753	2,8498	25
		2,9040	2,5115	3,0561	22
		3,2827	3,2446	3,2493	0,15
2,2420	4,4191	4,4191	4,9234	3,7700	23
		5,0819	4,3301	4,0427	7

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 68.

TABELA 4.2: Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 5$ nm. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 129 meV , $0,5605 \text{ nm}^{-1}$ e $2,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

seja, utilizamos a inversão $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$, de tal forma que, para obter seu valor relativo ao topo da banda de valência, basta inverter o sinal da mesma. Este procedimento é equivalente a utilizar o modelo em que a energia da banda de valência é representada na região negativa do diagrama de bandas $\mathcal{E}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}$.

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{12} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{12} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
7,9267	1,2632	1,2632	0,4884	0,8475	74
		1,4527	0,5667	0,9088	60
		1,6422	0,6678	0,9663	45
		1,8317	0,8274	1,0205	23
5,5487	1,8046	1,8046	0,6822	1,0129	48
		2,0753	0,7813	1,0862	39
		2,3460	0,9274	1,1549	25
		2,6167	1,2166	1,2197	0,3
3,1707	3,1580	3,1580	1,2243	1,3400	9
		3,6317	1,3384	1,4370	7
		4,1055	1,6740	1,5278	9

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 68.

TABELA 4.3: Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 130 meV , $0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
9,7081	1,1878	1,1878	2,8054	4,9505	76
		1,3660	3,3222	5,3088	60
		1,5442	3,9967	5,6444	41
		1,7223	5,2020	5,9612	15
6,7957	1,6969	1,6969	3,8445	5,9170	54
		1,9514	4,5727	6,3452	39
		2,2059	5,6423	6,7464	20
3,8832	2,9695	2,9695	6,5628	7,8274	19
		3,4150	8,0657	8,3939	4

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 68.

TABELA 4.4: Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 150 meV , $0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
1,1210	1,1827	1,1827	1,9760	3,4478	74
		1,3601	2,3754	3,6973	56

continua na próxima página

continuação

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,5375	2,9250	3,9311	34
		1,6896	2,7020	4,1209	53
0,7847	1,6896	1,9430	3,2996	4,4192	34
		2,1965	4,2675	4,6986	10
0,4484	2,9568	2,9568	4,6880	5,4514	16
		3,4003	6,3515	5,8460	8

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 68.

TABELA 4.5: Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 173 meV , $1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,2005	1,5339	2,6281	71
1,2533	1,2005	1,3805	1,8676	2,8183	51
		1,5606	2,3638	2,9965	27
		1,3339	1,6740	2,7702	65
1,1280	1,3339	1,5339	2,0467	2,9708	45
		1,7340	2,6198	3,1586	21
		1,5006	1,8581	2,9383	58
1,0026	1,5006	1,7257	2,2897	3,1510	38
		1,9508	3,0067	3,3502	11
		1,7150	2,1053	3,1412	49
0,8773	1,7150	1,9722	2,6310	3,3685	28
		2,2295	3,6721	3,5815	2,5
0,7520	2,0008	2,0008	2,4506	3,3928	38
		2,3009	3,1416	3,6384	16
0,6267	2,4009	2,4009	2,9628	3,7167	25
		2,7611	4,0069	3,9857	0,5
0,5640	2,6677	2,6677	3,3247	3,9177	18

continua na próxima página

continuação

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		3,0679	4,7533	4,2013	12
0,5013	3,0012	3,0012	3,8045	4,1554	9
		3,4514	6,2442	4,4561	29

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 68.

TABELA 4.6: Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 196 meV , $1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,2278	1,2592	2,1162	68
1,3729	1,2278	1,4120	1,5512	2,2693	46
		1,5962	2,0375	2,4128	18
0,9610	1,7540	1,7540	1,7390	2,5293	45
		2,0171	2,2231	2,7124	22
0,5492	3,0695	3,0695	3,3270	3,3460	0,6

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 68.

TABELA 4.7: Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 30 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 220 meV , $1,3729 \text{ nm}^{-1}$ e $1,5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,2465	1,1390	1,8928	66
1,4399	1,2465	1,4335	1,4127	2,0298	44
		1,6205	1,9192	2,1581	12
1,0079	1,7808	1,7808	1,5798	2,2623	43
		2,0479	2,0484	2,4260	18
0,5760	3,1164	3,1164	3,1541	2,9927	5

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 68.

TABELA 4.8: Valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 33 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 234 meV , $1,4399 \text{ nm}^{-1}$ e $1,65 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

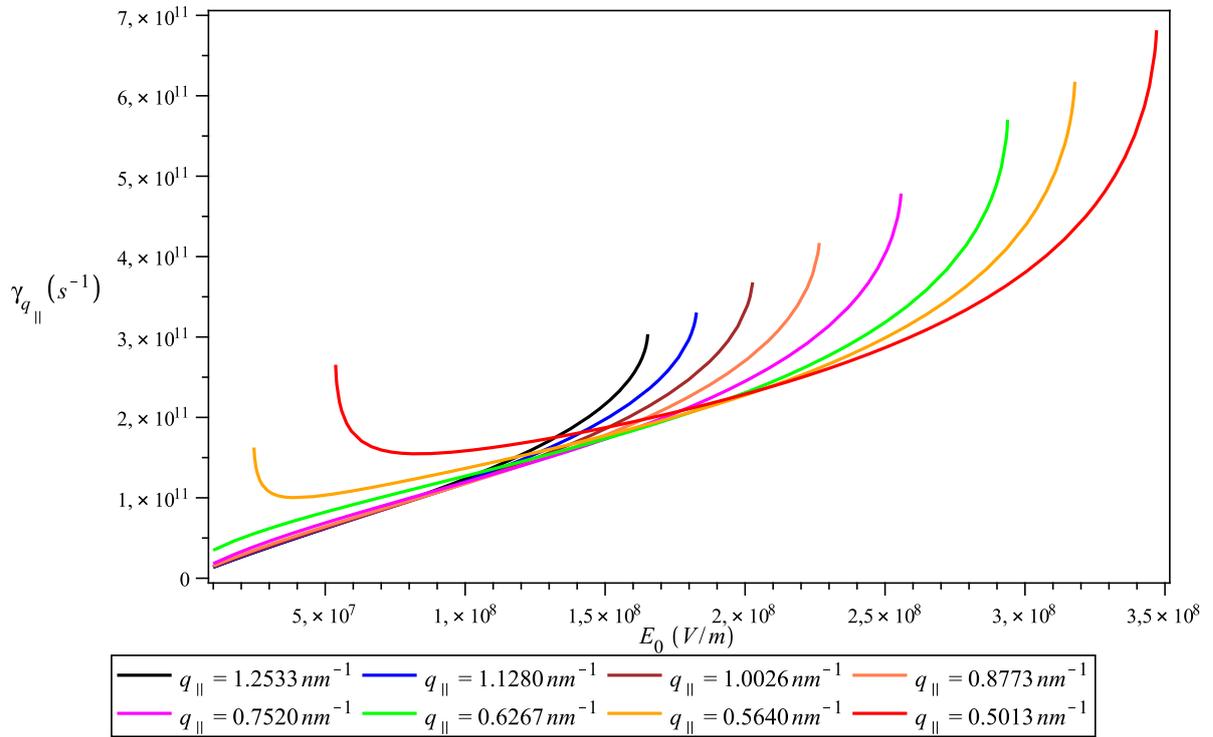


FIGURA 4.2: Gráfico de $\gamma_{q_{\parallel}}$ contra E_0 para os vetores de onda da TABELA 4.6, referente ao poço de 25nm de largura.

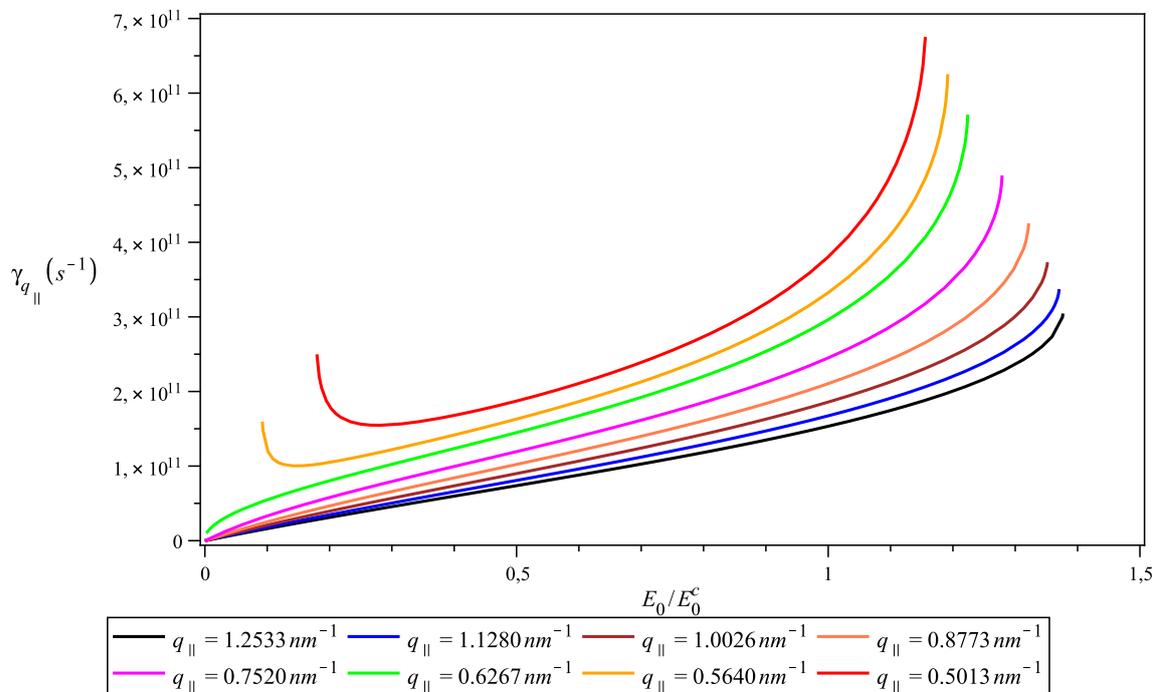


FIGURA 4.3: Gráfico de $\gamma_{q_{\parallel}}$ contra E_0/E_0^c para os vetores de onda da TABELA 4.6, referente ao poço de 25nm de largura.

Como já citado, a desmagnetização não depende dos valores particulares de q_{\parallel} , mais sim de todo o intervalo q_{\parallel} permitido, dado que a desmagnetização é obtida pela integral que figura na equação (4.45). Além da dependência em relação ao vetor de onda dos mágnons, a desmagnetização depende da intensidade do campo elétrico, que define o parâmetro λ , e da largura do poço quântico. Assim, para cada poço considerado, calculamos a desmagnetização em termos do campo elétrico. Alguns valores calculados, para poços de largura entre 10 e 33 nm, estão dispostos na TABELA 4.9, onde E_D representa a intensidade da componente elétrica do campo *laser* limite de dano à amostra, assumido como igual a $2,0 \times 10^8$ V/m. Podemos observar que quanto menor a largura do poço, menor é a intensidade do campo elétrico necessária para atingir um dado valor de desmagnetização. Nesta e nas próximas tabelas, as entradas indicadas com “-” referem-se a intensidades do campo elétrico superiores ao necessário para completa desmagnetização da amostra.

E_0 (10^7 V/m)	E_0/E_D	$\frac{ \Delta M }{(\mu/V)}$ (%)					
		$L_z = 10$ nm	$L_z = 15$ nm	$L_z = 20$ nm	$L_z = 25$ nm	$L_z = 30$ nm	$L_z = 33$ nm
1,0	0,05	0,1910	0,1167	0,0957	0,0872	0,0830	0,0813
2,0	0,10	0,5493	0,1869	0,1248	0,1038	0,0940	0,0904
3,0	0,15	1,3611	0,2925	0,1610	0,1225	0,1059	0,1000
4,0	0,20	3,0368	0,4470	0,2058	0,1438	0,1188	0,1102
5,0	0,25	6,3326	0,6705	0,2613	0,1681	0,1329	0,1212
6,0	0,30	12,6299	0,9916	0,3299	0,1959	0,1484	0,1331
7,0	0,35	24,4394	1,4516	0,4150	0,2278	0,1654	0,1460
8,0	0,40	46,3041	2,1098	0,5213	0,2647	0,1843	0,1601
9,0	0,45	86,4167	3,0517	0,6543	0,3076	0,2055	0,1756
10,0	0,50	-	4,4001	0,8217	0,3579	0,2293	0,1929
11,0	0,55	-	6,3322	1,0336	0,4172	0,2564	0,2122
12,0	0,60	-	9,1037	1,3030	0,4879	0,2875	0,2341
13,0	0,65	-	13,0843	1,6479	0,5730	0,3238	0,2593
14,0	0,70	-	18,8107	2,0926	0,6769	0,3669	0,2889
15,0	0,75	-	27,0658	2,6723	0,8066	0,4195	0,3247
16,0	0,80	-	39,0075	3,4435	0,9760	0,4878	0,3708
17,0	0,85	-	56,4232	4,5664	1,2405	0,5960	0,4433
18,0	0,90	-	83,1021	6,2095	1,5857	0,7283	0,5305
19,0	0,95	-	-	8,3012	1,9931	0,8774	0,6268
20,0	1,00	-	-	10,9602	2,4731	1,0449	0,7330

TABELA 4.9: Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , para $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm.

Os resultados foram representados graficamente nas FIGURAS 4.4 e 4.5. Podemos ver que a taxa de desmagnetização é fortemente dependente da largura do poço. Em particular, notamos que a curva de desmagnetização de um poço DMS de 5 nm de largura demora a responder ao campo aplicado até campos em torno de $4,0 \times 10^7$ V/m, a partir do qual a desmagnetização cresce rapidamente em comparação com os poços de 15 a 33 nm. Isto ocorre porque o aumento da energia do estado fundamental para poços de largura muito estreita, \mathcal{E}_0 , é mais significativo do que a diminuição do termo dependente do vetor de onda de Fermi

(que depende da densidade de portadores, que por sua vez é função da largura do poço). Isto faz com que a energia de Fermi reduza mais rapidamente na região de 33 a 15 nm (poços largos, de confinamento fraco a intermediário) do que na região de 10 a 1 nm (poços estreitos, de confinamento forte). Associado à energia de Fermi relativamente alta dos poços estreitos, e sendo o vetor de onda máximo dos mágnons nestes poços também menor, o campo crítico mínimo (para $q_{\parallel} = q_{\parallel}^{\text{máx}}$) destes poços é relativamente maior. Em contrapartida, a resposta dos poços estreitos sob irradiação de campos acima do campo crítico mínimo é maior do que para os poços largos, tanto em relação ao coeficiente de amplificação da população de mágnons quanto em relação à desmagnetização.

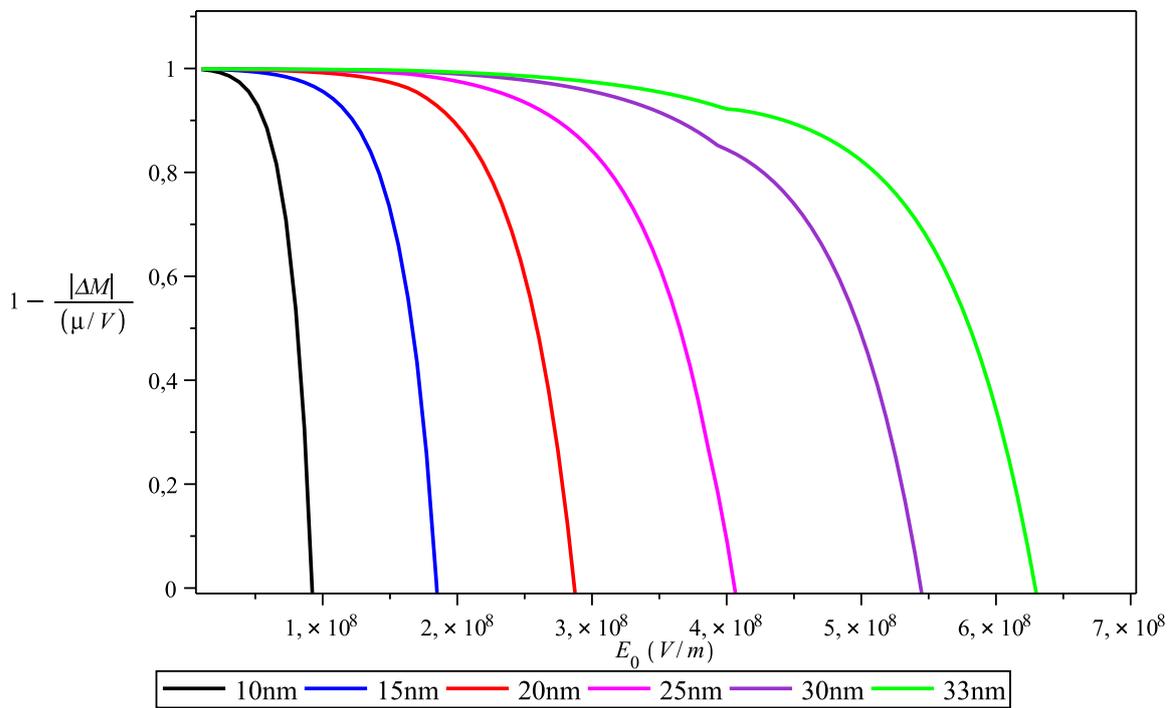


FIGURA 4.4: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm.

Fazendo os mesmos cálculos para poços de largura 1, 2, 3, 4 e 5 nm, obtemos os dados da TABELA 4.10 e o gráfico da FIGURA 4.6. A partir de $L_z = 5$ nm, a energia de Fermi dos sistemas de largura menor passa a aumentar ao invés de diminuir, devido ao regime de confinamento forte. Isto explica a posição da curva de desmagnetização para 5 nm, intermediária entre as curvas para desmagnetização em regime de confinamento fraco e forte. Pela análise do gráfico da FIGURA 4.6, verificamos novamente que a desmagnetização se torna apreciável somente para campos acima do campo crítico mínimo, obtido com $q_{\parallel} = q_{\parallel}^{\text{máx}}$.

Para $L_z = 15$ nm, segue a partir da TABELA 4.9 que pelo aumento da razão E_0/E_D acima de 0,6, isto é, pelo aumento da intensidade do campo elétrico *laser* para $1,2 \times 10^8$ V/m, a diminuição

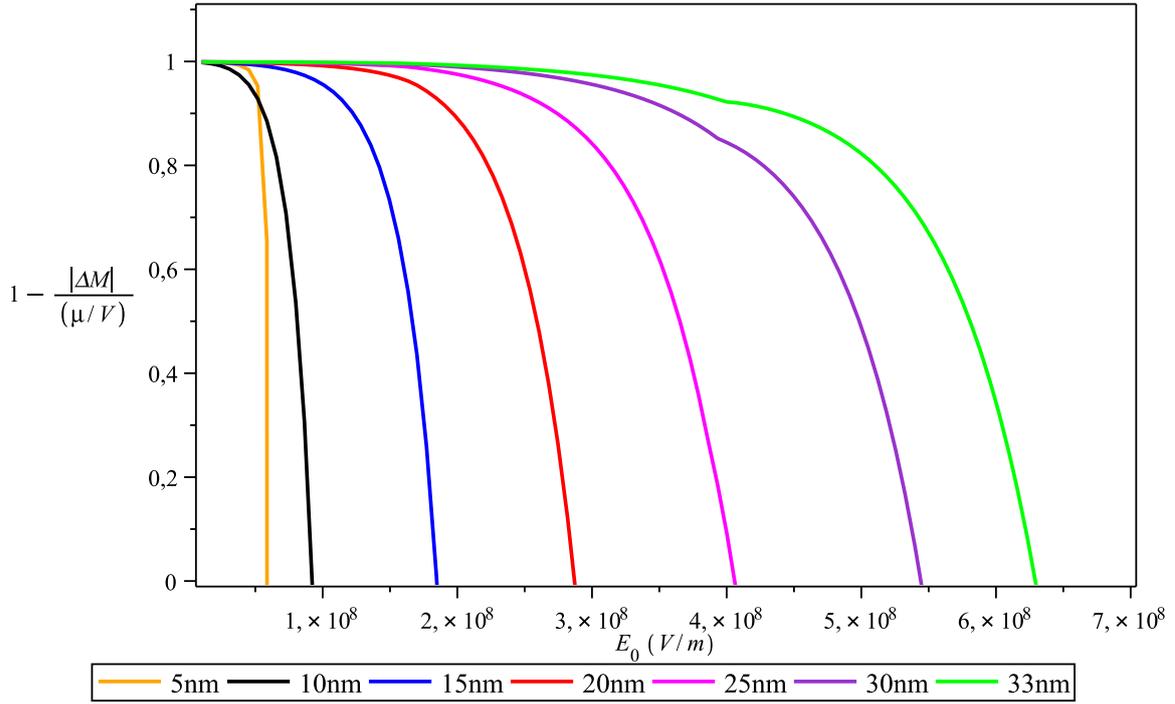


FIGURA 4.5: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm, onde é possível notar o comportamento diferente do poço de $L_z = 5$ nm.

da magnetização atinge valores em torno de 9,0%. É conveniente notar que a intensidade limite do campo *laser* em que o crescimento da população de mágnons se torna apreciável é aproximadamente aquele para o qual $v_d \gtrsim \left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}}\right)v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}}$ (para $L_z = 15$ nm, $\mathcal{E}_F = 150$ meV, $k_F = (2m^*/\hbar^2)^{1/2}(\mathcal{E}_F - \ell_F^2 \mathcal{E}_0 + \sigma_F \hbar \omega_s/2)^{1/2} = 0,9708$ nm⁻¹, $v_F = \hbar k_F/m^* = 2,2488 \times 10^5$ m/s e, considerando $q_{\parallel} \simeq q_{\parallel}^{\text{máx}} = 0,9708$ nm⁻¹, temos que $\left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}}\right)v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}} \simeq 2,3498 \times 10^5$ m/s), isto é, para $E_0 > \frac{m^* \omega}{|e|} \left[\left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}}\right)v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}} \right] = 1,1878 \times 10^8$ V/m ou $E_0/E_D \gtrsim 0,6$. De acordo com a equação (4.45) para 15 nm, ou pela TABELA 4.9, isto corresponde a 9% de diminuição na

E_0 (10^7 V/m)	E_0/E_D	$\frac{ \Delta M }{(\mu/V)}$ (%)					
		$L_z = 1$ nm	$L_z = 2$ nm	$L_z = 3$ nm	$L_z = 4$ nm	$L_z = 5$ nm	$L_z = 10$ nm
1,0	0,05	0,1603	0,1296	0,1187	0,1133	0,1105	0,1910
2,0	0,10	0,4000	0,2522	0,2101	0,1920	0,1847	0,5493
3,0	0,15	1,1051	0,5367	0,4081	0,3625	0,3551	1,3611
4,0	0,20	3,3759	1,2618	0,8888	0,7943	0,8637	3,0368
5,0	0,25	11,3959	3,3175	2,2344	2,1644	3,3834	6,3326
6,0	0,30	42,5357	9,8984	6,7478	8,3236	72,8626	12,6299
7,0	0,35	—	34,1226	25,9485	59,8270	—	24,4394
8,0	0,40	—	—	—	—	—	46,3041
9,0	0,45	—	—	—	—	—	86,4167
10,0	0,50	—	—	—	—	—	—

TABELA 4.10: Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $L_z = 1, 2, 3, 4, 5$ e 10 nm.

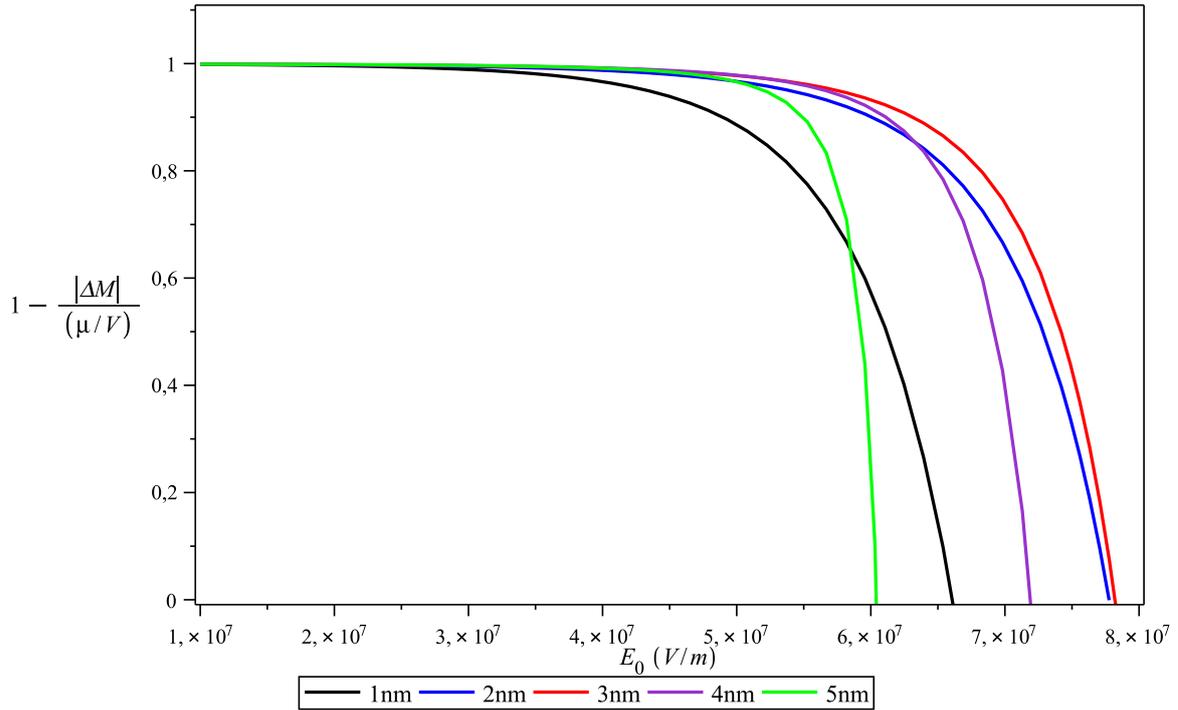


FIGURA 4.6: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 1, 2, 3, 4$ e 5 nm.

magnetização. Para intensidade do campo *laser* tal que $E_0/E_D \simeq 0,9$, isto é, próximo ao limite de dano à amostra, o nível de diminuição na magnetização é em torno de 83%. Entretanto, não é esperado que isto ocorra pois, para este valor do campo *laser*, os efeitos térmicos se tornariam apreciáveis, e este modelo deixaria de ser adequado para o estudo da desmagnetização. Análise similar se aplica para outros valores de L_z , com a particularidade de que para L_z muito pequeno, a desmagnetização varia rapidamente com o aumento do campo, e que para L_z muito grande, a desmagnetização varia lentamente com o aumento do campo. Isto era esperado, dado a dependência (aproximada) de $\Delta M \sim L_z^{-2}$ (veja a equação (4.55) da análise aproximada, página 69).

ANÁLISE NUMÉRICA APROXIMADA A fim de obter relações simplificadas que descrevam o comportamento do coeficiente de amplificação de mágnons e da desmagnetização da amostra em função da largura do poço, da intensidade do campo elétrico, do vetor de onda dos mágnons etc., podemos aplicar algumas aproximações sobre a função $\mathcal{K}(\ell, \ell')$ e na resolução da integral que figura no cálculo da desmagnetização. Posteriormente, a validade ou desvios destas aproximações serão testadas por comparação com os valores obtidos através do cálculo realizado no item anterior.

Na equação (4.29), podemos empregar a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\ell, \ell') &= \left\{ \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_2^2 - \Omega^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_1^2 - \Omega^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &\simeq \left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right) \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} \lambda} = \left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right) \sqrt{\frac{2m^* \hbar e q_{\parallel} E_0}{\hbar^2 m^* \omega}} \\ &\simeq \frac{\hbar^2}{m^*} \left(\frac{2eE_0}{\hbar \omega} \right)^{1/2} q_{\parallel}^{3/2} \end{aligned} \quad (4.49)$$

desde que $\lambda > \mathcal{E}_0$, \mathcal{E}_F , $\hbar \omega_s$, $\hbar \omega_q$. Substituindo isto nas equações (4.46) e (4.47), temos

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{q_{\parallel}}^* &\approx \frac{(N_o \beta x)^2 S m^*}{4\pi \hbar^5 L_z (N_c/V) q_{\parallel}^2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 \left[\frac{\hbar^2}{m^*} \left(\frac{2|e|E_0}{\hbar \omega} \right)^{1/2} q_{\parallel}^{3/2} \right] \\ &\approx \frac{(N_o \beta x)^2 S m^*}{4\pi \hbar^3 L_z (N_c/V)} \left(\frac{2|e|E_0}{\hbar \omega} \right)^{1/2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 q_{\parallel}^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{q_{\parallel}}^* \tau_m &\approx \underbrace{\frac{(N_o \beta x)^2 S m^* \tau_m}{4\pi \hbar^3 L_z (N_c/V)} \left(\frac{2|e|E_0}{\hbar \omega} \right)^{1/2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 q_{\parallel}^{-1/2}}_{\Xi} \\ &\approx \Xi q_{\parallel}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Portanto, voltando na equação (4.45), onde já fizemos $\ell = 1$, temos

$$\Delta M = - \left(\frac{\mu}{V} \right) \frac{V \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{2\pi L_z} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \exp(\Xi q_{\parallel}^{-1/2}). \quad (4.52)$$

Como⁵ $\Xi q_{\parallel}^{-1/2} \sim (10^0 - 10^2)$, não podemos aproximar $\exp(\Xi q_{\parallel}^{-1/2}) \simeq 1 + \Xi q_{\parallel}^{-1/2}$. Assim, realizando a integral indefinida $\int q_{\parallel} e^{\Xi q_{\parallel}^{-1/2}} dq_{\parallel}$ e retendo somente o termo linear em Ξ (que

⁵Esta relação pode ser verificada substituindo os valores da TABELA 4.1, página 58, em Ξ e levando em conta que q_{\parallel} é da ordem de 10^9 m^{-1} .

mantém a ordem de grandeza da integral realizada numericamente), $\frac{1}{6}\Xi q_{\parallel}^{3/2} e^{\Xi q_{\parallel}^{-1/2}}$, obtemos a seguinte aproximação para a desmagnetização:

$$\begin{aligned}
\Delta M &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{2\pi L_z} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \exp(\Xi q_{\parallel}^{-1/2}) \\
&\simeq -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{2\pi L_z} \left\{ \frac{1}{6} \Xi q_{\parallel}^{3/2} e^{\Xi q_{\parallel}^{-1/2}} \right\} \Big|_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} \\
&\simeq -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{2\pi L_z} \left\{ \frac{1}{6} \Xi q_{\parallel\max}^{3/2} e^{\Xi q_{\parallel\max}^{-1/2}} \right\} \\
&\simeq -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{12\pi L_z} \Xi q_{\parallel\max}^{3/2} e^{\Xi q_{\parallel\max}^{-1/2}} \\
&\simeq -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{12\pi L_z} \left[\frac{(N_o\beta x)^2 S m^* \tau_m}{4\pi\hbar^3 L_z (N_c/V)} \left(\frac{2|e|E_0}{\hbar\omega} \right)^{1/2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 \right] q_{\parallel\max}^{3/2} e^{\Xi q_{\parallel\max}^{-1/2}} \\
&\simeq -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{(N_o\beta x)^2 S V m^* \tau_m \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{48\pi^2 \hbar^3 L_z^2 (N_c/V)} \left(\frac{2|e|E_0}{\hbar\omega} \right)^{1/2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 q_{\parallel\max}^{3/2} e^{\Xi q_{\parallel\max}^{-1/2}}, \quad (4.53)
\end{aligned}$$

onde $q_{\parallel}^{\max} \simeq \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} (\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_o + \sigma \hbar \omega_s / 2)}$ (dado pela equação (4.26)). Na terceira linha, assumimos $q_{\parallel}^{\min} = 0,01 q_{\parallel}^{\max}$, pois a integral não é definida em $q_{\parallel} = 0$ e desprezamos o termo resultante em q_{\parallel}^{\min} frente ao termo correspondente em q_{\parallel}^{\max} .

Podemos representar a equação (4.53) em uma forma alternativa. Utilizando a velocidade de arrasto associada ao campo limite de dano à amostra, \mathbf{E}_D , definida de forma análoga à equação para \mathbf{v}_d , ou seja,

$$\mathbf{v}_D = \frac{|e|\mathbf{E}_D}{m^* \omega_D} \quad (4.54)$$

ficamos, com

$$\Delta M \simeq -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{(N_o\beta x)^2 S V m^* \tau_m \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{48\pi^2 \hbar^3 L_z^2 (N_c/V)} \left(\frac{2m^* \omega_D v_D}{\hbar\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{E_0}{E_D} \right)^{1/2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 q_{\parallel\max}^{3/2} e^{\Xi q_{\parallel\max}^{-1/2}}. \quad (4.55)$$

Utilizando novamente os parâmetros resumidos na TABELA 4.1 para o semiconductor magnético diluído $(\text{Ga}_{1-x}\text{Mn}_x)\text{As}$, avaliamos o coeficiente de amplificação de mágnons e o efeito de desmagnetização sob esta nova aproximação. Além destes, consideramos os seguintes valores referentes ao campo de dano à amostra: $E_D = 2,0 \times 10^8$ V/m (campo limite de dano à amostra), $\omega_D = 2,0 \times 10^{16}$ s⁻¹ (frequência limite de dano à amostra) e $v_D = 3,5 \times 10^5$ cm/s (velocidade de arrasto associado a \mathbf{E}_D). Fazendo uso destes parâmetros, as condições utilizadas acima, $\lambda > \mathcal{E}_o$, \mathcal{E}_F , $\hbar\omega_s$, $\hbar\omega_q$, são satisfeitas.

Os valores calculados para o coeficiente de amplificação de mágnons nesta aproximação, denotados por $\gamma_{q_{\parallel}}^*$, com erro relativo ao coeficiente calculado no item anterior dado por $e^{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$, estão nas TABELAS 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, para poço de largura igual a 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 33 nm, respectivamente. A partir do erro relativo, podemos ver que o valor aproximado do coeficiente de amplificação de mágnons $\gamma_{q_{\parallel}}^*$ representa bem o coeficiente de amplificação $\gamma_{q_{\parallel}}$, desde que $E_0 \gg E_0^c$.

Inserindo os parâmetros da TABELA 4.1, juntamente com os valores de ω_D e ν_D na equação (4.55), obtemos a seguinte relação aproximada para a desmagnetização:

$$\frac{|\Delta M|}{(\mu/V)} \cong a_j \left(\frac{E_0}{E_D} \right)^{1/2} e^{b_j \left(\frac{E_0}{E_D} \right)^{1/2}}, \quad (4.56)$$

onde os valores calculados para as constantes a_j e b_j são dados na TABELA 4.11 para cada poço.

	1 nm	2 nm	3 nm	4 nm	5 nm	10 nm	15 nm	20 nm	25 nm	30 nm	33 nm
a_j	4,6064	1,9367	1,1667	0,8143	0,6161	0,2590	0,1560	0,1089	0,0824	0,0656	0,0582
b_j	189,63	79,73	48,03	33,52	25,36	10,66	6,42	4,48	3,39	2,70	2,40

TABELA 4.11: Constantes a_j e b_j da equação (4.56) para a desmagnetização aproximada.

Na equação (4.56), E_0 é a amplitude do campo *laser* e E_D é o campo elétrico limite de dano à amostra, que é da ordem de $(10^8 - 10^9)$ V/m, correspondendo a intensidades *laser* I no intervalo de $(10^{10} - 10^{12})$ W/cm². Assumindo estes parâmetros, calculamos a desmagnetização para os correspondentes poços. Alguns dos valores obtidos estão na TABELA 4.12. Comparando estes resultados com os calculados diretamente pela equação (4.45), TABELA 4.9, verifica-se que o cálculo aproximado leva a desmagnetizações muito maiores. Apesar da aproximação ser relativamente boa para o coeficiente de amplificação, este entra como argumento da exponencial que figura na relação aproximada para a desmagnetização, fazendo com que o desvio desta seja muito elevado. Apesar disto, a aproximação conserva o comportamento das curvas de desmagnetização em função da componente elétrica do campo *laser*, como pode ser observado nos gráficos das FIGURAS 4.7 e 4.8, que mostram a desmagnetização em função de E_0/E_D para várias larguras do poço, sendo o segundo uma ampliação da região no qual se encontram as curvas de desmagnetização para poços de largura entre 1 e 5 nm. Neste gráfico, nota-se que a desmagnetização de poços estreitos varia muito rapidamente com o aumento da intensidade do campo elétrico associado ao campo *laser*. Para estes poços, a completa desmagnetização ocorre para intensidade do campo inferior a $1,5 \times 10^7$ V/m. Observe que um dado valor da desmagnetização obtida pela relação aproximada ocorre em um campo bem inferior ao obtido pelo cálculo direto da desmagnetização, como pode ser verificado comparando o gráfico da FIGURA 4.8 com o da FIGURA 4.6. Neste último gráfico, vemos que

um campo inferior a $8,0 \times 10^7$ V/m é necessário para completa desmagnetização dos poços estreitos.

E_0 (10^7 V/m)	E_0/E_D	$\frac{ \Delta M }{(\mu/V)}$ (%)					
		$L_z = 10$ nm	$L_z = 15$ nm	$L_z = 20$ nm	$L_z = 25$ nm	$L_z = 30$ nm	$L_z = 33$ nm
1,0	0,05	0,6286	0,1467	0,0664	0,0393	0,0268	0,0223
2,0	0,10	2,3870	0,3762	0,1422	0,0762	0,0487	0,0393
3,0	0,15	6,2379	0,7274	0,2395	0,1187	0,0723	0,0571
4,0	0,20	13,6452	1,2342	0,3617	0,1680	0,0982	0,0761
5,0	0,25	26,7853	1,9369	0,5124	0,2247	0,1266	0,0966
6,0	0,30	48,8087	2,8830	0,6952	0,2893	0,1578	0,1186
7,0	0,35	84,1802	4,1281	0,9142	0,3627	0,1918	0,1423
8,0	0,40	–	5,7372	1,1738	0,4453	0,2290	0,1678
9,0	0,45	–	7,7859	1,4787	0,5380	0,2694	0,1951
10,0	0,50	–	10,3614	1,8340	0,6414	0,3132	0,2244
11,0	0,55	–	13,5644	2,2454	0,7563	0,3606	0,2556
12,0	0,60	–	17,5103	2,7190	0,8834	0,4117	0,2890
13,0	0,65	–	22,3312	3,2612	1,0236	0,4668	0,3244
14,0	0,70	–	28,1780	3,8791	1,1778	0,5259	0,3622
15,0	0,75	–	35,2221	4,5802	1,3468	0,5893	0,4022
16,0	0,80	–	43,6581	5,3728	1,5316	0,6571	0,4447
17,0	0,85	–	53,7063	6,2657	1,7333	0,7296	0,4897
18,0	0,90	–	65,6153	7,2682	1,9528	0,8070	0,5372
19,0	0,95	–	79,6654	8,3904	2,1913	0,8894	0,5874
20,0	1,00	–	96,1717	9,6433	2,4498	0,9771	0,6404

TABELA 4.12: Desmagnetização aproximada, como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $E_D = 2 \times 10^8$ V/m e $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm.

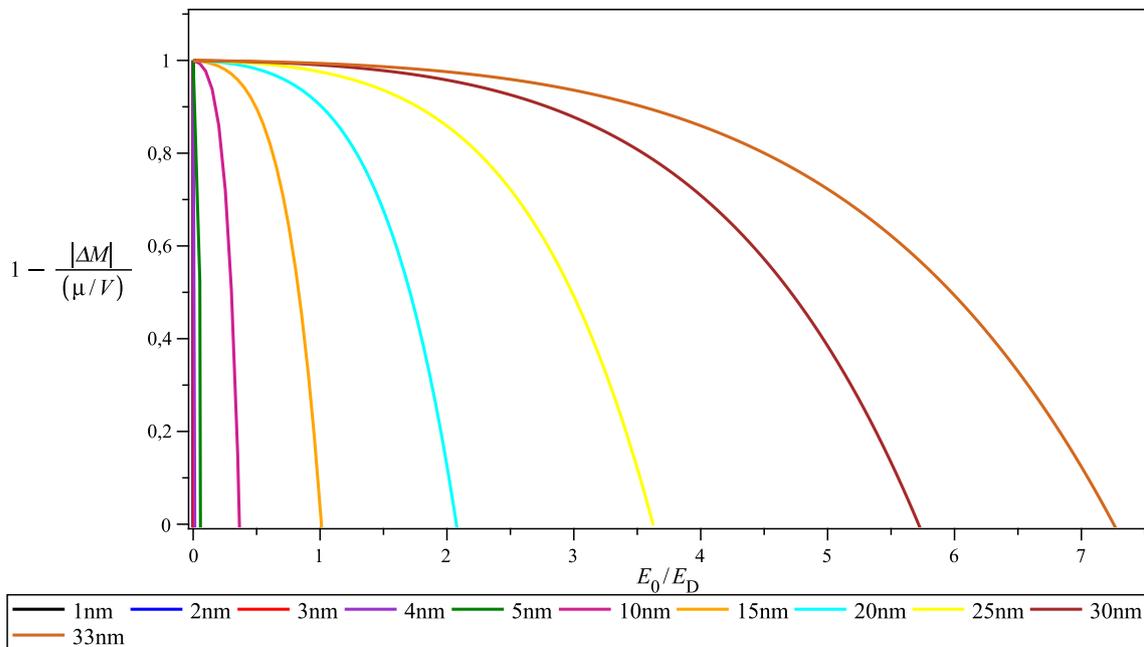


FIGURA 4.7: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0/E_D para $L_z = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm.

Neste ponto faz-se necessário fornecermos uma justificativa por uma deficiência do nosso

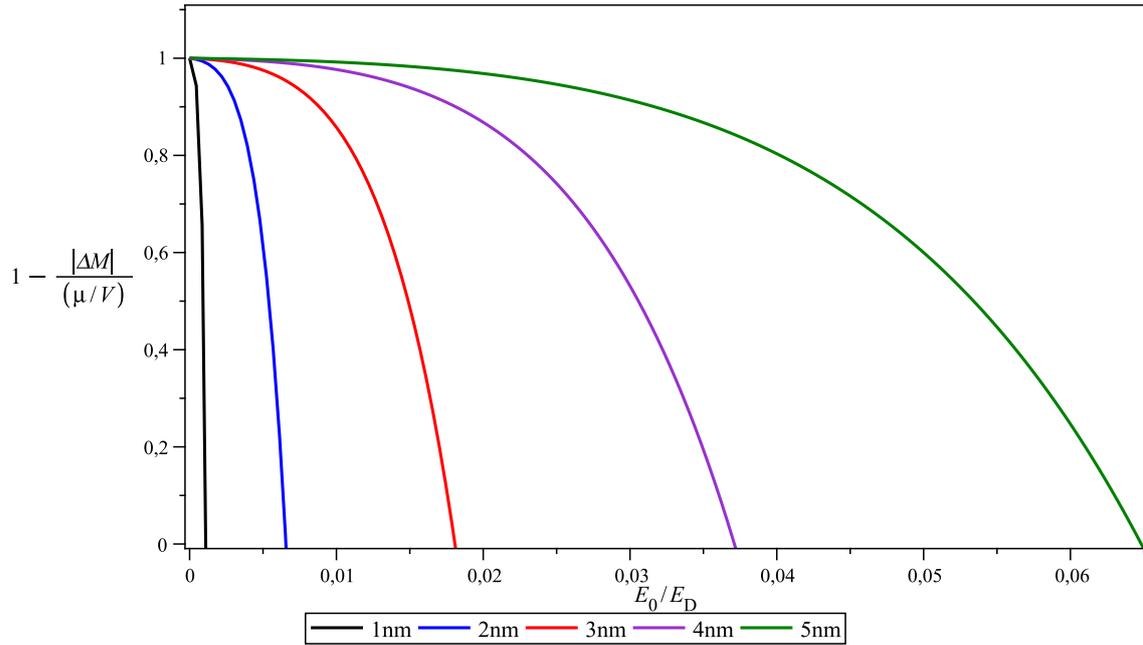


FIGURA 4.8: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0/E_D para $L_z = 1, 2, 3, 4$ e 5 nm.

modelo, a saber, a negligência do efeito da heteroestrutura sobre os mágnons (somente mágnons *bulk* foram considerados). Para o poço assumido, tal confinamento pode, em princípio, levar a efeitos adicionais, tal como a existência de modos de superfície. Entretanto, como os átomos de superfície são localizados em um ambiente diferente do que um *bulk*, aparece, como uma consequência direta, uma anisotropia de superfície interfacial. Tem sido verificado que no mínimo três mecanismos dão surgimento à anisotropia de superfície. Estes são: o mecanismo de um íon, a interação dipolo–dipolo e o efeito causado pela imperfeição (rugosidade) superficial. A importância da imperfeição interfacial no fenômeno de anisotropia magnética foi sugerido por Bruno [109] e tem sido recentemente reportado em investigações de dispersão de ondas de *spin* em escala nanométrica [110]. De acordo com estes trabalhos, quando a espessura de um filme ou de um poço quântico magnético diminui, a anisotropia superficial torna-se mais e mais importante em relação à anisotropia *bulk*, influenciando o *gap* das ondas de *spin* em $q_{\parallel} = 0$. A energia devido à anisotropia *bulk* é pequena, de forma que a anisotropia superficial torna-se dominante na região de pequenas espessuras, como observado através de experimentos de espectroscopia de tunelamento inelástico [110]. Por causa da alta energia de anisotropia superficial, o sistema é instável contra excitação de mágnons de superfície e não é a totalidade da magnetização do sistema que desaparece, mas somente a magnetização na região superficial desaparece [111]. Além disso, medindo a largura a meia altura do máximo dos picos de excitação a partir do espectro mostrado na FIGURA (2) da referência [110], um forte amortecimento das ondas de *spin* superficiais,

$\Gamma \approx 2,0 \text{ meV}$, pode ser obtido.

Finalmente, devemos dar algumas informações sobre o aumento esperado na temperatura da amostra causada pela irradiação por *laser*. Inicialmente, algumas questões surgem: (i) O que acontece se um pulso *laser* de femtossegundo (fs) for absorvido por um ferromagneto e o sistema de portadores de carga for aquecido a uma temperatura acima da temperatura de Curie dentro de dezenas de fs? Isto significa que o ordenamento dos *spins* é completamente perdido (quase) instantaneamente? E em caso afirmativo, quais são os processos fundamentais que limitam a taxa de desmagnetização? (ii) Será que o aquecimento da amostra tem uma influência significativa sobre a população de mágnons, quando comparado ao mecanismo de espalhamento buraco–mágnon? A dependência no tempo da função de distribuição dos portadores observada com fotoemissão resolvida no tempo [112] tem mostrado que o aumento inicial da temperatura eletrônica, alguns milhares de kelvins, é seguido por um decaimento que é acompanhado por um aumento na temperatura da rede em torno de 300K devido à interação elétron–fônon. Tem sido observado que após 3ps o equilíbrio entre elétrons e fônons se estabeleceu. Por outro lado, Carpenne *et al.* [113] mostrou que desmagnetização ultra–rápida induzida por *laser* em filmes finos epitaxiais de Fe podem ser entendidos em termos da interação elétron–mágnon, ocorrendo em uma escala de tempo de 100 fs (1 ps). Foi observado que elétrons “quentes” podem eficientemente excitar mágnons (mágnons “quentes”), levando a uma rápida redução na magnetização. Porém, por causa dos processos térmicos de relaxação de mágnons (processos de três mágnons são os mais importantes em relaxação de mágnons “quentes”) uma subsequente recuperação do ordenamento dos *spins* tem lugar com um tempo característico constante de 800 fs. Em adição, recentes experimentos sobre desmagnetização induzido por *laser* [37] usam *lasers* ultra–rápidos como um meio de manipular a magnetização, com tempos de acesso de um picossegundo ou menos. Entretanto, em todos estes casos a excitação magnética observada é resultante da absorção óptica seguida por um rápido aumento da temperatura. Esta origem térmica dos mágnons excitados limita consideravelmente potenciais aplicações, pois a frequência de repetições é limitada pelo tempo de resfriamento.

A despeito do defeito mencionado acima, o mecanismo proposto aqui para a desmagnetização em poços quânticos semicondutores magnéticos diluídos (III,Mn)V por um campo *laser* forte, assistido por um gás de buracos quase–bidimensional e levando em conta o mecanismo de espalhamento portador–mágnon, pode ser explicado em termos da geração Cherenkov de ondas de *spins* pelos portadores de carga de deriva. Isto porque a velocidade de arrasto imposta aos portadores de carga pelo campo *laser* externo é maior do que a velocidade de fase das ondas de *spins* que são excitadas. Além disso, a velocidade de arrasto dos portadores tam-

bém é maior do que a velocidade $\left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}}\right)v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}}$. A mudança na magnetização em poços quânticos semicondutores magnéticos diluídos (III,Mn)V é atribuído a uma intensificação (amplificação) da população de mágnons pelos buracos quase-bidimensionais.

Para testar as predições apresentadas no presente trabalho, propomos um experimento similar ao usado para observar a ultra-rápida desmagnetização [3, 8] produzida por pulsos *laser* ultra-curtos na presença adicional de um campo *laser* forte (THz). A extinção da magnetização pode neste caso ser obtida pelo aumento da intensidade do campo *laser* adicional até o valor limite do campo em que o crescimento da população de mágnons é obtido (amplificação de mágnons). Os resultados apresentados aqui mostram que a magnetização pode diminuir apreciavelmente para campos bem abaixo do campo limite de dano da nanoestrutura e dentro do tempo de relaxação de energia dos portadores no poço quântico magnético [114].

4.2.2 Transições Inter Sub-Bandas ($\ell' \neq \ell$)

Para transições inter sub-bandas, $\ell' \neq \ell$. Se considerarmos somente transições entre níveis vizinhos para os quais $\ell' = \ell + 1$, então os limites de integração de q_z , dados por (4.41), são:

$$\pi/L_z \leq q_z \leq (2\ell + 1)\pi/L_z. \quad (4.57)$$

Para $\ell' = \ell + 1$, temos que se ℓ é par, $\ell + 1$ será ímpar e vice-versa. Assim, pela equação (3.21), escrevemos

$$\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell + 1) = \frac{\cos(q_z L_z / 2)}{(q_z L_z / 2)} \frac{4\ell(\ell + 1)(q_z L_z / \pi)^2 P}{4\ell^2(\ell + 1)^2 - [(\ell + 1)^2 + \ell^2 - (q_z L_z / \pi)^2]^2}. \quad (4.58)$$

Limitando a análise a transições da primeira para a segunda sub-banda, $\ell = 1$ e $\ell' = 2$, verifica-se que (4.58) é indeterminado nos limites de (4.57), e portanto, restringimos q_z ao intervalo

$$\pi/L_z < q_z < (2\ell + 1)\pi/L_z \longrightarrow \pi/L_z < q_z < 3\pi/L_z. \quad (4.59)$$

Utilizando a equação (4.30), podemos escrever o coeficiente de amplificação e o argumento da exponencial, $\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m$, como

$$\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} = \frac{(N_0 \beta x)^2 S m^{*2}}{4\pi \hbar^5 L_z (N_c / V) q_{\parallel}^2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 2)|^2 \mathcal{K}(1, 2), \quad (4.60)$$

$$\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m = \frac{(N_o \beta x)^2 S m^{*2} \tau_m}{4\pi \hbar^5 L_z (N_c/V) q_{\parallel}^2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 2)|^2 \mathcal{K}(1, 2). \quad (4.61)$$

Voltando em (4.40), temos para a desmagnetização

$$\begin{aligned} \Delta M &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{q_z^{\min}}^{q_z^{\max}} dq_z \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m) \\ &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\pi/L_z}^{3\pi/L_z} dq_z \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m) \\ &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{2\pi L_z} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m), \end{aligned} \quad (4.62)$$

com $q_{\parallel}^{\min} \approx 0$ e $q_{\parallel}^{\max} \approx \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} (\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_o + \sigma \hbar \omega_s / 2)}$ (dado pela equação (4.26)).

Resultados e Discussão

ANÁLISE NUMÉRICA DIRETA Efetuando os cálculos para transições inter sub-bandas, de $\ell = 1$ para $\ell' = 2$, utilizando os parâmetros da TABELA 4.1, obtemos $\gamma_{q_{\parallel}}$ e $|\Delta M|/(\mu/V)$. Alguns dos valores calculados de $\gamma_{q_{\parallel}}$ estão dispostos nas TABELAS 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18 para poços de largura $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm, respectivamente. Poços de largura inferior a 10 nm apresentaram o mesmo comportamento observado no caso de transição intra sub-banda para os poços de largura entre 1 e 5 nm, qual seja, curvas de desmagnetização contra campo elétrico praticamente verticais (veja os dados da TABELA 4.20, que apresenta os valores calculados para a desmagnetização em poços de largura 1, 2, 3, 4 e 5 nm). Como já indicado, esta variação abrupta da magnetização com o campo elétrico para poços estreitos está relacionado ao fato da energia cinética associada à direção de confinamento ($\ell^2 \mathcal{E}_o$) aumentar rapidamente com a diminuição da largura do poço (pois é proporcional a L_z^{-2}), enquanto que a energia cinética associada ao movimento no plano do poço quântico, $\hbar^2 k_{\parallel}^2 / (2m^*)$, diminui proporcionalmente com L_z . Portanto, a energia de Fermi (que depende de $\ell^2 \mathcal{E}_o$ e de $\hbar^2 k_F^2 / (2m^*)$) também diminui com a diminuição de L_z até 10 nm, e passa a aumentar com a posterior redução de L_z . Assim, passaremos a analisar somente poços de largura maior ou igual a 10 nm, deixando o estudo de poços mais estreitos para trabalhos futuros.

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{12} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{12} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
7,9267	1,2632	1,2632	0,3310	0,5424	64
		1,4527	0,3999	0,5816	45
		1,6422	0,5157	0,6184	20
5,5487	1,8046	1,8046	0,4552	0,6483	42
		2,0753	0,5565	0,6952	25
		2,3460	0,7899	0,7391	6,4
3,1707	3,1580	3,1580	0,7792	0,8576	10
		3,6317	1,0332	0,9197	11

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 82.

TABELA 4.13: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 130 meV , $0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
9,7081	1,1878	1,1878	1,8437	3,1683	72
		1,3660	2,2115	3,3976	54
		1,5442	2,7311	3,6124	32
6,7957	1,6969	1,6969	2,5243	3,7869	50
		1,9514	3,0650	4,0609	32
		2,2059	3,9686	4,3177	8,8
3,8832	2,9695	2,9695	4,3312	5,0095	16
		3,4150	5,6850	5,3721	5,5

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 82.

TABELA 4.14: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 150 meV , $0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
1,1210	1,1827	1,1827	1,2845	2,2066	72
		1,3601	1,5548	2,3663	52
		1,5375	1,9468	2,5159	29

continua na próxima página

continuação

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,6896	1,7590	2,6374	50
0,7847	1,6896	1,9430	2,1728	2,8283	30
		2,1965	2,9184	3,0071	3,0
0,4484	2,9568	2,9568	3,0894	3,4889	13
		3,4003	4,4328	3,7415	16

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 82.

TABELA 4.15: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 173 meV , $1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,2005	0,9916	1,6820	70
1,2533	1,2005	1,3805	1,2129	1,8037	49
		1,5606	1,5576	1,9177	23
0,8773	1,7150	1,7150	1,3635	2,0103	47
		1,9722	1,7178	2,1559	26
		2,2295	2,5778	2,2921	11
0,5640	2,6677	2,6677	2,1715	2,5073	15
		3,0679	3,2511	2,6888	17

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 82.

TABELA 4.16: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 196 meV , $1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,2278	0,8115	1,3544	67
1,3729	1,2278	1,4120	1,0031	1,4524	45
		1,5962	1,3399	1,5442	15
0,9610	1,7540	1,7540	1,1226	1,6188	44
		2,0171	1,4446	1,7359	20

continua na próxima página

continuação

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
0,5492	3,0695	3,0695	2,1778	2,1414	1,7

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 82.

TABELA 4.17: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 30 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 220 meV , $1,3729 \text{ nm}^{-1}$ e $1,5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_0^c (10^8 V/m)	E_0 (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})	$\gamma_{q_{\parallel}}^*$ (10^{11} s^{-1})	$e_{\gamma_{q_{\parallel}}^*}$ (%)
		1,2465	0,7332	1,2114	65
1,4399	1,2465	1,4335	0,9121	1,2991	42
		1,6205	1,2700	1,3812	8,8
1,0079	1,7808	1,7808	1,0184	1,4479	42
		2,0479	1,3286	1,5527	17
0,5760	3,1164	3,1164	2,0638	1,9154	7,2

★ referem-se ao cálculo do item "análise aproximada", página 82.

TABELA 4.18: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campo *laser* intenso com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 33 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 234 meV , $1,4399 \text{ nm}^{-1}$ e $1,65 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

Pela análise dos dados destas tabelas, verifica-se que o campo crítico E_0^c é da ordem de 10^8 V/m para todos os poços quânticos, acarretando coeficientes de amplificação de mágnons da ordem de 10^{11} s^{-1} . Assim como no caso de transições intra sub-bandas, no caso de transições inter sub-bandas também podemos observar que quanto menor o vetor de onda dos mágnons, maior a intensidade do campo crítico no qual se dá o início da amplificação da população de mágnons, sendo que o coeficiente de amplificação de mágnons aumenta à medida que se aumenta a intensidade do campo *laser* (por sua vez associado à intensidade da componente elétrica do campo *laser*).

Os valores obtidos para a desmagnetização como função do campo elétrico, no caso de transições inter sub-bandas, estão apresentados nas TABELAS 4.19 e 4.20, para L_z entre 10 e 33 nm e para L_z entre 1 e 5 nm, respectivamente. Como antes, as entradas indicadas com "--" referem-se a intensidades de campo elétrico superiores ao necessário para completa desmagnetização da amostra. Assim como no caso de transições intra sub-banda, quando se considera somente transições inter sub-bandas, observa-se que: (i) a desmagnetização

da amostra aumenta com o aumento do campo elétrico E_0 , para um dado valor de L_z ; (ii) a desmagnetização diminui com o aumento de L_z , para um dado campo elétrico E_0 ; e (iii) a intensidade do campo no qual a desmagnetização é completa aumenta rapidamente com o aumento de L_z .

E_0 (10^7 V/m)	E_0/E_D	$\frac{ \Delta M }{(\mu/V)}$ (%)					
		$L_z = 10$ nm	$L_z = 15$ nm	$L_z = 20$ nm	$L_z = 25$ nm	$L_z = 30$ nm	$L_z = 33$ nm
1,0	0,05	0,1285	0,0963	0,0860	0,0815	0,0791	0,0781
2,0	0,10	0,2244	0,1251	0,1005	0,0905	0,0854	0,0834
3,0	0,15	0,3723	0,1595	0,1161	0,0998	0,0918	0,0887
4,0	0,20	0,5914	0,2002	0,1331	0,1096	0,0983	0,0941
5,0	0,25	0,9102	0,2482	0,1515	0,1198	0,1051	0,0997
6,0	0,30	1,3702	0,3048	0,1716	0,1306	0,1121	0,1054
7,0	0,35	2,0313	0,3720	0,1937	0,1420	0,1195	0,1114
8,0	0,40	2,9801	0,4518	0,2181	0,1543	0,1272	0,1177
9,0	0,45	4,3422	0,5472	0,2452	0,1675	0,1355	0,1243
10,0	0,50	6,2992	0,6618	0,2756	0,1819	0,1443	0,1314
11,0	0,55	9,1149	0,8003	0,3100	0,1978	0,1539	0,1390
12,0	0,60	13,1731	0,9687	0,3494	0,2155	0,1645	0,1473
13,0	0,65	19,0342	1,1752	0,3949	0,2355	0,1763	0,1566
14,0	0,70	27,5199	1,4311	0,4486	0,2586	0,1898	0,1671
15,0	0,75	39,8480	1,7529	0,5138	0,2864	0,2058	0,1795
16,0	0,80	57,8700	2,1699	0,5977	0,3221	0,2261	0,1951
17,0	0,85	84,8947	2,7864	0,7295	0,3778	0,2571	0,2185
18,0	0,90	–	3,6604	0,8921	0,4413	0,2913	0,2443
19,0	0,95	–	4,7279	1,0757	0,5100	0,3274	0,2712
20,0	1,00	–	6,0295	1,2824	0,5842	0,3655	0,2993

TABELA 4.19: Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm para transições inter sub-bandas.

E_0 (10^7 V/m)	E_0/E_D	$\frac{ \Delta M }{(\mu/V)}$ (%)					
		$L_z = 1$ nm	$L_z = 2$ nm	$L_z = 3$ nm	$L_z = 4$ nm	$L_z = 5$ nm	$L_z = 10$ nm
1,0	0,05	0,0753	0,0820	0,1058	6,1862	0,5511	0,1285
2,0	0,10	0,0779	0,0924	0,1523	–	3,6971	0,2244
3,0	0,15	0,0806	0,1042	0,2157	–	18,8666	0,3723
4,0	0,20	0,0834	0,1174	0,3001	–	82,5992	0,5914
5,0	0,25	0,0863	0,1321	0,4105	–	–	0,9102
6,0	0,30	0,0893	0,1487	0,5520	–	–	1,3702
7,0	0,35	0,0924	0,1671	0,7301	–	–	2,0313
8,0	0,40	0,0957	0,1877	0,9510	–	–	2,9801
9,0	0,45	0,0990	0,2106	1,2206	–	–	4,3422
10,0	0,50	0,1025	0,2361	1,5452	–	–	6,2992

TABELA 4.20: Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_0 , com $L_z = 1, 2, 3, 4, 5$ e 10 nm para transições inter sub-bandas.

Observando as colunas referentes aos poços de larguras iguais a 4 e 5 nm da TABELA 4.20, notamos que a desmagnetização calculada para estes poços comportam-se de forma completamente diferente dos outros. Para explicar esta discordância, verificamos que o efeito final do já citado aumento da energia de Fermi com a diminuição da largura do poço (em

poços com $L_z < 10\text{nm}$) sobre a função $\mathcal{K}(\ell, \ell')$ é a ocorrência de um máximo que se desloca para menores L_z à medida em que se aumenta o campo E_0 . Os gráficos das FIGURAS 4.9 e 4.10 mostram este efeito sobre o coeficiente de amplificação de mágnons, que é proporcional a $\mathcal{K}(\ell, \ell')$. Este efeito afeta principalmente os poços quânticos de 4 e 5 nm, pois o máximo de $\gamma_{q_{\parallel}}$ ocorre justamente para o campo elétrico em torno de 10^8V/m , a ordem de grandeza do campo crítico. Assim, como a desmagnetização contém $\gamma_{q_{\parallel}}$ como argumento de uma exponencial, o efeito final sobre a desmagnetização é maximizado, fazendo com que ocorra completa desmagnetização para campos relativamente baixos.

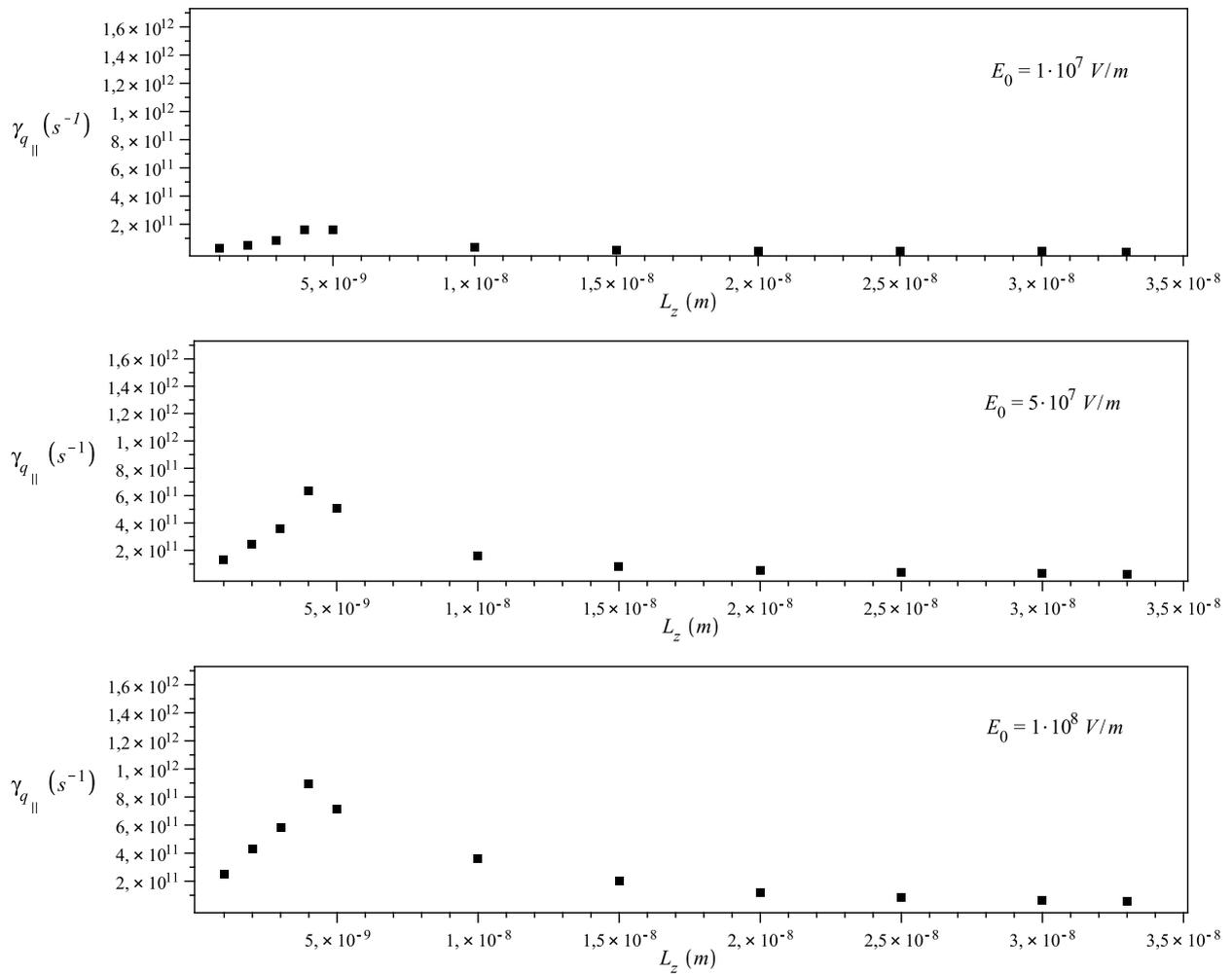


FIGURA 4.9: Gráficos comparativos de $\gamma_{q_{\parallel}}$ (inter sub-banda) em função de L_z para vários E_0 , mostrando o deslocamento do máximo de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para L_z decrescentes com o aumento do campo.

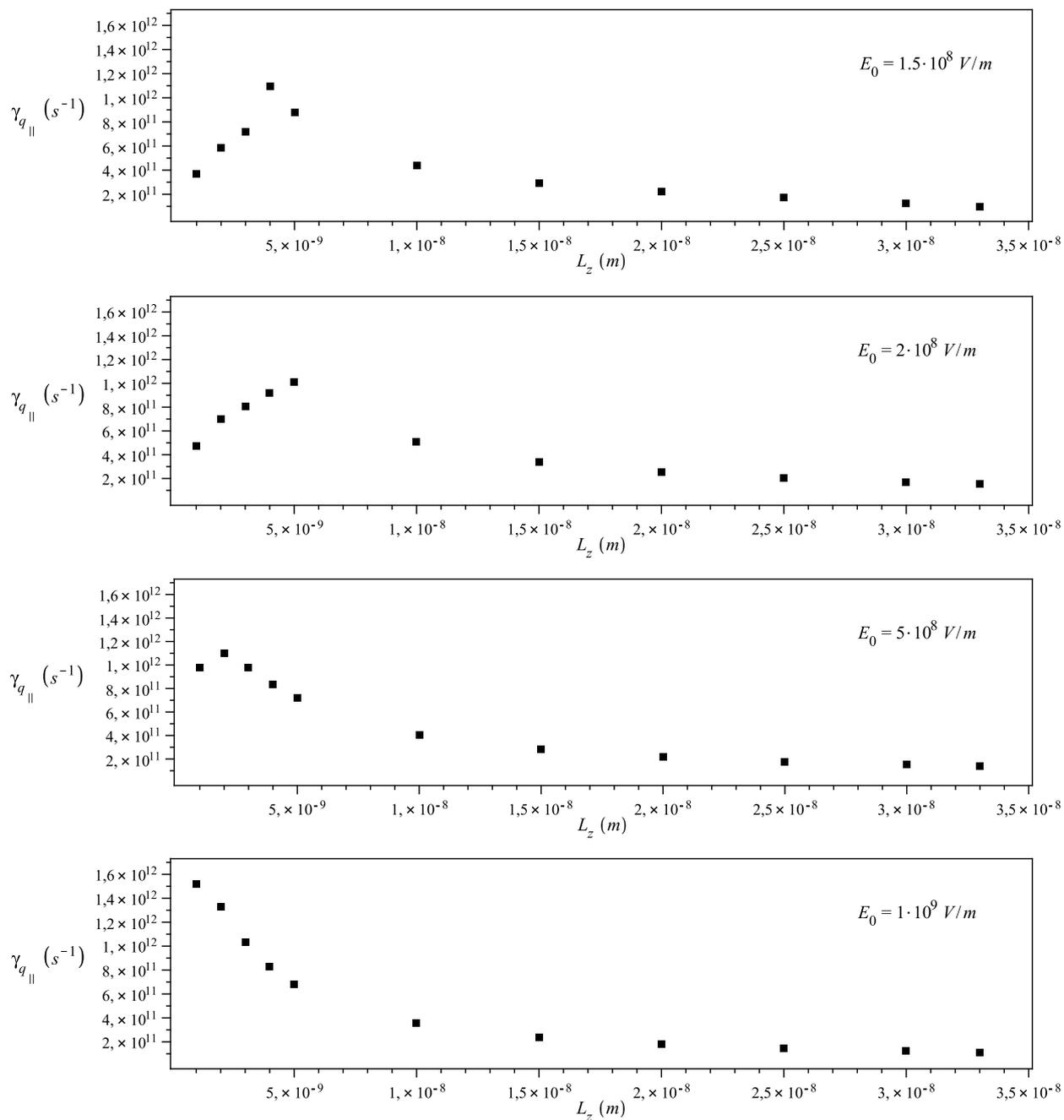


FIGURA 4.10: [continuação da FIGURA 4.9] Gráficos comparativos de $\gamma_{q_{\parallel}}$ (inter sub-banda) em função de L_z para vários E_0 , mostrando o deslocamento do máximo de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para L_z decrescentes com o aumento do campo.

Na FIGURA 4.11 está representado a desmagnetização (intra sub-bandas) em função de E_0 para os vários L_z considerados, onde incluímos a desmagnetização para $L_z = 5$ nm para evidenciar a acima mencionado comportamento de poços estreitos.

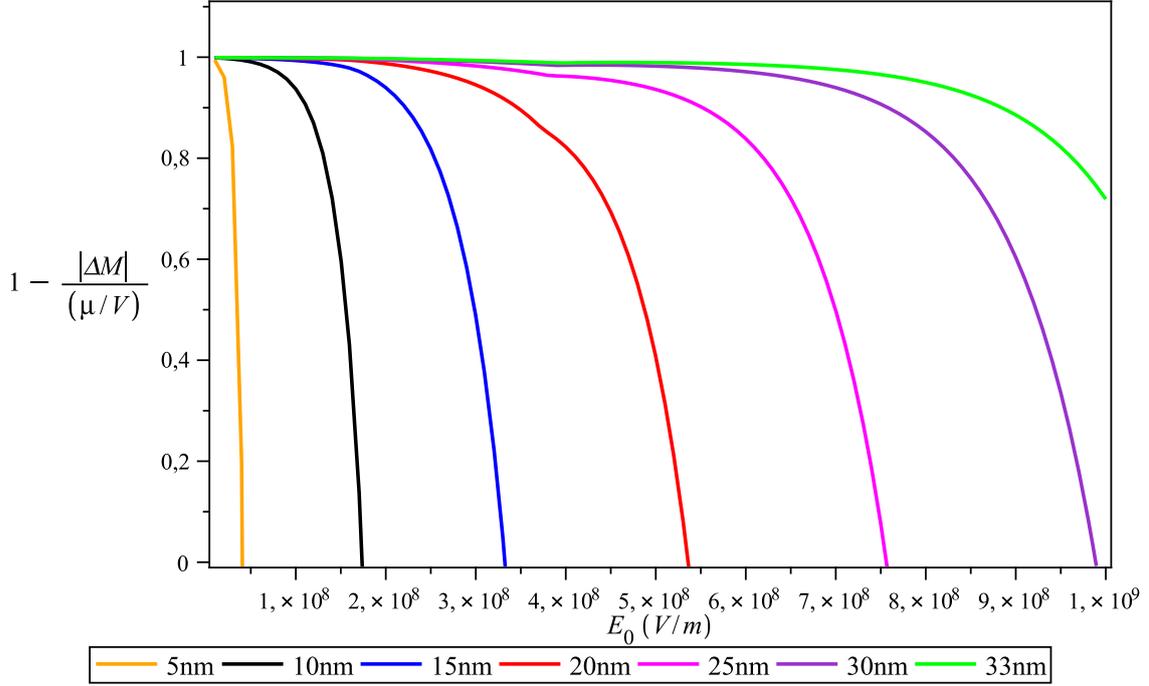


FIGURA 4.11: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm.

ANÁLISE NUMÉRICA APROXIMADA Para transições inter sub-bandas de $\ell = 1$ para $\ell' = 2$, realizando o mesmo desenvolvimento e aproximações utilizadas para obter (4.50), temos que $\gamma_{q_{\parallel}}$ pode ser aproximado por

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_{q_{\parallel}}^{\star} &\approx \frac{(N_0 \beta x)^2 S m^{\star 2}}{4 \pi \hbar^5 L_z (N_c / V) q_{\parallel}^2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 2)|^2 \left[\frac{\hbar^2}{m^{\star}} \left(\frac{2|e|E_0}{\hbar \omega} \right)^{1/2} q_{\parallel}^{3/2} \right] \\ &\approx \frac{(N_0 \beta x)^2 S m^{\star}}{4 \pi \hbar^3 L_z (N_c / V)} \left(\frac{2|e|E_0}{\hbar \omega} \right)^{1/2} |\mathcal{F}(q_z, 1, 2)|^2 q_{\parallel}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

desde que $\lambda > \mathcal{E}_0, \mathcal{E}_F, \hbar \omega_s, \hbar \omega_q$. Novamente, esta aproximação se torna tanto melhor quanto maior a razão E_0/E_0^c para cada vetor de onda q_{\parallel} , como pode ser visto analisando o erro relativo entre $\gamma_{q_{\parallel}}$ e $\overline{\gamma}_{q_{\parallel}}^{\star}$, dispostos na última coluna das TABELAS 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18.

Da mesma forma que no caso de transições intra sub-bandas, o cálculo da desmagnetização por meio da relação aproximada leva a valores muito distintos quando comparados com os obtidos pelo cálculo direto da integral contida em ΔM . Portanto, consideramos desnecessário incluí-los também para transições inter sub-bandas.

COMPARAÇÃO DO COEFICIENTE DE AMPLIFICAÇÃO DE MÁGNONS E DA DESMAGNETIZAÇÃO PARA TRANSIÇÕES INTRA E INTER SUB-BANDAS Comparando os valores obtidos para o coeficiente de amplificação de mágnons nos casos de transição intra e inter sub-bandas, verificamos que, para um dado valor E_0 e de L_z , este coeficiente é sempre menor para transições inter sub-bandas. Esta diminuição está entre 15 e 33% para $L_z = 10\text{nm}$, e entre 30 e 36% para os demais poços, considerando como medida de diminuição de $\gamma_{q_{\parallel}}$ o valor dado por $|\gamma_{q_{\parallel}}^{\text{INTRA}} - \gamma_{q_{\parallel}}^{\text{INTER}}|/\gamma_{q_{\parallel}}^{\text{INTRA}}$.

O gráfico da FIGURA 4.12 compara a desmagnetização obtida no caso em que consideramos somente transições intra sub-bandas ($\ell' = \ell = 1$) com o caso em que consideramos somente transições inter sub-bandas ($\ell = 1, \ell' = 2$). Notamos que, para um dado poço e um dado valor da intensidade do campo elétrico, o efeito principal é a diminuição da desmagnetização inter sub-bandas em relação à desmagnetização intra sub-bandas. Isto se deve ao fato de ser necessário fornecer mais energia para os portadores efetuarem uma transição inter sub-banda do que para efetuar uma transição intra sub-banda, e assim menos energia esta disponível para a geração de mágnons e, portanto, menos mágnons são gerados e a desmagnetização obtida é menor.

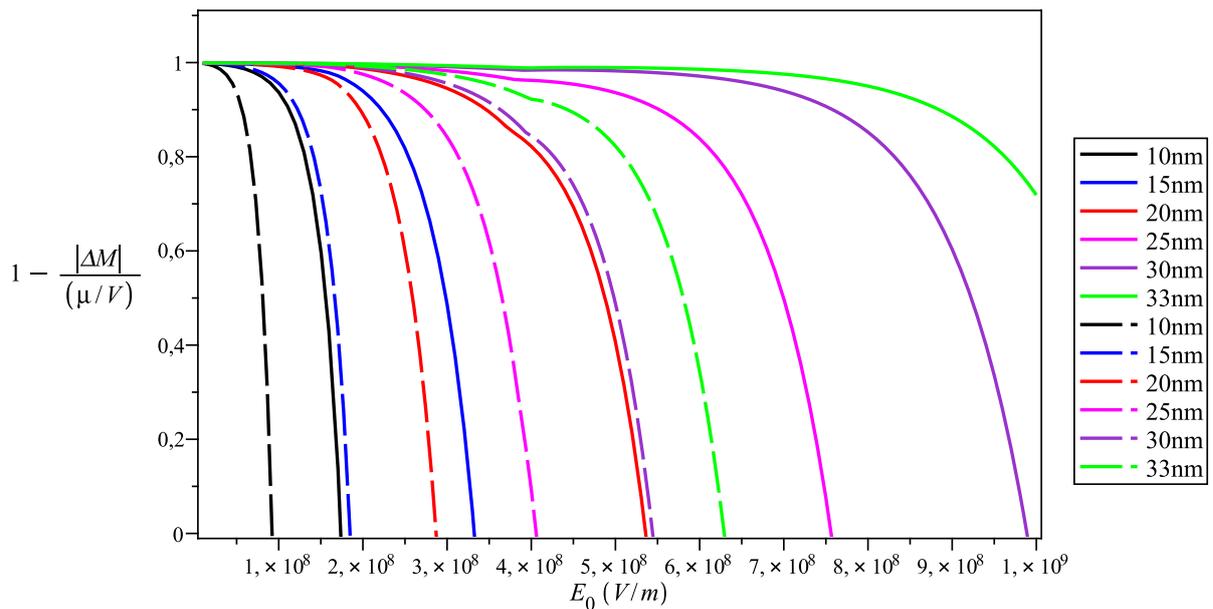


FIGURA 4.12: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_0 para $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33nm , comparando o efeito de desmagnetização considerando somente transições intra sub-bandas (linhas tracejadas) com o efeito de desmagnetização considerando somente transições inter sub-bandas (linhas contínuas).

5 *Campo Forte e Campo Fraco Simultâneos*

5.1 Equação de Schrödinger

Considerando dois campos *laser's* atuando simultaneamente sobre o portador, um no regime de campo intenso ($\lambda_1 \gg \hbar\omega_1$) e o outro no regime de campo fraco ($\lambda_2 \ll \hbar\omega_2$), temos que a equação de Schrödinger para um buraco confinado em um poço de potencial ideal sob interação com os campos *laser's* pode ser escrita como

$$\left\{ \frac{1}{2m^*} \left[-i\hbar\nabla - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}_1(t) - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}_2(t) \right]^2 + \hat{\mathcal{V}}(z) - \frac{JS\sigma}{2} \right\} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (5.1)$$

Na equação (5.1), consideramos os campos *laser's* como ondas planas monocromáticas, na aproximação do dipolo, se propagando na direção perpendicular à direção de crescimento do poço (direção $-z$), ambos polarizados paralelamente ao plano do poço (plano xOy). $\mathbf{A}_1(t) = A_{01} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cos(\omega_1 t)$ e $\mathbf{A}_2(t) = A_{02} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cos(\omega_2 t)$ são os vetores potencial magnético, A_{01} e A_{02} são as amplitudes destes potenciais, ω_1 e ω_2 são as frequências associadas aos campos *laser's* intenso e fraco, respectivamente, e $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ é o vetor unitário na direção paralela ao poço. O potencial de confinamento $\hat{\mathcal{V}}(z)$ é dado por (3.3), m^* é a massa efetiva do buraco, $|e|$ a carga elétrica do buraco, c a velocidade da luz no vácuo, $\sigma = +1$ (-1) para as sub-bandas de *spin-up* (*spin-down*), $S = 5/2$ é o *spin* dos íons de Mn, $J = N_o \beta x$ é a constante de troca $p-d$ efetiva entre os *spins* localizados dos íons de Mn e os *spins* itinerantes dos buracos, N_o é a densidade de sítios cátions, β é a integral de troca do portadores tipo p na banda de valência e x é a concentração fracional de íons de Mn presente no poço quântico semiconductor magnético diluído.

A solução da equação (5.1) é dada por

$$\Psi_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{AL_z}} \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \exp \left\{ i \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel} - \frac{i}{\hbar} \int^t \left[\mathcal{E}_o \ell^2 - \frac{\sigma \hbar \omega_s}{2} + \frac{1}{2m^*} \left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|\hbar}{c} (\mathbf{A}_1(\tau) + \mathbf{A}_2(\tau)) \right)^2 \right] d\tau \right\}, \quad (5.2)$$

onde utilizamos a constante de troca em termos do parâmetro β , $J = N_0\beta x$, e portanto $JS\sigma = N_0\beta xS\sigma = \sigma\hbar\omega_s$, com $\omega_s \equiv (N_0\beta xS)/\hbar$ sendo a frequência de *spin-splitting* entre sub-bandas do poço quântico semiconductor magnético diluído. Na equação (5.2), $A = L_xL_y$ é a área de normalização, $\mathcal{E}_0 = \pi^2\hbar^2/(2m^*L_z^2)$ é a energia do estado fundamental de um poço quântico ideal de largura L_z . Aqui, \mathbf{k}_\parallel e \mathbf{r}_\parallel são a componente do vetor de onda e a componente do vetor posição do portador paralelo ao poço, respectivamente.

A energia total do buraco, na ausência dos campos eletromagnéticos, é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathbf{k}_\parallel\ell\sigma} &= \frac{\hbar^2\mathbf{k}_\parallel^2}{2m^*} + \ell^2\mathcal{E}_0 - \frac{JS\sigma}{2} \\ &= \mathcal{E}_{\mathbf{k}_\parallel\ell} - \frac{\sigma\hbar\omega_s}{2},\end{aligned}\quad (5.3)$$

onde $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_\parallel\ell} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}_\parallel^2}{2m^*} + \ell^2\mathcal{E}_0$. Neste trabalho, como tratamos apenas com buracos, medimos a energia dos mesmo positivamente a partir do topo da banda de valência em direção à parte concava da relação de dispersão $\mathcal{E}(\mathbf{k}_\parallel, \ell, \sigma)$.

5.2 Probabilidade de Transição

Assumindo o acoplamento buraco-mágnon como $\phi(\mathbf{r}, t; \omega_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = Ce^{i(\mathbf{r}\cdot\mathbf{q} - \omega_{\mathbf{q}}t)}$, onde $C = (\frac{S}{2N_c})^{1/2}(N_0\beta x)$, com N_c denotando o número de sítios cátions, $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_\parallel, q_z)$ o vetor de onda e $\omega_{\mathbf{q}}$ a frequência dos mágnons, respectivamente, temos que os elementos da matriz de transição (amplitude de probabilidade), $a(\kappa \rightarrow \kappa')$, para a transição do estado inicial κ com números quânticos $\{\mathbf{k}_\parallel, \ell, \sigma\}$ para o estado final κ' com números quânticos $\{\mathbf{k}'_\parallel, \ell', \sigma'\}$, é dada por

$$a(\kappa \rightarrow \kappa') = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \mathbf{k}'_\parallel, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t') | \mathbf{k}_\parallel, \ell, \sigma \rangle, \quad (5.4)$$

onde $\langle \mathbf{k}'_\parallel, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) | \mathbf{k}_\parallel, \ell, \sigma \rangle = \int d^2r_\parallel \int dz \Psi_{\mathbf{k}'_\parallel\ell'\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{k}_\parallel\ell\sigma}(\mathbf{r}, t)$. Realizando os cálculos, de forma análoga aos detalhados no Apêndice B para um só campo *laser*, temos

$$a(\kappa \rightarrow \kappa') = -\frac{i}{\hbar} \frac{2C}{AL_z} I_1 I_2 I_3' \quad (5.5)$$

onde

$$I_1 = \int d^2r_\parallel \exp\{-i(\mathbf{k}'_\parallel - \mathbf{k}_\parallel - \mathbf{q}_\parallel) \cdot \mathbf{r}_\parallel\}, \quad (5.6)$$

$$I_2 = \int_0^{L_z} dz \exp(iq_z z) \text{sen}\left(\frac{\pi\ell'}{L_z} z\right) \text{sen}\left(\frac{\pi\ell}{L_z} z\right), \quad (5.7)$$

$$I'_3 = \int_0^t d\tau \exp \left\{ -i \left(\omega_{\mathbf{q}} - \frac{\omega_s \sigma}{2} + \frac{\mathcal{E}_0 \ell^2}{\hbar} + \frac{\omega_s \sigma'}{2} - \frac{\mathcal{E}_0 \ell'^2}{\hbar} \right) \tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2m^* \hbar} \int_0^\tau \left[\left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} (\mathbf{A}_1(\tau') + \mathbf{A}_2(\tau')) \right)^2 - \left(\hbar \mathbf{k}'_{\parallel} - \frac{|e|}{c} (\mathbf{A}_1(\tau') + \mathbf{A}_2(\tau')) \right)^2 \right] d\tau' \right\}. \quad (5.8)$$

A probabilidade de transição, por unidade de tempo, do estado inicial para o estado final, $T(\kappa \rightarrow \kappa')$, é dado pelo quadrado do módulo de $a(\kappa \rightarrow \kappa')$ dividido por t , ou seja

$$T(\kappa \rightarrow \kappa') = \frac{|a(\kappa \rightarrow \kappa')|^2}{t} \\ = \frac{1}{t} \left| -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t') | \mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma \rangle \right|^2 \\ = \frac{1}{t} \left| -\frac{i}{\hbar} \frac{2C}{AL_z} \right|^2 |I_1|^2 |I_2|^2 |I'_3|^2. \quad (5.9)$$

Realizando as integrais espaciais I_1 e I_2 , e elevando-as ao quadrado, obtemos

$$|I_1|^2 = (2\pi)^2 A \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}), \quad (5.10)$$

$$|I_2|^2 = \frac{L_z^2}{4} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2, \quad (5.11)$$

onde

$$\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell') = \frac{\begin{Bmatrix} \text{sen}(q_z L_z / 2) \\ \text{cos}(q_z L_z / 2) \end{Bmatrix}}{(q_z L_z / 2)} \frac{4\ell' \ell (q_z L_z / \pi)^2 P}{4\ell'^2 \ell^2 - [\ell'^2 + \ell^2 - (q_z L_z / \pi)^2]^2}, \quad (5.12)$$

sendo $\text{sen}(\dots)$ para ℓ e ℓ' ambos pares ou ímpares, e $\text{cos}(\dots)$ caso contrário. P é um fator de fase ($P_{\text{sin}} = e^{iq_z L_z / 2}$ e $P_{\text{cos}} = ie^{iq_z L_z / 2}$, de tal forma que, em ambos os casos, $|P|^2 = 1$). Efetuando primeiramente a integral contida na segunda exponencial de I'_3 e reorganizando os termos, temos

$$I'_3 = \int_0^t d\tau \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s}{2} \right] \tau \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -i \left(\frac{\lambda_1}{\hbar \omega_1} \right) \text{sen}(\omega_1 \tau) \right\} \exp \left\{ -i \left(\frac{\lambda_2}{\hbar \omega_2} \right) \text{sen}(\omega_2 \tau) \right\}, \quad (5.13)$$

onde utilizamos $\mathbf{E}_i(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_i(t)}{\partial t}$ e definimos os parâmetros $\lambda_i = \frac{\hbar |e| \mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_{0i}}{m^* \omega_i}$, com $i = 1$ para o campo intenso e $i = 2$ para o campo fraco. Expandindo as exponenciais em seno como uma série de funções de Bessel, temos

$$e^{-i\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right)\text{sen}(\omega_1\tau)} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_\mu\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) e^{-i\mu\omega_1\tau}, \quad (5.14)$$

$$e^{-i\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right)\text{sen}(\omega_2\tau)} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_\nu\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) e^{-i\nu\omega_2\tau}, \quad (5.15)$$

onde $\alpha = \mu, \nu$ é um inteiro e $\mathcal{J}_\alpha(\dots)$ é a função de Bessel de ordem α . Substituindo estas expansões na equação (5.13), podemos integrá-la, resultando em

$$I'_3 = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_\mu\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_\nu\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \mathcal{R}_{\mu\nu}(t), \quad (5.16)$$

onde definimos a integral temporal restante como

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}(t) = \int_0^t \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_\parallel \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_\parallel \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2 \right] \tau\right\} d\tau. \quad (5.17)$$

Então, escrevendo

$$I'_3(\mu, \nu) = \mathcal{J}_\mu\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_\nu\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \mathcal{R}_{\mu\nu}(t) \quad (5.18)$$

temos $I'_3 = \sum_{\mu \neq 0}^{+\infty} \sum_{\nu \neq 0}^{+\infty} I'_3(\mu, \nu)$, onde $\mu, \nu = 0$ foram excluídos, pois neste caso não há absorção nem emissão de fótons na mesma frequência dos campos *laser's*. Finalmente, $|I'_3(\mu, \nu)|^2$ é dado por

$$|I_3(\mu, \nu)|^2 = \left| \mathcal{J}_\mu\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_\nu\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \mathcal{R}_{\mu\nu}(t) \right|^2 = \mathcal{J}_\mu^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_\nu^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) |\mathcal{R}_{\mu\nu}(t)|^2. \quad (5.19)$$

Na equação (5.19), para um intervalo de tempo suficientemente longo, podemos utilizar a seguinte aproximação para $|\mathcal{R}_{\mu\nu}(t)|^2$:

$$|\mathcal{R}_{\mu\nu}(t)|^2 \simeq 2\pi\hbar t \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_\parallel \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_\parallel \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2\right]_{t \rightarrow \infty}. \quad (5.20)$$

A probabilidade de transição por unidade de tempo, do estado inicial κ para o estado final κ' , é portanto

$$\frac{|a(\kappa \rightarrow \kappa')|^2}{t} = \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{t} \left| -\frac{i}{\hbar} \frac{2C}{AL_z} I_1 I_2 I'_3(\mu, \nu) \right|^2 \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
\frac{|a(\kappa \rightarrow \kappa')|^2}{t} &= \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\
&\times \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2\right] \\
&= \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} T(\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa'), \tag{5.22}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
T(\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') &= \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \times \\
&\times \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2\right]. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Uma notação conveniente para a probabilidade de transição pode ser definida como

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell') = T(\kappa \rightarrow \kappa') = \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} T(\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa'). \tag{5.24}$$

Para determinarmos a probabilidade de transição por unidade de tempo para transições a partir do estado inicial $|\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma\rangle$ para todos os estados finais possíveis $|\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'\rangle$ acompanhado por absorção ou emissão de mágnons, devemos somar $T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell')$ sobre todos os \mathbf{k}' , que é o mesmo que somar em \mathbf{k}'_{\parallel} e em ℓ' . Portanto, somando primeiro somente em \mathbf{k}' , e trocando a soma discreta por uma soma contínua, temos:

$$\begin{aligned}
T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') &= \sum_{\mathbf{k}'_{\parallel} \neq \mathbf{k}_{\parallel}} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell') \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2 \mathbf{k}'_{\parallel} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell') \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} \int d^2 \mathbf{k}'_{\parallel} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \times \\
&\times \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2\right] \tag{5.25}
\end{aligned}$$

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') = \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \times \\ \times \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2\right]. \quad (5.26)$$

Então, somando em ℓ' , temos que a probabilidade total, por unidade de tempo, de transição do estado inicial para todos os estados finais possíveis, acompanhado de emissão de mágnons, é dado por

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell) = \sum_{\ell'} T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \ell') \quad (5.27)$$

$$T_{\sigma \rightarrow \sigma'}(\mathbf{k}_{\parallel}, \ell) = \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\ell'} \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2}\hbar\omega_s - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2\right].$$

(5.28)

Nesta equação, os termos com $\mu, \nu < 0$ correspondem à emissão de $|\mu|, |\nu|$ fótons, enquanto que os termos com $\mu, \nu > 0$ correspondem à absorção de $|\mu|, |\nu|$ fótons do campo *laser* intenso e fraco, respectivamente.

5.3 Equação Cinética

A taxa de variação da população de mágnons, $dN_{\mathbf{q}}/dt$, pode ser escrita esquematicamente como

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = & \sum_{\mu=1}^{+\infty} \sum_{v=1}^{+\infty} \sum_{\substack{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell \\ \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell'}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} \right\} \\
 = & \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell \\ \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell'}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \end{array} \right\}, \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

onde o estado inicial do portador é especificado por $\kappa \rightarrow [\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma]$, enquanto que o estado final do mesmo é especificado por $\kappa' \rightarrow [\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma']$. O significado dos símbolos utilizados nos diagramas acima estão descritos na TABELA 3.1.

Para transformar a equação esquemática (5.29) em uma equação matemática, consideramos a probabilidade de transição por unidade de tempo escrita na forma generalizada

$$T(\kappa \rightarrow \kappa') = \sum_{\epsilon} \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{+\infty} T(\epsilon, \mu, v; \kappa \rightarrow \kappa') \quad (5.30)$$

com

$$T(\epsilon, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') = \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \epsilon \mathbf{q}_{\parallel}) \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar \omega_1}\right) \mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar \omega_2}\right) \times \\ \times \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \epsilon \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - \mu \hbar \omega_1 - \nu \hbar \omega_2\right], \quad (5.31)$$

onde $\epsilon = \pm 1$ e $\mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \epsilon \mathbf{q}_{\parallel}$.

Somando os dezesseis termos que figuram na primeira igualdade da equação (3.27), temos

$$\frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\mu=1}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} & T(\epsilon = -1, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & - T(\epsilon = +1, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & + T(\epsilon = -1, \mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & - T(\epsilon = +1, \mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & + T(\epsilon = -1, -\mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & - T(\epsilon = +1, -\mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & + T(\epsilon = -1, -\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & - T(\epsilon = +1, -\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] + \\ & + T(\epsilon = -1, \mu, -\nu; \kappa' \rightarrow \kappa) (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & - T(\epsilon = +1, \mu, -\nu; \kappa' \rightarrow \kappa) N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & + T(\epsilon = -1, \mu, \nu; \kappa' \rightarrow \kappa) (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & - T(\epsilon = +1, \mu, \nu; \kappa' \rightarrow \kappa) N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & + T(\epsilon = -1, -\mu, \nu; \kappa' \rightarrow \kappa) (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & - T(\epsilon = +1, -\mu, \nu; \kappa' \rightarrow \kappa) N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & + T(\epsilon = -1, -\mu, -\nu; \kappa' \rightarrow \kappa) (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] + \\ & - T(\epsilon = +1, -\mu, -\nu; \kappa' \rightarrow \kappa) N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \end{aligned} \right\}, \quad (5.32)$$

onde $f_{\kappa} \equiv f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}$ é a função de distribuição do portador com vetor de onda \mathbf{k}_{\parallel} paralelo ao plano do poço, na ℓ -ésima sub-banda do poço quântico e σ -ésima sub-banda de *spin*. Os fatores de população dos portadores, f e $1 - f$, garantem que só ocorra transição quando o estado inicial no evento de espalhamento esteja ocupado e o estado final vazio, em concordância com o princípio de exclusão de Pauli. Os termos $(N_{\mathbf{q}} + 1)$ e $N_{\mathbf{q}}$ levam em conta a criação e aniquilação de mágnons com vetor de onda \mathbf{q} nos eventos de espalhamento, respectivamente.

Podemos verificar, a partir da equação (5.31) e do fato de $\delta(x)$ ser par, que

$$T(\epsilon, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') = T(-\epsilon, -\mu, -\nu; \kappa' \rightarrow \kappa). \quad (5.33)$$

Aplicando esta relação aos oito últimos termos da equação (5.32), verificamos que termos equidistantes têm probabilidades de transição iguais, e portanto podem ser colocados em evidência, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\mu, \nu=1}^{+\infty} \{ & T(\epsilon = -1, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} + \\ & + T(\epsilon = -1, \mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, \mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} + \\ & + T(\epsilon = -1, -\mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, -\mu, -\nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} + \\ & + T(\epsilon = -1, -\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, -\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} \}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Trocando $\sum_{\mu, \nu=1}^{+\infty}$ por $\sum_{\substack{\mu, \nu=-\infty \\ \mu, \nu \neq 0}}^{+\infty}$, podemos expressar a equação (5.34) com dois termos apenas, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{\mu, \nu=-\infty \\ \mu, \nu \neq 0}}^{+\infty} \{ & T(\epsilon = -1, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] \} + \\ & + T(\epsilon = +1, \mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} \}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Voltamos ao problema original mantendo somente o termo com $\epsilon = +1$. Omitindo ϵ a partir deste ponto, temos

$$\frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, \mathbf{k}'_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} \{ T(\mu, \nu; \kappa \rightarrow \kappa') \{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\kappa'} [1 - f_{\kappa}] - N_{\mathbf{q}} f_{\kappa} [1 - f_{\kappa'}] \} \}. \quad (5.36)$$

Usando as equações (5.24), (5.27) e (5.28), obtemos finalmente a equação cinética para a população de mágnons:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} & |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{J}_{\mu}^2 \left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1} \right) \mathcal{J}_{\nu}^2 \left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2} \right) \times \\ & \times \left\{ (N_{\mathbf{q}} + 1) f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] - N_{\mathbf{q}} [1 - f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'}] f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma} \right\} \times \\ & \times \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar\omega_s / 2 - \mu \hbar\omega_1 - \nu \hbar\omega_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.4 Coeficiente de Amplificação de Mágns

Assumindo que a população de mágns satisfaz a condição $N_{\mathbf{q}} \gg 1$, de tal forma que $N_{\mathbf{q}} + 1 \approx N_{\mathbf{q}}$, podemos reescrever a equação (5.37) como

$$\frac{dN_{\mathbf{q}}}{dt} = \gamma_{q_{\parallel}} N_{\mathbf{q}}, \quad (5.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{q_{\parallel}} = & \frac{2\pi}{\hbar} |C|^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} \sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) [f_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}] \times \\ & \times \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \mu\hbar\omega_1 - \nu\hbar\omega_2] \end{aligned} \quad (5.39)$$

é o coeficiente de amplificação da população de mágns.

Considerando o campo *laser* 1 como sendo intenso, $\lambda_1 \gg \hbar\omega_1$, o argumento $\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right)$ da função de Bessel de ordem μ é grande, e podemos aplicar a seguinte aproximação [88, 89]:

$$\sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \delta[\tilde{\varepsilon} - \mu\hbar\omega_1] \simeq \frac{1}{2} [\delta(\tilde{\varepsilon} - \lambda_1) + \delta(\tilde{\varepsilon} + \lambda_1)], \quad (5.40)$$

onde $\tilde{\varepsilon} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \nu\hbar\omega_2$. Assumindo $\lambda_1 \gg k_B T, \mathcal{E}_F$, o processo de absorção de fótons do campo *laser* intenso domina sobre o processo de emissão na frequência ω_1 , e portanto podemos negligenciar a contribuição do termo de emissão presente na equação (5.40), $\delta(\tilde{\varepsilon} - \lambda_1)$. Assim,

$$\sum_{\substack{\mu=-\infty \\ \mu \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_{\mu}^2\left(\frac{\lambda_1}{\hbar\omega_1}\right) \delta[\tilde{\varepsilon} - \mu\hbar\omega_1] \simeq \frac{1}{2} \delta(\tilde{\varepsilon} + \lambda_1). \quad (5.41)$$

Para o campo *laser* fraco, rotulado como campo 2, $\lambda_2 \ll \hbar\omega_2$, e assim o argumento $\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right)$ da função de Bessel de ordem ν é pequeno. Portanto, podemos utilizar a seguinte aproximação:

$$\mathcal{J}_{\nu}^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \simeq \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^{2|n|}. \quad (5.42)$$

Como $\lambda_2 \ll \hbar\omega_2$, somente o termo $\nu = 1$ em (5.42) é significativo.¹ Retendo unicamente este

¹Considerando que a probabilidade de ocorrência do processo de emissão de um único fóton com frequência ω_2 seja desprezível em comparação ao processo de absorção de um único fóton do campo *laser* fraco. Isto é verdade se $\lambda_2 \gg k_B T$.

termo da série em $\mathcal{J}_\nu\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right)$, ficamos com

$$\sum_{\substack{\nu=-\infty \\ \nu \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_\nu^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \simeq \mathcal{J}_1^2\left(\frac{\lambda_2}{\hbar\omega_2}\right) \simeq \left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^2. \quad (5.43)$$

Portanto, no limite de campo fraco, somente processos de absorção de um único fóton são significativos.

Substituindo (5.41) e (5.43) em (5.38), obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{q_{\parallel}} = & \frac{\pi}{\hbar} |C|^2 \left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 [f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] \times \\ & \times \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \hbar\omega_2 + \lambda_1]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Escrevendo $\gamma_{q_{\parallel}}$ como

$$\gamma_{q_{\parallel}} = \frac{\pi}{\hbar} |C|^2 \left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^2 \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{I}_2(\ell, \ell') \quad (5.45)$$

onde

$$\mathcal{I}_2(\ell, \ell') \equiv \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}} [f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \hbar\omega_2 + \lambda_1], \quad (5.46)$$

e aproximando a soma discreta em \mathbf{k}_{\parallel} por uma soma contínua, temos

$$\mathcal{I}_2(\ell, \ell') = \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k_{\parallel} [f_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell' \sigma'} - f_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}] \delta[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - \hbar\omega_2 + \lambda_1]. \quad (5.47)$$

Para efetuar a integral indicada em $\mathcal{I}_2(\ell, \ell')$, devemos utilizar uma forma explícita para a função de distribuição de buracos. No caso geral, a função de distribuição é a função de Fermi–Dirac. A distribuição de Fermi–Dirac pode ser aproximada pela função passo unitário de Heaviside ou pela distribuição de Maxwell–Boltzmann, nos casos em que o gás de buracos for completamente degenerado ou completamente não degenerado, respectivamente.

5.5 Gás de Buracos Degenerado

Para um gás de buracos degenerado, fazemos $f(\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}) \simeq \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma})$, onde $\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma})$ é a função passo unitário de Heaviside e \mathcal{E}_F é a energia de Fermi. A função $\Theta(x)$ é definida

como

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (5.48)$$

que, para o problema em questão, toma a forma

$$f(\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}) \simeq \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} < \mathcal{E}_F \\ 0 & \text{se } \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} > \mathcal{E}_F. \end{cases} \quad (5.49)$$

Portanto, considerando que

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'} < \mathcal{E}_F < \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}, \quad (5.50)$$

escrevendo a equação (5.47) em coordenadas cilíndricas e utilizando as propriedades da função $\delta(\dots)$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(\ell, \ell') &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k_{\parallel} \left[\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'\sigma'}) - \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}) \right] \times \\ &\quad \times \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma'-\sigma)}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_2 + \lambda_1 \right] \\ &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k_{\parallel} \left[\Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_2 + \lambda_1) - \Theta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}) \right] \times \\ &\quad \times \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma'-\sigma)}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_2 + \lambda_1 \right] \\ &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int d^2k_{\parallel} \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma'-\sigma)}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_2 + \lambda_1 \right] \\ &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_3}^{k_4} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\frac{\hbar^2(\mathbf{k}_{\parallel}+\mathbf{q}_{\parallel})^2}{2m^*} + \ell'^2\mathcal{E}_o - \frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \ell^2\mathcal{E}_o - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma'-\sigma)}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_2 + \lambda_1 \right] \\ &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_3}^{k_4} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\frac{\hbar^2\mathbf{k}_{\parallel}\cdot\mathbf{q}_{\parallel}}{m^*} + \frac{\hbar^2\mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2\mathcal{E}_o - \ell^2\mathcal{E}_o - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma'-\sigma)}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_2 + \lambda_1 \right] \\ &= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_3}^{k_4} dk_{\parallel} k_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \\ &\quad \times \delta \left[\frac{\hbar^2k_{\parallel}q_{\parallel}\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}})}{m^*} + \frac{\hbar^2\mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2\mathcal{E}_o - \ell^2\mathcal{E}_o - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma'-\sigma)}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_2 + \lambda_1 \right] \\ &= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2q_{\parallel}} \int_{k_3}^{k_4} \frac{dk_{\parallel}k_{\parallel}}{k_{\parallel}} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \delta \left[\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) + \frac{m^*}{\hbar^2k_{\parallel}q_{\parallel}}\tilde{\Omega} \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2(\ell, \ell') &= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \int_{k_3}^{k_4} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{j=1}^2 \frac{\delta(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} - \varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)})}{|\text{sen}(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)})|} \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \int_{k_3}^{k_4} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right) \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \tilde{\Omega}^2}} \sum_{j=1}^2 \delta(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} - \varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) \\
&= \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_3}^{k_4} \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \tilde{\Omega}^2}} dk_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} \sum_{j=1}^2 \delta(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}} - \varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) \\
&= 2 \frac{A}{(2\pi)^2} \int_{k_3}^{k_4} \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \tilde{\Omega}^2}} dk_{\parallel} \\
&= \frac{A}{2\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right)^2 \left\{ \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_4^2 - \tilde{\Omega}^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_3^2 - \tilde{\Omega}^2 \right]^{1/2} \right\} \\
&= \frac{A}{2\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right)^2 \mathcal{K}_2(\ell, \ell'), \tag{5.52}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\tilde{\Omega} \equiv \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar \omega_s - \hbar \omega_2 + \lambda_1 \right) \tag{5.53}$$

e

$$\mathcal{K}_2(\ell, \ell') = \left\{ \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_4^2 - \tilde{\Omega}^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_3^2 - \tilde{\Omega}^2 \right]^{1/2} \right\}. \tag{5.54}$$

Na resolução de (5.52), utilizamos

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \ell'} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} + \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar \omega_s + \hbar \omega_2 - \lambda_1 \tag{5.55}$$

devido ao argumento da função $\delta(\dots)$. Além disso, fizemos uso da propriedade $\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$, $g(x_i) = 0$ e $g'(x) = dg/dx$, com $g(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) = \cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) + \left(\frac{m^*}{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}} \right) \tilde{\Omega}$ e $g'(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) = -\text{sen}(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}})$

e assim $\cos(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) = -\left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right) \frac{\tilde{\Omega}}{k_{\parallel}}$ e então $g'(\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)}) = -\left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}} \right) \frac{1}{k_{\parallel}} \sqrt{(\hbar^2 q_{\parallel}/m^*)^2 k_{\parallel}^2 - \tilde{\Omega}^2}$. Assim, a integral em $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ foi resolvida, admitindo duas raízes simétricas $\varphi_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{(j)} = \pm \tilde{\varphi}$ em relação à direção definida por \mathbf{k}_{\parallel} . Os limites de integração k_3 e k_4 são obtidos das condições de integrabilidade de $\mathcal{I}_2(\ell, \ell')$.

1ª Condição de Integrabilidade A partir da equação (5.52), a integral será não nula somente se o argumento da função δ estiver contida no intervalo de integração, e assim temos que

$$\frac{\hbar^2 k_{\parallel} q_{\parallel}}{m^*} > \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel}}{m^*} + \frac{\hbar^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar \omega_s - \hbar \omega_2 + \lambda_1. \quad (5.56)$$

2ª Condição de Integrabilidade A partir da desigualdade (5.50) e da relação (5.55), obtemos

$$\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s < \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} < \mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \hbar \omega_2 + \lambda_1$$

$$\left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s \right) \right]^{1/2} < k_{\parallel} < \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \hbar \omega_2 + \lambda_1 \right) \right]^{1/2}. \quad (5.57)$$

Então, os limites de integração em k_{\parallel} estão entre k_3 e k_4 , sendo

$$k_3 = \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s \right) \right]^{1/2} \quad (5.58)$$

e

$$k_4 = \left[\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \hbar \omega_2 + \lambda_1 \right) \right]^{1/2}. \quad (5.59)$$

Finalmente, multiplicando (5.56) por $\frac{2m^*}{\hbar^2}$,

$$2k_{\parallel} q_{\parallel} > 2\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{q}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}^2 + \underbrace{\frac{2m^*}{\hbar^2} \left(\ell'^2 \mathcal{E}_0 - \ell^2 \mathcal{E}_0 - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)}{2} \hbar \omega_s - \hbar \omega_2 + \lambda_1 \right)}_{\tilde{\Lambda}}$$

$$q_{\parallel}^2 + 2k_{\parallel} [\cos(\phi_{\mathbf{k}_{\parallel}}) - 1] q_{\parallel} + \tilde{\Lambda} < 0 \quad (5.60)$$

que, resolvendo para q_{\parallel} e desprezando $\tilde{\Lambda}$, torna-se

$$0 < q_{\parallel} < 2k_{\parallel}. \quad (5.61)$$

Além disso, podemos utilizar $q_{\parallel} < 2k_{\parallel}$ juntamente com o valor mínimo de k_{\parallel} para obtermos o limite superior de q_{\parallel} , a menos do termo desprezado em (5.61). Assim, com $q_{\parallel} < 2k_3$, temos

$$q_{\parallel} < \sqrt{\frac{8m^*}{\hbar^2} (\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_0 + \sigma \hbar \omega_s / 2)}. \quad (5.62)$$

Para a realização dos cálculos, adotamos metade deste valor, ou seja

$$q_{\parallel} \simeq \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2}(\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \sigma\hbar\omega_s/2)} \quad (5.63)$$

como valor limite (ou máximo) para q_{\parallel} .

Voltando à equação (5.45) para $\gamma_{q_{\parallel}}$, e substituindo as relações para $\mathcal{I}_2(\ell, \ell')$ da equação (5.52), com $C = \left(\frac{S}{2N_c}\right)^{1/2}(N_o\beta x)$, chegamos a

$$\begin{aligned} \gamma_{q_{\parallel}} &= \frac{\pi}{\hbar} |C|^2 \left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^2 \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{I}_2(\ell, \ell') \\ &= \frac{\pi}{\hbar} \left(\frac{S}{2N_c}\right) (N_o\beta x)^2 \left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^2 \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \frac{A}{2\pi^2} \left(\frac{m^*}{\hbar^2 q_{\parallel}}\right)^2 \mathcal{K}_2(\ell, \ell') \\ &= \frac{(N_o\beta x)^2 S m^{*2}}{4\pi\hbar^5 L_z (N_c/V) q_{\parallel}^2} \left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^2 \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{K}_2(\ell, \ell') \end{aligned} \quad (5.64)$$

onde multiplicamos e dividimos por L_z e colocamos $V = AL_z$. Substituindo $\lambda_2 = \frac{\hbar|e|q_{\parallel}E_{02}}{m^*\omega_2}$, onde consideramos $\mathbf{q}_{\parallel} \parallel \mathbf{E}_{02}$, temos

$$\gamma_{q_{\parallel}} = \frac{(N_o\beta x)^2 S e^2 E_{02}^2}{16\pi\hbar^5 L_z (N_c/V) \omega_2^4} \sum_{\ell, \ell'} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \mathcal{K}_2(\ell, \ell'). \quad (5.65)$$

A condição de amplificação é satisfeita se $\gamma_{q_{\parallel}} > 0$ em (5.65), ou seja, para $\mathcal{K}_2(\ell, \ell') > 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\ell, \ell') &= \left\{ \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_4^2 - \tilde{\Omega}^2 \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{\hbar^2 q_{\parallel}}{m^*} \right)^2 k_3^2 - \tilde{\Omega}^2 \right]^{1/2} \right\} > 0 \implies k_4^2 > k_3^2 \implies \\ \implies \frac{2m^*}{\hbar^2} (\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \hbar\omega_2 + \lambda_1) &> \frac{2m^*}{\hbar^2} (\mathcal{E}_F - \ell^2\mathcal{E}_0 + \frac{\sigma}{2}\hbar\omega_s) \implies \\ \lambda_1 &> \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \hbar\omega_2. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Juntando a condição de amplificação (5.66) com a condição $\lambda_1 > \mathcal{E}_F$, necessária para que possamos negligenciar processos de emissão na frequência do campo *laser* forte, temos

$$\lambda_1 > \max\{\mathcal{E}_F, \hbar\omega_{\mathbf{q}} + \hbar\omega_2\}. \quad (5.67)$$

A partir desta condição, achamos a intensidade do campo elétrico limite para o qual inicia

a amplificação da população de mágnons. Substituindo λ_1 na condição (5.67), admitindo também que $\mathbf{q}_{\parallel} \parallel \mathbf{E}_{01}$, temos

$$E_{01} > \left(\frac{m^* \omega_1}{\hbar |e| q_{\parallel}} \right) \max\{\mathcal{E}_F, \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \hbar \omega_2\}, \quad (5.68)$$

e portanto o campo crítico é dado por

$$E_{01}^c = \left(\frac{m^* \omega_1}{\hbar |e| q_{\parallel}} \right) \max\{\mathcal{E}_F, \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \hbar \omega_2\}. \quad (5.69)$$

Analise os dois casos possíveis. Se $\max\{\mathcal{E}_F, \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \hbar \omega_2\} = \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \hbar \omega_2$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 > \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \hbar \omega_2 &\longrightarrow \frac{\hbar |e| q_{\parallel} E_{01}}{m^* \omega_1} > \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \hbar \omega_2 \\ \frac{|e| E_{01}}{m^* \omega_1} &> \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q_{\parallel}} + \frac{\omega_2}{q_{\parallel}} \\ v_{d_1} &> v_{\text{fase}} + \frac{\omega_2}{q_{\parallel}}, \end{aligned} \quad (5.70)$$

onde $v_{d_1} \equiv \frac{|e| E_{01}}{m^* \omega_1}$ é a velocidade de arrasto imposta aos portadores pelo campo *laser* intenso (*laser* 1) e $v_{\text{fase}} \equiv \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q_{\parallel}}$ é a velocidade de fase das ondas de *spin*. Se $\max\{\mathcal{E}_F, \hbar \omega_{\mathbf{q}} + \hbar \omega_2\} = \mathcal{E}_F$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 > \mathcal{E}_F &\longrightarrow \frac{\hbar |e| q_{\parallel} E_{01}}{m^* \omega_1} > \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} + \ell_F^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\sigma_F}{2} \hbar \omega_s \\ \frac{\hbar |e| q_{\parallel} E_{01}}{m^* \omega_1} &> \frac{\hbar v_F k_F}{2} + \ell_F^2 \mathcal{E}_0 - \frac{\sigma_F}{2} \hbar \omega_s \\ \frac{|e| E_{01}}{m^* \omega_1} &> \frac{v_F k_F}{2q_{\parallel}} + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}} \\ v_{d_1} &> \left(\frac{k_F}{2q_{\parallel}} \right) v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}}, \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde $\kappa_F \equiv \{k_F, \ell_F, \sigma_F\}$ são os números quânticos associados à energia de Fermi, \mathcal{E}_F , e v_F é a velocidade de Fermi.

5.6 Mudança na Magnetização

A mudança na magnetização devido à presença dos mágnons gerados indiretamente pelos campos *laser's* forte (1) e fraco (2) é, a partir da equação (3.1), dado por

$$\begin{aligned}
\Delta M &= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \sum_{\mathbf{q}} \bar{N}_{\mathbf{q}} \\
&= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m) \\
&= -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{q_z^{\min}}^{q_z^{\max}} dq_z \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m)
\end{aligned} \tag{5.72}$$

com

$$q_z^{\min} = (\ell' - \ell) \frac{\pi}{L_z} \quad \text{e} \quad q_z^{\max} = (\ell' + \ell) \frac{\pi}{L_z}. \tag{5.73}$$

5.6.1 Transições Intra Sub-Bandas ($\ell' = \ell$)

Para transições intra sub-bandas, temos $\ell' = \ell$. Assim, a função $\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')$ torna-se

$$\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell) = \frac{\text{sen}(q_z L_z / 2)}{(q_z L_z / 2)} \left[\frac{4\ell^2 P}{4\ell^2 - (q_z L_z / \pi)^2} \right]. \tag{5.74}$$

Pela equação (5.73), temos que os limites de q_z são

$$0 < q_z < \frac{2\pi\ell}{L_z}, \tag{5.75}$$

com os valores extremos excluídos, pois levam a singularidades em $\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell)$. Substituindo em (5.72), ficamos com

$$\Delta M = -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V \mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)} \ell}{2\pi L_z} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m), \tag{5.76}$$

onde $q_{\parallel}^{\min} \simeq 0$ e $q_{\parallel}^{\max} \simeq \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} (\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_o + \frac{\sigma}{2} \hbar \omega_s)}$.

Considerando apenas transições na primeira sub-banda do poço, fazemos $\ell = 1$ nas relações (5.74), (5.75) e (5.76). A partir de (5.65), o coeficiente de amplificação de mágnons para a transição intra sub-banda com $\ell = 1$ é escrito como

$$\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} = \frac{(N_o \beta x)^2 S e^2 E_{02}^2}{16\pi \hbar^5 L_z (N_c / V) \omega_2^4} |\mathcal{F}(q_z, 1, 1)|^2 \mathcal{K}_2(1, 1). \tag{5.77}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para efetuar o cálculo do coeficiente de amplificação de mágnons e da desmagnetização do poço quântico semiconductor de (Ga,Mn)As devido à interação dos dois campos *laser's* com o gás de buracos quase-bidimensional, adotamos os mesmos valores para os parâmetros dados na TABELA 4.1 (página 58), denotando agora a frequência do campo *laser* intenso por $\omega_1 = \omega = 1,778 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$. Assim, poderemos comparar o efeito da inclusão de um campo *laser* fraco sobre a amplificação de mágnons e a consequente desmagnetização da amostra. Para o campo *laser* fraco, assumimos $\omega_2 = 3,5 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ e $E_{02} = 4,3 \times 10^4 \text{ V/m}$. O campo E_{02} foi mantido fixo em todos os cálculos.

Antes de prosseguirmos, uma observação deve ser feita sobre a escolha de ω_2 e E_{02} . O fator multiplicativo $\left(\frac{\lambda_2}{2\hbar\omega_2}\right)^2$ presente na equação (5.64) para $\gamma_{q\parallel}$, oriundo da aproximação (5.42), válida sob a condição de regime de campo fraco, $\lambda_2 \ll \hbar\omega_2$, faz com que tanto o coeficiente de amplificação quanto a desmagnetização tendam a zero, mesmo para campos E_{01} intensos. Isto sugere que a aproximação feita para o campo *laser* fraco possa não ser válida neste caso. Outra possibilidade seria relacionar esta diminuição do efeito do campo *laser* forte pela presença do campo *laser* fraco a algum fenômeno físico não considerado em nosso modelo. Por exemplo, o campo *laser* fraco pode estar despopulando estados que serviriam de estados iniciais do buraco para a absorção do campo forte, fazendo com que este perca eficiência. Como em nosso modelo não levamos em consideração, por exemplo, bandas de buracos leves e *split-off*, banda de condução e regras de seleção ótica, não podemos fornecer aqui uma conclusão satisfatória sobre este aspecto. Desta forma, com o intuito de obtermos uma primeira aproximação para a ação de dois campos interagindo com o gás de buracos quase-bidimensional, “relaxamos” a condição do regime de campo fraco para $\lambda_2 \lesssim \hbar\omega_2$.

Alguns valores calculados de $\gamma_{q\parallel}$ para transições intra sub-bandas estão dispostos nas TABELAS 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, para poços quânticos de larguras iguais a 10, 15, 20 e 25 nm, respectivamente. O campo crítico E_{01}^c não se alterou em relação aos cálculos do capítulo anterior, dado que a relação $\max\{\mathcal{E}_F, \hbar\omega_q + \hbar\omega_2\} = \mathcal{E}_F$ da equação (5.69) é satisfeita para todos os valores de L_z analisados. Pela observação destes resultados, verificamos que a ordem de grandeza do coeficiente de amplificação de mágnons para transições intra sub-bandas sob ação dos dois campos é da ordem de $10^{10} - 10^{11} \text{ s}^{-1}$. Isto corresponde a uma diminuição de uma ordem de grandeza no coeficiente de amplificação quando comparado à transições intra sub-bandas sob ação somente do campo forte (veja as TABELAS 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, páginas 60–62).

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,2632	1,1496
7,9267	1,2632	1,4527	1,3329
		1,6422	1,5661
		1,8046	0,7891
5,5487	1,8046	2,0753	0,9009
		2,3460	1,0634
		3,1580	0,4682
3,1707	3,1580	3,6317	0,5043
		4,1055	0,6180

TABELA 5.1: Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 130 meV , $0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,1878	0,9905
9,7081	1,1878	1,3660	1,1724
		1,5442	1,4064
		1,6969	0,6654
6,7957	1,6969	1,9514	0,7898
		2,2059	0,9688
		2,9695	0,3710
3,8832	2,9695	3,4150	0,4516
		3,8604	0,6627

TABELA 5.2: Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 150 meV , $0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,1827	0,9312
1,1210	1,1827	1,3601	1,1186
		1,5375	1,3720

continua na próxima página

continuação

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,6896	0,6235
0,7847	1,6896	1,9430	0,7597
		2,1965	0,9733
0,4484	2,9568	2,9568	0,3519
		3,4003	0,4696

TABELA 5.3: Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 173 meV , $1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,2005	0,9045
1,2533	1,2005	1,3805	1,1001
		1,5606	1,3840
		1,7150	0,6076
0,8773	1,7150	1,9722	0,7571
		2,2295	1,0336
0,5640	2,6677	2,6677	0,3947
		3,0679	0,5535

TABELA 5.4: Intra Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 196 meV , $1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

Os valores da mudança na magnetização intra sub-banda, para poços de larguras iguais a 10, 15, 20, 25, 30 e 33 nm, na presença dos dois campos *laser's*, estão dispostos na TABELA 5.5. Podemos verificar que: (i) para $E_{01} = 1,0 - 6,0 \times 10^7 \text{ V/m}$, a desmagnetização é praticamente independente de L_z (em torno de 0,35 – 1,50%, respectivamente); e (ii) para um dado valor de E_{01} , a desmagnetização é tanto maior quanto menor a largura do poço (com exceção de alguns pontos para E_{01} entre $4,0 \times 10^7 \text{ V/m}$ e $7,0 \times 10^7 \text{ V/m}$).

Comparando estes valores com os obtidos para um só campo *laser* forte (caso intra sub-banda, TABELA 4.9), verificamos que: (i) somente para $E_{01} = 1,0 \times 10^7 \text{ V/m}$, a desmagnetização

E_{01} (10^7 V/m)	E_{01}/E_D	$\frac{ \Delta M }{(\mu/V)}$ (%)					
		$L_z = 10$ nm	$L_z = 15$ nm	$L_z = 20$ nm	$L_z = 25$ nm	$L_z = 30$ nm	$L_z = 33$ nm
1,0	0,05	0,3713	0,3570	0,3514	0,3482	0,3459	0,3448
2,0	0,10	0,4810	0,4483	0,4351	0,4273	0,4217	0,4190
3,0	0,15	0,6160	0,5664	0,5461	0,5341	0,5256	0,5215
4,0	0,20	0,7917	0,7290	0,7053	0,6935	0,6886	0,6895
5,0	0,25	1,0360	0,9755	0,9753	1,0342	1,0416	1,0318
6,0	0,30	1,4086	1,4567	1,6183	1,5722	1,4928	1,4448
7,0	0,35	2,0887	2,5769	2,4095	2,1936	2,0100	1,9166
8,0	0,40	4,0872	3,8432	3,2985	2,8887	2,5862	2,4411
9,0	0,45	6,6382	5,2440	4,2814	3,6546	3,2189	3,0159
10,0	0,50	9,4129	6,7893	5,3634	4,4941	3,9095	3,6418
11,0	0,55	12,4680	8,5015	6,5562	5,4143	4,6624	4,3224
12,0	0,60	15,8817	10,4110	7,8761	6,4250	5,4844	5,0629
13,0	0,65	19,7438	12,5532	9,3422	7,5383	6,3835	5,8701
14,0	0,70	24,1514	14,9667	10,9756	8,7676	7,3692	6,7517
15,0	0,75	29,2074	17,6925	12,7986	10,1271	8,4512	7,7159
16,0	0,80	35,0211	20,7743	14,8350	11,6319	9,6403	8,7714
17,0	0,85	41,7100	24,2586	17,1098	13,2980	10,9473	9,9275
18,0	0,90	49,4010	28,1951	19,6498	15,1420	12,3840	11,1937
19,0	0,95	58,2330	32,6373	22,4832	17,1815	13,9625	12,5801
20,0	1,00	68,3578	37,6432	25,6401	19,4352	15,6954	14,0972

TABELA 5.5: Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_{01} , com $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm para transições intra sub-banda, na presença de dois campos *laser's*.

é maior do que a desmagnetização obtida para um campo *laser* forte, considerando todos os poços; (ii) para um dado L_z , a desmagnetização varia de forma mais lenta com o aumento da amplitude do campo forte (variação de $|\Delta M|/(\mu/V)$ ao longo de uma das colunas da TABELA 5.5); e (iii) para um dado E_{01} , a desmagnetização varia de forma mais lenta com o aumento de L_z (variação de $|\Delta M|/(\mu/V)$ ao longo de uma das linhas da TABELA 5.5).

Na FIGURA 5.1 estão representadas as curvas de desmagnetização para os poços de largura 10, 15, 20 e 25 nm. As curvas de desmagnetização referentes aos poços de 30 e 33 nm não foram representadas neste gráfico, pois atingem a completa desmagnetização para valores do campo E_{01} extremamente elevados. Note que a taxa de variação da tangente a estas curvas de desmagnetização são bem menores (em módulo) do que as inferidas a partir das correspondentes curvas obtidas no caso de um só campo aplicado (compare com o gráfico da FIGURA 4.4). Isto confirma que a redução na magnetização da amostra ocorre de forma mais lenta no caso em que aplicamos dois campos *laser's*, um no regime intenso e outro no regime fraco, em relação à redução da magnetização no caso em que somente um campo *laser* intenso atua.

Finalmente, observando estas curvas de desmagnetização, verificamos que a desmagnetização começa a se tornar apreciável para campos em torno de $E_{01} = 1,0 \times 10^8$ V/m para todos os poços. Para estes mesmos valores de L_z , no caso de um só campo *laser* (FIGURA 4.4), a

desmagnetização começa a se tornar apreciável em torno de $0,5 \times 10^8$ V/m para $L_z = 10$ nm, de $1,5 \times 10^8$ V/m para $L_z = 15$ nm e de $2,0 \times 10^8$ V/m para $L_z = 20$ nm.

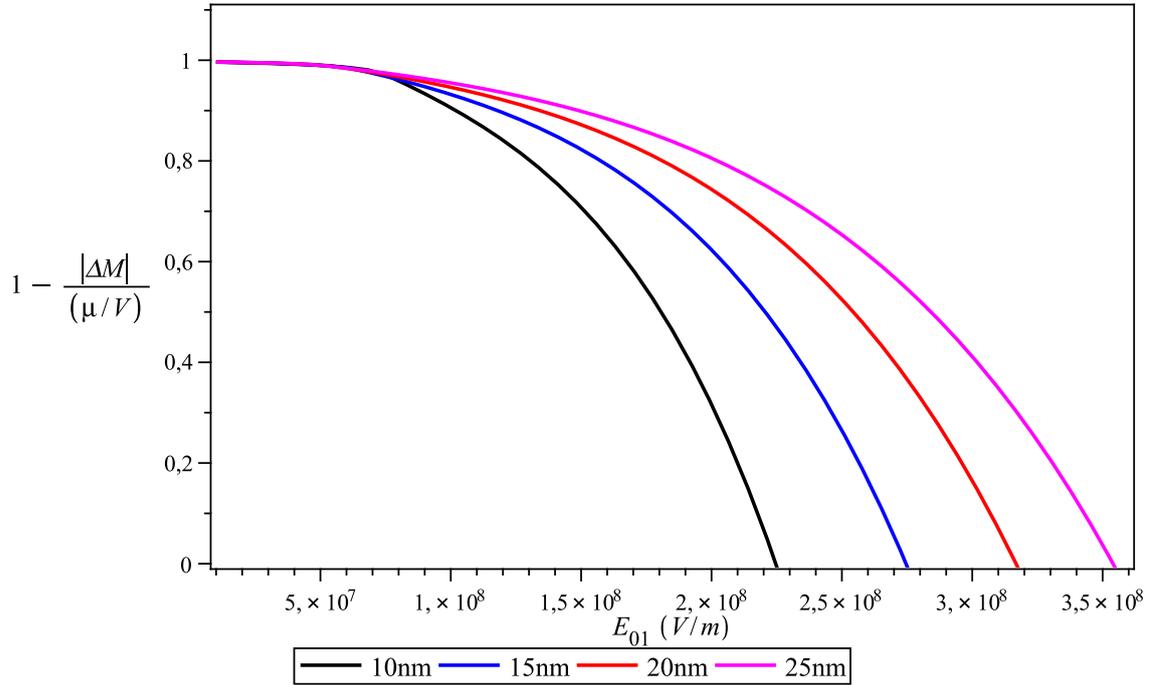


FIGURA 5.1: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_{01} para $L_z = 10, 15, 20$ e 25 nm, para transições intra sub-bandas, com dois campos *laser's* aplicados, um no regime de campo intenso e outro no de campo fraco.

5.6.2 Transições Inter Sub-Bandas ($\ell' \neq \ell$)

Para transições inter sub-bandas, temos $\ell' \neq \ell$. Se considerarmos somente transições entre níveis vizinhos para os quais $\ell' = \ell + 1$, então os limites de integração de q_z , dados por (5.73), são:

$$\pi/L_z \leq q_z \leq (2\ell + 1)\pi/L_z. \quad (5.78)$$

Para $\ell' = \ell + 1$, temos que se ℓ é par, $\ell + 1$ será ímpar e vice-versa. Assim, pela equação (3.21), escrevemos

$$\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell + 1) = \frac{\cos(q_z L_z / 2)}{(q_z L_z / 2)} \frac{4\ell(\ell + 1)(q_z L_z / \pi)^2 P}{4\ell^2(\ell + 1)^2 - [(\ell + 1)^2 + \ell^2 - (q_z L_z / \pi)^2]^2}. \quad (5.79)$$

Limitando a transições da primeira para a segunda sub-banda, ou seja, fazendo $\ell = 1$ e $\ell' = 2$, verifica-se que (5.79) é indeterminado nos limites de (5.78), e portanto, restringimos q_z

ao intervalo aberto

$$\pi/L_z < q_z < (2\ell + 1)\pi/L_z$$

$$\pi/L_z < q_z < 3\pi/L_z. \quad (5.80)$$

Utilizando a equação (5.65), podemos escrever o coeficiente de amplificação $\bar{\gamma}_{q_{\parallel}}$, como

$$\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} = \frac{(N_o\beta x)^2 S e^2 E_{02}^2}{16\pi\hbar^5 L_z (N_c/V)\omega_2^4} |\mathcal{F}(q_z, 1, 2)|^2 \mathcal{K}_2(1, 2). \quad (5.81)$$

Finalmente, voltando na equação (5.72), temos que a desmagnetização para transições entre a primeira e a segunda sub-banda é dada por

$$\Delta M = -\left(\frac{\mu}{V}\right) \frac{V\mathcal{N}_{\mathbf{q}}^{(0)}}{2\pi L_z} \int_{q_{\parallel}^{\min}}^{q_{\parallel}^{\max}} dq_{\parallel} q_{\parallel} \exp(\bar{\gamma}_{q_{\parallel}} \tau_m), \quad (5.82)$$

com $q_{\parallel}^{\min} \approx 0$ e $q_{\parallel}^{\max} \approx \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} (\mathcal{E}_F - \ell^2 \mathcal{E}_o + \sigma \hbar \omega_s / 2)}$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Utilizando os mesmos parâmetros da seção anterior, realizamos o cálculo do coeficiente de amplificação da população de mágnons $\gamma_{q_{\parallel}}$ e da desmagnetização $|\Delta M|/(\mu/V)$ para um poço quântico de (Ga,Mn)As sob irradiação de dois campos *laser's*, um dos quais no regime de campo forte e o outro no regime de campo fraco, considerando transições inter sub-bandas entre a primeira e a segunda sub-banda do poço, $\ell = 1$ e $\ell' = 2$.

Alguns dos resultados obtidos para o coeficiente de amplificação $\gamma_{q_{\parallel}}$ em função do vetor de onda dos mágnons q_{\parallel} e da componente elétrica do campo *laser* intenso E_{01} , estão dispostos nas TABELAS 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9, para $L_z = 10, 15, 20$ e 25 nm, respectivamente. Notamos que o coeficiente $\gamma_{q_{\parallel}}$ reduz aproximadamente de uma ordem de grandeza em relação ao mesmo cálculo realizado com um só campo aplicado (veja as TABELAS 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16).

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,2632	0,7763
7,9267	1,2632	1,4527	0,9350
		1,6422	1,1871

continua na próxima página

continuação

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,8046	0,5231
5,5487	1,8046	2,0753	0,6357
		2,3460	0,8624
3,1707	3,1580	3,1580	0,2922
		3,6317	0,3774
		4,1055	0,5414

TABELA 5.6: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 10 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 130 meV , $0,7927 \text{ nm}^{-1}$ e $5,0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^8 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,1878	0,6503
9,7081	1,1878	1,3660	0,7792
		1,5442	0,9571
6,7957	1,6969	1,6969	0,4362
		1,9514	0,5280
		2,2059	0,6755
3,8832	2,9695	2,9695	0,2438
		3,4150	0,3150
		3,8604	0,4906

TABELA 5.7: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 15 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 150 meV , $0,9708 \text{ nm}^{-1}$ e $7,5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
		1,1827	0,6050
1,1210	1,1827	1,3601	0,7316
		1,5375	0,9107
		1,6896	0,4056

continua na próxima página

continuação

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
0,7847	1,6896	1,9430	0,4996
		2,1965	0,6605
0,4484	2,9568	2,9568	0,2313
		3,4003	0,3240

TABELA 5.8: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação dos campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 20 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 173 meV , $1,1210 \text{ nm}^{-1}$ e $1,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

q_{\parallel} (10^9 m^{-1})	E_{01}^c (10^8 V/m)	E_{01} (10^8 V/m)	$\gamma_{q_{\parallel}}$ (10^{11} s^{-1})
1,2533	1,2005	1,2005	0,5846
		1,3805	0,7141
		1,5606	0,9097
0,8773	1,7150	1,7150	0,3933
		1,9722	0,4938
		2,2295	0,7033
0,5640	2,6677	2,6677	0,2575
		3,0679	0,3744

TABELA 5.9: Inter Sub-Bandas: valores de $\gamma_{q_{\parallel}}$ para interação do campos *laser's* intenso e fraco com heteroestrutura DMS, na aproximação do gás de buracos degenerado. Poço de largura $L_z = 25 \text{ nm}$. Os valores calculados de \mathcal{E}_F , k_F e $n_h^{(2D)}$ foram 196 meV , $1,2533 \text{ nm}^{-1}$ e $1,25 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}$, respectivamente.

A desmagnetização calculada para transições inter sub-bandas, na presença de dois campos *laser's*, está apresentada na TABELA 5.10. As curvas de desmagnetização estão representadas no gráfico da FIGURA 5.2. Em relação ao mesmo cálculo efetuado com um só campo *laser* (veja TABELA 4.19), verificamos que a magnetização varia de forma mais suave com o aumento da intensidade do campo, o que pode também ser verificado pelas curvas de desmagnetização.

Em relação ao caso de transições intra sub-bandas com dois campos aplicados, verificamos que as variações na magnetização são muito menores no presente caso. Isto ocorre porque é necessário fornecer mais energia para o buraco realizar uma transição inter sub-banda

E_{01} (10^7 V/m)	E_{01}/E_D	$\frac{ \Delta M }{(\mu/V)}(\%)$					
		$L_z = 10$ nm	$L_z = 15$ nm	$L_z = 20$ nm	$L_z = 25$ nm	$L_z = 30$ nm	$L_z = 33$ nm
1,0	0,05	0,3387	0,3317	0,3283	0,3263	0,3249	0,3242
2,0	0,10	0,3988	0,3827	0,3751	0,3705	0,3672	0,3656
3,0	0,15	0,4674	0,4425	0,4310	0,4240	0,4191	0,4168
4,0	0,20	0,5506	0,5169	0,5024	0,4947	0,4905	0,4899
5,0	0,25	0,6597	0,6186	0,6103	0,6170	0,6123	0,6073
6,0	0,30	0,8252	0,8091	0,7970	0,7737	0,7490	0,7350
7,0	0,35	1,1707	1,0638	0,9952	0,9392	0,8932	0,8694
8,0	0,40	1,5544	1,3270	1,2002	1,1105	1,0423	1,0084
9,0	0,45	1,9437	1,5959	1,4102	1,2860	1,1951	1,1509
10,0	0,50	2,3398	1,8704	1,6247	1,4652	1,3509	1,2961
11,0	0,55	2,7466	2,1516	1,8441	1,6482	1,5099	1,4442
12,0	0,60	3,1688	2,4418	2,0696	1,8358	1,6724	1,5953
13,0	0,65	3,6115	2,7431	2,3026	2,0287	1,8389	1,7500
14,0	0,70	4,0794	3,0580	2,5444	2,2280	2,0104	1,9089
15,0	0,75	4,5769	3,3888	2,7967	2,4348	2,1875	2,0726
16,0	0,80	5,1080	3,7376	3,0607	2,6500	2,3709	2,2418
17,0	0,85	5,6767	4,1065	3,3377	2,8745	2,5615	2,4172
18,0	0,90	6,2866	4,4974	3,6291	3,1094	2,7600	2,5994
19,0	0,95	6,9412	4,9121	3,9359	3,3553	2,9669	2,7890
20,0	1,00	7,6440	5,3523	4,2593	3,6131	3,1829	2,9864

TABELA 5.10: Desmagnetização como função da intensidade do campo *laser* E_{01} , com $L_z = 10, 15, 20, 25, 30$ e 33 nm para transições inter sub-banda, na presença de dois campos *laser's*.

$|\mathbf{k}_{\parallel}, \ell = 1, \sigma = -1\rangle \longrightarrow |\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell' = 2, \sigma' = +1\rangle$ do que para realizar uma transição intra sub-banda $|\mathbf{k}_{\parallel}, \ell = 1, \sigma = -1\rangle \longrightarrow |\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell' = 1, \sigma' = +1\rangle$, e assim menos energia está disponível para a criação de mágnons, o que faz com que obtenhamos desmagnetizações menores no caso inter sub-banda em relação ao caso intra sub-banda, para mesmos valores de E_{01} e L_z .

COMPARAÇÃO DO COEFICIENTE DE AMPLIFICAÇÃO DE MÁGNONS E DA DESMAGNETIZAÇÃO PARA TRANSIÇÕES INTRA E INTER SUB-BANDAS Comparado aos resultados obtidos para transição intra sub-banda com dois campos aplicados (seção 5.6.1), verificamos uma redução no valor do coeficiente de amplificação da população de mágnons. O gráfico da FIGURA 5.3 compara a desmagnetização obtida considerando transição intra sub-bandas (linhas tracejadas) e inter sub-bandas (linhas contínuas) separadamente, na presença de dois campos *laser's*. Novamente, verificamos que, para um dado valor da largura do poço e um dado valor da intensidade do campo elétrico, o efeito principal é a diminuição da desmagnetização inter sub-bandas em relação à desmagnetização intra sub-bandas.

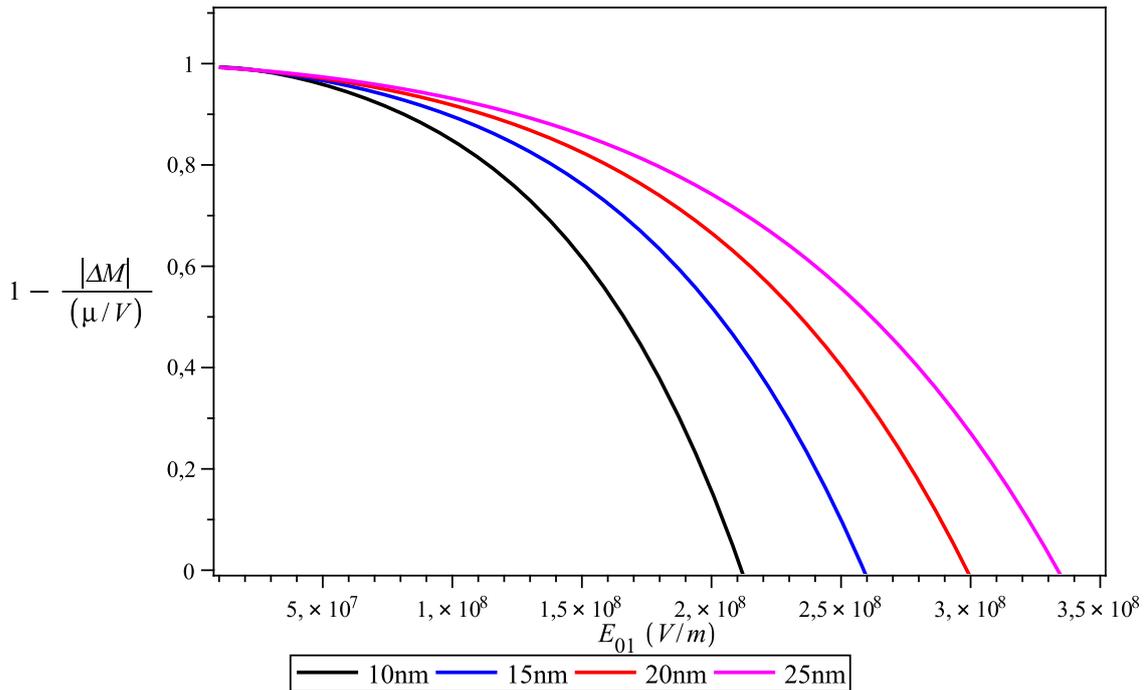


FIGURA 5.2: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_{01} para $L_z = 10, 15, 20$ e 25 nm, para transições inter-sub-bandas, na presença de dois campos *laser's*, um no regime de campo intenso e outro no de campo fraco.

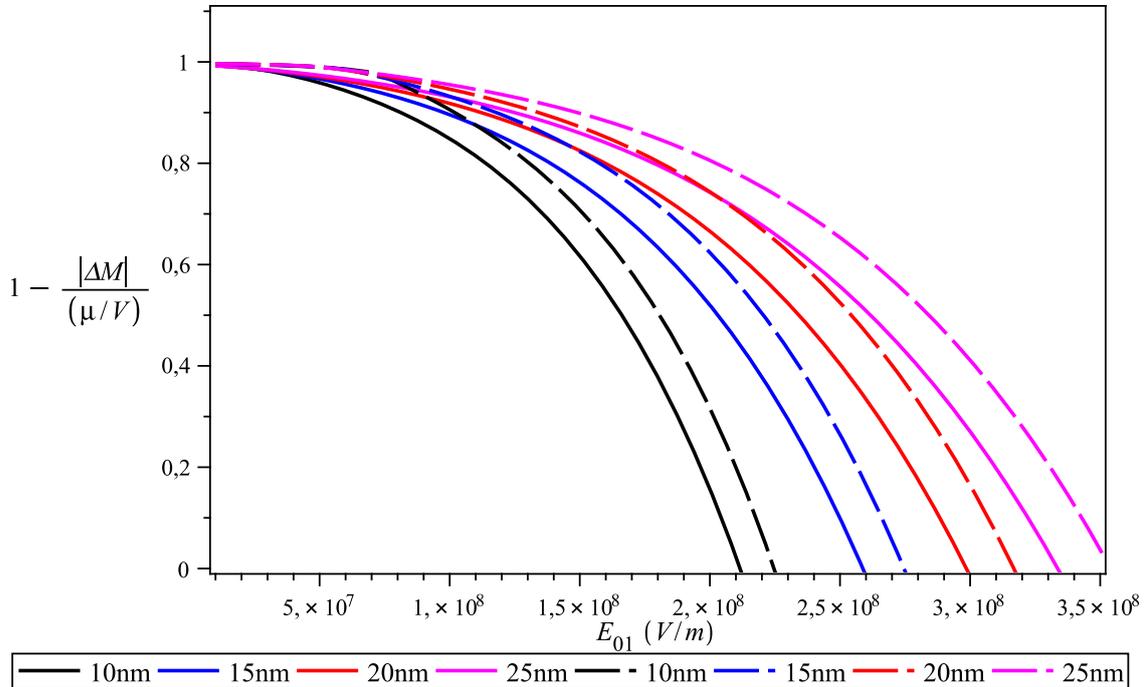


FIGURA 5.3: Gráfico de $1 - \frac{|\Delta M|}{(\mu/V)}$ contra E_{01} para $L_z = 10, 15, 20$ e 25 nm, comparando o efeito de desmagnetização considerando somente transições intra sub-banda (linhas tracejadas) com o efeito de desmagnetização considerando somente transições inter sub-banda (linhas contínuas). Poço interagindo com dois campos *laser's*, um no regime intenso e outro no regime fraco.

6 Conclusão

Neste trabalho, realizamos o estudo teórico da amplificação de mágnons e da desmagnetização de poços quânticos de (Ga,Mn)As devido a eventos de espalhamento buraco–mágnon, induzidos pela interação de um gás de buracos quase–bidimensional com campos *laser's*. As conclusões obtidas nos capítulos 4 e 5 são sumarizadas a seguir.

6.1 Campo Forte

Para transições *intra sub–bandas* no regime de *campo forte*¹, no que se refere ao coeficiente de amplificação de mágnons, verificamos que:

- a intensidade limite do campo *laser* em que o crescimento da população de mágnons se torna apreciável é aquele para o qual a relação $v_d \gtrsim (\frac{k_F}{2q_{\parallel}})v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}}$ é satisfeita, ou seja, para $E_0 > E_0^c = \frac{m^* \omega}{|e|} \left[(\frac{k_F}{2q_{\parallel}})v_F + \frac{\ell_F^2 \mathcal{E}_0}{\hbar q_{\parallel}} - \frac{\sigma_F \omega_s}{2q_{\parallel}} \right]$;
- o campo crítico E_0^c é da ordem de 10^8 V/m, para todos os poços analisados;
- a ordem de grandeza do coeficiente de amplificação $\gamma_{q_{\parallel}}$ está entre 10^{11} s⁻¹ e 10^{12} s⁻¹;
- para vetores de onda menores do que o limite superior $q_{\parallel}^{\text{máx}}$ [equação (4.26)], o aumento da intensidade do campo *laser* leva ao aumento da população de mágnons;
- o intervalo de E_0 , no qual é possível a amplificação da população de mágnons, aumenta com a diminuição do vetor de onda a partir do limite superior $q_{\parallel}^{\text{máx}}$;
- a partir do campo crítico, a amplificação é acentuada (observada pelo aumento na taxa de variação de $\gamma_{q_{\parallel}}$ em relação a E_0 ou em relação a E_0/E_0^c), e este aumento da amplificação é tanto maior quanto menor q_{\parallel} ;

¹Resultados numéricos do coeficiente de amplificação $\gamma_{q_{\parallel}}$ para transições *intra sub–bandas* ($\ell = \ell' = 1$) no regime de campo forte, foram apresentados nas TABELAS 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8, e representado graficamente para um caso particular nas FIGURAS 4.2 e 4.3.

- o campo crítico separa as curvas de $\gamma_{q_{\parallel}}$ contra E_0/E_0^c em duas regiões: $E_0 < E_0^c$, onde $\gamma_{q_{\parallel}}$ aumenta de forma (aproximadamente) linear com o aumento do campo e $E_0 > E_0^c$, onde $\gamma_{q_{\parallel}}$ aumenta de forma (aproximadamente) exponencial com o aumento da intensidade do campo.

Em relação à desmagnetização², concluimos que:

- a desmagnetização não depende dos valores particulares de q_{\parallel} , mais sim de todo o intervalo q_{\parallel} permitido [equação (4.45)];
- a desmagnetização depende da intensidade do campo elétrico, que define o parâmetro λ , e da largura do poço quântico, entre outros parâmetros;
- a desmagnetização se torna apreciável somente para campos acima do campo crítico mínimo, obtido com $q_{\parallel} = q_{\parallel}^{\text{máx}}$;
- a taxa de desmagnetização é fortemente dependente da largura do poço, sendo tanto maior quanto menor L_z , mantidos q_{\parallel} e E_0 fixos;
- a desmagnetização depende (aproximadamente) do inverso do quadrado de L_z , ou seja, $|\Delta M| \sim L_z^{-2}$ [equação (4.55)];
- quanto menor a largura do poço, menor é a intensidade do campo elétrico necessária para atingir um dado valor de desmagnetização.

Considerando transições *inter sub-bandas* no regime de *campo forte*³, obtivemos o mesmo comportamento geral apresentado por $\gamma_{q_{\parallel}}$ no caso de transições *intra sub-bandas*, sendo necessário destacar somente que:

- o campo crítico E_0^c manteve-se da ordem de 10^8 V/m para todos os poços quânticos;
- o coeficiente de amplificação de mágnons reduziu ligeiramente, sendo da ordem de 10^{11} s⁻¹ para todos os poços.

²Valores da desmagnetização para transições *intra sub-bandas* no regime de campo forte foram apresentados nas TABELAS 4.9 e 4.10, e curvas de desmagnetização em função de E_0 foram representadas graficamente nas FIGURAS 4.4, 4.5 e 4.6.

³Resultados de $\gamma_{q_{\parallel}}$ *inter sub-bandas* (de $\ell = 1$ para $\ell' = 2$) estão dispostos nas TABELAS 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18.

A desmagnetização obtida considerando somente transições *inter sub-bandas* no regime de *campo forte*⁴ levou ao mesmo comportamento geral, notando-se apenas uma diminuição da mesma, devido à redução observada no coeficiente de amplificação de mágnons.

Comparando os valores obtidos para o coeficiente de amplificação de mágnons nos casos de transição intra e inter sub-bandas, verificamos que, para um dado valor E_0 e de L_z , este coeficiente é sempre menor para transições inter sub-bandas. Isto se deve ao fato de ser necessário fornecer mais energia para os portadores efetuarem uma transição inter sub-banda do que para efetuar uma transição intra sub-banda, de forma que menos energia esta disponível para a geração de mágnons e, portanto, a desmagnetização obtida é menor. O gráfico da FIGURA 4.12 compara a desmagnetização obtida no caso em que consideramos somente transições intra sub-bandas ($\ell' = \ell = 1$) com o caso em que consideramos somente transições inter sub-bandas ($\ell = 1, \ell' = 2$). Pela observação deste gráfico, notamos que para atingir um mesmo valor de desmagnetização, necessitamos de um campo E_0 maior no caso inter sub-bandas.

6.2 Campo Forte e Fraco

Com o objetivo de verificar a influência de um segundo campo *laser* atuando sobre o sistema, fizemos a extensão do modelo para o caso em que dois campos *laser's* atuam simultaneamente sobre o gás de buracos quase-bidimensional, um no regime de campo forte e o outro no regime de campo fraco.

Para transições *intra sub-bandas* sob campo *forte e fraco* simultâneos⁵, verificamos que:

- o campo crítico E_{01}^c não se alterou em relação aos cálculos para um só campo, dado que a relação $\max\{\mathcal{E}_F, \hbar\omega_q + \hbar\omega_2\} = \mathcal{E}_F$ [equação (5.69)] é satisfeita para todos os valores de L_z analisados;
- a ordem de grandeza obtida para o coeficiente de amplificação de mágnons foi entre 10^{10} e 10^{11} s^{-1} .

Comparando os resultados intra sub-banda na presença de dois campos, com os resultados intra sub-banda na presença do campo forte somente, observamos que:

⁴Os valores obtidos para a desmagnetização, no caso de transições inter sub-bandas no regime de campo forte, estão dispostos nas TABELAS 4.19 e 4.20, e representadas no gráfico da FIGURA 4.11.

⁵Os resultados de $\gamma_{q\parallel}$ para transições intra sub-bandas com campos nos regimes forte e fraco simultâneos estão dispostos nas TABELAS 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. Os valores da mudança na magnetização, na presença dos dois campos *laser's*, estão dispostos na TABELA 5.5 e representados graficamente na FIGURA 5.1.

- o coeficiente de amplificação de mágnons reduz por um fator de 10, aproximadamente;
- somente para $E_{01} = 1,0 \times 10^7$ V/m, a desmagnetização é maior do que a desmagnetização obtida para um campo *laser* forte, considerando todos os poços;
- para um dado L_z , a desmagnetização varia de forma mais lenta com o aumento da amplitude do campo forte (variação de $|\Delta M|/(\mu/V)$ ao longo de uma das colunas da TABELA 5.5);
- para um dado E_{01} , a desmagnetização varia de forma mais lenta com o aumento de L_z (variação de $|\Delta M|/(\mu/V)$ ao longo de uma das linhas da TABELA 5.5).

Finalmente, comparando os resultados obtidos para transições *inter sub-bandas*⁶ com os obtidos para transições *intra sub-bandas*, ambos sob interação com os campos *forte e fraco* simultaneamente, verificamos uma redução no valor do coeficiente de amplificação da população de mágnons, levando a variações mais lentas da magnetização com o campo E_{01} , como pode ser verificado a partir do gráfico da FIGURA 5.3, que compara a desmagnetização obtida considerando transição *intra sub-bandas* e *inter sub-bandas* separadamente, na presença de dois campos *laser's*.

⁶Os resultados de $\gamma_{q\parallel}$ para transições *inter sub-bandas* com campos nos regimes forte e fraco simultâneos estão dispostos nas TABELAS 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9. A TABELA 5.10 contém os resultados para a desmagnetização, representados no gráfico da FIGURA 5.2.

APÊNDICE A – Solução da Equação de Schrödinger, Equação (3.6)

O objetivo deste apêndice é mostrar que a solução da equação de Schrödinger para um buraco confinado em um poço de potencial infinito na presença de um campo *laser* (equação (3.6)),

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[-i\hbar \nabla - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(t) \right]^2 + \hat{V}(z) - \frac{JS\sigma}{2} \right\} \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

pode ser escrita como

$$\Psi_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell \sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{AL_z}} \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \exp \left\{ i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel} - \frac{i}{\hbar} \int^t \left[\mathcal{E}_0 \ell^2 - \frac{JS\sigma}{2} + \frac{1}{2m^*} \left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right] d\tau \right\}. \quad (\text{A.2})$$

A.1 Solução da Equação de Schrödinger

Partindo da equação de Schrödinger acima, temos

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[-\hbar^2 \nabla^2 + \underbrace{\frac{i\hbar|e|\hbar}{c} \nabla \cdot \mathbf{A}(t) + \frac{i\hbar|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla}_{=0} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2(t) \right] + \hat{V}(z) - \frac{JS\sigma}{2} \right\} \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{A}(t) = 0$ pois $\mathbf{A}(t) = A_0 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cos(\omega t)$ não possui dependência espacial. Portanto,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[-\hbar^2 \nabla^2 + \frac{i\hbar|e|\hbar}{c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2(t) \right] + \hat{V}(z) - \frac{JS\sigma}{2} \right\} \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{i\hbar|e|\hbar}{2m^*c} \left(A_x(t) \frac{\partial}{\partial x} + A_y(t) \frac{\partial}{\partial y} + \underbrace{A_z(t) \frac{\partial}{\partial z}}_{=0} \right) + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) + \hat{V}(z) - \frac{JS\sigma}{2} \right\} \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} A_x(t) \frac{\partial}{\partial x} \right] + \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} A_y(t) \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z) \right] + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} \right\} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \left(A_x(t) \frac{\partial}{\partial x} + A_y(t) \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} \right] + \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z) \right] \right\} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t).$$

Agora, como $\hat{\mathbf{e}}_\parallel \in xOy$, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, 0)$, e então $\mathbf{A}(t) \cdot \nabla = A_x(t) \frac{\partial}{\partial x} + A_y(t) \frac{\partial}{\partial y}$. Introduzindo os operadores Laplaciano e nabla bidimensionais como $\nabla_\parallel^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ e $\nabla_\parallel = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$, respectivamente, temos:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \underbrace{\left\{ \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_\parallel^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_\parallel + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} \right] \right\}}_{\text{função de } x, y \text{ e } t} + \underbrace{\left\{ \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z) \right] \right\}}_{\text{função de } z} \Psi_\sigma(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.3})$$

A solução da equação (A.3) pode ser obtida por separação de variáveis. Supondo a função de onda como um produto de uma função de x, y e t , por uma função somente de z , podemos escrever

$$\Psi_\sigma(\mathbf{r}, t) = \phi_\sigma(x, y, t) Z(z), \quad (\text{A.4})$$

onde a função ϕ também carrega a projeção de *spin* σ . Substituindo (A.4) na equação de Schrödinger, obtemos

$$Z(z) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_\parallel^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_\parallel + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} \right] \phi_\sigma(x, y, t) + \phi_\sigma(x, y, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z) \right] Z(z) = Z(z) i\hbar \frac{\partial \phi_\sigma(x, y, t)}{\partial t}$$

$$Z(z) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_\parallel^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_\parallel + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi_\sigma(x, y, t) = -\phi_\sigma(x, y, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z) \right] Z(z). \quad (\text{A.5})$$

Dividindo ambos os membros por $\phi_\sigma(x, y, t)Z(z)$, temos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi_\sigma(x, y, t)} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\parallel}^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi_\sigma(x, y, t) = \\ = -\frac{1}{Z(z)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z) \right] Z(z). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Portanto, os dois membros são iguais para quaisquer valores de x, y, z e t . O membro esquerdo é função de x, y e t , enquanto o membro direito é função somente de z . Assim, cada membro deve ser igual a uma constante, dito G , a ser determinada depois. Logo, temos duas equações, acopladas pela constante G :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{V}(z) \right] Z(z) = -GZ(z), \quad (\text{A.7})$$

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\parallel}^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi_\sigma(x, y, t) = G\phi_\sigma(x, y, t). \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.7), com $G = -\mathcal{E}^{(z)}$, representa a equação de Schrödinger para o buraco confinado no potencial infinito $\hat{V}(z)$, cuja solução é bem conhecida [76]. As autofunções e as correspondentes autoenergias desta equação são dadas por

autofunções: $Z_\ell(z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \text{sen}\left(\frac{\pi\ell z}{L_z}\right)$ autoenergias: $\mathcal{E}_\ell^{(z)} = \ell^2 \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L_z^2}\right) = \ell^2 \mathcal{E}_0$ $\ell = 1, 2, 3, \dots$	(A.9)
---	-------

com

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^{(z)} = \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L_z^2}\right) \quad (\text{A.10})$$

representando a energia do estado fundamental, onde $\ell = 1$.

Substituindo $G = -\mathcal{E}_\ell^{(z)}$ na equação (A.8), ficamos com

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\parallel}^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi_\sigma(x, y, t) &= -\mathcal{E}_\ell^{(z)} \phi_\sigma(x, y, t) \\ \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\parallel}^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \phi_\sigma(x, y, t) &= -\ell^2 \mathcal{E}_0^{(z)} \phi_\sigma(x, y, t) \\ \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\parallel}^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_0^{(z)} \right] \phi_\sigma(x, y, t) &= i\hbar \frac{\partial \phi_\sigma(x, y, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Supondo as soluções em x e y como ondas planas, escrevemos

$$\begin{aligned}\phi_\sigma(x, y, t) &= \sqrt{\frac{1}{L_x L_y}} e^{i(k_x x + k_y y)} \zeta_\sigma(t) \\ \phi_\sigma(x, y, t) &= \sqrt{\frac{1}{L_x L_y}} e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t),\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

onde $\mathbf{k}_\parallel = (k_x, k_y)$ e $\mathbf{r}_\parallel = (x, y)$. Substituindo (A.12) em (A.11) e cancelando a constante de normalização $\sqrt{\frac{1}{L_x L_y}}$, temos:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_\parallel^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_\parallel + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right] e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t) = i\hbar e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \frac{d\zeta_\sigma(t)}{dt}. \quad (\text{A.13})$$

A seguinte relação pode ser utilizada para o operador nabla:

$$\nabla_\parallel (e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}) = i\mathbf{k}_\parallel (e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}), \quad (\text{A.14})$$

e assim, aplicando o operador duas vezes, obtemos a seguinte relação para o Laplaciano:

$$\begin{aligned}\nabla_\parallel^2 (e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}) &= \nabla_\parallel \cdot [\nabla_\parallel (e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel})] \\ &= \nabla_\parallel \cdot [i\mathbf{k}_\parallel e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}] \\ &= i\mathbf{k}_\parallel \cdot [\nabla_\parallel (e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel})] \\ &= i\mathbf{k}_\parallel \cdot [i\mathbf{k}_\parallel e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}] \\ &= -\mathbf{k}_\parallel^2 (e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel}).\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Portanto, $\nabla_\parallel(\dots) \equiv i\mathbf{k}_\parallel(\dots)$ e $\nabla_\parallel^2(\dots) \equiv -\mathbf{k}_\parallel^2(\dots)$.

Utilizando estas relações, o primeiro e o segundo termos da equação (A.13), podem ser escritos como

$$-\frac{\hbar^2 \nabla_\parallel^2}{2m^*} [e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t)] = -\frac{\hbar^2}{2m^*} [-\mathbf{k}_\parallel^2 e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t)] = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_\parallel^2}{2m^*} [e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t)] \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_\parallel [e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t)] = \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot [i\mathbf{k}_\parallel e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t)] = -\frac{\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{k}_\parallel [e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r}_\parallel} \zeta_\sigma(t)]. \quad (\text{A.17})$$

Assim, após aplicar os operadores ∇_{\parallel} e ∇_{\parallel}^2 na exponencial e cancela-la, a equação (A.13) fica:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\parallel}^2}{2m^*} + \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \nabla_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right] e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} \zeta_{\sigma}(t) &= i\hbar e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} \frac{d\zeta_{\sigma}(t)}{dt} \\ \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{k}_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right] e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} \zeta_{\sigma}(t) &= i\hbar e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} \frac{d\zeta_{\sigma}(t)}{dt} \\ \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{k}_{\parallel} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right] \zeta_{\sigma}(t) &= i\hbar \frac{d\zeta_{\sigma}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Lembrando que estamos utilizando o *gauge* $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, podemos voltar a incluir o termo

$$-\frac{\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{A}(t) \quad \left(= -\frac{\hbar|e|}{2m^*c} (-i\nabla_{\parallel}) \cdot \mathbf{A}(t) = \frac{i\hbar|e|}{2m^*c} \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{A}(t) = 0 \right)$$

na equação anterior sem altera-la. Fazendo isso, temos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{k}_{\parallel} - \underbrace{\frac{\hbar|e|}{2m^*c} \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{A}(t)}_{=0} + \frac{e^2}{2m^*c^2} \mathbf{A}^2(t) - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right] \zeta_{\sigma}(t) &= i\hbar \frac{d\zeta_{\sigma}(t)}{dt} \\ \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(t) \right]^2 - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right\} \zeta_{\sigma}(t) &= i\hbar \frac{d\zeta_{\sigma}(t)}{dt} \\ \frac{d\zeta_{\sigma}}{\zeta_{\sigma}} &= -\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{1}{2m^*} \left[\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(t) \right]^2 - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right\} dt \\ \zeta_{\sigma}(t) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int^t \left[\frac{1}{2m^*} \left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 - \frac{JS\sigma}{2} + \ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} \right] d\tau \right\} \\ \zeta_{\sigma}(t) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int^t \left[\ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} - \frac{JS\sigma}{2} + \frac{1}{2m^*} \left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Substituindo as funções $Z_{\ell}(z)$ e $\phi_{\sigma}(x, y, t)$ em (A.4), temos finalmente que

$$\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{L_x}} e^{ik_x x} \sqrt{\frac{1}{L_y}} e^{ik_y y} \sqrt{\frac{2}{L_z}} \text{sen} \left(\frac{\pi \ell}{L_z} z \right) \zeta_{\sigma}(t)$$

$$\boxed{\Psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{AL_z}} \text{sen} \left(\frac{\pi \ell}{L_z} z \right) \exp \left\{ i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel} - \frac{i}{\hbar} \int^t \left[\ell^2 \mathcal{E}_o^{(z)} - \frac{JS\sigma}{2} + \frac{1}{2m^*} \left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right] d\tau \right\}} \quad (\text{A.20})$$

com $A = L_x L_y$ sendo a área de normalização.

A energia total do buraco em cada sub-banda, na ausência do campo *laser*, é portanto

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} &= \mathcal{E}^{(x)} + \mathcal{E}^{(y)} + \mathcal{E}^{(z)} + \mathcal{E}^{(spin)} \\
 &= \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0 - \frac{JS\sigma}{2} \\
 &= \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0 - \frac{JS\sigma}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Assim, ficamos com

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} &= \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0 - \frac{JS\sigma}{2} \\
 &= \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \frac{JS\sigma}{2}
 \end{aligned}
 } \tag{A.22}$$

onde

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \ell^2 \mathcal{E}_0 \tag{A.23}$$

é a energia dos buracos na ausência do campo *laser*, a menos do termo devido ao *spin* [115].

Com estas definições, a diferença de energia entre os estados $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell'\sigma'}$ e $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma}$ é escrita como

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell'\sigma'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell\sigma} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \frac{(\sigma' - \sigma)JS}{2}. \tag{A.24}$$

APÊNDICE B – Cálculo da Probabilidade de Transição, Equação (3.20)

B.1 Probabilidade de Transição

Os elementos da matriz de transição (amplitude de probabilidade) para a transição do estado inicial $\kappa = \{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma\}$ para o estado final $\kappa' = \{\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'\}$ são dados por

$$a(\kappa \rightarrow \kappa') = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t') | \mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma \rangle \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\langle \mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma' | \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) | \mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma \rangle = \int d^2 r_{\parallel} \int dz \Psi_{\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{B.2})$$

Usando a função de onda (3.11) juntamente com a correspondente conjugada complexa, temos para o integrando em (B.2)

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{k}'_{\parallel}, \ell', \sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}}; \mathbf{r}, t) \Psi_{\mathbf{k}_{\parallel}, \ell, \sigma}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2C}{AL_z} \text{sen}\left(\frac{\pi \ell'}{L_z} z\right) \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \exp\{-i(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{r}_{\parallel}\} \exp\{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}\} \times \\ &\times \exp\left\{-i\left(\omega_{\mathbf{q}} - \frac{\omega_s \sigma}{2} + \frac{\mathcal{E}_0 \ell^2}{\hbar} + \frac{\omega_s \sigma'}{2} - \frac{\mathcal{E}_0 \ell'^2}{\hbar}\right) t\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{2m^* \hbar} \int_0^t \left[\left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau)\right)^2 - \left(\hbar \mathbf{k}'_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau)\right)^2 \right] d\tau\right\} \\ &= \frac{2C}{AL_z} \exp\{-i(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \cdot \mathbf{r}_{\parallel}\} \exp\{iq_z z\} \text{sen}\left(\frac{\pi \ell'}{L_z} z\right) \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \times \\ &\times \exp\left\{-i\left(\omega_{\mathbf{q}} - \frac{\omega_s \sigma}{2} + \frac{\mathcal{E}_0 \ell^2}{\hbar} + \frac{\omega_s \sigma'}{2} - \frac{\mathcal{E}_0 \ell'^2}{\hbar}\right) t\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{2m^* \hbar} \int_0^t \left[\left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau)\right)^2 - \left(\hbar \mathbf{k}'_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau)\right)^2 \right] d\tau\right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Então, podemos escrever

$$a(\kappa \rightarrow \kappa') = -\frac{i}{\hbar} \frac{2C}{AL_z} I_1 I_2 I_3, \quad (\text{B.4})$$

com as seguintes definições para I_1 , I_2 e I_3 :

$$I_1 = \int d^2 r_{\parallel} \exp\{-i(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \cdot \mathbf{r}_{\parallel}\} \quad (\text{B.5})$$

$$I_2 = \int_0^{L_z} dz \exp(iq_z z) \text{sen}\left(\frac{\pi \ell'}{L_z} z\right) \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \quad (\text{B.6})$$

$$I_3 = \int_0^t d\tau \exp\left\{-i\left(\omega_{\mathbf{q}} - \frac{\omega_s \sigma}{2} + \frac{\mathcal{E}_0 \ell^2}{\hbar} + \frac{\omega_s \sigma'}{2} - \frac{\mathcal{E}_0 \ell'^2}{\hbar}\right) \tau\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{i}{2m^* \hbar} \int_0^{\tau} \left[\left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau')\right)^2 - \left(\hbar \mathbf{k}'_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau')\right)^2 \right] d\tau'\right\}. \quad (\text{B.7})$$

Solução da Integral I_1 A intergral I_1 pode ser resolvida utilizando a função δ . Desta forma, segue que

$$I_1 = \int d^2 r_{\parallel} \exp\{-i(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \cdot \mathbf{r}_{\parallel}\} \\ = \int dx e^{-i(k'_x - k_x - q_x)x} \int dy e^{-i(k'_y - k_y - q_y)y} \\ = (2\pi) \delta(k'_x - k_x - q_x) (2\pi) \delta(k'_y - k_y - q_y) \\ = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}), \quad (\text{B.8})$$

onde $\delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) = \delta(k'_x - k_x - q_x) \delta(k'_y - k_y - q_y)$. Alternativamente, podemos escrever [116]

$$I_1 = \int d^2 r_{\parallel} \exp\{-i(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \cdot \mathbf{r}_{\parallel}\} \\ = \begin{cases} A & \text{se } \mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

onde $A = L_x L_y$ leva em conta a área de normalização do poço quântico.

O módulo quadrado de I_1 pode ser escrito de três formas equivalentes [116],

$$|I_1|^2 = (2\pi)^4 \left\{ \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \right\}^2 \quad (\text{B.10})$$

$$= \begin{cases} A^2 & \text{se } \mathbf{k}'_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$= (2\pi)^2 A \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}), \quad (\text{B.12})$$

sendo a última interessante no cálculo da probabilidade de transição por unidade de tempo.

Solução da Integral I_2 O integrando em I_2 pode ser transformado em uma soma de quatro exponenciais usando $\text{sen}(x) = [e^{ix} - e^{-ix}]/(2i)$. Efetuando estas integrais e reorganizando os termos resultantes, obtemos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{L_z} dz \exp(iq_z z) \text{sen}\left(\frac{\pi \ell'}{L_z} z\right) \text{sen}\left(\frac{\pi \ell}{L_z} z\right) \\
 &= \frac{L_z}{2} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}(q_z L_z/2) \\ \cos(q_z L_z/2) \end{array} \right\}}{(q_z L_z/2)} \frac{4\ell' \ell (q_z L_z/\pi)^2 P}{4\ell'^2 \ell^2 - [\ell'^2 + \ell^2 - (q_z L_z/\pi)^2]^2} \\
 &= \frac{L_z}{2} \mathcal{F}(q_z, \ell, \ell'), \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

onde a função $\text{sen}(\dots)$ resulta quando ℓ e ℓ' são ambos pares ou ímpares, e a função $\cos(\dots)$ resulta quando ℓ é par (ímpar) e ℓ' ímpar (par). P é um fator de fase ($P_{\text{sen}} = e^{iq_z L_z/2}$ e $P_{\text{cos}} = i e^{iq_z L_z/2}$, de tal forma que, em ambos os casos, $|P|^2 = 1$).

O módulo quadrado de I_2 é dado simplesmente por

$$|I_2|^2 = \frac{L_z^2}{4} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2. \tag{B.14}$$

Solução da Integral I_3 A integral I_3 pode ser resolvida em duas etapas. Denotando a integral que aparece como argumento da segunda exponencial em

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^t d\tau \exp\left\{-i\left(\omega_{\mathbf{q}} - \frac{\omega_s \sigma}{2} + \frac{\mathcal{E}_0 \ell^2}{\hbar} + \frac{\omega_s \sigma'}{2} - \frac{\mathcal{E}_0 \ell'^2}{\hbar}\right)\tau\right\} \times \\
 &\quad \times \exp\left\{-\frac{i}{2m^* \hbar} \int_0^\tau \left[\left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau')\right)^2 - \left(\hbar \mathbf{k}'_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau')\right)^2 \right] d\tau'\right\} \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

de I_4 , temos

$$\begin{aligned}
 I_4 &= -\frac{i}{2m^* \hbar} \int_0^\tau \left[\left(\hbar \mathbf{k}_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau')\right)^2 - \left(\hbar \mathbf{k}'_{\parallel} - \frac{|e|}{c} \mathbf{A}(\tau')\right)^2 \right] d\tau' \\
 &= -\frac{i}{2m^* \hbar} \int_0^\tau \left(\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2 - \frac{2\hbar|e|}{c} \mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{A}(\tau') + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2(\tau') - \hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2 + \frac{2\hbar|e|}{c} \mathbf{k}'_{\parallel} \cdot \mathbf{A}(\tau') - \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2(\tau') \right) d\tau' \\
 &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} + \frac{\hbar|e|}{m^* c} (\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{A}(\tau') \right) d\tau' \\
 &= -\frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} \right) \tau + \frac{\hbar|e|}{m^* c} \int_0^\tau (\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{A}_0 \cos(\omega \tau') d\tau' \right] \\
 &= -\frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} \right) \tau + \frac{\hbar|e|}{m^* c} (\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \frac{\mathbf{A}_0}{\omega} \text{sen}(\omega \tau') \Big|_0^\tau \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} \right) \tau + \frac{\hbar|e|}{m^*c} (\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{A}_0 \frac{\text{sen}(\omega\tau)}{\omega} \right] \\
&= -\frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} \right) \tau + \frac{\lambda \text{sen}(\omega\tau)}{\omega} \right] \\
&= -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} \right) \tau - i \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} \right) \text{sen}(\omega\tau),
\end{aligned} \tag{B.16}$$

onde $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t)$ e o parâmetro λ é dado por

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\hbar|e|}{m^*c} (\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{A}_0 = \frac{\hbar|e|}{m^*c} (\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \left(\frac{c}{\omega} \mathbf{E}_0 \right) \\
&= \frac{\hbar|e|}{m^*\omega} (\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\hbar|e| \mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{E}_0}{m^*\omega}.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Substituindo (B.16) em (B.15), ficamos com:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^t d\tau \exp \left\{ -i \left(\omega_{\mathbf{q}} - \frac{\omega_s \sigma}{2} + \frac{\mathcal{E}_o \ell^2}{\hbar} + \frac{\omega_s \sigma'}{2} - \frac{\mathcal{E}_o \ell'^2}{\hbar} \right) \tau \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} \right) \tau - i \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} \right) \text{sen}(\omega\tau) \right\} \\
&= \int_0^t d\tau \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{\hbar\omega_s \sigma}{2} + \mathcal{E}_o \ell^2 + \frac{\hbar\omega_s \sigma'}{2} - \mathcal{E}_o \ell'^2 + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} \right) \tau \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} \right) \text{sen}(\omega\tau) \right\} \\
&= \int_0^t d\tau \exp \left\{ +\frac{i}{\hbar} \left[\overbrace{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}'_{\parallel}{}^2}{2m^*} + \mathcal{E}_o \ell'^2 \right)}^{\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'}} - \overbrace{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m^*} + \mathcal{E}_o \ell^2 \right)}^{\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s}{2} \right] \tau \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ -i \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} \right) \text{sen}(\omega\tau) \right\} \\
&= \int_0^t d\tau \exp \left\{ +\frac{i}{\hbar} \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s}{2} \right] \tau \right\} \exp \left\{ -i \left(\frac{\lambda}{\hbar\omega} \right) \text{sen}(\omega\tau) \right\}.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

A exponencial contendo a função seno pode ser expandida em uma série de funções de Bessel de primeira classe, do tipo (veja, por exemplo, a referência [117], página 363)

$$e^{-ix \text{sen}(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n(x) e^{-in\theta}, \tag{B.19}$$

onde n é um inteiro. Aplicando esta expansão para a exponencial contendo a função seno em

(B.18), com $\theta = \omega\tau$ e $x = (\frac{\lambda}{\hbar\omega})$, ficamos com

$$e^{-i(\frac{\lambda}{\hbar\omega})\text{sen}(\omega\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) e^{-in\omega\tau}. \quad (\text{B.20})$$

Então,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^t d\tau \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s}{2}\right]\tau\right\} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) e^{-in\omega\tau} \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \int_0^t d\tau \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - \frac{(\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s}{2} - n\hbar\omega\right]\tau\right\} \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathcal{J}_n\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \mathcal{R}_n(t) \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} I_3(n), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

onde $n = 0$ foi excluído, pois neste caso não há absorção nem emissão de fótons. $I_3(n) = \mathcal{J}_n\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \mathcal{R}_n(t)$, com

$$\mathcal{R}_n(t) = \int_0^t \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right]\tau\right\} d\tau. \quad (\text{B.22})$$

Assim, podemos escrever o módulo quadrado de $I_3(n)$ como

$$\begin{aligned} |I_3(n)|^2 &= \left|\mathcal{J}_n\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \mathcal{R}_n(t)\right|^2 \\ &= \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) |\mathcal{R}_n(t)|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Agora, adotando a notação $\Omega_0 = \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right]/\hbar$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(t) &= \int_0^t \exp(i\Omega_0\tau) d\tau = \frac{\exp(i\Omega_0 t) - 1}{i\Omega_0} = \frac{e^{i\Omega_0 t/2}(e^{i\Omega_0 t/2} - e^{-i\Omega_0 t/2})}{i\Omega_0} \\ &= e^{i\Omega_0 t/2} \frac{2i \text{sen}(\Omega_0 t/2)}{i\Omega_0} = e^{i\Omega_0 t/2} \frac{\text{sen}(\Omega_0 t/2)}{\Omega_0/2}, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

e então

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_n(t)|^2 &= e^{-i\Omega_0 t/2} e^{i\Omega_0 t/2} \frac{\text{sen}^2(\Omega_0 t/2)}{(\Omega_0/2)^2} = \frac{\text{sen}^2(\Omega_0 t/2)}{(\Omega_0/2)^2} \\ &= \frac{\text{sen}^2[(\Omega_0/2)t]}{(\Omega_0/2)^2} \times \frac{\pi t}{\pi t} = \pi t \frac{\text{sen}^2[t(\Omega_0/2)]}{\pi t (\Omega_0/2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Para um tempo relativamente longo, podemos usar a seguinte aproximação para $|\mathcal{R}_n(t)|^2$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_n(t)|^2 &\simeq \pi t \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}^2[t(\Omega_0/2)]}{\pi t(\Omega_0/2)^2} \\
&\simeq \pi t \delta(\Omega_0/2) = 2\pi t \delta(\Omega_0) \\
&\simeq 2\pi t \delta \left\{ \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - n \hbar \omega \right] / \hbar \right\} \\
&\simeq 2\pi \hbar t \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - n \hbar \omega \right]_{t \rightarrow \infty}, \tag{B.26}
\end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$ e $\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}^2(ax)}{\pi a x^2}$ (veja, por exemplo, a referência [118], página 629, equação (A.5)). Portanto, substituindo a equação (B.26) na equação (B.23), temos

$$\begin{aligned}
|I_3(n)|^2 &= \mathcal{J}_n^2 \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega} \right) |\mathcal{R}_n(t)|^2 \\
&= 2\pi \hbar t \mathcal{J}_n^2 \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega} \right) \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - n \hbar \omega \right]. \tag{B.27}
\end{aligned}$$

Juntado os resultados das equações (B.12), (B.14) e (B.27), segue que

$$\begin{aligned}
|I_1|^2 |I_2|^2 |I_3(n)|^2 &= (2\pi)^2 A \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times (L_z^2/4) |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \times \\
&\quad \times 2\pi \hbar t \mathcal{J}_n^2 \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega} \right) \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - n \hbar \omega \right] \\
&= (2\pi)^3 \hbar t A (L_z^2/4) |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\
&\quad \times \mathcal{J}_n^2 \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega} \right) \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - n \hbar \omega \right]. \tag{B.28}
\end{aligned}$$

Finalmente, a probabilidade de transição por unidade de tempo, do estado inicial κ para o estado final κ' , é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{|a(\kappa \rightarrow \kappa')|^2}{t} &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{t} \left| -\frac{i}{\hbar} \frac{2C}{AL_z} I_1 I_2 I_3(n) \right|^2 \\
&= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{(-i)^2}{\hbar^2} \left| \frac{2C}{AL_z} \right|^2 (2\pi)^3 \hbar t \frac{AL_z^2}{4} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\
&\quad \times \mathcal{J}_n^2 \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega} \right) \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - n \hbar \omega \right] \\
&= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \times \\
&\quad \times \mathcal{J}_n^2 \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega} \right) \delta \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel} \ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel} \ell} - \hbar \omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma) \hbar \omega_s / 2 - n \hbar \omega \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{|a(\kappa \rightarrow \kappa')|^2}{t} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} T(n; \kappa \rightarrow \kappa'), \quad (\text{B.29})$$

onde

$$\begin{aligned} T(n; \kappa \rightarrow \kappa') &= \frac{(2\pi)^3 |C|^2}{\hbar A} |\mathcal{F}(q_z, \ell, \ell')|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \mathcal{J}_n^2\left(\frac{\lambda}{\hbar\omega}\right) \times \\ &\times \delta\left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}'_{\parallel}\ell'} - \mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}\ell} - \hbar\omega_{\mathbf{q}} - (\sigma' - \sigma)\hbar\omega_s/2 - n\hbar\omega\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Wang, J., Cywiński, L., Sun, C., Kono, J., Munekata, H., and Sham, L. J. *Phys. Rev. B* **77**, 235308 (2008).
- [2] Kojima, E., Shimano, R., Hashimoto, Y., Katsumoto, S., Iye, Y., and Kuwata-Gonokami, M. *Phys. Rev. B* **68**, 193203 (2003).
- [3] Beaurepaire, E., Merle, J.-C., Daunois, A., and Bigot, J.-Y. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4250 (1996).
- [4] Vaterlaus, A., Beutler, T., and Meier, F. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3314 (1991).
- [5] Hübner, W. and Bennemann, K. H. *Phys. Rev. B* **53**, 3422 (1996).
- [6] Sato, K., Bergqvist, L., Kudrnovský, J., Dederichs, P. H., Eriksson, O., Turek, I., Sanyal, B., Bouzerar, G., Katayama-Yoshida, H., Dinh, V. A., Fukushima, T., Kizaki, H., and Zeller, R. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1633 (2010).
- [7] Zhang, G., Hübner, W., Beaurepaire, E., and Bigot, J.-Y. In *Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures I*, Hillebrands, B. and Ounadjela, K., editors, volume 83 of *Topics in Applied Physics*, 245. Springer Berlin / Heidelberg (2002).
- [8] Koopmans, B., Ruigrok, J. J. M., Longa, F. D., and de Jonge, W. J. M. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 267207 (2005).
- [9] Zhang, G. P. and Hübner, W. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3025 (2000).
- [10] Cywiński, L. and Sham, L. J. *Phys. Rev. B* **76**, 045205 (2007).
- [11] Dietl, T. In *Advances in Solid State Physics*, Kramer, B., editor, volume 43, 413. Springer Berlin / Heidelberg (2003).
- [12] Beaurepaire, E., Maret, M., Halté, V., Merle, J.-C., Daunois, A., and Bigot, J.-Y. *Phys. Rev. B* **58**, 12134 (1998).
- [13] Koopmans, B., van Kampen, M., Kohlhepp, J. T., and de Jonge, W. J. M. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 844 (2000).
- [14] Bigot, J.-Y., Guidoni, L., Beaurepaire, E., and Saeta, P. N. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 077401 (2004).
- [15] Vomir, M., Andrade, L. H. F., Guidoni, L., Beaurepaire, E., and Bigot, J.-Y. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 237601 (2005).
- [16] Wang, J., Sun, C., Kono, J., Oiwa, A., Munekata, H., Cywiński, L., and Sham, L. J. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 167401 (2005).

- [17] Wang, J., Sun, C., Hashimoto, Y., Kono, J., Khodaparast, G. A., Cywiński, L., Sham, L. J., Sanders, G. D., Stanton, C. J., and Munekata, H. *J. Phys.: Condens. Matter* **18**, R501 (2006).
- [18] Koopmans, B. In *Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures II*, Hillebrands, B. and Ounadjela, K., editors, volume 87 of *Topics in Applied Physics*, 253. Springer Berlin / Heidelberg (2003).
- [19] Koopmans, B., Kicken, H. H. J. E., van Kampen, M., and de Jonge, W. J. M. *J. Magn. Mater.* **286**, 271 (2005).
- [20] Kirilyuk, A., Kimel, A. V., and Rasing, T. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2731 (2010).
- [21] Wang, J., Cotoros, I., Dani, K. M., Liu, X., Furdyna, J. K., and Chemla, D. S. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 217401 (2007).
- [22] Ohno, H. *J. Magn. Mater.* **242**, 105 (2002).
- [23] Zhang, G. P. and George, T. F. *Phys. Rev. B* **78**, 052407 (2008).
- [24] Dietl, T., Ohno, H., Matsukura, F., Cibert, J., and Ferrand, D. *Science* **287**, 1019 (2000).
- [25] Jungwirth, T., Sinova, J., Mašek, J., Kučera, J., and MacDonald, A. H. *Rev. Mod. Phys.* **78**, 809 (2006).
- [26] Koshihara, S., Oiwa, A., Hirasawa, M., Katsumoto, S., Iye, Y., Urano, C., Takagi, H., and Munekata, H. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4617 (1997).
- [27] Yu, P. Y. and Cardona, M. *Fundamentals of Semiconductors: Physics and Materials Properties (Graduate Texts in Physics)*. Springer, Berlin, 4th edition, (2010).
- [28] Weisbuch, C. and Hermann, C. *Phys. Rev. B* **15**, 816 (1977).
- [29] Ohno, H. *Science* **281**, 951 (1998).
- [30] Nagaev, E. L. *Physics of Magnetic Semiconductors*. Mir, Moscow, (1983).
- [31] Matsukura, F., Ohno, H., Shen, A., and Sugawara, Y. *Phys. Rev. B* **57**, R2037 (1998).
- [32] Furdyna, J. K. *J. Appl. Phys.* **64**, R29 (1988).
- [33] Matsukura, F., Ohno, H., and Dietl, T. In *Handbook of Magnetic Materials*, Buschow, K. H. J., editor, volume 14, 1. Elsevier, Amsterdam (2002).
- [34] Ohno, H. *J. Magn. Mater.* **200**, 110 (1999).
- [35] Ohno, H., Chiba, D., Matsukura, F., Omiya, T., Abe, E., Dietl, T., Ohno, Y., and Ohtani, K. *Nature* **408**, 944 (2000).
- [36] Michel, C., Klar, P. J., Baranovskii, S. D., and Thomas, P. *Phys. Rev. B* **69**, 165211 (2004).
- [37] Kimel, A. V., Kirilyuk, A., Usachev, P. A., Pisarev, R. V., Balbashov, A. M., and Rasing, T. *Nature* **435**, 655 (2005).

- [38] Wang, K. Y., Champion, R. P., Edmonds, K. W., Sawicki, M., Dietl, T., Foxon, C. T., and Gallagher, B. L. In *Proceedings of the 27th International Conference on the Physics of Semiconductors*, de Walle, J. M. C. G. V., editor, volume 772 of *AIP Conference Proceedings*, 333. AIP, (2005).
- [39] Jungwirth, T., Wang, K. Y., Mašek, J., Edmonds, K. W., König, J., Sinova, J., Polini, M., Goncharuk, N. A., MacDonald, A. H., Sawicki, M., Rushforth, A. W., Champion, R. P., Zhao, L. X., Foxon, C. T., and Gallagher, B. L. *Phys. Rev. B* **72**, 165204 (2005).
- [40] Dietl, T. and Ohno, H. *Physica E* **9**, 185 (2001).
- [41] Myers, R. C., Sheu, B. L., Jackson, A. W., Gossard, A. C., Schiffer, P., Samarth, N., and Awschalom, D. D. *Phys. Rev. B* **74**, 155203 (2006).
- [42] Mack, S., Myers, R. C., Heron, J. T., Gossard, A. C., and Awschalom, D. D. *Appl. Phys. Lett.* **92**, 192502 (2008).
- [43] Edmonds, K. W., Bogusławski, P., Wang, K. Y., Champion, R. P., Novikov, S. N., Farley, N. R. S., Gallagher, B. L., Foxon, C. T., Sawicki, M., Dietl, T., Buongiorno Nardelli, M., and Bernholc, J. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 037201 (2004).
- [44] Yu, K. M., Walukiewicz, W., Wojtowicz, T., Kuryliszyn, I., Liu, X., Sasaki, Y., and Furdyna, J. K. *Phys. Rev. B* **65**, 201303 (2002).
- [45] Hayashi, T., Hashimoto, Y., Katsumoto, S., and Iye, Y. *Appl. Phys. Lett.* **78**, 1691 (2001).
- [46] Chiba, D., Nishitani, Y., Matsukura, F., and Ohno, H. *Appl. Phys. Lett.* **90**, 122503 (2007).
- [47] Ohno, H., Shen, A., Matsukura, F., Oiwa, A., Endo, A., Katsumoto, S., and Iye, Y. *Appl. Phys. Lett.* **69**, 363 (1996).
- [48] von Molnár, S., Munekata, H., Ohno, H., and Chang, L. L. *J. Magn. Magn. Mater.* **93**, 356 (1991).
- [49] De Boeck, J., Oesterholt, R., Bender, H., Van Esch, A., Bruynseraede, C., Van Hoof, C., and Borghs, G. *J. Magn. Magn. Mater.* **156**, 148 (1996).
- [50] Hayashi, T., Tanaka, M., Nishinaga, T., Shimada, H., Tsuchiya, H., and Otuka, Y. *J. Cryst. Growth* **175–176**, 1063 (1997).
- [51] Shen, A., Ohno, H., Matsukura, F., Sugawara, Y., Akiba, N., Kuroiwa, T., Oiwa, A., Endo, A., Katsumoto, S., and Iye, Y. *J. Cryst. Growth* **175–176**, 1069 (1997).
- [52] Shioda, R., Ando, K., Hayashi, T., and Tanaka, M. *Phys. Rev. B* **58**, 1100 (1998).
- [53] Ashcroft, N. W. and Mermin, N. D. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, Philadelphia, (1976).
- [54] Mašek, J., Kudrnovský, J., and Máca, F. *Phys. Rev. B* **67**, 153203 (2003).
- [55] Zhao, L. X., Staddon, C. R., Wang, K. Y., Edmonds, K. W., Champion, R. P., Gallagher, B. L., and Foxon, C. T. *Appl. Phys. Lett.* **86**, 071902 (2005).
- [56] Okabayashi, J., Kimura, A., Rader, O., Mizokawa, T., Fujimori, A., Hayashi, T., and Tanaka, M. *Phys. Rev. B* **58**, R4211 (1998).

- [57] Richard, S., Aniel, F., and Fishman, G. *Phys. Rev. B* **70**, 235204 (2004).
- [58] Dietl, T., Ohno, H., and Matsukura, F. *Phys. Rev. B* **63**, 195205 (2001).
- [59] Ohno, H., Matsukura, F., and Ohno, Y. *JSAP International* **5**, 4 (2002).
- [60] Priour, D. J., Hwang, E. H., and Das Sarma, S. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 037201 (2005).
- [61] Yang, S.-R. E. and MacDonald, A. H. *Phys. Rev. B* **67**, 155202 (2003).
- [62] Berciu, M. and Bhatt, R. N. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 107203 (2001).
- [63] Bliss, D. E., Walukiewicz, W., Ager, J. W., Haller, E. E., Chan, K. T., and Tanigawa, S. *J. Appl. Phys.* **71**, 1699 (1992).
- [64] Szczytko, J., Bardyszewski, W., and Twardowski, A. *Phys. Rev. B* **64**, 075306 (2001).
- [65] Fedorych, O. M., Hankiewicz, E. M., Wilamowski, Z., and Sadowski, J. *Phys. Rev. B* **66**, 045201 (2002).
- [66] Berciu, M. and Bhatt, R. N. *Phys. Rev. B* **66**, 085207 (2002).
- [67] Ohno, H. *J. Magn. Magn. Mater.* **272**, 1 (2004).
- [68] Berciu, M. and Bhatt, R. N. *Physica B* **312**, 815 (2002).
- [69] Chudnovskiy, A. L. and Pfannkuche, D. *Phys. Rev. B* **65**, 165216 (2002).
- [70] da Silva, A. J. R., Fazzio, A., dos Santos, R. R., and Oliveira, L. E. *Phys. Rev. B* **72**, 125208 (2005).
- [71] Sanvito, S., Theurich, G., and Hill, N. A. *J. of Supercond.* **15**, 85 (2002).
- [72] Kittel, C. *Quantum theory of solids*. Wiley, New York, 2nd edition, (1987).
- [73] Grosso, G. and Parravicini, G. P. *Solid state physics*. Academic Press, San Diego, (2000).
- [74] Ferromagnetic Semiconductor Spintronics Web Project. <<http://unix12.fzu.cz/ms>>. Acessado em 05 de maio de 2011.
- [75] Sakurai, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, Revised edition, (1994).
- [76] Bastard, G. *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures*. Halsted Press, New York, (1988).
- [77] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. *Mecânica Quântica: teoria não relativista*. Mir, Moscou, (1985).
- [78] Dyakonov, M. I. E. *Spin Physics in Semiconductors (Springer Series in Solid–State Sciences 157)*. Springer, Berlin, (2008).
- [79] Kyrychenko, F. V. and Kossut, J. *Phys. Rev. B* **70**, 205317 (2004).
- [80] Eisberg, R. and Resnick, R. *Física Quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 9nd edition, (1994).

- [81] Coutinho, S. and Miranda, L. C. M. *Phys. Rev. B* **15**, 1593 (1977).
- [82] Jaworski, C. M., Yang, J., Mack, S., Awschalom, D. D., Myers, R. C., and Heremans, J. P. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 186601 (2011).
- [83] Aku-Leh, C., Perez, F., Jusserand, B., Richards, D., and Karczewski, G. *Phys. Rev. B* **83**, 035323 (2011).
- [84] Gomes, M. A. F. and Miranda, L. C. M. *Phys. Rev. B* **12**, 3788 (1975).
- [85] Kittel, C. *Phys. Rev.* **110**, 1295 (1958).
- [86] Fonseca, A. L. A., Nunes, O. A. C., and Aragão, F. R. F. *Phys. Rev. A* **38**, 4732 (1988).
- [87] Gargano, R., Fonseca, A. L. A., and Nunes, O. A. C. *Phys. Rev. A* **41**, 2138 (1990).
- [88] Seely, J. F. *Phys. Rev. A* **10**, 1863 (1974).
- [89] Seely, J. F. and Harris, E. G. *Phys. Rev. A* **7**, 1064 (1973).
- [90] Fonseca, A. L. A. and Nunes, O. A. C. *Solid State Commun.* **97**, 63 (1996).
- [91] Haug, H. and Jauho, A.-P. *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors (Springer Series in Solid-State Sciences 123)*. Springer, Berlin, 2nd rev. edition, (2010).
- [92] Sinova, J., Jungwirth, T., Liu, X., Sasaki, Y., Furdyna, J. K., Atkinson, W. A., and MacDonald, A. H. *Phys. Rev. B* **69**, 085209 (2004).
- [93] Kim, H. J. and Yi, K. S. *Phys. Rev. B* **80**, 193201 (2009).
- [94] Munem, M. A. and Foulis, D. J. *Cálculo*, volume 1. LTC, Rio de Janeiro, (1982).
- [95] Santos, W. P., Fonseca, A. L. A., and Nunes, O. A. C. *physica status solidi (b)* **197**, 359 (1996).
- [96] Pereira, P. R. R. and Miranda, L. C. M. *Phys. Rev. B* **15**, 4540 (1977).
- [97] Nunes, O. A. C. *Solid State Commun.* **44**, 1629 (1982); **47**, 873 (1983); **48**, 159 (1983).
- [98] Nunes, O. A. C. *Solid State Commun.* **45**, 521 (1983).
- [99] Peng, F. and Nan-xian, C. *Phys. Rev. B* **46**, 7627 (1992).
- [100] Landau, L. In *Collected papers of L.D. Landau*, ter Haar, D., editor, 445. Pergamon Press, New York (1965). [*J. Phys. U.S.S.R* **10**, 25 (1946)].
- [101] Morandi, O. and Hervieux, P.-A. *Phys. Rev. B* **81**, 195215 (2010).
- [102] Lee, B., Jungwirth, T., and MacDonald, A. H. *Semicond. Sci. Technol.* **17**, 393 (2002).
- [103] Meilikhov, E. Z. and Farzetdinova, R. M. *Phys. Rev. B* **74**, 125204 (2006).
- [104] Brey, L. and Guinea, F. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2384 (2000).
- [105] Werpachowska, A. and Dietl, T. *Phys. Rev. B* **82**, 085204 (2010).

- [106] Ohya, S., Muneta, I., Hai, P. N., and Tanaka, M. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 167204 (2010).
- [107] Tanaka, M. and Higo, Y. *Phys. Rev. Lett.* **87**, 026602 (2001).
- [108] Ohya, S., Takata, K., and Tanaka, M. *arXiv:1009.2235v1[cond-mat.mtrl-sci]* (2010).
- [109] Bruno, P. *J. Appl. Phys.* **64**, 3153 (1988).
- [110] Gao, C. L., Ernst, A., Fischer, G., Hergert, W., Bruno, P., Wulfhekel, W., and Kirschner, J. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 167201 (2008).
- [111] Zhi-Dong, Z. In *Handbook of Thin Films*, Nalwa, H. S., editor, 141. Academic Press, London (2002).
- [112] Lisowski, M., Loukakos, P. A., Bovensiepen, U., Stähler, J., Gahl, C., and Wolf, M. *Applied Physics A: Materials Science & Processing* **78**, 165 (2004).
- [113] Carpene, E., Mancini, E., Dallera, C., Brenna, M., Puppini, E., and De Silvestri, S. *Phys. Rev. B* **78**, 174422 (2008).
- [114] Mikhail, H. D., Fonseca, A. L. A., Amato, M. A., Agrello, D. A., and Nunes, O. A. C. *Solid State Commun.* **150**, 1082 (2010).
- [115] Woolsey, R. B. and White, R. M. *Phys. Rev. B* **1**, 4474 (1970).
- [116] Harrison, P. *Quantum wells, wires and dots: theoretical and computational physics of semiconductor nanostructures*. Wiley, Chichester, 2nd edition, (2005).
- [117] Butkov, E. *Física Matemática*. LTC, Rio de Janeiro, (1988).
- [118] Zettili, N. *Quantum Mechanics: concepts and applications*. John Wiley & Sons, Chichester, (2001).