Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma classe de equações diferenciais do tipo $u_t = u_{xxxxx} + G(u, \ldots, u_{xxxx})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas

por

Veríssimo Pereira Gomes Neto

Brasília
2010

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Aos meus pais, pelo apoio de sempre.

À professora Keti, pela sugestão de um problema relevante e estimulante, pela disposição constante em partilhar seu conhecimento, e pelas inúmeras sugestões, que tanto facilitaram a obtenção de vários resultados quanto melhoraram incomensuravelmente a apresentação do trabalho.

Aos professores que compuseram a banca, pelas diversas sugestões para a melhoria do trabalho, e também pelas questões levantadas, apontando vários rumos a trilhar no prosseguimento de minha pesquisa matemática.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

There is no method but to be very intelligent.

T. S. Eliot

Resumo

Consideramos equações diferenciais tipo $u_t = u_{xxxxx} + G(u, u_x, \ldots, u_{xxxx})$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$. Caracterizamos todas as equações deste tipo cujas 1-formas associadas satisfazem $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$, $\mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}$, $2 \leq p \leq 3$. Determinamos quais destas equações são independentes de qualquer dos parâmetros reais μ_p, η_p. No caso genérico tal estudo de independência de parâmetro está completo, e também obtemos como casos particulares três importantes equações de evolução não-lineares de quinta ordem. No caso não-genérico, descrevemos muitas classes, mas o estudo de independência de parâmetro permanece incompleto. Determinamos vastas classes de equações e seus respectivos problemas lineares, nos quais casos particulares são obtidos simplesmente especificando certas funções de u e suas derivadas com respeito a x.

Abstract

We consider differential equations of type $u_t = u_{xxxxx} + G\left(u, u_x, \ldots, u_{xxxx}\right)$ which describe pseudo-spherical surfaces, with associated 1-forms $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$. We characterize all such equations whose associated 1-forms satisfy $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$, $\mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}$, $2 \leq p \leq 3$. We determine which of these equations are independent of any of the real parameters μ_p, η_p. In the generic case this parameter independence study is complete, and we also obtain as particular cases three important fifth-order nonlinear evolution equations. In the nongeneric case we describe many classes, but the parameter independence study is yet to be completed. We determine huge classes of equations and their respective linear problems, in which particular cases are obtained by merely specifying certain functions of u and its derivatives with respect to x.

Sumário

Introdução

Uma equação diferencial em uma função real $u(x,t)$ *descreve superfícies pseudo-esféricas* se existem 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dependem de u e um número finito de suas derivadas, tais que as equações de estrutura de uma superfície de curvatura constante $K = -1$, ou seja,

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \qquad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \qquad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2,$$

são satisfeitas sempre que u seja uma solução da equação diferencial. Uma equação diferencial que descreve superfícies pseudo-esféricas também pode ser caracterizada como a condição de integrabilidade de um problema linear da forma

$$\begin{pmatrix} dv^1 \\ dv^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_1 - \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_3 & -\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

A noção de uma equação diferencial que descreve superfícies pseudo-esféricas foi introduzida por Chern e Tenenblat [5], que também efetuaram uma classificação completa das equações de evolução $u_t = F\left(u, u_x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas sob a hipótese de que $f_{21} = \eta$. Tal classificação inclui um procedimento construtivo para obter o problema linear associado a cada uma dessas equações. Um estudo análogo para diferentes classes de equações diferenciais foi realizado por Jorge e Tenenblat [8], Rabelo [11] e Rabelo e Tenenblat [12]. Exemplos das classes mencionadas até aqui são dadas pelas equações de Korteweg–de Vries, Korteweg–de Vries modificada, sine-Gordon, sinh-Gordon, Burgers e Liouville.

Os resultados em [5] foram generalizados por Kamran e Tenenblat [7], que suprimiram a condição a priori sobre f_{21}. Eles também demonstraram um teorema de existência local garantindo que, dadas duas equações diferenciais descrevendo superfícies pseudo-esféricas, então, sob certa hipótese técnica, existe, localmente, uma aplicação levando cada solução genérica de uma equação numa solução genérica da outra. Tal correspondência se origina, em última análise, do fato de que quaisquer duas métricas de mesma curvatura constante são localmente isométricas.

Reyes [16] foi capaz de estender teoria de Kamran–Tenenblat ao caso em que F depende explicitamente de x, t. A propósito, Reyes, desde 1998, tem publicado vários trabalhos focando equações diferenciais que descrevem superfícies pseudo-esféricas e integrabilidade de equações não-lineares.

O conceito de um sistema de equações que descreve uma superfície pseudo-esférica foi introduzido e investigado por Ding e Tenenblat [6].

Se $f_{21} = \eta$ é um parâmetro, e as funções f_{11} e f_{31} não dependem de η, o problema (1) se reduz ao problema do espalhamento inverso, considerado por Ablowitz *et al.* [1], com η correspondendo ao parâmetro espectral. Equações como estas são ditas de tipo AKNS. Sempre que se consegue associar uma família a um parâmetro de problemas lineares a uma equação diferencial não-linear, existe a possibilidade de aplicar o método do espalhamento inverso em busca da determinação de soluções, e não apenas a equações de tipo AKNS. Isso explica o fato, observado já no século 19, de que algumas equações ligadas a superfícies de curvatura constante, como a de sine-Gordon, coincidentemente, possuíam solução exata.

A aplicação do método do espalhamento inverso foi bem sucedida, por exemplo, em [3] e, no caso de algumas equações diferenciais com u dependendo de um número arbitrário de variáveis, em [2], [4].

Resultados associando uma família a um parâmetro de problemas lineares com $f_{21} = \eta$ a determinada equação diferencial foram obtidos por Rabelo [11] para algumas equações da forma $u_{xt} = F\left(u, u_x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)$, com $2 \leq k \leq 3$, e por Rabelo e Tenenblat [12] para todas as equações da forma $u_{xt} = F(u, u_x)$. Em particular, um problema importante é determinar todas as equações de evolução com $f_{21} = \eta$ que são independentes de η. No caso de $u_t = u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$, tal problema foi resolvido por Rabelo e Tenenblat [13].

Tratamos aqui de um problema nessa linha, trabalhando com equações de evolução de quinta ordem

$$u_t = u_{xxxxx} + G(u, u_x, \ldots, u_{xxxx}). \tag{2}$$

Equações da forma (2) que descrevem superfícies pseudo-esféricas incluem a equação KdV de quinta ordem

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x,$$

a equação de Sawada–Kotera

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x,$$

e a equação de Kaup–Kupershmidt

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + \frac{25}{2}u_x u_{xx} + 5u^2 u_x.$$

O fato de que a equação (2) é de ordem relativamente alta torna seu estudo em generalidade total muito difícil, impondo que se inclua algum hipótese adicional no problema linear associado. Na tentativa de determinar qual deveria ser tal condição, fomos essencialmente motivados pelo fato de que a equação KdV de quinta ordem

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x \tag{3}$$

descreve equações pseudo-esféricas com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= 1-u, \qquad f_{21} = \eta, \qquad f_{31} = -1-u,\\
f_{12} &= -u_{xxxx} + \eta u_{xxx} - 8uu_{xx} + \left(2-\eta^2\right) u_{xx} - 6u_x^2 + 6\eta u u_x + \eta^3 u_x\\
&\quad -6u^3 + \left(6-2\eta^2\right) u^2 + \left(2\eta^2 - \eta^4\right) u + \eta^4,\\
f_{22} &= -2u_{xxx} + 2\eta u_{xx} - 12uu_x - 2\eta^2 u_x + 6\eta u^2 + 2\eta^3 u + \eta^5,\\
f_{32} &= -u_{xxxx} + \eta u_{xxx} - 8uu_{xx} + \left(-2-\eta^2\right) u_{xx} - 6u_x^2 + 6\eta u u_x + \eta^3 u_x\\
&\quad -6u^3 + \left(-6-2\eta^2\right) u^2 + \left(-2\eta^2 - \eta^4\right) u - \eta^4,
\end{aligned}$$

que pode-se calcular seguindo o procedimento descrito em [14]. A observação crucial é que essas 1-formas satisfazem a condição consideravelmente geral de que

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{4}$$

que adotamos em todo o trabalho.

Para prosseguir, é necessário introduzir a notação

$$\begin{gathered}
\alpha = \sum_{p=2}^{3} (-1)^p \mu_p \eta_p, \qquad \beta = \sum_{p=2}^{3} (-1)^p \mu_p \eta_{5-p}, \qquad \gamma = \sum_{p=2}^{3} (-1)^p \mu_p^2 + 1,\\
\xi_p = \mu_p \alpha - \eta_p \gamma, \qquad \delta = \sum_{p=2}^{3} (-1)^p \eta_p \xi_p, \qquad (5)\\
v = f_{11}^2 + f_{21}^2 - f_{31}^2, \qquad g = f_{11}, \qquad b = \gamma g + \alpha, \qquad \widetilde{g} = \frac{1}{b}\left(bg'\right)'.
\end{gathered}$$

Ao longo de todo o trabalho, nossa análise sempre recai em um dos quatro casos

$$\delta \neq 0, \qquad v' \neq 0, \delta = 0, \eta_2 = 0, \qquad v' \neq 0, \delta = 0, \eta_2 \neq 0, \qquad v' = 0.$$

Os casos são mutuamente excludentes pois $v' = 0$ implica $\delta = 0$ (ver início da demonstração do Teorema 2.2.3).

O resultado principal no caso genérico classifica todas as equações da forma (2) descrevendo superfícies pseudo-esféricas que são independentes do parâmetro η_2 cujo problema linear satisfaz (4) e tal que os parâmetros $\mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}$, $2 \leq p \leq 3$, cumprem $\delta \neq 0$. A escolha do parâmetro η_2 em particular entre os quatro é feita para simplificar a exposição. Na Seção 2.3, trabalhamos com independência com respeito a um parâmetro genérico τ. A importância de tal generalidade é que possibilita, em determinada situação específica, atribuir valores particulares aos outros parâmetros de modo a originar um problema linear que favoreça a aplicação do método do espalhamento inverso.

No Capítulo 2 tratamos do caso genérico. Na Seção 2.1, enunciamos o resultado principal no caso genérico e o ilustramos com vários casos particulares. Na Seção 1, consideramos os conceitos básicos e os fatos relevantes para a demonstração de nossos resultados. Na Seção 2.2, fazemos uso do Teorema 5 em [7] (ver Teorema 1.0.1) para caracterizar, no Teorema 2.2.3, todas as equações da forma (2) descrevendo superfícies pseudo-esféricas cujo problema linear satisfaz (4), e $\delta \neq 0$. Para tal fim, estabelecemos, no Lema 2.2.1, condições necessárias sobre as funções recursivas que aparecem no Teorema 1.0.1, e sobre as funções f_{i2}, $1 \leq i \leq 3$. O Lema 2.2.1 vale para toda equação de evolução, independentemente da ordem $k \geq 2$, satisfazendo (4) e $\delta \neq 0$, sendo que parte dele se estende à condição mais geral $v' \neq 0$. Isso sugere que muitas outras classes de equações de evolução descrevendo superfícies pseudo-esféricas com (4) podem ser encontradas pela aplicação do método. Também provamos, no Teorema 2.2.3, que soluções genéricas da classe de equações obtida dão origem a uma métrica. Na Seção 2.3, demonstramos os Teoremas 2.3.1 a 2.3.4, dos quais o resultado principal da Seção 2.1 é uma conseqüência direta. Tais teoremas classificam todas as equações da forma (2) descrevendo superfícies pseudo-esféricas que são independentes de um dos parâmetros μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, e cujo problema linear satisfaz, além de (4), a condição $\delta \neq 0$. Na Seção 2.4, caracterizamos todas as ocorrências nos Teoremas 2.3.1 a 2.3.4 das equações KdV de quinta ordem, de Sawada–Kotera e de Kaup–Kupershmidt.

No Capítulo 3, classificamos o restante das equações de evolução da forma (2) descrevendo superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo (4), ou seja, lidamos com as classes não-genéricas. Assinalamos que a maior parte dos resultados é estabelecida para k arbitrariamente grande. Na Seção 3.1, demonstramos o Teorema 3.1.1, que caracteriza todas as equações de evolução

$$u_t = \frac{\partial^k u}{\partial x^k} + G\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right), \qquad k \geq 2, \tag{6}$$

descrevendo superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo (4) e $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 = 0$. Mostramos que nenhuma solução da classe de equações obtida dá origem a métricas. Na Seção 3.2, tratamos do Teorema 3.2.2, que determina todas as equações de evolução da forma (2) descrevendo superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo (4), $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$. Prova-se que uma solução genérica dá origem a uma métrica. Para demonstrar o Teorema 3.2.2, estabelecemos o Lema 3.2.1, que fornece condições necessárias sobre as funções recursivas C^{pr} que aparecem no Teorema 1.0.1, e sobre as funções f_{i2}, $1 \leq i \leq 3$, no caso especial em que vigoram (4), $v' \neq 0$, $\delta = 0$ e $\eta_2 \neq 0$. O Lema 3.2.1 vale para qualquer equação de evolução, independentemente da ordem $k \geq 2$. Na Seção 3.3, expomos o Teorema 3.3.1, que fornece todas as equações de evolução da forma (6) descrevendo superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo (4), $v' = 0$. O Teorema 3.3.1 também determina precisamente os casos em que soluções genéricas dão origem a métricas.

No Capítulo 4 determinamos, para grande parte das classes não-genéricas tratadas no Capítulo 3, as equações que são independentes de um dos parâmetros μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$. Na Seção 4.1, classificamos, nos Teoremas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3, parte das equações do Teorema 3.3.1, ou seja, correspondentes ao caso em que $v' = 0$, que são independentes de um dos parâmetros μ_2, η_2, na situação em que $k = 5$. Os Teoremas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 correspondem respectivamente aos casos em que

$$\beta_\tau = 0, \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0, \qquad \beta_\tau = 0, \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau \neq 0, \left(\frac{\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau = 0, \qquad \beta_\tau \neq 0, \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0.$$

Na Seção 4.2, demonstramos os Teoremas 4.2.1, 4.2.2. Eles classificam parte das equações do Teorema 3.1.1, ou seja, correspondentes ao caso em que $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 = 0$, que são independentes de um dos parâmetros μ_p, $2 \leq p \leq 3$, na situação em que $k = 5$. Os Teoremas 4.2.1, 4.2.2 correspondem respectivamente aos casos em que

$$\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0, \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau \neq 0, \left(\frac{\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau = 0.$$

Na Seção 4.3, tratamos do Teorema 4.3.1, que classifica as equações do Teorema 3.2.2, ou seja, correspondentes ao caso em que $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$, que são independentes de um dos parâmetros μ_2, η_p, $2 \leq p \leq 3$, na situação em que $\bar{b}_\tau = 0$. Na Seção 4.4, ilustramos os teoremas do Capítulo 4 com vários casos particulares simples.

Assinalamos que o estabelecimento dos resultados de independência de parâmetro para o restante dos casos não-genéricos depende de investigação complementar.

Capítulo 1

Preliminares

Seja M^2 uma variedade bidimensional com coordenadas locais x, t. Uma equação diferencial numa função real $u(x,t)$ diz-se *descrever superfícies pseudo-esféricas* caso existam 1-formas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, onde as funções f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, dependem de $z_0, \ldots, z_k$, tais que

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \qquad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \qquad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2,$$

são satisfeitas sempre que u é uma solução da equação diferencial. A cada solução u que cumpre $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, pode-se associar uma métrica bidimensional de curvatura gaussiana constante igual a -1, a saber $ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$, com 1-forma de conexão dada por ω_3.

Escrevemos, para indicar as derivadas de u com respeito a x,

$$z_0 = u, \qquad z_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

Seja $f = f(z_0, \ldots, z_k)$ uma função diferenciável. Denotamos suas derivadas por

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z_0}, \qquad f_{,z_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i}, \qquad 0 \leq i \leq k.$$

O Lema 4 em [7] fornece as seguintes condições necessárias e suficientes sobre as funções f_{ij} para que uma equação de evolução $z_{0,t} = F(z_0, \ldots, z_k)$ descreva superfícies pseudo-esféricas:

$$f'_{11} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad f'_{21} \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad f'_{31} \neq 0, \tag{1.1}$$

$$f_{i1,z_j} = 0, \qquad f_{i2,z_k} = 0, \qquad 1 \leq i \leq 3, \; 1 \leq j \leq k, \tag{1.2}$$

$$-f'_{11}F + \sum_{j=0}^{k-1} f_{12,z_j} z_{j+1} + f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} = 0, \tag{1.3}$$

$$-f'_{p1}F + \sum_{j=0}^{k-1} f_{p2,z_j} z_{j+1} - f_{11}f_{(5-p)2} + f_{(5-p)}f_{12} = 0, \qquad 2 \leq p \leq 3. \tag{1.4}$$

No primeiro caso em (1.1), uma classe genérica de equações de evolução descrevendo superfícies pseudo-esféricas é dada pelo Teorema 5 de [7]. Reescrevemos este teorema aqui numa forma que se revela mais conveniente para nossos propósitos.

Teorema 1.0.1 *Sejam f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, funções diferenciáveis de $z_0, \ldots, z_k$, $k \geq 1$, satisfazendo (1.2), e seja v dada por (5). Admitimos que $f'_{11} \neq 0$, $v' \neq 0$. Então uma equação de evolução $z_{0,t} = F(z_0, \ldots, z_k)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, se, e somente se, f_{p2}, $2 \leq p \leq 3$, são definidas em termos de f_{12} e f_{i1}, $1 \leq i \leq 3$, por*

$$f_{p2} = \frac{f_{p1}}{f_{11}} f_{12} + \frac{2}{v'} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{f_{p1}}{f_{11}} \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \, f'_{q1} C^{(5-q)j} + f'_{11} C^{(5-p)j} - f'_{(5-p)1} f_{12,z_j} \right) z_{j+1}, \tag{1.5}$$

as funções $f_{12,}$ f_{i1} satisfazem as equações diferenciais

$$f_{p2,z_r} = C^{pr}, \qquad 0 \leq r \leq k-1, \tag{1.6}$$

com f_{p2} dadas por (1.5), e as funções C^{pr} são definidas recursivamente por

$$C^{p(k-1)} = \frac{f'_{p1}}{f'_{11}} f_{12,z_{k-1}}, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} C^{p(r-1)} &= \frac{f'_{p1}}{f'_{11}} \left(f_{12,z_{r-1}} + \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \, f_{q1} C^{(5-q)r} \right) + f_{11} C^{(5-p)r} - f_{(5-p)1} f_{12,z_r} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{k-1} \left(C^{pr}_{,z_j} - \frac{f'_{p1}}{f'_{11}} f_{12,z_r z_j} \right) z_{j+1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Partindo das expressões do Teorema 5 de [7], é fácil obter as relações (1.5), (1.7) e (1.8) ao tomar $C^{2r} = C^r$ e $C^{3r} = J^r$.

No primeiro caso em (1.1), uma classe não-genérica de equações de evolução descrevendo superfícies pseudo-esféricas é dada pelo Teorema 6 de [7]. Reescrevemos este teorema aqui numa forma que se revela mais conveniente para nossos propósitos.

Teorema 1.0.2 *Sejam f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, funções diferenciáveis de $z_0, \ldots, z_k$, $k \geq 1$, satisfazendo (1.2), e v dada por (5). Admitimos que $f'_{11} \neq 0$ e $v' = 0$. Então uma* *equação de evolução $z_{0,t} = F(z_0, \ldots, z_k)$ descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \le i \le 3$, se, e somente se, f_{12} é definida em termos de f_{p2}, $2 \le p \le 3$, e f_{i1}, $1 \le i \le 3$, por*

$$f_{12} = -\frac{1}{f_{11}f'_{11}} \sum_{j=0}^{k-1} \left(f'_{31} f_{22,z_j} - f'_{21} f_{32,z_j} \right) z_{j+1} + \frac{1}{f'_{11}} \left(f'_{31} f_{32} - f'_{21} f_{22} \right), \tag{1.9}$$

as funções f_{p2}, f_{i1} satisfazem as equações diferenciáveis

$$f_{12,z_r} = L^r, \qquad 0 \le r \le k-1, \tag{1.10}$$

com f_{12} dada por (1.9), e as funções L^r, $1 \le r \le k-1$, são definidas recursivamente por

$$L^{k-1} = \frac{1}{f_{11}} \left(f_{31} f_{32,z_{k-1}} - f_{21} f_{22,z_{k-1}} \right), \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} L^r &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(-L^{r+1}_{,z_j} + \frac{1}{f_{11}} \left(f_{31} f_{32,z_j z_{r+1}} - f_{21} f_{22,z_j z_{r+1}} \right) \right) z_{j+1} \\ &\quad + \frac{1}{f_{11}} \left(f_{31} f_{32,z_r} - f_{21} f_{22,z_r} \right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

e

$$L^0 = \frac{1}{z_1} \sum_{j=1}^{k-1} \left(-L^j + \frac{1}{f_{11}} \left(f_{31} f_{32,z_j} - f_{21} f_{22,z_j} \right) \right) z_{j+1} + \frac{1}{f_{11}} \left(f_{31} f'_{32} - f_{21} f'_{22} \right). \tag{1.13}$$

Capítulo 2

A classe genérica de equações $z_{0,t} = z_5 + G$ com $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$

Neste capítulo trabalharemos com equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descrevendo superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{2.1}$$

além da condição genérica $\delta \neq 0$, com δ dado por (5). Na Seção 2.1, enunciamos o resultado principal no caso genérico e o ilustramos com casos particulares. Na Seção 2.2, obtemos todas as equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ sob as condições descritas acima. Na Seção 2.3, classificamos todas as equações desse tipo que são independentes de um dos parâmetros μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$. Na Seção 2.4, caracterizamos todas as ocorrências das equações KdV de quinta ordem, de Sawada–Kotera e de Kaup–Kupershmidt.

2.1 Resultado principal e casos particulares

Nesta seção, enunciamos o resultado principal no caso genérico e o ilustramos com muitos casos particulares simples. O resultado principal é dividido em quatro teoremas, correspondendo aos casos em que

$$v_{\eta_2} = 0,\ \gamma = 0, \qquad v_{\eta_2} = 0,\ \gamma \neq 0, \qquad v_{\eta_2} \neq 0,\ \gamma = 0, \qquad v_{\eta_2} \neq 0,\ \gamma \neq 0,$$

onde v e γ são dados por (5).

Assinalamos que a escolha do parâmetro η_2 em particular entre μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, é feita para simplificar a exposição.

Teorema 2.1.1 *A equação de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de η_2, e 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo (2.1), $v_{\eta_2} = 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma = 0$, com δ, γ, v dados por (5), se, e somente se,*

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{h'}\left(q_{,z_1} + 3h''z_1\right)z_4 + \frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_1} + 4h''\right)z_2z_3 + \left[\frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_0}z_1 + 3h'''z_1^2 + q'\right) - 2h\right]z_3 \\ &+ \frac{1}{h'}q_{,z_1z_1z_1}z_2^3 + \frac{3}{h'}\left(\left(q_{,z_1z_0}z_1\right)_{,z_1} + h'''z_1\right)z_2^2 \\ &+ \left\{\frac{1}{h'}\left[3\left(q''z_1\right)_{,z_1}z_1 - 2h\left(q_{,z_1} + h''z_1\right) + h''''z_1^3\right] - h'z_1\right\}z_2 \\ &+ \frac{1}{h'}\left(q'''z_1^3 - 2hq'z_1\right) - qz_1, \end{aligned}$$

onde $h = h(z_0)$, $q = q(z_0, z_1)$ são funções diferenciáveis com $h' \neq 0$. As funções f_{ij} são dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= h + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = h - \frac{1+\eta_2^2}{2}, \\ f_{12} &= h'z_4 + \left(q_{,z_1} + 2h''z_1 - \eta_2 h'\right)z_3 + \left(q_{,z_1z_1} + h''\right)z_2^2 + \left(2q_{,z_1z_0}z_1 + q'\right. \\ &\left. + h'''z_1^2 - \eta_2 q_{,z_1} - \eta_2 h''z_1 - hh' - \frac{1-\eta_2^2}{2}h'\right)z_2 + q''z_1^2 - \eta_2 q'z_1 - hq - \frac{1-\eta_2^2}{2}q, \qquad (2.2) \\ f_{22} &= h'z_3 + \left(q_{,z_1} + h''z_1\right)z_2 + q'z_1 - \eta_2\left(h'z_2 + q\right), \qquad f_{32} = f_{12} + h'z_2 + q. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.2 *A equação de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de η_2, e 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo (2.1), $v_{\eta_2} = 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, com δ, γ, v dados por (5), se, e somente se,*

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{h'}\left(q_{,z_1} + 5h''z_1\right)z_4 + \frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_1} + 10h''\right)z_2z_3 \\ &+ \left[\frac{1}{h'}\left(2q_{,z_1z_0}z_1 + 10h'''z_1^2 + \frac{\left(hqz_1\right)_{,z_1z_0}}{h}\right) - h^2 + 1\right]z_3 + \frac{1}{h'}q_{,z_1z_1z_1}z_2^3 \\ &+ \frac{1}{h'}\left(\frac{\left(hqz_1\right)_{,z_1z_1z_0}}{h} + 2q_{,z_1z_1z_0}z_1 + q_{,z_1z_0} + 15h'''z_1\right)z_2^2 + \left\{\frac{1}{h'}\left[2\left(\frac{\left(hq\right)_{,z_1z_0}}{h}\right)'z_1^2\right.\right. \\ &\left.\left. + 3\left(\frac{(hq)'}{h}\right)'z_1 + 10h''''z_1^3 + q_{,z_1z_0z_0}z_1^2 - \left(h^2-1\right)\left(q_{,z_1} + 3h''z_1\right)\right] - hh'z_1\right\}z_2 \\ &+ \frac{1}{h'}\left[\left(\frac{(hq)'}{h}\right)''z_1^3 + h'''''z_1^5 - \left(h^2-1\right)\left(\frac{(hq)'}{h}z_1 + h'''z_1^3\right)\right] \\ &- hqz_1 - hh''z_1^3 + \frac{1}{2}\left(h'\right)^2 z_1^3, \end{aligned}$$

onde $h = h(z_0)$, $q = q(z_0, z_1)$ são funções diferenciáveis com $h' \neq 0$. As funções f_{ij} são *dadas por*

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= h, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = \sqrt{1+\eta_2^2},\\
f_{12} &= h' z_4 + \left(q_{,z_1} + 4h'' z_1\right) z_3 + \left(q_{,z_1 z_1} + 3h''\right) z_2^2 + \left(\frac{(hqz_1)_{,z_1 z_0}}{h} + q_{,z_1 z_0} z_1 + 6h''' z_1^2\right.\\
&\left. -h^2 h'\right) z_2 + \left(\frac{(hq)'}{h}\right)' z_1^2 + h'''' z_1^4 - h\left(hq + hh'' z_1^2 - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2 z_1^2\right),\\
f_{22} &= -\sqrt{1+\eta_2^2}\left(h' z_3 + \left(q_{,z_1} + 3h'' z_1\right) z_2 + \frac{(hq)'}{h} z_1 + h''' z_1^3\right) \qquad (2.3)\\
&-\eta_2\left(hh' z_2 + hq + hh'' z_1^2 - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2 z_1^2\right),\\
f_{32} &= -\eta_2\left(h' z_3 + \left(q_{,z_1} + 3h'' z_1\right) z_2 + \frac{(hq)'}{h} z_1 + h''' z_1^3\right)\\
&-\sqrt{1+\eta_2^2}\left(hh' z_2 + hq + hh'' z_1^2 - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2 z_1^2\right).
\end{aligned}
$$

Teorema 2.1.3 *A equação de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de η_2, e 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \le i \le 3$, satisfazendo (2.1), $v_{\eta_2} \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma = 0$, com δ, γ, v dados por (5), se, e somente se,*

$$
\begin{aligned}
G &= 5\frac{h''}{h'} z_1 z_4 + 10\frac{h''}{h'} z_2 z_3 + \left(10\frac{h'''}{h'} z_1^2 - 5h\right) z_3 + 15\frac{h'''}{h'} z_1 z_2^2 + \left(10\frac{h''''}{h'} z_1^3 - 10h' z_1\right.\\
&\left. -15\frac{hh''}{h'} z_1\right) z_2 + \frac{h'''''}{h'} z_1^5 + \left(-10h'' - 5\frac{hh'''}{h'}\right) z_1^3 + \frac{15}{2} h^2 z_1,
\end{aligned}
$$

onde $h = h(z_0)$ é uma função diferenciável com $h' \neq 0$. As funções f_{ij} são dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{h}{2} + 1, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = \frac{h}{2} - 1,\\
f_{12} &= \frac{1}{2}\left[h' z_4 + \left(4h'' z_1 - \eta_2 h'\right) z_3 + 3h'' z_2^2 + \left(6h''' z_1^2 - 4hh' + \eta_2^2 h' - 3\eta_2 h'' z_1 - 2h'\right) z_2\right.\\
&+ h'''' z_1^4 - \eta_2 h''' z_1^3 + \left(-3\left(h'\right)^2 - 4hh'' + \eta_2^2 h'' - 2h''\right) z_1^2 \qquad (2.4)\\
&\left. -\eta_2\left(-3hh' + \eta_2^2 h'\right) z_1 - 2\left(\frac{h}{2} + 1\right)\left(-\frac{3}{2}h^2 + \eta_2^2 h - \eta_2^4\right)\right],\\
f_{22} &= h' z_3 + 3h'' z_1 z_2 + h''' z_1^3 - 3hh' z_1 + \eta_2^2 h' z_1 - \eta_2\left(h' z_2 + h'' z_1^2 - \frac{3}{2}h^2 + \eta_2^2 h - \eta_2^4\right),\\
f_{32} &= f_{12} + 2h' z_2 + 2h'' z_1^2 - 3h^2 + 2\eta_2^2 h - 2\eta_2^4,
\end{aligned}
$$

onde $\eta_2 \neq 0$.

Teorema 2.1.4 *A equação de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de η_2, e 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \le i \le 3$,* *satisfazendo (2.1),* $v_{\eta_2} \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, *com* δ, γ, v *dados por (5), se, e somente se,*

$$\begin{aligned} G &= 5\frac{h''}{h'}z_1z_4 + 10\frac{h''}{h'}z_2z_3 + \left(10\frac{h'''}{h'}z_1^2 - \frac{5}{2}h^2\right)z_3 + 15\frac{h'''}{h'}z_1z_2^2 + \left(10\frac{h''''}{h'}z_1^3 - 10hh'z_1\right. \\ &\left. -\frac{15}{2}\frac{h^2h''}{h'}z_1\right)z_2 + \frac{h'''''}{h'}z_1^5 + \left(-\frac{5}{2}\left(h'\right)^2 - 10hh'' - \frac{5}{2}\frac{h^2h'''}{h'}\right)z_1^3 + \frac{15}{8}h^4z_1, \end{aligned}$$

onde $h = h\left(z_0\right)$ *é uma função diferenciável com* $h' \neq 0$. *As funções* f_{ij} *são dadas por*

$$\begin{aligned} f_{11} &= h, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = 2\eta_2, \\ f_{12} &= h'z_4 + 4h''z_1z_3 + 3h''z_2^2 + \left(6h'''z_1^2 - \frac{3}{2}h^2h' - 3\eta_2^2h' - h^2h'\right)z_2 + h''''z_1^4 \\ &+ \left[-3h\left(h'\right)^2 - \frac{3}{2}h^2h'' - 3\eta_2^2h'' - h\left(hh'' - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2\right)\right]z_1^2 \\ &-h\left(-\frac{3}{8}h^4 - \frac{3}{2}\eta_2^2h^2 - 9\eta_2^4\right), \\ f_{22} &= -\eta_2\left(2h'z_3 + 6h''z_1z_2 + 2h'''z_1^3 - 3h^2h'z_1 - 6\eta_2^2h'z_1\right. \\ &\left. +hh'z_2 + hh''z_1^2 - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2z_1^2 - \frac{3}{8}h^4 - \frac{3}{2}\eta_2^2h^2 - 9\eta_2^4\right), \\ f_{32} &= -\eta_2\left(h'z_3 + 3h''z_1z_2 + h'''z_1^3 - \frac{3}{2}h^2h'z_1 - 3\eta_2^2h'z_1\right. \\ &\left. +2hh'z_2 + 2hh''z_1^2 - \left(h'\right)^2z_1^2 - \frac{3}{4}h^4 - 3\eta_2^2h^2 - 18\eta_2^4\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $\eta_2 \neq 0$.

Exemplo 2.1.5 As equações de Sawada–Kotera, Kaup–Kupershmidt e KdV de quinta ordem são casos particulares das classes de equações descritas nos Teoremas 2.1.1 e 2.1.3.

Tomando $h = -2z_0$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.3, obtemos que a equação KdV de quinta ordem

$$u_t = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com as 1-formas associadas referidas na Introdução e $\eta \neq 0$.

Fazendo $h = -\frac{1}{2}z_0$, $q = -z_0^2$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.1, obtemos que a equação de Kaup–Kupershmidt

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + \frac{25}{2}u_xu_{xx} + 5u^2u_x$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= -\frac{1}{2}z_0 + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = -\frac{1}{2}z_0 - \frac{1+\eta_2^2}{2},\\
f_{12} &= -\frac{1}{2}z_4 + \frac{\eta_2}{2}z_3 + \left(-\frac{9}{4}z_0 + \frac{1-\eta_2^2}{4}\right)z_2 - 2z_1^2 + 2\eta_2 z_0 z_1 - \frac{1}{2}z_0^3 + \frac{1-\eta_2^2}{2}z_0^2,\\
f_{22} &= -\frac{1}{2}z_3 - 2z_0z_1 - \eta_2\left(-\frac{1}{2}z_2 - z_0^2\right), \qquad f_{32} = f_{12} - \frac{1}{2}z_2 - z_0^2.
\end{aligned}$$

Ao tomarmos $h = -2z_0$, $q = -z_0^2$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.1, obtemos que a equação de Sawada-Kotera

$$u_t = u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 5u_x u_{xx} + 5u^2 u_x$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= -2z_0 + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{p1} = -2z_0 - \frac{1+\eta_2^2}{2},\\
f_{12} &= -2z_4 + 2\eta_2 z_3 + \left(-6z_0 + 1 - \eta_2^2\right)z_2 - 2z_1^2 + 2\eta_2 z_0 z_1 - 2z_0^3 + \frac{1-\eta_2^2}{2}z_0^2,\\
f_{22} &= -2z_3 - 2z_0z_1 - \eta_2\left(-2z_2 - z_0^2\right), \qquad f_{32} = f_{12} - 2z_2 - z_0^2.
\end{aligned}$$

Nos Exemplos 2.4.1 e 2.4.3, obtemos expressões mais gerais para as 1-formas associadas a essas três equações. Em vez do parâmetro η_2, todos os parâmetros μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, aparecem nas 1-formas. Isso se deve ao ponto de vista adotado na Seção 2.3, de trabalhar com independência com respeito a um parâmetro genérico τ. A importância de tal generalidade é que possibilita, em determinada situação específica, atribuir valores particulares aos outros parâmetros de modo a originar um problema linear que favoreça a aplicação do método do espalhamento inverso.

Exemplo 2.1.6 Tomando $h(z_0) = e^{z_0}$, $q(z_0, z_1) = e^{z_0+z_1}$ na classe de equações descritas no Teorema 2.1.1, obtemos que a equação de evolução

$$\begin{aligned}
u_t = {} & u_{xxxxx} + \left(e^{u_x} + 3u_x\right)u_{xxxx} + \left(3e^{u_x} + 4\right)u_{xx}u_{xxx} + \left(3e^{u_x}u_x + 3u_x^2 + e^{u_x} - 2\right)u_{xxx}\\
& + e^{u_x}u_{xx}^3 + 3\left[e^{u_x}\left(u_x + 1\right) + u_x\right]u_{xx}^2 + \left[3e^{u_x}\left(u_x+1\right)u_x - 2e^{u+u_x} - 3e^u u_x + u_x^3\right]u_{xx}\\
& + e^{u_x}u_x^3 - 3e^{u+u_x}u_x
\end{aligned}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= e^{z_0} + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = e^{z_0} - \frac{1+\eta_2^2}{2},\\
f_{12} &= e^{z_0} z_4 + e^{z_0}\left(e^{z_1} + 2z_1 - \eta_2\right) z_3 + e^{z_0}\left(e^{z_1}+1\right) z_2^2 + e^{z_0}\Big(2e^{z_1} z_1 + e^{z_1} + z_1^2 - \eta_2 e^{z_1}\\
&\quad -\eta_2 z_1 - e^{z_0} - \frac{1-\eta_2^2}{2}\Big) z_2 + e^{z_0+z_1} z_1^2 - \eta_2 e^{z_0+z_1} z_1 - e^{2z_0+z_1} - \frac{1-\eta_2^2}{2} e^{z_0+z_1},\\
f_{22} &= e^{z_0} z_3 + e^{z_0}\left(e^{z_1} + z_1\right) z_2 + e^{z_0+z_1} z_1 - \eta_2 e^{z_0}\left(z_2 + e^{z_1}\right), \qquad f_{32} = f_{12} + e^{z_0} z_2 + e^{z_0+z_1}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.7 No Teorema 2.1.1, obtemos, ao fazer $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = z_0$, que a equação de evolução

$$u_t = u_{xxxxx} + (1-2u)\, u_{xxx} - u_x u_{xx} - 3uu_x$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= z_0 + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = z_0 - \frac{1+\eta_2^2}{2},\\
f_{12} &= z_4 - \eta_2 z_3 + \left(1 - z_0 - \frac{1-\eta_2^2}{2}\right) z_2 - \eta_2 z_1 - z_0^2 - \frac{1-\eta_2^2}{2} z_0,\\
f_{22} &= z_3 + z_1 - \eta_2\left(z_2 + z_0\right), \qquad f_{32} = f_{12} + z_2 + z_0.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.8 Caso tomemos $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = z_1$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.1, obtemos que

$$u_t = u_{xxxxx} + u_{xxxx} - 2uu_{xxx} + (-2u - u_x)\, u_{xx} - u_x^2$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= z_0 + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = z_0 - \frac{1+\eta_2^2}{2},\\
f_{12} &= z_4 + (1-\eta_2)\, z_3 + \left(-\eta_2 - z_0 - \frac{1-\eta_2^2}{2}\right) z_2 - z_0 z_1 - \frac{1-\eta_2^2}{2} z_1,\\
f_{22} &= z_3 + z_2 - \eta_2\left(z_2 + z_1\right), \qquad f_{32} = f_{12} + z_2 + z_1.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.9 Fazendo $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = z_0 z_1$ na classe de equações descritas no Teorema 2.1.1, obtemos que a equação de evolução

$$u_t = u_{xxxxx} + uu_{xxxx} + (4u_x - 2u)\, u_{xxx} + 3u_{xx}^2 + \left(-2u^2 - u_x\right) u_{xx} - 3uu_x^2$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= z_0 + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = z_0 - \frac{1+\eta_2^2}{2}, \\
f_{12} &= z_4 + (z_0 - \eta_2)\, z_3 + \left(3z_1 - \eta_2 z_0 - z_0 - \frac{1-\eta_2^2}{2}\right) z_2 - \eta_2 z_1^2 - z_0^2 z_1 - \frac{1-\eta_2^2}{2} z_0 z_1, \\
f_{22} &= z_3 + z_0 z_2 + z_1^2 - \eta_2\,(z_2 + z_0 z_1)\,, \qquad f_{32} = f_{12} + z_2 + z_0 z_1.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.10 Na classe de equações descrita no Teorema 2.1.1, obtemos, ao tomar $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = z_1^2 + z_0^2$, que a equação de evolução

$$u_t = u_{xxxxx} + 2u_x u_{xxxx} + 6u_{xx} u_{xxx} + (5u_x - 4uu_x)\, u_{xx} - u_x^3 - 5u^2 u_x$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= z_0 + \frac{1-\eta_2^2}{2}, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = z_0 - \frac{1+\eta_2^2}{2}, \\
f_{12} &= z_4 + (2z_1 - \eta_2)\, z_3 + 2z_2^2 + \left(2z_0 - 2\eta_2 z_1 - z_0 - \frac{1-\eta_2^2}{2}\right) z_2 \\
&\quad + 2z_1^2 - 2\eta_2 z_0 z_1 - z_1^2 z_0 - z_0^3 - \frac{1-\eta_2^2}{2}\left(z_1^2 + z_0^2\right), \\
f_{22} &= z_3 + 2z_1 z_2 + 2z_0 z_1 - \eta_2\left(z_2 + z_1^2 + z_0^2\right), \qquad f_{32} = f_{12} + z_2 + z_1^2 + z_0^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.11 Tomando $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = z_0$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.2, obtemos que a equação de evolução

$$u_t = u_{xxxxx} + \left(3 - u^2\right) u_{xxx} - uu_x u_{xx} + \frac{1}{2} u_x^3 - 3u^2 u_x + 2u_x$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= z_0, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = \sqrt{1+\eta_2^2}, \\
f_{12} &= z_4 + \left(2 - z_0^2\right) z_2 + \frac{1}{2} z_0 z_1^2 - z_0^3, \\
f_{22} &= -\sqrt{1+\eta_2^2}\,(z_3 + 2z_1) - \eta_2\left(z_0 z_2 - \frac{1}{2} z_1^2 + z_0^2\right), \\
f_{32} &= -\eta_2\,(z_3 + 2z_1) - \sqrt{1+\eta_2^2}\left(z_0 z_2 - \frac{1}{2} z_1^2 + z_0^2\right).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.12 Caso façamos $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = \frac{1}{z_0}$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.2, obtemos que a equação de evolução

$$u_t = u_{xxxxx} + \left(1 - u^2\right) u_{xxx} - uu_x u_{xx} + \frac{1}{2} u_x^3 - u_x$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= z_0, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = \sqrt{1+\eta_2^2}, \\
f_{12} &= z_4 - z_0^2 z_2 + \frac{1}{2} z_0 z_1^2 - z_0, \\
f_{22} &= -\sqrt{1+\eta_2^2}\, z_3 - \eta_2 \left(z_0 z_2 - \frac{1}{2} z_1^2 + 1 \right), \\
f_{32} &= -\eta_2 z_3 - \sqrt{1+\eta_2^2} \left(z_0 z_2 - \frac{1}{2} z_1^2 + 1 \right).
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.13 Tomando $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = \frac{1}{z_1}$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.2, obtemos que equação de evolução

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xxxxx} - \frac{1}{u_x^2} u_{xxxx} + \frac{6}{u_x^3} u_{xx} u_{xxx} + \left(1 - u^2\right) u_{xxx} - \frac{6}{u_x^4} u_{xx}^3 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{u^2} + \left(u^2 - 1\right) \frac{1}{u_x^2} - u u_x \right) u_{xx} + \frac{1}{2} u_x^3 + \frac{2}{u^3} u_x^2 + \frac{1}{u} - 2u
\end{aligned}
$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= z_0, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = \sqrt{1+\eta_2^2}, \\
f_{12} &= z_4 - \frac{1}{z_1^2} z_3 + \frac{2}{z_1^3} z_2^2 - z_0^2 z_2 - \frac{z_1}{z_0^2} - \frac{z_0^2}{z_1} + \frac{1}{2} z_0 z_1^2, \\
f_{22} &= -\sqrt{1+\eta_2^2} \left(z_3 - \frac{1}{z_1^2} z_2 + \frac{1}{z_0} \right) - \eta_2 \left(z_0 z_2 + \frac{z_0}{z_1} - \frac{1}{2} z_1^2 \right), \\
f_{32} &= -\eta_2 \left(z_3 - \frac{1}{z_1^2} z_2 + \frac{1}{z_0} \right) - \sqrt{1+\eta_2^2} \left(z_0 z_2 + \frac{z_0}{z_1} - \frac{1}{2} z_1^2 \right).
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.14 Na classe de equações descritas do Teorema 2.1.2, obtemos, ao tomar $h(z_0) = z_0$, $q(z_0, z_1) = \frac{1}{z_0 z_1}$, que a equação de evolução

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xxxxx} - \frac{1}{u u_x^2} u_{xxxx} + \frac{6}{u u_x^3} u_{xx} u_{xxx} + \left(\frac{2}{u^2 u_x} - u^2 + 1 \right) u_{xxx} - \frac{6}{u u_x^4} u_{xx}^3 \\
&\quad - \frac{3}{u^2 u_x^2} u_{xx}^2 + \left(\frac{u}{u_x^2} - \frac{1}{u u_x^2} - u u_x - \frac{2}{u^3} \right) u_{xx} + \frac{1}{2} u_x^3 - 1
\end{aligned}
$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= z_0, \qquad f_{21} = \eta_2, \qquad f_{31} = \sqrt{1+\eta_2^2}, \\
f_{12} &= z_4 - \frac{1}{z_0 z_1^2} z_3 + \frac{2}{z_0 z_1^3} z_2^2 + \left(\frac{1}{z_0^2 z_1} - z_0^2 \right) z_2 - \frac{z_0}{z_1} + \frac{1}{2} z_0 z_1^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{22} &= -\sqrt{1+\eta_2^2}\left(z_3 - \frac{1}{z_0 z_1^2} z_2\right) - \eta_2\left(z_0 z_2 + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{2} z_1^2\right),\\
f_{32} &= -\eta_2\left(z_3 - \frac{1}{z_0 z_1^2} z_2\right) - \sqrt{1+\eta_2^2}\left(z_0 z_2 + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{2} z_1^2\right).
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.15 Caso façamos $h(z_0) = z_0$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.3, obtemos que a equação de evolução

$$
u_t = u_{xxxxx} - 5uu_{xxx} - 10u_x u_{xx} + \frac{15}{2} u^2 u_x
$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{z_0}{2} + 1, \qquad f_{21} = \eta_2 \neq 0, \qquad f_{31} = \frac{z_0}{2} - 1,\\
f_{12} &= \frac{1}{2}\Big[z_4 - \eta_2 z_3 + \left(-4z_0 + \eta_2^2 - 2\right) z_2 - 3z_1^2 - \eta_2\left(-3z_0 + \eta_2^2\right) z_1\\
&\quad -2\left(\frac{z_0}{2} + 1\right)\left(-\frac{3}{2} z_0^2 + \eta_2^2 z_0 - \eta_2^4\right)\Big],\\
f_{22} &= z_3 - 3z_0 z_1 + \eta_2^2 z_1 - \eta_2\left(z_2 - \frac{3}{2} z_0^2 + \eta_2^2 z_0 - \eta_2^4\right),\\
f_{32} &= f_{12} + 2z_2 - 3z_0^2 + 2\eta_2^2 z_0 - 2\eta_2^4.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.1.16 Tomando $h(z_0) = z_0$ na classe de equações descrita no Teorema 2.1.4, obtemos que a equação de evolução

$$
u_t = u_{xxxxx} - \frac{5}{2} u^2 u_{xxx} - 10uu_x u_{xx} - \frac{5}{2} u_x^3 + \frac{15}{8} u^4 u_x
$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= z_0, \qquad f_{21} = \eta_2 \neq 0, \qquad f_{31} = 2\eta_2,\\
f_{12} &= z_4 + \left(-\frac{3}{2} z_0^2 - 3\eta_2^2 - z_0^2\right) z_2 - \frac{5}{2} z_0 z_1^2 + \frac{3}{8} z_0^5 + \frac{3}{2}\eta_2^2 z_0^3 + 9\eta_2^4 z_0,\\
f_{22} &= -\eta_2\left(2z_3 - 3z_0^2 z_1 - 6\eta_2^2 z_1 + z_0 z_2 - \frac{1}{2} z_1^2 - \frac{3}{8} z_0^4 - \frac{3}{2}\eta_2^2 z_0^2 - 9\eta_2^4\right),\\
f_{32} &= -\eta_2\left(z_3 - \frac{3}{2} z_0^2 z_1 - 3\eta_2^2 z_1 + 2z_0 z_2 - z_1^2 - \frac{3}{4} z_0^4 - 3\eta_2^2 z_0^2 - 18\eta_2^4\right).
\end{aligned}
$$

2.2 Equações $z_{0,t} = z_5 + G$ com $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$ e $\delta \neq 0$

Nesta seção, obtemos todas as equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descrevendo superfícies pseudo-esféricas cujas 1-formas associadas satisfazem

$$
f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{2.6}
$$

além da condição genérica $\delta \neq 0$, com δ dado por (5). Este é o objetivo do Teorema 2.2.3. Para demonstrá-lo, estabelecemos, no Lema 2.2.1, condições necessárias sobre as funções recursivas C^{pr} que aparecem no Teorema 1.0.1, e sobre as funções f_{i2}, $1 \leq i \leq 3$, no caso especial em que vigoram (2.6), $v' \neq 0$ e $\delta \neq 0$, com v, δ dados por (5). Assinalamos que o Lema 2.2.1 vale para qualquer equação de evolução, independentemente da ordem k, sugerindo que o método do Teorema 2.2.3 pode ser estendido para encontrar classes adicionais de equações. Também provamos, no Teorema 2.2.3, que uma solução genérica da classe de equações obtida dá origem a uma métrica.

Antes de prosseguir, observamos que, substituindo (2.6) em (1.1), resulta que $g' \neq 0$.

Lema 2.2.1 *Admitimos que a equação de evolução* $z_{0,t} = F(z_0, \ldots, z_k)$, $k \geq 2$, *descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas* $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$. *Sejam* μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, *números reais, e* $\alpha, \beta, \gamma, \xi_p, \delta, v, g, b$ *dadas por (5). Admitimos que valem (2.6) e* $v' \neq 0$. *Então, para* $2 \leq p \leq 3$, $0 \leq r \leq k-1$, *temos que as funções* C^{pr} *do Teorema 1.0.1 são dadas por*

$$C^{pr} = \mu_p f_{12,z_r} + \xi_{5-p} s_r + \eta_p t_r, \tag{2.7}$$

onde as funções s_r, t_r *são definidas recursivamente por*

$$s_{k-1} = t_{k-1} = 0, \tag{2.8}$$

e, para $1 \leq r \leq k-1$,

$$\begin{aligned} s_{r-1} &= -\sum_{j=0}^{k-1} s_{r,z_j} z_{j+1} + f_{12,z_r} - \beta s_r - g t_r, \\ t_{r-1} &= -\sum_{j=0}^{k-1} t_{r,z_j} z_{j+1} - b s_r. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Além disso, para $2 \leq p \leq 3$,

$$f_{p2} = \mu_p f_{12} - \frac{\xi_{5-p}}{b} \sum_{j=0}^{k-2} t_j z_{j+1} + \frac{\eta_p}{g} \left[f_{12} + \sum_{j=0}^{k-2} \left(\frac{\beta}{b} t_j - s_j \right) z_{j+1} \right]. \tag{2.10}$$

Sempre que $\delta \neq 0$, *as funções* s_r, t_r *satisfazem, para* $1 \leq r \leq k-1$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-2} s_{r,z_j z_r} z_{j+1} + 2s_{r,z_{r-1}} - f_{12,z_r z_r} + \beta s_{r,z_r} + g t_{r,z_r} &= 0, \\ \sum_{j=0}^{k-2} t_{r,z_j z_r} z_{j+1} + 2t_{r,z_{r-1}} + b s_{r,z_r} &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Demonstração. Como $g' \neq 0$ e $v' \neq 0$, estamos de fato na situação considerada no Teorema 1.0.1. Usando (2.6) em (1.7), obtemos

$$C^{p(k-1)} = \frac{\mu_p g'}{g'} f_{12,z_{k-1}} = \mu_p f_{12,z_{k-1}},$$

que, em vista de (2.8), prova (2.7) para $r = k-1$. Falta estabelecer (2.7) para $0 \leq r \leq k-2$. Para tal, admitimos recursivamente que (2.7) vale para $1 \leq r \leq k-1$. Substituindo (2.6), (2.7) em (1.8) decorre que

$$\begin{aligned}
C^{p(r-1)} &= \mu_p \left(f_{12,z_{r-1}} + \sum_{q=2}^{3} (-1)^q f_{q1} C^{(5-q)r} \right) + g C^{(5-p)r} - f_{(5-p)1} f_{12,z_r} \\
&\quad - \sum_{j=0}^{k-1} \left(C^{pr}_{,z_j} - \mu_p f_{12,z_r z_j} \right) z_{j+1} \\
&= \mu_p f_{12,z_{r-1}} + R_p f_{12,z_r} + S_p s_r + T_p t_r - \xi_{5-p} \sum_{j=0}^{k-1} s_{r,z_j} z_{j+1} \\
&\quad - \eta_p \sum_{j=0}^{k-1} t_{r,z_j} z_{j+1},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde, para $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned}
R_p &= \mu_p \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \mu_{5-q} f_{q1} + \mu_{5-p} g - f_{(5-p)1}, \\
S_p &= \mu_p \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \xi_q f_{q1} + \xi_p g, \\
T_p &= \mu_p \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \eta_{5-q} f_{q1} + \eta_{5-p} g.
\end{aligned}$$

Utilizando (5), (2.6) nessas relações, calculamos

$$\begin{aligned}
R_p &= \mu_p \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \mu_{5-q} (\mu_q g + \eta_q) + \mu_{5-p} g - \mu_{5-p} g - \eta_{5-p} \\
&= \mu_p \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \mu_{5-q} \eta_q - \eta_{5-p} \\
&= -(-1)^p \mu_p^2 \eta_{5-p} + (-1)^p \mu_p \mu_{5-p} \eta_p + (-1)^{5-p} \mu_{5-p}^2 \eta_{5-p} - (-1)^{5-p} \mu_{5-p}^2 \eta_{5-p} - \eta_{5-p} \\
&= \mu_{5-p} \alpha - \eta_{5-p} \gamma \\
&= \xi_{5-p},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_p &= \mu_p\left(\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\mu_q(\mu_q\alpha-\eta_q\gamma)g+(-1)^{5-p}\eta_{5-p}\xi_{5-p}+(-1)^p\eta_p(\mu_p\alpha-\eta_p\gamma)\right)\\
&\quad+(\mu_p\alpha-\eta_p\gamma)g\\
&= \mu_p\left[\alpha\left(\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\mu_q^2+1\right)-\gamma\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\mu_q\eta_q\right]g\\
&\quad-(-1)^p\mu_p\eta_{5-p}\xi_{5-p}+(-1)^p\eta_p\left(\mu_p^2\alpha-\mu_p\eta_p\gamma\right)-\eta_p\gamma g\\
&= \mu_p(\gamma\alpha-\alpha\gamma)g-(-1)^p\mu_p\eta_{5-p}\xi_{5-p}+\eta_p\left((-1)^p\mu_p^2\alpha+\alpha-(-1)^p\mu_p\eta_p\gamma\right)\\
&\quad-\eta_p(\gamma g+\alpha)\\
&= -(-1)^p\mu_p\eta_{5-p}\xi_{5-p}+\eta_p\left(\gamma\alpha-(-1)^{5-p}\mu_{5-p}^2\alpha-(-1)^p\mu_p\eta_p\gamma\right)-\eta_p b\\
&= -(-1)^p\mu_p\eta_{5-p}\xi_{5-p}+\eta_p\left(-(-1)^{5-p}\mu_{5-p}^2\alpha+(-1)^{5-p}\mu_{5-p}\eta_{5-p}\gamma\right)-\eta_p b\\
&= -(-1)^p\mu_p\eta_{5-p}\xi_{5-p}-(-1)^{5-p}\mu_{5-p}\eta_p\xi_{5-p}-\eta_p b\\
&= -\beta\xi_{5-p}-\eta_p b,\\
T_p &= \mu_p\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\eta_{5-q}(\mu_q g+\eta_q)+\eta_{5-p}g=-\left(-\mu_p\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\mu_q\eta_{5-q}-\eta_{5-p}\right)g\\
&= -\left((-1)^p\mu_{5-p}\mu_p\eta_p+(-1)^{5-p}\mu_{5-p}^2\eta_{5-p}-(-1)^{5-p}\mu_{5-p}^2\eta_{5-p}-(-1)^p\mu_p^2\eta_{5-p}-\eta_{5-p}\right)g\\
&= -(\mu_{5-p}\alpha-\eta_{5-p}\gamma)g\\
&= -\xi_{5-p}g.
\end{aligned}
$$

Substituindo essas expressões em (2.12), obtemos

$$C^{p(r-1)}=\mu_p f_{12,z_{r-1}}+\xi_{5-p}\left(f_{12,z_r}-\beta s_r-gt_r-\sum_{j=0}^{k-1}s_{r,z_j}z_{j+1}\right)+\eta_p\left(-bs_r-\sum_{j=0}^{k-1}t_{r,z_j}z_{j+1}\right),$$

que, em vista de (2.9), demonstra (2.7) para $0\le r\le k-2$.

Para demonstrar (2.10), devemos primeiramente estabelecer algumas relações. Substituindo (2.6) em (5), obtemos a expressão conveniente para v dada por

$$
\begin{aligned}
v &= g^2+(\mu_2 g+\eta_2)^2-(\mu_3 g+\eta_3)^2\\
&= g^2+\mu_2^2g^2+2\mu_2\eta_2 g+\eta_2^2-\mu_3^2g^2-2\mu_3\eta_3 g-\eta_3^2\\
&= \gamma g^2+2\alpha g+\eta_2^2-\eta_3^2, \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

de modo que, usando (5) novamente,

$$v'=2bg'. \qquad (2.14)$$

Decorre de (5) que

$$\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\mu_q\xi_q=\alpha\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\mu_q^2-\gamma\sum_{q=2}^{3}(-1)^q\mu_q\eta_q=\alpha(\gamma-1)-\gamma\alpha=-\alpha. \qquad (2.15)$$

Como conseqüência de (2.6), (5), obtemos

$$\begin{aligned}
\beta f_{p1} + \eta_{5-p} g &= (\mu_p \beta + \eta_{5-p})\, g + \eta_p \beta \\
&= \big(-(-1)^p \mu_p \mu_{5-p} \eta_p - (-1)^{5-p} \mu_{5-p}^2 \eta_{5-p} + (-1)^{5-p} \mu_{5-p}^2 \eta_{5-p} \\
&\quad + (-1)^p \mu_p^2 \eta_{5-p} + \eta_{5-p} \big)\, g + \eta_p \beta \qquad (2.16) \\
&= -(\mu_{5-p}\alpha - \eta_{5-p}\gamma)\, g + \eta_p \beta = -\xi_{5-p} g + \eta_p \beta. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Utilizando sucessivamente (2.6), (2.14), (2.7), (2.8), (2.15), (5), (2.17) em (1.5) decorre que

$$\begin{aligned}
f_{p2} &= \left(\mu_p + \frac{\eta_p}{g} \right) f_{12} + \frac{1}{g'b} \sum_{j=0}^{k-1} \Bigg(\frac{f_{p1}}{g} \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \mu_q g' C^{(5-q)j} \\
&\quad + g' C^{(5-p)j} - \mu_{(5-p)} g' f_{12,z_j} \Bigg) z_{j+1} \\
&= \mu_p f_{12} + \frac{\eta_p}{g} f_{12} + \frac{1}{gb} \sum_{j=0}^{k-1} \Bigg(f_{p1} s_j \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \mu_q \xi_q \\
&\quad + f_{p1} t_j \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \mu_q \eta_{5-q} + g\, (\xi_p s_j + \eta_{5-p} t_j) \Bigg) z_{j+1} \\
&= \mu_p f_{12} + \frac{\eta_p}{g} f_{12} + \frac{1}{gb} \sum_{j=0}^{k-2} \{ [-\alpha\, (\mu_p g + \eta_p) + (\mu_p \alpha - \eta_p \gamma)\, g]\, s_j \\
&\quad + (\beta f_{p1} + \eta_{5-p} g)\, t_j \} \, z_{j+1} \\
&= \mu_p f_{12} + \frac{\eta_p}{g} f_{12} + \frac{1}{gb} \sum_{j=0}^{k-2} [-\eta_p b s_j + (-\xi_{5-p} g + \eta_p \beta)\, t_j]\, z_{j+1},
\end{aligned}$$

que demonstra (2.10) de imediato.

Finalmente, admitimos que $\delta \neq 0$. Levando em conta (1.6), temos, para $0 \leq j \leq k-1$, $1 \leq r \leq k-1$, que

$$C^{pj}_{,z_r} = f_{p2,z_j z_r} = f_{p2,z_r z_j} = C^{pr}_{,z_j},$$

que, junto com (2.7), fornece

$$\mu_p f_{12,z_j z_r} + \xi_{5-p} s_{j,z_r} + \eta_p t_{j,z_r} = \mu_p f_{12,z_r z_j} + \xi_{5-p} s_{r,z_j} + \eta_p t_{r,z_j}.$$

Temos, assim, um sistema linear homogêneo do tipo

$$\xi_{5-p} X + \eta_p Y = 0, \qquad 2 \leq p \leq 3, \qquad (2.18)$$

com $X = s_{j,z_r} - s_{r,z_j}$, $Y = t_{j,z_r} - t_{r,z_j}$. Segue-se de (5) que o seu determinante é $-\delta \neq 0$. Portanto, o sistema possui apenas a solução nula, de modo que

$$s_{j,z_r} = s_{r,z_j}, \qquad t_{j,z_r} = t_{r,z_j}. \qquad (2.19)$$

Como decorrência de (2.19) para $j = k - 1$ e (2.8), obtemos

$$s_{r,z_{k-1}} = t_{r,z_{k-1}} = 0. \tag{2.20}$$

Derivando (2.9) com respeito a z_r, para $1 \leq r \leq k-1$, e usando (2.19), (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= s_{r-1,z_r} - \left(- \sum_{j=0}^{k-2} s_{r,z_j} z_{j+1} + f_{12,z_r} - \beta s_r - g t_r \right)_{,z_r} \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} s_{r,z_j z_r} z_{j+1} + 2 s_{r,z_{r-1}} - f_{12,z_r z_r} + \beta s_{r,z_r} + g t_{r,z_r}, \\ 0 &= t_{r-1,z_r} - \left(- \sum_{j=0}^{k-2} t_{r,z_j} z_{j+1} - b s_r \right)_{,z_r} = \sum_{j=0}^{k-2} t_{r,z_j z_r} z_{j+1} + 2 t_{r,z_{r-1}} + b s_{r,z_r}, \end{aligned}$$

provando assim (2.11).

$\square$

Exemplo 2.2.2 A família infinita de equações de evolução conhecida como hierarquia de Korteweg–de Vries (vide [14]) possui funções associadas satisfazendo $f_{11} = 1 - z_0$, $f_{21} = \eta$, $f_{31} = -1 - z_0$, de modo que, por (5), temos $\alpha = -2$, $\gamma = 0$, $\delta = 4$, e, por (2.14), vem $v' = 4$. Portanto as hipóteses do Lema 2.2.1 são cumpridas.

Estamos agora em condições de obter, no Teorema 2.2.3, todas as equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descrevendo superfícies pseudo-esféricas cujas 1-formas associadas satisfazem

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{2.21}$$

além da condição genérica $\delta \neq 0$. Temos também que toda solução é genérica, ou seja, dá origem a uma métrica.

Teorema 2.2.3 *Sejam f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, funções diferenciáveis de $z_0, \ldots, z_5$ satisfazendo (1.2). Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais e $\alpha, \beta, \gamma, \xi_p, \delta, v, g, b, \widetilde{g}$ dadas por (5). Admitimos que valem (2.21) e $\delta \neq 0$. Então uma equação $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$,* *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{g'}\left(m_{,z_1}+2g''z_1\right)z_4+\frac{1}{g'}\left(3m_{,z_1z_1}+g''\right)z_2z_3 \\ &\quad+\left[\frac{1}{g'}\left(2m_{,z_1z_0}z_1+g'''z_1^2+\mathring{m}_{,z_1}\right)-v\right]z_3+\frac{1}{g'}m_{,z_1z_1z_1}z_2^3 \\ &\quad+\frac{1}{g'}\left(2m_{,z_1z_1z_0}z_1+m_{,z_1z_0}+\mathring{m}_{,z_1z_1}\right)z_2^2 \\ &\quad+\left[\frac{1}{g'}\left(2\mathring{m}_{,z_1z_0}z_1+\mathring{m}'+m_{,z_1z_0z_0}z_1^2-vm_{,z_1}\right)-bg'z_1\right]z_2 \\ &\quad+\frac{1}{g'}\left(\mathring{m}''z_1^2-v\mathring{m}\right)-b\left(mz_1-\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^3\right), \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $m=m\left(z_0,z_1\right)$ *é uma função diferenciável,*

$$\mathring{m}=\frac{1}{b}\left[b\left(mz_1-\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^3\right)\right]', \tag{2.23}$$

e as funções f_{i2}, $1\leq i\leq 3$, *são dadas, para* $2\leq p\leq 3$, *por*

$$\begin{aligned} f_{12} &= g'z_4+\left(m_{,z_1}+g''z_1+\beta g'\right)z_3+m_{,z_1z_1}z_2^2+\left(\mathring{m}_{,z_1}+m_{,z_1z_0}z_1+\beta m_{,z_1}-bg'g\right)z_2 \\ &\quad+\mathring{m}'z_1+\beta\mathring{m}-gb\left(m-\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2\right), \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$f_{p2} = \mu_p f_{12}+\xi_{5-p}\left(g'z_3+m_{,z_1}z_2+\mathring{m}\right)-\eta_p b\left(g'z_2+m-\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2\right). \tag{2.25}$$

Além disso, uma solução genérica $u=z_0$ *cumpre* $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$.

Demonstração. Em vista de (5), temos

$$\delta=\sum_{p=2}^{3}\left(-1\right)^p\eta_p\left(\mu_p\alpha-\eta_p\gamma\right)=\alpha^2-\gamma\left(\eta_2^2-\eta_3^2\right). \tag{2.26}$$

Decorre disso e de $\delta\neq 0$, que $\alpha\neq 0$ ou $\gamma\neq 0$. Levando em conta isso e $g\neq 0$ em (5), obtemos $b\neq 0$. Utilizando isso e $g'\neq 0$ em (2.14), obtemos $v'\neq 0$. Como $g'\neq 0$ e $v'\neq 0$, estamos de fato na situação considerada no Teorema 1.0.1, que aplicaremos para determinar as 1-formas ω_i. Para tal, primeiramente fazemos uso do Lema 2.2.1 para calcular as funções C^{pr}, f_{12}, f_{p2}, $0\leq r\leq 4$, $2\leq p\leq 3$.

Em vista de (2.8), temos

$$s_4=t_4=0. \tag{2.27}$$

Tomando $F=z_5+G$ em (1.3), $k=5$, obtemos

$$-g'z_5-g'G+f_{12,z_4}z_5+\sum_{j=0}^{3}f_{12,z_j}z_{j+1}+f_{21}f_{32}-f_{31}f_{22}=0, \tag{2.28}$$

que, derivando com respeito a z_5, fornece $f_{12,z_4} = g'$. Integrando com respeito a z_4, obtemos l_1 tal que

$$f_{12} = g'z_4 + l_1(z_0, z_1, z_2, z_3). \tag{2.29}$$

Substituindo (2.27), (2.29), em (2.9), $r = 4$ vem

$$s_3 = g', \qquad t_3 = 0. \tag{2.30}$$

Ao substituirmos (2.29), (2.30) na primeira relação de (2.11), $r = 3$, obtemos $l_{1,z_3z_3} = 0$. Integrando duas vezes com respeito a z_3 obtemos funções $l_i = l_i(z_0, z_1, z_2)$, $i = 2, 3$, tais que $l_1 = l_2z_3 + l_3$, e então (2.29) se torna

$$f_{12} = g'z_4 + l_2z_3 + l_3. \tag{2.31}$$

Usando (2.30), (2.31) em (2.9), $r = 3$, obtemos

$$s_2 = -g''z_1 + l_2 - \beta g', \qquad t_2 = -bg'. \tag{2.32}$$

Substituindo na segunda relação de (2.11), $r = 2$, obtemos, em vista de $b \neq 0$, que $l_{2,z_2} = 0$. Assim, $l_2 = l_2(z_0, z_1)$, e, por (2.32), $s_2 = s_2(z_0, z_1)$, de modo que existe $l = l(z_0, z_1)$ tal que

$$l_{,z_1} = s_2. \tag{2.33}$$

Agora, utilizando (2.31), (2.33) e o valor de t_2 dado por (2.32), na primeira relação de (2.11), $r = 2$, ficamos com $2l_{,z_1z_1} - l_{3,z_2z_2} = 0$. Integrando duas vezes com respeito a z_2, obtemos funções $l_i = l_i(z_0, z_1)$, $i = 4, 5$, tais que

$$l_3 = l_{,z_1z_1}z_2^2 + l_4z_2 + l_5. \tag{2.34}$$

Comparando (2.33) com (2.32), determina-se l_2 em termos de l. Utilizando isso e (2.34) em (2.31), obtemos

$$f_{12} = g'z_4 + (l_{,z_1} + g''z_1 + \beta g')\, z_3 + l_{,z_1z_1}z_2^2 + l_4z_2 + l_5. \tag{2.35}$$

Agora (2.32), (2.33) e (2.35) substituídos em (2.9), $r = 2$, e usando (5), tem-se

$$\begin{aligned} s_1 &= -l_{,z_1z_0}z_1 - l_{,z_1z_1}z_2 + 2l_{,z_1z_1}z_2 + l_4 - \beta l_{,z_1} + gbg' \\ &= -l_{,z_1z_0}z_1 + l_{,z_1z_1}z_2 + l_4 - \beta l_{,z_1} + gbg', \qquad (2.36) \\ t_1 &= b\,(\widetilde{g}z_1 - l_{,z_1}) = \left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 - l\right)\right]_{,z_1}. \qquad (2.37) \end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que qualquer função diferenciável f satisfaz a relação diferencial

$$(fz_i)_{,z_iz_i} = f_{,z_iz_i}z_i + 2f_{,z_i}. \tag{2.38}$$

Ao usarmos (2.36), (2.37) na segunda relação de (2.11), $r = 1$, e aplicar (2.38), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 - l\right)\right]_{,z_1z_1z_0} z_1 - bl_{1,z_1z_1z_1}z_2 + 2\left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 - l\right)\right]_{,z_1z_0} \\ &\quad + b\left(-l_{,z_1z_0}z_1 + l_{,z_1z_1}z_2 + l_4 - \beta l_{,z_1}\right)_{,z_1} \\ &= \left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 - l\right)z_1\right]_{,z_1z_1z_0} + b\left(-l_{,z_1z_0}z_1 + l_4 - \beta l_{,z_1}\right)_{,z_1}. \end{aligned}$$

Dividindo por b e integrando com respeito a z_1, obtemos uma função arbitrária de z_0, que pode ser escrita como $h_1 - gbg'$, tal que

$$l_4 = \left\{\frac{1}{b}\left[b\left(l - \frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2\right)\right]' z_1\right\}_{,z_1} + l_{,z_1z_0}z_1 + \beta l_{,z_1} + h_1 - gbg'. \tag{2.39}$$

Se denotamos

$$k = \frac{1}{b}\left[b\left(l - \frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2\right)\right]' + h_1, \tag{2.40}$$

então (2.37), (2.39) ficam

$$t_1' = -b\left\{\frac{1}{b}\left[b\left(l - \frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2\right)\right]'\right\}_{,z_1} = -bk_{,z_1}, \tag{2.41}$$

$$l_4 = (kz_1)_{,z_1} + l_{,z_1z_0}z_1 + \beta l_{,z_1} - gbg', \tag{2.42}$$

que, combinado com (2.36), dá

$$\begin{aligned} s_1 &= -l_{,z_1z_0}z_1 - l_{,z_1z_1}z_2 + 2l_{,z_1z_1}z_2 + (kz_1)_{,z_1} + l_{,z_1z_0}z_1 + \beta l_{,z_1} - gbg' - \beta l_{,z_1} + gbg' \\ &= \left(l_{,z_1}z_2 + kz_1\right)_{,z_1}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Substituindo (2.35), (2.37), (2.43) na primeira relação de (2.11), $r = 1$, e usando (2.38), (2.42), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(l_{,z_1}z_2 + kz_1\right)_{,z_1z_1z_0} z_1 + \left(l_{,z_1}z_2 + kz_1\right)_{,z_1z_1z_1} z_2 + l_{,z_1z_1z_1}z_3 + 2\left(l_{,z_1}z_2 + kz_1\right)_{,z_1z_0} \\ &\quad - \left(l_{,z_1}z_3 + l_{,z_1z_1}z_2^2 + l_4z_2 + l_5\right)_{,z_1z_1} + \beta\left(l_{,z_1}z_2 + kz_1\right)_{,z_1z_1} + g\left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 - l\right)\right]_{,z_1z_1} \\ &= \left(l_{,z_1}z_2z_1 + kz_1^2\right)_{,z_1z_1z_0} + (kz_1)_{,z_1z_1z_1} z_2 - \left((kz_1)_{,z_1} + l_{,z_1z_0}z_1 + \beta l_{,z_1}\right)_{,z_1z_1} z_2 - l_{5,z_1z_1} \\ &\quad + \beta\left(l_{,z_1}z_2 + kz_1\right)_{,z_1z_1} + gb\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 - l\right)_{,z_1z_1} \\ &= \left(kz_1^2\right)_{,z_1z_1z_0} - l_{5,z_1z_1} + \beta\left(kz_1\right)_{,z_1z_1} + gb\left(\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 - l\right)_{,z_1z_1}. \end{aligned}$$

Integrando duas vezes com respeito a z_1, obtemos funções $h_i = h_i(z_0)$, $i = 2, 3$, tais que

$$l_5 = k' z_1^2 + \beta k z_1 + gb\left(\frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2 - l\right) + h_2 z_1 + h_3. \tag{2.44}$$

Agora (2.35), (2.36), (2.37), (2.43) substituídos na primeira relação de (2.9), $r = 1$, fornecem, utilizando também (2.44),

$$\begin{aligned} s_0 &= -l_{,z_1z_1z_0} z_2 z_1 - (kz_1)_{,z_1z_0} z_1 + l_{,z_1z_1z_0} z_1 z_2 + l_{,z_1z_0} z_2 - l_{,z_1z_1z_1} z_2^2 - l_{4,z_1} z_2 + \beta l_{,z_1z_1} z_2 \\ &\quad -l_{,z_1z_1} z_3 + (l_{,z_1z_1} + g'') z_3 + l_{,z_1z_1z_1} z_2^2 + l_{4,z_1} z_2 + l_{5,z_1} - \beta\left(l_{,z_1z_1} z_2 + (kz_1)_{,z_1}\right) \\ &\quad -gb\left(\widetilde{g} z_1 - l_{,z_1}\right) \\ &= -(kz_1)_{,z_1z_0} z_1 + l_{,z_1z_0} z_2 + g'' z_3 + (kz_1)_{,z_1z_0} z_1 + k' z_1 + \beta (kz_1)_{,z_1} + gb\left(\widetilde{g} z_1 - l_{,z_1}\right) \\ &\quad +h_2 - \beta (kz_1)_{,z_1} - gb\left(\widetilde{g} z_1 - l_{,z_1}\right) \\ &= l_{,z_1z_0} z_2 + g'' z_3 + k' z_1 + h_2. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Substituindo (2.37), (2.41), (2.43) na segunda relação de (2.9), $r = 1$, obtemos

$$t_0 = bk_{,z_1} z_1 - b\left(\widetilde{g} - l_{,z_1z_1}\right) z_2 - b\left(l_{,z_1z_1} z_2 + (kz_1)_{,z_1}\right) = -b\left(k + \widetilde{g} z_2\right). \tag{2.46}$$

Agora calculamos f_{p2}, $2 \leq p \leq 3$, fazendo uso de (2.10). Como resultado de (2.30), (2.32), (2.37), (2.46), tem-se

$$\sum_{j=0}^{3} t_j z_{j+1} = -bg' z_3 + b\left(\widetilde{g} z_1 - l_{,z_1}\right) z_2 - b\left(k + \widetilde{g} z_2\right) z_1 = -b\left(g' z_3 + l_{,z_1} z_2 + k z_1\right). \tag{2.47}$$

Ao substituirmos agora (2.30), (2.32), (2.33), (2.36), (2.37) em $\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{\beta}{b} t_j - s_j\right) z_{j+1}$ e usarmos (2.35), (2.44), (2.45), (2.46), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{3}\left(\frac{\beta}{b} t_j - s_j\right) z_{j+1} &= -g' z_4 + \left(-\beta g' + l_{,z_1}\right) z_3 + \left(\beta \widetilde{g} z_1 - \beta l_{,z_1} + l_{,z_1z_0} z_1\right. \\ &\quad \left. -l_{,z_1z_1} z_2 - l_4 + \beta l_{,z_1} - gbg'\right) z_2 + \left(\beta t_0 - s_0\right) z_1 \\ &= -f_{12} + g'' z_1 z_3 + l_5 + \left(\beta \widetilde{g} z_1 + l_{,z_1z_0} z_1 - gbg'\right) z_2 + \left(\beta t_0 - s_0\right) z_1 \\ &= -f_{12} + g'' z_1 z_3 + k' z_1^2 + \beta k z_1 + gb\left(\frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2 - l\right) + h_2 z_1 + h_3 \\ &\quad + \left(\beta \widetilde{g} z_1 + l_{,z_1z_0} z_1 - gbg'\right) z_2 - \beta k z_1 - \beta \widetilde{g} z_2 z_1 - l_{,z_1z_0} z_2 z_1 \\ &\quad -g'' z_3 z_1 - k' z_1^2 - h_2 z_1 \\ &= -f_{12} + gb\left(\frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2 - l\right) + h_3 - gbg' z_2. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Utilizando (2.47), (2.48) em (2.10), obtém-se, para $2 \leq p \leq 3$,

$$f_{p2} = \mu_p f_{12} + \xi_{5-p}\left(g' z_3 + l_{,z_1} z_2 + k z_1\right) + \eta_p \left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2 - l\right) + \frac{h_3}{g} - b g' z_2 \right]. \qquad (2.49)$$

As expressões (2.27), (2.30), (2.32), (2.33), (2.37), (2.43) sucessivamente substituídas em (2.7) dão, para $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned} C^{p4} &= \mu_p f_{12,z_4}, \qquad C^{p3} = \mu_p f_{12,z_3} + \xi_{5-p} g', \qquad C^{p2} = \mu_p f_{12,z_2} + \xi_{5-p} l_{,z_1} - \eta_p b g', \\ C^{p1} &= \mu_p f_{12,z_1} + \xi_{5-p}\left(l_{,z_1} z_2 + k z_1\right)_{,z_1} + \eta_p \left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2 - l\right)\right]_{,z_1}. \end{aligned}$$

Disso e de (2.49), as relações (1.6) tornam-se de imediato identidades para $1 \leq r \leq 4$. Para $r = 0$, derivamos (2.49) com respeito a z_0, e substituímos (2.45), (2.46) em (2.7), de modo que (1.6) fornece

$$\begin{aligned} & \mu_p f_{12}' + \xi_{5-p}\left(g'' z_3 + l_{,z_1 z_0} z_2 + k' z_1\right) + \eta_p \left\{ \left[b\left(\frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2 - l\right)\right]' + \left(\frac{h_3}{g}\right)' - \left(b g'\right)' z_2 \right\} \\ = \; & \mu_p f_{12}' + \xi_{5-p}\left(l_{,z_1 z_0} z_2 + g'' z_3 + k' z_1 + h_2\right) + \eta_p b\left(-k - \widetilde{g} z_2\right). \end{aligned}$$

Cancelando alguns termos, e usando (5), (2.40), obtemos

$$\xi_{5-p} h_2 + \eta_p \left(-\left(\frac{h_3}{g}\right)' - b h_1 \right) = 0.$$

Este é um sistema linear do tipo (2.18), que possui apenas a solução nula. Concluímos que

$$h_1 = -\frac{1}{b}\left(\frac{h_3}{g}\right)', \qquad h_2 = 0. \qquad (2.50)$$

Denotamos

$$m = l - \frac{h_3}{g b}. \qquad (2.51)$$

Como l_2 é uma função arbitrária de z_0, z_1, também o é l, em vista de (2.32), (2.33). Assim, temos por (2.51) que m é uma função arbitrária de z_0, z_1. Substituindo (2.50) em (2.40), e utilizando (2.23), (2.51), obtemos

$$k z_1 = \frac{1}{b}\left[b\left(l - \frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2\right) - \frac{h_3}{g}\right]' z_1 = \mathring{m}. \qquad (2.52)$$

Para provar (2.25), basta usar (2.51), (2.52) em (2.49). Substituindo (2.50), (2.51), (2.52) em (2.42), (2.44), obtemos

$$l_4 = \mathring{m}_{,z_1} + m_{,z_1 z_0} z_1 + \beta m_{,z_1} - b g' g, \qquad l_5 = \mathring{m}' z_1 + \beta \mathring{m} - g b\left(m - \frac{1}{2}\widetilde{g} z_1^2\right),$$

que substituídas junto com (2.51) em (2.35) fornece (2.24).

Determinamos agora G notando que, em vista de (2.28), (2.29), temos

$$g'G = \sum_{j=0}^{3} f_{12,z_j} z_{j+1} + f_{21} f_{32} - f_{31} f_{22}. \tag{2.53}$$

Substituindo (2.24) em $\sum_{j=0}^{3} f_{12,z_j} z_{j+1}$, e usando (5), (2.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3} f_{12,z_j} z_{j+1} &= \Big\{ g'' z_4 + \left(m_{,z_1 z_0} + g''' z_1 + \beta g'' \right) z_3 + m_{,z_1 z_1 z_0} z_2^2 + \big(\mathring{m}_{,z_1 z_0} + m_{,z_1 z_0 z_0} z_1 \\
&\quad + \beta m_{,z_1 z_0} - b \left(g' \right)^2 - b \widetilde{g} g \big) z_2 + \mathring{m}'' z_1 + \beta \mathring{m}' - g' b \left(m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2 \right) \\
&\quad - g \left[b \left(m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2 \right) \right]' \Big\} z_1 + \big[\left(m_{,z_1 z_1} + g'' \right) z_3 + m_{,z_1 z_1 z_1} z_2^2 + \mathring{m}_{,z_1 z_1} z_2 \\
&\quad + \left(m_{,z_1 z_0} z_1 \right)_{,z_1} z_2 + \beta m_{,z_1 z_1} z_2 + \mathring{m}_{,z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}' + \beta \mathring{m}_{,z_1} \\
&\quad - g b \left(m_{,z_1} - \widetilde{g} z_1 \right) \big] z_2 + \left(2 m_{,z_1 z_1} z_2 + \mathring{m}_{,z_1} + m_{,z_1 z_0} z_1 + \beta m_{,z_1} - b g' g \right) z_3 \\
&\quad + \left(m_{,z_1} + g'' z_1 + \beta g' \right) z_4 \\
&= \left(m_{,z_1} + 2 g'' z_1 + \beta g' \right) z_4 + \left(3 m_{,z_1 z_1} + g'' \right) z_3 z_2 + \big(2 m_{,z_1 z_0} z_1 + g''' z_1^2 \\
&\quad + \beta g'' z_1 + \mathring{m}_{,z_1} + \beta m_{,z_1} - b g' g \big) z_3 + m_{,z_1 z_1 z_1} z_2^3 + \big(m_{,z_1 z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}_{,z_1 z_1} \\
&\quad + \left(m_{,z_1 z_0} z_1 \right)_{,z_1} + \beta m_{,z_1 z_1} \big) z_2^2 + \big[2 \mathring{m}_{,z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}' + m_{,z_1 z_0 z_0} z_1^2 + \beta m_{,z_1 z_0} z_1 \\
&\quad - b \left(\left(g' \right)^2 z_1 + g m_{,z_1} \right) + \beta \mathring{m}_{,z_1} \big] z_2 + \mathring{m}'' z_1^2 + \beta \mathring{m}' z_1 \\
&\quad - g' b \left(m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2 \right) z_1 - g b \mathring{m}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Utilizando (5) e (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\mu_3 f_{21} - \mu_2 f_{31} &= -\beta, \qquad - \eta_3 f_{21} + \eta_2 f_{31} = -\beta g, \\
\xi_2 f_{21} - \xi_3 f_{31} &= \left[\mu_2 \left(\mu_2 \alpha - \eta_2 \gamma \right) - \mu_3 \left(\mu_3 \alpha - \eta_3 \gamma \right) \right] g + \eta_2 \xi_2 - \eta_3 \xi_3 \\
&= \left(\mu_2^2 - \mu_3^2 \right) \alpha g - \alpha \gamma g + \delta = -\alpha g + \delta,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

que, junto com (2.24), (2.25), dá

$$\begin{aligned}
f_{21} f_{32} - f_{31} f_{22} &= -\beta f_{12} + \left(-\alpha g + \delta \right) \left(g' z_3 + m_{,z_1} z_2 + \mathring{m} \right) - \beta g b \left(g' z_2 + m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2 \right) \\
&= -\beta g' z_4 + \left(-\beta m_{,z_1} - \beta g'' z_1 - \beta^2 g' \right) z_3 - \beta m_{,z_1 z_1} z_2^2 + \big(-\beta \mathring{m}_{,z_1} \\
&\quad - \beta m_{,z_1 z_0} z_1 - \beta^2 m_{,z_1} + \beta b g' g \big) z_2 - \beta \mathring{m}' z_1 - \beta^2 \mathring{m} + \beta g b \left(m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2 \right) \\
&\quad + \left(-\alpha g + \delta \right) \left(g' z_3 + m_{,z_1} z_2 + \mathring{m} \right) - \beta g b \left(g' z_2 + m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2 \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\beta g' z_4 + \left[-\beta m_{,z_1} - \beta g'' z_1 + \left(-\alpha g + \delta - \beta^2\right) g'\right] z_3 - \beta m_{,z_1 z_1} z_2^2 \\
&\quad + \left[-\beta \mathring{m}_{,z_1} - \beta m_{,z_1 z_0} z_1 + \left(-\alpha g + \delta - \beta^2\right) m_{,z_1}\right] z_2 \\
&\quad - \beta \mathring{m}' z_1 + \left(-\alpha g + \delta - \beta^2\right) \mathring{m}. \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

Agora usamos (2.54), (2.56) em (2.53), obtendo

$$
\begin{aligned}
g'G &= \left(m_{,z_1} + 2g'' z_1 + \beta g'\right) z_4 + \left(3m_{,z_1 z_1} + g''\right) z_3 z_2 + \left[2m_{,z_1 z_0} z_1 + g''' z_1^2 + \beta g'' z_1\right. \\
&\quad \left. + \mathring{m}_{,z_1} + \beta m_{,z_1} - b g' g\right] z_3 + m_{,z_1 z_1 z_1} z_2^3 + \left[m_{,z_1 z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}_{,z_1 z_1} + \left(m_{,z_1 z_0} z_1\right)_{,z_1}\right. \\
&\quad \left. + \beta m_{,z_1 z_1}\right] z_2^2 + \left[2\mathring{m}_{,z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}' z_1 + m_{,z_1 z_0 z_0} z_1^2 + \beta m_{,z_1 z_0} z_1 - b\left(\left(g'\right)^2 z_1 + g m_{,z_1}\right)\right. \\
&\quad \left. + \beta \mathring{m}_{,z_1}\right] z_2 + \mathring{m}'' z_1^2 + \beta \mathring{m}' z_1 - g' b \left(m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2\right) z_1 - g b \mathring{m} - \beta g' z_4 \\
&\quad + \left[-\beta m_{,z_1} - \beta g'' z_1 + \left(-\alpha g + \delta - \beta^2\right) g'\right] z_3 - \beta m_{,z_1 z_1} z_2^2 \\
&\quad + \left[-\beta \mathring{m}_{,z_1} - \beta m_{,z_1 z_0} z_1 + \left(-\alpha g + \delta - \beta^2\right) m_{,z_1}\right] z_2 - \beta \mathring{m}' z_1 + \left(-\alpha g + \delta - \beta^2\right) \mathring{m} \\
&= \left(m_{,z_1} + 2g'' z_1\right) z_4 + \left(3m_{,z_1 z_1} + g''\right) z_3 z_2 + \left[2m_{,z_1 z_0} z_1 + g''' z_1^2 + \mathring{m}_{,z_1}\right. \\
&\quad \left. + \left(-\gamma g^2 - 2\alpha g + \delta - \beta^2\right) g'\right] z_3 + m_{,z_1 z_1 z_1} z_2^3 + \left[m_{,z_1 z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}_{,z_1 z_1}\right. \\
&\quad \left. + \left(m_{,z_1 z_0} z_1\right)_{,z_1}\right] z_2^2 + \left[2\mathring{m}_{,z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}' + m_{,z_1 z_0 z_0} z_1^2 - b\left(g'\right)^2 z_1\right. \\
&\quad \left. + \left(-\gamma g^2 - 2\alpha g + \delta - \beta^2\right) m_{,z_1}\right] z_2 + \mathring{m}'' z_1^2 - g' b \left(m - \frac{1}{2} \widetilde{g} z_1^2\right) z_1 \\
&\quad + \left(-\gamma g^2 - 2\alpha g + \delta - \beta^2\right) \mathring{m}. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Para obter (2.22), basta mostrar, levando em conta (2.13) e (2.57), que

$$\delta - \beta^2 = -\eta_2^2 + \eta_3^2. \qquad (2.58)$$

Mas decorre de (5) que

$$
\begin{aligned}
\delta - \beta^2 &= \sum_{q=2}^{3} (-1)^q \eta_q \xi_q - \beta \sum_{q=2}^{3} (-1)^{5-q} \mu_{5-q} \eta_q \\
&= \sum_{q=2}^{3} \eta_q \left((-1)^q \xi_q - (-1)^{5-q} \mu_{5-q} \beta\right), \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

onde, usando novamente (5), calculamos $(-1)^q \xi_q - (-1)^{5-q} \mu_{5-q} \beta$ como

$$
\begin{aligned}
&(-1)^q \left(\mu_q \alpha - \eta_q \gamma\right) - (-1)^{5-q} \mu_{5-q} \beta = (-1)^q \mu_q \left((-1)^q \mu_q \eta_q + (-1)^{5-q} \mu_{5-q} \eta_{5-q}\right) - \\
&- (-1)^q \eta_q \left((-1)^q \mu_q^2 + (-1)^{5-q} \mu_{5-q}^2 + 1\right) - (-1)^{5-q} \mu_{5-q} \left((-1)^q \mu_q \eta_{5-q} + (-1)^{5-q} \mu_{5-q} \eta_q\right) \\
&= -(-1)^q \eta_q,
\end{aligned}
$$

que, substituindo em (2.59), fornece (2.58).

Finalmente, provamos que uma solução genérica cumpre.$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Existe, em vista de (2.25), $A = A(z_0, z_1, z_2)$ tal que

$$f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = g\left(\mu_2 f_{12} + \xi_3 g' z_3 + A\right) - \left(\mu_2 g + \eta_2\right) f_{12} = g\left(\xi_3 g' z_3 + A\right) - \eta_2 f_{12}.$$

Portanto, se $\eta_2 \neq 0$, temos, de (2.24), que o coeficiente de z_4 é $-\eta_2 g' \neq 0$, de modo que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Se $\eta_2 = 0$, então, de (5), $0 \neq \delta = -\eta_3\xi_3$, vem $\xi_3 \neq 0$. Assim o coeficiente de z_3 é $\xi_3 g' g \neq 0$, e temos novamente $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

□

2.3 Demonstração do resultado principal

O resultado principal no caso genérico, enunciado na Seção 2.1, é um corolário dos Teoremas 2.3.1 a 2.3.4 abaixo, que classificam todas as equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas que são independentes de um dos parâmetros μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, cujo problema linear satisfaz

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{2.60}$$

além de $\delta \neq 0$, com δ dado por (5). Dito de outro modo, caracterizamos as equações do Teorema 2.2.3 tais que G é independente de um parâmetro. Mais precisamente, em alguns dos casos há apenas três parâmetros livres, já que μ_3 é dado em termos de μ_2.

Em vez de fixar um dos parâmetros livres e argumentar a partir daí, verifica-se que a mesma argumentação pode ser usada caso simplesmente denotemos qualquer um deles genericamente por τ e trabalhemos com τ. A forma do problema linear associado pode mudar consideravelmente de acordo com o parâmetro escolhido como τ e os valores atribuídos aos outros parâmetros. Podemos tanto atribuir valores numéricos aos outros parâmetros, como também tomá-los como certas funções de τ (a tal respeito, ver, ao final desta seção, a demonstração do resultado principal da Seção 2.1). Tal procedimento pode ser útil quando da aplicação do método do espalhamento inverso em alguma situação específica. Assim, é interessante ter à disposição o quadro geral do qual possamos extrair casos particulares de acordo com as condições especiais sob consideração.

Quatro classes de equações são obtidas, correspondendo aos casos em que

$$v_\tau = 0,\ \gamma = 0, \qquad v_\tau = 0,\ \gamma \neq 0, \qquad v_\tau \neq 0,\ \gamma = 0, \qquad v_\tau \neq 0,\ \gamma \neq 0.$$

Tais casos são tratados, respectivamente, nos Teoremas 2.3.1 a 2.3.4.

Teorema 2.3.1 *Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, fixemos um dos parâmetros μ_2, η_p, $2 \leq p \leq 3$, e o denotemos por τ. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta, v$ dados por (5). A equação $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \dots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de τ, e com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo (2.60), $v_\tau = 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma = 0$, se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{h'}\left(q_{,z_1} + 3h''z_1\right) z_4 + \frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_1} + 4h''\right) z_2 z_3 + \left[\frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_0}z_1 + 3h'''z_1^2 + q'\right) - 2h\right] z_3 \\
&+ \frac{1}{h'} q_{,z_1z_1z_1} z_2^3 + \frac{3}{h'}\left(\left(q_{,z_1z_0}z_1\right)_{,z_1} + h'''z_1\right) z_2^2 \\
&+ \left\{\frac{1}{h'}\left[3\left(q''z_1\right)_{,z_1} z_1 - 2h\left(q_{,z_1} + h''z_1\right) + h''''z_1^3\right] - h'z_1\right\} z_2 \\
&+ \frac{1}{h'}\left(q'''z_1^3 - 2hq'z_1\right) - qz_1, \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

onde $h = h(z_0)$, $q = q(z_0, z_1)$ são funções diferenciáveis com $h' \neq 0$, e, para $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\alpha}\left(h + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\alpha}\left(h + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right) + \eta_p, \\
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[h'z_4 + \left(q_{,z_1} + 2h''z_1 + \beta h'\right) z_3 + \left(q_{,z_1z_1} + h''\right) z_2^2 + \left(2q_{,z_1z_0}z_1\right.\right. \qquad (2.62) \\
&\quad \left.\left. + q' + h'''z_1^2 + \beta q_{,z_1} + \beta h''z_1 - \alpha h' f_{11}\right) z_2 + q''z_1^2 + \beta q'z_1 - \alpha f_{11} q\right], \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left[h'z_3 + \left(q_{,z_1} + h''z_1\right) z_2 + q'z_1\right] - \eta_p\left(h'z_2 + q\right),
\end{aligned}$$

onde μ_p, η_p satisfazem $\mu_3 = \pm\sqrt{1 + \mu_2^2}$, $\alpha \neq 0$.

Teorema 2.3.2 *Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, fixemos um dos parâmetros μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, e o denotemos por τ. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \xi_p, \delta, v$ dados por (5). A equação $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \dots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de τ, e com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo (2.60), $v_\tau = 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{h'}\left(q_{,z_1} + 5h''z_1\right) z_4 + \frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_1} + 10h''\right) z_2 z_3 \\
&+ \left[\frac{1}{h'}\left(2q_{,z_1z_0}z_1 + 10h'''z_1^2 + \frac{\left(hqz_1\right)_{,z_1z_0}}{h}\right) - \zeta h^2 + \theta\right] z_3 + \frac{1}{h'} q_{,z_1z_1z_1} z_2^3 \\
&+ \frac{1}{h'}\left(\frac{\left(hqz_1\right)_{,z_1z_1z_0}}{h} + 2q_{,z_1z_1z_0}z_1 + q_{,z_1z_0} + 15h'''z_1\right) z_2^2 + \left\{\frac{1}{h'}\left[2\left(\frac{\left(hq\right)_{,z_1z_0}}{h}\right)' z_1^2\right.\right. \\
&\left.\left. + 3\left(\frac{(hq)'}{h}\right)' z_1 + 10h''''z_1^3 + q_{,z_1z_0z_0}z_1^2 - \left(\zeta h^2 - \theta\right)\left(q_{,z_1} + 3h''z_1\right)\right] - \zeta hh'z_1\right\} z_2 \\
&+ \frac{1}{h'}\left[\left(\frac{(hq)'}{h}\right)'' z_1^3 + h'''''z_1^5 - \left(\zeta h^2 - \theta\right)\left(\frac{(hq)'}{h} z_1 + h'''z_1^3\right)\right] \\
&- \zeta hqz_1 - \zeta hh''z_1^3 + \frac{1}{2}\zeta\left(h'\right)^2 z_1^3, \qquad (2.63)
\end{aligned}$$

onde ζ, θ são números reais não-nulos tais que ζ possui o mesmo sinal de γ, $h = h(z_0)$, $q = q(z_0, z_1)$ são funções diferenciáveis com $h' \neq 0$, e, para $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h - \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad f_{p1} = \mu_p\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h - \mu_p\frac{\alpha}{\gamma} + \eta_p, \\
f_{12} &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left\{h'z_4 + (q_{,z_1} + 4h''z_1 + \beta h')\, z_3 + (q_{,z_1z_1} + 3h'')\, z_2^2 + \left(\frac{(hqz_1)_{,z_1z_0}}{h} + q_{,z_1z_0}z_1\right.\right. \\
&\quad \left. +6h'''z_1^2 + \beta\,(q_{,z_1} + 3h''z_1) - \gamma\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}hh'f_{11}\right) z_2 + \left(\frac{(hq)'}{h}\right)' z_1^2 + h''''z_1^4 \qquad (2.64) \\
&\quad \left. +\beta\left(\frac{(hq)'}{h}z_1 + h'''z_1^3\right) - \gamma\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}f_{11}\left(hq + hh''z_1^2 - \frac{1}{2}(h')^2 z_1^2\right)\right\}, \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \xi_{5-p}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(h'z_3 + (q_{,z_1} + 3h''z_1)\, z_2 + \frac{(hq)'}{h}z_1 + h'''z_1^3\right) \\
&\quad -\eta_p\zeta\left(hh'z_2 + hq + hh''z_1^2 - \frac{1}{2}(h')^2 z_1^2\right),
\end{aligned}$$

onde μ_p, η_p cumprem $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$.

Teorema 2.3.3 *Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, fixemos um dos parâmetros μ_2, η_p, $2 \leq p \leq 3$, e o denotemos por τ. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta, v$ dados por (5). A equação $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de τ, e com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo (2.60), $v_\tau \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma = 0$, se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
G &= 5\frac{h''}{h'}z_1z_4 + 10\frac{h''}{h'}z_2z_3 + \left(10\frac{h'''}{h'}z_1^2 - 5h\right) z_3 + 15\frac{h'''}{h'}z_1z_2^2 + \left(10\frac{h''''}{h'}z_1^3 - 10h'z_1\right. \\
&\quad \left. -15\frac{hh''}{h'}z_1\right) z_2 + \frac{h'''''}{h'}z_1^5 + \left(-10h'' - 5\frac{hh'''}{h'}\right) z_1^3 + \left(\frac{15}{2}h^2 - \zeta\right) z_1, \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

onde ζ é um número real não-nulo, $h = h(z_0)$ é uma função diferenciável com $h' \neq 0$, e, para $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\alpha}\left(h + c + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\alpha}\left(h + c + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right) + \eta_p, \\
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[h'z_4 + (4h''z_1 + \beta h')\, z_3 + 3h''z_2^2 + \left(6h'''z_1^2 - 4hh' + ch' + 3\beta h''z_1\right.\right. \\
&\quad \left. +\frac{\eta_2^2 - \eta_3^2}{2}h'\right) z_2 + h''''z_1^4 + \beta h'''z_1^3 + \left(-3(h')^2 - 4hh'' + ch''\right. \qquad (2.66) \\
&\quad \left.\left. +\frac{\eta_2^2 - \eta_3^2}{2}h''\right) z_1^2 + \beta\,(-3hh' + 2ch')\, z_1 - \alpha f_{11}\left(-\frac{3}{2}h^2 + 2ch - 4c^2 + \zeta\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left(h' z_3 + 3h'' z_1 z_2 + h''' z_1^3 - 3hh' z_1 + 2ch' z_1\right) \\ &\quad -\eta_p\left(h' z_2 + h'' z_1^2 - \frac{3}{2}h^2 + 2ch - 4c^2 + \zeta\right), \end{aligned}$$

onde μ_p, η_p *satisfazem* $\mu_3 = \pm\sqrt{1+\mu_2^2}$, $\alpha \neq 0$, *e* $c = c(\tau)$ *é uma função diferenciável com* $c_\tau \neq 0$.

Teorema 2.3.4 *Sejam* μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, *números reais, fixemos um dos parâmetros* μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, *e o denotemos por* τ. *Sejam* $\alpha, \beta, \gamma, \xi_p, \delta, v$ *dados por (5). A equação* $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ *descreve superfícies pseudo-esféricas, com* G *independente de* τ, *e com 1-formas associadas* $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, *satisfazendo (2.60),* $v_\tau \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} G &= 5\frac{h''}{h'}z_1 z_4 + 10\frac{h''}{h'}z_2 z_3 + \left(10\frac{h'''}{h'}z_1^2 - \frac{5}{2}k\right)z_3 + 15\frac{h'''}{h'}z_1 z_2^2 + \left(10\frac{h''''}{h'}z_1^3 - 10\zeta hh' z_1\right. \\ &\quad \left. -\frac{15}{2}k\frac{h''}{h'}z_1\right)z_2 + \frac{h'''''}{h'}z_1^5 + \left(-\frac{5}{2}\zeta\left(h'\right)^2 - 10\zeta hh'' - \frac{5}{2}k\frac{h'''}{h'}\right)z_1^3 \\ &\quad +\frac{15}{8}k^2 z_1 - \sigma z_1, \end{aligned} \tag{2.67}$$

onde ζ, θ, σ *são números reais tais que* $\zeta \neq 0$ *possui o mesmo sinal de* γ, $h = h(z_0)$ *é uma função diferenciável com* $h' \neq 0$, $k = \zeta h^2 - \theta$, *e, para* $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned} f_{11} &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h - \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad f_{p1} = \mu_p\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h - \mu_p\frac{\alpha}{\gamma} + \eta_p, \\ f_{12} &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left\{h' z_4 + \left(4h'' z_1 + \beta h'\right)z_3 + 3h'' z_2^2 + \left(6h''' z_1^2 + 3\beta h'' z_1 - \frac{3}{2}kh' + ch'\right.\right. \\ &\quad \left. -\gamma\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}hh' f_{11}\right)z_2 + h'''' z_1^4 + \beta h''' z_1^3 + \left[-3\zeta h\left(h'\right)^2 - \frac{3}{2}kh'' + ch''\right. \\ &\quad \left. -\gamma\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}f_{11}\left(hh'' - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2\right)\right]z_1^2 + \beta\left(-\frac{3}{2}k + c\right)h' z_1 \\ &\quad \left. -\sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}f_{11}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right)\right\}, \\ f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \xi_{5-p}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(h' z_3 + 3h'' z_1 z_2 + h''' z_1^3 - \frac{3}{2}kh' z_1 + ch' z_1\right) \\ &\quad -\eta_p\zeta\left[hh' z_2 + hh'' z_1^2 - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2 z_1^2 + \frac{1}{\zeta}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right)\right], \end{aligned} \tag{2.68}$$

onde μ_p, η_p *cumprem* $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$, *e* $c = \theta - \frac{\delta}{\gamma}$ *satisfaz* $c_\tau \neq 0$.

Antes de passar à demonstração de cada teorema em separado, estabeleceremos alguns fatos úteis na demonstração de todos em geral. Escrevemos (2.22) como

$$G = k_1 z_4 + k_2 z_2 z_3 + k_3 z_3 + k_4 z_2^3 + k_5 z_2^2 + k_6 z_2 + k_7, \tag{2.69}$$

onde

$$k_1 = \frac{1}{g'}\left(m_{,z_1} + 2g'' z_1\right), \qquad k_2 = \frac{1}{g'}\left(3m_{,z_1 z_1} + g''\right), \tag{2.70}$$

$$k_3 = \frac{1}{g'}\left(2m_{,z_1 z_0} z_1 + g''' z_1^2 + \mathring{m}_{,z_1}\right) - v, \qquad k_4 = \frac{1}{g'} m_{,z_1 z_1 z_1}, \tag{2.71}$$

$$k_5 = \frac{1}{g'}\left(2m_{,z_1 z_1 z_0} z_1 + m_{,z_1 z_0} + \mathring{m}_{,z_1 z_1}\right), \tag{2.72}$$

e, em vista de (2.14) e de $\widetilde{g} = \frac{v''}{2b}$, que se segue de (5), (2.14), temos

$$k_6 = \frac{1}{g'}\left(2\mathring{m}_{,z_1 z_0} z_1 + \mathring{m}' + m_{,z_1 z_0 z_0} z_1^2 - v m_{,z_1}\right) - \frac{v'}{2} z_1, \tag{2.73}$$

$$k_7 = \frac{1}{g'}\left(\mathring{m}'' z_1^2 - v\mathring{m} - \frac{v'}{2} m z_1\right) + \frac{v''}{4} z_1^3. \tag{2.74}$$

Temos que $G_\tau = 0$ é equivalente a $k_{i,\tau} = 0$, $1 \leq i \leq 7$.

Indicamos dependência nas variáveis por meio da escolha de letras

$$\zeta_i \in \mathbb{R}, \qquad c_i = c_i(\tau), \qquad r_i = r_i(z_0), \qquad s_i = s_i(z_0, \tau), \qquad t = t(z_0, z_1), \tag{2.75}$$

onde todas as funções são diferenciáveis.

Em vista de $k_{i,\tau} = 0$, $1 \leq i \leq 2$, temos

$$0 = \left(3k_{1,z_1} - k_2\right)_\tau = 5\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau,$$

de modo que existe r_1 tal que

$$\frac{g''}{g'} = r_1 = \frac{\left(e^{r_2}\right)'}{e^{r_2}},$$

onde $r_2' = r_1$. Assim $\left(\frac{g'}{e^{r_2}}\right)' = 0$, de modo que existe c_1 tal que $g' = c_1 e^{r_2}$. Integrando isso com respeito a z_0, obtemos r_3, c_2 tais que

$$g = c_1 r_3 + c_2. \tag{2.76}$$

Como $g' \neq 0$, obtemos $c_1 \neq 0$, $r_3' \neq 0$. Agora (2.76) substituído em $k_{1,\tau} = 0$ fornece

$$0 = \left[\frac{1}{c_1}\left(m_{,z_1} + 2c_1 r_3'' z_1\right)\right]_\tau = \left(\frac{m}{c_1}\right)_{,\tau z_1} + \left(2r_3'' z_1\right)_\tau = \left(\frac{m}{c_1}\right)_{,\tau z_1}. \tag{2.77}$$

Assim $\frac{m}{c_1}$ pode ser escrito como a soma de s_1 com uma função arbitrária de z_0, z_1, que pode ser escrita como $t+\frac{3}{2}r_3''z_1^2$, de modo que

$$\frac{m}{c_1}=t+\frac{3}{2}r_3''z_1^2+s_1. \tag{2.78}$$

Utilizando (5), (2.78) em (2.23), e também usando (2.76), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathring{m}}{c_1} &= \frac{1}{b}\left[b\left(t+\frac{3}{2}r_3''z_1^2+s_1\right)z_1-\frac{1}{2c_1}\left(bg'\right)'z_1^3\right]' \\
&= \frac{\left(b\left(t+s_1\right)\right)'}{b}z_1+\frac{1}{2}\frac{\left(3br_3''-\gamma c_1\left(r_3'\right)^2-br_3''\right)'z_1^3}{b} \\
&= \frac{\left(b\left(t+s_1\right)\right)'}{b}z_1+\frac{1}{b}\left(br_3''-\frac{1}{2}\gamma c_1\left(r_3'\right)^2\right)'z_1^3 \\
&= \frac{\left(b\left(t+s_1\right)\right)'}{b}z_1+r_3'''z_1^3.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Caso usemos (2.76), (2.78) em $k_{3,\tau}=0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{1}{c_1}\left(2c_1t_{,z_1z_0}z_1+6c_1r_3'''z_1^2+c_1r_3'''z_1^2+\mathring{m}_{,z_1}\right)-vr_3'\right]_\tau \\
&= \left(2t_{,z_1z_0}z_1+7r_3'''z_1^2\right)_\tau+\left(\frac{\mathring{m}_{,z_1}}{c_1}-vr_3'\right)_\tau \\
&= \left[\left(\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_\tau-v_\tau r_3'z_1\right]_{,z_1}.
\end{aligned}$$

Integrando com respeito a z_1, obtemos s_2 tal que

$$\left(\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_\tau=v_\tau r_3'z_1+s_2. \tag{2.80}$$

Como resultado de (2.76), (2.78), (2.80), temos que $k_{7,\tau}=0$ implica, multiplicando por r_3',

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{1}{c_1}\left(\mathring{m}''z_1^2-v\mathring{m}-\frac{v'}{2}mz_1\right)+r_3'\frac{v''}{4}z_1^3\right]_\tau \\
&= \left(\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_{,\tau z_0z_0}z_1^2-\left(v\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_\tau-\left(\frac{v'}{2}\frac{m}{c_1}\right)_\tau z_1+r_3'\frac{v_\tau''}{4}z_1^3 \\
&= \left(v_\tau r_3'z_1+s_2\right)''z_1^2-\left(v\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_\tau-\left[\frac{v'}{2}\left(t+\frac{3}{2}r_3''z_1^2+s_1\right)\right]_\tau z_1+r_3'\frac{v_\tau''}{4}z_1^3 \\
&= \left(v_\tau''r_3'+2v_\tau'r_3''+v_\tau r_3'''\right)z_1^3+s_2''z_1^2-\left(v\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_\tau-\left(\frac{v'}{2}\left(t+s_1\right)\right)_\tau z_1 \\
&\quad -\frac{3}{4}v_\tau'r_3''z_1^3+r_3'\frac{v_\tau''}{4}z_1^3 \\
&= \frac{5}{4}v_\tau''r_3'z_1^3+\frac{5}{4}v_\tau'r_3''z_1^3+v_\tau r_3'''z_1^3+s_2''z_1^2-\left(v\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_\tau-\left(\frac{v'}{2}\left(t+s_1\right)\right)_\tau z_1.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Veremos que sempre vale

$$v'_\tau = 0, \tag{2.82}$$

independentemente da validade ou não de $v_\tau = 0$. Assim, conveniente estabelecer aqui algumas propriedades que derivam tão somente de (2.82). Decorre de (5), (2.76) que

$$b = \gamma c_1 r_3 + \gamma c_2 + \alpha. \tag{2.83}$$

Segue-se de (2.14), (2.83) e $v'_\tau = 0$ que

$$0 = \frac{v'_\tau}{2r'_3} = (c_1 b)_\tau = \left(\gamma c_1^2\right)_\tau r_3 + \left(c_1 \left(\gamma c_2 + \alpha\right)\right)_\tau. \tag{2.84}$$

Derivando com respeito a z_0, e em vista de $r'_3 \neq 0$, obtemos ζ_1 tal que

$$\gamma c_1^2 = \zeta_1. \tag{2.85}$$

Em vista de (2.85) e $c_1^2 > 0$, temos que ζ_1, γ são ambos nulos ou possuem o mesmo sinal. Substituindo (2.85) em (2.84) mostra que existe ζ_2 tal que

$$c_1 \left(\gamma c_2 + \alpha\right) = \zeta_2. \tag{2.86}$$

Além de (2.82), admitimos neste ponto que vale também $\gamma \neq 0$. Então obtemos, em vista de (2.85),

$$c_1 = \pm\sqrt{\frac{\zeta_1}{\gamma}}. \tag{2.87}$$

Substituindo (2.85), (2.86) em (2.83), e utilizando também (2.87), obtemos

$$b = \frac{1}{c_1}\left(\zeta_1 r_3 + \zeta_2\right) = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\zeta_1}}\left(\zeta_1 r_3 + \zeta_2\right). \tag{2.88}$$

Em decorrência de $\gamma \neq 0$, (2.26), (5), (2.13), (2.88), obtemos

$$v = \frac{\gamma v}{\gamma} = \frac{\gamma^2 g^2 + 2\gamma\alpha g + \alpha^2 - \alpha^2 + \gamma\left(\eta_2^2 - \eta_3^2\right)}{\gamma} = \frac{b^2}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\left(\zeta_1 r_3 + \zeta_2\right)^2}{\zeta_1} - \frac{\delta}{\gamma}. \tag{2.89}$$

Agora admitimos que, além de (2.82), valha $\gamma = 0$. Segue-se disso, de (2.26) e $\delta \neq 0$, que $\alpha \neq 0$. Então obtemos, em vista de (2.86),

$$c_1 = \frac{\zeta_2}{\alpha}. \tag{2.90}$$

Como $c_1 \neq 0$, temos $\zeta_2 \neq 0$. Caso substituamos $\gamma = 0$, (2.76) em (2.13), obtemos, usando também (2.90),

$$v = 2\alpha c_1 r_3 + 2\alpha c_2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 = 2\zeta_2 r_3 + 2\alpha c_2 + \eta_2^2 - \eta_3^2. \tag{2.91}$$

Demonstração do Teorema 2.3.1. Temos que valem $\gamma = 0$ e

$$v_\tau = 0. \tag{2.92}$$

Primeiramente estabelecemos alguns fatos que não dependem de $\gamma = 0$. Substituindo (2.80), (2.92) em (2.81), obtemos

$$s_2'' z_1^2 - v s_2 - \frac{v'}{2} s_{1,\tau} z_1 = 0. \tag{2.93}$$

Como o coeficiente de z_1 é nulo, e $v' \neq 0$, obtemos $s_{1,\tau} = 0$. Assim existe r_4 tal que

$$s_1 = r_4. \tag{2.94}$$

Façamos agora uso de $\gamma = 0$. Derivando (2.91) com respeito a τ, e utilizando (2.92), obtemos ζ_3 tal que $2\alpha c_2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 = \zeta_3$, ou seja,

$$c_2 = \frac{\zeta_3 + \eta_3^2 - \eta_2^2}{2\alpha}. \tag{2.95}$$

Definimos $h = h\left(z_0\right),\, q = q\left(z_0, z_1\right)$ por

$$h = \zeta_2 r_3 + \frac{\zeta_3}{2}, \qquad q = \zeta_2\left(t + r_4 + r_3'' z_1^2\right). \tag{2.96}$$

Em vista de $\zeta_2 \neq 0$ e do fato de que r_3, t são arbitrários, temos que h, q são arbitrários. Como $r_3' \neq 0$, temos $h' \neq 0$.

Substituindo (2.90), (2.95) em (2.76), e usando (2.96), obtemos

$$g = \frac{\zeta_2}{\alpha} r_3 + \frac{\zeta_3 + \eta_3^2 - \eta_2^2}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(h + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right). \tag{2.97}$$

Agora (2.95) substituído em (2.91) acarreta, utilizando também (2.96),

$$v = 2\zeta_2 r_3 + \zeta_3 = 2h. \tag{2.98}$$

Como $\gamma = 0$, temos de (5) que $b = \alpha$. Se substituirmos isso, (2.90), (2.94) em (2.79), obteremos, usando também (2.96),

$$\mathring{m} = \frac{\zeta_2}{\alpha}\left(\left(t' + r_4'\right) z_1 + r_3''' z_1^3\right) = \frac{q'}{\alpha} z_1. \tag{2.99}$$

Substituindo (2.90), (2.94) em (2.78), e utilizando (2.96), obtemos

$$m = \frac{\zeta_2}{\alpha}\left(t + \frac{3}{2} r_3'' z_1^2 + r_4\right) = \frac{1}{\alpha}\left(q + \frac{h''}{2} z_1^2\right). \tag{2.100}$$

Usando (2.97) até (2.100) em (2.70) até (2.74) obtemos

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\alpha}{h'}\left(\frac{1}{\alpha}\left(q_{,z_1}+h''z_1\right)+2\frac{h''}{\alpha}z_1\right)=\frac{1}{h'}\left(q_{,z_1}+3h''z_1\right),\\
k_2 &= \frac{\alpha}{h'}\left(\frac{3}{\alpha}\left(q_{,z_1z_1}+h''\right)+\frac{h''}{\alpha}\right)=\frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_1}+4h''\right),\\
k_3 &= \frac{\alpha}{h'}\left(\frac{2}{\alpha}\left(q_{,z_1z_0}+h'''z_1\right)z_1+\frac{h'''}{\alpha}z_1^2+\frac{1}{\alpha}\left(q_{,z_1z_0}z_1+q'\right)\right)-2h\\
&= \frac{1}{h'}\left(3q_{,z_1z_0}z_1+3h'''z_1^2+q'\right)-2h,\\
k_4 &= \frac{\alpha}{h'}\frac{q_{,z_1z_1z_1}}{\alpha}=\frac{1}{h'}q_{,z_1z_1z_1},\\
k_5 &= \frac{\alpha}{h'}\left(\frac{2}{\alpha}\left(q_{,z_1z_1z_0}+h'''\right)z_1+\frac{1}{\alpha}\left(q_{,z_1z_0}+h'''z_1\right)+\frac{1}{\alpha}\left(q_{,z_1z_1z_0}z_1+2q_{,z_1z_0}\right)\right)\\
&= \frac{3}{h'}\left(\left(q_{,z_1z_0}z_1\right)_{,z_1}+h'''z_1\right),\\
k_6 &= \frac{\alpha}{h'}\left[\frac{2}{\alpha}\left(q_{,z_1z_0z_0}z_1+q''\right)z_1+\frac{q''}{\alpha}z_1+\frac{1}{\alpha}\left(q_{,z_1z_0z_0}+h''''z_1\right)z_1^2-\frac{2h}{\alpha}\left(q_{,z_1}+h''z_1\right)\right]-h'z_1\\
&= \frac{1}{h'}\left[3\left(q''z_1\right)_{,z_1}z_1+h''''z_1^3-2h\left(q_{,z_1}+h''z_1\right)\right]-h'z_1,\\
k_7 &= \frac{\alpha}{h'}\left(\frac{q'''}{\alpha}z_1^3-2h\frac{q'}{\alpha}z_1-\frac{h'}{\alpha}\left(q+\frac{h''}{2}z_1^2\right)z_1\right)+\frac{h''}{2}z_1^3=\frac{1}{h'}\left(q'''z_1^3-2hq'z_1\right)-qz_1.
\end{aligned}
$$

Essas expressões substituídas em (2.69) dão (2.61). Decorre de $b=\alpha$, (5), (2.97), que $\widetilde{g}=g''=\frac{h''}{\alpha}$, de modo que, em vista de (2.100),

$$m-\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2=\frac{q}{\alpha}. \tag{2.101}$$

Temos de (5) que $\gamma=0$ é equivalente a $\mu_3=\pm\sqrt{1+\mu_2^2}$. Levando em conta isso, $\gamma=0$, (2.97) até (2.101) em $f_{11}=g$, (2.21), (2.24), (2.25), obtemos (2.62).

□

Demonstração do Teorema 2.3.2. Estamos no caso em que vigoram (2.92), $\gamma\neq 0$. Conseqüentemente, temos (2.87) até (2.89). Derivando (2.89) com respeito a τ e utilizando (2.92), obtemos $\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)_\tau=0$, de modo que podemos definir $\zeta,\theta\in\mathbb{R}$, $h=h(z_0)$, $q=q(z_0,z_1)$, por

$$\zeta=\zeta_1\neq 0,\qquad \theta=\frac{\delta}{\gamma}\neq 0,\qquad h=\pm\left(r_3+\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right),\qquad q=\pm\left(t+r_4\right), \tag{2.102}$$

onde $\pm$ dá o sinal de c_1 em (2.87). Recordamos que ζ possui o mesmo sinal de γ. Em vista de $r_3'\neq 0$, temos $h'\neq 0$.

Usando (2.102) em (2.88) obtemos

$$b=\sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\zeta h=\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\gamma h, \tag{2.103}$$

de modo que, em vista de (5),

$$g=\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h-\frac{\alpha}{\gamma}. \tag{2.104}$$

As expressões (2.102) substituídas em (2.89) acarretam

$$v=\frac{(\pm\zeta_1 h)^2}{\zeta_1}-\theta=\zeta h^2-\theta. \tag{2.105}$$

Substituindo (2.87), (2.94) em (2.78), e utilizando (2.102), obtemos

$$m=\pm\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}(t+r_4)\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}r_3''z_1^2=\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(q+\frac{3}{2}h''z_1^2\right). \tag{2.106}$$

Se agora substituirmos (2.87), (2.94), (2.103) em (2.79), obtemos, usando também (2.102),

$$\mathring{m}=\pm\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\gamma h\,(t+r_4)\right)'}{\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\gamma h}z_1+r_3'''z_1^3\right)=\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\frac{(hq)'}{h}z_1+h'''z_1^3\right). \tag{2.107}$$

Utilizando (2.104) até (2.107) em (2.70) até (2.74), obtemos

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\left(\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}(q_{,z_1}+3h''z_1)+2\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h''z_1\right)=\frac{1}{h'}(q_{,z_1}+5h''z_1),\\
k_2 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\left(3\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}(q_{,z_1z_1}+3h'')+\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h''\right)=\frac{1}{h'}(3q_{,z_1z_1}+10h''),\\
k_3 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\left[2\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}(q_{,z_1z_0}+3h'''z_1)z_1+\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h'''z_1^2+\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\frac{(hqz_1)_{,z_1z_0}}{h}+3h'''z_1^2\right)\right]\\
&\quad -\zeta h^2+\theta\\
&= \frac{1}{h'}\left(2q_{,z_1z_0}z_1+10h'''z_1^2+\frac{(hqz_1)_{,z_1z_0}}{h}\right)-\zeta h^2+\theta,\\
k_4 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}q_{,z_1z_1z_1}=\frac{1}{h'}q_{,z_1z_1z_1},\\
k_5 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\left[2\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}(q_{,z_1z_1z_0}+3h''')z_1+\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}(q_{,z_1z_0}+3h'''z_1)\right.\\
&\quad \left.+\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\frac{(hqz_1)_{,z_1z_1z_0}}{h}+6h'''z_1\right)\right]\\
&= \frac{1}{h'}\left(\frac{(hqz_1)_{,z_1z_1z_0}}{h}+2q_{,z_1z_1z_0}z_1+q_{,z_1z_0}+15h'''z_1\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_6 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\left[2\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\left(\frac{(hq)'}{h}\right)_{,z_1z_0} z_1 + \left(\frac{(hq)'}{h}\right)' + 3h''''z_1^2\right) z_1\right. \\
&+\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\left(\frac{(hq)'}{h}\right)' z_1 + h''''z_1^3\right) + \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(q_{,z_1z_0z_0} + 3h''''z_1\right) z_1^2 \\
&\left. - \left(\zeta h^2 - \theta\right)\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(q_{,z_1} + 3h''z_1\right)\right] - \frac{2\zeta hh'}{2} z_1 \\
&= \frac{1}{h'}\left[2\left(\frac{(hq)_{,z_1z_0}}{h}\right)' z_1^2 + 3\left(\frac{(hq)'}{h}\right)' z_1 + 10h''''z_1^3 + q_{,z_1z_0z_0}z_1^2\right. \\
&\left. - \left(\zeta h^2 - \theta\right)\left(q_{,z_1} + 3h''z_1\right)\right] - \zeta hh'z_1, \\
k_7 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\left[\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\left(\frac{(hq)'}{h}\right)'' z_1 + h'''''z_1^3\right) z_1^2 - \left(\zeta h^2 - \theta\right)\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\frac{(hq)'}{h} z_1 + h'''z_1^3\right)\right. \\
&\left. -\frac{2\zeta hh'}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(q + \frac{3}{2}h''z_1^2\right) z_1\right] + \frac{2\zeta\left(hh'\right)'}{4} z_1^3 \\
&= \frac{1}{h'}\left[\left(\frac{(hq)'}{h}\right)'' z_1^3 + h'''''z_1^5 - \left(\zeta h^2 - \theta\right)\left(\frac{(hq)'}{h} z_1 + h'''z_1^3\right)\right] \\
&-\zeta hqz_1 - \zeta hh''z_1^3 + \frac{1}{2}\zeta\left(h'\right)^2 z_1^3.
\end{aligned}$$

Tais expressões substituídas em (2.69) dão (2.63). Usando (2.103), (2.104) em (5), obtemos

$$\widetilde{g} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\gamma h\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}h'\right)'}{\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\gamma h} = \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\frac{\left(hh'\right)'}{h}, \tag{2.108}$$

de modo que, em vista de (2.106),

$$m - \frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 = \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(q + \frac{3}{2}h''z_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(hh'\right)'}{h}z_1^2\right) = \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(q + h''z_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(h'\right)^2}{h}z_1^2\right). \tag{2.109}$$

Com o fim de obter (2.64), substituímos (2.103) até (2.109) em $f_{11} = g$, (2.21), (2.24), (2.25).

□

Demonstração do Teorema 2.3.3. Temos que valem $\gamma = 0$ e

$$v_\tau \neq 0. \tag{2.110}$$

Primeiramente estabelecemos alguns fatos que não dependem de $\gamma = 0$. Como resultado de (2.73), (2.76), (2.77), (2.78), (2.80), temos que $k_{6,\tau} = 0$ implica, multiplicando por $\frac{r_3'}{v_\tau}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{v_\tau}\left[\frac{1}{c_1}\left(2\mathring{m}_{,z_1z_0}z_1 + \mathring{m}' + m_{,z_1z_0z_0}z_1^2 - vm_{,z_1}\right) - \frac{v'}{2}r_3'z_1\right]_\tau \\
&= \frac{1}{v_\tau}\left[2\left(\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_{,\tau z_1z_0} z_1 + \left(\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_{,\tau z_0} + \left(\frac{m}{c_1}\right)_{,\tau z_1z_0z_0} z_1^2 - v_\tau\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_1}\right. \\
&\quad \left. -v\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,\tau z_1} - \frac{v_\tau'}{2}r_3'z_1\right] \\
&= \frac{1}{v_\tau}\left(2\left(v_\tau r_3'z_1 + s_2\right)_{,z_1z_0} z_1 + \left(v_\tau r_3'z_1 + s_2\right)' - v_\tau t_{,z_1} - 3v_\tau r_3''z_1 - v_\tau'\frac{r_3'}{2}z_1\right) \\
&= \frac{1}{v_\tau}\left(3\left(v_\tau r_3'\right)' z_1 - 3v_\tau r_3''z_1 - v_\tau'\frac{r_3'}{2}z_1 + s_2' - v_\tau t_{,z_1}\right) = \frac{5}{2}\frac{v_\tau'}{v_\tau}r_3'z_1 + \frac{s_2'}{v_\tau} - t_{,z_1}.
\end{aligned}$$

Integrando com respeito a z_1, obtemos s_4 tal que

$$t = \frac{5}{4}\frac{v_\tau'}{v_\tau}r_3'z_1^2 + \frac{s_2'}{v_\tau}z_1 + s_4. \tag{2.111}$$

Derivando com respeito a τ, obtemos

$$\frac{5}{4}\left(\frac{v_\tau'}{v_\tau}\right)_\tau r_3'z_1^2 + \left(\frac{s_2'}{v_\tau}\right)_\tau z_1 + s_{4,\tau} = 0,$$

que é um polinômio em z_1 de grau 2. Como o coeficiente de z_1 e o termo independente são nulos, obtemos, em vista de $r_3' \neq 0$,

$$\left(\frac{v_\tau'}{v_\tau}\right)_\tau = 0, \qquad s_{4,\tau} = 0. \tag{2.112}$$

Decorre de (2.111), (2.112) que existe r_5 tal que

$$t = \frac{5}{4}\frac{v_\tau'}{v_\tau}r_3'z_1^2 + \frac{s_2'}{v_\tau}z_1 + r_5. \tag{2.113}$$

Igualando as expressões de $\left(\frac{\mathring{m}}{c_1}\right)_\tau$ dadas por (2.79) e (2.80), usando também (2.113), e definindo

$$s_3 = s_1 + r_5, \tag{2.114}$$

obtemos

$$v_\tau r_3'z_1 + s_2 = \left\{\frac{1}{b}\left[b\left(\frac{5}{4}\frac{v_\tau'}{v_\tau}r_3'z_1^2 + \frac{s_2'}{v_\tau}z_1 + s_3\right)\right]' z_1\right\}_\tau,$$

que é um polinômio em z_1 de grau 3. Como o coeficiente de z_1 e o termo independente são nulos, obtemos

$$\left(\frac{(bs_3)'}{b}\right)_\tau - v_\tau r_3' = 0, \qquad s_2 = 0. \tag{2.115}$$

Integrando a primeira relação com respeito a τ, e utilizando $r_3' \neq 0$, obtemos r_6 tal que

$$\frac{(bs_3)'}{b} - vr_3' = r_6 r_3'. \tag{2.116}$$

Substituindo (2.79) em (2.81), e usando (2.113), (2.115) no resultado, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{5}{4}\left(v_\tau' r_3'\right)' z_1^3 + v_\tau r_3''' z_1^3 - \left\{\frac{v}{b}\left[b\left(\frac{5}{4}\frac{v_\tau'}{v_\tau} r_3' z_1^2 + s_3\right)\right]' z_1 + v r_3''' z_1^3\right\}_\tau \\ &- \left[\frac{v'}{2}\left(\frac{5}{4}\frac{v_\tau'}{v_\tau} r_3' z_1^2 + s_3\right)\right]_\tau z_1 = 0,\end{aligned}$$

que é um polinômio em z_1 de grau 3. Como o coeficiente de z_1 é nulo, obtemos, utilizando (2.116), (2.14), (2.76),

$$0 = \left(v\frac{(bs_3)'}{b} + \frac{v'}{2}s_3\right)_\tau = \left(vr_3'\left(v + r_6\right) + c_1 r_3' b s_3\right)_\tau .$$

Dividindo por r_3' e integrando com respeito a τ, obtemos r_7 tal que

$$v\left(v + r_6\right) + c_1 b s_3 = r_7. \tag{2.117}$$

Derivando com respeito a z_0, obtemos, usando (2.116), (2.14), (2.76),

$$\begin{aligned} r_7' &= v'\left(v + r_6\right) + v\left(v' + r_6'\right) + c_1 r_3' b\left(v + r_6\right) \\ &= 2v'v + v'r_6 + vr_6' + \frac{v'}{2}\left(v + r_6\right) \\ &= \frac{5}{2}vv' + \frac{3}{2}r_6 v' + vr_6'. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Em vista de (2.112), existe r_8 tal que $v_\tau' = r_8 v_\tau$. Integrando isso com respeito a τ, obtemos r_9 tal que

$$v' = r_8 v + r_9. \tag{2.119}$$

Substituindo isso em (2.118), obtemos

$$r_7' = \frac{5}{2}v\left(r_8 v + r_9\right) + \frac{3}{2}r_6\left(r_8 v + r_9\right) + vr_6' = \frac{5}{2}r_8 v^2 + v\left(\frac{5}{2}r_9 + \frac{3}{2}r_6 r_8 + r_6'\right) + \frac{3}{2}r_6 r_9, \tag{2.120}$$

que, derivando com respeito a τ, acarreta

$$5r_8 v v_\tau + v_\tau\left(\frac{5}{2}r_9 + \frac{3}{2}r_6 r_8 + r_6'\right) = 0. \tag{2.121}$$

Dividimos por v_τ, o que é possível por (2.110), e derivamos com respeito a τ, obtendo $5r_8 v_\tau = 0$. Novamente utilizando (2.110), obtemos assim

$$r_8 = 0, \tag{2.122}$$

que, substituído em (2.119), leva a

$$r_9 = v'. \tag{2.123}$$

Substituindo (2.122), (2.123) em (2.121), e usando (2.110), obtemos

$$\frac{5}{2}v' + r_6' = 0. \tag{2.124}$$

Integrando com respeito a z_0, obtemos c_3 tal que

$$v = -\frac{2}{5}r_6 + c_3. \tag{2.125}$$

Substituindo (2.122), (2.123), (2.124) em (2.120), obtemos

$$r_7' = v\left(\frac{5}{2}v' + r_6'\right) + \frac{3}{2}r_6 v' = \frac{3}{2}r_6\left(-\frac{2}{5}r_6'\right) = -\frac{3}{5}r_6 r_6'.$$

Integrando com respeito a z_0, obtemos ζ_4 tal que

$$r_7 = -\frac{3}{10}r_6^2 + \zeta_4. \tag{2.126}$$

Isolando s_3 em (2.117), e utilizando (2.14), (2.76), obtemos

$$s_3 = \frac{2r_3'}{v'}\left(-v\left(v + r_6\right) + r_7\right),$$

de modo que, em vista de (2.126), (2.125),

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{2r_3'}{v'}\left(-v\left(v + r_6\right) - \frac{3}{10}r_6^2 + \zeta_4\right) \\ &= -\frac{5}{2}\frac{2r_3'}{r_6'}\left[-\left(-\frac{2}{5}r_6 + c_3\right)\left(\frac{3}{5}r_6 + c_3\right) - \frac{3}{10}r_6^2 + \zeta_4\right] \\ &= -5\frac{r_3'}{r_6'}\left(-\frac{3}{50}r_6^2 - \frac{1}{5}c_3 r_6 - c_3^2 + \zeta_4\right). \end{aligned} \tag{2.127}$$

Se substituirmos (2.115) e (2.123) em (2.113), e depois usarmos (2.114), obtemos

$$t + s_1 = s_3. \tag{2.128}$$

A partir deste ponto admitimos que $\gamma = 0$. Recordamos que, nesse caso, $\alpha \neq 0$. Em vista de (2.123) temos que vale (2.82). Como resultado de (2.91), (2.125), obtemos

$$2\zeta_2 r_3 + 2\alpha c_2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 = -\frac{2}{5}r_6 + c_3. \tag{2.129}$$

Derivando com respeito a τ, concluímos que existe ζ_5 tal que

$$c_3 = 2\alpha c_2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 + \zeta_5. \tag{2.130}$$

Definimos $\zeta \in \mathbb{R}$, $c = c(\tau)$, $h = h(z_0)$, por

$$\zeta = \zeta_4, \qquad c = \frac{c_3}{2}, \qquad h = \zeta_2 r_3 - \frac{\zeta_5}{2}. \tag{2.131}$$

Em vista de $\zeta_2 \neq 0$ e do fato de que r_3 é arbitrária, temos que h é arbitrária. Decorre disso, de $\alpha \neq 0$, (2.130) e do fato de que c_2 é arbitrária que c é arbitrária. Em vista de (2.110), (2.125) e (2.131), temos $c_\tau \neq 0$. Em vista de $r_3' \neq 0$ e (2.131), temos $h' \neq 0$.

As expressões (2.90), (2.130), (2.131) utilizadas em (2.76) dão

$$g = \frac{\zeta_2}{\alpha}\frac{1}{\zeta_2}\left(h + \frac{\zeta_5}{2}\right) + \frac{1}{\alpha}\frac{c_3 - \eta_2^2 + \eta_3^2 - \zeta_5}{2} = \frac{1}{\alpha}\left(h + c + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right). \tag{2.132}$$

Usando (2.129), (2.130), (2.131), obtemos

$$r_6 = -\frac{5}{2}\left(2\zeta_2 r_3 + 2\alpha c_2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 - c_3\right) = -\frac{5}{2}\left(2\zeta_2 r_3 - \zeta_5\right) = -5h. \tag{2.133}$$

Substituindo (2.131), (2.133) em (2.125), obtemos

$$v = -\frac{2}{5}(-5h) + 2\frac{c_3}{2} = 2(h + c). \tag{2.134}$$

Ao usarmos (2.131), (2.133) em (2.127) vem

$$\zeta_2 s_3 = -5\frac{h'}{-5h'}\left(-\frac{3}{50}25h^2 - \frac{1}{5}2c(-5h) - 4c^2 + \zeta\right) = -\frac{3}{2}h^2 + 2ch - 4c^2 + \zeta. \tag{2.135}$$

Se substituirmos (2.90), (2.128), (2.131), (2.135) em (2.78), obtemos

$$m = \frac{\zeta_2}{\alpha}\left(\frac{3}{2}r_3'' z_1^2 + s_3\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{2}h'' z_1^2 - \frac{3}{2}h^2 + 2ch - 4c^2 + \zeta\right). \tag{2.136}$$

Como $\gamma = 0$, temos de (5) que $b = \alpha$. Substituindo isso, (2.90), (2.128), (2.135) em (2.79), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathring{m} &= \frac{\zeta_2}{\alpha}\left(r_3''' z_1^3 + s_3' z_1\right) = \frac{1}{\alpha}\left(h''' z_1^3 - 3hh' z_1 + 2ch' z_1\right), \\
\mathring{m}' &= \frac{1}{\alpha}\left(h'''' z_1^3 - 3(h')^2 z_1 - 3hh'' z_1 + 2ch'' z_1\right), \\
\mathring{m}'' &= \frac{1}{\alpha}\left(h''''' z_1^3 - 9h'h'' z_1 - 3hh''' z_1 + 2ch''' z_1\right).
\end{aligned} \tag{2.137}$$

Ao usarmos (2.132), (2.134) e (2.136) até (2.137) em (2.70) até (2.74), obtemos

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\alpha}{h'}\left(\frac{3}{\alpha}h'' z_1 + 2\frac{h''}{\alpha}z_1\right) = 5\frac{h''}{h'}z_1, \\
k_2 &= \frac{\alpha}{h'}\left(3\frac{3}{\alpha}h'' + \frac{h''}{\alpha}\right) = 10\frac{h''}{h'}, \\
k_3 &= \frac{\alpha}{h'}\left[2\left(\frac{3}{\alpha}h''' z_1\right)z_1 + \frac{h'''}{\alpha}z_1^2 + \frac{1}{\alpha}\left(3h''' z_1^2 - 3hh' + 2ch'\right)\right] - 2(h + c) \\
&= 10\frac{h'''}{h'}z_1^2 - 5h, \\
k_4 &= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_5 &= \frac{\alpha}{h'}\left[2\left(\frac{3}{\alpha}h'''\right)z_1+\frac{3}{\alpha}h'''z_1+\frac{6}{\alpha}h'''z_1\right]=15\frac{h'''}{h'}z_1,\\
k_6 &= \frac{\alpha}{h'}\left[\frac{2}{\alpha}\left(3h''''z_1^2-3\left(h'\right)^2-3hh''+2ch''\right)z_1+\frac{1}{\alpha}\left(h''''z_1^3-3\left(h'\right)^2z_1\right.\right.\\
&\quad \left.\left.-3hh''z_1+2ch''z_1\right)+\frac{3}{\alpha}h''''z_1^3-2\left(h+c\right)\left(\frac{3}{\alpha}h''z_1\right)\right]-h'z_1\\
&= 10\frac{h''''}{h'}z_1^3-10h'z_1-15\frac{hh''}{h'}z_1,\\
k_7 &= \frac{\alpha}{h'}\left[\frac{1}{\alpha}\left(h'''''z_1^3-9h'h''z_1-3hh'''z_1+2ch'''z_1\right)z_1^2-\frac{2\left(h+c\right)}{\alpha}\left(h'''z_1^3-3hh'z_1\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+2ch'z_1\right)-\frac{h'}{\alpha}\left(\frac{3}{2}h''z_1^2-\frac{3}{2}h^2+2ch-4c^2+\zeta\right)z_1\right]+\frac{h''}{2}z_1^3\\
&= \frac{h'''''}{h'}z_1^5+\left(-9-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)h''z_1^3+\left(-3-2\right)\frac{hh'''}{h'}z_1^3+\left(2-2\right)\frac{ch'''}{h'}z_1^3\\
&\quad +\left(6+\frac{3}{2}\right)h^2z_1+\left(-4+6-2\right)chz_1+\left(-4+4\right)c^2z_1-\zeta z_1\\
&= \frac{h'''''}{h'}z_1^5+\left(-10h''-5\frac{hh'''}{h'}\right)z_1^3+\left(\frac{15}{2}h^2-\zeta\right)z_1.
\end{aligned}
$$

Essas expressões substituídas em (2.69) dão (2.65). Em vista de $b=\alpha$, (5), (2.132), temos $\widetilde{g}=g''=\frac{h''}{\alpha}$, e daí resulta de (2.136) que

$$
m-\frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2=\frac{1}{\alpha}\left(h''z_1^2-\frac{3}{2}h^2+2ch-4c^2+\zeta\right). \tag{2.138}
$$

Temos de (5) que $\gamma=0$ é equivalente a $\mu_3=\pm\sqrt{1+\mu_2^2}$. Levando em consideração isso, $\gamma=0$, (2.132), (2.134) e (2.136) até (2.138), em $f_{11}=g$, (2.21), (2.24), (2.25), obtemos (2.66). Em particular, para obtermos f_{12}, calculamos

$$
\begin{aligned}
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[h'z_4+\left(3h''z_1+h''z_1+\beta h'\right)z_3+3h''z_2^2+\left(3h'''z_1^2-3hh'+2ch'+3h'''z_1^2\right.\right.\\
&\quad \left.+3\beta h''z_1-\alpha h'f_{11}\right)z_2+\left(h''''z_1^3-3\left(h'\right)^2z_1-3hh''z_1+2ch''z_1\right)z_1\\
&\quad \left.+\beta\left(h'''z_1^3-3hh'z_1+2ch'z_1\right)-\alpha f_{11}\left(h''z_1^2-\frac{3}{2}h^2+2ch-4c^2+\zeta\right)\right]\\
&= \frac{1}{\alpha}\left[h'z_4+\left(4h''z_1+\beta h'\right)z_3+3h''z_2^2+\left(6h'''z_1^2-3hh'+2ch'+3\beta h''z_1-\alpha f_{11}h'\right)z_2\right.\\
&\quad +h''''z_1^4+\beta h'''z_1^3+\left(-3\left(h'\right)^2-3hh''+2ch''-\alpha f_{11}h''\right)z_1^2+\beta\left(-3hh'+2ch'\right)z_1\\
&\quad \left.-\alpha f_{11}\left(-\frac{3}{2}h^2+2ch-4c^2+\zeta\right)\right].
\end{aligned}
$$

$\square$

Demonstração do Teorema 2.3.4. Temos que vigoram (2.110), $\gamma \neq 0$. Em vista de (2.123) temos que (2.82) vale. Em decorrência de (2.89), (2.125), obtemos

$$\frac{(\zeta_1 r_3 + \zeta_2)^2}{\zeta_1} - \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{2}{5} r_6 + c_3.$$

Derivando com respeito a τ, concluímos que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_3 = \theta - \frac{\delta}{\gamma}. \tag{2.139}$$

Definimos $\zeta, \sigma \in \mathbb{R}$, $c = c(\tau)$, $h = h(z_0)$, por

$$\zeta = \zeta_1 \neq 0, \qquad \sigma = \zeta_4, \qquad c = c_3, \qquad h = \pm\left(r_3 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right), \qquad k = \zeta h^2 - \theta, \tag{2.140}$$

onde $\pm$ dá o sinal de c_1 em (2.87). Recordamos que ζ possui o mesmo sinal de γ. Em vista de (2.89), (2.110), (2.139) e (2.140), temos $c_\tau \neq 0$. De $r_3' \neq 0$ e (2.140), temos $h' \neq 0$.

Como acima, obtemos (2.103), (2.104). Utilizando (2.139), (2.140) em (2.89), obtemos

$$v = \frac{(\pm\zeta_1 h)^2}{\zeta_1} - \frac{\delta}{\gamma} = \zeta h^2 - \theta + c = k + c. \tag{2.141}$$

Substituindo (2.141), (2.140) em (2.125), obtemos

$$r_6 = -\frac{5}{2}(k + c - c_3) = -\frac{5}{2}k. \tag{2.142}$$

Em vista de (2.140), (2.142), obtemos

$$\frac{r_3'}{r_6'} = \frac{\pm h}{-5\zeta h h'} = \mp\frac{1}{5\zeta h'},$$

que substituído em (2.127), junto com (2.140), (2.142), dá

$$s_3 = \pm\frac{1}{\zeta h}\left[-\frac{3}{50}\left(\frac{5}{2}k\right)^2 - \frac{1}{5}c\left(-\frac{5}{2}k\right) - c^2 + \sigma\right] = \pm\frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right). \tag{2.143}$$

Se substituirmos (2.87), (2.128), (2.140), (2.143) em (2.78), obtemos

$$\begin{aligned} m &= \pm\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left[\frac{3}{2}r_3'' z_1^2 \pm \frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right)\right] \\ &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left[\frac{3}{2}h'' z_1^2 + \frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.144}$$

Usando (2.87), (2.103), (2.128), (2.140), (2.143) em (2.79), obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
\mathring{m} &= \pm\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\frac{\left\{\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\gamma h\left[\pm\frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2+\frac{c}{2}k-c^2+\sigma\right)\right]\right\}'}{\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\gamma h}z_1+r_3'''z_1^3\right) \\
&= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(\frac{\left(-\frac{3}{8}k^2+\frac{c}{2}k-c^2+\sigma\right)'}{\zeta h}z_1+h'''z_1^3\right) \\
&= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(h'''z_1^3+\frac{-\frac{3}{8}2k\left(2\zeta hh'\right)+\frac{c}{2}2\zeta hh'}{\zeta h}z_1\right) \qquad (2.145)\\
&= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(h'''z_1^3-\frac{3}{2}kh'z_1+ch'z_1\right), \\
\mathring{m}' &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(h''''z_1^3-3\zeta h\left(h'\right)^2z_1-\frac{3}{2}kh''z_1+ch''z_1\right), \\
\mathring{m}'' &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(h'''''z_1^3-3\zeta\left(h'\right)^3z_1-9\zeta hh'h''z_1-\frac{3}{2}kh'''z_1+ch'''z_1\right).
\end{aligned}$$

Substituindo (2.104), (2.141), e (2.144) até (2.145) em (2.70) até (2.74), obtemos

$$\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(3h''z_1+2h''z_1\right)=5\frac{h''}{h'}z_1, \\
k_2 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(9h''+h''\right)=10\frac{h''}{h'}, \\
k_3 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(2\left(3h'''z_1\right)z_1+h'''z_1^2+3h'''z_1^2-\frac{3}{2}kh'+ch'\right)-k-c=10\frac{h'''}{h'}z_1^2-\frac{5}{2}k, \\
k_4 &= 0, \\
k_5 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left(2\left(3h'''\right)z_1+3h'''z_1+6h'''z_1\right)=15\frac{h'''}{h'}z_1, \\
k_6 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left[2\left(3h''''z_1^2-3\zeta h\left(h'\right)^2-\frac{3}{2}kh''+ch''\right)z_1+h''''z_1^3\right. \\
&\quad\left.-3\zeta h\left(h'\right)^2z_1-\frac{3}{2}kh''z_1+ch''z_1+3h''''z_1^3-\left(k+c\right)3h''z_1\right]-\frac{2\zeta hh'}{2}z_1 \\
&= 10\frac{h''''}{h'}z_1^3-10\zeta hh'z_1-\frac{15}{2}k\frac{h''}{h'}z_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_7 &= \sqrt{\frac{\gamma}{\zeta}}\frac{1}{h'}\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left\{\left(h'''''z_1^3 - 3\zeta\left(h'\right)^3 z_1 - 9\zeta hh'h''z_1 - \frac{3}{2}kh'''z_1 + ch'''z_1\right) z_1^2\right. \\
&\quad - (k+c)\left(h'''z_1^3 - \frac{3}{2}kh'z_1 + ch'z_1\right) \\
&\quad \left.-\frac{2\zeta hh'}{2}\left[\frac{3}{2}h''z_1^2 + \frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right)\right] z_1\right\} + \frac{2\zeta\left(h'\right)^2 + 2\zeta hh''}{4} z_1^3 \\
&= \frac{1}{h'}\left\{h'''''z_1^5 - 3\zeta\left(h'\right)^3 z_1^3 - 9\zeta hh'h''z_1^3 - \frac{3}{2}kh'''z_1^3 + ch'''z_1^3 - kh'''z_1^3\right. \\
&\quad +\frac{3}{2}k^2h'z_1 - ckh'z_1 - ch'''z_1^3 + \frac{3}{2}ckh'z_1 - c^2h'z_1 - \frac{3}{2}\zeta hh'h''z_1^3 \\
&\quad \left.+\frac{3}{8}h'k^2z_1 - \frac{c}{2}h'kz_1 + c^2h'z_1 - \sigma h'z_1\right\} + \frac{1}{2}\zeta\left(h'\right)^2 z_1^3 + \frac{1}{2}\zeta hh''z_1^3 \\
&= \frac{h'''''}{h'}z_1^5 - \frac{5}{2}\zeta\left(h'\right)^2 z_1^3 - 10\zeta hh''z_1^3 - \frac{5}{2}k\frac{h'''}{h'}z_1^3 + \frac{15}{8}k^2z_1 - \sigma z_1.
\end{aligned}$$

Tais expressões substituídas em (2.69) fornecem (2.67). Como antes, obtemos (2.108), que, junto com (2.144), dá

$$\begin{aligned}
m - \frac{1}{2}\widetilde{g}z_1^2 &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left[\frac{3}{2}h''z_1^2 + \frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right) - \frac{1}{2}\frac{\left(hh'\right)'}{h}z_1^2\right] \\
&= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left[h''z_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(h'\right)^2}{h}z_1^2 + \frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right)\right]. \qquad (2.146)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.103), (2.104) e (2.144) até (2.146) em $f_{11} = g$, (2.21), (2.24), (2.25), obtemos (2.68). Em particular, com o fim de obtermos f_{12}, começamos por

$$\begin{aligned}
f_{12} &= \sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}\left\{h'z_4 + \left(3h''z_1 + h''z_1 + \beta h'\right) z_3 + 3h''z_2^2 + \left(3h'''z_1^2 - \frac{3}{2}kh' + ch' + 3h'''z_1^2\right.\right. \\
&\quad \left. +\beta\left(3h''z_1\right) - \gamma\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}hh'f_{11}\right) z_2 + \left(h''''z_1^3 - 3\zeta h\left(h'\right)^2 z_1 - \frac{3}{2}kh''z_1 + ch''z_1\right) z_1 \\
&\quad +\beta\left(h'''z_1^3 - \frac{3}{2}kh'z_1 + ch'z_1\right) \\
&\quad \left.-\gamma\sqrt{\frac{\zeta}{\gamma}}f_{11}h\left[h''z_1^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(h'\right)^2}{h}z_1^2 + \frac{1}{\zeta h}\left(-\frac{3}{8}k^2 + \frac{c}{2}k - c^2 + \sigma\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.3.5 Em algumas situações, é conveniente tomar os parâmetros livres distintos de τ como certas funções de τ, e outras vezes é interessante atribuir a eles valores numéricos (ver, por exemplo, demonstração abaixo do resultado principal da Seção 2.1). No último caso, todas as quantidades em (2.75) podem depender dos parâmetros livres distintos de τ de maneira arbitrária.

Estamos finalmente preparados para demonstrar o resultado principal da Seção 2.1:

Demonstração do resultado principal da Seção 2.1. Em todos os quatro casos, selecionamos o parâmetro τ como η_2. Primeiramente obtemos (2.2). Para que tenhamos $\alpha \neq 0$ e $\gamma = 0$, tomamos, por simplicidade, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$, $\eta_3 = -1$, de modo que, por (5), vêm $\alpha = 1$, $\beta = -\eta_2$. Basta agora substituir tais valores em (2.62).

Agora obtemos (2.3). Observamos que devemos ter $\gamma \neq 0$ e $\delta \neq 0$. Por simplicidade, tomamos $\zeta = \theta = 1$. Como γ e ζ possuem o mesmo sinal, devemos ter $\gamma > 0$. Caso tomemos $\mu_2 = \mu_3 = 0$, então, por (5), ficamos com $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$. Assim, de (5), (2.102), vem

$$1 = \theta = \frac{\delta}{\gamma} = \eta_3^2 - \eta_2^2,$$

de modo que escolhemos $\eta_3 = \sqrt{1 + \eta_2^2}$. Conseqüentemente, vem de de (5) que $\xi_2 = -\eta_2$, $\xi_3 = -\sqrt{1 + \eta_2^2}$. Agora substituímos tais valores em (2.64).

Passamos agora a (2.4). Para termos $\alpha \neq 0$ e $\gamma = 0$, será conveniente tomar $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$, $\eta_3 = -2$, de modo que, por (5), resulta que $\alpha = 2$, $\beta = -\eta_2$. Finalmente, fazemos $\zeta = 0$ e $c(\eta_2) = \frac{\eta_2^2}{2}$, que satisfaz $c_{\eta_2} \neq 0$, contanto que $\eta_2 \neq 0$. Resta agora substituir estes valores em (2.66).

Finalmente obtemos (2.5). Notamos que se deve ter $\gamma \neq 0$ e $\delta \neq 0$. Tomamos, especificamente, $\zeta = 1$, $\theta = \sigma = 0$. Caso façamos $\mu_2 = \mu_3 = 0$, então, por (5), decorre que $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$. Assim, de (5), (2.139), (2.140), vem $c = -\delta = \eta_2^2 - \eta_3^2$. Para satisfazer $c_{\eta_2} \neq 0$, tomamos $\eta_3 = 2\eta_2$, $\eta_2 \neq 0$. Segue-se que $c = -3\eta_2^2$. De (5) obtemos $\xi_2 = -\eta_2$, $\xi_3 = -2\eta_2$. Daí substituímos tais valores em (2.68).

□

2.4 Três importantes equações de evolução de quinta ordem

Nesta seção, caracterizamos todas as ocorrências nos Teoremas 2.3.1 a 2.3.4 das equações KdV de quinta ordem, de Sawada–Kotera e de Kaup–Kupershmidt. Seguindo o ponto de vista adotado nos Teoremas 2.3.1 a 2.3.4, não explicitamos o parâmetro especial τ com respeito ao qual considera-se independência. Atribuir valores numéricos aos outros parâmetros, como também tomá-los como certas funções de τ, pode ser útil quando da aplicação do método do espalhamento inverso a alguma situação específica. Assim, é interessante ter à disposição o quadro geral do qual possamos extrair casos particulares de acordo com as condições especiais sob consideração. Uma escolha particular dos parâmetros para as 1-formas associadas às equações já foi exposta no Exemplo 2.1.5.

Exemplo 2.4.1 Determinamos todas as ocorrências em (2.61) da equação

$$z_{0,t} = z_5 + \theta_1 z_0 z_3 + \theta_2 z_1 z_2 + \theta_3 z_0^2 z_1, \tag{2.147}$$

nos casos da equação KdV de quinta ordem, para a qual

$$\theta_1 = 10, \qquad \theta_2 = 20, \qquad \theta_3 = 30, \tag{2.148}$$

a equação de Kaup–Kupershmidt, para a qual

$$\theta_1 = 5, \qquad \theta_2 = \frac{25}{2}, \qquad \theta_3 = 5, \tag{2.149}$$

e a equação de Sawada–Kotera, para a qual

$$\theta_1 = 5, \qquad \theta_2 = 5, \qquad \theta_3 = 5. \tag{2.150}$$

Como os coeficientes de z_4 e $z_2 z_3$ são nulos, temos

$$q_{,z_1 z_1} + 3h'' = 3q_{,z_1 z_1} + 4h'' = 0,$$

que é um sistema linear com determinante não-nulo possuindo a solução única $q_{11} = h'' = 0$. Assim, temos

$$h = \varphi_1 z_0 + \varphi_2, \qquad q = k_1 z_1 + k_2, \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1 \neq 0, \qquad k_i = k_i\,(z_0)\,. \tag{2.151}$$

Disso e do fato de que o coeficiente de z_2^2 em (2.61) é nulo, obtemos $k_1' = 0$, de modo que $k_1 \in \mathbb{R}$. Igualando os termos que dependem apenas de z_0 e z_1, obtemos

$$\frac{1}{h'}\left(q''' z_1^2 - 2hq'\right) - q = \theta_3 z_0^2,$$

onde, substituindo os valores de h, q encontrados acima, vem

$$\frac{1}{\varphi_1}\left[k_2''' z_1^2 - 2\left(\varphi_1 z_0 + \varphi_2\right) k_2'\right] - k_1 z_1 - k_2 = \theta_3 z_0^2,$$

de modo que

$$k_2''' = 0, \qquad k_1 = 0, \qquad -\left[\frac{2}{\varphi_1}\left(\varphi_1 z_0 + \varphi_2\right) k_2' + k_2\right] = \theta_3 z_0^2. \tag{2.152}$$

Substituindo a primeira e segunda relações em (2.151), decorre que

$$q = k_2 = \psi_1 z_0^2 + \psi_2 z_0 + \psi_3, \qquad \psi_i \in \mathbb{R}, \tag{2.153}$$

que, substituindo em (2.152), fornece

$$\theta_3 z_0^2 = -\left(5\psi_1 z_0^2 + 3\psi_2 z_0 + 4\frac{\varphi_2\psi_1}{\varphi_1} z_0 + 2\frac{\varphi_2\psi_2}{\varphi_1} + \psi_3\right),$$

de modo que

$$\psi_1 = -\frac{\theta_3}{5}, \qquad 3\psi_2 + 4\frac{\varphi_2\psi_1}{\varphi_1} = 0, \qquad 2\frac{\varphi_2\psi_2}{\varphi_1} + \psi_3 = 0. \tag{2.154}$$

Igualando os coeficientes de z_2 em (2.61) e (2.147), e utilizando (2.151), (2.153), obtemos $\left(6\frac{\psi_1}{\varphi_1} - \varphi_1\right) z_1 = \theta_2 z_1$, que, em vista de (2.154), fornece

$$\frac{6}{5}\frac{\theta_3}{\varphi_1} + \varphi_1 = -\theta_2. \tag{2.155}$$

Igualando os coeficientes de z_3, e usando (2.151), (2.153), obtemos

$$2\left(\frac{\psi_1}{\varphi_1} - \varphi_1\right) z_0 + \frac{\psi_2}{\varphi_1} - 2\varphi_2 = \theta_1 z_0,$$

de modo que, utilizando a primeira relação de (2.154),

$$\frac{1}{5}\frac{\theta_3}{\varphi_1} + \varphi_1 = -\frac{\theta_1}{2}, \qquad \frac{\psi_2}{\varphi_1} = 2\varphi_2. \tag{2.156}$$

De (2.155), e da primeira relação de (2.156), obtemos

$$\varphi_1 = \frac{\theta_2 - 3\theta_1}{5}. \tag{2.157}$$

Substituindo a segunda relação de (2.156) na segunda relação de (2.154), ficamos com

$$\left(6\varphi_1 + 4\frac{\psi_1}{\varphi_1}\right)\varphi_2 = 0. \tag{2.158}$$

Primeiramente supomos que o primeiro fator é nulo. Então $\psi_1 = -\frac{3}{2}\varphi_1^2$, que, em vista da primeira relação de (2.154) e de (2.157), implica

$$\theta_3 = \frac{3}{10}\left(\theta_2 - 3\theta_1\right)^2. \tag{2.159}$$

Dentre (2.148), (2.149), (2.150), apenas (2.148) cumpre tal condição. Substituindo (2.148) na primeira relação de (2.154) e em (2.157), e então usando a segunda e terceira relações de (2.154), obtemos que a equação KdV de quinta ordem é obtida ao tomar

$$\varphi_1 = -2, \qquad \varphi_2 \in \mathbb{R}, \qquad \psi_1 = -6, \qquad \psi_2 = -4\varphi_2, \qquad \psi_3 = -4\varphi_2^2. \tag{2.160}$$

Admitimos por fim que o primeiro fator de (2.158) é não-nulo e que $\varphi_2 = 0$. Isso implica que (2.159) não vale. Apenas (2.149) e (2.150) satisfazem essa condição. Substituindo (2.149), (2.150) na primeira relação de (2.154) e em (2.157), e $\varphi_2 = 0$ na terceira relação de (2.154) e na segunda relação de (2.156), obtemos que a equação de Kaup–Kupershmidt é dada por

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \psi_1 = -1, \qquad \varphi_2 = \psi_2 = \psi_3 = 0, \tag{2.161}$$

e que a equação de Sawada–Kotera é dada por

$$\varphi_1 = -2, \qquad \psi_1 = -1, \qquad \varphi_2 = \psi_2 = \psi_3 = 0. \tag{2.162}$$

Substituindo (2.151), (2.153) em (2.62) concluímos que as 1-formas associadas são dadas, para $2 \leq p \leq 3$, por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\alpha}\left(\varphi_1 z_0 + \varphi_2 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\alpha}\left(\varphi_1 z_0 + \varphi_2 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right) + \eta_p, \\
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[\varphi_1 z_4 + \beta\varphi_1 z_3 + (2\psi_1 z_0 + \psi_2 - \alpha\varphi_1 f_{11})\, z_2 + 2\psi_1 z_1^2\right. \\
&\quad \left. +\beta\,(2\psi_1 z_0 + \psi_2)\, z_1 - \alpha f_{11}\left(\psi_1 z_0^2 + \psi_2 z_0 + \psi_3\right)\right], \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left[\varphi_1 z_3 + (2\psi_1 z_0 + \psi_2)\, z_1\right] - \eta_p\left(\varphi_1 z_2 + \psi_1 z_0^2 + \psi_2 z_0 + \psi_3\right),
\end{aligned}$$

onde $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$.

Para a equação KdV de quinta ordem, utilizamos (2.160) e obtemos as novas 1-formas associadas dadas, para $2 \leq p \leq 3$, por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\alpha}\left(-2z_0 + \varphi_2 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\alpha}\left(-2z_0 + \varphi_2 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right) + \eta_p, \\
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[-2z_4 - 2\beta z_3 + \left(-16z_0 - 2\varphi_2 + \eta_3^2 - \eta_2^2\right) z_2 - 12z_1^2\right. \\
&\quad \left. +\beta\,(-12z_0 - 4\varphi_2)\, z_1 - \left(-2z_0 + \varphi_2 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right)\left(-6z_0^2 - 4\varphi_2 z_0 - 4\varphi_2^2\right)\right], \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left[-2z_3 + (-12z_0 - 4\varphi_2)\, z_1\right] - \eta_p\left(-2z_2 - 6z_0^2 - 4\varphi_2 z_0 - 4\varphi_2^2\right),
\end{aligned} \tag{2.163}$$

onde $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$.

Para a equação de Kaup–Kupershmidt, usamos (2.161) e obtemos as novas 1-formas associadas dadas, para $2 \leq p \leq 3$, por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}z_0 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\alpha}\left(-\frac{1}{2}z_0 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right) + \eta_p, \\
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{1}{2}z_4 - \frac{\beta}{2}z_3 + \left(-\frac{9}{4}z_0 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{4}\right) z_2 - 2z_1^2 - 2\beta z_0 z_1 - \frac{1}{2}z_0^3 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2} z_0^2\right], \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left(-\frac{1}{2}z_3 - 2z_0 z_1\right) - \eta_p\left(-\frac{1}{2}z_2 - z_0^2\right),
\end{aligned}$$

onde $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$. Tomando $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$, $\eta_3 = -1$, obtemos as 1-formas associadas referidas no Exemplo 2.1.5.

Para a equação de Sawada–Kotera, usamos (2.162) e obtemos as novas 1-formas associadas dadas, para $2 \leq p \leq 3$, por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\alpha}\left(-2z_0 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\alpha}\left(-2z_0 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right) + \eta_p, \\
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[-2z_4 - 2\beta z_3 + \left(-6z_0 + \eta_3^2 - \eta_2^2\right) z_2 - 2z_1^2 - 2\beta z_0 z_1 - 2z_0^3 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2} z_0^2\right], \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left(-2z_3 - 2z_0 z_1\right) - \eta_p\left(-2z_2 - z_0^2\right),
\end{aligned}$$

onde $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$. Tomando $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$, $\eta_3 = -1$, obtemos as 1-formas associadas referidas no Exemplo 2.1.5.

Uma questão importante a investigar é se μ_p, η_p permanecem nas 1-formas após a aplicação de qualquer transformação de gauge. Neste caso dizemos que os parâmetros são *intrínsecos* e existe a possibilidade de aplicar o método do espalhamento inverso. Resultados no sentido da determinação de tal caráter dos parâmetros são obtidos por Marvan [9], Reyes [15].

Exemplo 2.4.2 Obtemos o problema linear associado às equações de Kaup–Kupershmidt e de Sawada–Kotera num importante caso particular, estudado por Nucci [10]. O problema linear pode ser escrito na forma

$$v_x = Av, \qquad v_t = Bv,$$

onde $v = (v_1, v_2)$ depende de u e suas derivadas, e

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\left[f_{21}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + f_{11}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f_{31}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right], \\
B &= \frac{1}{2}\left[f_{22}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + f_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f_{32}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

No caso da equação de Kaup–Kupershmidt, obtemos

$$\begin{aligned}
A &= \left(-\frac{1}{4}z_0 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{\mu_2}{\alpha} & \frac{1-\mu_3}{\alpha} \\ \frac{1+\mu_3}{\alpha} & -\frac{\mu_2}{\alpha} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_3 & -\eta_2 \end{pmatrix}, \\
B &= \frac{1}{2}\left\{\left[\mu_2 f_{12} + \mu_3\left(-\frac{1}{2}z_3 - 2z_0 z_1\right) - \eta_2\left(-\frac{1}{2}z_2 - z_0^2\right)\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right. \\
&\quad \left. + f_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\mu_3 f_{12} + \mu_2\left(-\frac{1}{2}z_3 - 2z_0 z_1\right) - \eta_3\left(-\frac{1}{2}z_2 - z_0^2\right)\right]\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\mu_2 = 0, \qquad \mu_3 = 1, \qquad \eta_3 = -1/2\lambda^2, \qquad \eta_2 = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1/4\lambda^2 \\ -\lambda^2 z_0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} -z_3/4 - z_0 z_1 & \left(z_2/2 + z_0^2\right)/4\lambda^2 \\ -\lambda^2\left(z_4 + 9z_0z_2/2 + 4z_1^2 + z_0^3\right) & z_3/4 + z_0 z_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

problema linear dado por Nucci.

Procedendo de maneira análoga para a equação de Sawada–Kotera, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \left(-z_0 + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{4}\right)\begin{pmatrix} \frac{\mu_2}{\alpha} & \frac{1-\mu_3}{\alpha} \\ \frac{1+\mu_3}{\alpha} & -\frac{\mu_2}{\alpha} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_3 & -\eta_2 \end{pmatrix}, \\ B &= \frac{1}{2}\Bigg\{\left[\mu_2 f_{12} + \mu_3\left(-2z_3 - 2z_0z_1\right) - \eta_2\left(-2z_2 - z_0^2\right)\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + f_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\mu_3 f_{12} + \mu_2\left(-2z_3 - 2z_0z_1\right) - \eta_3\left(-2z_2 - z_0^2\right)\right]\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Bigg\}, \end{aligned}$$

que, no caso em que

$$\mu_2 = 0, \qquad \mu_3 = 1, \qquad \eta_3 = -2/\lambda^2, \qquad \eta_2 = 0,$$

fornece

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\lambda^2 \\ -\lambda^2 z_0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} -z_3 - z_0 z_1 & \left(2z_2 + z_0^2\right)/\lambda^2 \\ -\lambda^2\left(z_4 + 3z_0z_2 + z_1^2 + z_0^3\right) & z_3 + z_0 z_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

problema linear obtido por Nucci.

Exemplo 2.4.3 Determinamos todas as ocorrências da equação (2.147) em (2.65), nos casos da equações KdV de quinta ordem, Kaup–Kupershmidt e Sawada–Kotera. Como o coeficiente de z_4 em (2.65) é nulo, temos $h'' = 0$. Assim, temos

$$h = \varphi_1 z_0 + \varphi_2, \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1 \neq 0. \tag{2.164}$$

Igualamos os fatores de z_3 em (2.147) e (2.65), e vem, de (2.164), $-5\left(\varphi_1 z_0 + \varphi_2\right) = \theta_1 z_0$, de modo que

$$\varphi_1 = -\frac{\theta_1}{5}, \qquad \varphi_2 = 0. \tag{2.165}$$

Assim, $h = -\frac{\theta_1}{5} z_0$, que, substituindo em (2.65), fornece

$$G = \theta_1 z_0 z_3 + 2\theta_1 z_1 z_2 + \left(\frac{15}{50}\theta_1^2 - \zeta\right) z_1,$$

de modo que $\theta_2 = 2\theta_1$, $\theta_3 = \frac{15}{50}\theta_1^2 - \zeta$. Dentre (2.148), (2.149), (2.150), apenas (2.148) cumpre essa condição, com $\theta_1 = 10$, $\zeta = 0$. Substituindo isso em (2.165), obtemos que a equação KdV de quinta ordem é obtida ao tomar $\varphi_1 = -2$, $\varphi_2 = 0$, $\zeta = 0$. Ao substituir isso em (2.66) obtemos, para a equação KdV de quinta ordem, as novas 1-formas associadas dadas, para $2 \leq p \leq 3$, por

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\alpha}\left(-2z_0 + c + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\alpha}\left(-2z_0 + c + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right) + \eta_p, \\
f_{12} &= \frac{1}{\alpha}\left[-2z_4 - 2\beta z_3 + \left(-16z_0 - 2c + \eta_3^2 - \eta_2^2\right) z_2 - 12z_1^2\right. \\
&\quad \left. + \beta\left(-12z_0 - 4c\right) z_1 - \left(-2z_0 + c + \frac{\eta_3^2 - \eta_2^2}{2}\right)\left(-6z_0^2 - 4cz_0 - 4c^2\right)\right], \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left(-2z_3 - 12z_0z_1 - 4cz_1\right) - \eta_p\left(-2z_2 - 6z_0^2 - 4cz_0 - 4c^2\right),
\end{aligned}
$$

onde $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$. Em (2.66), temos $c_\tau \neq 0$, mas dispensamos tal restrição já que o caso em que $c_\tau = 0$ é considerado em (2.163). Tomando $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$, $\eta_3 = -2$, $c = \frac{\eta_2^2}{2}$, obtemos as 1-formas associadas referidas na Introdução.

Exemplo 2.4.4 Não há ocorrências da equação (2.147) em (2.63). De fato, como os coeficientes de z_4 e z_2z_3 são nulos, temos

$$q_{,11} + 5h'' = 3q_{,11} + 10h'' = 0,$$

sistema linear com determinante não-nulo, possuindo então solução única $q_{11} = h'' = 0$. Assim, temos

$$h = \varphi_1 z_0 + \varphi_2, \qquad q = k_1 z_1 + k_2, \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1 \neq 0, \qquad k_i = k_i\left(z_0\right). \tag{2.166}$$

Disso e do fato de que o coeficiente de z_2^2 é nulo, obtemos

$$\frac{1}{h'}\left(\frac{2\left(hk_1\right)'}{h} + k_1'\right) = 0. \tag{2.167}$$

Igualando os coeficientes de z_3, e usando (2.166), obtemos

$$\frac{1}{h'}\left(2k_1'z_1 + \frac{2\left(hk_1\right)'z_1 + \left(hk_2\right)'}{h}\right) - \zeta h^2 + \theta = \theta_1 z_0, \tag{2.168}$$

que, derivando com respeito a z_1, fornece $\frac{1}{h'}\left(\frac{(hk_1)'}{h} + k_1'\right) = 0$. Disso e de (2.167), obtemos

$$\frac{\left(hk_1\right)'}{h} = k_1' = 0,$$

de modo que, em particular, $k_1 \in \mathbb{R}$. Substituindo isso em (2.168), e notando que $h' \neq 0$, obtemos $k_1 = 0$. Igualando os termos que dependem apenas de z_0 e z_1, e usando (2.166) e $k_1 = 0$, obtemos

$$\frac{1}{\varphi_1}\left[\left(\frac{(hk_2)'}{h}\right)'' z_1^2 - \left(\zeta h^2 - \theta\right)\left(\frac{(hk_2)'}{h}\right)\right] - \zeta h k_2 + \frac{1}{2}\zeta\varphi_1^2 z_1^2 = \theta_3 z_0^2.$$

Considerando os coeficientes de z_1^2, obtemos

$$\frac{1}{\varphi_1}\left(\frac{(hk_2)'}{h}\right)'' + \frac{1}{2}\zeta\varphi_1^2 = 0. \tag{2.169}$$

Igualando os coeficientes de z_2, e usando (2.166) e $k_1 = 0$, temos

$$\frac{3}{\varphi_1}\left(\frac{(hk_2)'}{h}\right)' - \zeta h\varphi_1 = \theta_2,$$

que, derivando com respeito a z_0, e usando (2.169) vem

$$-\frac{5}{2}\zeta\varphi_1^2 = 0, \tag{2.170}$$

contradizendo $\zeta, \varphi_1 \neq 0$. Assim, não há ocorrências da equação (2.147) em (2.63).

Exemplo 2.4.5 Não há ocorrência da equação (2.147) em (2.67). De fato, como o coeficiente de z_4 é nulo, temos $h'' = 0$. Assim, temos

$$h = \varphi_1 z_0 + \varphi_2, \qquad \varphi_i \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1 \neq 0. \tag{2.171}$$

Igualando os coeficientes de z_3, temos, de (2.171),

$$-\frac{5}{2}\left[\zeta\left(\varphi_1 z_0 + \varphi_2\right)^2 - \theta\right] = \theta_1 z_0,$$

que, em particular, implica 2.170, novamente uma contradição. Assim, não há ocorrência da equação (2.147) em (2.67).

Capítulo 3

Classes não-genéricas de equações $z_{0,t} = z_5 + G$ com $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$

Neste capítulo classificamos o restante das equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descrevendo superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{3.1}$$

tratando respectivamente nas Seções 3.1, 3.2 e 3.3 os casos não-genéricos em que

$$v' \neq 0,\ \delta = 0,\ \eta_2 = 0, \qquad v' \neq 0,\ \delta = 0,\ \eta_2 \neq 0, \qquad v' = 0,$$

onde v e δ são dadas por (5). Assinalamos que a maior parte dos resultados é estabelecida para k arbitrariamente grande. Também determinamos precisamente em quais situações soluções genéricas dão origem a métricas.

3.1 Equações $z_{0,t} = z_5 + G$ com $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$, $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 = 0$

No Teorema 3.1.1, caracterizamos todas as equações de evolução $z_{0,t} = z_k + G(z_0, \ldots, z_k)$, $k \geq 2$, descrevendo superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo (3.1) e $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 = 0$, onde v e δ são dadas por (5). Também provamos que uma solução genérica da classe de equações obtida dá origem a uma métrica.

Teorema 3.1.1 *Sejam f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, funções diferenciáveis de $z_0, \ldots, z_k$, $k \geq 2$, satisfazendo (1.2). Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, e δ, v dadas por (5). Admitimos que valem (3.1), $v' \neq 0$, $\delta = 0$ e $\eta_2 = 0$. Então a equação de evolução*

$z_{0,t} = z_k + G(z_0, \ldots, z_{k-1})$ descreve superfícies pseudo-esféricas com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, se, e somente se,

$$G = \frac{1}{g'}\left(g'' z_1 + m_{,z_{k-2}}\right) z_{k-1} + \frac{1}{g'}\sum_{j=0}^{k-3} m_{,z_j} z_{j+1}, \tag{3.2}$$

onde $m = m(z_0, \ldots, z_{k-2})$ é uma função diferenciável, e as funções f_{i2}, $1 \leq i \leq 3$, são dadas por

$$f_{12} = g' z_{k-1} + m, \tag{3.3}$$

$$f_{p2} = \mu_p f_{12}, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{3.4}$$

e μ_p, η_p cumprem $\eta_p = 0$, $2 \leq p \leq 3$, $\gamma \neq 0$. Além disso, nenhuma solução $u = z_0$ cumpre $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

Demonstração. Primeiramente estabelecemos a equivalência entre as hipóteses $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 = 0$ e as condições $\eta_p = 0$, $2 \leq p \leq 3$, $\gamma \neq 0$. Fazendo $\eta_2 = 0$ e $\delta = 0$ em (2.58), obtemos $\eta_3 = 0$, $\beta = 0$. Tomando $\eta_p = 0$, $2 \leq p \leq 3$, em (5), obtemos

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \xi_p = 0, \qquad 2 \leq p \leq 3. \tag{3.5}$$

Usando $\alpha = 0$, (5) e (2.14) em $v' \neq 0$, obtemos $\gamma \neq 0$. Observamos que, reciprocamente, $\eta_p = 0$, $2 \leq p \leq 3$, $\gamma \neq 0$ implicam, em vista de (5), (2.14) e (3.5), que $v' \neq 0$, $\delta = 0$ e $\eta_2 = 0$, como afirmado.

Como $g' \neq 0$ e $v' \neq 0$, podemos aplicar o Teorema 1.0.1 para determinar as 1-formas ω_i. Para tal fim, fazemos uso do Lema 2.2.1 no cálculo das funções C^{pr}, $0 \leq r \leq k-1$, $2 \leq p \leq 3$. Substituindo (3.5) em (2.7), (2.10), obtemos

$$C^{pr} = \mu_p f_{12,z_r}, \qquad f_{p2} = \mu_p f_{12}. \tag{3.6}$$

Segue-se que vale (3.4) e que (1.6) é uma identidade para $0 \leq r \leq k-1$.

O mesmo argumento que levou à relação (2.29) mostra que existe $m = m(z_0, \ldots, z_{k-2})$ tal que vale (3.3).

Da mesma maneira que obtivemos (2.53), obtemos em geral

$$g'G = \sum_{j=0}^{k-2} f_{12,z_j} z_{j+1} + f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22}, \tag{3.7}$$

que utilizamos agora para calcular G. Substituindo (3.3) em $\sum_{j=0}^{k-2} f_{12,z_j} z_{j+1}$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{k-2} f_{12,z_j} z_{j+1} = g'' z_1 z_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-2} m_{,z_j} z_{j+1}$$

$$= \left(g''z_1 + m_{,z_{k-2}}\right) z_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-3} m_{,z_j} z_{j+1}. \tag{3.8}$$

Em vista de $\eta_2 = \eta_3 = 0$, (3.1) e (3.4), temos

$$f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} = 0. \tag{3.9}$$

Usando (3.8) e (3.9) em (3.7), obtemos (3.2).

Finalmente, provamos que nenhuma solução $u = z_0$ cumpre $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Temos, em vista de $\eta_2 = 0$, (3.1) e (3.4),

$$f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} = \mu_2 g f_{12} - \mu_2 g f_{12} = 0,$$

de modo que $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$.

□

3.2 Equações $z_{0,t} = z_5 + G$ com $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$, $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$

Caracterizamos, no Teorema 3.2.2, todas as equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad \mu_p, \eta_p \in \mathbb{R}, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{3.10}$$

$v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$, onde v e δ são dadas por (5). Além disso provamos que uma solução genérica dá origem a uma métrica. Para demonstrar o Teorema 3.2.2, estabelecemos o Lema 3.2.1, que fornece condições necessárias sobre as funções recursivas C^{pr} que aparecem no Teorema 1.0.1, e sobre as funções f_{i2}, $1 \leq i \leq 3$, no caso especial em que vigoram (3.10), $v' \neq 0$, $\delta = 0$ e $\eta_2 \neq 0$. Assinalamos que o Lema 3.2.1 vale para qualquer equação de evolução, independentemente da ordem $k \geq 2$.

Lema 3.2.1 *Admitimos que a equação de evolução $z_{0,t} = F(z_0, \ldots, z_k)$, $k \geq 2$, descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$. Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais e $\alpha, \beta, \gamma, \xi_p, \delta, v, g, b$ dados por (5). Admitimos que valem (3.10), $v' \neq 0$, $\delta = 0$ e $\eta_2 \neq 0$. Então, para $2 \leq p \leq 3$, $0 \leq r \leq k-1$, temos que as funções C^{pr} do Teorema 1.0.1 são dadas por*

$$C^{pr} = \mu_p f_{12,z_r} + \eta_p q_r, \tag{3.11}$$

onde as funções q_r *são dadas recursivamente por*

$$q_{k-1} = 0, \tag{3.12}$$

e, para $1 \leq r \leq k-1$,

$$q_{r-1} = -\sum_{j=0}^{k-2} q_{r,z_j} z_{j+1} - \varepsilon f_{12,z_r} + \varepsilon g q_r, \tag{3.13}$$

onde

$$\varepsilon = \mp\mu_2\sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}} + \frac{\eta_3}{\eta_2} \neq 0. \tag{3.14}$$

Temos, para $2 \leq p \leq 3$,

$$f_{p2} = \mu_p f_{12} + \eta_p \left(\frac{1}{g} f_{12} + \frac{1}{\varepsilon g} \sum_{j=0}^{k-2} q_j z_{j+1} \right). \tag{3.15}$$

As funções q_r *satisfazem, para* $1 \leq r \leq k-1$,

$$\sum_{j=0}^{k-2} q_{r,z_j z_r} z_{j+1} + 2q_{r,z_{r-1}} + \varepsilon f_{12,z_r z_r} - \varepsilon g q_{r,z_r} = 0. \tag{3.16}$$

Temos que (1.6), $0 \leq r \leq k-1$, $2 \leq p \leq 3$, *equivalem a*

$$\left(\frac{1}{g} f_{12} + \frac{1}{\varepsilon g} \sum_{j=0}^{k-2} q_j z_{j+1} \right)_{,z_r} = q_r, \qquad 0 \leq r \leq k-1. \tag{3.17}$$

Demonstração. Como $v' \neq 0$, podemos usar o Lema 2.2.1, para obter expressões convenientes para C^{pr}, f_{p2}, $0 \leq r \leq 4$, $2 \leq p \leq 3$.

Recordamos que, como $b = \gamma g + \alpha \neq 0$, temos $\gamma \neq 0$ ou $\alpha \neq 0$. Em vista disso, de $\delta = 0$ e de (2.26), concluímos que $\gamma \neq 0$. Como $\eta_2 \neq 0$, podemos escrever

$$\eta_3 = \lambda \eta_2 \tag{3.18}$$

para algum número real λ. Usando isso, $\delta = 0$, (5) e (2.58), obtemos

$$(\mu_3 - \lambda\mu_2)^2 \eta_2^2 = \left(1 - \lambda^2\right) \eta_2^2.$$

Isso implica primeiramente $1 - \lambda^2 \geq 0$, de modo que podemos, em vista de $\eta_2 \neq 0$, reescrever a relação como

$$\mu_3 = \lambda\mu_2 \pm \sqrt{1 - \lambda^2}. \tag{3.19}$$

Usando (5) e (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \neq \gamma &= \mu_2^2 - \left(\lambda\mu_2 \pm \sqrt{1-\lambda^2}\right)^2 + 1 \\ &= \mu_2^2 - \lambda^2\mu_2^2 \mp 2\lambda\mu_2\sqrt{1-\lambda^2} - 1 + \lambda^2 + 1 \\ &= \left(\mp\mu_2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\right)^2 \\ &= \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde ε é dado por (3.14). Por $\eta_3 = \lambda\eta_2$, (5) e (3.19), temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu_2\eta_2 - \lambda^2\mu_2\eta_2 \mp \lambda\eta_2\sqrt{1-\lambda^2} \\ &= \mp\eta_2\sqrt{1-\lambda^2}\left(\mp\mu_2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\right) \\ &= \mp\eta_2\varepsilon\sqrt{1-\lambda^2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \mu_2\lambda\eta_2 - \left(\lambda\mu_2 \pm \sqrt{1-\lambda^2}\right)\eta_2 \\ &= \mp\eta_2\sqrt{1-\lambda^2}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Usando $\eta_3 = \lambda\eta_2$, (5), (3.14), (3.20) e (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \mp\mu_2\eta_2\varepsilon\sqrt{1-\lambda^2} - \eta_2\varepsilon^2 \\ &= \mp\mu_2\eta_2\varepsilon\sqrt{1-\lambda^2} - \eta_2\left(\mp\mu_2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\right)\varepsilon \\ &= -\eta_3\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Em vista de $\eta_3 = \lambda\eta_2$, (5), (3.19), (3.21) e (3.23), temos

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \left(\lambda\mu_2 \pm \sqrt{1-\lambda^2}\right)\alpha - \lambda\eta_2\gamma \\ &= \lambda\xi_2 \pm \alpha\sqrt{1-\lambda^2} \\ &= -\eta_2\lambda^2\varepsilon - \eta_2\varepsilon\left(1-\lambda^2\right) \\ &= -\eta_2\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Em vista de (3.23), (3.24), e escrevendo, para $0 \leq r \leq k-1$,

$$q_r = -\varepsilon s_r + t_r, \tag{3.25}$$

temos que (2.7) se torna (3.11).

Usando (3.23), (3.24) e (3.25), temos que (2.10) fica

$$f_{p2} = \mu_p f_{12} + \eta_p\left(\frac{1}{g}f_{12} + \frac{\varepsilon g + \beta}{bg}\sum_{j=0}^{k-2} t_j z_{j+1} - \frac{1}{g}\sum_{j=0}^{k-2} s_j z_{j+1}\right). \tag{3.26}$$

Por (5), (3.20) e (3.21), temos

$$b = \varepsilon^2 g \mp \eta_2 \varepsilon \sqrt{1-\lambda^2}, \tag{3.27}$$

de modo que por (3.22) temos

$$\frac{\varepsilon g + \beta}{b} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.28}$$

Em vista disso e de (3.25), temos que (3.26) torna-se (3.15).

Em vista de (3.11), (3.15), $\eta_2 \neq 0$, temos que (1.6) para $p = 2$, dividindo por η_2, torna-se (3.17). Para $p = 3$, obtemos (3.17) multiplicado por λ, sendo assim redundante. Derivando (3.17) com relação a z_j, $0 \leq j \leq k-1$, vemos que $q_{r,z_j} = q_{j,z_r}$. Por (2.8), (3.25), temos (3.12). Em vista destes fatos, temos $q_{r,z_{k-1}} = 0$.

Usando (3.25) em (2.9) obtemos, para $1 \leq r \leq k-1$,

$$q_{r-1} = -\sum_{j=0}^{k-1} q_{r,j} z_{j+1} - \varepsilon f_{12,z_r} + \varepsilon \beta s_r - b s_r + \varepsilon g t_r,$$

que, em vista de (3.25), (3.28) e $q_{r,z_{k-1}} = 0$, torna-se (3.13). Derivando (3.13) com respeito a z_r, e usando $q_{r,z_{r-1}} = q_{r-1,z_r}$, obtemos (3.16).

□

Passamos ao Teorema 3.2.2, em que classificamos as equações $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descrevendo superfícies pseudo-esféricas sob as hipóteses do Lema 3.2.1, e provamos que uma solução genérica dá origem a uma métrica.

Teorema 3.2.2 *Sejam f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, funções diferenciáveis de $z_0, \ldots, z_5$ satisfazendo (1.2). Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, e $\alpha, \beta, \gamma, \xi_p, \delta, v, g, b, \widetilde{g}$ dados por (5). Admitimos que $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$ e*

$$f_{p1} = \mu_p g + \eta_p, \qquad 2 \leq p \leq 3. \tag{3.29}$$

Então a equação de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, se, e somente se,

$$\begin{aligned} G \;=\; & \left[\frac{1}{\bar{g}'}\left(2\bar{g}'' z_1 - m_{,z_2}\right) - \bar{b}\right] z_4 - \frac{1}{\bar{g}'} m_{,z_2 z_2} z_3^2 + \left\{\frac{1}{\bar{g}'}\left[-2m_{,z_2 z_0} z_1 + \bar{g}''' z_1^2 - 2m_{,z_2 z_1} z_2\right.\right. \\ & \left.\left. + \bar{g}'' z_2 - m_{,z_1} + \bar{b}\left(m_{,z_2} - \bar{g}'' z_1\right)\right] - \bar{g}' z_1\right\} z_3 + \frac{1}{\bar{g}'}\left[-2m_{,z_1 z_0} z_1 z_2 - m' z_2\right. \\ & \left. - m_{,z_1 z_1} z_2^2 - m'' z_1^2 + \bar{b}\left(m_{,z_1} z_2 + m' z_1\right)\right] + m z_1, \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde $m = m(z_0, z_1, z_2)$ *é uma função diferenciável,*

$$\bar{g} = \varepsilon g, \qquad \bar{b} = \frac{b}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \mp\mu_2\sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}} + \frac{\eta_3}{\eta_2} \neq 0, \qquad \eta_2 \neq 0, \tag{3.31}$$

as funções f_{i2}, $1 \leq i \leq 3$, *são dadas por*

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\bar{g}' z_4 + \left(-m_{,z_2} + \bar{g}'' z_1 - \bar{g}\bar{g}'\right) z_3 - m' z_1 - m_{,z_1} z_2 + \bar{g} m\right], && (3.32)\\ f_{p2} &= \mu_p f_{12} - \eta_p\left(\bar{g}' z_3 - m\right), \qquad 2 \leq p \leq 3, && (3.33) \end{aligned}$$

e

$$\mu_3 = \frac{\eta_3}{\eta_2}\mu_2 \pm \sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}}. \tag{3.34}$$

Além disso, uma solução genérica $u = z_0$ *cumpre* $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$.

Demonstração. Primeiramente estabelecemos a equivalência entre as hipóteses $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$ e as condições (3.31), (3.34). Admitindo $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$, temos, pela demonstração do Lema 3.2.1, que $\varepsilon \neq 0$, com ε dada por (3.31), e que vale (3.34). Reciprocamente, $\varepsilon \neq 0$ implica $\gamma \neq 0$, por (3.20), de modo que $v' \neq 0$ por (5), (2.14). Além disso, (3.34) e $\eta_2 \neq 0$ implicam $\delta = 0$. De fato, escrevendo $\eta_3 = \lambda\eta_2$, temos, por (5), (3.34), que

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu_2\eta_2 - \left(\lambda\mu_2 \pm \sqrt{1-\lambda^2}\right)\lambda\eta_2 \\ &= \mp\eta_2\sqrt{1-\lambda^2}\left(\mp\mu_2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\right). \end{aligned}$$

Agora, podemos usar aqui (3.20), já que esta relação é obtida a partir de (3.19), equivalente a (3.34). Daí, substituindo a expressão de α acima juntamente com (3.20) em (2.26), ficamos com

$$\begin{aligned} \delta &= \eta_2^2\left(1-\lambda^2\right)\left(\mp\mu_2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\right)^2 - \left(\mp\mu_2\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda\right)^2\left(\eta_2^2 - \eta_3^2\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Estamos sob as hipóteses do Lema 3.2.1. Primeiramente observamos que (3.34) segue-se de (3.18) e (3.19). Agora faremos uso do Lema 3.2.1 para calcular C^{pr}, f_{12}, f_{p2}, $0 \leq r \leq 4$, $2 \leq p \leq 3$.

Como $k = 5$, temos, por (3.12), $q_4 = 0$. Como na demonstração do Teorema 2.2.3, temos (2.29). Daí, por (3.13) e $q_4 = 0$, temos

$$q_3 = -\varepsilon g', \tag{3.35}$$

que, substituindo em (3.16), $r=3$, juntamente com (2.29), fornece, em vista de $\varepsilon \neq 0$,

$$l_{1,z_3z_3}=0.$$

Como na demonstração do Teorema 2.2.3, obtemos (2.31). Em vista disso e de (3.35), temos que (3.13) fica, para $r=3$,

$$q_2=\varepsilon g''z_1-\varepsilon l_2-\varepsilon^2 gg'. \tag{3.36}$$

Como $q_2=q_2\left(z_0,z_1,z_2\right)$, existe $l=l\left(z_0,z_1,z_2\right)$ tal que

$$l_{,z_2}=q_2. \tag{3.37}$$

Por (2.31), (3.36), (3.37), temos

$$\begin{aligned}\varepsilon f_{12,z_2z_2} &= \varepsilon l_{2,z_2z_2}z_3+\varepsilon l_{3,z_2z_2}\\ &= -l_{,z_2z_2z_2}z_3+\varepsilon l_{3,z_2z_2}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Substituindo (3.37), (3.38) em (3.16), $r=2$, obtemos, usando também (2.38),

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{j=0}^{2} l_{,z_2z_2z_j}z_{j+1}+2l_{,z_2z_1}-l_{,z_2z_2z_2}z_3+\varepsilon l_{3,z_2z_2}-\varepsilon g l_{,z_2z_2}\\ &= \sum_{j=0}^{1} l_{,z_2z_2z_j}z_{j+1}+2l_{,z_2z_1}+\varepsilon l_{3,z_2z_2}-\varepsilon g l_{,z_2z_2}\\ &= l_{,z_2z_2z_0}z_1+\left(l_{,z_1}z_2\right)_{,z_2z_2}+\varepsilon l_{3,z_2z_2}-\varepsilon g l_{,z_2z_2}.\end{aligned}$$

Integrando duas vezes com respeito a z_2, obtemos funções arbitrárias de z_0, z_1 que podemos escrever como l_{4,z_1} e l_5, tais que

$$l_3=-\frac{1}{\varepsilon}l'z_1-\frac{1}{\varepsilon}l_{,z_1}z_2+gl+l_{4,z_1}z_2+l_5. \tag{3.39}$$

Comparando (3.36) e (3.37), determina-se l_2 em termos de l. Usando isso e (3.39) em (2.31), obtemos

$$f_{12}=g'z_4+\left(-\frac{1}{\varepsilon}l_{,z_2}+g''z_1-\varepsilon gg'\right)z_3-\frac{1}{\varepsilon}l'z_1-\frac{1}{\varepsilon}l_{,z_1}z_2+gl+l_{4,z_1}z_2+l_5. \tag{3.40}$$

Agora (3.37) e (3.40) substituídas em (3.13), $r=2$, dão

$$\begin{aligned}q_1 &= -\sum_{j=0}^{2} l_{,z_2z_j}z_{j+1}+l_{,z_2z_2}z_3+l_{,z_2z_0}z_1+l_{,z_1z_2}z_2+l_{,z_1}-\varepsilon g l_{,z_2}-\varepsilon l_{4,z_1}+\varepsilon g q_2\\ &= \left(l-\varepsilon l_4\right)_{,z_1}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Substituindo (3.40), (3.41) em (3.16), $r=1$, obtemos, usando também (2.38),

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=0}^{2}(l-\varepsilon l_4)_{,z_1z_1z_j} z_{j+1} + 2(l-\varepsilon l_4)_{,z_1z_0} - l_{,z_2z_1z_1}z_3 - (l'z_1)_{,z_1z_1} - l_{,z_1z_1z_1}z_2 \\
&\quad + \varepsilon g l_{,z_1z_1} + \varepsilon l_{4,z_1z_1z_1}z_2 + \varepsilon l_{5,z_1z_1} - \varepsilon g(l-\varepsilon l_4)_{,z_1z_1} \\
&= (l-\varepsilon l_4)_{,z_1z_1z_0} z_1 + 2(l-\varepsilon l_4)_{,z_1z_0} - (l'z_1)_{,z_1z_1} + \varepsilon l_{5,z_1z_1} + \varepsilon^2 g l_{4,z_1z_1} \\
&= ((l'-\varepsilon l_4')z_1)_{,z_1z_1} - (l'z_1)_{,z_1z_1} + \varepsilon l_{5,z_1z_1} + \varepsilon^2 g l_{4,z_1z_1} \\
&= -(\varepsilon l_4' z_1)_{,z_1z_1} + \varepsilon l_{5,z_1z_1} + \varepsilon^2 g l_{4,z_1z_1}.
\end{aligned}$$

Integrando duas vezes com respeito a z_1, obtemos funções arbitrárias de z_0, que podemos escrever como h_1' e h_2, tais que

$$l_5 = l_4' z_1 - \varepsilon g l_4 + h_1' z_1 + h_2. \tag{3.42}$$

Escrevendo

$$k = l - \varepsilon l_4 - \varepsilon h_1, \tag{3.43}$$

e, usando (3.42) em (3.40), obtemos

$$\begin{aligned}
f_{12} &= g'z_4 + \left(-\frac{1}{\varepsilon}l_{,z_2} + g''z_1 - \varepsilon g g'\right) z_3 - \frac{1}{\varepsilon}l'z_1 - \frac{1}{\varepsilon}l_{,z_1}z_2 + gl + l_{4,z_1}z_2 + l_4'z_1 - \varepsilon g l_4 \\
&\quad + h_1'z_1 + h_2 \\
&= g'z_4 + \left(-\frac{1}{\varepsilon}k_{,z_2} + g''z_1 - \varepsilon g g'\right) z_3 - \frac{1}{\varepsilon}k'z_1 - \frac{1}{\varepsilon}k_{,z_1}z_2 + gk + \varepsilon g h_1 + h_2. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Em vista de (3.43), temos que (3.37), (3.41) ficam

$$q_2 = k_{,z_2}, \qquad q_1 = k_{,z_1}. \tag{3.45}$$

Agora (3.44) e (3.45) substituídas em (3.13), $r=1$, fornecem

$$\begin{aligned}
q_0 &= -\sum_{j=0}^{2} k_{,z_1z_j}z_{j+1} + (k_{,z_2z_1} - \varepsilon g'')z_3 + (k'z_1)_{,z_1} + k_{,z_1z_1}z_2 - \varepsilon g k_{,z_1} + \varepsilon g k_{,z_1} \\
&= -\varepsilon g'' z_3 + k'. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Em vista disso de (3.35), (3.45) e (3.46), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3} q_j z_{j+1} &= -\varepsilon g'' z_3 z_1 + k'z_1 + k_{,z_1}z_2 + k_{,z_2}z_3 - \varepsilon g' z_4 \\
&= -\varepsilon g' z_4 + (k_{,z_2} - \varepsilon g'' z_1) z_3 + k_{,z_1}z_2 + k'z_1. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Por (3.44), (3.47), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{g}f_{12}+\frac{1}{\varepsilon g}\sum_{j=0}^{3}q_jz_{j+1} &= \frac{1}{g}\Bigg[g'z_4+\left(-\frac{1}{\varepsilon}k_{,z_2}+g''z_1-\varepsilon gg'\right)z_3-\frac{1}{\varepsilon}k'z_1\\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon}k_{,z_1}z_2+gk+\varepsilon gh_1+h_2\Bigg]\\ &\quad +\frac{1}{\varepsilon g}\left[-\varepsilon g'z_4+\left(k_{,z_2}-\varepsilon g''z_1\right)z_3+k_{,z_1}z_2+k'z_1\right]\\ &= -\varepsilon g'z_3+k+\varepsilon h_1+\frac{h_2}{g}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Em vista disso, de $q_4=0$, (3.35) e (3.45), temos que (3.17) tornam-se de imediato identidades para $1\le r\le 4$. Para $r=0$, temos, por (3.46), (3.48), que (3.17) fica $\left(\varepsilon h_1+\frac{h_2}{g}\right)'=0$, de modo que existe um número real ζ tal que

$$\varepsilon h_1+\frac{h_2}{g}=\zeta. \tag{3.49}$$

Escrevemos

$$m=k+\zeta. \tag{3.50}$$

Como l_2 é uma função arbitrária de z_0,z_1,z_2, também o são respectivamente l, k e m por (3.36), (3.37), (3.43) e (3.50). De (3.49) e (3.50) temos que (3.44) torna-se (3.32). Por (3.48), (3.49) e (3.50), temos que (3.15), $2\le p\le 3$, torna-se (3.33).

Usamos (2.53) para calcular G. Substituindo (3.32) em $\sum_{j=0}^{3}f_{12,z_j}z_{j+1}$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{3}f_{12,z_j}z_{j+1} &= \Bigg[g''z_4+\left(-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2z_0}+g'''z_1-\varepsilon\left(gg'\right)'\right)z_3-\frac{1}{\varepsilon}m''z_1\\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1z_0}z_2+g'm+gm'\Bigg]z_1+\Bigg[\left(-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2z_1}+g''\right)z_3-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1z_0}z_1\\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon}m'-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1z_1}z_2+gm_{,z_1}\Bigg]z_2\\ &\quad +\left(-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2z_2}z_3-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2z_0}z_1-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1z_2}z_2-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1}+gm_{,z_2}\right)z_3\\ &\quad +\left(-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2}+g''z_1-\varepsilon gg'\right)z_4\\ &= \left(2g''z_1-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2}-\varepsilon gg'\right)z_4-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2z_2}z_3^2+\Bigg(-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_2z_0}z_1+g'''z_1^2\\ &\quad -\varepsilon\left(g'\right)^2z_1-\varepsilon gg''z_1-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_2z_1}z_2+g''z_2-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1}+gm_{,z_2}\Bigg)z_3\\ &\quad -\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_1z_0}z_1z_2-\frac{1}{\varepsilon}m'z_2-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1z_1}z_2^2+gm_{,z_1}z_2-\frac{1}{\varepsilon}m''z_1^2\\ &\quad +g'mz_1+gm'z_1. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Por outro lado, usando (4.82), (2.55), (3.33), temos

$$\begin{aligned} f_{21}f_{32}-f_{31}f_{22} &= -\beta f_{12}-\beta g\left(\varepsilon g' z_3-m\right) \\ &= -\beta\left[g'z_4+\left(-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2}+g''z_1\right)z_3-\frac{1}{\varepsilon}m'z_1-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1}z_2\right]. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Agora utilizamos (3.51) e (3.52) em (2.53), obtendo

$$\begin{aligned} g'G &= \left(2g''z_1-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2}-\varepsilon gg'\right)z_4-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2z_2}z_3^2+\left(-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_2z_0}z_1+g'''z_1^2-\varepsilon\left(g'\right)^2z_1\right. \\ &\quad \left.-\varepsilon gg''z_1-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_2z_1}z_2+g''z_2-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1}+gm_{,z_2}\right)z_3-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_1z_0}z_1z_2-\frac{1}{\varepsilon}m'z_2 \\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1z_1}z_2^2+gm_{,z_1}z_2-\frac{1}{\varepsilon}m''z_1^2+g'mz_1+gm'z_1 \\ &\quad -\beta\left(g'z_4+\left(-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2}+g''z_1\right)z_3-\frac{1}{\varepsilon}m'z_1-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1}z_2\right) \\ &= \left(2g''z_1-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2}-\left(\varepsilon g+\beta\right)g'\right)z_4-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2z_2}z_3^2+\left(-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_2z_0}z_1+g'''z_1^2-\varepsilon\left(g'\right)^2z_1\right. \\ &\quad \left.-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_2z_1}z_2+g''z_2-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1}+\left(\varepsilon g+\beta\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_2}-g''z_1\right)\right)z_3-\frac{2}{\varepsilon}m_{,z_1z_0}z_1z_2 \\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon}m'z_2-\frac{1}{\varepsilon}m_{,z_1z_1}z_2^2-\frac{1}{\varepsilon}m''z_1^2+g'mz_1+\left(\varepsilon g+\beta\right)\frac{1}{\varepsilon}\left(m_{,z_1}z_2+m'z_1\right), \end{aligned}$$

que, em vista de (3.28), (3.31), fornece (3.30).

Finalmente, provamos que soluções genéricas cumprem $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$. Temos, em vista de (3.29), (3.33),

$$\begin{aligned} f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21} &= g\left(\mu_2 f_{12}-\eta_2\left(\varepsilon g'z_3-m\right)\right)-\left(\mu_2 g+\eta_2\right)f_{12} \\ &= \eta_2\left(-\varepsilon gg'z_3+gm-f_{12}\right). \end{aligned}$$

Temos, por (3.32), que o coeficiente de z_4 é $-\eta_2 g'\neq 0$, de modo que $\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$.

□

3.3 Equações $z_{0,t}=z_5+G$ com $f_{p1}=\mu_p f_{11}+\eta_p$, $v'=0$

Caracterizamos, no Teorema 3.3.1, todas as equações de evolução $z_{0,t}=z_k+G(z_0,\ldots,z_{k-1})$, $k\geq 2$, que descrevem superfícies pseudo-esféricas, satisfazendo

$$f_{p1}=\mu_p f_{11}+\eta_p,\qquad \mu_p,\eta_p\in\mathbb{R},\qquad 2\leq p\leq 3, \tag{3.53}$$

$v'=0$, onde v é dado por (5). Também determinamos precisamente os casos em que soluções genéricas dão origem a métricas.

Teorema 3.3.1 *Sejam f_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$, funções diferenciáveis de $z_0, \ldots, z_k$, $k \geq 2$, satisfazendo (1.2). Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais e sejam β, v, g dadas por (5). Admitimos que valem (3.53) e $v' = 0$. Então a equação $z_{0,t} = z_k + G(z_0, \ldots, z_{k-1})$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, se, e somente se,*

$$G = \left[\frac{1}{g'}\left(g'' z_1 + m_{,z_{k-2}}\right) - \beta\right] z_{k-1} + \frac{1}{g'}\left(\sum_{j=0}^{k-3} m_{,z_j} z_{j+1} - \beta m - \varphi g\right), \tag{3.54}$$

onde φ é um número real, $m = m\,(z_0, \ldots, z_{k-2})$ é uma função diferenciável, e f_{i2}, $1 \leq i \leq 3$, são dadas por

$$\begin{aligned} f_{12} &= g' z_{k-1} + m, && (3.55)\\ f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\varphi, \qquad 2 \leq p \leq 3, && (3.56) \end{aligned}$$

e

$$\mu_3 = \pm\sqrt{1 + \mu_2^2}, \qquad \eta_3 = \pm\frac{\mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}}\eta_2. \tag{3.57}$$

Além disso, uma solução genérica $u = z_0$ cumpre $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ se, e somente se, $\eta_2 \neq 0$ ou $\varphi \neq 0$.

Demonstração. Por (1.1) e (3.53) temos $g' \neq 0$. Como temos também $v' = 0$, estamos de fato na situação considerada no Teorema 1.0.2.

Por (5), (2.14), $g' \neq 0$, temos que $v' = 0$ equivale a

$$\alpha = \gamma = 0. \tag{3.58}$$

Temos de (5) que (3.58) equivale a (3.57).

Provaremos por indução que, para $1 \leq r \leq k-1$,

$$\begin{aligned} L^r &= \mu_3 f_{32,z_r} - \mu_2 f_{22,z_r}, && (3.59)\\ 0 &= \mu_3 f_{22,z_r} - \mu_2 f_{32,z_r}. && (3.60) \end{aligned}$$

Consideremos primeiramente o caso $r = k-1$. Tomando $F = z_k + G$ e (3.53) em (1.4), e derivando com respeito a z_k implica

$$f_{p2,z_{k-1}} = \mu_p g'. \tag{3.61}$$

Substituindo isso em (1.11), obtemos, usando também (5),

$$\begin{aligned} L^{k-1} &= \mu_3 f_{32,z_{k-1}} - \mu_2 f_{22,z_{k-1}} + \frac{1}{g}\left(\eta_3 f_{32,z_{k-1}} - \eta_2 f_{22,z_{k-1}}\right)\\ &= \mu_3 f_{32,z_{k-1}} - \mu_2 f_{22,z_{k-1}} - \alpha\frac{g'}{g}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

de modo que, por (3.58), provamos (3.59) para $r=k-1$. Para obter (3.60) com $r=k-1$, basta usar (3.61).

Admitindo (3.59), (3.60), para $2\leq r\leq k-1$, provaremos tais relações para $r-1$. Substituindo (3.61) em (1.9),

$$f_{12}=-\frac{1}{g}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\mu_3 f_{22,z_j}-\mu_2 f_{32,z_j}\right)z_{j+1}+\mu_3 f_{32}-\mu_2 f_{22},$$

de modo que, usando também (3.59) e (3.60) para r,

$$f_{12,z_r}=-\frac{1}{g}\left(\mu_3 f_{22,z_{r-1}}-\mu_2 f_{32,z_{r-1}}\right)+L_r.$$

Disso e de (1.10), obtemos (3.60) para $r-1$. Agora, substituindo (3.59) para r em (1.12) para $r-1$, obtemos

$$\begin{aligned}L^{r-1} &= -\sum_{j=0}^{k-1}\left(\mu_3 f_{32,z_r z_j}-\mu_2 f_{22,z_r z_j}\right)z_{j+1}+\frac{1}{f_{11}}\sum_{j=0}^{k-1}\left(f_{31}f_{32,z_j z_r}-f_{21}f_{22,z_j z_r}\right)z_{j+1}\\&\quad+\frac{1}{f_{11}}\left(f_{31}f_{32,z_{r-1}}-f_{21}f_{22,z_{r-1}}\right)\\&= \frac{1}{f_{11}}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\eta_3 f_{32,z_j z_r}-\eta_2 f_{22,z_j z_r}\right)z_{j+1}+\mu_3 f_{32,z_{r-1}}-\mu_2 f_{22,z_{r-1}}\\&\quad+\frac{1}{f_{11}}\left(\eta_3 f_{32,z_{r-1}}-\eta_2 f_{22,z_{r-1}}\right).\end{aligned}$$

Mas, usando (5) e (3.58), temos, para $2\leq p\leq 3$,

$$-\left(-1\right)^{5-p}\mu_{5-p}^2=1+\left(-1\right)^p\mu_p^2,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mu_{5-p}\left(\mu_3 f_{22}-\mu_2 f_{32}\right) &= -\left(-1\right)^{5-p}\mu_{5-p}^2 f_{p2}+\left(-1\right)^{5-p}\mu_{5-p}\mu_p f_{(5-p)2}\\&= f_{p2}+\left(-1\right)^p\mu_p^2 f_{p2}+\left(-1\right)^{5-p}\mu_{5-p}\mu_p f_{(5-p)2}\\&= f_{p2}+\mu_p\left(\mu_2 f_{22}-\mu_3 f_{32}\right).\end{aligned}$$

Isolando tal valor de f_{p2}, obtemos, usando também (5) e (3.58),

$$\begin{aligned}\eta_2 f_{22}-\eta_3 f_{32} &= \left(\eta_2\mu_3-\eta_3\mu_2\right)\left(\mu_3 f_{22}-\mu_2 f_{32}\right)-\left(\eta_2\mu_2-\eta_3\mu_3\right)\left(\mu_2 f_{22}-\mu_3 f_{32}\right)\\&= -\beta\left(\mu_2 f_{22}-\mu_3 f_{32}\right),\end{aligned}\tag{3.63}$$

que implica

$$\eta_2 f_{22,z_s}-\eta_3 f_{32,z_s}=-\beta\left(\mu_3 f_{22,z_s}-\mu_2 f_{32,z_s}\right),\tag{3.64}$$

que é nulo para $s = r$, por indução, e nulo para $s = r - 1$ por (3.60), que obtivemos acima. Substituindo esse fato na expressão que obtivemos para L^{r-1}, obtemos (3.59) para $r - 1$, encerrando a demonstração de (3.59), (3.60), para $1 \leq r \leq k - 1$.

A mesma argumentação que utilizamos para provar (3.60) para $r - 1$ mostra que vale também (3.60) para $r = 0$. Vale então (3.60) para $0 \leq r \leq k - 1$, de modo que existe um número real φ tal que

$$\mu_3 f_{22} - \mu_2 f_{32} = \varphi. \tag{3.65}$$

Substituindo isso em (1.9), obtemos

$$f_{12} = \mu_3 f_{32} - \mu_2 f_{22}. \tag{3.66}$$

Em vista disso e do fato de que vale (3.59), $1 \leq r \leq k - 1$, obtemos de imediato que vale (1.10), $1 \leq r \leq k - 1$. Para $r = 0$, temos, em vista de (3.59),

$$\begin{aligned} L^0 &= \frac{1}{f_{11} z_1} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\eta_3 f_{32,z_j} - \eta_2 f_{22,z_j} \right) z_{j+1} + \frac{1}{f_{11}} \left(f_{31} f_{32}' - f_{21} f_{22}' \right) \\ &= \frac{1}{f_{11} z_1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\eta_3 f_{32,z_j} - \eta_2 f_{22,z_j} \right) z_{j+1} + \mu_3 f_{32}' - \mu_2 f_{22}'. \end{aligned}$$

Mas provamos que o lado direito de (3.64) é nulo para $0 \leq s \leq k - 1$, de modo que

$$L^0 = \mu_3 f_{32}' - \mu_2 f_{22}',$$

demonstrando que (1.10) também vale para $r = 0$.

Integrando (3.61), $p = 3$, com respeito a z_{k-1}, obtemos $k = k\,(z_0, \ldots, z_{k-2})$ tal que

$$f_{32} = \mu_3 g' z_{k-1} + k. \tag{3.67}$$

Substituindo isso em (3.65), e usando $\mu_3 \neq 0$, que decorre de (3.57), obtemos, usando também (5) e (3.58),

$$\begin{aligned} f_{22} &= \mu_2 g' z_{k-1} + \frac{\mu_2}{\mu_3} k + \frac{\varphi}{\mu_3} \\ &= \mu_2 g' z_{k-1} + \frac{\mu_2}{\mu_3} \left(k - \mu_2 \varphi \right) + \mu_3 \varphi. \end{aligned} \tag{3.68}$$

As duas últimas relações substituídas em (3.66), usando também (5) e (3.58), levam a

$$\begin{aligned} f_{12} &= \mu_3^2 \left(g' z_{k-1} + \frac{k}{\mu_3} \right) - \mu_2^2 \left(g' z_{k-1} + \frac{k}{\mu_3} \right) - \frac{\mu_2}{\mu_3} \varphi \\ &= g' z_{k-1} + \frac{1}{\mu_3} \left(k - \mu_2 \varphi \right). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Definindo

$$m = \frac{1}{\mu_3}\left(k - \mu_2\varphi\right),$$

temos que as relações (3.67), (3.68) e (3.69) tornam-se (3.55) e (3.56).

Usamos agora (3.7) para calcular G. Temos que $\sum_{j=0}^{k-2} f_{12,z_j} z_{j+1}$ também é dado por (3.8). Em vista de (5), (2.55), (3.58), temos

$$\begin{aligned} f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} &= f_{21}\left(\mu_3 g' z_{k-1} + \mu_3 m + \mu_2\varphi\right) - f_{31}\left(\mu_2 g' z_{k-1} + \mu_2 m + \mu_3\varphi\right) \\ &= -\beta\left(g' z_{k-1} + m\right) + \left(\mu_2^2 - \mu_3^2\right)\varphi g + \alpha\varphi \\ &= -\beta\left(g' z_{k-1} + m\right) - \varphi g. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Usando (3.8) e (3.70) em (3.7), obtemos

$$g'G = \left(g'' z_1 + m_{,z_{k-2}}\right) z_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-3} m_{,z_j} z_{j+1} - \beta\left(g' z_{k-1} + m\right) - \varphi g,$$

provando (3.54).

Finalmente, verificamos quando uma solução genérica $u = z_0$ cumpre $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Temos, em vista de (3.53), (3.56),

$$\begin{aligned} f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} &= g\left(\mu_2 f_{12} + \mu_3\varphi\right) - \left(\mu_2 g + \eta_2\right) f_{12} \\ &= \mu_3\varphi g - \eta_2 f_{12}. \end{aligned}$$

Caso $\eta_2 \neq 0$, temos, por (3.55) que o coeficiente de z_{k-1} é $g' \neq 0$, de modo que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Caso $\eta_2 = 0$ e $\varphi \neq 0$, temos, por $\mu_3 \neq 0$, $g \neq 0$, que $\omega_1 \wedge \omega_2$ é de novo não-nulo. Por outro lado, caso $\eta_2 = \varphi = 0$, temos que $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$.

□

Capítulo 4

Independência de parâmetro para as classes não-genéricas de equações $z_{0,t} = z_5 + G$ com $f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p$

Neste capítulo, classificamos as equações de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ que descrevem superfícies pseudo-esféricas que são independentes de um dos parâmetros μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, cujo problema linear satisfaz

$$f_{p1} = \mu_p g + \eta_p, \qquad 2 \leq p \leq 3,$$

para grande parte das classes não-genéricas tratadas no Capítulo 3, tratando respectivamente, nas Seções 4.1, 4.2, 4.3, os casos em que

$$v' = 0, \qquad v' \neq 0,\ \delta = 0,\ \eta_2 = 0, \qquad v' \neq 0,\ \delta = 0,\ \eta_2 \neq 0.$$

A quantidade de parâmetros livres em cada caso varia, dependendo das hipóteses dos teoremas do Capítulo 3 e também da subdivisão em casos que é necessário fazer em cada teorema do presente capítulo. Como observado anteriormente no caso em que $\delta \neq 0$, em vez de fixar um dos parâmetros livres e argumentar a partir daí, verifica-se que a mesma argumentação pode ser usada caso simplesmente denotemos qualquer um deles genericamente por τ e trabalhemos com τ.

4.1 Independência de parâmetro para a classe em que $v' = 0$

Nos Teoremas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 abaixo, classificamos parte das equações do Teorema 3.3.1, ou seja, correspondentes ao caso em que $v' = 0$, com v dado por (5), que são independentes de um dos parâmetros μ_2, η_2, na situação em que $k = 5$. Recordamos que, pelo Teorema 3.3.1, estes são os únicos parâmetros livres, já que μ_3, η_3 são dados em termos deles. Os Teoremas 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 correspondem respectivamente aos casos em que

$$\beta_\tau = 0, \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0, \qquad \beta_\tau = 0, \ \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau \neq 0, \left(\frac{\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau = 0, \qquad \beta_\tau \neq 0, \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0,$$

com β dado por (5).

Teorema 4.1.1 *Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, fixemos um dos parâmetros μ_2, η_2 e o denotemos por τ. Sejam β, v, g dados por (5). A equação $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de τ, e com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo*

$$f_{p1} = \mu_p g + \eta_p, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{4.1}$$

além de $\beta_\tau = 0$, $\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0$ e $v' = 0$, se, e somente se,

$$G = \left[\frac{1}{h'}\left(h'' z_1 + w_{,z_3}\right) - \beta\right] z_4 + \frac{1}{h'}\left(\sum_{j=0}^{2} w_{,z_j} z_{j+1} - \beta w - \varphi h - \zeta\right), \tag{4.2}$$

onde ζ, φ são números reais, $h = h(z_0)$, $w = w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ são funções diferenciáveis com $h' \neq 0$, e, para $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned} f_{11} &= c\,(h + \bar{c}), \qquad f_{p1} = \mu_p c\,(h + \bar{c}) + \eta_p, \\ f_{12} &= c\,(h' z_4 + w + \tilde{c}), \\ f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\varphi, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde μ_p, η_p cumprem (3.57),

$$\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\right)_\tau = 0 \tag{4.4}$$

e $c = c(\tau)$, $\tilde{c} = \tilde{c}(\tau)$, $\bar{c} = \bar{c}(\tau)$ são funções diferenciáveis com $c \neq 0$ e

$$\beta\tilde{c} + \varphi\bar{c} = \zeta.$$

Teorema 4.1.2 *Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, fixemos um dos parâmetros μ_2, η_2 e o denotemos por τ. Sejam β, v, g dados por (5). A equação $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de τ, e com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo (4.1),*

$$\beta_\tau = 0, \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau \neq 0, \qquad \left(\frac{\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau = 0, \qquad v' = 0,$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned}
G &= \left(p_1 z_1 - 2\beta + \frac{z_2}{z_1} - \frac{s_{,z_2}}{z_1}\right) z_4 + \left(\frac{1}{z_1} - \frac{s_{,z_2 z_2}}{z_1}\right) z_3^2 + \big(p_1' z_1^2 - 2s_{,z_2 z_0} - p_2 z_1^2 + p_1 z_2 \\
&\quad - \frac{z_2^2}{z_1^2} + \frac{s_{,z_2}}{z_1^2} z_2 - 2\frac{s_{,z_2 z_1}}{z_1} z_2 - p_1 s_{,z_2} - \frac{s_{,z_1}}{z_1} + \beta\frac{s_{,z_2}}{z_1} - \beta p_1 z_1 + \beta^2 - \beta\frac{z_2}{z_1} + \beta\frac{s_{,z_2}}{z_1}\big) z_3 \\
&\quad - (p_1 s)' z_1 - s'' z_1 - p_3' z_1 - 2s_{,z_1 z_0} z_2 + \beta s' + p_5' + p_2 s z_1 + p_4 z_1 - p_1 s_{,z_1} z_2 \\
&\quad - \left(\frac{s_{,z_1}}{z_1}\right)_{,z_1} z_2^2 + \beta\left(\frac{s}{z_1}\right)_{,z_1} z_2 - \frac{p_5}{z_1^2} z_2 + \beta p_1 s_3 + \beta s_3' + \beta p_3 + \beta\frac{s_{3,z_1}}{z_1} z_2 - \beta^2\frac{s_3}{z_1} \\
&\quad - \beta\frac{p_5}{z_1} - p_6, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

onde $p_i = p_i(z_0)$, $1 \le i \le 6$, $s = s(z_0, z_1, z_2)$ *são funções diferenciáveis, e, para* $2 \le p \le 3$,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= g, \qquad f_{p1} = \mu_p g + \eta_p, \\
f_{12} &= g' z_4 + g'\left(-p_1 s - s' - p_3 + p_1 z_1 z_3 - \beta z_3 - \frac{s_{,z_1}}{z_1} z_2 + \frac{z_2 z_3}{z_1} - \frac{s_{,z_2}}{z_1} z_3 + \beta\frac{s}{z_1} + \frac{p_5}{z_1}\right) \\
&\quad + g''(s - z_1 z_3) + r, \qquad (4.6) \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\varphi,
\end{aligned}$$

onde μ_p, η_p *cumprem (3.57), (4.4), e* $\varphi = \varphi(\tau)$, $g = g(z_0, \tau)$, $r = r(z_0, \tau)$ *são funções diferenciáveis com* $g' \neq 0$ *e*

$$g''' = p_1 g'' + p_2 g', \qquad r' = p_3 g'' + p_4 g', \qquad \beta r + \varphi g = p_5 g'' + p_6 g'. \qquad (4.7)$$

Teorema 4.1.3 *Sejam* μ_p, η_p, $2 \le p \le 3$, *números reais, fixemos um dos parâmetros* μ_2, η_2 *e o denotemos por* τ. *Sejam* β, v, g *dados por (5). A equação* $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ *descreve superfícies pseudo-esféricas, com* G *independente de* τ, *e com 1-formas associadas* $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \le i \le 3$, *satisfazendo (4.1),* $\beta_\tau \neq 0$, $\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0$ *e* $v' = 0$, *se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
G &= \left(5\frac{h''}{h'} z_1 - \zeta_1\right) z_4 + \frac{1}{h'}\big(10h'' z_3 z_2 + 10h''' z_1^2 z_3 - 4\zeta_1 h'' z_3 z_1 - \zeta_2 h' z_3 \\
&\quad + 15h''' z_1 z_2^2 - 3\zeta_1 h'' z_2^2 + 10h'''' z_1^3 z_2 - 6\zeta_1 h''' z_1^2 z_2 - 3\zeta_2 h'' z_1 z_2 - \zeta_3 h' z_2 \\
&\quad + h''''' z_1^5 - \zeta_1 h'''' z_1^4 - \zeta_2 h''' z_1^3 - \zeta_3 h'' z_1^2 - \zeta_4 h' z_1 - \zeta_6 - \zeta_5 h\big), \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

onde ζ_i, $1 \le i \le 6$, *são números reais,* $h = h(z_0)$ *é uma função diferenciável com* $h' \neq 0$, *e, para* $2 \le p \le 3$,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= c\left(h+\bar{c}\right), \qquad f_{p1} = \mu_p c\left(h+\bar{c}\right)+\eta_p, \\
f_{12} &= c\left[h' z_4 + 4h'' z_1 z_3 + 3h'' z_2^2 + 6h''' z_1^2 z_2 + h'''' z_1^4 + \left(\beta-\zeta_1\right)\left(h' z_3 + 3h'' z_1 z_2 + h''' z_1^3\right)\right. \\
&\quad + \left(\beta^2-\zeta_1\beta-\zeta_2\right)\left(h' z_2 + h'' z_1^2\right) + \left(\beta^3-\zeta_1\beta^2-\zeta_2\beta-\zeta_3\right)h' z_1 \qquad (4.9) \\
&\quad + \left(\beta^4-\zeta_1\beta^3-\zeta_2\beta^2-\zeta_3\beta-\zeta_4\right)h \\
&\quad \left. + \left(\beta^5-\zeta_1\beta^4-\zeta_2\beta^3-\zeta_3\beta^2-\zeta_4\beta-\zeta_5\right)\frac{\bar{c}}{\beta} + \frac{\zeta_6}{\beta}\right], \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} + \mu_{5-p}\left(-\beta^5+\zeta_1\beta^4+\zeta_2\beta^3+\zeta_3\beta^2+\zeta_4\beta+\zeta_5\right),
\end{aligned}$$

onde μ_p, η_p *cumprem (3.57),*

$$\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\right)_\tau \neq 0, \qquad (4.10)$$

e $c = c(\tau)$, $\bar{c} = \bar{c}(\tau)$ *são funções diferenciáveis com* $c \neq 0$.

Demonstração do Teorema 4.1.1. Temos que (3.54), no caso em que $k = 5$, fica

$$G = k_1 z_4 + k_2, \qquad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{g'}\left(g'' z_1 + m_{,z_3}\right) - \beta, \qquad (4.12) \\
k_2 &= \frac{1}{g'}\left(\sum_{j=0}^{2} m_{,z_j} z_{j+1} - \beta m - \varphi g\right). \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Temos que $G_\tau = 0$ é equivalente a $k_{i,\tau} = 0$, $1 \le i \le 2$.

Indicamos dependência nas variáveis pela escolha de letras

$$\begin{aligned}
\zeta_i &\in \mathbb{R}, \qquad c_i = c_i(\tau), \qquad p_i = p_i(z_0), \qquad q_i = q_i(z_0, z_1), \\
r_i &= r_i(z_0, \tau), \qquad s_i = s_i(z_0, z_1, z_2), \qquad t = t(z_0, z_1, \tau), \\
w_i &= w_i(z_0, z_1, z_2, z_3), \qquad y = y(z_0, z_1, z_2, \tau),
\end{aligned}$$

onde todas as funções são diferenciáveis.

Como $k_{1,\tau} = 0$ equivale a

$$\left(\frac{g''}{g'} z_1 z_3 + \frac{m}{g'} - \beta z_3\right)_{,\tau z_3} = 0,$$

a expressão entre parênteses é a soma de w_1 com uma função arbitrária $\frac{y}{g'}$ de z_0, z_1, z_2, τ, de modo que

$$m = g' w_1 + y - g'' z_1 z_3 + \beta g' z_3. \qquad (4.14)$$

Ao substituir (4.14) em (4.13), ficamos com

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{1}{g'}\big((g'w_1)'\, z_1 + y' z_1 - g''' z_1^2 z_3 + \beta g'' z_1 z_3 + g' w_{1,z_1} z_2 + y_{,z_1} z_2 - g'' z_2 z_3 \\
&\quad + g' w_{1,z_2} z_3 + y_{,z_2} z_3 - \beta g' w_1 - \beta y + \beta g'' z_1 z_3 - \beta^2 g' z_3 - \varphi g\big) \\
&= \frac{g''}{g'} w_1 z_1 + w_1' z_1 + \frac{y'}{g'} z_1 - \frac{g'''}{g'} z_1^2 z_3 + 2\beta \frac{g''}{g'} z_1 z_3 + w_{1,z_1} z_2 + \frac{y_{,z_1}}{g'} z_2 - \frac{g''}{g'} z_2 z_3 \\
&\quad + w_{1,z_2} z_3 + \frac{y_{,z_2}}{g'} z_3 - \beta w_1 - \beta \frac{y}{g'} - \beta^2 z_3 - \varphi \frac{g}{g'}.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Com o fim de que os cálculos sejam úteis em ocasiões posteriores, não fizemos ainda uso das hipóteses de que $\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0$, $\beta_\tau = 0$. Admitindo agora $\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0$, obtemos, da mesma maneira pela qual se obteve (2.76), que existem p_1, c_1, c_2 com $c_1 \neq 0$, $p_1' \neq 0$, tais que

$$
g = c_1 p_1 + c_2. \tag{4.16}
$$

Utilizando (4.16) em (4.15) temos que $k_{2,\tau} = 0$, fica, após multiplicar por p_1',

$$
\begin{aligned}
0 &= \Bigg((p_1' w_1)'\, z_1 + \frac{y'}{c_1} z_1 - p_1''' z_1^2 z_3 + 2\beta p_1'' z_1 z_3 + p_1' w_{1,z_1} z_2 + \frac{y_{,z_1}}{c_1} z_2 - p_1'' z_2 z_3 \\
&\quad + p_1' w_{1,z_2} z_3 + \frac{y_{,z_2}}{c_1} z_3 - \beta p_1' w_1 - \beta \frac{y}{c_1} - \beta^2 p_1' z_3 - \varphi \frac{c_1 p_1 + c_2}{c_1} \Bigg)_\tau \\
&= \left(\frac{y'}{c_1}\right)_\tau z_1 + 2\beta_\tau p_1'' z_1 z_3 + \left(\frac{y_{,z_1}}{c_1}\right)_\tau z_2 + \left(\frac{y_{,z_2}}{c_1}\right)_\tau z_3 - \beta_\tau p_1' w_1 - \left(\beta \frac{y}{c_1}\right)_\tau \\
&\quad - \left(\beta^2\right)_\tau p_1' z_3 - \left(\varphi p_1 + \varphi \frac{c_2}{c_1}\right)_\tau .
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Como $\beta_\tau = 0$, temos que (4.17) fica

$$
0 = \left(\frac{y'}{c_1}\right)_\tau z_1 + \left(\frac{y_{,z_1}}{c_1}\right)_\tau z_2 + \left(\frac{y_{,z_2}}{c_1}\right)_\tau z_3 - \beta \left(\frac{y}{c_1}\right)_\tau - \left(\varphi p_1 + \varphi \frac{c_2}{c_1}\right)_\tau , \tag{4.18}
$$

que é um polinômio em z_3 de grau 1 nulo. A nulidade do coeficiente de z_3 mostra que existem t, s_1 tais que

$$
\frac{y}{c_1} = t + s_1. \tag{4.19}
$$

Substituindo isso em (4.18), obtemos

$$
0 = t_{,z_0\tau} z_1 + t_{,z_1\tau} z_2 - \beta t_\tau - \left(\varphi p_1 + \varphi \frac{c_2}{c_1}\right)_\tau , \tag{4.20}
$$

que é um polinômio nulo em z_2 de grau 1. A nulidade do coeficiente de z_2 mostra que existem q_1 e r_1 tais que

$$
t = q_1 + r_1. \tag{4.21}
$$

Usando isso em (4.20), vem

$$0 = r_{1,\tau z_0} z_1 - \beta r_{1,\tau} - \left(\varphi p_1 + \varphi \frac{c_2}{c_1}\right)_\tau, \tag{4.22}$$

que é um polinômio nulo em z_1 de grau 1. A nulidade do coeficiente de z_1 mostra que existem p_2 e c_3 tais que

$$r_1 = p_2 + c_3. \tag{4.23}$$

Substituindo (4.23) em (4.22), obtemos

$$\beta c_{3,\tau} + \left(\varphi p_1 + \varphi \frac{c_2}{c_1}\right)_\tau = 0.$$

Derivando com respeito a z_0, obtemos, em vista de $p_1' \neq 0$, que $\varphi_\tau = 0$, ou seja, $\varphi \in \mathbb{R}$. Utilizando isso acima, ficamos com

$$\beta c_{3,\tau} + \varphi \left(\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau = 0. \tag{4.24}$$

A partir de (4.19), (4.21), (4.23), obtemos

$$\frac{y}{c_1} = s_1 + q_1 + p_2 + c_3. \tag{4.25}$$

Em vista de $\beta_\tau = \varphi_\tau = 0$ e (4.24), definimos $\zeta \in \mathbb{R}$, $c = c(\tau)$, $\bar{c} = \bar{c}(\tau)$, $\tilde{c} = \tilde{c}(\tau)$, $h = h(z_0)$, $w = w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ por

$$\begin{gathered} \beta c_3 + \varphi \frac{c_2}{c_1} = \zeta, \qquad c = c_1 \neq 0, \qquad \bar{c} = \frac{c_2}{c_1}, \\ \tilde{c} = c_3, \qquad h = p_1, \qquad w = p_1' w_1 + s_1 + q_1 + p_2 - p_1'' z_1 z_3 + \beta p_1' z_3. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Em vista de $p_1' \neq 0$ e (4.26), temos $h' \neq 0$.

As expressões (4.26) utilizadas em (4.16) dão

$$g = c(h + \bar{c}). \tag{4.27}$$

Substituindo (4.16), (4.25), (4.26) em (4.14), vem

$$\begin{aligned} m &= c_1 p_1' w_1 + c_1 (s_1 + q_1 + p_2) + c_1 c_3 - c_1 p_1'' z_1 z_3 + \beta c_1 p_1' z_3 \\ &= c(w + \tilde{c}). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Ao substituirmos (4.27), (4.28) e (4.26) em (4.12), (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{ch'}(ch'' z_1 + c w_{,z_3}) - \beta = \frac{1}{h'}(h'' z_1 + w_{,z_3}) - \beta, \\ k_2 &= \frac{1}{ch'}\left(\sum_{j=0}^{2} c w_{,z_j} z_{j+1} - \beta c(w + \tilde{c}) - \varphi c(h + \bar{c})\right) \\ &= \frac{1}{h'}\left(\sum_{j=0}^{2} w_{,z_j} z_{j+1} - \beta w - \varphi h - \zeta\right). \end{aligned}$$

Tais expressões substituídas em (4.11) dão (4.2).

Recordamos que, pelo Teorema 3.3.1, vale (3.57). Por (5), (3.57), temos

$$\begin{aligned}\beta &= \mu_2\left(\pm\frac{\mu_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}}\eta_2\right)-\left(\pm\sqrt{1+\mu_2^2}\right)\eta_2\\ &= \mp\frac{\eta_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}},\end{aligned} \tag{4.29}$$

de modo que $\beta_\tau = 0$ se traduz em (4.4). Levando em conta (3.57), (4.27), (4.28) em $f_{11} = g$, (4.1), (3.55), (3.56), obtemos (4.3).

□

Demonstração do Teorema 4.1.2. Integrando

$$\left(\frac{\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau = 0, \tag{4.30}$$

com respeito a τ, obtemos p_1 tal que

$$\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau = p_1\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau.$$

Integrando com respeito a τ, obtemos p_2 tal que

$$g''' = p_1 g'' + p_2 g'. \tag{4.31}$$

Utilizando $\beta_\tau = 0$ em (4.15), temos que $k_{2,\tau} = 0$ fica

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau w_1 z_1 + \left(\frac{y'}{g'}\right)_\tau z_1 - \left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau z_1^2 z_3 + 2\beta\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau z_1 z_3 + \left(\frac{y_{,z_1}}{g'}\right)_\tau z_2\\ &\quad - \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau z_2 z_3 + \left(\frac{y_{,z_2}}{g'}\right)_\tau z_3 - \beta\left(\frac{y}{g'}\right)_\tau - \left(\varphi\frac{g}{g'}\right)_\tau.\end{aligned}$$

Dividindo por $\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau \neq 0$, derivando com respeito a τ, e usando também (4.30), obtemos

$$0 = \left[\frac{1}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\left[\left(\frac{y'}{g'}\right)_\tau z_1 + \left(\frac{y_{,z_1}}{g'}\right)_\tau z_2 - \beta\left(\frac{y}{g'}\right)_\tau - \left(\varphi\frac{g}{g'}\right)_\tau\right]\right]_\tau + \left(\frac{\left(\frac{y_{,z_2}}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau z_3. \tag{4.32}$$

Isso é um polinômio nulo em z_3 de grau 1. Integrando o coeficiente de z_3 com respeito a τ, vemos que existe s_1 tal que

$$\left(\frac{y_{,z_2}}{g'}\right)_\tau = \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau s_{1,z_2}.$$

Integrando novamente com respeito a τ, obtemos s_2 tal que

$$y_{,z_2} = g'' s_{1,z_2} + g' s_{2,z_2},$$

que, integrando com respeito a z_2, fornece t tal que

$$y = g'' s_1 + g' s_2 + t. \tag{4.33}$$

Utilizando isso no termo independente em (4.32), e usando também (4.30), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{1}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\left[\left(\frac{g''' s_1 + g'' s_1' + g'' s_2 + g' s_2' + t'}{g'}\right)_\tau z_1 + \left(\frac{g'' s_{1,z_1} + g' s_{2,z_1} + t_{,z_1}}{g'}\right)_\tau z_2 \right.\right. \\ &\quad \left.\left. -\beta\left(\frac{g'' s_1 + g' s_2 + t}{g'}\right)_\tau - \left(\varphi\frac{g}{g'}\right)_\tau\right]\right]_\tau \\ &= \left[\frac{1}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\left[\left(\frac{t'}{g'}\right)_\tau z_1 - \beta\left(\frac{t}{g'}\right)_\tau - \left(\varphi\frac{g}{g'}\right)_\tau\right]\right]_\tau + \left(\frac{\left(\frac{t_{,z_1}}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau z_2. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Isso é um polinômio nulo em z_2 de grau 1. Integrando o coeficiente de z_2 com respeito a τ, vemos que existe q_1 tal que

$$\left(\frac{t_{,z_1}}{g'}\right)_\tau = q_{1,z_1}\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau.$$

Integrando novamente com respeito a τ, obtemos q_2 tal que

$$t_{,z_1} = q_{1,z_1} g'' + q_{2,z_1} g', \tag{4.35}$$

que, integrando com respeito a z_1, fornece $r = r(z_0, \tau)$ tal que

$$t = q_1 g'' + q_2 g' + r. \tag{4.36}$$

Utilizando isso no termo independente em (4.34), e usando também (4.30), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{1}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\left[\left(\frac{q_1' g'' + q_1 g''' + q_2' g' + q_2 g'' + r'}{g'}\right)_\tau z_1 \right.\right. \\ &\quad \left.\left. -\beta\left(\frac{q_1 g'' + q_2 g' + r}{g'}\right)_\tau - \left(\varphi\frac{g}{g'}\right)_\tau\right]\right] \\ &= \left[\frac{1}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\left[\left(\frac{r'}{g'}\right)_\tau z_1 - \beta\left(\frac{r}{g'}\right)_\tau - \left(\varphi\frac{g}{g'}\right)_\tau\right]\right]. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Isso é um polinômio nulo em z_1 de grau 1. Integrando o coeficiente de z_1 com respeito a τ, vemos que existe p_3 tal que

$$\left(\frac{r'}{g'}\right)_\tau = p_3\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau.$$

Integrando com respeito a τ, obtemos p_4 tal que

$$r' = p_3 g'' + p_4 g'. \tag{4.38}$$

Integrando o termo independente em (4.37) com respeito a τ, vemos que existe p_5 tal que

$$\beta\left(\frac{r}{g'}\right)_\tau + \left(\varphi\frac{g}{g'}\right)_\tau = p_5\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau.$$

Novamente integrando com respeito a τ, obtemos p_6 tal que

$$\beta r + \varphi g = p_5 g'' + p_6 g'. \tag{4.39}$$

Por (4.31), (4.38) e (4.39), temos que vale (4.7).

Substituindo (4.36) em (4.33), obtemos

$$y = g'' s_3 + g' s_4 + r, \tag{4.40}$$

onde

$$s_3 = s_1 + q_1, \qquad s_4 = s_2 + q_2.$$

Utilizando isso agora em (4.15), definindo

$$w_2 = w_1 + s_4, \tag{4.41}$$

e usando (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}
k_2 \;&=\; \frac{g''}{g'}w_1 z_1 + w_1' z_1 + \frac{1}{g'}\left[\left(p_1 g'' + p_2 g'\right)s_3 + g'' s_3' + g'' s_4 + g' s_4' + p_3 g'' + p_4 g'\right] z_1\\
&\quad -\frac{p_1 g'' + p_2 g'}{g'} z_1^2 z_3 + 2\beta\frac{g''}{g'} z_1 z_3 + w_{1,z_1} z_2 + \frac{1}{g'}\left(g'' s_{3,z_1} + g' s_{4,z_1}\right) z_2 - \frac{g''}{g'} z_2 z_3\\
&\quad + w_{1,z_2} z_3 + \frac{1}{g'}\left(g'' s_{3,z_2} + g' s_{4,z_2}\right) z_3 - \beta w_1 - \beta\frac{g'' s_3 + g' s_4 + r}{g'} - \beta^2 z_3 - \varphi\frac{g}{g'}\\
&=\; \frac{g''}{g'}\big(w_2 z_1 + p_1 s_3 z_1 + s_3' z_1 + p_3 z_1 - p_1 z_1^2 z_3 + 2\beta z_1 z_3 + s_{3,z_1} z_2 - z_2 z_3\\
&\quad + s_{3,z_2} z_3 - \beta s_3 - p_5\big) + w_2' z_1 + p_2 s_3 z_1 + p_4 z_1 - p_2 z_1^2 z_3 + w_{2,z_1} z_2 + w_{2,z_2} z_3\\
&\quad - \beta w_2 - p_6 - \beta^2 z_3.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Como $k_{2,\tau}=0$, concluímos, derivando com respeito a τ e utilizando $\beta_\tau=0$, $\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau\neq 0$, que

$$w_2z_1=-p_1s_3z_1-s_3'z_1-p_3z_1+p_1z_1^2z_3-2\beta z_1z_3-s_{3,z_1}z_2+z_2z_3-s_{3,z_2}z_3+\beta s_3+p_5, \quad (4.43)$$

que, substituindo de volta em (4.42), mostra que

$$\begin{aligned}
k_2 &= -(p_1s_3)'z_1-s_3''z_1-p_3'z_1+p_1'z_1^2z_3-s_{3,z_1z_0}z_2-s_{3,z_2z_0}z_3+\beta s_3'+p_5'+p_2s_3z_1\\
&\quad +p_4z_1-p_2z_1^2z_3+\left(-p_1s_{3,z_1}-s_{3,z_1z_0}+p_1z_3-\left(\frac{s_{3,z_1}}{z_1}\right)_{,z_1}z_2-\frac{z_2z_3}{z_1^2}+\frac{s_{3,z_2}}{z_1^2}z_3\right.\\
&\quad \left.-\frac{s_{3,z_2z_1}}{z_1}z_3+\beta\left(\frac{s_3}{z_1}\right)_{,z_1}-\frac{p_5}{z_1^2}\right)z_2+\left(-p_1s_{3,z_2}-s_{3,z_2z_0}-\frac{s_{3,z_1z_2}}{z_1}z_2-\frac{s_{3,z_1}}{z_1}+\frac{z_3}{z_1}\right.\\
&\quad \left.-\frac{s_{3,z_2z_2}}{z_1}z_3+\beta\frac{s_{3,z_2}}{z_1}\right)z_3-\beta\left(-p_1s_3-s_3'-p_3+p_1z_1z_3-2\beta z_3-\frac{s_{3,z_1}}{z_1}z_2+\frac{z_2z_3}{z_1}\right.\\
&\quad \left.-\frac{s_{3,z_2}}{z_1}z_3+\beta\frac{s_3}{z_1}+\frac{p_5}{z_1}\right)-p_6-\beta^2z_3\\
&= \left(\frac{1}{z_1}-\frac{s_{3,z_2z_2}}{z_1}\right)z_3^2+\left(p_1'z_1^2-2s_{3,z_2z_0}-p_2z_1^2+p_1z_2-\frac{z_2^2}{z_1^2}+\frac{s_{3,z_2}}{z_1^2}z_2-2\frac{s_{3,z_2z_1}}{z_1}z_2\right.\\
&\quad \left.-p_1s_{3,z_2}-\frac{s_{3,z_1}}{z_1}+\beta\frac{s_{3,z_2}}{z_1}-\beta p_1z_1+\beta^2-\beta\frac{z_2}{z_1}+\beta\frac{s_{3,z_2}}{z_1}\right)z_3-(p_1s_3)'z_1-s_3''z_1\\
&\quad -p_3'z_1-2s_{3,z_1z_0}z_2+\beta s_3'+p_5'+p_2s_3z_1+p_4z_1-p_1s_{3,z_1}z_2-\left(\frac{s_{3,z_1}}{z_1}\right)_{,z_1}z_2^2\\
&\quad +\beta\left(\frac{s_3}{z_1}\right)_{,z_1}z_2-\frac{p_5}{z_1^2}z_2+\beta p_1s_3+\beta s_3'+\beta p_3+\beta\frac{s_{3,z_1}}{z_1}z_2-\beta^2\frac{s_3}{z_1}-\beta\frac{p_5}{z_1}-p_6.
\end{aligned}$$

Utilizando (4.40), (4.41) e (4.43) em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}
m &= g'w_2+g''s_3+r-g''z_1z_3+\beta g'z_3\\
&= g'\left(-p_1s_3-s_3'-p_3+p_1z_1z_3-\beta z_3-\frac{s_{3,z_1}}{z_1}z_2+\frac{z_2z_3}{z_1}-\frac{s_{3,z_2}}{z_1}z_3+\beta\frac{s_3}{z_1}+\frac{p_5}{z_1}\right)\\
&\quad +g''(s_3-z_1z_3)+r. \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Substituindo isso em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{g'}\left[g''z_1+g'\left(p_1z_1-\beta+\frac{z_2}{z_1}-\frac{s_{3,z_2}}{z_1}\right)-g''z_1\right]-\beta\\
&= p_1z_1-2\beta+\frac{z_2}{z_1}-\frac{s_{3,z_2}}{z_1}.
\end{aligned}$$

Denotamos $s=s_3$. Então as expressões para k_i, $1\leq i\leq 2$, substituídas em (4.11) dão (4.5). Por (4.29), temos que $\beta_\tau=0$ se traduz em (4.4). Recordamos que, pelo Teorema 3.3.1, vale (3.57). Levando em conta isso, além de (4.44), em $f_{11}=g$, (4.1), (3.55), (3.56), obtemos (4.6).

□

Demonstração do Teorema 4.1.3. Temos agora $\beta_\tau \neq 0$. Ao dividir (4.17) por β_τ e derivar com respeito a τ, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{y'}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau z_1 + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{y_{,z_1}}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau z_2 + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{y_{,z_2}}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau z_3 - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta\frac{y}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau \\ &\quad - \left(\frac{(\beta^2)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau p_1' z_3 - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau . \end{aligned} \tag{4.45}$$

Isso é um polinômio em z_3 de grau 1 nulo. Integrando o coeficiente de z_3 com respeito a τ, multiplicando por β_τ, e integrando novamente com respeito a τ, obtemos s_i, $1 \leq i \leq 2$, tais que

$$\frac{y_{,z_2}}{c_1} - \beta^2 p_1' = \beta s_{1,z_2} + s_{2,z_2}.$$

Integrando com respeito a z_2, obtemos t tal que

$$\frac{y}{c_1} = \beta s_1 + s_2 + \beta^2 p_1' z_2 + t. \tag{4.46}$$

Substituindo isso no termo independente em (4.45), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta s_1' + s_2' + \beta^2 p_1'' z_2 + t'\right)_\tau\right)_\tau z_1 + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta s_{1,z_1} + s_{2,z_1} + t_{,z_1}\right)_\tau\right)_\tau z_2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta^2 s_1 + \beta s_2 + \beta^3 p_1' z_2 + \beta t\right)_\tau\right)_\tau - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau \\ &= 2\beta_\tau p_1'' z_2 z_1 + \left(\frac{t_{,\tau z_0}}{\beta_\tau}\right)_\tau z_1 + \left(\frac{t_{,\tau z_1}}{\beta_\tau}\right)_\tau z_2 - 2\beta_\tau s_1 - \left(\frac{(\beta^3)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau p_1' z_2 \\ &\quad - \left(\frac{(\beta t)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau . \end{aligned}$$

Dividindo por β_τ e derivando com respeito a τ, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{t_{,\tau z_0}}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau z_1 + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{t_{,\tau z_1}}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau z_2 - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(\beta^3)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau p_1' z_2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(\beta t)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Isso é um polinômio em z_2 de grau 1. Integrando o coeficiente de z_2 com respeito a τ, multiplicando por β_τ, e integrando novamente com respeito a τ, obtemos q_i, $1 \leq i \leq 2$, tais que

$$\frac{t_{,\tau z_1}}{\beta_\tau} = \frac{(\beta^3)_\tau}{\beta_\tau} p_1' + \beta q_{1,z_1} + q_{2,z_1}.$$

Ao multiplicar por β_τ e integrar com respeito a τ, obtemos q_3 tal que

$$t_{,z_1} = \beta^3 p_1' + \frac{\beta^2}{2} q_{1,z_1} + \beta q_{2,z_1} + q_{3,z_1}.$$

Integrando com respeito a z_1, obtemos r_2 tal que

$$t = \beta^3 p_1' z_1 + \frac{\beta^2}{2} q_1 + \beta q_2 + q_3 + r_2. \tag{4.48}$$

Se substituirmos isso no termo independente em (4.47), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(\beta^3)_\tau p_1'' z_1 + \beta\beta_\tau q_1' + \beta_\tau q_2' + r_{2,\tau z_0}}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau z_1 \\ & - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(\beta^4)_\tau p_1' z_1 + \frac{1}{2}(\beta^3)_\tau q_1 + (\beta^2)_\tau q_2 + \beta_\tau q_3 + (\beta r_2)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau \\ & - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau \\ =\; & 6\beta_\tau\left(p_1'' z_1 - \frac{q_1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(r_2' - \beta^4 p_1')_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau z_1 - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(\beta r_2)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau \\ & - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau . \end{aligned}$$

Dividindo por β_τ e derivando com respeito a τ, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(r_2' - \beta^4 p_1')_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau z_1 - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(\beta r_2)_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau \\ & - \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau . \end{aligned} \tag{4.49}$$

Isso é um polinômio nulo em z_1 de grau 1. Integrando o coeficiente de z_1 com respeito a τ, multiplicando por β_τ, obtemos p_3 tal que

$$\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{(r_2' - \beta^4 p_1')_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau = \beta_\tau p_3'.$$

Repetindo o procedimento, obtemos p_4 tal que

$$\left(\frac{(r_2' - \beta^4 p_1')_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau = \beta\beta_\tau p_3' + \beta_\tau p_4'.$$

Repetindo o procedimento, obtemos p_5 tal que

$$\left(r_2' - \beta^4 p_1'\right)_\tau = \frac{\beta^2}{2}\beta_\tau p_3' + \beta\beta_\tau p_4' + \beta_\tau p_5'.$$

Integrando com respeito a τ e z_0, obtemos p_6 e c_4 tais que

$$r_2 = \beta^4 p_1 + \frac{\beta^3}{6}p_3 + \frac{\beta^2}{2}p_4 + \beta p_5 + p_6 + c_4. \qquad (4.50)$$

Utilizando isso no termo independente de (4.49), ficamos com

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta^5 p_1 + \frac{\beta^4}{6}p_3 + \frac{\beta^3}{2}p_4 + \beta^2 p_5 + \beta p_6 + \beta c_4 + \varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau \\
&= \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(5\beta^4 p_1 + \frac{2}{3}\beta^3 p_3 + \frac{3}{2}\beta^2 p_4 + 2\beta p_5 + p_6 + \frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau \\
&= \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(20\beta^3 p_1 + 2\beta^2 p_3 + 3\beta p_4 + 2p_5 + \frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau \\
&= \left(60\beta^2 p_1 + 4\beta p_3 + 3p_4 + \frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau \\
&= 120\beta\beta_\tau p_1 + 4\beta_\tau p_3 + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau. \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

Dividindo por β_τ e derivando com respeito a τ, obtemos

$$0 = 120\beta_\tau p_1 + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi p_1 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau.$$

Com vistas a determinar φ, derivamos com respeito a z_0, obtendo, em vista de $p_1' \neq 0$,

$$0 = 120\beta_\tau + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{\varphi_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau.$$

Integrando com respeito a τ, multiplicando por β_τ, obtemos ζ_1 tal que

$$\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{\varphi_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau = -120\beta\beta_\tau + 24\zeta_1\beta_\tau. \qquad (4.52)$$

Repetindo o procedimento, obtemos ζ_2 tal que

$$\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{\varphi_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau\right)_\tau = -60\beta^2\beta_\tau + 24\zeta_1\beta\beta_\tau + 6\zeta_2\beta_\tau.$$

Repetindo o procedimento, obtemos ζ_3 tal que

$$\left(\frac{\varphi_\tau}{\beta_\tau}\right)_\tau = -20\beta^3\beta_\tau + 12\zeta_1\beta^2\beta_\tau + 6\zeta_2\beta\beta_\tau + 2\zeta_3\beta_\tau.$$

Repetindo o procedimento, obtemos ζ_4 tal que

$$\varphi_\tau = -5\beta^4\beta_\tau + 4\zeta_1\beta^3\beta_\tau + 3\zeta_2\beta^2\beta_\tau + 2\zeta_3\beta\beta_\tau + \zeta_4\beta_\tau.$$

Integrando com respeito a τ, obtemos ζ_5 tal que vale

$$\varphi = -\beta^5 + \zeta_1\beta^4 + \zeta_2\beta^3 + \zeta_3\beta^2 + \zeta_4\beta + \zeta_5. \tag{4.53}$$

Substituindo (4.52) em (4.51), obtemos

$$0 = 24\zeta_1\beta_\tau p_1 + 4\beta_\tau p_3 + \left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau.$$

Dividindo por β_τ, ficamos com

$$-24\zeta_1 p_1 - 4p_3 = \frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau.$$

Como o lado esquerdo depende apenas de z_0 e o lado direito depende apenas de τ, temos que ambos os lados são iguais à mesma constante ζ_6. Por um lado, isso permite determinar p_3 como

$$p_3 = -6\zeta_1 p_1 - \frac{\zeta_6}{4}. \tag{4.54}$$

Por outro lado, podemos também encontrar c_4. Multiplicamos o lado direito por β_τ e integramos com respeito a τ, obtendo ζ_7 tal que

$$\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau\right)_\tau = \zeta_6\beta + \zeta_7.$$

Repetindo o procedimento, obtemos ζ_8 tal que

$$\frac{1}{\beta_\tau}\left(\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau\right)_\tau = \frac{\zeta_6}{2}\beta^2 + \zeta_7\beta + \zeta_8.$$

Repetindo o procedimento, obtemos ζ_9 tal que

$$\frac{1}{\beta_\tau}\left(\beta c_4 + \varphi\frac{c_2}{c_1}\right)_\tau = \frac{\zeta_6}{6}\beta^3 + \frac{\zeta_7}{2}\beta^2 + \zeta_8\beta + \zeta_9.$$

Repetindo o procedimento, obtemos ζ_{10} tal que

$$\beta c_4 + \varphi\frac{c_2}{c_1} = \frac{\zeta_6}{24}\beta^4 + \frac{\zeta_7}{6}\beta^3 + \frac{\zeta_8}{2}\beta^2 + \zeta_9\beta + \zeta_{10}.$$

Em vista de $\beta_\tau \neq 0$, podemos dividir por β para isolar c_4. Utilizamos isso e (4.54) em (4.50), e ficamos com

$$r_2 = \beta^4 p_1 + \frac{\beta^3}{6}\left(-6\zeta_1 p_1 - \frac{\zeta_6}{4}\right) + \frac{\beta^2}{2}p_4 + \beta p_5 + p_6 - \frac{\varphi}{\beta}\frac{c_2}{c_1} + \frac{\zeta_6}{24}\beta^3 + \frac{\zeta_7}{6}\beta^2 + \frac{\zeta_8}{2}\beta + \zeta_9 + \frac{\zeta_{10}}{\beta}.$$

Substituindo (4.48) em (4.46), obtemos

$$\frac{y}{c_1} = \beta s_1 + s_2 + \beta^2 p_1' z_2 + \beta^3 p_1' z_1 + \frac{\beta^2}{2} q_1 + \beta q_2 + q_3 + r_2.$$

Usando aí a expressão obtida para r_2, ficamos com

$$\begin{aligned}
\frac{y}{c_1} &= \beta s_1 + s_2 + \beta^2 p_1' z_2 + \beta^3 p_1' z_1 + \frac{\beta^2}{2} q_1 + \beta q_2 + q_3 + \beta^4 p_1 + \frac{\beta^3}{6}\left(-6\zeta_1 p_1 - \frac{\zeta_6}{4}\right) \\
&\quad + \frac{\beta^2}{2} p_4 + \beta p_5 + p_6 - \frac{\varphi}{\beta}\frac{c_2}{c_1} + \frac{\zeta_6}{24}\beta^3 + \frac{\zeta_7}{6}\beta^2 + \frac{\zeta_8}{2}\beta + \zeta_9 + \frac{\zeta_{10}}{\beta} \\
&= \beta^4 p_1 + \beta^3 \left(p_1' z_1 - \zeta_1 p_1\right) + \beta^2 \left(p_1' z_2 + q_4\right) + \beta s_4 + s_5 - \frac{\varphi}{\beta}\frac{c_2}{c_1} + \frac{\zeta_{10}}{\beta}, \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
q_4 &= \frac{q_1}{2} + \frac{p_4}{2} + \frac{\zeta_7}{6}, \\
s_3 &= s_1 + q_2 + p_5 + \frac{\zeta_8}{2}, \\
s_4 &= s_2 + q_3 + p_6 + \zeta_9.
\end{aligned}$$

Utilizando em (4.15) a expressão encontrada para $\frac{y}{c_1}$, (4.16) e (4.53), decorre que

$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{(p_1' w_1)'}{p_1'} z_1 + \frac{1}{p_1'}\left[\beta^4 p_1' + \beta^3 \left(p_1'' z_1 - \zeta_1 p_1'\right) + \beta^2 \left(p_1'' z_2 + q_4'\right) + \beta s_3' + s_4'\right] z_1 - \frac{p_1'''}{p_1'} z_1^2 z_3 \\
&\quad + 2\beta \frac{p_1''}{p_1'} z_1 z_3 + w_{1,z_1} z_2 + \frac{1}{p_1'}\left(\beta^3 p_1' + \beta^2 q_{4,z_1} + \beta s_{3,z_1} + s_{4,z_1}\right) z_2 - \frac{p_1''}{p_1'} z_2 z_3 + w_{1,z_2} z_3 \\
&\quad + \frac{1}{p_1'}\left(\beta^2 p_1' + \beta s_{3,z_2} + s_{4,z_2}\right) z_3 - \beta w_1 \\
&\quad - \beta \frac{1}{p_1'}\left[\beta^4 p_1 + \beta^3 \left(p_1' z_1 - \zeta_1 p_1\right) + \beta^2 \left(p_1' z_2 + q_4\right) + \beta s_3 + s_4 - \frac{\varphi}{\beta}\frac{c_2}{c_1} + \frac{\zeta_{10}}{\beta}\right] \\
&\quad - \beta^2 z_3 - \left(-\beta^5 + \zeta_1 \beta^4 + \zeta_2 \beta^3 + \zeta_3 \beta^2 + \zeta_4 \beta + \zeta_5\right) \frac{p_1}{p_1'} - \frac{\varphi}{p_1'}\frac{c_2}{c_1} \\
&= \frac{\beta^3}{p_1'}\left(p_1'' z_1^2 - \zeta_1 p_1' z_1 - q_4 - \zeta_2 p_1\right) + \frac{\beta^2}{p_1'}\left(p_1'' z_2 z_1 + q_4' z_1 + q_{4,z_1} z_2 - s_3 - \zeta_3 p_1\right) \\
&\quad + \frac{\beta}{p_1'}\left(s_3' z_1 + 2 p_1'' z_1 z_3 + s_{3,z_1} z_2 + s_{3,z_2} z_3 - p_1' w_1 - s_4 - \zeta_4 p_1\right) \\
&\quad + \frac{1}{p_1'}\left(\left(p_1' w_1\right)' z_1 + s_4' z_1 - p_1''' z_1^2 z_3 + p_1' w_{1,z_1} z_2 + s_{4,z_1} z_2 - p_1'' z_2 z_3 + p_1' w_{1,z_2} z_3\right. \\
&\quad \left. + s_{4,z_2} z_3 - \zeta_{10} - \zeta_5 p_1\right). \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Decorre que $k_{2,\tau} = 0$ fica

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{3\beta^2 \beta_\tau}{p_1'}\left(p_1'' z_1^2 - \zeta_1 p_1' z_1 - q_4 - \zeta_2 p_1\right) + \frac{2\beta\beta_\tau}{p_1'}\left(p_1'' z_2 z_1 + q_4' z_1 + q_{4,z_1} z_2 - s_3 - \zeta_3 p_1\right) \\
&\quad + \frac{\beta_\tau}{p_1'}\left(s_3' z_1 + 2 p_1'' z_1 z_3 + s_{3,z_1} z_2 + s_{3,z_2} z_3 - p_1' w_1 - s_4 - \zeta_4 p_1\right).
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento de dividir por β_τ e derivar com respeito a τ, concluímos que as expressões entre parênteses são nulas. Assim, obtemos sucessivamente

$$
\begin{aligned}
q_4 &= p_1'' z_1^2 - \zeta_1 p_1' z_1 - \zeta_2 p_1, \\
s_3 &= p_1'' z_2 z_1 + q_4' z_1 + q_{4,1} z_2 - \zeta_3 p_1 \\
&= p_1'' z_2 z_1 + \left(p_1''' z_1^2 - \zeta_1 p_1'' z_1 - \zeta_2 p_1'\right) z_1 + \left(2 p_1'' z_1 - \zeta_1 p_1'\right) z_2 - \zeta_3 p_1 \\
&= 3 p_1'' z_1 z_2 + p_1''' z_1^3 - \zeta_1 p_1'' z_1^2 - \zeta_2 p_1' z_1 - \zeta_1 p_1' z_2 - \zeta_3 p_1, \\
p_1' w_1 &= s_3' z_1 + 2 p_1'' z_1 z_3 + s_{3,z_1} z_2 + s_{3,z_2} z_3 - s_4 - \zeta_4 p_1 \qquad (4.57) \\
&= 3 p_1''' z_1^2 z_2 + p_1'''' z_1^4 - \zeta_1 p_1''' z_1^3 - \zeta_2 p_1'' z_1^2 - \zeta_1 p_1'' z_2 z_1 - \zeta_3 p_1' z_1 + 2 p_1'' z_1 z_3 \\
&\quad + 3 p_1'' z_2^2 + 3 p_1''' z_1^2 z_2 - 2 \zeta_1 p_1'' z_1 z_2 - \zeta_2 p_1' z_2 + 3 p_1'' z_1 z_3 - \zeta_1 p_1' z_3 - s_4 - \zeta_4 p_1 \\
&= 5 p_1'' z_1 z_3 - \zeta_1 p_1' z_3 - s_4 + 3 p_1'' z_2^2 + 6 p_1''' z_1^2 z_2 - 3 \zeta_1 p_1'' z_1 z_2 - \zeta_2 p_1' z_2 + p_1'''' z_1^4 \\
&\quad - \zeta_1 p_1''' z_1^3 - \zeta_2 p_1'' z_1^2 - \zeta_3 p_1' z_1 - \zeta_4 p_1.
\end{aligned}
$$

Utilizando em (4.56) o fato de que as expressões entre parênteses são nulas e substituindo as expressões obtidas em (4.57),

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{1}{p_1'} \Big(\left(p_1' w_1\right)' z_1 + s_4' z_1 - p_1''' z_1^2 z_3 + p_1' w_{1,z_1} z_2 + s_{4,z_1} z_2 - p_1'' z_2 z_3 \\
&\quad + p_1' w_{1,z_2} z_3 + s_{4,z_2} z_3 - \zeta_{10} - \zeta_5 p_1 \Big) \\
&= \frac{1}{p_1'} \Big(5 p_1''' z_1^2 z_3 - \zeta_1 p_1'' z_3 z_1 - s_4' z_1 + 3 p_1''' z_2^2 z_1 + 6 p_1'''' z_1^3 z_2 - 3 \zeta_1 p_1''' z_1^2 z_2 - \zeta_2 p_1'' z_2 z_1 \\
&\quad + p_1''''' z_1^5 - \zeta_1 p_1'''' z_1^4 - \zeta_2 p_1''' z_1^3 - \zeta_3 p_1'' z_1^2 - \zeta_4 p_1' z_1 + s_4' z_1 - p_1''' z_1^2 z_3 + 5 p_1'' z_3 z_2 \\
&\quad - s_{4,z_1} z_2 + 12 p_1''' z_1 z_2^2 - 3 \zeta_1 p_1'' z_2^2 + 4 p_1'''' z_1^3 z_2 - 3 \zeta_1 p_1''' z_1^2 z_2 - 2 \zeta_2 p_1'' z_1 z_2 - \zeta_3 p_1' z_2 \\
&\quad + s_{4,z_1} z_2 - p_1'' z_2 z_3 - s_{4,z_2} z_3 + 6 p_1'' z_2 z_3 + 6 p_1''' z_1^2 z_3 - 3 \zeta_1 p_1'' z_1 z_3 - \zeta_2 p_1' z_3 \\
&\quad + s_{4,z_2} z_3 - \zeta_{10} - \zeta_5 p_1 \Big) \\
&= \frac{1}{p_1'} \Big(10 p_1'' z_3 z_2 + 10 p_1''' z_1^2 z_3 - 4 \zeta_1 p_1'' z_3 z_1 - \zeta_2 p_1' z_3 + 15 p_1''' z_1 z_2^2 - 3 \zeta_1 p_1'' z_2^2 \\
&\quad + 10 p_1'''' z_1^3 z_2 - 6 \zeta_1 p_1''' z_1^2 z_2 - 3 \zeta_2 p_1'' z_1 z_2 - \zeta_3 p_1' z_2 + p_1''''' z_1^5 - \zeta_1 p_1'''' z_1^4 - \zeta_2 p_1''' z_1^3 \\
&\quad - \zeta_3 p_1'' z_1^2 - \zeta_4 p_1' z_1 - \zeta_{10} - \zeta_5 p_1 \Big).
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.16), (4.55) em (4.14), decorre que

$$
\begin{aligned}
m &= c_1 \Bigg[p_1' w_1 + \beta^4 p_1 + \beta^3 \left(p_1' z_1 - \zeta_1 p_1\right) + \beta^2 \left(p_1' z_2 + q_4\right) + \beta s_3 + s_4 - \frac{\varphi}{\beta} \frac{c_2}{c_1} \\
&\quad + \frac{\zeta_{10}}{\beta} - p_1'' z_1 z_3 + \beta p_1' z_3 \Bigg].
\end{aligned}
$$

Utilizando aí as expressões (4.57) para $q_4, s_3, p_1' w_1$, e usando também (4.53), segue-se que

$$
\begin{aligned}
m &= c_1 \left[5p_1'' z_1 z_3 - \zeta_1 p_1' z_3 - s_4 + 3p_1'' z_2^2 + 6p_1''' z_1^2 z_2 - 3\zeta_1 p_1'' z_1 z_2 - \zeta_2 p_1' z_2 + p_1'''' z_1^4 \right. \\
&\quad -\zeta_1 p_1''' z_1^3 - \zeta_2 p_1'' z_1^2 - \zeta_3 p_1' z_1 - \zeta_4 p_1 + \beta^4 p_1 + \beta^3 \left(p_1' z_1 - \zeta_1 p_1\right) \\
&\quad +\beta^2 \left(p_1' z_2 + p_1'' z_1^2 - \zeta_1 p_1' z_1 - \zeta_2 p_1\right) + \beta \left(3p_1'' z_1 z_2 + p_1''' z_1^3 - \zeta_1 p_1'' z_1^2 - \zeta_2 p_1' z_1 \right. \\
&\quad \left.\left. -\zeta_1 p_1' z_2 - \zeta_3 p_1\right) + s_4 - \frac{\varphi}{\beta}\frac{c_2}{c_1} + \frac{\zeta_{10}}{\beta} - p_1'' z_1 z_3 + \beta p_1' z_3 \right] \\
&= c_1 \left[4p_1'' z_1 z_3 + (\beta - \zeta_1) p_1' z_3 + 3p_1'' z_2^2 + 6p_1''' z_1^2 z_2 + 3(\beta - \zeta_1) p_1'' z_1 z_2 \right. \\
&\quad + \left(\beta^2 - \zeta_1 \beta - \zeta_2\right) p_1' z_2 + p_1'''' z_1^4 + (\beta - \zeta_1) p_1''' z_1^3 \\
&\quad + \left(\beta^2 - \zeta_1 \beta - \zeta_2\right) p_1'' z_1^2 + \left(\beta^3 - \zeta_1 \beta^2 - \zeta_2 \beta - \zeta_3\right) p_1' z_1 \\
&\quad \left. + \left(\beta^4 - \zeta_1 \beta^3 - \zeta_2 \beta^2 - \zeta_3 \beta - \zeta_4\right) p_1 - \frac{\varphi}{\beta}\frac{c_2}{c_1} + \frac{\zeta_{10}}{\beta} \right] \\
&= c_1 \left[4p_1'' z_1 z_3 + 3p_1'' z_2^2 + 6p_1''' z_1^2 z_2 + p_1'''' z_1^4 + (\beta - \zeta_1) \left(p_1' z_3 + 3p_1'' z_1 z_2 + p_1''' z_1^3\right) \right. \\
&\quad + \left(\beta^2 - \zeta_1 \beta - \zeta_2\right) \left(p_1' z_2 + p_1'' z_1^2\right) + \left(\beta^3 - \zeta_1 \beta^2 - \zeta_2 \beta - \zeta_3\right) p_1' z_1 \\
&\quad + \left(\beta^4 - \zeta_1 \beta^3 - \zeta_2 \beta^2 - \zeta_3 \beta - \zeta_4\right) p_1 \\
&\quad \left. + \left(\beta^5 - \zeta_1 \beta^4 - \zeta_2 \beta^3 - \zeta_3 \beta^2 - \zeta_4 \beta - \zeta_5\right) \frac{c_2}{\beta c_1} + \frac{\zeta_{10}}{\beta} \right]. \qquad (4.58)
\end{aligned}
$$

Utilizando isso e (4.16) em (4.12), obtemos

$$
k_1 = \frac{1}{c_1 p_1'} \left\{c_1 p_1'' z_1 + c_1 \left[4p_1'' z_1 + (\beta - \zeta_1) p_1'\right]\right\} - \beta = 5\frac{p_1''}{p_1'} z_1 - \zeta_1.
$$

Reescrevemos ζ_{10} como ζ_6 e $c = c_1 \neq 0$, $\bar{c} = \frac{c_2}{c_1}$, $h = p_1$. Em vista disso e utilizando as expressões encontradas para k_i, $1 \leq i \leq 2$, em (4.11), obtemos (4.8). Por (4.29), temos que $\beta_\tau \neq 0$ se traduz em (4.10). Recordamos que, pelo Teorema 3.3.1, vale (3.57). Levando em conta isso, além de (4.16), (4.53), (4.58), sob a nova notação, em $f_{11} = g$, (4.1), (3.55), (3.56), obtemos (4.9).

□

4.2 Independência de parâmetro para a classe em que $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 = 0$

Nos Teoremas 4.2.1, 4.2.2 abaixo, classificamos parte das equações do Teorema 3.1.1, ou seja, correspondentes ao caso em que $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 = 0$, com δ, v dados por (5), que são independentes de um dos parâmetros μ_p, $2 \leq p \leq 3$, no caso em que $k = 5$. Relembramos que, pelo Teorema 3.1.1, estes são os únicos parâmetros livres, já que $\eta_p = 0$, $2 \leq p \leq 3$.

Os Teoremas 4.2.1, 4.2.2 correspondem respectivamente aos casos em que

$$\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0, \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau \neq 0, \left(\frac{\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau = 0.$$

Teorema 4.2.1 *Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, fixemos um dos parâmetros μ_p, $2 \leq p \leq 3$, e o denotemos por τ. Sejam δ, v, g dados por (5). A equação de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de τ, e com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo*

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad 2 \leq p \leq 3, \tag{4.59}$$

além de $\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau = 0$, $v' \neq 0$, $\delta = 0$ e $\eta_2 = 0$, se, e somente se,

$$G = \frac{1}{h'}\left(h'' z_1 + w_{,z_3}\right) z_4 + \frac{1}{h'} \sum_{j=0}^{2} w_{,z_j} z_{j+1}, \tag{4.60}$$

onde $h = h(z_0)$, $w = w(z_0, z_1, z_2, z_3)$ são funções diferenciáveis com $h' \neq 0$, e, para $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned} f_{11} &= ch + \bar{c}, \qquad f_{p1} = \mu_p (ch + \bar{c}), \\ f_{12} &= c(h' z_4 + w) + \tilde{c}, \\ f_{p2} &= \mu_p f_{12}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

onde μ_p cumprem $\gamma \neq 0$, e $c = c(\tau)$, $\tilde{c} = \tilde{c}(\tau)$, $\bar{c} = \bar{c}(\tau)$ são funções diferenciáveis com $c \neq 0$.

Teorema 4.2.2 *Sejam μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, números reais, fixemos um dos parâmetros μ_p, $2 \leq p \leq 3$, e o denotemos por τ. Sejam δ, v, g dados por (5). A equação de evolução $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ descreve superfícies pseudo-esféricas, com G independente de τ, e com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, satisfazendo (4.59),*

$$\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau \neq 0, \qquad \left(\frac{\left(\frac{g'''}{g'}\right)_\tau}{\left(\frac{g''}{g'}\right)_\tau}\right)_\tau = 0, \qquad v' \neq 0, \qquad \delta = 0, \qquad \eta_2 = 0,$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} G \;=\; & \left(p_1 z_1 + \frac{z_2}{z_1} - \frac{s_{,z_2}}{z_1}\right) z_4 + \left(\frac{1}{z_1} - \frac{s_{,z_2 z_2}}{z_1}\right) z_3^2 + \left(p_1' z_1^2 - 2 s_{,z_2 z_0} - p_2 z_1^2\right. \\ & \left. + p_1 z_2 - \frac{z_2^2}{z_1^2} - p_1 s_{,z_2} + \frac{s_{,z_2}}{z_1^2} z_2 - 2\frac{s_{,z_2 z_1}}{z_1} z_2 - \frac{s_{,z_1}}{z_1}\right) z_3 - (p_1 s)' z_1 - s'' z_1 \\ & - p_3' z_1 - 2 s_{,z_1 z_0} z_2 + p_2 s z_1 + p_4 z_1 - p_1 s_{,z_1} z_2 - \left(\frac{s_{,z_1}}{z_1}\right)_{,z_1} z_2^2, \end{aligned} \tag{4.62}$$

onde $p_i = p_i(z_0)$, $1 \leq i \leq 4$, $s = s(z_0, z_1, z_2)$ *são funções diferenciáveis, e, para* $2 \leq p \leq 3$,

$$\begin{aligned}
f_{11} &= g, \qquad f_{p1} = \mu_p g, \\
f_{12} &= g' z_4 + g' \left(-p_1 s - s' - p_3 + p_1 z_1 z_3 - \frac{s_{,z_1}}{z_1} z_2 + \frac{z_2 z_3}{z_1} - \frac{s_{,z_2}}{z_1} z_3 \right) \\
&\quad + g'' (s - z_1 z_3) + r, \qquad (4.63) \\
f_{p2} &= \mu_p f_{12},
\end{aligned}$$

onde μ_p *cumprem* $\gamma \neq 0$, *e* $g = g(z_0, \tau)$, $r = r(z_0, \tau)$ *são funções diferenciáveis com* $g' \neq 0$ *e*

$$g''' = p_1 g'' + p_2 g', \qquad r' = p_3 g'' + p_4 g'.$$

Demonstração dos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2. As demonstrações dos Teoremas 4.2.1, 4.2.2 são feitas nos mesmos moldes das demonstrações dos Teoremas 4.1.1, 4.1.2, para o caso especial em que $\eta_p = \beta = \varphi = 0$, $2 \leq p \leq 3$. O fato de que aqui temos $\gamma \neq 0$ e $\tau = \mu_p$, enquanto lá $\gamma = 0$ e $\tau = \mu_2, \eta_2$ não altera a argumentação.

$\square$

4.3 Independência de parâmetro para a classe em que $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$

Passamos ao Teorema 4.3.1, em que classificamos as equações do Teorema 3.2.2, ou seja, correspondentes ao caso em que $v' \neq 0$, $\delta = 0$, $\eta_2 \neq 0$, com δ, v dados por (5), que são independentes de um dos parâmetros μ_2, η_p, $2 \leq p \leq 3$, na situação em que $\bar{b}_\tau = 0$, onde $\bar{b}$ é dada por (3.31). Recordamos que, pelo Teorema 3.2.2, estes são os únicos parâmetros livres, já que μ_3 é dado em termos do restante.

Teorema 4.3.1 *Sejam* μ_p, η_p, $2 \leq p \leq 3$, *números reais, fixemos um dos parâmetros* μ_2, η_p, $2 \leq p \leq 3$, *e o denotemos por* τ. *Sejam* δ, v *dados por (5), e* $\bar{b}$ *dada por (3.31). A equação de evolução* $z_{0,t} = z_5 + G(z_0, \ldots, z_4)$ *descreve superfícies pseudo-esféricas, com* G *independente de* τ, *e com 1-formas associadas* $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, *satisfazendo*

$$f_{p1} = \mu_p f_{11} + \eta_p, \qquad 2 \leq p \leq 3,$$

além de $\bar{b}_\tau = 0$, $v' \neq 0$, $\delta = 0$ *e* $\eta_2 \neq 0$, *se, e somente se,*

$$
\begin{aligned}
G &= -\frac{s_{,z_2}}{h'}z_4 - \frac{s_{,z_2z_2}}{h'}z_3^2 + \left(-2\frac{s_{,z_2z_0}}{h'}z_1 - 3\frac{h'''}{h'}z_1^2 + 3\frac{h''h}{h'}z_1 + 2h'z_1 - 2\frac{s_{,z_2z_1}}{h'}z_2\right.\\
&\quad \left.-5\frac{h''}{h'}z_2 - \frac{s_{,z_1}}{h'} + \frac{hs_{,z_2}}{h'} - h^2\right)z_3 - 2\frac{s_{,z_1z_0}}{h'}z_1z_2 - 6\frac{h'''}{h'}z_1z_2^2 + 10h''z_1^2z_2 - \frac{s'}{h'}z_2\\
&\quad +3\frac{h''h}{h'}z_2^2 + 2h'z_2^2 - \frac{s_{,z_1z_1}}{h'}z_2^2 - \frac{s''}{h'}z_1^2 - 2\frac{h''''}{h'}z_1^3z_2 + 3\frac{h'''h}{h'}z_2z_1^2 + \frac{(h'')^2}{h'}z_1^4\\
&\quad +h'''z_1^4 + \frac{hs_{,z_1}}{h'}z_2 - 3hh'z_1z_2 + \frac{(hs)'}{h'}z_1 - \frac{h''h^2}{h'}z_2z_1 - \frac{1}{2}\frac{\left(h(h')^2\right)'}{h'}z_1^3, \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

onde $h = h(z_0)$, $s = s(z_0, z_1, z_2)$ *são funções diferenciáveis com* $h' \neq 0$, *e, para* $2 \leq p \leq 3$,

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \frac{1}{\varepsilon}(h + c), \qquad f_{p1} = \frac{\mu_p}{\varepsilon}(h + c) + \eta_p,\\
f_{12} &= \frac{1}{\varepsilon}\Big[h'z_4 + (-s_{,z_2} - h''z_1 - ch')z_3 - s'z_1 - 2h'''z_1^2z_2 + 3h''hz_2z_1 + 2(h')^2z_1z_2\\
&\quad +h'h''z_1^3 - s_{,z_1}z_2 - 2h''z_2^2 + 2ch''z_1z_2 + (h + c)\left(s - h'hz_2 - \frac{1}{2}(h')^2z_1^2\right)\Big], \qquad (4.65)\\
f_{p2} &= \mu_p f_{12} - \eta_p\left(h'z_3 - s - 2h''z_1z_2 + h'hz_2 + \frac{1}{2}(h')^2z_1^2\right),
\end{aligned}
$$

onde $\eta_2 \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ *é dado por (3.31),* μ_3 *é dado por (3.34), e*

$$
c = \pm\eta_2\sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}}.
$$

Demonstração. Primeiramente observamos que, por (3.18), (3.27), (3.31),

$$
\bar{b} = \bar{g} \mp \eta_2\sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}}. \qquad (4.66)
$$

Escrevemos (3.30) como

$$
G = k_1z_4 + k_2z_3^2 + k_3z_3 + k_4, \qquad (4.67)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{\bar{g}'}(2\bar{g}''z_1 - m_{,z_2}) - \bar{b}, \qquad k_2 = -\frac{1}{\bar{g}'}m_{,z_2z_2}, \qquad (4.68)\\
k_3 &= \frac{1}{\bar{g}'}\left[-2m_{,z_2z_0}z_1 - 2m_{,z_2z_1}z_2 + \bar{g}'''z_1^2 + \bar{g}''z_2 - m_{,z_1}\right.\\
&\quad \left.+\bar{b}(m_{,z_2} - \bar{g}''z_1)\right] - \bar{g}'z_1, \qquad (4.69)
\end{aligned}
$$

e, em vista de $\bar{g}' = \bar{b}'$, que vem de (4.66), temos

$$
\begin{aligned}
k_4 &= \frac{1}{\bar{g}'}\left[-2m_{,z_1z_0}z_1z_2 - m'z_2 - m_{,z_1z_1}z_2^2 - m''z_1^2\right.\\
&\quad \left.+\bar{b}m_{,z_1}z_2 + \left(\bar{b}m\right)'z_1\right]. \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

Temos que $G_\tau = 0$ é equivalente a $k_{i,\tau} = 0$, $1 \leq i \leq 4$.

Indicamos dependência nas variáveis pela escolha de letras

$$\begin{aligned}
\zeta_i &\in \mathbb{R}, \qquad c_i = c_i(\tau), \qquad p_i = p_i(z_0), \qquad q_i = q_i(z_0, z_1), \qquad r = r(z_0, \tau), \\
s_i &= s_i(z_0, z_1, z_2), \qquad t = t(z_0, z_1, \tau),
\end{aligned}$$

onde todas as funções são diferenciáveis.

Como $k_{1,\tau} = 0$ equivale a

$$\left(\frac{1}{\bar{g}'}\left(-2\bar{g}''z_1z_2 + m\right) + \bar{b}z_2\right)_{,\tau z_2} = 0, \tag{4.71}$$

a expressão entre parênteses é a soma de s_1 com uma função arbitrária $\frac{t}{\bar{g}'}$ de z_0, z_1, τ, de modo que

$$m = \bar{g}'s_1 + t + 2\bar{g}''z_1z_2 - \bar{b}\bar{g}'z_2. \tag{4.72}$$

Em vista de $k_{i,\tau} = 0$, $i = 1, 3$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \left(2k_{3,z_2} - k_{1,z_1}\right)_\tau \\
&= \left(2\frac{1}{\bar{g}'}\left(-2m_{,z_2z_2z_0}z_1 - 2m_{,z_2z_2z_1}z_2 - 2m_{,z_2z_1} + \bar{g}'' - m_{,z_1z_2} + \bar{b}m_{,z_2z_2}\right)\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{\bar{g}'}\left(2\bar{g}'' - m_{,z_2z_1}\right)\right)_\tau.
\end{aligned}$$

Usando $k_{2,\tau} = 0$ aí, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{\bar{g}'}\left(-5m_{,z_1z_2} + 2\bar{b}m_{,z_2z_2}\right)\right)_\tau \\
&= -5\left(\frac{m_{,z_1z_2}}{\bar{g}'}\right)_\tau + 2\bar{b}_\tau\frac{m_{,z_2z_2}}{\bar{g}'},
\end{aligned}$$

que, por (4.72), fica

$$0 = -5\left(\frac{m_{,z_1z_2}}{\bar{g}'}\right)_\tau + 2\bar{b}_\tau s_{1,z_2z_2}. \tag{4.73}$$

Derivando (4.71) com respeito a z_1, obtemos

$$\left(2\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'} - \frac{m_{,z_2z_1}}{\bar{g}'}\right)_\tau = 0,$$

que, junto com (4.73), fornece

$$-5\left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'}\right)_\tau + \bar{b}_\tau s_{1,z_2z_2} = 0. \tag{4.74}$$

Substituindo $\bar{b}_\tau = 0$ em (4.74), obtemos $\left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'}\right)_\tau = 0$. Da mesma maneira pela qual se obteve (2.76), existem p_1, c_1, c_2 com $c_1 \neq 0$, $p_1' \neq 0$, tais que

$$\bar{g} = c_1 p_1 + c_2. \tag{4.75}$$

Usando isso e $\bar{b}_\tau = 0$ em (4.72), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,\tau z_2} &= \left(\frac{\bar{g}'}{c_1} s_{1,z_2} + 2\frac{\bar{g}''}{c_1} z_1 - \bar{b}\frac{\bar{g}'}{c_1}\right)_\tau \\
&= \left(p_1 s_{1,z_2} + 2p_1'' z_1 - \bar{b} p_1'\right)_\tau \\
&= 0, \qquad\qquad (4.76)\\
\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,\tau z_1} &= \left(\frac{\bar{g}'}{c_1} s_{1,z_1} + \frac{t_{,z_1}}{c_1} + 2\frac{\bar{g}''}{c_1} z_2\right)_\tau \\
&= \left(p_1' s_{1,z_1} + \frac{t_{,z_1}}{c_1} + 2p_1'' z_2\right)_\tau \\
&= \left(\frac{t_{,z_1}}{c_1}\right)_\tau . \qquad\qquad (4.77)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.75), (4.76) e (4.77) em $k_{3,\tau} = 0$, e depois usando (4.72), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{c_1}\left[-2m_{,z_2 z_0} z_1 - 2m_{,z_2 z_1} z_2 + \bar{g}''' z_1^2 + \bar{g}'' z_2 - m_{,z_1} + \bar{b}\left(m_{,z_2} - \bar{g}'' z_1\right)\right] - c_1 \left(p_1'\right)^2 z_1\right)_\tau \\
&= \left[-2\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_2 z_0} z_1 - 2\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_2 z_1} z_2 + p_1''' z_1^2 + p_1'' z_2 - \left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_1} + \bar{b}\left(\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_2} - p_1'' z_1\right)\right. \\
&\quad \left. - c_1 \left(p_1'\right)^2 z_1\right]_\tau \\
&= -\left(\frac{t_{,z_1}}{c_1} + c_1 \left(p_1'\right)^2 z_1\right)_\tau \\
&= -\left(\frac{t}{c_1} + \frac{c_1}{2}\left(p_1'\right)^2 z_1^2\right)_{,\tau z_1},
\end{aligned}$$

de modo que existem q_1, r tais que

$$\frac{t}{c_1} = q_1 + r - \frac{c_1}{2}\left(p_1'\right)^2 z_1^2. \tag{4.78}$$

Substituindo $\bar{b}_\tau = 0$, (4.75), (4.78) em (4.72), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{m}{c_1}\right)_\tau &= \left(p_1' s_1 + q_1 + r - \frac{c_1}{2}\left(p_1'\right)^2 z_1^2 + 2p_1'' z_1 z_2 - \bar{b} p_1' z_2\right)_\tau \\
&= \left(r - \frac{c_1}{2}\left(p_1'\right)^2 z_1^2\right)_\tau . \qquad\qquad (4.79)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.75) e (4.78) em $k_{4,\tau}=0$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{c_1}\left[-2m_{,z_1z_0}z_1z_2 - m'z_2 - m_{,z_1z_1}z_2^2 - m''z_1^2 + \bar{b}\left(m_{,z_1}z_2 + m'z_1\right)\right] + p_1'mz_1\right)_\tau \\
&= \left(-2\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_1z_0} z_1z_2 - \left(\frac{m}{c_1}\right)' z_2 - \left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_1z_1} z_2^2 - \left(\frac{m}{c_1}\right)'' z_1^2 + \bar{b}\left(\frac{m}{c_1}\right)_{,z_1} z_2 \right. \\
&\quad \left. +\bar{b}\left(\frac{m}{c_1}\right)' z_1 + p_1'mz_1\right)_\tau . \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

Em vista de (4.79), isso é um polinômio em z_2 de grau 2 . Como o coeficiente de z_2^2 é nulo, temos, usando também (4.79),

$$0 = \left(\frac{m}{c_1}\right)_{,\tau z_1 z_1} = -c_{1,\tau}\left(p_1'\right)^2 .$$

Como $p_1' \neq 0$, concluímos que $c_{1,\tau}=0$, de modo que $c_1=\zeta_1\neq 0$. Usando isso em (4.79), obtemos

$$\frac{m_\tau}{\zeta_1} = r_\tau .$$

Substituindo tais valores além de $\bar{b}_\tau = 0$ em (4.80), obtemos

$$-r_{,\tau z_0}z_2 - r_{,\tau z_0 z_0}z_1^2 + \bar{b}r_{,\tau z_0}z_1 + \zeta_1 p_1' r_\tau z_1 = 0.$$

Como o coeficiente de z_2 é nulo, ou seja, $r_{,\tau z_0}=0$, temos que a relação fica $\zeta_1 p_1' r_\tau z_1 = 0$. Como $\zeta_1 p_1' \neq 0$, concluímos que $r_\tau = 0$, e daí $r = p_3$. Substituindo em (4.78), obtemos

$$t = \zeta_1 q_1 + \zeta_1 p_3 - \frac{\zeta_1^2}{2}\left(p_1'\right)^2 z_1^2 .$$

Substituindo isso, (4.75) e $c_1=\zeta_1$ em (4.72), obtemos

$$\begin{aligned}
m &= \zeta_1 p_1' s_1 + \zeta_1 q_1 + \zeta_1 p_3 - \frac{\zeta_1^2}{2}\left(p_1'\right)^2 z_1^2 + 2\zeta_1 p_1'' z_1 z_2 - \zeta_1 p_1' \bar{b} z_2 \\
&= \zeta_1\left(p_1' s_1 + q_1 + p_3\right) - \frac{\zeta_1^2}{2}\left(p_1'\right)^2 z_1^2 + 2\zeta_1 p_1'' z_1 z_2 - \zeta_1 p_1' \bar{b} z_2 . \qquad (4.81)
\end{aligned}$$

Em vista de (4.75), (4.66) e $c_1=\zeta_1$,

$$\bar{b} = \zeta_1 p_1 + c_2 \mp \eta_2 \sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}} . \qquad (4.82)$$

Derivando (4.82) com respeito a τ, e usando $\bar{b}_\tau = 0$, concluímos que existe ζ_2 tal que

$$c_2 \mp \eta_2 \sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}} = \zeta_2 . \qquad (4.83)$$

Definimos $c = c(\tau)$, $h = h(z_0)$, $s = s(z_0, z_1, z_2)$ por

$$c = c_2 - \zeta_2 = \pm\eta_2\sqrt{1 - \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}}, \qquad h = \zeta_1 p_1 + \zeta_2, \qquad s = \zeta_1 \left(p_1' s_1 + q_1 + p_3\right). \tag{4.84}$$

Como $\zeta_1 \neq 0$ e $p_1' \neq 0$, temos $h' \neq 0$. Substituindo (4.83), (4.84) em (4.82), obtemos

$$\bar{b} = h. \tag{4.85}$$

Usando (4.83), (4.85), (4.84) em (4.66), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{g} &= h + c_2 - \zeta_2 \\ &= h + c. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Se substituirmos (4.84), (4.85) em (4.81), vem

$$\begin{aligned} m &= s + 2h'' z_1 z_2 - h' h z_2 - \frac{1}{2}\left(h'\right)^2 z_1^2, \\ m' &= s' + 2h''' z_1 z_2 - h'' h z_2 - \left(h'\right)^2 z_2 - h' h'' z_1^2, \\ m'' &= s'' + 2h'''' z_1 z_2 - h''' h z_2 - 3h'' h' z_2 - \left(h''\right)^2 z_1^2 - h' h''' z_1^2, \\ m_{,z_1} &= s_{,z_1} + 2h'' z_2 - \left(h'\right)^2 z_1, \\ m_{,z_1 z_0} &= s_{,z_1 z_0} + 2h''' z_2 - 2h' h'' z_1, \qquad m_{,z_1 z_1} = s_{,z_1 z_1} - \left(h'\right)^2, \\ m_{,z_2} &= s_{,z_2} + 2h'' z_1 - h' h, \qquad m_{,z_2 z_0} = s_{,z_2 z_0} + 2h''' z_1 - h'' h - \left(h'\right)^2, \\ m_{,z_2 z_1} &= s_{,z_2 z_1} + 2h'', \qquad m_{,z_2 z_2} = s_{,z_2 z_2}, \\ \left(m\bar{b}\right)' &= (hs)' + 2\left(hh''\right)' z_1 z_2 - \left(h' h^2\right)' z_2 - \frac{1}{2}\left(h\left(h'\right)^2\right)' z_1^2. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Ao usar (4.85) a (4.87) em (4.68) a (4.70), ficamos com

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{h'}\left(2h'' z_1 - s_{,z_2} - 2h'' z_1 + h' h\right) - h = -\frac{s_{,z_2}}{h'}, \\ k_2 &= -\frac{s_{,z_2 z_2}}{h'}, \\ k_3 &= \frac{1}{h'}\Big[-2\left(s_{,z_2 z_0} + 2h''' z_1 - h'' h - \left(h'\right)^2\right) z_1 - 2\left(s_{,z_2 z_1} + 2h''\right) z_2 + h''' z_1^2 + h'' z_2 \\ &\quad - s_{,z_1} - 2h'' z_2 + \left(h'\right)^2 z_1 + h\left(s_{,z_2} + 2h'' z_1 - h' h - h'' z_1\right)\Big] - h' z_1 \\ &= -2\frac{s_{,z_2 z_0}}{h'} z_1 - 3\frac{h'''}{h'} z_1^2 + 3\frac{h'' h}{h'} z_1 + 2h' z_1 - 2\frac{s_{,z_2 z_1}}{h'} z_2 - 5\frac{h''}{h'} z_2 - \frac{s_{,z_1}}{h'} + \frac{h s_{,z_2}}{h'} - h^2, \\ k_4 &= \frac{1}{h'}\Big[-2\left(s_{,z_1 z_0} + 2h''' z_2 - 2h' h'' z_1\right) z_1 z_2 - \Big(s' + 2h''' z_1 z_2 - h'' h z_2 - \left(h'\right)^2 z_2 \\ &\quad - h' h'' z_1^2\Big) z_2 - \left(s_{,z_1 z_1} - \left(h'\right)^2\right) z_2^2 - \Big(s'' + 2h'''' z_1 z_2 - h''' h z_2 - 3h'' h' z_2 - \left(h''\right)^2 z_1^2 \\ &\quad - h' h''' z_1^2\Big) z_1^2 + h\left(s_{,z_1} + 2h'' z_2 - \left(h'\right)^2 z_1\right) z_2 + (hs)' z_1 + 2\left(hh''\right)' z_1^2 z_2 \\ &\quad - \left(h' h^2\right)' z_2 z_1 - \frac{1}{2}\left(h\left(h'\right)^2\right)' z_1^3\Big] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\frac{s_{,z_1z_0}}{h'}z_1z_2 - 4\frac{h'''}{h'}z_1z_2^2 + 4h''z_1^2z_2 - \frac{s'}{h'}z_2 - 2\frac{h'''}{h'}z_1z_2^2 + \frac{h''h}{h'}z_2^2 + h'z_2^2 + h''z_1^2z_2 \\
&\quad -\frac{s_{,z_1z_1}}{h'}z_2^2 + h'z_2^2 - \frac{s''}{h'}z_1^2 - 2\frac{h''''}{h'}z_1^3z_2 + \frac{h'''h}{h'}z_2z_1^2 + 3h''z_2z_1^2 + \frac{(h'')^2}{h'}z_1^4 \\
&\quad +h'''z_1^4 + \frac{hs_{,z_1}}{h'}z_2 + 2\frac{hh''}{h'}z_2^2 - hh'z_1z_2 + \frac{(hs)'}{h'}z_1 + 2h''z_1^2z_2 + 2\frac{hh'''}{h'}z_1^2z_2 \\
&\quad -\frac{h''h^2}{h'}z_2z_1 - 2hh'z_2z_1 - \frac{1}{2}\frac{\left(h\,(h')^2\right)'}{h'}z_1^3 \\
&= -2\frac{s_{,z_1z_0}}{h'}z_1z_2 - 6\frac{h'''}{h'}z_1z_2^2 + 10h''z_1^2z_2 - \frac{s'}{h'}z_2 + 3\frac{h''h}{h'}z_2^2 + 2h'z_2^2 - \frac{s_{,z_1z_1}}{h'}z_2^2 - \frac{s''}{h'}z_1^2 \\
&\quad -2\frac{h''''}{h'}z_1^3z_2 + 3\frac{h'''h}{h'}z_2z_1^2 + \frac{(h'')^2}{h'}z_1^4 + h'''z_1^4 + \frac{hs_{,z_1}}{h'}z_2 - 3hh'z_1z_2 + \frac{(hs)'}{h'}z_1 \\
&\quad -\frac{h''h^2}{h'}z_2z_1 - \frac{1}{2}\frac{\left(h\,(h')^2\right)'}{h'}z_1^3.
\end{aligned}
$$

Tais expressões substituídas em (4.67), fornecem (4.64). Recordamos que, pelo Teorema 3.2.2, obtemos, de (3.31), uma expressão para $\varepsilon \neq 0$, $\bar{g} = \varepsilon g$, e também que μ_3 é dado por (3.34). Usando isso, (4.86), (4.87) em $f_{11} = g$, (2.21), (3.32), (3.33), obtemos (4.65). Em particular, com o fim de obtermos f_{12}, começamos por

$$
\begin{aligned}
f_{12} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[h'z_4 + \left(-s_{,z_2} - 2h''z_1 + h'h + h''z_1 - (h+c)\,h'\right)z_3 - s'z_1 - 2h'''z_1^2z_2\right. \\
&\quad +h''hz_2z_1 + (h')^2z_2z_1 + h'h''z_1^3 - s_{,z_1}z_2 - 2h''z_2^2 + (h')^2z_1z_2 \\
&\quad \left.+(h+c)\left(s + 2h''z_1z_2 - h'hz_2 - \frac{1}{2}(h')^2z_1^2\right)\right].
\end{aligned}
$$

□

4.4 Casos particulares

Nesta seção, ilustramos os teoremas deste capítulo com vários casos particulares simples.

Exemplo 4.4.1 Caso tomemos $\tau = \eta_2$, $\mu_2 = 0$, $\zeta_i = 1$, $1 \leq i \leq 6$, $c(\eta_2) = \eta_2 \neq 0$, $\bar{c}(\eta_2) = 0$, $h(z_0) = e^{z_0}$ na classe de equações descrita no Teorema 4.1.3, obtemos que

$$
\begin{aligned}
z_{0,t} &= z_5 + (5z_1 - 1)\,z_4 + 10z_3z_2 + 10z_1^2z_3 - 4z_3z_1 - z_3 + 15z_1z_2^2 - 3z_2^2 \\
&\quad +10z_1^3z_2 - 6z_1^2z_2 - 3z_1z_2 - z_2 + z_1^5 - z_1^4 - z_1^3 - z_1^2 - z_1 - \frac{1}{e^{z_0}} - 1,
\end{aligned}
$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \eta_2 e^{z_0}, \qquad f_{21} = \eta_2 \neq 0, \qquad f_{31} = \eta_2 e^{z_0}, \\
f_{12} &= \eta_2 e^{z_0} \left[z_4 + 4z_1z_3 + 3z_2^2 + 6z_1^2 z_2 + z_1^4 + (-\eta_2 - 1)\left(z_3 + 3z_1z_2 + z_1^3\right) \right. \\
&\quad + \left(\eta_2^2 + \eta_2 - 1\right)\left(z_2 + z_1^2\right) + \left(-\eta_2^3 - \eta_2^2 + \eta_2 - 1\right) z_1 \\
&\quad \left. + \left(\eta_2^4 + \eta_2^3 - \eta_2^2 + \eta_2 - 1\right) \right] - 1, \\
f_{22} &= \eta_2^5 + \eta_2^4 - \eta_2^3 + \eta_2^2 - \eta_2 + 1, \qquad f_{32} = f_{12}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4.2 Fazendo $\tau = \mu_2$, $\mu_3 = \mu_2$, $c(\mu_2) = \mu_2 \neq 0$, $\bar{c}(\mu_2) = \tilde{c}(\mu_2) = 0$, $h(z_0) = z_0$, $w(z_0, z_1, z_2, z_3) = \operatorname{sen}(z_0 + z_1 + z_2 + z_3)$ na classe de equações descritas no Teorema 4.2.1, obtemos que a equação de evolução

$$z_{0,t} = z_5 + X \cos Y,$$

onde $X = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$, $Y = z_0 + z_1 + z_2 + z_3$, descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= \mu_2 z_0, \qquad f_{21} = \mu_2^2 z_0, \qquad f_{31} = \mu_2^2 z_0, \\
f_{12} &= \mu_2 \left(z_4 + \operatorname{sen} Y\right), \\
f_{22} &= \mu_2 f_{12}, \qquad f_{32} = \mu_2 f_{12}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4.3 No Teorema 4.2.2, obtemos, ao tomar $\tau = \mu_2$, $\mu_3 = \mu_2$, $p_i(z_0) = 0$, $1 \leq i \leq 4$, $g(z_0, \mu_2) = z_0 + \mu_2$, $r(z_0, \mu_2) = 0$, $s(z_0, z_1, z_2) = \operatorname{sen} W$, onde $W = z_0 + z_1 + z_2$, que a equação de evolução

$$\begin{aligned}
z_{0,t} &= z_5 + \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{\cos W}{z_1}\right) z_4 + \left(\frac{1}{z_1} + \frac{\operatorname{sen} W}{z_1}\right) z_3^2 \\
&\quad + \left(2\operatorname{sen} W - \frac{z_2^2}{z_1^2} + \frac{\cos W}{z_1^2} z_2 + 2\frac{\operatorname{sen} W}{z_1} z_2 - \frac{\cos W}{z_1}\right) z_3 \\
&\quad + z_1 \operatorname{sen} W + 2z_2 \operatorname{sen} W - \left(\frac{\cos W}{z_1}\right)_{,z_1} z_2^2,
\end{aligned}$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned}
f_{11} &= z_0 + \mu_2, \qquad f_{21} = \mu_2 (z_0 + \mu_2), \qquad f_{31} = \mu_2 (z_0 + \mu_2), \\
f_{12} &= z_4 + \frac{z_2 z_3}{z_1} - \frac{\cos W}{z_1} (z_1 + z_2 + z_3), \\
f_{22} &= \mu_2 f_{12}, \qquad f_{32} = \mu_2 f_{12}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.4.4 Na classe de equações descrita no Teorema 4.3.1, obtemos, ao tomar $\tau = \eta_2$, $\eta_3 = \eta_2 \neq 0$, $\mu_2 = 0$, $h(z_0) = z_0$, $s(z_0, z_1, z_2) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2$, que a equação de evolução

$$z_{0,t} = z_5 - 2z_2z_4 - 2z_3^2 + \left(2z_0z_2 - z_0^2\right) z_3 + z_1z_2^2 - z_0z_1z_2 - 2z_0z_2 + \frac{1}{2}z_1^3 - 2z_1^2 + 3z_0^2z_1$$

descreve superfícies pseudo-esféricas, com 1-formas associadas $\omega_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$, dadas por

$$\begin{aligned} f_{11} &= z_0, \qquad f_{21} = \eta_2 \neq 0, \qquad f_{31} = \eta_2, \\ f_{12} &= z_4 - 2z_2z_3 - 2z_0z_1 + z_0^3 + \frac{1}{2}z_0z_1^2 + z_0z_2^2 - z_0^2z_2, \\ f_{22} &= -\eta_2\left(z_3 - z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_0z_2 + \frac{1}{2}z_1^2\right), \qquad f_{32} = f_{22}. \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] Ablowitz, M. J.; Kaup, D. J.; Newell, A; Segur, H. *The inverse scattering transform Fourier analysis for nonlinear problems,* Stud. Appl. Math. 53 (1974), 249–315.

[2] Ablowitz, M. J.; Beals, R.; Tenenblat, K. *On the solution of the generalized wave and generalized sine-Gordon equations,* Stud. Appl. Math. 74 (1986), 177–203.

[3] Beals, R.; Rabelo, M.; Tenenblat, K. *Backlünd transformations and inverse scattering for some pseudo-spherical surface equations,* Stud. Appl. Math. 81 (1989), 125–151.

[4] Beals, R.; Tenenblat, K. *Inverse scattering and the Backlünd transformation for the generalized wave and generalized sine-Gordon equations,* Stud. Appl. Math. 78 (1988), 227–256.

[5] Chern, S. S.; Tenenblat, K. *Pseudospherical surfaces and evolution equations,* Stud. Appl. Math. 74 (1986), 55–83.

[6] Ding, Q.; Tenenblat, K. *On differential systems describing surfaces of constant curvature,* J. Differential Equations 184 (2002), 185–214.

[7] Kamran, N.; Tenenblat, K. *On differential equations describing pseudo-spherical surfaces,* J. Differential Equations 115 (1995), 75–98.

[8] Jorge, L. P.; Tenenblat, K. *Linear problems associated with evolution equations of the type $u_{tt} = F(u, u_x, u_{xx}, u_t)$*, Stud. Appl. Math. 77 (1987), 103–117.

[9] Marvan, M. *On the horizontal gauge cohomology and non-removability of the spectral parameter,* Acta Appl. Math. 72 (2002) 51–65.

[10] Nucci, M. C. *Pseudopotencials, Lax equations and Backlünd transformations for nonlinear evolution equations,* J. Phys. A. 21 (1988) 73–79.

[11] Rabelo, M. *On equations which describe pseudospherical surfaces,* Stud. Appl. Math. 81 (1989), 221–248.

[12] Rabelo, M.; Tenenblat, K. *On equations of type* $u_{xt} = F(u, u_x)$ *which describe pseudospherical surfaces,* J. Math. Phys. 31 (1990), 1400–1407.

[13] Rabelo, M.; Tenenblat, K. *A classification of pseudospherical surface equations of type* $u_t = u_{xxx} + G(u, u_x, u_{xx})$, J. Math. Phys. 33 (1992), 537–549.

[14] Reyes, E. G. *Correspondence theorems for hierarchies of equations of pseudo-spherical type,* J. Differential Equations 225 (2006), 26–56.

[15] Reyes, E. G. *Nonlocal symmetries and Kaup–Kupershmidt,* J. Math. Phys. 46 (2005), 1–19.

[16] Reyes, E. G. *Pseudo-spherical surfaces and integrability of evolution equations,* J. Differential Equations 147 (1998), 195–230.