

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# O Problema de Björling para Superfícies Máximas no Espaço de Lorentz-Minkowski

por

**Tarcísio Castro Silva**

**Orientadora: Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues**

Brasília

2010

*Aos meus pais  
e irmãos*

# Agradecimentos

Inicialmente a Deus, por esta grande oportunidade de evoluir.

À minha família. Em especial aos meus pais, Rozely Rosa de Castro e Alcebíades Evangelista de Castro, e aos meus irmãos, Taís de Castro Silva e Tércio de Castro Silva, que sempre me apoiaram nos meus estudos.

À professora Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues por ter me dado a oportunidade única de trabalhar sob a sua orientação, o que me proporcionou um grande aprendizado. Agradeço pela confiança, pela disponibilidade, pela paciência com a qual conduziu os meus estudos e também por sua competência profissional.

Aos professores e membros da banca examinadora, Carlos Maber Carrión Riveros e Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves, que com suas críticas e sugestões tornaram o meu trabalho melhor.

Aos professores do Departamento de Matemática da UnB. Especialmente, aos que me deram aulas e àqueles que me atenderam quando precisei de ajuda. Aos funcionários, agradeço pela competência nos serviços prestados.

Aos amigos que me deram muito apoio nos momentos difíceis e também fizeram parte dos momentos de alegria. Aos que me ajudaram com hospedagem em Brasília, com o aprendizado nas disciplinas estudadas em cada semestre, bem como nas vésperas dos exames de qualificação. Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, me ajudaram com esta grandiosa conquista na minha vida.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

*“A matemática é o alfabeto com o qual  
Deus escreveu o universo.”*

Galileu Galilei

# Resumo

Baseado em um trabalho de Alías-Chaves-Mira [6], apresentamos um estudo local de superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  com base em uma fórmula de representação complexa para esta classe de superfícies. Como uma aplicação, resolvemos um certo tipo de problema de Björling no espaço de Lorentz-Minkowski e estabelecemos, a partir desta representação complexa, uma maneira de introduzir exemplos e classificar superfícies máximas com interessantes propriedades geométricas.

**Palavras-chave:** espaço de Lorentz-Minkowski, superfícies máximas, representação de Björling

# Abstract

Based on a Alías-Chaves-Mira's article [6], in this work we present a local study of maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  space, based on a complex representation formula for this class of surfaces. As an application we solve a certain Björling-type problem in Lorentz-Minkowski space and we established from this complex representation, a way of introducing examples and classify maximal surfaces with interesting geometric properties.

**Keywords:** Lorentz-Minkowski space, maximal surfaces, Björling's representation

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Variedades Pseudo-Riemannianas . . . . .	4
1.2 Imersões Máximas em $\mathbb{R}_1^3$ . . . . .	8
1.3 Superfícies de Riemann . . . . .	10
<b>2 Estrutura Complexa Local</b>	<b>16</b>
2.1 Representação de Björling . . . . .	16
2.2 Princípio de simetria para superfícies máximas . . . . .	26
2.3 Exemplos . . . . .	30
<b>3 Teoremas de Classificação</b>	<b>41</b>
3.1 Superfícies máximas de revolução . . . . .	41
3.2 Superfícies máximas regradas . . . . .	46
<b>4 Superfícies máximas geradas por curvas específicas</b>	<b>59</b>
4.1 Superfície máxima de Henneberg . . . . .	59
4.2 Superfície máxima de Enneper . . . . .	61
4.3 Superfície máxima de Catalan . . . . .	62
4.4 Relação entre superfícies máximas em $\mathbb{R}_1^3$ e mínimas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	63
<b>A Teoremas de Bernstein e Calabi-Bernstein: uma dualidade entre a equação das superfícies mínimas e a equação das superfícies máximas.</b>	<b>72</b>

# Introdução

No espaço Euclidiano 3-dimensional  $\mathbb{R}^3$ , o problema de Björling clássico [14, 21] foi proposto pelo mesmo [9] em 1844 e consiste na construção de uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  contendo uma faixa analítica prescrita. A solução para este problema foi dada por H. A. Schwarz [37] em 1890 por meio de uma fórmula explícita em termos da faixa prescrita. Esta fórmula fornece um belo método, além da representação de Weierstrass [35], para construir superfícies mínimas com interessantes propriedades geométricas. Por exemplo, propriedades de simetria.

Estes resultados têm inspirado vários autores a obter resultados análogos em outros espaços ambiente. Por exemplo, em 2007 J. A. Aledo, R. M. B. Chaves e J. A. Gálvez [4] estudaram o problema de Björling no contexto da geometria afim e, mais recentemente, em 2009 J. A. Aledo, A. Martínez e F. Milan [3] generalizaram os resultados obtidos em [4] quando resolveram o problema de Björling para superfícies máximas afim.

Em 2009, F. Mercuri e I. Onnis [30] estudaram o problema quando o espaço ambiente é um grupo de Lie, enquanto no mesmo ano J. Aledo, J. Gálvez e P. Mira [2] resolveram o problema para superfícies flat na esfera 3-dimensional. A versão do problema de Björling no espaço hiperbólico 3-dimensional  $\mathbb{H}^3$  pode ser encontrada no trabalho de J. A. Gálvez e P. Mira [20].

Quando o espaço ambiente é o *espaço de Lorentz-Minkowski*  $\mathbb{R}_1^n$ , isto é, o espaço Euclidiano n-dimensional  $\mathbb{R}^n$  dotado da forma bilinear Lorentziana

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n, \end{aligned}$$

citamos o trabalho de A. Asperti e J. M. Vilhena [7], onde no ano de 2006 os mesmos apresentaram o problema de Björling para superfícies de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^4$ . Uma



superfície é dita de *tipo espaço* se a métrica induzida da métrica ambiente Lorentziana é uma métrica Riemanniana sobre a superfície. Em 2009, R. M. B. Chaves, M. P. Dussan, M. Magid [11] estudaram o problema de Björling para superfícies mínimas de tipo tempo em  $\mathbb{R}_1^3$ .

O presente trabalho baseia-se em um estudo de L. J. Alías, R. M. B. Chaves e P. Mira [6], onde os mesmos resolveram o problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$ .

Uma *superfície máxima* em um espaço Lorentziano é uma superfície de tipo espaço com curvatura média nula.

A importância de tais superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$  é conhecida, não somente do ponto de vista matemático mas também do ponto de vista físico, por causa do seu importante papel em diferentes problemas que surgem, por exemplo, em Relatividade Geral [28]. Estas superfícies em  $\mathbb{R}_1^3$  compartilham algumas propriedades com superfícies mínimas no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Ambas as famílias surgem como soluções de problemas variacionais: máximo (mínimo) local para o funcional área no caso Lorentziano (Euclidiano), veja [10]. Além disso, como para superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  as superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$  também admitem uma representação de Enneper-Weierstrass [17, 18, 25]. Contudo, existem diferenças substanciais entre a teoria global das superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$  e a de seu correspondente Euclidiano, como podemos observar no então chamado *teorema de Calabi-Bernstein* o qual afirma que [10, 12]: *As únicas superfícies máximas completas em  $\mathbb{R}_1^3$  são os planos de tipo espaço.*

Dividimos o nosso trabalho em quatro capítulos e um apêndice, a saber:

- **Capítulo 1: Preliminares.** Neste capítulo, fixaremos notações e veremos alguns fatos que serão usados no decorrer desta dissertação. Relembraremos alguns conceitos de geometria Riemanniana e definiremos o espaço ambiente no qual trabalharemos. Em seguida, veremos as imersões de tipo espaço com curvatura média nula e trataremos do conceito de superfícies de Riemann, as quais localmente terão a estrutura do plano complexo  $\mathbb{C}$  tornando-se o domínio ideal para desenvolver o estudo de funções, integrais e diferenciais de uma variável complexa. Baseamos o referido capítulo principalmente nos livros [13, 26, 34].

- 
- **Capítulo 2: Estrutura Complexa Local.** Enunciaremos e resolveremos o problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$ . Como uma consequência, mostraremos que uma curva de tipo espaço  $\alpha$  juntamente com um campo vetorial  $V$  ao longo de  $\alpha$  determina completamente uma superfície máxima a qual pode ser construída por um caminho explícito por meio de  $\alpha$  e  $V$ . Também apresentaremos algumas propriedades de superfícies máximas relacionadas com tal problema. Por exemplo, propriedades de simetria.
  - **Capítulo 3: Teoremas de Classificação.** Em contraste com o caso de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , onde uma superfície mínima de rotação (respectivamente superfície mínima regrada) é localmente congruente um catenóide (respectivamente um helicóide), existem vários tipos de superfícies máximas de rotação ou regradadas no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ . Neste capítulo voltaremos nossa atenção a este estudo, expondo estas superfícies máximas como solução para um certo problema de Björling.
  - **Capítulo 4: Superfícies máximas geradas por curvas específicas.** Finalizaremos nosso trabalho construindo novos exemplos de superfícies máximas, porém, iniciando com uma curva analítica de tipo espaço com um claro significado geométrico. Em seguida, apresentaremos uma analogia natural destas superfícies máximas com suas correspondentes Euclidianas.
  - **Apêndice A: Teoremas de Bernstein e Calabi-Bernstein: uma dualidade entre a equação das superfícies mínimas e a equação das superfícies máximas.** Baseado em [5], mostraremos como o teorema clássico de Bernstein sobre superfícies mínimas no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  pode ser visto como uma consequência do teorema de Calabi-Bernstein sobre superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  (e vice-versa). Isto segue de uma simples mas elegante dualidade entre as soluções de suas correspondentes equações diferenciais.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, fixaremos notações e veremos alguns fatos que serão usados no decorrer deste trabalho. O espaço de *Lorentz-Minkowski*, sendo um dos exemplos mais simples de variedade *Lorentziana*, é definido na Seção 1.1. E na Seção 1.2, definiremos as *superfícies de tipo espaço* com curvatura média nula.

Na Seção 1.3, estudaremos o conceito de superfícies de Riemann, as quais localmente terão a estrutura do plano complexo  $\mathbb{C}$  tornando-se o domínio ideal para desenvolver o estudo de funções, integrais e diferenciais de uma variável complexa. Baseamos o referido capítulo principalmente nos livros [13, 26, 34].

### 1.1 Variedades Pseudo-Riemannianas

Nesta seção relembremos alguns conceitos de geometria Riemanniana. Iniciaremos com a noção de *variedade diferenciável*.

**Definição 1.1** Uma *variedade diferenciável*<sup>1</sup> *n-dimensional* (resumidamente: uma *n-variedade*) é um conjunto  $M$  juntamente com uma família  $(U_\alpha)_{\alpha \in L}$  de subconjuntos tais que

1.  $M = \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$ ,
2. para todo  $\alpha \in L$  existe uma aplicação injetiva  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ , e

---

<sup>1</sup>Por *diferenciável* entenderemos como de *classe*  $C^\infty$ .

3. para  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ , e a composição

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (1.1)$$

é diferenciável para arbitrários  $\alpha, \beta$ .

Referimos à cada  $\varphi_\alpha$  como uma *carta*,  $\varphi_\alpha^{-1}$  como uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) cujo domínio é o conjunto  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ , e o par  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in L}$  é chamado um *atlas*. As aplicações dadas em (1.1) definidas sobre a interseção de duas tais cartas, são chamadas *transformações coordenadas* ou *funções de transição*. Sem perda de generalidade, podemos assumir que o atlas é *máximo* com respeito à adição de mais cartas satisfazendo as condições 2 e 3 da definição acima. Neste sentido, um atlas máximo é chamado uma *estrutura diferenciável*.

**Observação 1.1** Uma estrutura diferenciável em um conjunto  $M$  induz de uma maneira natural uma topologia em  $M$ . Basta definir que  $A \subset M$  é um aberto de  $M$  se  $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha$ . É imediato verificar que  $M$  e o vazio são abertos, que a união de abertos é aberto e que a interseção finita de abertos é aberto. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos  $U_\alpha$  são abertos e as aplicações  $\varphi_\alpha$  são contínuas.

**Exemplo 1.1** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.

Consideremos, então,  $M$  uma  $n$ -variedade e  $p \in M$  um ponto fixado. Para falarmos no espaço tangente de  $M$  no ponto  $p$  é necessário o seguinte conceito geométrico:

**Definição 1.2** Um *vetor tangente* em  $p$  é uma classe de equivalência de curvas diferenciáveis  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $c(0) = p$ , onde  $c \sim c^*$  se, e somente se,  $(\varphi \circ c)'(0) = (\varphi \circ c^*)'(0)$  para toda carta  $\varphi$  contendo  $p$ .

Então, o *espaço tangente*  $T_p M$  de  $M$  em  $p$  é definido como o conjunto de todos os vetores tangentes no ponto  $p$ . Por definição,  $T_p M$  e  $T_q M$  são disjuntos se  $p \neq q$ .

Para a próxima definição, é conveniente lembrarmos o seguinte fato de álgebra linear:

O espaço  $\mathcal{L}^2(T_p M; \mathbb{R}) = \{\alpha : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ é bilinear}\}$  tem a base

$$\{dx_i|_p \otimes dx_j|_p \mid i, j = 1, \dots, n\},$$

onde o  $dx_i$  forma a *base dual* no *espaço dual*

$$(T_p M)^* = \mathcal{L}(T_p M; \mathbb{R}),$$

definida como segue:

$$dx_i|_p (\partial_j|_p) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

As formas bilineares  $dx_i|_p \otimes dx_j|_p$  estão definidas em termos de suas ações sobre a base (esta ação sendo então estendida por linearidade):

$$(dx_i|_p \otimes dx_j|_p) (\partial_k|_p, \partial_l|_p) := \delta_{ik} \delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = l, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela ação de  $\alpha$  na base, para os coeficientes da representação

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot dx_i \otimes dx_j$$

obtemos a expressão  $\alpha_{ij} = \alpha(\partial_i, \partial_j)$ .

Isto posto, segue o conceito de métrica Riemanniana sobre uma  $n$ -variedade  $M$ :

**Definição 1.3** Uma *métrica Riemanniana*  $g$  sobre  $M$  é uma correspondência da forma  $M \ni p \mapsto g_p \in \mathcal{L}^2(T_p M; \mathbb{R})$  tal que as seguintes condições estão satisfeitas:

1.  $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$  para todo  $X, Y$  (simetria)
2.  $g_p(X, X) > 0$  para todo  $X \neq 0$  (positiva definida)
3. Os coeficientes  $g_{ij}$  em toda representação local (isto é, em toda carta)

$$g_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) \cdot dx_i|_p \otimes dx_j|_p$$

são funções diferenciáveis. (diferenciabilidade)

As funções  $g_{ij}$  ( $= g_{ji}$ ) são chamadas *expressões da métrica Riemanniana* (ou “os  $g_{ij}$  da métrica”) em toda representação local em torno de  $p$ . E uma  $n$ -variedade  $M$  com uma dada métrica Riemanniana  $g$ ,  $(M, g)$ , chama-se uma *variedade Riemanniana*.

**Observação 1.2** Uma métrica Riemanniana  $g$  define em todo ponto  $p$  um produto interno  $g_p$  sobre o espaço tangente  $T_pM$ , e portanto a notação  $\langle X, Y \rangle$  em vez de  $g_p(X, Y)$  é também usada.

**Exemplo 1.2**  $M = \mathbb{R}^n$  com  $\partial_i$  identificado com  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . A métrica é dada por  $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$ . A geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica euclidiana.

Se na Definição 1.3 a condição que  $g$  é positiva definida é substituída pela condição mais fraca que ela é não-degenerada (significando que  $g(X, Y) = 0$  para todo  $Y$  implica  $X = 0$ ), então obtemos a noção de uma métrica *pseudo-Riemanniana* (ou *semi-Riemanniana*), a saber,  $\tilde{g}$ . Estritamente falando, uma  $n$ -variedade  $M$  com uma dada métrica pseudo-Riemanniana  $\tilde{g}$ ,  $(M, \tilde{g})$ , chama-se uma *variedade pseudo-Riemanniana*.

A dimensão máxima de um subespaço  $W$  de  $T_pM$  tal que a restrição  $\tilde{g}|_W$  é negativa definida, isto é, para cada  $w \in W$ ,  $w \neq 0$ ,  $\tilde{g}(w, w) < 0$ , é chamada de índice no ponto  $p$  e denotada por  $\vartheta(p)$ . Entretanto, quando  $\vartheta = \vartheta(p)$  é o mesmo para todo  $p \in M$ , chamamos  $\vartheta(p)$  o índice da variedade:  $0 \leq \vartheta \leq n = \dim(M)$ .

No caso em que  $\vartheta = 1$  e  $n \geq 2$ , temos um tipo especial de variedade pseudo-Riemanniana, ou seja, dizemos que  $M$  é uma *variedade de Lorentz*.

Um típico exemplo de uma variedade Lorentziana é o *espaço de Lorentz-Minkowski*<sup>2</sup>  $\mathbb{R}_1^n$ , isto é, o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  dotado da forma bilinear Lorentziana

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n. \end{aligned}$$

O espaço ambiente no qual trabalharemos é o  $\mathbb{R}_1^3$ , onde a categoria na qual um dado vetor tangente  $v \in \mathbb{R}_1^3$  está inserido é chamado de *caráter causal* do vetor. Mais precisamente:

**Definição 1.4** Um vetor tangente  $v \in \mathbb{R}_1^3$  é

$$\begin{aligned} \textit{tipo espaço} \quad (\textit{spacelike}) &\quad \text{se } \langle v, v \rangle_1 > 0 \quad \text{ou } v = 0, \\ \textit{tipo luz} \quad (\textit{lightlike}) &\quad \text{se } \langle v, v \rangle_1 = 0 \quad \text{e } v \neq 0, \\ \textit{tipo tempo} \quad (\textit{timelike}) &\quad \text{se } \langle v, v \rangle_1 < 0. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Na literatura, usam-se também os termos *espaço de Minkowski* ou *espaço de Lorentz* e o denota por  $\mathbb{L}^n$ .

**Observação 1.3** A terminologia acima deriva da Teoria Relativística. E um vetor de tipo luz é também conhecido como *isotrópico* ou *vetor-nulo*.

Em  $\mathbb{R}_1^3$ , definimos o *pseudo-produto*  $a \wedge b$  como

$$a \wedge b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_2b_1 - a_1b_2).$$

Assim, para qualquer  $x \in \mathbb{R}_1^3$  temos a relação  $\langle a \wedge b, x \rangle_1 = \det(a, b, x)$ .

As superfícies de tipo espaço no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  é um assunto para a próxima seção.

## 1.2 Imersões Máximas em $\mathbb{R}_1^3$

Trabalharemos com superfícies de tipo espaço com curvatura média nula, que são chamadas *superfícies máximas*. No entanto, consideremos a seguinte definição.

**Definição 1.5** Seja  $M$  uma 2-variedade com atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in L}$ . Uma função  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  de classe  $C^2$  é uma *imersão* se para todo  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(\chi_u \wedge \chi_v)(u, v) \neq 0$ , onde  $\chi_u = \partial_u \chi = \partial_u (\chi \circ \varphi_\alpha^{-1})$ ,  $\chi_v = \partial_v \chi = \partial_v (\chi \circ \varphi_\alpha^{-1})$  e  $\varphi_\alpha(p) = (u, v)$ .

Se  $M$  é uma 2-variedade conexa e a imersão diferenciável  $\chi$  induz sobre  $M$  uma métrica Riemanniana, obtemos o seguinte conceito.

**Definição 1.6** Uma imersão diferenciável  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , de uma 2-variedade conexa é dita uma *superfície de tipo espaço* em  $\mathbb{R}_1^3$  se a métrica induzida sobre  $M$  via  $\chi$  é uma métrica Riemanniana.

**Exemplo 1.3** (*Plano de tipo espaço*) Dados dois vetores de tipo espaço linearmente independentes  $u$  e  $v$  em  $\mathbb{R}_1^3$ , a aplicação dada por  $\chi(s, t) = p_0 + su + tv$ ,  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  e  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}_1^3$ , claramente é uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$ .

É interessante notarmos que para toda superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  a variedade  $M$  é orientável. Com efeito, dado qualquer sistema de coordenadas locais

$$U \ni (u, v) \xrightarrow{\varphi^{-1}} p \in M,$$

onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , podemos definir um campo de vetores normais unitários por

$$\xi(u, v) = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{|\chi_u \wedge \chi_v|},$$

onde  $|\cdot|$  denota a norma em  $\mathbb{R}_1^3$  dada por  $|x| = |\langle x, x \rangle_1|^{\frac{1}{2}}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}_1^3$ .

Como  $\langle \chi_u, \chi_u \wedge \chi_v \rangle_1 = \langle \chi_v, \chi_u \wedge \chi_v \rangle_1 = 0$ ,  $\xi$  é sempre de tipo tempo, o que implica que sua terceira coordenada é sempre não-nula.

Portanto, a conexidade da superfície nos permite definir um único campo de vetores normais e unitários de tipo tempo  $N$ , globalmente definido sobre  $M$ , que estende o campo local  $\xi$ . Este campo normal  $N$  pode ser considerado como uma aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{H}^2$ , onde  $\mathbb{H}^2$  denota o espaço hiperbólico 2-dimensional, isto é,  $\mathbb{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_1 = -1\}$ . Referimos à  $N$  como a *aplicação de Gauss da superfície*. Em particular, se a variedade  $M$  pode ser coberta por uma única carta coordenada então  $N(u, v) = \chi_u \wedge \chi_v / |\chi_u \wedge \chi_v|$ .

Relacionado com o  $N$ , o operador normal de  $M$  em  $\mathbb{R}_1^3$ ,  $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , é dado pela fórmula de Weingarten

$$A(X) = -dN(X),$$

para todo campo vetorial tangente  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Associado ao operador normal de  $M$  definimos a curvatura média da superfície por

$$H = -\frac{1}{2}tr(A), \tag{1.2}$$

onde  $tr(A)$  denota o *traço do operador normal*  $A$ . Quando uma dada superfície de tipo espaço tem curvatura média  $H \equiv 0$ , a mesma recebe um nome especial.

**Definição 1.7** Uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  é dita uma *imersão máxima* se sua curvatura média é identicamente nula.

**Exemplo 1.4** Um plano de tipo espaço é uma imersão máxima.

Em [25], Kobayashi apresenta uma representação de Enneper-Weierstrass para imersões máximas em  $\mathbb{R}_1^3$ . Esta representação pode ser reformulada em termos globais seguindo a exposição em [8] da correspondente situação Euclidiana (veja também [17]). Na próxima seção, sob certas condições, representaremos localmente uma imersão máxima via uma equação complexa.



## 1.3 Superfícies de Riemann

No decorrer desta seção, veremos um pouco da relação entre a teoria das superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$  e a teoria das funções analíticas de variáveis complexas. A princípio definiremos uma *superfície de Riemann*.

**Definição 1.8** Uma *superfície de Riemann*  $S$  é uma variedade bidimensional, conexa, de Hausdorff com um atlas máximo  $\mathcal{A}$ , onde as mudanças de coordenadas são funções analíticas complexas.

Se  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in L\}$ , onde  $U_\alpha$  e  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  são abertos de  $S$  e  $\mathbb{C}$ , respectivamente, então  $\varphi_\alpha$  é um homeomorfismo e para todo  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  é uma função analítica.

**Observação 1.4** Dizemos que  $\varphi_\alpha$  define coordenadas ou parâmetros na vizinhança coordenada  $U_\alpha$  de  $S$  e  $\varphi_{\alpha\beta}$  é uma mudança de coordenadas ou mudança de parâmetros. Dizemos que o atlas máximo  $\mathcal{A}$  define uma estrutura complexa em  $S$ .

**Exemplo 1.5** Considere a esfera unitária  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  com o atlas máximo contendo as coordenadas  $\varphi_\alpha : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\varphi_\beta : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  são as projeções estereográficas pelos pólos norte e sul, respectivamente. A mudança de coordenadas  $\varphi_{\alpha\beta} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , é  $\varphi_{\alpha\beta}(z) = z^{-1}$ . Com esta estrutura complexa  $\hat{\mathbb{C}}$  é chamada *esfera de Riemann*.

Sejam  $M$  uma 2-variedade conexa e orientável e  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma superfície de tipo espaço. Para um atlas máximo de  $M$ , vamos nos restringir somente às cartas isotérmicas, as quais sabemos que sempre existem. Dessa forma, admitindo um tal sistema isotérmico,  $M$  é evidentemente localmente conforme a um plano, cuja métrica induzida sobre  $M$  via  $\chi$  será representada, localmente, em termos de tais parâmetros isotérmicos, por

$$\mathbf{I} = e^{2\rho} \{ds^2 + dt^2\} = e^{2\rho} |dz|^2,$$

onde  $z = s + it$ , para alguma função  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável.

Especificamente, como toda superfície de tipo espaço  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é orientável, podemos nos restringir somente à família de parâmetros isotérmicos cuja mudança de

coordenadas preserva a orientação de  $M$ . Isto significa que em termos da variável  $z = s + it$ , a mudança de coordenadas é uma função analítica.

**Observação 1.5** Uma superfície  $M$  juntamente com uma tal família de parâmetros isotérmicos torna-se uma superfície de Riemann, visto que esta família define uma estrutura complexa em  $M$ .

**Proposição 1.1** *Seja  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma imersão conforme de uma superfície de Riemann  $M$  em  $\mathbb{R}_1^3$ . Então*

$$\Delta\chi = -2HN, \quad (1.3)$$

onde  $H$  e  $N$  são, respectivamente, a curvatura média e a aplicação normal de Gauss da imersão.

**Prova.** Para coordenadas locais  $z = s + it$ , isto decorre do fato de  $\chi$  ser uma aplicação conforme, isto é,

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle_1 = \langle \chi_t, \chi_t \rangle_1 = e^{2\rho} \quad \text{e} \quad \langle \chi_s, \chi_t \rangle_1 = 0,$$

onde obtemos por derivação

$$\langle \chi_{ss}, \chi_s \rangle_1 = \langle \chi_{st}, \chi_t \rangle_1 \quad \text{e} \quad \langle \chi_{ts}, \chi_t \rangle_1 + \langle \chi_s, \chi_{tt} \rangle_1 = 0.$$

Disto, vemos que

$$\langle \chi_{ss} + \chi_{tt}, \chi_s \rangle_1 = 0$$

e, analogamente,

$$\langle \chi_{ss} + \chi_{tt}, \chi_t \rangle_1 = 0,$$

donde segue-se que  $\Delta\chi$  é paralelo a  $N$ .

Como  $N_s$  e  $N_t$  pertencem a  $T_pM$ ,  $p \in M$ , podemos escrever

$$N_s = a_{11}\chi_s + a_{12}\chi_t,$$

$$N_t = a_{21}\chi_s + a_{22}\chi_t,$$

donde a curvatura média da imersão é dada (veja (1.2)) por

$$H = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
e^{2\rho} \langle \Delta\chi, N \rangle_1 &= \langle \chi_{ss} + \chi_{tt}, N \rangle_1 \\
&= -\langle \chi_s, N_s \rangle_1 - \langle \chi_t, N_t \rangle_1 \\
&= -a_{11} \langle \chi_s, \chi_s \rangle_1 - a_{22} \langle \chi_t, \chi_t \rangle_1 \\
&= -(a_{11} + a_{22}) e^{2\rho} \\
&= -2He^{2\rho},
\end{aligned}$$

isto é,  $\Delta\chi = -2HN$ , concluindo o resultado desejado.

□

Uma consequência direta da Proposição 1.1 e da Definição 1.7 é o seguinte corolário.

**Corolário 1.1** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann. Uma aplicação  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma imersão máxima se, e somente se,  $\chi$  é harmônica. Em particular,  $M$  é não compacta.*

Considere  $M$  uma superfície de Riemann não compacta, e defina em termos de um parâmetro complexo local  $z = s + it$  do atlas isotérmico de  $M$ , as funções complexas  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  dadas por

$$\phi_k = \partial_z \chi_k = \frac{1}{2}(\partial_s \chi_k - i\partial_t \chi_k), \quad (1.4)$$

onde  $1 \leq k \leq 3$ .

Obviamente,  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  onde cada  $\phi_k$  é dado por (1.4), é uma função definida localmente sobre  $M$  com valores em  $\mathbb{C}^3$ . Na verdade, sua imagem está contida na quádrlica  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbb{C}^3$  dada pela equação

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$$

onde  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{C}^3$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 &= \partial_z \chi_1^2 + \partial_z \chi_2^2 - \partial_z \chi_3^2 \\
&= \frac{1}{4} [(\partial_s \chi_1 - i\partial_t \chi_1)^2 + (\partial_s \chi_2 - i\partial_t \chi_2)^2 - (\partial_s \chi_3 - i\partial_t \chi_3)^2] \\
&= \frac{1}{4} [(\partial_s \chi_1^2 + \partial_s \chi_2^2 - \partial_s \chi_3^2) - (\partial_t \chi_1^2 + \partial_t \chi_2^2 - \partial_t \chi_3^2)] - \\
&\quad \frac{1}{4} [2i(\partial_s \chi_1 \partial_t \chi_1 + \partial_s \chi_2 \partial_t \chi_2 - \partial_s \chi_3 \partial_t \chi_3)] \\
&= \frac{1}{4} [\langle \partial_s \chi, \partial_s \chi \rangle_1 - \langle \partial_t \chi, \partial_t \chi \rangle_1 - 2i \langle \partial_s \chi, \partial_t \chi \rangle_1] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois  $\chi$  é um sistema local isotérmico de  $M$ . Além disso, vemos também que

$$\begin{aligned} |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 &= \phi_1 \overline{\phi_1} + \phi_2 \overline{\phi_2} - \phi_3 \overline{\phi_3} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 (\partial_s \chi_i)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 (\partial_t \chi_i)^2 \\ &= \frac{1}{4} (|\partial_s \chi|^2 + |\partial_t \chi|^2) \\ &= \frac{e^{2\rho}}{2} \end{aligned}$$

isto é,  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 > 0$ . Daí segue que, se  $z = s + it$  e  $w = x + iy$  são parâmetros isotérmicos em torno de algum ponto de  $M$ , então a mudança de coordenadas  $w = w(z)$  é holomorfa com  $\partial_z w \neq 0$ . Segue-se que  $\tilde{\phi} = \partial_w \chi$  está relacionada a  $\phi$  por

$$\phi = \partial_z \chi = \partial_w \chi \partial_z w = \tilde{\phi} \partial_z w.$$

Assim, se considerarmos as *1-formas* complexas vetoriais dadas por  $\Phi = \phi dz$  e  $\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} dw$ , temos

$$\Phi = \phi dz = \tilde{\phi} \partial_z w dz = \tilde{\phi} dw = \tilde{\Phi}.$$

Isto significa que temos uma *1-forma* vetorial diferenciável  $\Phi$  globalmente definida sobre  $M$ , cuja expressão local é  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ , com

$$\Phi_k = \phi_k dz, \quad (1.5)$$

$1 \leq k \leq 3$ .

**Observação 1.6** No contexto de superfícies de Riemann é possível simplificar a expressão de muitas entidades que aparecem no estudo de superfícies. Um exemplo disto ocorre quando consideramos localmente, em uma superfície de Riemann, os operadores

$$\partial_z = \frac{1}{2} (\partial_s - i\partial_t) \quad \text{e} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_s + i\partial_t),$$

que nos fornece o seguinte operador Laplaciano

$$\Delta = \frac{1}{e^{2\rho}} \left( \frac{\partial}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial t^2} \right) = \frac{4}{e^{2\rho}} \partial_z \partial_{\bar{z}}. \quad (1.6)$$

Convém observar que as *1-formas* dadas em (1.5) são holomorfas se, e somente se,  $M$  é uma imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$ . De fato, das equações dadas em (1.4) e (1.6), obtemos

$$\partial_{\bar{z}} \Phi = \partial_{\bar{z}} \partial_z \chi = \frac{e^{2\rho}}{4} \Delta \chi.$$

Assim, segue do Corolário 1.1 que  $\Phi_k$  são holomorfas se e somente se  $M$  é uma imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Neste caso, as *1-formas*  $\Phi_k$  não tem períodos reais e a imersão máxima  $\chi$  pode ser representada como

$$\chi(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_z} (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \quad (1.7)$$

onde  $\gamma_z$  é qualquer caminho de um ponto base fixado à  $z \in M$ .

**Observação 1.7** Quando a parte real da integral de  $\Phi$  ao longo de qualquer caminho fechado é zero, dizemos que  $\Phi$  não tem períodos reais. A não existência de períodos reais é facilmente vista por sua equivalência a  $\operatorname{Re} \int_{\gamma_z} \Phi$  ser independente do caminho sobre  $M$ .

A recíproca trivialmente vale, conforme especificamos abaixo.

**Teorema 1.1** *Seja  $M$  uma superfície de Riemann e escolha três 1-formas holomorfas  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  globalmente definidas sobre  $M$  satisfazendo:*

- (a)  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - \Phi_3^2 = 0$  (i.é, localmente  $\Phi_k = \phi_k dz$  e  $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$ ),
- (b)  $|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 - |\Phi_3|^2 > 0$ ,
- (c) cada  $\Phi_k$  não tem períodos reais.

Então a aplicação  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada pela equação (1.7) é uma imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$ .

Claramente, a condição (c) é necessária para garantir que  $\operatorname{Re} \int_{p_0}^z \Phi_k$  depende somente do ponto final  $z$ . Assim, cada  $\chi_k$  está bem definida independentemente do caminho  $\gamma_z$  de  $p_0$  à  $z$ . E tendo em mãos a existência de parâmetros isotérmicos locais garantida pelo item (a), o item (b) fornece a existência de um plano de tipo espaço tangente em todo ponto da superfície, isto é,  $\chi$  é regular (logo uma imersão) e de tipo espaço. Como  $\Phi$  é holomorfa segue-se que  $\chi$  é harmônica. Portanto,  $\chi$  é uma superfície de tipo espaço com  $H \equiv 0$ , donde  $\chi$  é uma imersão máxima.

O seguinte teorema foi primeiramente provado por P. Koebe e H. Poincaré (veja [1] p. 181).

**Teorema 1.2** (Teorema de Uniformização) *A superfície de recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann é conformemente equivalente ao disco unitário, ao plano ou à esfera de Riemann.*

**Observação 1.8** A superfície de recobrimento universal de qualquer superfície é simplesmente conexa, e ela é fechada somente no caso de uma esfera.<sup>3</sup>

Com o teorema de Uniformização, uma elegante situação particular do Teorema 1.1 ocorre quando a superfície de Riemann  $M$  é simplesmente conexa. Neste caso, como superfícies de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  não são compactas, temos que  $M$  é conformemente equivalente a um subconjunto aberto do plano complexo. Como faremos um estudo local de imersões máximas, tudo que temos dito justifica a seguinte definição.

**Definição 1.9** Uma *superfície máxima* é uma imersão máxima  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  cuja métrica Riemanniana induzida é  $\mathbf{I} = e^{2\rho} |dz|^2$ , onde  $z = s + it$ .

Neste caso, as coordenadas de  $\chi$  são funções harmônicas no sentido Euclidiano. E escrevendo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , estamos enfatizando que  $\Omega$  herda, via  $\chi$ , uma estrutura de superfície de Riemann sendo exatamente a superfície de Riemann que tem  $\Omega$  como subconjunto de  $\mathbb{C}$ .

**Observação 1.9** Note que, toda imersão máxima pode ser localmente escrita como uma superfície máxima. Além disso, uma imersão máxima simplesmente conexa pode ser globalmente expressa como uma superfície máxima via teorema de Uniformização.

---

<sup>3</sup>Veja [1] p. 181.

# Capítulo 2

## Estrutura Complexa Local

Resolveremos o problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$  e mostraremos algumas consequências e propriedades de tais superfícies relacionadas com tal problema. Na última seção, veremos alguns exemplos conhecidos como soluções para um adequado problema de Björling.

### 2.1 Representação de Björling

Nesta seção introduziremos uma representação complexa local para superfícies máximas. Esta representação é inspirada na fórmula de Schwarz a qual resolve o problema de Björling clássico no espaço Euclidiano, e será o resultado chave para nosso trabalho. Começaremos com a definição de curva de tipo espaço.

**Definição 2.1** Uma curva regular  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é dita de *tipo espaço* se  $\langle \alpha', \alpha' \rangle > 0$  em todo ponto.

**Teorema 2.1** (Representação de Björling) *Seja  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  e defina  $\alpha(s) = \chi(s, 0)$ ,  $V(s) = N(s, 0)$  sobre um intervalo real  $I \subset \Omega$ . Escolha qualquer conjunto aberto simplesmente conexo  $U \subseteq \Omega$  contendo  $I$  sobre o qual podemos definir extensões holomorfas  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  de  $\alpha$  e  $V$ , respectivamente. Então para todo  $z \in U$  vale*

$$\chi(z) = \mathbf{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right), \quad (2.1)$$

onde  $s_0$  é um ponto arbitrariamente fixado de  $I$  e a integral é tomada ao longo de um caminho arbitrário em  $U$  ligando  $s_0$  e  $z$ .

**Observação 2.1** O problema de extensão de funções analíticas é um dos mais importantes da análise complexa. Temos que: *uma condição necessária e suficiente para que uma função  $f(x)$ , a valores no corpo dos reais e definida no intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , admita um complemento holomorfo  $F(z)$  é que ela seja, neste intervalo, uma função analítica da variável real  $x$ . E tal complemento holomorfo, se existir, é único.*<sup>1</sup>

Antes de provarmos o teorema da representação de Björling, é importante fazermos alguns comentários.

1. Como  $\chi$  é uma superfície máxima, as funções  $\alpha(s)$  e  $V(s)$  são reais analíticas para todo  $s \in I$ . Assim as extensões holomorfas  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  sempre existem para todo  $z \in U$ , e segue das equações de Cauchy-Riemann que estas extensões são únicas. Notemos também que, se  $\alpha$  é uma curva unitária então a extensão  $\alpha(z)$  satisfaz  $\langle \alpha'(z), \alpha'(z) \rangle = 1$  para todo  $z \in U$ .
2. A integral na fórmula (2.1) não depende da escolha do caminho ligando  $s_0$  e  $z$ , uma vez que  $U$  é simplesmente conexo. Assim  $\chi(z)$  está sempre bem definida para todo  $z \in U$ .
3. Para cada  $s_0 \in I$ , a equação dada em (2.1) define a mesma aplicação  $\chi(z)$  para todo  $z \in U$ . Isto facilmente segue do fato de  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  tomarem valores reais quando restritos a  $I$ .

**Prova do Teorema 2.1.** Como  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma imersão máxima segue-se que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \Omega \subseteq \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ z &\mapsto \partial_z \chi(z) \end{aligned}$$

é de fato holomorfa sobre  $\Omega$ , pois

$$\partial_z \phi = \frac{\lambda^2}{4} \Delta \chi = 0$$

---

<sup>1</sup>Uma demonstração deste fato é encontrada, por exemplo, em [36] pp. 346-347.



em  $\Omega$ . E pelo Teorema 1.1 podemos escrever  $\chi$  como

$$\chi(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_z} \phi(w) dw, \quad (2.2)$$

com a constante de integração sendo tal que a expressão  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$  seja válida para todo  $s \in I$ .

Por outro lado, como  $\chi$  é uma aplicação conforme, vemos que  $N(z) \wedge \partial_s \chi(z) = -\partial_t \chi(z)$ , onde  $z = s + it$ . Logo,

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2} (\partial_s \chi(z) - i \partial_t \chi(z)) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_s \chi(z) + i N(z) \wedge \partial_s \chi(z)). \end{aligned}$$

Restringindo  $\phi(z)$  ao intervalo  $I$  e lembrando que  $\partial_s \chi(s, 0) = \alpha'(s)$  e  $N(s, 0) = V(s)$ , obtemos

$$\phi(s, 0) = \frac{1}{2} (\alpha'(s) + i V(s) \wedge \alpha'(s)).$$

Isto é uma aplicação de  $I$  em  $\mathbb{C}^3$ , e tomando o complemento holomorfo de  $\alpha$  e  $V$  podemos escrever

$$\phi(z) = \frac{1}{2} (\alpha'(z) + i V(z) \wedge \alpha'(z))$$

para todo  $z \in U$ .

Agora notemos que, como  $U$  é simplesmente conexo e a aplicação  $V(z) \wedge \alpha'(z)$  é holomorfa sobre  $U$ , a integral

$$\int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw$$

não depende da escolha do caminho ligando  $s_0$  e  $z$ . Isto nos permite definir a aplicação

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right),$$

a qual é uma primitiva sobre  $U$  da aplicação holomorfa  $\phi(z)$ , e quando restrita a  $I$  satisfaz a condição  $2 \operatorname{Re} \varphi(s, 0) = \alpha(s)$ . Concluimos de (2.2) que

$$\chi(z) = \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right).$$

□

Esta representação de Björling é a ferramenta chave no estudo do problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$ . Formularemos este problema como segue.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva regular analítica de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  e seja  $V : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  um campo vetorial analítico unitário de tipo tempo ao longo de  $\alpha$  tal que  $\langle \alpha', V \rangle \equiv 0$ . Determine uma superfície máxima  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  tal que  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$  e  $N(s, 0) = V(s)$  para todo  $s \in I$ . Aqui  $\Omega$  é um domínio complexo com  $I \subset \Omega$  e  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  consiste da aplicação de Gauss da superfície.

Como um caso particular, considere uma curva analítica de tipo espaço e parametrizada pelo comprimento de arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  tal que  $\alpha''(s)$  é de tipo tempo para todo  $s \in I$ . Então  $V = \alpha''/|\alpha''|$  é um campo vetorial unitário de tipo tempo ao longo de  $\alpha$  para o qual  $\langle \alpha', V \rangle_1 \equiv 0$ . Isto revela que o problema de Björling é uma generalização do seguinte *problema restrito*: *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva real analítica em  $\mathbb{R}_1^3$  com  $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 \equiv 1$  e tal que  $\alpha''(s)$  é de tipo tempo para todo  $s \in I$ . Construa uma superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  contendo  $\alpha$  como uma geodésica.*

Uma curva  $\alpha(s)$  sobre uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  é uma *geodésica* se  $\alpha''(s)$  é colinear com a aplicação de Gauss  $N(\alpha(s))$  para todo  $s \in I$ . Por conseguinte,  $\alpha''$  deve ser de tipo tempo sempre que o mesmo é não nulo. Por isso, assumir que  $\alpha''$  é sempre de tipo tempo na formulação do problema anterior é uma condição necessária.

**Observação 2.2** Vale ressaltar que o problema de Björling não está interessado somente na existência de uma superfície máxima contendo uma faixa analítica de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$ . Ele está também interessado na construção explícita de uma tal superfície máxima. Atualmente, a questão de existência e unicidade de uma superfície satisfazendo as condições do problema de Björling pode ser vista como uma consequência do teorema geral de Cauchy-Kovalevsky (veja [19] p. 46), como segue: Se  $\alpha, V$  estão nas condições do problema de Björling e definimos  $\bar{V} = \alpha' \wedge V$ , então as coordenadas de  $\alpha$  e  $\bar{V}$  são analíticas e deste modo o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_s^2 \chi_k + \partial_t^2 \chi_k = 0 \\ \chi_k(s, 0) = \alpha_k(s) \\ \partial_t \chi_k(s, 0) = \bar{V}_k(s) \end{cases}$$

para  $k = 1, 2, 3$  tem única solução sobre uma certa vizinhança  $\Omega$  da origem. Note que  $\alpha'(s)$  e  $\bar{V}(s)$  geram um plano de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  para todo  $s$ . Consequentemente,

reduzindo  $\Omega$  se necessário, a função  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  é uma superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  com  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$  e  $N(s, 0) = V(s)$ . Tudo isto garante a existência e unicidade desejadas.

**Teorema 2.2** *Existe uma única solução para o problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$ . Na verdade, se  $\alpha, V$  estão definidos como na formulação anterior do problema de Björling, então:*

1. *existe um certo conjunto aberto simplesmente conexo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  contendo  $I$  para o qual  $\alpha, V$  admitem extensões holomorfas  $\alpha(z), V(z)$  sobre  $\Omega$  e a aplicação  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por*

$$\chi(z) = 2 \operatorname{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right)$$

*é uma solução para o problema de Björling. Aqui  $s_0 \in I$  é arbitrariamente fixado.*

2. *se  $\chi : \Omega_1 \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3, \psi : \Omega_2 \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  são duas soluções distintas para o problema de Björling, então  $\chi \equiv \psi$  sobre o conjunto aberto não vazio  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .*

**Prova.** Iniciaremos provando a unicidade. Para isto somente temos que relembrar a representação de Björling, a qual mostra que toda solução para o problema de Björling é dada por (2.1) sobre qualquer conjunto aberto simplesmente conexo para o qual  $\alpha(z), V(z)$  existem. Assim todo par de soluções  $\chi, \psi$  para o problema de Björling coincidem sobre um conjunto aberto não vazio, e uma vez que ambas  $\chi$  e  $\psi$  são funções harmônicas, elas devem coincidir sobre  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .

Para provar a existência, definimos uma aplicação holomorfa  $\phi$  como

$$\begin{aligned} \phi : \Omega \subseteq \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ z &\mapsto \frac{1}{2} (\alpha'(z) + iV(z) \wedge \alpha'(z)). \end{aligned}$$

Aqui, a princípio, somente exigimos que  $\Omega$  seja um conjunto aberto contendo  $I$  sobre o qual as extensões holomorfas  $\alpha(z), V(z)$  existem para todo  $z \in \Omega$ .

Com esta definição, se  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , temos para todo  $z \in \Omega$

$$\phi_1^2(z) + \phi_2^2(z) - \phi_3^2(z) = 0$$

e, sobre  $I$ ,

$$|\phi_1(s, 0)|^2 + |\phi_2(s, 0)|^2 - |\phi_3(s, 0)|^2 > 0.$$

Assim, reduzindo  $\Omega$  se necessário, podemos assumir que  $\Omega$  é simplesmente conexo e

$$|\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 - |\phi_3(z)|^2 > 0$$

para todo  $z \in \Omega$ . Desta forma, as funções holomorfas  $\phi_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , não têm períodos reais. Por este motivo, se fixarmos um arbitrário  $s_0 \in I$ , o Teorema 1.1 afirma que

$$\chi(z) = 2\mathbf{Re} \int_{s_0}^z \phi(w) dw$$

é uma imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$ . Em outras palavras, a aplicação  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada por

$$\chi(z) = 2\mathbf{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right)$$

determina uma superfície máxima. O que nos resta é verificar que esta superfície satisfaz as condições do problema de Björling, isto é,  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$  e  $N(s, 0) = V(s)$  para todo  $s \in I$ .

A verificação do primeiro termo é imediata, uma vez que ambos  $\alpha(z)$  e  $V(z)$  são reais quando restritos à  $I$ . Para verificarmos o segundo termo recordamos que  $2\phi(z) = 2\partial_z\chi$  e, portanto, valem sobre  $I$

$$\partial_s\chi(s, 0) = \alpha'(s) \quad \text{e} \quad \partial_t\chi(s, 0) = -V(s) \wedge \alpha'(s).$$

Estas fórmulas dizem que

$$\begin{aligned} -V(s) \wedge \partial_s\chi(s, 0) &= \partial_t\chi(s, 0) \\ &= -N(s, 0) \wedge \partial_s\chi(s, 0), \end{aligned}$$

e então a condição  $N(s, 0) = V(s)$  é satisfeita.

□

A parte da existência da prova mostra um caminho para gerar superfícies máximas contendo uma prescrita faixa analítica de tipo espaço. Na verdade, para obtermos uma superfície máxima passando pela curva analítica  $\alpha$  e com  $V$  como a aplicação de Gauss da superfície ao longo de  $\alpha$ , temos que calcular a integral

$$\alpha(s) + i \int_{s_0}^s V(r) \wedge \alpha'(r) dr,$$

então substituímos a variável real  $s$  pela variável complexa  $z$ , e finalmente tomamos a parte real da expressão resultante.

A parte da unicidade é um pouco mais delicada, uma vez que ela unicamente refere-se à superfície máxima  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  satisfazendo  $\chi(s, 0) = \alpha(s)$ ,  $N(s, 0) = V(s)$ . Assim não conhecemos ainda se existe uma única imersão máxima contendo uma dada faixa analítica de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$ . Contudo isto é verdade, como mostra o seguinte corolário.

**Corolário 2.1** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma curva regular analítica de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$ , e seja  $V : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  um campo vetorial unitário analítico de tipo tempo ao longo de  $\alpha$  tal que  $\langle \alpha', V \rangle \equiv 0$ . Existe uma única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  cuja imagem contém  $\alpha(I)$  e tal que sua aplicação de Gauss ao longo de  $\alpha$  é  $V$ . Esta imersão máxima pode ser construída seguindo o procedimento descrito acima.*

**Prova.** Temos a existência do Teorema 2.2. Para provar a unicidade iniciaremos com uma imersão máxima  $Y : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  e escolhemos um sistema de coordenadas locais isotérmicos  $(U, z)$  tal que  $U$  é aberto em  $M$  e um subconjunto  $\alpha(J)$  de  $\alpha(I)$  contido em  $Y(U)$ . Então a imersão máxima  $Y|_U$  pode ser expressa como uma superfície máxima  $\chi : \Omega = z^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ . Além disso, existe uma curva  $\gamma(s) : J \rightarrow \Omega$  satisfazendo  $\chi(\gamma(s)) = \alpha(s)$  e  $N(\gamma(s)) = V(s)$  para todo  $s \in J$ . Como  $\alpha$  é analítica e  $\chi$  é uma imersão máxima temos que  $\gamma$  é analítica, e assim admite uma extensão holomorfa  $\gamma(w) : W \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Aqui  $W$  é aberto e contém o intervalo real  $J$ . Também note que  $\gamma(s)$  é regular, pois  $\alpha(s)$  também é.

Agora escolha  $s_0 \in J$ . A função holomorfa  $\gamma(w)$  tem derivada não nula em  $s_0$ , e assim podemos aplicar o teorema da função inversa para funções holomorfas para obter uma aplicação *bi-holomorfa* (isto é, um *difeomorfismo holomorfo*)  $\gamma(w) : \mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{C}$ . Aqui  $\mathcal{U}_1$  é um subconjunto aberto de  $W$  contendo um intervalo real da forma  $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ , e  $\mathcal{U}_2$  é um subconjunto aberto de  $\Omega$ . Tudo isto mostra que a superfície máxima  $\chi|_{\mathcal{U}_2} : \mathcal{U}_2 \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  pode ser expressa como  $\psi : \mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , onde  $\psi(w) = \chi(\gamma(w))$ . Além disso,  $\psi(w)$  satisfaz, para todo  $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ ,

1.  $\psi(s, 0) = \chi(\gamma(s)) = \alpha(s)$ ,
2.  $N_\psi(s, 0) = N(\gamma(s)) = V(s)$ .

Assim,  $\psi(w)$  é a solução para o problema de Björling com as condições  $\alpha, V$ , o que significa que  $\psi(w)$  é única. Daqui mostramos que  $Y : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é também única, tendo em conta o fato de que duas imersões máximas não podem se sobrepor sobre um conjunto aberto não vazio.

□

Como um resultado, se  $\alpha$  e  $V$  estão nas condições do Corolário 2.1, podemos falar num sentido geral sobre a solução para o problema de Björling para as condições  $\alpha$  e  $V$ . Esta solução refere-se à única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  contendo  $\alpha$  e tal que sua aplicação de Gauss ao longo de  $\alpha$  é  $V$ .

**Corolário 2.2** *Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma curva analítica de tipo espaço com velocidade constante em  $\mathbb{R}_1^3$  tal que  $\alpha''(s)$  é de tipo tempo para todo  $s \in I$ , então existe uma única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  que contém  $\alpha$  como uma geodésica.*

**Prova.** À primeira vista, encontramos no Corolário 2.1 no máximo duas imersões máximas em  $\mathbb{R}_1^3$  contendo  $\alpha$  como geodésica, dependendo da escolha de  $V = \alpha''/|\alpha''|$  ou  $V = -\alpha''/|\alpha''|$  como a aplicação de Gauss da superfície ao longo de  $\alpha$ . Contudo a unicidade do Corolário 2.1 mostra que qualquer uma delas é obtida da outra revertendo orientação. Portanto ambas as imersões são, na verdade, a mesma e a unicidade é obtida.

□

Ilustraremos tudo o que foi dito apresentando um exemplo particular para o qual necessitamos de alguns conceitos.

**Definição 2.2** Um *círculo* em  $\mathbb{R}_1^3$  é definido como sendo uma curva plana de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  com curvatura constante não nula.

**Observação 2.3** Quando uma transformação linear no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  preserva o produto interno usual, chamamos esta de *transformação ortogonal*. Em  $\mathbb{R}_1^3$ , as transformações lineares que preservam a forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  são chamadas de *transformações de Lorentz*, e o conjunto de todas as transformações de Lorentz formam um grupo, o qual passamos a descrever:

- O grupo de Lorentz<sup>2</sup>

$$\mathbf{O}(2,1) = \{R : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \mid \langle Ru, Rv \rangle_1 = \langle u, v \rangle_1, \forall u, v \in \mathbb{R}_1^3\}$$

age sobre o espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  e preserva o conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{u \mid u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = \langle u, u \rangle_1 = -1\},$$

o qual sabemos ser o hiperbolóide de duas folhas no espaço Euclidiano.

Com respeito a este grupo ortogonal Lorentziano, existem três subgrupos a 1-parâmetro de isometrias de  $\mathbb{R}_1^3$  dependendo do caráter causal do eixo  $l$ , ou seja:

1. se  $l$  é um eixo de tipo espaço (por exemplo o eixo  $(0, 1, 0)$ ) a matriz de rotação é descrita por

$$R_1^s = \begin{pmatrix} \cosh(s) & 0 & \sinh(s) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(s) & 0 & \cosh(s) \end{pmatrix}$$

2. se  $l$  é um eixo de tipo luz (por exemplo o eixo  $(1, 0, 1)$ ) obtemos a matriz

$$R_2^s = \begin{pmatrix} 1 + \frac{s^2}{2} & -\frac{s^2}{2} & s \\ \frac{s^2}{2} & 1 - \frac{s^2}{2} & s \\ s & -s & 1 \end{pmatrix}$$

3. se  $l$  é um eixo de tipo tempo (por exemplo o eixo  $(0, 0, 1)$ ) então

$$R_3^s = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente, um círculo em  $\mathbb{R}_1^3$  pode ser visto como a órbita de um ponto  $p \in \mathbb{R}_1^3$  sobre o grupo a 1-parâmetro de transformações ortogonais de  $\mathbb{R}_1^3$  que fixa uma certa reta  $l$  de  $\mathbb{R}_1^3$  não contendo  $p$ .

---

<sup>2</sup>O leitor interessado pode consultar, por exemplo, [32] p. 15, onde terá à disposição uma boa abordagem sobre o assunto.

Assim, qualquer círculo em um plano de tipo tempo de  $\mathbb{R}_1^3$  é congruente a uma curva da forma  $x_1^2 - x_3^2 = -r^2$ .

De fato, a menos de isometrias de  $\mathbb{R}_1^3$  podemos supor que o plano no qual o círculo  $\alpha(s)$  está contido é o plano  $x_1x_3$  e que  $l = [(0, 1, 0)]$  é a tal reta fixada. Daí, uma vez que  $(0, 1, 0)$  é de tipo espaço, se  $p = (x_1, 0, x_3)$  e  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s))$ , então

$$\alpha(s) = R_1^s p,$$

donde obtemos a curva  $\alpha(s) = (x_1 \cosh(s) + x_3 \sinh(s), 0, x_1 \sinh(s) + x_3 \cosh(s))$ . Logo, como o círculo  $\alpha$  por definição é de tipo espaço, existe  $0 \neq r \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} r^2 &= \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_1 \\ &= -x_1^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

conforme a afirmação. E esta, por sua vez, pode ser parametrizada por  $\alpha(s) = r(\sinh(s), 0, \cosh(s))$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Para uma curva  $\alpha$  deste gênero, o Corolário 2.2 mostra que existe uma única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  contendo  $\alpha$  como uma geodésica. Agora, se definirmos  $V = -\alpha''/|\alpha''|$  facilmente obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(s) + i \int_0^s V(w) \wedge \alpha'(w) dw &= r(\sinh(s), 0, \cosh(s)) + i \int_0^s (0, -r, 0) dw \\ &= r(\sinh(s), -is, \cosh(s)). \end{aligned}$$

O procedimento descrito acima assegura que esta imersão máxima contendo  $\alpha$  como uma geodésica é dada por

$$\chi(z) = r \mathbf{Re} (\sinh(z), -iz, \cosh(z)),$$

ou seja,

$$\chi(s, t) = r(\sinh(s)\cos(t), t, \cosh(s)\cos(t)). \quad (2.3)$$

Aqui  $\chi$  está definida em  $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \subset \mathbb{C}$ , e a imersão máxima é chamada um *catenóide hiperbólico*. Uma forma diferente para tal imersão será apresentada na Seção 2.3. Finalmente, note que se uma imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  contém um círculo como uma geodésica, o plano no qual o círculo está contido deve ser de tipo tempo. Resumindo, provamos que:



**Proposição 2.1** *Qualquer imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  contendo um círculo como uma geodésica é congruente a um pedaço de um catenóide hiperbólico.*

Assim como para superfícies mínimas no espaço Euclidiano, vale um princípio de simetria para superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski. A seguir, com o auxílio da representação de Björling voltaremos nossa atenção para este fim.

## 2.2 Princípio de simetria para superfícies máximas

Fixaremos inicialmente algumas notações: se  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  é aberto, então definimos  $\Omega^* = \{\bar{z} : z \in \Omega\}$ , o qual também é aberto. Da mesma forma, se  $f \in \mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é holomorfa}\}$  definimos uma função holomorfa  $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$  por  $f^* = \overline{f(\bar{z})}$ . Com isto, vemos que se  $\Omega$  contém um intervalo real  $I$  e se  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  é real quando restrita a  $I$ , então  $f \equiv f^*$  sobre o conjunto aberto não vazio  $\Omega \cap \Omega^*$ . Assim  $f$  pode ser holomorficamente estendida a  $\Omega \cup \Omega^*$ .

**Observação 2.4** *Princípio de reflexão<sup>3</sup>: seja  $f(z)$  uma função analítica, regular em uma região  $D \subseteq \mathbb{C}$  intersectada pelo eixo real, e real sobre o eixo real. Então  $f(z)$  toma valores conjugados para conjugados valores de  $z$ .*

**Corolário 2.3** *Seja  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  a solução para o problema de Björling com as condições  $\alpha$  e  $V$ . Considere qualquer conjunto aberto simplesmente conexo  $U \subseteq \Omega$  com  $I \subset U$  e  $U = U^*$  sobre o qual  $\alpha, V$  possuem extensões holomorfas  $\alpha(z), V(z)$ , respectivamente. Então para todo  $z \in U$  temos*

$$\chi(\bar{z}) = \mathbf{Re} \left( \alpha(z) - i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right).$$

**Prova.** Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \chi^* : \Omega^* \subseteq \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3, \\ z &\mapsto \chi(\bar{z}) \end{aligned}$$

onde  $g_{ij}^*$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ , é a métrica induzida de  $\chi^*(z)$ . Daí, vemos que

$$\begin{cases} g_{ij}^* = g_{ij} & i = j = 1, 2; \\ g_{ij}^* = -g_{ij} & i \neq j, \end{cases}$$

<sup>3</sup>Para maiores detalhes veja [38] p.155.

onde  $g_{ij}$  é a métrica riemanniana de  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ . Assim  $\det(g_{ij}^*) = \det(g_{ij})$  e, sendo  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma superfície de tipo espaço,  $\chi^*(z)$  também será de tipo espaço com aplicação de Gauss dada por  $N^*(z) = -N(\bar{z})$ . Logo,

$$-2NH = \Delta\chi = \Delta\chi^* = -2N^*H^* = 2NH^*, \quad (2.4)$$

onde  $H$  e  $H^*$  são a curvatura média da imersão  $\chi$  e  $\chi^*$ , respectivamente.

Portanto, segue de (2.4) que  $H^* = -H$  e então  $\chi^*$  é uma superfície máxima pois  $\chi$  também o é. Além disso  $\chi^*(s, 0) = \chi(s, 0) = \alpha(s)$  e  $N^*(s, 0) = -N(s, 0) = -V(s)$ . O resultado agora segue da representação de Björling.

□

O corolário anterior implicitamente diz que se  $\chi(z)$  é a solução para um problema de Björling com as condições  $\alpha$  e  $V$ , a imersão  $\chi(\bar{z})$  resolve o problema de Björling com as condições  $\alpha$  e  $-V$ .

A representação de Björling juntamente com o fato de que as curvas coordenadas sobre uma superfície máxima são reais analíticas nos permite afirmar o seguinte lema.

**Lema 2.1** *Seja  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma superfície máxima, com  $\Omega = \Omega^*$ , e defina  $\alpha(s) = \chi(s, 0)$ .*

1. *Se a curva  $\alpha(s)$  está contida no eixo  $x_1$ , então*

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), -\chi_3(\bar{z})).$$

2. *Se a curva  $\alpha(s)$  está contida no plano  $x_1x_3$   $\Pi$  e a superfície intersecta  $\Pi$  ortogonalmente ao longo de  $\alpha$ , isto é,  $N(s, 0) \in \Pi$  para todo  $s \in I$ , então*

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), \chi_3(\bar{z})).$$

**Prova.**

1. Como usual, seja  $V(s) = N(s, 0)$ . As condições da hipótese mostram que  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, 0)$  e  $V(s) = (0, V_2(s), V_3(s))$ . Portanto

$$V(s) \wedge \alpha'(s) = (0, \alpha'_1(s)V_3(s), \alpha'_1(s)V_2(s)).$$

Então segue da representação de Björling que as extensões holomorfas de  $\alpha$ ,  $V$  satisfazem

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\mathbf{Re}\alpha_1(z), \mathbf{Im}\Psi_1(z), \mathbf{Im}\Psi_2(z)) \quad (2.5)$$

para qualquer  $z$  pertencente a um conjunto aberto simplesmente conexo  $U \subseteq \Omega$ . Onde

$$\Psi_1(z) = - \int_{s_0}^z \alpha'_1(w) V_3(w) dw$$

e

$$\Psi_2(z) = - \int_{s_0}^z \alpha'_1(w) V_2(w) dw$$

são funções holomorfas definidas em  $U$ . Então, em  $U \cap U^*$  segue que  $\alpha_1(z) = \alpha_1^*(z)$  e  $\Psi_k(z) = \Psi_k^*(z)$ , pois todas elas tomam valores reais quando restritas a  $I$ . Assim de (2.5) temos que

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), -\chi_3(\bar{z}))$$

para todo  $z \in U \cap U^*$ . As equações de Cauchy-Riemann para funções harmônicas mostram que estas relações valem para todo  $z \in \Omega$ .

2. Pela hipótese segue que

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s)) \quad \text{e} \quad V(s) = N(s, 0) = (V_1(s), 0, V_3(s)),$$

donde

$$V(s) \wedge \alpha'(s) = (0, \alpha'_1(s)V_3(s) - \alpha'_3(s)V_1(s), 0).$$

Portanto, segue da representação de Björling que

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \mathbf{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z [\alpha'_1(w)V_3(w) - \alpha'_3(w)V_1(w)] dw \right) \\ &= (\mathbf{Re} \alpha_1(z), \mathbf{Im} \Psi_3(z), \mathbf{Re} \alpha_3(z)), \end{aligned} \quad (2.6)$$

para qualquer  $z$  pertencente a um conjunto aberto simplesmente conexo  $U \subseteq \Omega$ . Onde

$$\Psi_3(z) = - \int_{s_0}^z [\alpha'_1(w)V_3(w) - \alpha'_3(w)V_1(w)] dw,$$

é uma função holomorfa em  $U$ . Então, em  $U \cap U^*$  segue que  $\alpha_1(z) = \alpha_1^*(z)$  e  $\Psi_3(z) = \Psi_3^*(z)$ , pois todas elas tomam valores reais quando restritas a  $I$ . Logo, da equação (2.6) temos

$$(\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)) = (\chi_1(\bar{z}), -\chi_2(\bar{z}), \chi_3(\bar{z})),$$

para todo  $z \in U \cap U^*$ . As equações de Cauchy-Riemann para funções harmônicas mostram que estas relações valem para todo  $z \in \Omega$ .

□

**Definição 2.3** Seja  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$ .

1. Uma curva de tipo espaço  $l \subset \chi(M)$  é dita ser um *eixo de simetria* da superfície se para todo  $p \in \chi(M) \setminus l$ , existe um certo  $q \in \chi(M)$  tal que  $\overline{pq}$  intersecta  $l$  ortogonalmente e  $(\frac{1}{2})(p + q) \in l$ .
2. Um plano de tipo tempo  $\Pi \subset \mathbb{R}_1^3$  que intersecta ortogonalmente uma superfície é dito ser um *plano de simetria* da superfície se para todo  $p \in \chi(M) \setminus \Pi$ , existe um certo  $q \in \chi(M)$  tal que  $\overline{pq}$  é perpendicular a  $\Pi$  e  $(\frac{1}{2})(p + q) \in \Pi$ .

Destas definições e do lema acima obtemos o seguinte princípio de simetria para superfícies máximas em  $\mathbb{R}_1^3$ .

**Teorema 2.3**

1. Toda reta de tipo espaço contida numa superfície máxima é um eixo de simetria da superfície.
2. Todo plano de tipo tempo que intersecta ortogonalmente uma superfície máxima é um plano de simetria da superfície.

**Prova.**

1. Seja  $\chi(M)$  uma superfície máxima e considere  $l \subset \chi(M)$  uma reta de tipo espaço, onde, sem perda de generalidade, podemos supor que  $l \subset x_1$ -eixo. Daí, para todo  $p \in \chi(M) \setminus l$ ,  $p = (\chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z))$ , devemos ter  $\chi_k(z) \neq 0$  para  $k = 2$  ou  $3$ , visto que  $p \notin l$ . Suponhamos então que  $\chi_2(z) \neq 0$  (o caso  $\chi_3(z) \neq 0$  é análogo).

Agora, definindo  $q \in \chi(M)$  por  $q = (\chi_1(\bar{z}), \chi_2(\bar{z}), -\chi_3(\bar{z}))$ , pelo item 1 do Lema 2.1, obtemos que

$$\begin{aligned} \overline{pq} &= q - p \\ &= (\chi_1(\bar{z}) - \chi_1(z), \chi_2(\bar{z}) - \chi_2(z), -\chi_3(\bar{z}) - \chi_3(z)) \\ &= (0, \chi_2(\bar{z}) - \chi_2(z), 0) \end{aligned}$$

intercepta  $l$  ortogonalmente e,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p + q) &= \frac{1}{2}(\chi_1(z) + \chi_1(\bar{z}), \chi_2(z) + \chi_2(\bar{z}), \chi_3(z) + \chi_3(\bar{z})) \\ &= (\chi_1(z), 0, 0) \end{aligned}$$

petence a  $l$ . A conclusão segue da Definição 2.3.

2. Análogo a 1.

□

Observe que neste teorema e também no lema anterior não assumimos que o domínio da superfície máxima seja simplesmente conexo. Contudo, estes resultados mostram, através do teorema de Uniformização, que se  $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma imersão máxima simplesmente conexa então toda reta de tipo espaço contida em  $\chi(M)$  é um eixo de simetria e todo plano de tipo tempo intersectando  $\chi(M)$  ortogonalmente é um plano de simetria.

## 2.3 Exemplos

Nesta seção examinaremos alguns exemplos conhecidos de imersões máximas em  $\mathbb{R}_1^3$  sob uma perspectiva diferente. Mais concretamente, iremos apresentá-los como soluções para um problema de Björling adequado. As superfícies que iremos mostrar aqui foram obtidas em [25] através da representação de Enneper-Weierstrass (veja também [29, 39]). Caracterizaremos estes exemplos nas Seções 3.1 e 3.2.

Inicialmente, mostraremos um caminho para gerar superfícies máximas começando com uma curva analítica de tipo espaço.

**Lema 2.2** *Seja  $\alpha(s) = (a(s), 0, b(s))$  uma curva analítica de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  contida no plano  $x_1x_3$ . Então existe uma única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  que intersecta ortogonalmente o plano  $x_1x_3$  ao longo de  $\alpha$ . Esta imersão máxima é dada explicitamente por*

$$\chi(z) = \left( \mathbf{Re} a(z), \mathbf{Im} \int_{s_0}^z \sqrt{[a'(w)]^2 - [b'(w)]^2} dw, \mathbf{Re} b(z) \right). \quad (2.7)$$

**Prova.** A aplicação de Gauss ao longo de  $\alpha$  de qualquer imersão máxima nas condições acima é ortogonal a  $\alpha'$  e  $e_2 = (0, 1, 0)$ . Então, revertendo a orientação se necessário, temos que

$$V(s) = N(s, 0) = \frac{\alpha' \wedge e_2}{|\alpha' \wedge e_2|},$$

e do Corolário 2.1 obtemos a existência e a unicidade desejada. Assim, temos

$$V(s) \wedge \alpha'(s) = - \left( 0, \frac{[a'(s)]^2 - [b'(s)]^2}{\sqrt{[a'(s)]^2 - [b'(s)]^2}}, 0 \right).$$

Substituindo na equação (2.1) da representação de Björling segue que

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \mathbf{Re} \left( \alpha(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw \right) \\ &= \left( \mathbf{Re} a(z), \mathbf{Re} \left( -i \int_{s_0}^z \sqrt{[a'(w)]^2 - [b'(w)]^2} dw \right), \mathbf{Re} b(z) \right) \\ &= \left( \mathbf{Re} a(z), \mathbf{Im} \int_{s_0}^z \sqrt{[a'(w)]^2 - [b'(w)]^2} dw, \mathbf{Re} b(z) \right). \end{aligned}$$

□

**Observação 2.5** Claramente aqui estamos considerando o ramo principal da função holomorfa raiz quadrada, definida em  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ . Note que  $\alpha$  será uma geodésica para esta superfície máxima sempre que ela tiver velocidade constante. Além disso, a recíproca é trivialmente satisfeita. Chamaremos qualquer curva deste gênero de *geodésica plana*.

**Exemplo 2.1** (Catenóide Hiperbólico)

Consideremos a curva de tipo espaço

$$\alpha(s) = A(s, 0, \cos(s - \theta)),$$

com  $A > 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , definida em  $(\theta - \pi/2, \theta + \pi/2)$ . Se para esta curva considerarmos o parâmetro  $u = s - \theta$ , então pelo Lema 2.2 obtemos uma superfície máxima que pode ser parametrizada como

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= A(u + \theta, \mathbf{Im} \operatorname{sen}(z), \mathbf{Re} \operatorname{cos}(z)) \\ &= A(u + \theta, \operatorname{cos}(u) \operatorname{senh}(v), \operatorname{cos}(u) \operatorname{cosh}(v)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Esta superfície está definida em  $\Omega = (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  e é denominada *catenóide hiperbólico* (veja a Figura 2.1). Para esta superfície observamos que

$$\begin{aligned}\chi_1(z) &= \chi_1(\bar{z}), \\ \chi_2(z) &= -\chi_2(\bar{z}), \\ \chi_3(z) &= \chi_3(\bar{z}),\end{aligned}$$

para  $z = u + iv$ , isto é, vale o segundo princípio de simetria citado no Teorema 2.3 (Figura 2.2).

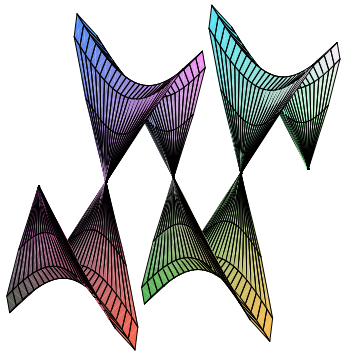


Figura 2.1:

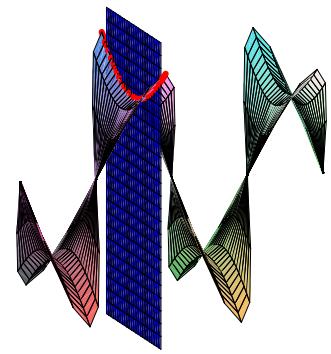


Figura 2.2:

**Observação 2.6** A expressão dada em (2.8) define a mesma superfície que foi apresentada em (2.3). De fato, fazendo a mudança bi-holomorfa  $u + iv \leftrightarrow t - is$  obtemos

$$\begin{aligned}\chi(t, -s) &= A(t + \theta, \cos(t)\sinh(-s), \cos(t)\cosh(-s)) \\ &= A(t + \theta, -\cos(t)\sinh(s), \cos(t)\cosh(s)).\end{aligned}$$

Em seguida, aplicando à  $\chi(t, -s)$  uma rotação Euclidiana de  $90^\circ$  em torno do eixo de tipo tempo  $(0,0,1)$  encontramos

$$R_3^{\pi/2}\chi(t, -s) = \zeta(s, t)$$

onde

$$\zeta(s, t) = A(\sinh(s)\cos(t), t + \theta, \cosh(s)\cos(t)),$$

o que mostra o desejado.

**Exemplo 2.2** (Catenóide Elíptico)

Consideremos a curva

$$\alpha(s) = A(\operatorname{senh}(s + \theta), 0, s),$$

$A > 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , definida para todo  $s > -\theta$ . Se escolhermos o parâmetro  $u = s + \theta$ , encontramos pelo Lema 2.2 uma superfície máxima dada por

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= A(\mathbf{Re} \operatorname{senh}(z), \mathbf{Im} \operatorname{cosh}(z), u - \theta) \\ &= A(\operatorname{senh}(u)\cos(v), \operatorname{senh}(u)\operatorname{sen}(v), u - \theta), \end{aligned}$$

definida para todo  $u + iv$  com  $u > 0$ . Esta superfície é chamada *catenóide elíptico* (veja Figura 2.3). Para este exemplo, também verificamos que

$$\begin{aligned} \chi_1(z) &= \chi_1(\bar{z}), \\ \chi_2(z) &= -\chi_2(\bar{z}), \\ \chi_3(z) &= \chi_3(\bar{z}), \end{aligned}$$

ou seja, vale o segundo princípio de simetria citado no Teorema 2.3, onde uma ilustração geométrica é apresentada na Figura 2.4.

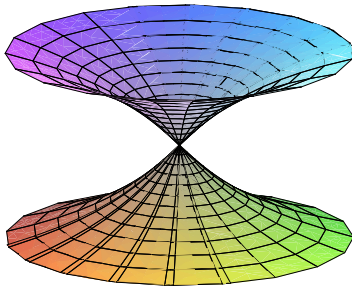


Figura 2.3:

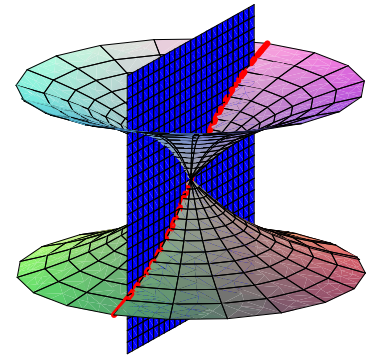


Figura 2.4:

Para o próximo exemplo, afim de simplificarmos os cálculos introduziremos o *referencial canônico nulo* de  $\mathbb{R}_1^3$  dado por

$$\mathcal{F} = \left\{ (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), (0, 1, 0) \right\}. \quad (2.9)$$



É fácil verificar que se  $a, b \in \mathbb{R}_1^3$  são dados em coordenadas com respeito à  $\mathcal{F}$  por  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$ , então  $a \wedge b = (a_3b_1 - a_1b_3, a_2b_3 - a_3b_2, a_1b_2 - a_2b_1)$  e  $\langle a, a \rangle_1 = 2a_1a_2 + a_3^2$ .

Consideremos agora uma curva analítica de tipo espaço  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s))$  no plano  $x_1x_3$ . Com recursos de álgebra linear, se escrevermos

$$(\alpha_1(s), 0, \alpha_3(s)) = a(s) \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + b(s) \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + c(s)(0, 1, 0),$$

então após igualarmos os termos correspondentes encontramos

$$\begin{aligned} a(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(s) + \alpha_3(s)), \\ b(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_1(s) - \alpha_3(s)), \\ c(s) &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dessa forma, expressamos  $\alpha(s)$  com respeito à  $\mathcal{F}$  por  $\bar{\alpha}(s) = (a(s), b(s), c(s))$ , sendo  $a(s)$ ,  $b(s)$  e  $c(s)$  dados conforme (2.10).

Então, via uma variação do Lema 2.2, podemos construir a única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  que contém  $\bar{\alpha}$  como uma geodésica plana, ou seja, visto que  $e_2 = (0, 1, 0)$  com respeito à  $\mathcal{F}$  é dado por  $\bar{e}_2 = (0, 0, 1)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{V}(s) = \bar{N}(s, 0) &= \frac{\bar{\alpha}' \wedge \bar{e}_2}{|\bar{\alpha}' \wedge \bar{e}_2|}(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\langle \bar{\alpha}' \wedge \bar{e}_2, \bar{\alpha}' \wedge \bar{e}_2 \rangle_1|}}(-a', b', 0)(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|2(-a')b'|}}(-a', b', 0)(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a'b'}}(-a', b', 0)(s), \end{aligned}$$

pois como a curva  $\bar{\alpha}(s)$  é de tipo espaço, temos  $\langle \bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}'(s) \rangle_1 = 2a'(s)b'(s) > 0$ . Daí,

$$\bar{V}(s) \wedge \bar{\alpha}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2a'b'}}(0, 0, -2a'b')(s),$$

e segue da fórmula (2.1) na representação de Björling que esta imersão máxima é dada

com respeito à  $\mathcal{F}$  por

$$\begin{aligned}\chi(s, t) &= \mathbf{Re} \left( \bar{\alpha}(z) + i \int_{s_0}^z \bar{V}(w) \wedge \bar{\alpha}'(w) dw \right) \\ &= \left( \mathbf{Re} a(z), \mathbf{Re} b(z), \mathbf{Re} \left( -i \int_{s_0}^z \sqrt{2a'(w)b'(w)} dw \right) \right) \\ &= \left( \mathbf{Re} a(z), \mathbf{Re} b(z), \mathbf{Im} \int_{s_0}^z \sqrt{2a'(w)b'(w)} dw \right).\end{aligned}\quad (2.11)$$

**Exemplo 2.3** (Catenóide Parabólico)

Seja agora

$$\alpha(s) = A \left( s + B, \frac{1}{6}s^3 + \frac{B}{2}s^2 + \frac{B^2}{2}s, 0 \right)$$

com respeito à estrutura canônica nula de  $\mathbb{R}_1^3$ , onde  $A > 0$ ,  $B \in \mathbb{R}$  e  $s > -B$ . Assim  $\alpha$  é uma curva real analítica de tipo espaço que está contida no plano  $x_1x_3$ . Aplicando 2.11, mostramos que a única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  contendo  $\alpha$  como uma geodésica plana é dada em coordenadas com respeito à  $\mathcal{F}$  por

$$\chi(s, t) = A \left( s + B, -\frac{t^2}{2}(s + B) + \frac{s^3}{6} + \frac{B}{2}s^2 + \frac{B^2}{2}s, t(s + B) \right), \quad (2.12)$$

e está definida sempre que  $s > -B$ . Esta superfície máxima é chamada um *catenóide parabólico* (veja Figura 2.5).

Seguindo a ideia dos exemplos anteriores, verificamos que vale o segundo princípio de simetria citado no Teorema 2.3 (veja Figura 2.6).

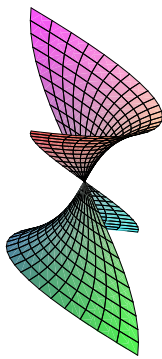


Figura 2.5:

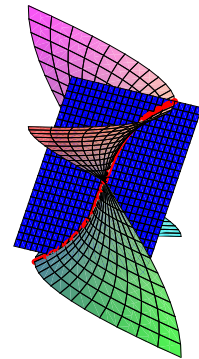


Figura 2.6:

**Observação 2.7** Em [25] o catenóide hiperbólico (respectivamente catenóide elíptico, catenóide parabólico) é chamado o catenóide do segundo tipo (respectivamente catenóide

do primeiro tipo, superfície de Enneper do segundo tipo). Os nomes que usamos aqui são inspirados em [22], onde os grupos a 1-parâmetro de transformações ortogonais de  $\mathbb{R}_1^3$  fixando um eixo  $l$  são chamados movimentos hiperbólicos, elípticos ou parabólicos, de acordo com a característica do eixo ser de tipo espaço, de tipo tempo, ou de tipo luz.

Também observamos que a expressão para o catenóide parabólico que apresentamos é um pouco mais complicada que as expressões que aparecem em [25, 29], mas este é o preço que temos que pagar para uma importante vantagem: a imersão 2.12 é conforme. Isto não ocorre com as parametrizações usuais do catenóide parabólico.

**Exemplo 2.4** (Helicóide do primeiro tipo)

Para este exemplo escolhemos as condições no problema de Björling como

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s, 0, 0), \\ V(s) &= -\frac{1}{\sqrt{k^2s^2 - 1}}(0, 1, ks),\end{aligned}$$

onde  $k > 0$  e  $s > 1/k$ . Fazendo a mudança de parâmetros dada por  $ks = \cosh(u)$ ,  $u > 0$ , então  $\alpha$  e  $V$  tornam-se

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= ((1/k)\cosh(u), 0, 0) \\ V(u) &= -\frac{1}{\sinh(u)}(0, 1, \cosh(u)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha(u) + i \int_0^z V(w) \wedge \alpha'(w) dw = \frac{1}{k}(\cosh(u), -i\sinh(u), -iu).$$

Seguindo o procedimento descrito no texto precedente ao Corolário 2.1, podemos construir a solução deste problema de Björling, obtendo

$$\chi(w) = \frac{1}{k}(\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), v), \quad (2.13)$$

definida para todo  $w = u + iv$  com  $u \neq 0$ . Chamaremos esta superfície um *helicóide do primeiro tipo* (veja Figura 2.7).

Note que o primeiro princípio de simetria citado no Teorema 2.3 é satisfeito para esta superfície, conforme ilustramos na Figura 2.8.

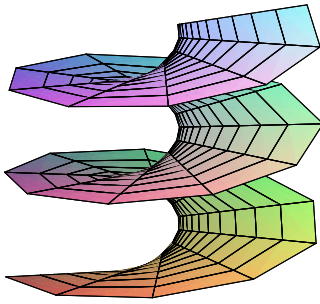


Figura 2.7:

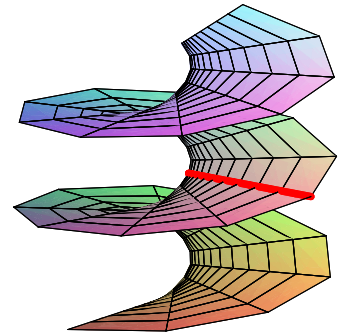


Figura 2.8:

**Exemplo 2.5** (Helicóide do segundo tipo)

Agora consideraremos o problema de Björling com as condições  $\alpha$ ,  $V$ , definidas como

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s, 0, 0), \\ V(s) &= -\frac{1}{\sqrt{1-k^2s^2}}(0, ks, 1),\end{aligned}$$

onde  $k > 0$  e  $|s| < 1/k$ . Se desta vez fizermos a mudança de parâmetros  $ks = \text{sen}(u)$  encontramos, seguindo as etapas do problema anterior, que

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \frac{1}{k}(\text{sen}(u), 0, 0), \\ V(u) &= -\frac{1}{\cos(u)}(0, \text{sen}(u), 1).\end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha(u) + i \int_0^u V(w) \wedge \alpha'(w) dw = \frac{1}{k}(\text{sen}(u), -iu, i\cos(u)).$$

A superfície máxima encontrada destas condições é parametrizada por

$$\chi(w) = \frac{1}{k}(\text{sen}(u)\cosh(v), v, \text{sen}(u)\sinh(v)),$$

onde  $\chi$  está definida na faixa aberta  $-\pi/2 < \mathbf{Re} w < \pi/2$ . Esta superfície é chamada um *helicóide do segundo tipo* (veja Figura 2.9).

Para este exemplo vale o primeiro princípio de simetria citado no Teorema 2.3 (veja Figura 2.10).

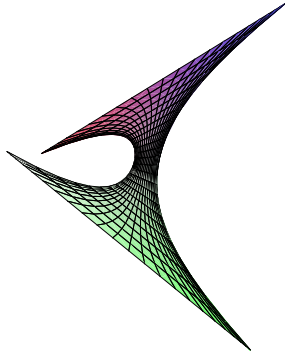


Figura 2.9:

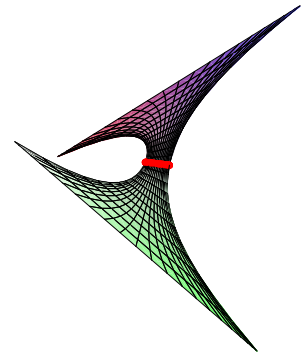


Figura 2.10:

**Exemplo 2.6** (Superfície regrada de Cayley)

Desta vez escolhemos

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s, 0, 0), \\ V(s) &= \frac{1}{\sqrt{1+2ks}}(0, ks, 1+ks),\end{aligned}$$

onde  $k \neq 0$ , definida sempre que  $1+2ks > 0$ . Considerando a mudança de parâmetro  $u^2 = 1+2ks$ ,  $u > 0$ , temos

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \frac{1}{2k}(u^2 - 1, 0, 0), \\ V(u) &= \frac{1}{2u}(0, u^2 - 1, u^2 + 1).\end{aligned}$$

Assim, a integral de linha usual é dada por

$$\alpha(u) + i \int_0^u V(w) \wedge \alpha'(w) dw = \frac{1}{6k}(3u^2 - 3, iu(u^2 + 3), iu(u^2 - 3)).$$

Daqui obtemos uma superfície máxima parametrizada por

$$\chi(u, v) = \frac{1}{6k}(3u^2 - 3v^2 - 3, v^3 - 3u^2v - 3v, v^3 - 3u^2v + 3v),$$

definida sempre que  $u > 0$ . Seguindo [15] chamaremos esta superfície de *superfície regrada de Cayley* (veja Figura 2.11). Devemos dizer que em [25] a superfície regrada de Cayley é chamada *a conjugada da superfície de Enneper do segundo tipo*.

Note o primeiro princípio de simetria citado no Teorema 2.3 (veja Figura 2.12).

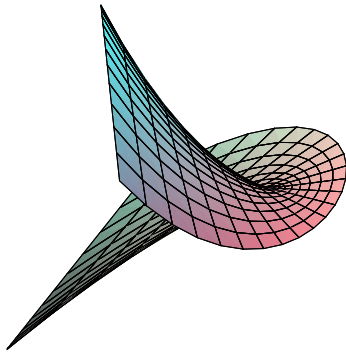


Figura 2.11:

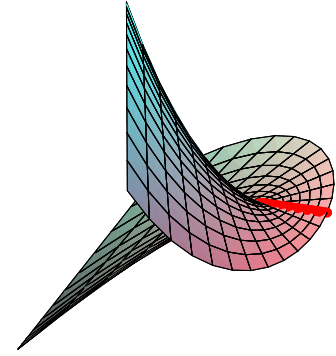


Figura 2.12:

**Observação 2.8** Antes de passarmos para o próximo capítulo, vamos fazer alguns comentários sobre a nomenclatura dos helicóides aqui mencionados.

Definimos um *movimento helicoidal Lorentziano* como qualquer grupo não-trivial a 1-parâmetro de *transformações Lorentzianas*. Por casos triviais entendemos *grupos de translação pura*. O seguinte fato classifica todos tais grupos a 1-parâmetro de transformações Lorentzianas, justificando tal definição:

*A menos de conjugação no grupo de todos os movimentos Lorentzianos, os seguintes três casos cobrem todos os possíveis subgrupos não-triviais a 1-parâmetro de movimentos Lorentzianos em  $\mathbb{R}_1^3$ :*

$$x \mapsto R_1^s x + T_1,$$

$$x \mapsto R_2^s x + T_2,$$

$$x \mapsto R_3^s x + T_3,$$

onde  $T_1 = h(0, s, 0)^t$ ,  $T_2 = h(\frac{s^3}{3} + s, \frac{s^3}{3} - s, s^2)^t$  e  $T_3 = h(0, 0, s)^t$ ,  $s \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}_1^3$ .

Em todos os casos, a parte linear ( $h = 0$ ) é uma rotação Lorentziana, cujo eixo é de tipo espaço no primeiro caso, de tipo luz no segundo caso e de tipo tempo no terceiro caso. Por definição, uma *superfície regrada helicoidal* é a órbita de uma reta sob a ação de um grupo a 1-parâmetro de movimentos helicoidais Lorentzianos.

Portanto, dependendo do caráter causal do eixo, existem três tipos diferentes de superfícies helicoidais, onde referimos ao helicóide do primeiro tipo (resp. helicóide do segundo tipo) como o helicóide com eixo de tipo tempo (resp. helicóide com eixo de tipo espaço). O segundo tipo de movimento helicoidal é chamado de *movimento*

*helicoidal cúbico.*

Afim de não sermos prolixos, omitiremos a demonstração do fato anterior, o que nos possibilitará um enfoque maior no objetivo principal deste trabalho. No entanto, o leitor interessado numa justificativa de tal afirmação poderá consultar [15], por exemplo.

No próximo capítulo, entre outras coisas classificaremos as superfícies regradas via um problema de Björling adequado.

# Capítulo 3

## Teoremas de Classificação

Em contraste com o caso de superfícies mínimas no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , onde uma superfície mínima de rotação (respectivamente superfície mínima regrada) é localmente congruente a um catenóide (respectivamente um helicóide), existem vários tipos de superfícies máximas de rotação ou regradas no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$ . Neste capítulo voltaremos nossa atenção a este estudo.

### 3.1 Superfícies máximas de revolução

**Definição 3.1** Uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  é uma *superfície de revolução* se ela pode ser obtida pela ação sobre uma curva plana  $\alpha \subset \Pi$  do grupo a 1-parâmetro de movimentos rígidos de  $\mathbb{R}_1^3$  que fixa um certo eixo  $l \subset \Pi$  tal que  $\alpha \cap l = \emptyset$ .

É conveniente notarmos que neste caso o plano  $\Pi$  é sempre de tipo tempo, pois a aplicação normal de Gauss da superfície ao longo de  $\alpha$ ,  $N(\alpha(s))$ , pertence a  $\Pi$ . Daí, toda superfície de revolução em  $\mathbb{R}_1^3$  é congruente a uma superfície de revolução para o qual  $\Pi$  é o plano  $x_1x_3$  e  $l$  é o eixo  $x_1 = [(1, 0, 0)]$ , o eixo  $x_3 = [(0, 0, 1)]$  ou a reta  $x_1 = x_3 = [(1, 0, 1)]$ , dependendo da característica causal de  $l$ . Assim, a menos de movimento rígido de  $\mathbb{R}_1^3$ , toda superfície de revolução em  $\mathbb{R}_1^3$  deve ser de um dos três tipos que especificamos a seguir (veja [22, 29]).



1. Se  $l$  é o eixo  $x_1$  e  $\alpha(s) = (a(s), 0, b(s))$ , a superfície é parametrizada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(s) \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(s) \\ b(s)\sinh(t) \\ b(s)\cosh(t) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\chi(s, t) = (a(s), b(s)\sinh(t), b(s)\cosh(t)). \quad (3.1)$$

Aqui a condição  $\alpha \cap l = \emptyset$  implica que  $b(s) \neq 0$  para todo  $s$ .

2. Se  $l$  é o eixo  $x_3$  e  $\alpha(s) = (a(s), 0, b(s))$ , a superfície é parametrizada por

$$R_3^t(a(s), 0, b(s))^t = (a(s)\cos(t), a(s)\sin(t), b(s))^t,$$

isto é,

$$\chi(s, t) = (a(s)\cos(t), a(s)\sin(t), b(s)). \quad (3.2)$$

Desta vez  $\alpha \cap l = \emptyset$  assegura que  $a(s) \neq 0$  para todo  $s$ .

3. Se  $l = [(1, 0, 1)]$ , uma parametrização da superfície com respeito à estrutura canônica nula  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{R}_1^3$  dada em (2.9) é

$$\chi(s, t) = (a(s), -(t^2/2)a(s) + b(s), ta(s)). \quad (3.3)$$

Onde  $\alpha$  é escrita em coordenadas com respeito à  $\mathcal{F}$  como  $\alpha(s) = (a(s), b(s), 0)$ , e obtemos de  $\alpha \cap l = \emptyset$  que  $a(s) \neq 0$  para todo  $s$ .

Além disso, facilmente vemos que em qualquer um destes casos podemos escolher o parâmetro da curva  $\alpha$  de tal modo que a imersão  $\chi(s, t)$  seja conforme.

Por exemplo, se assumimos que o eixo  $l$  é o eixo  $x_1$  e a superfície de revolução é dada por (3.1), então

$$\begin{aligned} \langle \chi_s, \chi_s \rangle_1 &= [a'(s)]^2 - [b'(s)]^2, \\ \langle \chi_s, \chi_t \rangle_1 &= 0, \\ \langle \chi_t, \chi_t \rangle_1 &= b^2(s), \end{aligned}$$

onde a primeira forma fundamental da superfície é escrita como

$$\mathbf{I} = |\alpha'(s)|^2 ds^2 + b^2(s) dt^2.$$

Assim a reparametrização de  $\alpha(s)$  dada por

$$u = u(s) = \int_{s_0}^s \left| \frac{\alpha'(w)}{b(w)} \right| dw$$

faz a relação

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)| &= |\alpha'(u(s))u'(s)| \\ &= |\alpha'(u(s))| |u'(s)| \\ &= |\alpha'(u(s))| \frac{|\alpha'(s)|}{|b(u(s))|}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\alpha'(u)|^2 = b^2(u)$$

valer, e assim temos uma parametrização conforme  $\chi(u, t)$  globalmente definida para a nossa superfície de revolução.

Analogamente, se a superfície de revolução é dada por (3.2), a primeira forma fundamental da superfície é expressa como

$$\mathbf{I} = |\alpha'(s)|^2 ds^2 + a^2(s) dt^2,$$

onde desta vez a reparametrização de  $\alpha(s)$  dada por

$$u = u(s) = \int_{s_0}^s \left| \frac{\alpha'(w)}{a(w)} \right| dw$$

faz a relação

$$|\alpha'(u)|^2 = a^2(u)$$

valer e, conseqüentemente, temos uma parametrização conforme  $\chi(u, t)$  globalmente definida para a nossa superfície de revolução.

Finalmente, se agora considerarmos a superfície de revolução dada por (3.3), encontramos

$$\mathbf{I} = |\alpha'(s)|^2 ds^2 + a^2(s) dt^2,$$

onde desta vez a reparametrização de  $\alpha(s)$  dada por

$$u = u(s) = \int_{s_0}^s \left| \frac{\alpha'(w)}{a(w)} \right| dw$$

faz a relação

$$2a'(u)b'(u) = |\alpha'(u)|^2 = a^2(u)$$

valer e, conseqüentemente, temos uma parametrização conforme  $\chi(u, t)$  globalmente definida para a nossa superfície de revolução.

Vamos agora classificar as superfícies máximas de revolução em  $\mathbb{R}_1^3$ . Inicialmente, consideremos uma superfície máxima de revolução do primeiro tipo, isto é, parametrizada por uma imersão conforme  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  dada pela fórmula (3.1). Note que o plano  $x_1x_3$  intersecta a superfície ortogonalmente ao longo da curva  $\alpha(s) = \chi(s, 0) = (a(s), 0, b(s))$ . Portanto,  $N(s, 0) \wedge \alpha'(s)$  é colinear com  $e_2 = (0, 1, 0)$  e segue da equação (2.7) dada no Lema 2.2 que as extensões holomorfas  $a(z)$  e  $b(z)$  das funções analíticas  $a(s)$  e  $b(s)$  satisfazem, respectivamente,

$$\mathbf{Re} a(z) = a(s) \quad \text{e} \quad \mathbf{Re} b(z) = b(s)\cosh(t).$$

Note que, sendo  $\chi$  conforme, podemos escrever  $z = s+it$ , onde  $s, t$  são os parâmetros da imersão  $\chi$ . Dessa forma, as equações de Cauchy-Riemann para  $a(z)$  são expressas como

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{Im} a(z) &= \partial_s \mathbf{Re} a(z), \\ \partial_s \mathbf{Im} a(z) &= -\partial_t \mathbf{Re} a(z). \end{aligned}$$

Substituindo  $\mathbf{Re} a(z) = a(s)$  nestas equações, concluímos que  $a(s) = As + B$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes. Analogamente, como  $\mathbf{Re} b(z) = b(s)\cosh(t)$ , das equações de Cauchy-Riemann para  $b(z)$  obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{Im} b(z) &= \partial_s (b(s)\cosh(t)) = b'(s)\cosh(t), \\ \partial_s \mathbf{Im} b(z) &= -\partial_t (b(s)\cosh(t)) = -b(s)\sinh(t). \end{aligned}$$

Derivando em  $s$  o resultado da integração em  $t$  da primeira equação e, em seguida, substituindo a expressão resultante na segunda equação, encontramos

$$b''(s) + b(s) = 0,$$

cuja solução é dada por  $b(s) = C_1 \cos(s) + C_2 \sin(s)$ , para  $C_1$  e  $C_2$  constantes. Portanto, a curva  $\alpha(s)$  procurada é da forma

$$\alpha(s) = (As + B, 0, C_1 \cos(s) + C_2 \sin(s)).$$

Neste ponto deduzimos da condição  $|\alpha'(s)|^2 = b^2(s)$  que  $C_1^2 + C_2^2 = A^2$ , significando que existe um certo  $\theta \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $C_1 = A\cos(\theta)$  e  $C_2 = A\sin(\theta)$ . Daí,

$$\begin{aligned} b(s) &= C_1\cos(s) + C_2\sin(s) \\ &= A\cos(\theta)\cos(s) + A\sin(\theta)\sin(s) \\ &= A\cos(s - \theta), \end{aligned}$$

para este  $\theta$  particular. Logo,

$$\alpha(s) = A(s + B_1, 0, \cos(s - \theta)),$$

onde compondo, se necessário, com uma simetria com respeito à origem podemos supor que  $A > 0$ , e uma aplicação direta do Lema 2.2 mostra que a superfície é, a menos de uma translação na direção do eixo  $x_1$ , uma pedaço do catenóide hiperbólico, como visto no Exemplo 2.1.

Agora considere uma superfície máxima de revolução do segundo tipo, ou seja, dada por uma imersão conforme  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ . Com o mesmo procedimento usado anteriormente, na fórmula (3.2) a função  $b(s)$  é linear,  $b(s) = As + B$  com  $A > 0$ , enquanto que  $a(s) = A\sinh(s + \theta)$  para um certo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Portanto,

$$\alpha(s) = A(\sinh(s + \theta), 0, s + B_1)$$

e a superfície resultante é um pedaço do catenóide elíptico dado no Exemplo 2.2.

Para o terceiro e último caso, iniciamos com uma superfície máxima parametrizada por uma imersão conforme  $\chi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  do tipo (3.3). Observemos que o plano  $x_1x_2$  (isto é, o plano  $x_1x_3$  com relação à  $\mathcal{F}$ ) intersecta a superfície ortogonalmente ao longo de  $\alpha(s) = \chi(s, 0) = (a(s), b(s), 0)$ . Além disso, temos

$$\begin{aligned} N(s, 0) \wedge \alpha'(s) &= \frac{(a'(s), -b'(s), 0)}{|(a'(s), -b'(s), 0)|} \wedge (a'(s), b'(s), 0) \\ &= \frac{(a'(s), -b'(s), 0)}{\sqrt{2a'(s)b'(s)}} \wedge (a'(s), b'(s), 0) \\ &= (0, 0, \pm\sqrt{2a'(s)b'(s)}) \end{aligned}$$

ao longo de  $\alpha$ , onde o sinal é dado conforme  $a(s)$  seja positivo ou negativo. Logo, a superfície admite a representação de Björling

$$\chi(z) = \left( \mathbf{Re} a(z), \mathbf{Re} b(z), \mp \mathbf{Im} \int_{s_0}^z \sqrt{2a'(w)b'(w)} dw \right)$$

com respeito à  $\mathcal{F}$  e seguindo as notações usuais. Comparando esta fórmula com (3.3) temos

$$\mathbf{Re} a(z) = a(s) \quad \text{e} \quad \mathbf{Re} b(z) = -(t^2/2)a(s) + b(s).$$

Novamente, como  $\chi$  é conforme,  $z = s + it$  e por meio das equações de Cauchy-Riemann encontramos

$$\begin{aligned} a(s) &= A(s + B) \text{ e} \\ b(s) &= A \left( \left( \frac{1}{6} \right) s^3 + \frac{B}{2} s^2 + Cs \right). \end{aligned}$$

Além disso, da condição de conformidade, temos  $2a'(s)b'(s) = a^2(s)$ , donde obtemos  $2C = B^2$  e aplicando o Lema 2.2, mostramos que a superfície é um pedaço do catenóide parabólico, conforme Exemplo 2.3.

Resumindo, escolhendo uma representação de Björling adequada temos provado, de modo alternativo, o seguinte fato conhecido ([25, 29]).

**Proposição 3.1** *As únicas superfícies máximas de revolução em  $\mathbb{R}_1^3$  com eixo de tipo espaço (respectivamente eixo de tipo tempo, eixo de tipo luz) são congruentes a um pedaço do catenóide hiperbólico (respectivamente catenóide helíptico, catenóide parabólico).*

## 3.2 Superfícies máximas regradas

Uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  é uma *superfície regrada* se ela pode ser vista como gerada pelo movimento de um segmento ou uma curva no espaço  $\mathbb{R}_1^3$ . Precisamente temos:

**Definição 3.2** Diz-se que uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  é uma *superfície regrada* se ela pode ser expressa como uma aplicação da forma

$$\begin{aligned} \psi : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (s, r) &\mapsto \gamma(s) + r\nu(s), \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo um certo intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma curva de tipo espaço sobre a superfície, chamada *curva base* (ou *diretriz*) e  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é um campo de vetores unitários de tipo espaço ao longo de  $\gamma$ .

**Exemplo 3.1** Com a definição acima a superfície regradada de Cayley é, de fato, uma superfície regradada de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$ . Basta considerarmos as expressões de  $\gamma$  e  $\nu$  dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \frac{1}{6k}(3s^2 + 3r^2 - 3, -2r^3, -2r^3), \\ \nu(s) &= \frac{1}{6k}(-6r, 3r^2 - 3s^2 - 3, 3r^2 - 3s^2 + 3),\end{aligned}$$

substituírmos na relação 3.4 e compararmos com a parametrização encontrada no Exemplo 2.6.

Como no espaço Euclidiano, podemos escolher sobre qualquer superfície regradada uma curva base conveniente  $\alpha(s)$ ,  $s \in I$ , tal que a superfície regradada possa ser denotada por  $\chi(s, t) = \alpha(s) + t\nu(s)$ , onde o novo domínio de definição  $\hat{D}$  também contém  $I$  e as relações  $\langle \alpha', \nu \rangle_1 \equiv 0$ ,  $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 \equiv 1$  identicamente valem sobre  $I$ .

Além disso, se para uma superfície regradada dada em (3.4) o vetor  $\nu'$  é sempre de tipo tempo ou, alternativamente, o mesmo é de tipo espaço e não-nulo, podemos supor a existência de uma curva parametrizada  $\alpha(s)$  tal que  $\langle \alpha'(s), \nu'(s) \rangle_1 = 0$ ,  $s \in I$ , e que o traço de  $\alpha$  esteja contido no traço de  $\psi$ , isto é,

$$\alpha(s) = \gamma(s) + t(s)\nu(s), \quad (3.5)$$

para alguma função a valores reais  $t = t(s)$ ,  $s \in I$ .

Assim, da equação (3.5) e omitindo o parâmetro  $s$  por conveniência obtemos,

$$\alpha' = \gamma' + t'\nu + t\nu';$$

como  $\langle \nu, \nu' \rangle_1 = 0$ ,

$$0 = \langle \alpha', \nu' \rangle_1 = \langle \gamma', \nu' \rangle_1 + t \langle \nu', \nu' \rangle_1,$$

isto é,  $t = t(s)$  é dada por

$$t(s) = -\frac{\langle \gamma'(s), \nu'(s) \rangle_1}{\langle \nu'(s), \nu'(s) \rangle_1} \quad (3.6)$$

$s \in I$ . Logo, definimos  $\alpha$  pelas equações (3.5) e (3.6).

**Observação 3.1** Chamamos a curva  $\alpha$  de *linha de estrição* da superfície regradada.

É importante notar que a curva  $\alpha$  não depende da escolha da curva base  $\gamma$  para a superfície regradada, pois, para qualquer que seja  $\bar{\gamma}$  uma outra diretriz de uma tal superfície, vale para todo  $(s, r) \in D$ ,

$$\psi(s, r) = \gamma(s) + r\nu(s) = \bar{\gamma} + \sigma(s)\nu(s) \quad (3.7)$$

para alguma função  $\sigma = \sigma(s)$ . Daí, segue das equações (3.5) e (3.6) que

$$\alpha - \bar{\alpha} = (\gamma - \bar{\gamma}) + \frac{\langle \bar{\gamma}' - \gamma', \nu' \rangle_1}{\langle \nu', \nu' \rangle_1} \nu,$$

onde  $\bar{\alpha}$  é a linha de estrição correspondendo à curva base  $\bar{\gamma}$ . Por outro lado, da equação (3.7) temos

$$\gamma - \bar{\gamma} = (\sigma - r)\nu,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \alpha - \bar{\alpha} &= \left\{ (\sigma - r) + \frac{\langle (r - \sigma)\nu', \nu' \rangle_1}{\langle \nu', \nu' \rangle_1} \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto conclui nossa afirmação.

Dessa forma, tomaremos a linha de estrição como sendo a curva base da superfície regradada e denotaremos a superfície da seguinte forma

$$\chi(s, t) = \alpha(s) + t\nu(s),$$

$(s, t) \in \hat{D}$ . Como  $\langle \nu', \nu \rangle_1 \equiv 0$  e  $\langle \nu', \alpha' \rangle_1 \equiv 0$ , concluímos que  $\alpha' \wedge \nu = \lambda \nu'$  para alguma função  $\lambda = \lambda(s)$ , donde

$$\langle \chi_s \wedge \chi_t, \chi_s \wedge \chi_t \rangle_1 = (\lambda^2 - t^2) \langle \nu', \nu' \rangle_1, \quad (3.8)$$

e observemos que  $\lambda := \frac{\langle \alpha' \wedge \nu, \nu' \rangle_1}{\langle \nu', \nu' \rangle_1}$  (denominado *parâmetro de distribuição* da superfície regradada).

**Observação 3.2** Na expressão (3.8), se  $\nu'$  é de tipo espaço então  $\lambda^2 < t^2$  e, dessa forma,  $t$  nunca se anula. Assim,  $\alpha$  não está sobre a superfície. Todavia, se  $\nu'$  é de tipo tempo temos  $t^2 < \lambda^2$  e a linha de estrição está sobre a superfície, uma vez que podemos fazer  $t = 0$ .

Considerando estes resultados, caracterizaremos superfícies máximas regradas em  $\mathbb{R}_1^3$  expondo-as como solução para um certo problema de Björling.

**Teorema 3.1** *Qualquer superfície máxima regradada  $\psi(s, r) = \gamma(s) + r\nu(s)$  em  $\mathbb{R}_1^3$  é congruente a um pedaço de uma das seguintes superfícies:*

- (a) *um plano de tipo espaço;*
- (b) *um helicóide do primeiro tipo;*
- (c) *um helicóide do segundo tipo;*
- (d) *uma superfície regradada de Cayley.*

**Observação 3.3** As superfícies não-planares do teorema acima foram apresentadas nos Exemplos 2.4, 2.5 e 2.6, respectivamente.

**Prova.** Inicialmente consideremos o caso no qual  $\nu'(s_0) = 0$  para um certo  $s_0 \in I$ . Então, a aplicação de Gauss

$$\begin{aligned} N(s_0, r) &= \frac{\psi_s \wedge \psi_r}{|\psi_s \wedge \psi_r|}(s_0, r) \\ &= \frac{(\gamma' \wedge \nu)}{|\gamma' \wedge \nu|}(s_0) \end{aligned}$$

é constante para todo  $r$ , e assim podemos assumir que  $N(s_0, r) = (0, 0, 1)$ . Podemos também supor que a reta  $r \mapsto \psi(s_0, r)$  está contida no eixo  $x_1$ . Portanto, a superfície regradada obtida da representação de Björling com as condições

$$\begin{aligned} \beta(r) &= (\beta_1(r), 0, 0) \\ V(r) &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

descreve um subconjunto do plano  $x_1x_2$ . E a superfície regradada resultante é congruente a um pedaço de um plano de tipo espaço, verificando o item (a).

Agora, suponhamos que  $\nu'(s_0)$  é de tipo luz para algum  $s_0 \in I$ , e expressemos a superfície como

$$\chi(s, t) = \alpha(s) + t\nu(s),$$

com  $\langle \alpha', \nu \rangle_1 \equiv 0$  e  $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 \equiv 1$ . Então, no ponto  $(s_0, t)$ ,

$$\begin{aligned} \det \langle \cdot, \cdot \rangle_1 &= \det \begin{pmatrix} \langle \chi_s, \chi_s \rangle_1 & \langle \chi_s, \chi_t \rangle_1 \\ \langle \chi_s, \chi_t \rangle_1 & \langle \chi_t, \chi_t \rangle_1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + 2t \langle \alpha', \nu' \rangle_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2t \langle \alpha', \nu' \rangle_1 \end{aligned}$$



e, além disso,  $\langle \nu' \wedge \nu, \alpha' \wedge \nu \rangle_1(s_0) = -\langle \alpha', \nu' \rangle_1(s_0)$ . Daqui, denotando  $\langle \alpha', \nu' \rangle_1(s_0) = c$ , concluímos que

$$N(s_0, t) = \frac{(\alpha' \wedge \nu)(s_0) + t(\nu' \wedge \nu)(s_0)}{\sqrt{1 + 2ct}} \quad \text{e} \quad N(s_0, 0) = (\alpha' \wedge \nu)(s_0),$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} \langle N(s_0, t), N(s_0, 0) \rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2ct}} \langle (\alpha' \wedge \nu)(s_0) + t(\nu' \wedge \nu)(s_0), (\alpha' \wedge \nu)(s_0) \rangle_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2ct}} [\langle \alpha' \wedge \nu, \alpha' \wedge \nu \rangle_1 + t \langle \nu' \wedge \nu, \alpha' \wedge \nu \rangle_1] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2ct}} [(\langle \nu, \alpha' \rangle_1)^2 - \langle \alpha', \alpha' \rangle_1 \langle \nu, \nu \rangle_1 - tc] \\ &= -\frac{1 + ct}{\sqrt{1 + 2ct}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

Podemos assumir que  $N(s_0, 0) = (0, 0, 1)$  e que  $L_t : t \mapsto \chi(s_0, t)$  parametriza o eixo  $x_1$ .

Daí, se  $N(s_0, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2ct}}(x_1, x_2, x_3)$ , então de (3.9) temos que

$$\left\langle \frac{(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{1 + 2ct}}, (0, 0, 1) \right\rangle_1 = -\frac{1 + ct}{\sqrt{1 + 2ct}},$$

o que implica em  $x_3 = 1 + ct$ . E como  $N(s_0, t)$  é ortogonal a  $L_t$ , também obtemos  $x_1 = 0$ . Por último,  $\langle N, N \rangle_1 \equiv -1$  fornece

$$\begin{aligned} -1 &= \langle N(s_0, t), N(s_0, t) \rangle_1 \\ &= \frac{x_2^2 - (1 + ct)^2}{1 + 2ct}, \end{aligned}$$

o que nos dá  $x_2 = ct$ . Logo,

$$N(s_0, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2ct}}(0, ct, 1 + ct)$$

e  $L_t$  é dada por  $\beta(t) = (t, 0, 0)$ , novamente compondo se necessário com uma adequada transformação ortogonal de  $\mathbb{R}_1^3$  fixando o eixo  $x_3$ . Assim, sabemos que nossa superfície regradada é a solução para o problema de Björling com as condições

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (t, 0, 0), \\ V(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2ct}}(0, ct, 1 + ct), \end{aligned}$$

o que significa que a superfície é congruente a um pedaço de uma superfície regradada de Cayley, onde mostramos (d).

Agora, assumamos que  $\nu'(s)$  é de tipo tempo para todo  $s \in I$ . Então podemos escrever a superfície como  $\chi(s, t) = \alpha(s) + t\nu(s)$ , onde  $\alpha$  a linha de estrição. Se denotarmos por  $N(s, t)$  a aplicação de Gauss da nossa superfície regradada, por um cálculo semelhante ao anterior temos da equação (3.8) que

$$\langle N(s_0, t), N(s_0, 0) \rangle_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 - c^2 t^2}}, \quad (3.10)$$

onde  $s_0 \in I$ ,  $c = 1/\lambda(s_0)$  e  $\lambda$  é o parâmetro de distribuição. Além disso, podemos supor novamente que  $N(s_0, 0) = (0, 0, 1)$  e que a reta  $L_t : t \mapsto \chi(s_0, t)$  parametriza o eixo  $x_1$ . Então, da equação (3.10) juntamente com a relação  $\langle N, N \rangle_1 \equiv -1$ , determinamos

$$N(s_0, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 t^2}}(0, \pm ct, 1)$$

e compondo, se necessário, com uma transformação ortogonal adequada de  $\mathbb{R}_1^3$  que fixa o eixo  $x_3$ , podemos assumir que

$$N(s_0, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 t^2}}(0, ct, 1)$$

e que a reta  $L_t$  está parametrizada como  $\beta(t) = (t, 0, 0)$ . Daí, concluímos que nossa superfície máxima regradada é a solução para o problema de Björling com as condições

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (t, 0, 0), \\ V(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 t^2}}(0, ct, 1). \end{aligned}$$

Invertendo orientação obtemos que a superfície é um pedaço de um helicóide do segundo tipo, mostrando o item (c).

Para finalizar a classificação, assumiremos que  $\nu'(s)$  é de tipo espaço e não-nulo para todo  $s \in I$ . Então, podemos expressar a superfície regradada como

$$\chi(s, t) = \alpha(s) + t\nu(s),$$

onde  $\alpha$  é a linha de estrição da superfície. Assim,

$$\begin{aligned} \langle N(s_0, t), N(s_0, t_0) \rangle_1 &= \left\langle \frac{\chi_s \wedge \chi_t}{|\chi_s \wedge \chi_t|}(s_0, t), \frac{\chi_s \wedge \chi_t}{|\chi_s \wedge \chi_t|}(s_0, t_0) \right\rangle_1 \\ &= \left\langle \frac{\lambda\nu' + t\nu' \wedge \nu}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}, \frac{\lambda\nu' + t_0\nu' \wedge \nu}{\sqrt{t_0^2 - \lambda^2}} \right\rangle_1 \\ &= \frac{\lambda^2 - tt_0}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}\sqrt{t_0^2 - \lambda^2}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de distribuição em  $s_0 \in I$  e  $t_0$  arbitrariamente fixado de tal modo que  $(s_0, t_0) \in \hat{D}$ . Da mesma forma, podemos supor que  $N(s_0, t_0) = (0, 0, 1)$  e que  $L_t : t \mapsto \chi(s_0, t)$  está contida no eixo  $x_1$ . Então, se  $N(s_0, t) = \frac{1}{\sqrt{1+2tc}}(y_1, y_2, y_3)$ , usando (3.11) vemos que

$$\left\langle \frac{(y_1, y_2, y_3)}{\sqrt{1+2tc}}, (0, 0, 1) \right\rangle_1 = \frac{\lambda^2 - t_0 t}{\sqrt{t^2 + \lambda^2} \sqrt{t_0^2 + \lambda^2}},$$

ou seja,  $y_3 = -\frac{\lambda^2 - t_0 t}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}$  e, como  $N(s_0, t_0)$  é ortogonal a  $L_t$ , obtemos  $y_1 = 0$ . Por outro lado, sendo  $\langle N, N \rangle_1 \equiv -1$ ,

$$\begin{aligned} -1 &= \langle N, N \rangle_1(s_0, t) \\ &= \frac{1}{t_0^2 - \lambda^2} \left( y_2^2 - \frac{(-\lambda^2 + t_0 t)^2}{t^2 - \lambda^2} \right), \end{aligned}$$

donde  $y_2 = \frac{|\lambda|(t - t_0)}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}}$ , e concluimos que

$$N(s_0, t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \lambda^2} \sqrt{t_0^2 - \lambda^2}} (0, |\lambda|(t - t_0), t_0 t - \lambda^2) \quad (3.12)$$

e que  $L_t$  está parametrizada por  $\beta(t) = (t, 0, 0)$ . Agora, note que  $t_0 = \sqrt{2}|\lambda|$  satisfaz  $t_0^2 - \lambda^2 = \lambda^2 > 0$  e, conseqüentemente,  $(s_0, t_0) \in \hat{D}$ . Substituindo em (3.12) encontramos

$$N(s_0, t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} (0, \sqrt{2}|\lambda| - t, \sqrt{2}t - |\lambda|). \quad (3.13)$$

Finalmente, compondo com a transformação ortogonal de  $\mathbb{R}_1^3$  cuja expressão matricial em coordenadas canônicas é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

a fórmula (3.13) pode ser escrita como

$$N(s_0, t) = \frac{-1}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} (0, |\lambda|, t),$$

donde

$$N(s_0, t) = \frac{-1}{\sqrt{c^2 t^2 - 1}} (0, 1, ct),$$

com  $c = \frac{1}{|\lambda|}$ . Assim, nossa superfície é a solução para o problema de Björling com as condições

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (t, 0, 0), \\ V(t) &= \frac{-1}{\sqrt{c^2 t^2 - 1}}(0, 1, ct).\end{aligned}$$

Isto fornece um pedaço de um helicóide do primeiro tipo, obtendo (b) e finalizando a prova. □

Este teorema foi primeiramente provado em [25]. Ele também aparece em [15] como um caso especial de um teorema mais geral. A abordagem que temos introduzido aqui fornece dois importantes recursos que não aparecem na prova dada por Kobayashi. Por um lado, ela revela a importância da característica causal do campo de vetores  $\nu'$  na classificação. Por outro lado, ela produz parametrizações isotérmicas globais para a superfície máxima regradada resultante.

No Exemplo 2.4 da Seção 2.3, resolvemos o problema de Björling com as condições

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= ((1/k)\cosh(u), 0, 0), \\ V(u) &= -\frac{1}{\sinh(u)}(0, 1, \cosh(u)),\end{aligned}$$

e obtemos a parametrização do helicóide do primeiro tipo dada por

$$\chi(w) = \frac{1}{k}(\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), v),$$

definida para todo  $w = u + iv$  com  $u \neq 0$ . A imagem em  $\mathbb{R}^3$  desta superfície é um pedaço aberto do helicóide clássico mínimo, uma vez que podemos observar na expressão acima que  $kx_3 = \arctan(x_2/x_1)$ . Reciprocamente, vamos verificar que esta propriedade caracteriza o helicóide.

Para tanto, toda superfície regradada de tipo espaço pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\psi : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (s, t) &\mapsto \alpha(s) + tn(s)\end{aligned}\tag{3.14}$$

onde  $D$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo um certo intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é uma curva de tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco e  $n : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  é

um campo vetorial normal unitário ao longo de  $\alpha$ . Note que  $n(s)$  é um campo vetorial assintótico sobre a superfície e que  $\alpha'(s) + tn'(s)$  é perpendicular a  $n(s)$ .

Daí, segue da maximalidade que  $\alpha'(s) + tn'(s)$  é uma direção assintótica. Em particular, pondo  $t = 0$ , podemos ver que  $n(s)$  é o vetor normal principal a  $\alpha(s)$ , pois dá a direção da curvatura. Portanto, temos somente que determinar a curva  $\alpha(s)$  e substituí-la em (3.14).

Denotando por  $b(s)$  o binormal de  $\alpha(s)$ , temos as *fórmulas de Frenet-Serret* em  $\mathbb{R}_1^3$ :

$$\begin{aligned}\alpha''(s) &= k(s)n(s), \\ b'(s) &= \tau(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)\alpha'(s) + \tau(s)b(s),\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde  $k(s)$  e  $\tau(s)$  são a curvatura e a torção de  $\alpha(s)$ , respectivamente. Salvo menção em contrário, convenientemente omitiremos o parâmetro  $s$  e as expressões que serão apresentadas valerão para todo  $(s, t) \in D$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}\alpha' + tn' &= \alpha' + t(-k\alpha' + \tau b) \\ &= (1 - tk)\alpha' + t\tau b,\end{aligned}$$

onde novamente por derivação em  $s$ ,

$$\begin{aligned}\alpha'' + tn'' &= -tk'\alpha' + (1 - tk)\alpha'' + t\tau'b + t\tau b' \\ &= -tk'\alpha' + (1 - tk)kn + t\tau'b + t\tau\tau n \\ &= (k - tk^2 + t\tau^2)n + t(-k'\alpha' + \tau'b)\end{aligned}$$

Como  $\alpha' + tn'$  é uma direção assintótica,  $\alpha'' + tn''$  é tangente à superfície. Isto é,  $t(-k'\alpha' + \tau'b)$  é paralelo a  $(1 - tk)\alpha' + t\tau b$ . Por conseguinte, para todo  $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}t(-k'\alpha' + \tau'b) &= A[(1 - tk)\alpha' + t\tau b] \\ \Leftrightarrow [-tk' - A(1 - tk)]\alpha' + (t\tau' - At\tau)b &= 0.\end{aligned}$$

Sendo  $\alpha'$  e  $b$  linearmente independentes,

$$\begin{aligned}-tk' - A(1 - tk) &= 0 \\ t\tau' - At\tau &= 0,\end{aligned}$$

onde isolando  $A$  nestas relações,

$$-\frac{tk'}{1 - tk} = \frac{\tau'}{\tau}.$$

Esta última igualdade é satisfeita se, e só se,  $\tau' = k' = 0$ , pois se o contrário ocorre,  $k'$  iria variar enquanto  $\tau'$  não varia. Logo se uma variasse a outra teria que variar também, donde segue que  $k$  e  $\tau$  são constantes.

Podemos reescrever as relações dadas em (3.15) como:  $n = \frac{b'}{\tau}$ ,  $b = \frac{n'}{\tau} + \frac{k}{\tau}\alpha'$  e  $\alpha'' = \frac{k}{\tau}b'$ , que por integração em  $s$  desta última equação temos

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{k}{\tau}b + c_0 \\ &= \frac{k}{\tau} \left( \frac{n'}{\tau} + \frac{k}{\tau}\alpha' \right) + c_0,\end{aligned}$$

sendo  $c_0 = cte$  e, isolando  $\alpha'$ ,

$$\alpha' = -\frac{k}{k^2 - \tau^2}n' + c_1,$$

para  $c_1 = -\frac{\tau^2}{k^2 - \tau^2}c_0 \in \mathbb{R}$ . Agora, integrando  $\alpha'$ ,

$$\alpha(t) = -\frac{k}{k^2 - \tau^2}n + c_1s + c_2,$$

aqui  $c_2 \in \mathbb{R}$ .

Denotando por  $\tilde{\alpha} = c_1s + c_2$ , podemos escrever

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \frac{k}{k^2 - \tau^2}n, \quad (3.16)$$

a qual fornece

$$\langle \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}' \rangle_1 = \langle \alpha', \alpha' \rangle_1 + 2\frac{k}{k^2 - \tau^2} \langle \alpha', n' \rangle_1 + \frac{k^2}{(k^2 - \tau^2)^2} \langle n', n \rangle_1.$$

No entanto, das identidades  $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 = 1$ ,  $\langle n', n' \rangle_1 = k^2 - \tau^2$  e  $\langle \alpha', n' \rangle_1 = -k$ , as quais trivialmente podem ser verificadas, encontramos

$$\langle \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}' \rangle_1 = -\frac{\tau^2}{k^2 - \tau^2}.$$

Temos agora que considerar dois casos:

Se  $|k| > |\tau| > 0$ , a curva dada em (3.16) é de tipo tempo visto que  $\langle \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}' \rangle_1 < 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\tilde{\alpha}$  está contida no eixo  $x_3 = [(0, 0, 1)]$ . Como  $\langle \tilde{\alpha}', n \rangle_1 = 0$ , temos  $n(s) = -(\cos(\rho(s)), \sin(\rho(s)), 0)$ , pois todo vetor ortogonal a um

eixo tem sua coordenada correspondente nula. Então, escrevendo  $\tilde{\alpha}(s) = (0, 0, \beta(s))$ , de (3.16) obtemos

$$\alpha = \left( \frac{k}{k^2 - \tau^2} \cos(\rho), \frac{k}{k^2 - \tau^2} \operatorname{sen}(\rho), \beta \right).$$

Calculando  $\alpha''$  e usando o fato de  $\alpha'' = kn$ , encontramos as seguinte igualdades

$$\begin{aligned} -\frac{k}{k^2 - \tau^2} [\cos(\rho)(\rho')^2 + \operatorname{sen}(\rho)\rho''] &= -k\cos(\rho) \\ -\frac{k}{k^2 - \tau^2} [\operatorname{sen}(\rho)(\rho')^2 + \cos(\rho)\rho''] &= -k\operatorname{sen}(\rho) \\ \beta'' &= 0 \end{aligned}$$

o que nos fornece, em termos das derivadas das funções  $\rho(s)$  e  $\beta(s)$ , as identidades

$$\begin{aligned} \rho'' &= 0, \\ \rho' &= \sqrt{k^2 - \tau^2}, \\ \beta'' &= 0, \end{aligned}$$

sendo possível concluir, mediante integração, que  $\rho(s) = s\sqrt{k^2 - \tau^2}$  e  $\beta(s) = as$ , onde as constantes resultantes de tal ação foram tomadas de modo conveniente. Logo, a curva  $\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))$  fica dada por

$$\begin{aligned} \alpha'_1(s) &= -\frac{k}{k^2 - \tau^2} \sqrt{k^2 - \tau^2} \operatorname{sen} \left( s\sqrt{k^2 - \tau^2} \right), \\ \alpha'_2(s) &= \frac{k}{k^2 - \tau^2} \sqrt{k^2 - \tau^2} \cos \left( s\sqrt{k^2 - \tau^2} \right), \\ \alpha'_3(s) &= at, \end{aligned}$$

onde usando a relação  $\langle \alpha', \alpha' \rangle_1 = 1$  a constante  $a$  fica determinada por  $a = \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}}$ .

Concluindo, a superfície definida por (3.14) tem coordenadas

$$\begin{aligned} \psi_1(s, t) &= \left( \frac{k}{k^2 - \tau^2} - t \right) \cos \left( s\sqrt{k^2 - \tau^2} \right), \\ \psi_2(s, t) &= \left( \frac{k}{k^2 - \tau^2} - t \right) \operatorname{sen} \left( s\sqrt{k^2 - \tau^2} \right), \\ \psi_3(s, t) &= \frac{\tau t}{\sqrt{k^2 - \tau^2}}, \end{aligned}$$

resultando que  $\psi(s, t) = (\psi_1(s, t), \psi_2(s, t), \psi_3(s, t))$  é congruente a uma parte do helicóide do primeiro tipo.

Se  $|\tau| > |k| > 0$ , a curva dada em (3.16) é de tipo espaço visto que  $\langle \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha}' \rangle_1 > 0$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $\tilde{\alpha}$  está contida no eixo  $x_2 = [(0, 1, 0)]$ . Como

$\langle \tilde{\alpha}', n \rangle_1 = 0$ , temos  $n(s) = -(\cosh(\rho(s)), \sinh(\rho(s)), 0)$ , pois como já o dissemos, todo vetor ortogonal a um eixo tem sua coordenada correspondente nula. Com argumentos inteiramente análogos aos anteriores, encontramos a seguinte parametrização para a superfície definida em (3.14),

$$\begin{aligned}\psi_1(s, t) &= \left( \frac{k}{\tau^2 - k^2} - t \right) \cosh \left( t\sqrt{\tau^2 - k^2} \right), \\ \psi_2(s, t) &= \frac{\tau s}{\sqrt{\tau^2 - k^2}}, \\ \psi_3(s, t) &= \left( \frac{k}{\tau^2 - k^2} - t \right) \sinh \left( t\sqrt{\tau^2 - k^2} \right),\end{aligned}$$

o que mostra que  $\psi(s, t) = (\psi_1(s, t), \psi_2(s, t), \psi_3(s, t))$  é congruente a uma parte do helicóide do segundo tipo. Em todo caso, segue demonstrada nossa afirmação, isto é, que

$$kx_3 = \arctan(x_2/x_1),$$

caracteriza o helicóide.

**Observação 3.4** A menos do plano, o helicóide é a única superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  possuindo um subconjunto aberto o qual é uma imersão máxima com respeito à métrica Lorentziana de  $\mathbb{R}_1^3$ . Ora, sabemos que qualquer superfície em  $\mathbb{R}^3$  localmente é sempre o gráfico de

$$z = f(x, y), \tag{3.17}$$

onde  $f$  é uma função diferenciável definida num subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

No caso de uma superfície mínima dada por (3.17), a mesma é caracterizada pela seguinte equação diferencial parcial elíptica não-linear

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0. \tag{3.18}$$

No mesmo caminho, uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{R}_1^3$  localmente é sempre o gráfico de (3.17). E a equação resultante para a superfície máxima é da forma

$$(1 - f_x^2)f_{yy} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 - f_y^2)f_{xx} = 0. \tag{3.19}$$

Agora, suponha que  $f$  satisfaça (3.18) e (3.19). Então, por um cálculo simples obtemos

$$-f_x^2 f_{yy} + 2f_x f_y f_{xy} - f_y^2 f_{xx} = 0. \tag{3.20}$$



Pondo  $\mathcal{X} = (x'(t), y'(t)) = (-f_y, f_x)$ , que é um campo vetorial tangente à  $\{f = \text{constante}\}$  no plano  $xy$ , temos

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{X} &= (x''(t), y''(t)) \\
 &= \left( \frac{d}{dt}(-f_y), \frac{d}{dt}(f_x) \right) \\
 &= (\partial_x(-f_y)x'(t) + \partial_y(-f_y)y'(t), \partial_x(f_x)x'(t) + \partial_y(f_x)y'(t)) \\
 &= (-f_{yx}(-f_y) - f_{yy}f_x, f_{xx}(-f_y) + f_{xy}f_x) \\
 &= (f_y f_{xy} - f_x f_{yy}, f_x f_{xy} - f_y f_{xx}).
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \det(\mathcal{X}, \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{X}) &= \begin{vmatrix} -f_y & f_x \\ f_y f_{xy} - f_x f_{yy} & f_x f_{xy} - f_y f_{xx} \end{vmatrix} \\
 &= f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}.
 \end{aligned}$$

Isto, juntamente com (3.20), implica que as curvas integrais de  $\mathcal{X}$  em  $\mathbb{R}^2$  são retas. Como  $f$  é constante sobre cada uma de suas curvas integrais, segue-se que a superfície  $z = f(x, y)$  é uma superfície regrada. Agora uma superfície mínima regrada em  $\mathbb{R}^3$  é um plano ou um helicóide. Como estamos excluindo o plano, concluímos nossa afirmação.

# Capítulo 4

## Superfícies máximas geradas por curvas específicas

Finalizaremos nosso trabalho construindo novos exemplos de superfícies máximas via o Lema 2.2 e apresentaremos uma analogia natural destas superfícies máximas com suas correspondentes Euclidianas.

Ao longo deste último capítulo,  $\Pi$  denotará o plano  $x_1x_3$ , o qual é um plano vetorial de tipo tempo em  $\mathbb{R}_1^3$ .

### 4.1 Superfície máxima de Henneberg

Considere sobre  $\Pi$ , seguindo [33], a parábola de Neil

$$(x_3 + 2)^2 = 9x_1^2.$$

Esta equação determina implicitamente uma curva que pode ser parametrizada por

$$\alpha(s) = \left( 2\cosh(s) + \frac{2}{3}\cosh(3s), 0, 2\cosh(2s) \right), \quad (4.1)$$

ou equivalentemente como

$$\alpha(s) = 2 \left( \frac{4}{3}\cosh^3(s), 0, 2\cosh^2(s) - 1 \right). \quad (4.2)$$

Usando (4.1) e assumindo que  $s \neq 0$ , vemos que  $\alpha$  é uma curva analítica de tipo espaço e

$$|\alpha'(s)| = 8\cosh(s)\sinh^2(s).$$

Aplicando o Lema 2.2 construímos uma superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$ , a qual por (4.2) é escrita em coordenadas como

$$\begin{aligned}\chi_1(s, t) &= 2\mathbf{Re} \cosh(z) + \frac{2}{3}\mathbf{Re} \cosh(3z), \\ \chi_2(s, t) &= \mathbf{Im} \int_0^z \langle \alpha'(w), \alpha'(w) \rangle_1^{\frac{1}{2}} dw, \\ \chi_3(s, t) &= 2\mathbf{Re} \cosh(2z),\end{aligned}$$

onde  $z = s + it$  e  $s > 0$ . Como

$$\begin{aligned}\int_0^s |\alpha'(w)| dw &= \frac{8}{3}\sinh^3(s) \\ &= \frac{2}{3}\sinh(3s) - 2\sinh(s),\end{aligned}$$

obtemos da equação acima que  $\chi$  é dada em coordenadas por

$$\begin{aligned}\chi_1(s, t) &= 2\cosh(s)\cos(t) + \frac{2}{3}\cosh(3s)\cos(3t), \\ \chi_2(s, t) &= \frac{2}{3}\cosh(3s)\sin(3t) - 2\cosh(s)\sin(t), \\ \chi_3(s, t) &= 2\cosh(2s)\cos(2t).\end{aligned}$$

Inspirados pela situação Euclidiana chamaremos esta superfície de *superfície máxima de Henneberg* (veja Figura 4.1).

**Observação 4.1** Esta superfície intersecta ortogonalmente o plano  $\Pi$  ao longo da curva coordenada  $t = 0$ , donde verificamos o segundo princípio de simetria citado no Teorema 2.3 (veja Figura 4.2). Além disso, devido ao Lema 2.2 a superfície máxima de Henneberg é a única imersão máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  que contém a parábola de Neil como uma geodésica plana.

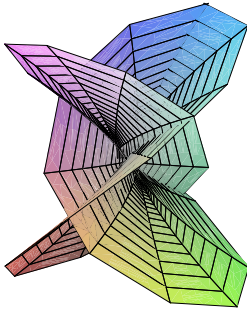


Figura 4.1:

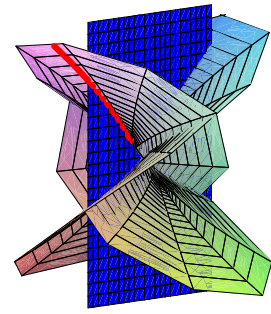


Figura 4.2:

## 4.2 Superfície máxima de Enneper

Considere sobre  $\Pi$  a parábola

$$x_1^2 = \frac{8}{3}x_3 - \frac{8}{9}.$$

Esta curva pode ser parametrizada como

$$\gamma(s) = \frac{1}{3}(4s, 0, 2s^2 + 1),$$

onde claramente vemos que  $\gamma$  é de tipo espaço se  $s \in (-1, 1)$ . Note que, para cada  $s$  podemos construir uma única curva em  $\Pi$  sobre a qual os pontos  $\gamma(s)$  e  $(0, 0, -\frac{1}{3})$  de  $\Pi$  são simétricos. Esta curva de simetria é dada pela equação

$$\beta^s \equiv 2sx_1 - (1 + s^2)x_3 + \frac{1}{3}(s^4 - 3s^2) = 0.$$

Assim obtemos uma família a 1-parâmetro de retas de tipo espaço em  $\Pi$ . O envelope desta família é uma curva sobre  $\Pi$  cuja velocidade em cada  $s$  está na direção especificada por  $\beta^s$ . Além disso, esta curva pode ser obtida da condição  $\beta^s = 0 = \partial_s \beta^s$ , a qual produz

$$\alpha(s) = \left( \frac{1}{3}s^3 + s, 0, s^2 \right).$$

Esta é uma curva de tipo espaço sobre  $\Pi$  com  $|\alpha'(s)| = 1 - s^2$ . Aplicando o Lema 2.2 obtemos uma superfície máxima  $\chi : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$  intersectando  $\Pi$  ortogonalmente ao longo de  $\alpha$ , dada por

$$\chi(s, t) = \left( \frac{1}{3}s^3 - st^2 + s, \frac{1}{3}t^3 - s^2t + t, s^2 - t^2 \right).$$

Mediante a construção que acabamos de fazer, denominamos esta superfície de *superfície máxima de Enneper* (veja Figura 4.3), em analogia com a situação Euclidiana (veja [33] p. 80).

**Observação 4.2** Note que esta superfície intersecta ortogonalmente o plano  $\Pi$  ao longo da curva coordenada  $t = 0$ , donde verificamos o segundo princípio de simetria citado no Teorema 2.3 (veja Figura 4.4).

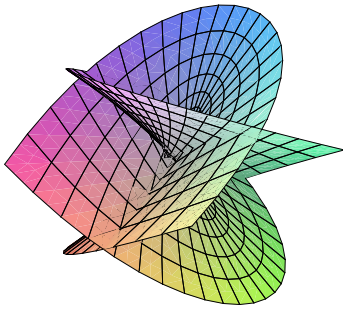


Figura 4.3:

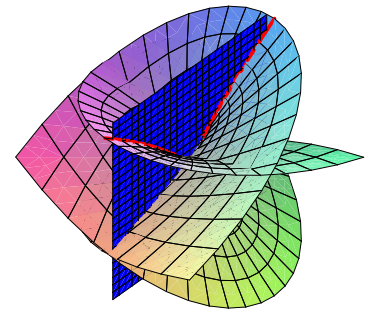


Figura 4.4:

### 4.3 Superfície máxima de Catalan

Para este exemplo relembremos que a cicloide em  $\mathbb{R}^2$  pode ser descrita como a órbita da origem quando rolamos o círculo unitário centrado em  $(-1, 0)$  sobre o eixo  $y$ . Esta curva pode ser vista como uma aplicação a qual associa a cada  $t \in \mathbb{R}$  a imagem do ponto  $(1, 0)$  sobre a rotação em  $\mathbb{R}^2$  do ângulo  $-t$  composta com a translação  $(-1, t)$ . Notemos também que em um plano de Lorentz  $\mathbb{R}_1^2$  uma rotação do ângulo  $t$  é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Fixe o ponto  $(1, 0, 0) \in \Pi$ . Então o processo em  $\Pi$  equivalente ao anterior que descreve a cicloide em  $\mathbb{R}^2$ , produz uma curva que pode ser parametrizada como

$$\alpha(s) = (\cosh(s) - 1, 0, s - \sinh(s)). \quad (4.3)$$

Esta curva é de tipo espaço sempre que  $s > 0$ . Uma aplicação padrão do Lema 2.2 para  $\alpha$  usando a relação geral  $\cosh(\theta) = 2\cosh^2(\theta/2) - 1$  produz uma superfície máxima dada por

$$\chi(z) = \left( \cosh(s)\cos(t) - 1, 4\sinh\left(\frac{s}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right), s - \sinh(s)\cos(t) \right), \quad (4.4)$$

onde  $z = s + it$  e  $s > 0$ . Chamamos esta superfície de *superfície máxima de Catalan* (veja Figura 4.5), uma vez que a superfície clássica de Catalan é a única superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  a qual contém a cicloide como uma geodésica plana (veja [14, 21, 33]).

**Observação 4.3** Olhando a construção desta superfície máxima, vemos facilmente que ela intersecta ortogonalmente o plano  $\Pi$  ao longo da curva coordenada  $t = 0$ , donde verificamos o segundo princípio de simetria citado no Teorema 2.3 (veja Figura 4.6).

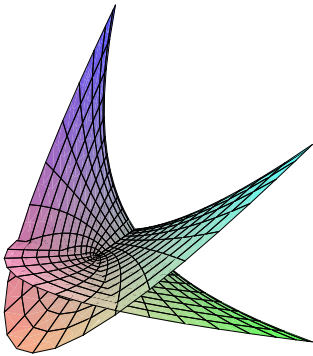


Figura 4.5:

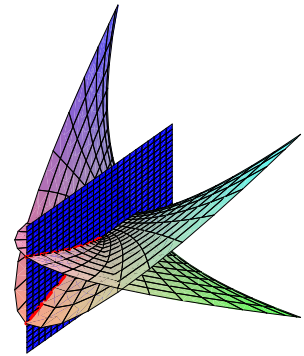


Figura 4.6:

## 4.4 Relação entre superfícies máximas em $\mathbb{R}_1^3$ e mínimas em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção, veremos a relação entre as superfícies máximas apresentadas neste capítulo e suas correspondentes superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ .

Para isto, iniciaremos relembando (veja [35] p. 64) que qualquer superfície mínima simplesmente conexa  $M_\epsilon$  em  $\mathbb{R}^3$  é representada como a parte real de uma curva holomorfa  $f_\epsilon \in \mathbb{C}^3$  que satisfaz condição de isotropia  $\langle f'_\epsilon, f'_\epsilon \rangle_0 = 0$ . Aqui  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  representa o

produto interno Euclidiano usual em  $\mathbb{C}^3$ , o qual associa a  $z, w \in \mathbb{C}^3$  o valor complexo  $\langle z, w \rangle_0 = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3$  com as notações padrão.

Além disso, qualquer superfície mínima simplesmente conexa  $M_\epsilon$  em  $\mathbb{R}^3$  também pode ser representada por um par  $(\mu^\epsilon, \sigma^\epsilon)$ , onde  $\mu^\epsilon$  é holomorfa e  $\sigma^\epsilon$  é meromorfa. Estas quantidades  $(\mu^\epsilon, \sigma^\epsilon)$  são chamadas as *relações de Enneper-Weierstrass* da superfície, e são dadas por

$$\mu^\epsilon = \phi_1^\epsilon - i\phi_2^\epsilon \quad \text{e} \quad \sigma^\epsilon = \frac{\phi_3^\epsilon}{\phi_1^\epsilon - i\phi_2^\epsilon},$$

onde estamos denotando  $f'_\epsilon = (\phi_1^\epsilon, \phi_2^\epsilon, \phi_3^\epsilon)$ .

Da mesma forma, vamos mostrar que qualquer superfície máxima simplesmente conexa  $M$  em  $\mathbb{R}_1^3$  pode ser expressa como a parte real de uma curva holomorfa  $f = (f_1, f_2, f_3)$  em  $\mathbb{C}^3$  tal que

$$\begin{aligned} \langle f', f' \rangle_1 &= f_1'^2 + f_2'^2 - f_3'^2 = 0, \\ |f_1'|^2 + |f_2'|^2 - |f_3'|^2 &> 0. \end{aligned}$$

Para tal, mostraremos o seguinte lema (veja [25]).

**Lema 4.1** *Seja  $D$  um domínio no plano complexo,  $\sigma$  uma função meromorfa arbitrária em  $D$  e  $\mu$  uma função analítica em  $D$  tendo a propriedade que em cada ponto onde  $\sigma$  tem um pólo de ordem  $m$ ,  $\mu$  tem um zero de ordem no mínimo  $2m$ . Então, as funções*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\mu(1 + \sigma^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}\mu(1 - \sigma^2) \quad \text{e} \quad \phi_3 = \mu\sigma \quad (4.5)$$

*são analíticas em  $D$  e satisfazem a equação*

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0. \quad (4.6)$$

*Reciprocamente, toda tripla de funções analíticas em  $D$  satisfazendo (4.6) podem ser representadas na forma (4.5), exceto para  $\phi_1 \equiv -i\phi_2$  e  $\phi_3 \equiv 0$ .*

**Prova.** Note que

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 &= \left[ \frac{1}{2}\mu(1 + \sigma^2) \right]^2 + \left[ \frac{i}{2}\mu(1 - \sigma^2) \right]^2 - (\mu\sigma)^2 \\ &= \frac{1}{4}\mu^2(2\sigma^2 + 2\sigma^2) - \mu^2\sigma^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é, as funções (4.5) satisfazem (4.6). Reciprocamente, dada qualquer solução de (4.6), definimos

$$\mu := \phi_1 + i\phi_2 \quad \text{e} \quad \sigma := \frac{\phi_3}{\phi_1 + i\phi_2}. \quad (4.7)$$

Se escrevermos (4.6) na forma

$$(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = \phi_3^2, \quad (4.8)$$

encontramos

$$\begin{aligned} \phi_1 - i\phi_2 &= \frac{\phi_3^2}{\phi_1 + i\phi_2} \\ &= (\phi_1 + i\phi_2) \frac{\phi_3}{(\phi_1 + i\phi_2)} \frac{\phi_3}{(\phi_1 + i\phi_2)} \\ &= \mu\sigma^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Combinando (4.7) e (4.9) obtemos

$$\begin{cases} \phi_1 + i\phi_2 = \mu \\ \phi_1 - i\phi_2 = \mu\sigma^2 \\ \phi_3 = \mu\sigma \end{cases},$$

cuja solução é dada por (4.5).

A condição relativa aos zeros de  $\mu$  e aos pólos de  $\sigma$  devem valer pois, caso contrário, pela equação (4.9),  $\phi_1 - i\phi_2$  deixaria de ser analítica. Esta representação pode falhar somente se o denominador na expressão para  $\sigma$  em (4.7) for identicamente nula. Neste caso temos por (4.8) que  $\phi_3 \equiv 0$ , o qual é o caso excepcional mencionado.

□

**Observação 4.4** Uma função definida num conjunto aberto e conexo  $D$  é *meromorfa* se ela é analítica em todo  $D$ , exceto nos pólos. De outro modo, as singularidades de uma função meromorfa são somente pólos.

Com o Lema 4.1, mostraremos o afirmado demonstrando o seguinte resultado (ver [25]).

**Lema 4.2** *Toda superfície máxima simplesmente conexa em  $\mathbb{R}_1^3$  pode ser representada na forma*

$$\chi_k(z) = \mathbf{Re} \int_0^z \phi_k(w) dw, \quad (4.10)$$



onde  $1 \leq k \leq 3$  e as  $\phi_{k's}$  estão definidas por (4.5), as funções  $\mu$  e  $\sigma$  tendo as propriedades citadas no Lema 4.1, o domínio  $D$  sendo o disco unitário ou o plano inteiro, e a integral sendo tomada ao longo de um caminho arbitrário da origem ao ponto  $z$ . A superfície será regular se, e somente se,  $\mu$  satisfaz a propriedade adicional que ela se anula somente nos pólos de  $\sigma$ , e a ordem de seus zeros em tal ponto é exatamente duas vezes a ordem do pólo de  $\sigma$ .

**Prova.** Para tanto, como a superfície máxima é simplesmente conexa, pela Observação 1.9 a mesma pode ser representada na forma  $\chi : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , onde  $D$  é o disco unitário ou o plano, e as coordenadas  $\chi_k$  são harmônicas,  $1 \leq k \leq 3$ . Se definirmos

$$f'_k(z) := \phi_k(z) = \partial_z \chi_k(z) = \frac{1}{2}(\partial_s \chi_k - i \partial_t \chi_k)(z),$$

onde  $z = s + it$ , então estas funções serão analíticas e (4.10) vale (a integral sendo independente do caminho). Se  $z_0$  é um ponto onde  $\sigma$  tem um pólo de ordem  $m$ , então de (4.5) vemos que  $\mu$  deve ter um zero de ordem exatamente  $2m$  em  $z_0$ , a fim de termos a condição

$$|f'_1|^2 + |f'_2|^2 - |f'_3|^2 > 0$$

satisfeita e cada  $\phi_k$  holomorfa,  $1 \leq k \leq 3$ .

□

**Observação 4.5** Substituindo (4.5) em (4.10), encontramos

$$\begin{aligned} \chi_1(z) &= \mathbf{Re} \int_0^z \frac{1}{2} \mu (1 + \sigma^2) dw, \\ \chi_2(z) &= \mathbf{Re} \int_0^z \frac{i}{2} \mu (1 - \sigma^2) dw, \\ \chi_3(z) &= \mathbf{Re} \int_0^z \mu \sigma dw, \end{aligned}$$

que são chamadas de *fórmulas de representação de Weierstrass* da superfície máxima. E as expressões de  $\mu$  e  $\sigma$  dadas em (4.7), são chamadas de *relações de Enneper-Weierstrass* da superfície máxima.

Mostraremos agora, um caminho natural de associar a cada superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$ . Sejam  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subset \mathbb{C}^3$  quádricas complexas de  $\mathbb{C}^3$

dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &\equiv Z_1^2 + Z_2^2 - Z_3^2 = 0, \\ \mathcal{Q}_2 &\equiv Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Definimos a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (Z_1, Z_2, Z_3) &\mapsto (iZ_1, iZ_2, Z_3), \end{aligned}$$

que é obviamente uma bijeção entre  $\mathcal{Q}_1$  e  $\mathcal{Q}_2$ . Desta maneira podemos associar cada superfície máxima  $M$  em  $\mathbb{R}_1^3$  representada pela curva holomorfa  $f = (f_1, f_2, f_3)$  a uma superfície mínima  $M_\epsilon$  em  $\mathbb{R}^3$ , a qual é representada por  $f_\epsilon = \Psi(f) = (if_1, if_2, f_3)$ . Note que  $f'_\epsilon = \Psi(f')$ , e conseqüentemente  $M_\epsilon$  é de fato uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $M$  é  $\Psi$ -relacionada a  $M_\epsilon$ .

Existe um primeiro fato interessante que segue deste conceito. Se  $M$  é uma superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  e  $M_\epsilon$  é uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$ , a menos de translação em  $\mathbb{R}^3$  vemos que  $M$  é  $\Psi$ -relacionada à  $M_\epsilon$  se, e somente se,  $(\mu, \sigma) = (\mu^\epsilon, \sigma^\epsilon)$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} M \text{ é } \Psi\text{-relacionada à } M_\epsilon &\Leftrightarrow f'_\epsilon = \Psi(f') \\ &\Leftrightarrow (\phi_1^\epsilon, \phi_2^\epsilon, \phi_3^\epsilon) = (i\phi_1, i\phi_2, \phi_3) \\ &\Leftrightarrow \phi_1^\epsilon = i\phi_1, \phi_2^\epsilon = i\phi_2 \text{ e } \phi_3^\epsilon = \phi_3 \\ &\Leftrightarrow (\mu^\epsilon, \sigma^\epsilon) = (\mu, \sigma) \end{aligned}$$

Com tudo isto existe um fato sobre as superfícies máximas que temos introduzido neste capítulo: a superfície máxima de Henneberg (respectivamente superfície máxima de Enneper) é  $\Psi$ -relacionada a superfície clássica de Henneberg (respectivamente superfície de Enneper), e assim elas tem a mesma representação de Enneper-Weierstrass.

De fato, para a superfície máxima de Henneberg temos

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\cosh(z) + \frac{2}{3}\cosh(3z), \\ f_2 &= -i \left( \frac{2}{3}\sinh(3z) - 2\sinh(z) \right), \\ f_3 &= 2\cosh(2z), \end{aligned}$$

e para a superfície clássica de Henneberg (veja [33] p. 144)

$$\begin{aligned} f_\epsilon^1 &= 2\sinh(z) - \frac{2}{3}\sinh(3z), \\ f_\epsilon^2 &= -i \left( \frac{2}{3}\cosh(3z) + 2\cosh(z) \right), \\ f_\epsilon^3 &= 2\cosh(2z). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} if'_1 &= i(2\sinh(z) + 2\sinh(3z)), \\ if'_2 &= 2\cosh(3z) - 2\cosh(z), \\ f'_3 &= 4\sinh(2z). \end{aligned}$$

Após uma rotação de  $-90^\circ$  no plano de tipo espaço  $x_1x_2$  obtemos

$$R_3^{-\pi/2} (if'_1, if'_2, f'_3)^t = ((f_\epsilon^1)', (f_\epsilon^2)', (f_\epsilon^3)')^t,$$

isto é, a superfície máxima de Henneberg é  $\Psi$ -relacionada a superfície clássica de Henneberg, visto que a expressão acima equivale a  $f'_\epsilon = \Psi(f')$  (veja Figuras 4.7 e 4.8).

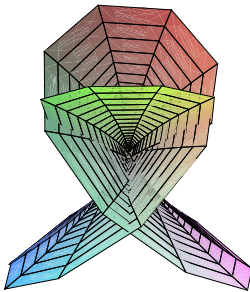


Figura 4.7: Superfície máxima de Henneberg em  $\mathbb{R}_1^3$ .

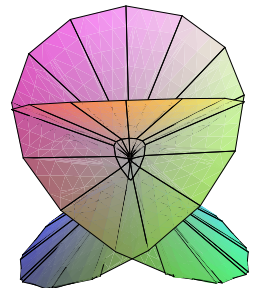


Figura 4.8: Superfície mínima de Henneberg em  $\mathbb{R}^3$ .

Da mesma forma, a superfície máxima de Enneper é determinada por

$$f = \left( \frac{1}{3}z^3 + z, i \left( \frac{1}{3}z^3 - z \right), z^2 \right),$$

e temos (ver [14] p. 145) que para a superfície mínima de Enneper

$$f_\epsilon = \left( z - \frac{1}{3}z^3, i \left( z + \frac{1}{3}z^3 \right), z^2 \right).$$

Então, após uma rotação de  $90^\circ$  no plano de tipo espaço  $x_1x_2$  obtemos

$$R_3^{\pi/2} (if'_1, if'_2, f'_3)^t = ((f_\epsilon^1)', (f_\epsilon^2)', (f_\epsilon^3)')^t,$$

isto é, a superfície máxima de Enneper é  $\Psi$ -relacionada a superfície clássica de Enneper, visto que a expressão acima equivale a  $f'_\epsilon = \Psi(f')$  (veja Figuras 4.9 e 4.10).

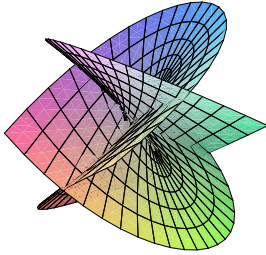


Figura 4.9: Superfície máxima de Enneper em  $\mathbb{R}_1^3$ .

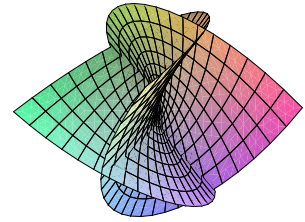


Figura 4.10: Superfície mínima de Enneper em  $\mathbb{R}^3$ .

Com relação a superfície máxima de Catalan a situação muda, mas entretanto podemos mostrar um caminho natural de relacioná-la à sua correspondente Euclidiana. Para isto, definimos a aplicação linear

$$\begin{aligned} \Psi^* : \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (\phi_1, \phi_2, \phi_3) &\mapsto (\phi_1, \phi_2, i\phi_3), \end{aligned}$$

que também é uma bijeção de  $\mathcal{Q}_1$  para  $\mathcal{Q}_2$ . Então  $\Psi^*$  associa a cada superfície máxima  $M$  em  $\mathbb{R}_1^3$  uma superfície mínima  $M_\epsilon$  em  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $M$  é  $\Psi^*$ -relacionada a  $M_\epsilon$ .

Como para a superfície máxima de Catalan temos

$$f = \left( \cosh(z) - 1, -4i \cosh\left(\frac{z}{2}\right), z - \sinh(z) \right),$$

e para a superfície de Catalan em  $\mathbb{R}^3$  vale (veja [14] p. 173)

$$f_\epsilon = \left( 1 - \cos(z), 4i \cos\left(\frac{z}{2}\right), z + \sin(z) \right),$$

após fazermos na expressão anterior a mudança  $w = iz$  mostramos que a superfície máxima de Catalan é  $\Psi^*$ -relacionada à superfície clássica de Catalan (veja Figuras 4.11 e 4.12).

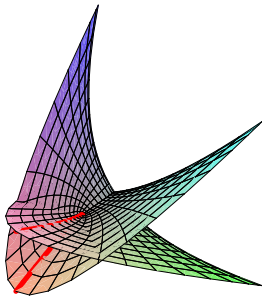


Figura 4.11: *Superfície máxima de Catalan em  $\mathbb{R}_1^3$ .*

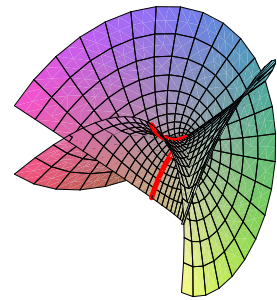


Figura 4.12: *Superfície mínima de Catalan em  $\mathbb{R}^3$ .*

Neste ponto podemos resumir os resultados da presente seção em um caminho alternativo. Consideremos, por exemplo, a superfície clássica de Henneberg. Uma questão natural que aparece no contexto de nosso trabalho é a seguinte: qual superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  desempenha o mesmo papel que a superfície de Henneberg desempenha no espaço Euclidiano? Um primeiro candidato natural para resolver esta questão é a superfície máxima em  $\mathbb{R}_1^3$  cujas relações de Enneper-Weierstrass são as mesmas relações da superfície de Henneberg. Neste caso, mostramos que esta superfície máxima é  $\Psi$ -relacionada à superfície de Henneberg. Onde aqui, os cálculos da Seção 4.1 revelam que esta candidata e sua correspondente Euclidiana têm uma importante característica própria: elas contêm a parábola de Neil como uma geodésica plana. Resumindo, nesta seção estamos usando nosso estudo sobre o problema de Björling para confirmar que nossa primeira candidata natural para resolver a questão acima é atualmente a melhor escolha.

O mesmo ocorre com a superfície de Enneper. Contudo, para a superfície de Catalan a situação não é tão clara à primeira vista. Portanto, para finalizar mostraremos uma importante propriedade que a superfície máxima de Catalan tem com sua análoga Euclidiana. Seja  $s_0 > 0$  e considere a isometria de  $\mathbb{R}_1^3$  dada por

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(s_0) & 0 & \sinh(s_0) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(s_0) & 0 & \cosh(s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \cosh(s_0) + s_0 \sinh(s_0) \\ 0 \\ s_0 \cosh(s_0) - \sinh(s_0) \end{pmatrix}.$$

Com respeito a esse novo sistema de coordenadas ortogonais em  $\mathbb{R}_1^3$  mostramos que a curva coordenada  $\chi(s_0, t)$  da superfície máxima de Catalan dada em (4.4) é escrita

como

$$\chi(s_0, t) = \left( \cos(t) - 1, 4\operatorname{senh}\left(\frac{s_0}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right), 0 \right).$$

Assim ela é uma parábola no plano de tipo espaço  $X_1X_2$ , uma vez que ela satisfaz

$$X_2^2 = -8\operatorname{senh}^2\left(\frac{s_0}{2}\right) X_1.$$

Assim deduzimos que cada curva coordenada com  $s$  fixado sobre a superfície máxima de Catalan é uma parábola em um plano de tipo espaço cujo vértice está situado na curva cicloide (4.3). Isto imita a situação no espaço Euclidiano para a superfície mínima de Catalan (veja [33]).

# Apêndice A

## Teoremas de Bernstein e Calabi-Bernstein: uma dualidade entre a equação das superfícies mínimas e a equação das superfícies máximas.

Baseado em [5], mostraremos como o teorema clássico de Bernstein sobre superfícies mínimas no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  pode ser visto como uma consequência do teorema de Calabi-Bernstein sobre superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{R}_1^3$  (e vice-versa). Isto segue de uma simples mas elegante dualidade entre as soluções de suas correspondentes equações diferenciais.

Começaremos recordando que um superfície mínima no espaço Euclidiano é uma superfície com curvatura média nula. Bernstein (1915-1917) provou que os planos são as únicas mínimas inteiras do tipo gráfico em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema A.1** (Teorema de Bernstein) *As únicas soluções inteiras para a equação das superfícies mínimas*

$$\operatorname{Div} \left( \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = 0$$

são funções afins.

Por outro lado, Calabi (1970) obteve a correspondente versão do teorema de Bernstein no caso de superfícies máximas.

**Teorema A.2** (Teorema de Calabi-Bernstein) *As únicas soluções inteiras para a equação das superfícies máximas*

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \left( \frac{Dg}{\sqrt{1 - |Dg|^2}} \right) &= 0, \\ |Dg|^2 &< 1, \end{aligned}$$

são funções afins.

**Observação A.1** A condição  $|Dg|^2 < 1$  no Teorema A.2 significa precisamente que o gráfico definido por  $g$  é de tipo espaço.

Nosso objetivo é, então, provar a seguinte dualidade entre as soluções das equações diferenciais parciais dadas nos Teoremas (A.1) e (A.2).

**Teorema A.3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio simplesmente conexo. Existe uma solução não-afim de classe  $C^2$  para a equação das superfícies mínimas sobre  $\Omega$*

$$\operatorname{Div} \left( \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = 0 \tag{A.1}$$

se, e somente se, existe uma solução não-afim de classe  $C^2$  para a equação das superfícies máximas sobre  $\Omega$

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \left( \frac{Dg}{\sqrt{1 - |Dg|^2}} \right) &= 0, \\ |Dg|^2 &< 1. \end{aligned} \tag{A.2}$$

**Prova.** Assumamos que  $f$  seja uma solução não-afim da equação dada em (A.1) sobre o domínio  $\Omega$ . Dado um campo vetorial  $X$  sobre  $\mathbb{R}^2$ , sejam  $J$  uma rotação positiva de um ângulo  $\pi/2$  no plano e  $w_{JX}$  uma 1-forma sobre  $\mathbb{R}^2$  a qual é metricamente equivalente ao campo  $JX$ , isto é,  $w_{JX}$  satisfaz

$$w_{JX}(Y) = \langle JX, Y \rangle$$



para todo campo vetorial  $Y$  sobre  $\mathbb{R}^2$ . Então,

$$(\text{Div}X)dx_1 \wedge dx_2 = dw_{JX}.$$

Com efeito, seja  $X$  um campo de vetores em  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto \sum_k a_k(p)e_k, \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) = p \xrightarrow{a_k} a_k(p) \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq 2$ , são funções diferenciáveis e  $\{e_1, e_2\}$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ . Denotando por  $J = (c_{jk})_{2 \times 2}$ , podemos escrever a 1-forma  $w_{JX}$  como

$$\begin{aligned} w_{JX} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow [(\mathbb{R}^2)_p]^* \\ p &\mapsto w_{JX}(p) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ Y &\mapsto \left\langle \sum_{j,k} a_k(p)c_{jk}e_j, Y \right\rangle. \end{aligned}$$

Ora, como  $w_{JX}$  é uma 1-forma então  $w_{JX} = \sum_i \lambda_i dx_i$ , sendo que os  $\lambda_i$ 's ficam determinados por

$$\begin{aligned} \lambda_i &= w_{JX}(p)e_i \\ &= \left\langle \sum_{j,k} a_k(p)c_{jk}e_j, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{j,k} a_k(p)c_{jk} \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \sum_k a_k(p)c_{ik}, \end{aligned}$$

$\forall 1 \leq i, k \leq 2$ . Logo,

$$w_{JX}(p) = \sum_{i,k} a_k(p)c_{ik}dx_i.$$

Omitindo por conveniência o parâmetro  $p$ , a derivada exterior desta última relação

fornece

$$\begin{aligned}
dw_{JX} &= \sum_{i,k} c_{ik} da_k \wedge dx_i \\
&= \sum_{i,k} c_{ik} (\partial_{x_1} a_k dx_1 + \partial_{x_2} a_k dx_2) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i,k} c_{ik} (\partial_{x_1} a_k dx_1 \wedge dx_i + \partial_{x_2} a_k dx_2 \wedge dx_i) \\
&= \sum_k (c_{1k} \partial_{x_2} a_k dx_2 \wedge dx_1 + c_{2k} \partial_{x_1} a_k dx_1 \wedge dx_2) \\
&= \sum_k (-c_{1k} \partial_{x_2} a_k + c_{2k} \partial_{x_1} a_k) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= (\partial_{x_1} a_1 + \partial_{x_2} a_2) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= (\text{Div} X) dx_1 \wedge dx_2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Agora, se  $U$  é o campo sobre  $\Omega$  dado por

$$U = \left( \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right),$$

então a equação (A.1) é equivalente ao fato que  $w_{JU}$  é fechado sobre  $\Omega$ , pois

$$\begin{aligned}
dw_{JU} &= (\text{Div} U) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então, como o domínio  $\Omega$  é simplesmente conexo, podemos escrever

$$J \left( \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = Dg \tag{A.3}$$

para uma certa função  $g$  de classe  $C^2$  sobre  $\Omega$ . Como  $J$  é uma isometria, segue-se que

$$|Dg|^2 = \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} < 1, \tag{A.4}$$

e também

$$\begin{aligned}
-1 + |Dg|^2 &= -1 + \frac{|Df|^2}{1 + |Df|^2} \\
&= \frac{-1}{1 + |Df|^2},
\end{aligned}$$

isto é,

$$1 + |Df|^2 = \frac{1}{1 - |Dg|^2}. \quad (\text{A.5})$$

De (A.4), vemos que  $g$  satisfaz a condição de tipo espaço. Além disso, usando o fato de  $J^2 = -Id$ , obtemos de (A.3) e (A.5) que

$$J \left( \frac{Dg}{\sqrt{1 - |Dg|^2}} \right) = J(Dg) \sqrt{1 + |Df|^2} = D(-f),$$

e assim (A.2) segue sobre  $\Omega$ .

Se  $g$  for afim, então  $Dg$  é um vetor constante e, conseqüentemente,  $|Dg|^2 \equiv cte$ . E então segue de (A.5) que  $|Df|^2$  é uma constante também. Daí, temos de (A.3) que  $Df$  é um vetor constante, contradizendo o fato de termos assumido que  $f$  é não-afim.

Um argumento muito semelhante, iniciando com uma solução não-afim da equação (A.2) sobre  $\Omega$  com  $|Dg| < 1$ , produz uma solução não-afim da equação (A.1) sobre  $\Omega$ .

□

Em particular, quando  $\Omega$  é todo o plano  $\mathbb{R}^2$  obtemos o seguinte:

**Corolário A.1** *Existe uma solução inteira não-afim de classe  $C^2$  para a equação das superfícies mínimas*

$$\text{Div} \left( \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \right) = 0$$

sobre  $\mathbb{R}^2$  se, e somente se, existe uma solução inteira não-afim de classe  $C^2$  para a equação das superfícies máximas

$$\begin{aligned} \text{Div} \left( \frac{Dg}{\sqrt{1 - |Dg|^2}} \right) &= 0, \\ |Dg|^2 &< 1, \end{aligned}$$

sobre  $\mathbb{R}^2$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, L. V. and SARIO, L. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press (1960).
- [2] ALEDO, J., GALVEZ, J., MIRA, P. *A D'Alembert formula for flat surfaces in the 3-sphere*. J. Geom. Anal. 19 (2009), 211-232.
- [3] ALEDO, MARTINEZ and MILAN. *The affine Cauchy problem*. J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), 70-83.
- [4] ALEDO, J. A., CHAVES, R. M. B. and GALVEZ, A. *The Cauchy problem for improper affine spheres and Hessian one equation*. Trans. Amer. Math. Soc. 359, n. 9 (2007), 4183-4208.
- [5] ALÍAS, L. J. and PALMER, B. *A duality result between the minimal surface equation and the maximal surface equation*. An. Acad. Bras. Ciênc. vol. 73 no.2, Rio de Janeiro, June (2001).
- [6] ALÍAS, L. J., CHAVES, R. M. B. and MIRA, P. *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2003), 289-316.
- [7] ASPERTI, A., VILHENA, J. M. *Björling problem for spacelike, zero mean curvature surfaces in  $L^4$* . J. Geom. Phys. 56, n. 2 (2006), 196-213.
- [8] BARBOSA, J. L. *Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* . Lecture Notes in Mathematics 1195 Springer-Verlag (1986).

- [9] BJÖRLING, E. G. *In integrationem aequationis derivatarum partialum superfici, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt sngoque contrario.* Arch. Math. Phys. (1) 4 (1844), 290-315.
- [10] CALABI, E. *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations.* Proc. Symp. Pure Math. 15 (1970), 223-230.
- [11] CHAVES, R. M. B., DUSSAN, M. P., MAGID, M. *Björling problem for timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space,* to appear.
- [12] CHENG, S. Y. and YAU, T. S. *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces.* Annals of Mathematics, 104 (1976), 407-419.
- [13] COSTA, C. J. da *Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas.* 18° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA-RJ (1991).
- [14] DIERKES, U. et al. *Minimal Surfaces I.* A series of comprehensive studies in mathematics, 295, Springer-Verlag (1992).
- [15] DILLEN, F. and KÜHNEL, W. *Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space.* Manuscripta Math. 98 (1999), 307-320.
- [16] DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Sociedade Brasileira de Matemática. Segunda Edição (2006).
- [17] ESTUDILLO, F. J. M. and ROMERO, A. *Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$ .* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 111 (1992), 515-524.
- [18] ESTUDILLO, F. J. M. and ROMERO, A. *On Maximal Surfaces in the  $n$ -Dimensional Lorentz-Minkowski Space.* Geometriae Dedicata, 38 (1991), 167-174.
- [19] FOLLAND, G. B. *Introdution to partial differential equations.* Princeton University Press, 2nd ed. (1995).
- [20] GALVEZ, J. A., MIRA, P. *The Cauchy problem for the Liouville equation and Bryant Surfaces.* Adv. Math. 195 (2005), 456-490.

- [21] GRAY, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces*. CRC Press, Boca Raton, FL (1993).
- [22] HANO, J. and NOMIZU, K. *Surfaces of Revolution with Constant Mean Curvature in Lorentz-Minkowski Space*. Tôhoku Math. Journ. 36 (1984), 427-437.
- [23] HANO, J. and NOMIZU, K. *On isometric immersions of the hyperbolic plane into the Lorentz-Minkowski space and the Monge-Ampère equation of a certain type*. Math. Ann. 262 (1983), 245-253.
- [24] HOFFMAN, K. and KUNZE, R. *Linear Algebra*. Second Edition. Prentice-Hall (1971).
- [25] KOBAYASHI, O. *Maximal Surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space  $\mathbb{L}^3$* . Tokyo J. Math. 6 (1983), 297-309.
- [26] KÜHNEL, W. *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds*. Second Edition, Volume 16, American Mathematical Society (2006).
- [27] LÓPEZ, F. J., LÓPEZ, R. and SOUAM, R. *Maximal surfaces of Riemann type in Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* . Michigan Math. J. 47 (2000), 469-497.
- [28] MARSDEN, J. E. and TIPLER, F. J. *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity*. Phys. Rep. 66 (1980), 109-139.
- [29] McNERTNEY, L. V. *One parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*. Ph. D. Thesis, Brown University (1980).
- [30] MERCURI, F. and ONNIS, I. *On the Björling problem in a three-dimensional Lie group*. Illinois J. Math. 53 (2009), 431-440.
- [31] MIRA, P. and PASTOR, J. A. *Helicoidal Maximal Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*. Monatsh. Math. 140 (2003), 315-334.
- [32] NABER, L. G. *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity* Springer-Verlag, New York, Inc. (1992).

- 
- [33] NITSCHKE, J. C. C. *Lectures on minimal surfaces*. Vol. I, Cambridge University Press (1989).
- [34] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, London (1983).
- [35] OSSERMAN, R. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover Phoenix Editions (1969).
- [36] RODRIGUES, C. M. F. *Teoria das Funções de Uma Variável Complexa*. Edições de Livros de Ensino Universitário (LEU) (1979).
- [37] SCHWARZ, H. A. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Springer-Verlag (1890).
- [38] TITCHMARSH, E. C. et al. *The Theory of Functions*. Second Edition. Oxford University Press (1939).
- [39] VAN DE WOESTIJNE, I. *Minimal Surfaces of the 3-dimensional Minkowski Space*. Geometry and topology of submanifolds, II. M. Boyon et al., eds. Singapore World Scientific (1990), pp. 344-369.