

Dissertação de Mestrado:
Soluções analíticas da equação de Burgers aplicada
à formação de estruturas no Universo

Munelar de Assis Falcão

25 de fevereiro de 2008

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, por estar sempre ao meu lado, me dando força e vontade de vencer os obstáculos que a vida nos oferece.

Aos meus pais, Munelar e Cêris, exemplos de vida, pelo apoio, paciência, amor e confiança depositados em mim, nesta longa caminhada.

A minha mulher, Luana, por ter me dado o bem mais precioso da vida, sem seu apoio, compreensão e companheirismo tudo seria muito mais difícil de conquistar.

Aos meus amigos, José Eudes e Maria, por simplesmente existirem. O apoio e suporte que vocês me ofereceram foram essenciais nesta conquista.

Ao meu orientador, Tarcísio Marciano da Rocha Filho, por ser a pessoa que é: correto, dedicado e competente. Possui um caráter louvável, que soube compreender as dificuldades e os obstáculos que a vida nos impõe para que possamos vencer e aprender. Um exemplo de professor e pesquisador. Muito obrigado por tudo.

Ao professor André Luís Batista Ribeiro, do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, um exemplo de professor e de caráter. Sua dedicação, confiança e conselhos foram essenciais na formação da minha vida acadêmica.

À professora Ana Paula Almeida Andrade, também do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, pelo auxílio nas simulações, nos testes com os parâmetros e na obtenção dos histogramas de distribuição de velocidades. Sua ajuda foi fundamental na obtenção dos resultados obtidos nesta dissertação.

Ao órgão financiador CAPES por ter me oferecido a bolsa de mestrado.

Resumo

A equação de Burgers atualmente tem sido aplicada a várias áreas do conhecimento científico, principalmente no estudo de formação de estruturas no Universo. Sua relevância vem aumentando a cada dia, devido à riqueza de dados observacionais que atualmente existe na literatura moderna. Sua forma mais geral é conhecida como equação generalizada de Burgers com ruído e foi proposta por Ribeiro e Peixoto de Faria (2005). Conhecer suas soluções exatas e escritas de forma clara é de muito interesse astrofísico. Com esse intuito apresentamos, neste trabalho, soluções invariantes sob simetrias de Lie da equação generalizada de Burgers sem o termo estocástico, obtidas a partir do pacote de análises de simetrias de equações diferenciais (SADE) escrito em MAPLE, desenvolvido no IF-UnB. Posteriormente, simulamos uma distribuição de velocidades a partir de algumas soluções invariantes escolhidas dentre as 220 obtidas, e comparamos com uma distribuição de velocidades peculiares observacionais.

Abstract

The Burgers equation has been applied to several fields of scientific knowledge, and particularly to the study of formation of structures in Universe. His relevance still increases, due to the wealth of observational data in modern literature. His most general form is the generalized Burgers equation with noise as proposed for Ribeiro and Peixoto de Faria [24]. The knowledge of analytical solutions is of great interest in astrophysics. With this objective we present, in this work, invariant solutions under Lie symmetries of the generalized Burgers equation without noise using algebraic computation, and the package Symmetry Analysis of Differential Equations (SADE), written in MAPLE. Subsequently, we simulate a distribution of velocities from some invariants solutions chosen among those obtained, and correlate with a distribution of observational peculiar velocities.

Sumário

1	Introdução	6
2	Formação de Estruturas no Universo	9
2.1	Teoria de perturbações lineares	9
2.1.1	As equações do fluido em coordenadas eulerianas	9
2.1.2	As equações em coordenadas lagrangeanas	10
2.2	Campos de velocidades peculiares	14
2.3	Movimentos peculiares do fluido	16
2.4	Modelo da adesão	18
2.5	Generalização do modelo da adesão	19
3	Simetrias de Lie de Equações Diferenciais	21
3.1	Grupos e álgebras de Lie	22
3.1.1	Grupo	22
3.1.2	Espaço topológico	22
3.1.3	Variedade diferenciável	23
3.1.4	Grupo de Lie	24
3.1.5	Álgebra de Lie	24
3.2	A condição de simetria para equações diferenciais ordinárias	28
3.3	O gerador infinitesimal	30
3.4	As equações determinantes para as simetrias de ponto de Lie	31

3.5	Condição de simetria linearizada para EDP's gerais	33
3.6	Coordenadas canônicas	34
4	Equações de Burgers	39
4.1	Equação de Burgers unidimensional	40
4.2	Equação de Burgers vetorial	42
4.3	Equação de Burgers sem ruído	43
4.4	Equação de Edwards-Wilkinson	46
4.5	Equação de difusão	47
4.6	Difusão nula ($\nu = 0$)	49
4.7	Movimento inercial: $\nu = 0$ e $\lambda = 0$	49
5	Resultados	50
5.1	Os geradores infinitesimais da equação de Burgers	54
5.2	Soluções invariantes por simetrias de Lie da equação de Burgers	56
5.2.1	Soluções constantes	56
5.2.2	Soluções lineares no tempo	57
5.2.3	Soluções estacionárias	60
5.2.4	Soluções temporais	62
5.2.5	Soluções triviais:	
	$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0$	62
5.2.6	Soluções complexas	64
5.2.7	Soluções contendo funções e parâmetros arbitrários	64
5.3	Discussões	65
5.3.1	Obtenção das posições de galáxias	67
5.3.2	Análise	68
6	Conclusões e perspectivas futuras	78

Capítulo 1

Introdução

A matéria no Universo apresenta-se organizada em estruturas. Usando as galáxias como unidades estruturais básicas, podemos observar diferentes tipos de sistemas extragalácticos ao longo de uma extensa hierarquia que vai desde pequenos grupos, formados por três ou quatro membros, até os proeminentes aglomerados e superaglomerados de galáxias que podem abrigar centenas ou milhares de objetos. A origem dessas estruturas está provavelmente ligada ao mecanismo de instabilidade gravitacional, segundo o qual pequenas flutuações na distribuição de massa seriam amplificadas sob a ação da força gravitacional. Essas perturbações podem ser descritas pelas equações da hidrodinâmica, se consideramos o Universo como um imenso fluido. Dentre essas equações, a que nos será mais útil neste trabalho é a equação de Euler, que por sua vez descreve o movimento de um elemento de fluido através do campo de velocidades.

Na ausência de inhomogeneidades, partículas comóveis em um Universo de Friedmann terão as suas velocidades determinadas pela lei de Hubble. Esta seria a situação de um fluido não perturbado. As inhomogeneidades no Universo, porém, perturbariam o fluxo de Hubble e induziriam velocidades “peculiares” às galáxias [22]. Dessa forma, as partículas deixam de seguir um movimento inercial e passam a se deslocar em direção às regiões onde existem maiores concentrações de massa,

propiciando a formação de estruturas.

Usando coordenadas comóveis, a equação hidrodinâmica de Euler para o fluido cósmico se escreve:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{\nabla} \phi = 0, \quad (1.1)$$

e.g. [5], onde ϕ é o potencial gravitacional e τ o tempo conforme $d\tau = dt/a(t)$, e $a(t)$ é o fator de escala [28]. Alguns autores omitem o termo de pressão, admitindo um fluido estritamente acolisional no qual as interações se dão apenas gravitacionalmente.

Uma maneira de estudar soluções da equação de Euler é determinar a evolução das perturbações das soluções da equação linearizada até os modos entrarem no regime não-linear. Simulações realizadas com a equação de movimento puramente inercial, o chamado modelo de Zel'dovich [25], indicam a formação de estruturas planares que, no entanto, se desfazem rapidamente. Isso sugere a introdução de um termo de viscosidade na equação de movimento para que haja mais aderência entre as estruturas, tornando os objetos formados mais duradouros. Tal mudança foi denominada de Modelo da Adesão, e foi proposta por Shandarin [10], colocando o fluido em um regime difusivo não-linear. No contexto da hidrodinâmica granular, onde as estruturas são estudadas em um nível mesoscópico (nível de descrição *coarse-grained* para o fluido), a introdução do termo difusivo na equação do fluido (Modelo de Adesão) pode ser fisicamente justificada [24]. Além disso, os efeitos difusivos gerados pela viscosidade podem ser de natureza estocástica, o que leva à generalização do modelo da adesão [23]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = \nu \nabla^2 \vec{u} + \lambda (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} \eta, \quad (1.2)$$

que é a *equação generalizada de Burgers com ruído*.

Neste trabalho apresentamos soluções particulares da equação (1.2) sem levar em conta o termo estocástico, que foram obtidas utilizando computação algébrica

intensiva, com a abordagem das simetrias de Lie e soluções invariantes de grupo, implementadas no pacote SADE (Symmetry Analysis of Differential Equations), desenvolvido no Grupo de Física Matemática do IF-UnB. As informações sobre este pacote foram submetidas pelos professores Tarcísio Marciano Rocha Filho e Anibal Figueiredo, a uma revista especializada [20]. De posse dessas soluções, procuramos interpretá-las em um contexto astrofísico. Com a ajuda dos professores André Luís Batista Ribeiro e Ana Paula Almeida Andrade, realizamos simulações de Monte Carlo, gerando um catálogo *Mock*, que juntamente com dados observacionais de campos de velocidades peculiares, permitiram o estudo de algumas soluções da equação de Burgers (1.2) (sem o termo estocástico) escolhidas. Com as velocidades obtidas, comparamos o campo de velocidades teórico com os dados observacionais das velocidades peculiares. Esta comparação sugere que as soluções escolhidas podem ajustar bem os dados para intervalos restritos dos parâmetros.

Este trabalho está assim organizado: no segundo capítulo, apresentamos um resumo do problema físico que motivou esta dissertação. No terceiro capítulo, mostramos um resumo compacto sobre o grupo de simetrias de Lie para equações diferenciais ordinárias e parciais. No quarto capítulo, introduzimos as variações da equação de Burgers. E, finalmente, no quinto capítulo, mostramos os resultados obtidos e realizamos as devidas discussões.

Capítulo 2

Formação de Estruturas no Universo

2.1 Teoria de perturbações lineares

Assumindo o modelo de expansão do Universo de Friedmann-Lemaître e de acordo com a teoria de instabilidade gravitacional, as perturbações crescem a partir de pequenas flutuações na distribuição de massa e evoluem para as estruturas hoje observadas: galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias (Vide [22]). Essas perturbações de densidade, ou contrastes de densidade, são definidos por $\delta(\vec{x}, t) = \delta\rho/\rho$. Então a densidade de massa é dada pela expressão:

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}[1 + \delta(\vec{x}, t)], \quad (2.1)$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade de massa média.

2.1.1 As equações do fluido em coordenadas eulerianas

Utilizaremos a abordagem newtoniana (pressão do fluido $p \ll$ densidade de massa média do fluido ρ) para acompanhar a evolução do fluido cósmico, uma boa aproximação levando-se em conta as escalas de tamanho ($\lesssim 100$ Mpc) e velocidade ($\lesssim 10.000$ Km s⁻¹) que serão estudadas e os contrastes de densidade típicos encontrados no contexto extragaláctico.

A matéria será tratada como um fluido ideal, o que nos permite a utilização das três equações usuais da hidrodinâmica, isto é, a equação da continuidade, a equação de Euler e a equação de Poisson. Sabendo que o fluido é caracterizado pelos campos de densidade $\rho(\vec{r}, t)$, de pressão $p(\vec{r}, t)$ e de velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t)$, e sendo o potencial gravitacional $\phi(\vec{r}, t)$ dado em cada ponto como um funcional da distribuição de densidade, temos que essas equações podem ser escritas em coordenadas eulerianas, como passamos a descrever.

- Equação da continuidade, que descreve a conservação da massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

- Equação de Euler, que descreve o movimento de um elemento do fluido:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \phi.$$

- Equação de Poisson, que descreve o potencial auto-gravitacional devido à distribuição de densidade:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho.$$

O campo de velocidades \vec{v} e a densidade de massa ρ são ambas funções das coordenadas físicas \vec{r} e do tempo t . As derivadas parciais nessas equações são calculadas com respeito às coordenadas próprias \vec{r} . Mas devido à equação (2.1), é necessário utilizarmos coordenadas comóveis. A relação entre os dois sistemas de coordenadas e a descrição das equações da hidrodinâmica no sistema comóvel são mostradas na próxima subseção.

2.1.2 As equações em coordenadas lagrangeanas

É conveniente a mudança de coordenadas para que a expansão do Universo seja excluída das três equações anteriores. Para tal utilizaremos coordenadas lagrangeanas, ou comóveis, para acompanhar a expansão do Universo explicitamente.

Definimos um vetor posição de um ponto arbitrário \vec{x} nas coordenadas comóveis de tal forma que:

$$\vec{x}(t) = \frac{\vec{r}(t)}{a(t)},$$

onde $a(t)$ é o fator de escala cósmico e \vec{r} o vetor posição em um sistema de coordenadas físicas.

A velocidade própria \vec{v} de um ponto arbitrário se escreve então como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}},$$

definindo $H(t) = \dot{a}/a$ como a função de Hubble em um tempo t qualquer, temos que:

$$\vec{v} = a(t)\frac{d\vec{x}}{dt} + H(t)\vec{x},$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é devido à perturbação na velocidade em relação ao movimento comóvel, que denominamos de velocidade peculiar

$$\vec{v}_p = a(t)\frac{d\vec{x}}{dt}.$$

O segundo é a velocidade devida a expansão do Universo, ou como é comumente chamada, o fluxo de Hubble, $\vec{v} = H_0\vec{x}$, onde a constante de Hubble no tempo presente vale:

$$H_0 = 100 \times h \times km \ s^{-1} Mpc^{-1}; 0.5 \leq h \leq 1,$$

o parâmetro h está relacionado à incerteza observacional no valor da constante de Hubble. Portanto, as equações do fluido podem ser reescritas como:

→ Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H\rho + \frac{1}{a}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}_p) = 0. \quad (2.2)$$

→ Equação de Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}_p}{\partial t} + \frac{1}{a}(\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_p + H\vec{v}_p = -\frac{1}{a}\vec{\nabla}\phi. \quad (2.3)$$

→ Equação de Poisson:

$$\frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi = 4\pi G(\rho - \bar{\rho}), \quad (2.4)$$

onde $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ é a densidade média do Universo no tempo t .

Omitimos o termo de pressão da equação de movimento, pois na abordagem newtoniana a única interação considerada no meio é a gravitacional.

Vamos assumir que δ , \vec{v} e todos os gradientes sejam valores pequenos, isto é muito menor do que a unidade [28]. Assim, podemos linearizar as equações (2.2-2.4). Tomando o divergente da equação de Euler, eliminando $\nabla \cdot \vec{v}$ usando a equação da continuidade e substituindo por $\nabla^2 \phi$ da equação de Poisson, encontramos:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \tau^2} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta,$$

onde consideramos o tempo conforme $d\tau = dt/a(t)$ [28]. Esta é a equação de evolução temporal para o contraste de densidade de massa na teoria de perturbação linear. Sua solução geral pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\delta(\vec{x}, \tau) = A(\vec{x}) f_1(\tau) + B(\vec{x}) f_2(\tau).$$

Usando as definições padrão do parâmetro de Hubble, $H = \dot{a}/a$, e do parâmetro de densidade, $\Omega = 8\pi G \bar{\rho}/3H^2$, a equação para a evolução do contraste de densidade em um Universo livre de pressão torna-se

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \tau^2} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} - \frac{3}{2} \Omega \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \delta = 0. \quad (2.5)$$

A solução da equação (2.5) é particularmente simples para o Universo de Einstein-de Sitter. Temos então $\Omega = 1$, $a \propto t^{2/3} \propto \tau^2$,

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{\tau},$$

e

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\tau} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} - 6 \frac{\delta}{\tau^2} = 0.$$

Se tentarmos uma solução da forma $\delta \propto \tau^\alpha$ encontramos $\alpha = 2$ ou $\alpha = -3$. O *modo de crescimento* é dado pela relação $\delta \propto \partial/\partial\tau \propto \tau^2 \propto t^{2/3} \propto a$, enquanto que o *modo de decaimento* é dado por $\delta \propto \tau^{-3} \propto 1/t \propto a^{-3/2}$. Onde consideramos a constante cosmológica Λ nula.

A solução para universos com densidade baixa é um pouco mais complicada. Considere a equação de Friedmann em sua forma padrão:

$$H^2 = \frac{8\pi G\bar{\rho}}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3},$$

onde κ é a constante de curvatura. Ela é facilmente escrita na forma

$$H_0^2 \Omega_0 (\Omega^{-1} - 1) \frac{a_0^3}{a^3} = -\frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3},$$

onde o índice 0 refere-se a valores em algum tempo aceito como padrão de comparação (geralmente, a época atual). Para um Universo aberto com constante cosmológica nula temos que $\kappa < 0$ e

$$(\Omega^{-1} - 1) \propto a \rightarrow \Omega = \frac{1}{1 + \frac{a}{a_c}},$$

onde a_c é um valor para o fator de escala quando $\Omega = 0.5$. Para a densidade com valor baixo considerando o Universo plano, temos que $\kappa = 0$, $\Lambda > 0$, e

$$(\Omega^{-1} - 1) \propto a^3 \rightarrow \Omega = \frac{1}{1 + \frac{a^3}{a_c^3}}.$$

Atualmente, o valor mais aceito para o parâmetro de densidade é muito menor do que a unidade, e o termo de condução na equação (2.5), $2/3 \times \Omega(\dot{a}/a)^2\delta$, torna-se pequeno. Como resultado, o modo crescente satura e as estruturas param de crescer.

Para um melhor aprofundamento sobre a teoria de Newton para a formação de estruturas no Universo indicamos ao leitor as referências [22, 28].

2.2 Campos de velocidades peculiares

Em um Universo de Friedmann perfeitamente homogêneo, as partículas comóveis terão velocidades somente determinadas pelo fluxo de Hubble. Introduzindo-se inhomogeneidades, o fluxo de Hubble será perturbado, resultando em velocidades peculiares das partículas. Essas velocidades podem-nos revelar informações valiosas acerca da distribuição de massa, e vice-versa [22].

As velocidades peculiares de galáxias emergem da teoria linear. A equação da conservação da massa (2.2) linearizada é dada por

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_p = 0, \quad (2.6)$$

onde $\delta = \delta\rho/\rho$. Os cálculos são bastante simplificados se transferirmos essa equação para o espaço de Fourier, onde podemos tratar cada comprimento de onda separadamente. Sendo assim, as transformações de Fourier para o contraste de densidade e para a velocidade peculiar são dadas, respectivamente, pelas expressões:

$$\delta(\vec{x}, t) = \sum_k \delta_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

e

$$\vec{v}_p(\vec{x}, t) = \sum_k \vec{v}_p^k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}},$$

sendo k o número de onda de cada modo de perturbação. Inserindo essas duas equações na equação (2.6), e rearranjando os termos, temos que as velocidades peculiares resultantes são:

$$\vec{v}_p^k = -ia \frac{\partial \delta_k}{\partial t} \frac{\vec{k}}{k^2}. \quad (2.7)$$

O fator $\partial \delta_k / \partial t$ pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial \delta_k}{\partial t} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_k f(a), \quad (2.8)$$

onde $f(a) = \partial \ln \delta_k / \partial \ln a$. Combinando as equações (2.7) e (2.8), tem-se uma expressão para a relação entre a velocidade peculiar e a densidade:

$$\vec{v}_p^k = -ia \delta_k f(a) \frac{\vec{k}}{k^2}. \quad (2.9)$$

O valor de $f(a)$ tem uma boa aproximação dada pela lei de potência $\Omega_0^{0.6}$ [22]. Usando esse valor para $f(a)$, vemos que o parâmetro de densidade pode ser estimado se o campo de velocidades e o campo de densidades forem determinados observacionalmente. O problema é obter uma determinação suficientemente exata do campo de velocidades, onde envolve distâncias não baseadas em *redshift*.

No quadro da instabilidade gravitacional presume-se que a gravidade é que faz as perturbações crescerem. Introdz-se então o potencial gravitacional em vez do contraste de densidade δ_k . A equação de Poisson (2.4) linearizada é

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta.$$

Resolvendo-a usando a transformação de Fourier para o contraste de densidade, obtemos:

$$\delta_k = -\frac{k^2}{4\pi G \bar{\rho} a^2} \phi_k.$$

Inserindo esta última na equação (2.9) resulta em uma expressão que conecta o campo de velocidades com o potencial gravitacional:

$$\vec{v}_p^k = i \frac{2f(a)}{3H\Omega a} \vec{k} \phi_k.$$

Voltando ao espaço real, teremos:

$$\vec{v}_p = -\frac{2f(a)}{3H\Omega a} \vec{\nabla} \phi.$$

Para um sistema de partículas com massa m_i , essa equação pode ser reescrita do seguinte modo

$$\vec{v}_p = -\frac{2f(a)G}{3H\Omega a^2} \sum_j m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}}{|\vec{x}_j - \vec{x}|^3}.$$

Esta equação nos mostra que o campo de velocidades é paralelo e proporcional à aceleração peculiar, e portanto à força gravitacional.

Para mais detalhes referente ao campo de velocidades peculiares sugerimos a referência [22].

2.3 Movimentos peculiares do fluido

Para tratarmos as equações de movimento mais adequadamente, vamos introduzi-las em um contexto em que possamos acompanhar somente os movimentos peculiares do fluido, ou seja, para que possamos observar somente o movimento das partículas que se desviam do fluxo de Hubble. Isso é conseguido realizando uma nova mudança de variáveis, denominadas variáveis de Zel'Dovich [11]:

- Para o tempo t :

$$t = b,$$

onde $b \equiv b(t)$ representa a variável que quantifica as perturbações das posições dos elementos de fluido em torno da coordenada comóvel \vec{x} . De forma geral, o vetor posição nas coordenadas comóveis é definido como se segue:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} + b(t)\mathcal{P}(\vec{x}),$$

onde o primeiro termo descreve a expansão uniforme (fluxo de Hubble) e o segundo as perturbações das posições das partículas em torno da coordenada comóvel \vec{x} .

- Para a densidade ρ :

$$\rho \cdot a^3 = \varrho.$$

- Para a velocidade peculiar \vec{v}_p :

$$\frac{1}{a \cdot \dot{b}} \vec{v}_p = \frac{dx}{db} = \vec{u}.$$

- Para a perturbação no potencial gravitacional ϕ :

$$\left(\frac{3}{2}\Omega_0\dot{a}^2b\right)^{-1} \phi = \Phi,$$

onde

$$\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho}{3H_0^2},$$

é o parâmetro de densidade na época atual.

Dessa forma, as equações do fluido, em termos das coordenadas de Zel'dovich, são reescritas como segue.

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial b} + \vec{\nabla}(\varrho \vec{u}) = 0. \quad (2.10)$$

- Equação de Euler:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{3}{2} \frac{\Omega_0}{b f^2} \nabla(\Phi - \theta), \quad (2.11)$$

onde $f(t) = d \ln b / \ln a$.

- Equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\delta}{b}, \quad (2.12)$$

onde $\delta = (\varrho - \bar{\varrho})/\bar{\varrho} = (\rho - \bar{\rho})/\bar{\rho}$.

Na equação (2.11), o campo de velocidade é considerado como um gradiente de um potencial velocidade θ , $\vec{u} = \nabla\theta$. Isso somente é possível se o movimento for linear, e que os fluxos de partículas não se cruzem. No regime linear, θ é constante e igual ao potencial gravitacional nas novas coordenadas Φ , igualando a zero o lado direito dessa mesma equação:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = 0, \quad (2.13)$$

que representa a aproximação de Zel'Dovich [3].

Simulações com N -corpos com essas coordenadas indicam a formação de uma distribuição de densidade em um espaço euleriano com um achatamento nas extremidades, que é conhecida em cosmologia como “panquecas”, e as hipóteses simplificadoras como *Aproximação de Zel'dovich*. Todavia, as simulações mostraram que as estruturas formadas nesta descrição se desfazem rapidamente, fato este não observado na natureza [25]. Esse resultado motivou as bases físicas para a introdução da *Aproximação da Adesão*.

2.4 Modelo da adesão

A idéia geral do modelo da adesão é utilizar os resultados obtidos por Zel'Dovich em todo o espaço, menos nas regiões de fluxos de multi-correntes ou de trajetórias cruzadas. Estas regiões onde começam a acontecer cruzamentos de trajetórias, marcam a transição de um regime linear para um regime não-linear. Para anular a formação de regiões desse tipo é introduzido, de forma “ad hoc”, um termo de difusão na equação de Euler. O termo adicional escolhido para ser introduzido na equação (2.13), equivale à viscosidade, $\nu \nabla^2 \vec{u}$, dessa forma obtemos a equação de difusão não-linear:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (2.14)$$

A introdução desse termo viscoso dá uma “aderência” às estruturas formadas nas simulações de N -corpos, impossibilitando que elas se desfaçam com facilidade, tornando-as mais duradouras [25]. Não há necessidade para que o termo de viscosidade tenha a forma que foi dada na equação (2.14). No entanto, tal escolha resultará, com algumas considerações adicionais, na equação de Burgers, que possui soluções analíticas exatas, mas na forma de uma série complicada e de difícil interpretação [25]. Para $\vec{u} = \vec{\nabla} \Phi$, a equação diferencial anterior pode ser resolvida utilizando a transformação de Hopf-Cole $\Phi(\vec{x}, b) = -2\nu \log U(\vec{x}, b)$. Desta forma, (2.14) transforma-se em uma equação de difusão linear

$$\frac{\partial U}{\partial b} = \nu \nabla^2 U,$$

que resolvida para \vec{u} leva a

$$\vec{u}(\vec{x}, b) = \frac{\int \exp \left[\frac{-S(\vec{x}, b; \vec{q})}{2\nu} \right] \left(\frac{\vec{x} - \vec{q}}{b} \right) d^3 q}{\int \exp \left[\frac{-S(\vec{x}, b; \vec{q})}{2\nu} \right] d^3 q},$$

onde a ação S é dada pela expressão

$$S(\vec{x}, b; \vec{q}) = -\Phi_0(\vec{q}) + \frac{(\vec{x} - \vec{q})^2}{2b},$$

e \vec{q} permite mapear o espaço lagrangeano $L(q)$ no espaço euleriano $E(x)$:

$$\vec{x}(\vec{q}, b) = \vec{q} + b \cdot \vec{v}_0(\vec{q}),$$

[25].

2.5 Generalização do modelo da adesão

Tanto a aproximação de Zel'Dovich, quanto o modelo da adesão, são relativamente antigos na literatura. Atualmente há uma riqueza de dados observacionais e numéricos que exigem modelos mais adequados e mais sofisticados para descrever a formação de estruturas em grandes escalas.

Na referência [24] foi proposta uma generalização do modelo da adesão, introduzindo a formação de estruturas no Universo em um contexto de hidrodinâmica granular, onde as estruturas formadas são estudadas em um nível mesoscópico. Usualmente o fluido cosmológico é um fluido onde as partículas são galáxias. Por sua vez, o fluido mesoscópico é aquele em que não somente as galáxias estão presentes, mas também os seus agregados, sistemas de galáxias (grupos, aglomerados e superaglomerados). Nesse caso, por causa da cinética granular, os efeitos dissipativos provocados no fluido pela viscosidade podem ter um comportamento estocástico. Esse efeito estocástico é modelado por um ruído gaussiano η satisfazendo:

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \Delta \delta(x - x') \delta(t - t').$$

Dessa forma, com as considerações acima, a dinâmica para o fluido cosmológico fica descrita pela equação:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = \lambda \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{\nabla} \eta, \quad (2.15)$$

onde o parâmetro λ foi introduzido para controlar o nível de não-linearidade no problema:

- Se $\lambda = 0$ então estamos em um regime linear difusivo-estocástico.
- Se $\lambda \gg 1$ então estamos em um regime difusivo-estocástico fortemente não-linear.
- Se λ for um número pequeno ($0 < \lambda < 1$) então estamos em um regime difusivo-estocástico fracamente não-linear.

A equação (2.15) é conhecida na literatura como *equação generalizada de Burgers com ruído*, onde $\partial\vec{u}/\partial b$ é a aceleração devida à segunda lei de Newton, $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ é o termo não-linear denominado termo de transporte (no sentido de acoplamento), $\nu\nabla^2\vec{u}$ é o termo de viscosidade e $\vec{\nabla}\eta$ é o termo estocástico.

Capítulo 3

Simetrias de Lie de Equações Diferenciais

A determinação de soluções analíticas de equações diferenciais, ordinárias e parciais, é certamente de grande importância para o desenvolvimento e a compreensão de Teorias Físicas. Obtê-las é, na maioria das vezes, uma tarefa difícil, quando realizável. A dificuldade e o volume de cálculos envolvidos é tamanha que o uso de computação simbólica intensiva é indispensável. A teoria matemática que é a base dos métodos que utilizamos nesta dissertação é a das Simetrias de Lie e das soluções invariantes de grupo.

A teoria desenvolvida por Sophus Lie envolve os conceitos de grupo e de variedade diferenciável, introduzindo o conceito de grupos de simetrias de sistemas de equações diferenciais, que transformam solução em solução, e as correspondentes álgebras de Lie das transformações infinitesimalmente próximas à origem. Como veremos, mesmo no caso de equações não-lineares, a determinação de suas simetrias de Lie envolve a solução de um sistema de equações diferenciais parciais lineares, cuja solução pode ser algoritmizada e implementada em computação algébrica. Neste capítulo, apresentaremos um resumo simples da teoria que envolve as simetrias de equações diferenciais juntamente com o conceito de soluções invariantes, em que tomamos como base a referência [13]. Uma revisão mais formal da teoria é encontrada na referência [19].

3.1 Grupos e álgebras de Lie

3.1.1 Grupo

Seja G um conjunto. G é dito ser um grupo quando é possível definir uma lei de composição, que simbolizaremos por \cdot , que satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 3.1.1.1 *Se $a, b, c \in G$ então $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;*

Axioma 3.1.1.2 *Existe um elemento de G , que denotamos de e e denominado de elemento neutro ou unidade de G , para qual $e \cdot a = a \cdot e = a$, para todo $a \in G$;*

Axioma 3.1.1.3 *Para todo $a \in G$ existe um elemento denotado por a^{-1} e denominado de inverso de a , para qual $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.*

3.1.2 Espaço topológico

Vamos definir S como um conjunto e definir D como uma coleção de conjuntos, contidos em S : $D = \{A_1, A_2, \dots\}$ onde $(A_1, A_2, \dots \subset S)$. Dizemos que D define uma topologia em S se as seguintes condições forem satisfeitas para todo $A_1, A_2 \in D$:

1. $A_1 \cup A_2 \in D$;
2. $A_1 \cap A_2 \in D$;
3. $S \subset D$.

O espaço S , munido da topologia D , é dito ser um *espaço topológico*, e os elementos de D são chamados de abertos de S . Uma vizinhança de um ponto $p \in S$ é um conjunto $V \subset S$ que contenha um aberto de S .

Podemos então falar de aplicações contínuas entre dois espaços topológicos S e S' . Seja $f : S \rightarrow S'$ uma aplicação. A aplicação é dita contínua no ponto $p \in S$ se, para qualquer vizinhança V' de $f(p)$, existir um vizinhança V de p tal que $f(V) \subset V'$.

3.1.3 Variedade diferenciável

Um espaço topológico é dito ser uma *variedade* se para todo ponto $p \in S$ existe uma vizinhança V_p que seja levada em um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , para algum n , por uma aplicação bijetiva $\phi_{V_p} : V_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, no sentido dado acima. O menor valor possível de n é denominado de dimensão da variedade S . Dessa maneira, é possível definir sistemas de coordenadas nas vizinhanças de todos os pontos de S , as coordenadas de p sendo dadas por:

$$\phi_{V_p}(p) \equiv (x^1(p), \dots, x^n(p)).$$

A associação ϕ_{V_p} é denominada de *carta* na vizinhança V_p . Dessa maneira, podemos usar os abertos da topologia definida em S para construir um conjunto de cartas de maneira a recobrir S , cartas essas que podem ter interseções nulas. Esse conjunto de cartas é denominado de *atlas* em S .

Vamos supor que um ponto $p \in S$ pertença a duas vizinhanças V_r e V_s . Sabemos que $U = V_r \cap V_s$ é também uma vizinhança de p . Temos assim definidos dois sistemas de coordenadas em U , dados pelas cartas ϕ_{V_r} e ϕ_{V_s} , que denotamos por $\{x^i\}$ e $\{y^i\}$, respectivamente, com $i = 1, \dots, n$. Podemos passar livremente de um sistema para outro da seguinte maneira:

$$(x^1, \dots, x^n) = \phi_{V_s} \circ \phi_{V_r}^{-1}(y^1, \dots, y^n),$$

ou

$$(y^1, \dots, y^n) = \phi_{V_r} \circ \phi_{V_s}^{-1}(x^1, \dots, x^n).$$

Dessa forma, definimos uma mudança de coordenadas em U . Dizemos então que S é uma variedade C^k se as funções das mudanças de coordenadas nas intersecções de duas cartas forem C^k (contínuas e k vezes diferenciáveis). Uma variedade C^1 é denominada de *variedade diferenciável*.

3.1.4 Grupo de Lie

Seja S um grupo com estrutura de variedade diferenciável. Podemos então associar a cada ponto $p \in S$ um conjunto de coordenadas $\alpha_i^p = \phi_i(p)$. A lei de composição do grupo pode então ser expressa em termos das coordenadas dos elementos do grupo, ou seja, se $p, q, r \in S$ e $r = p \cdot q$, onde \cdot é a lei de composição, então temos que:

$$\alpha_i^r = f_i(\alpha^p, \alpha^q). \quad (3.1)$$

Se as funções forem arbitrárias, isto é, funções contínuas C^∞ , então S é dito ser um *grupo de Lie*. Pode-se mostrar que para determinar o sub-grupo conexo à identidade de um grupo de Lie basta conhecer a vizinhança da identidade [13, 19]

Observação: A rigor, a condição que S seja uma variedade C^∞ não é necessária. Muitas vezes basta requerer que seja C^k para um k finito. A condição C^∞ é apenas uma maneira de garantirmos que as funções que definem as mudanças de variáveis sejam diferenciáveis o quanto for necessário.

3.1.5 Álgebra de Lie

Considere um grupo de simetria S a m parâmetros $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (m é a dimensão de S) agindo no espaço F das funções de classe C^1 em \mathbb{R}^n . Denotamos então um elemento de S pelo operador $g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ que corresponde à transformação de coordenadas, e assumimos, sem perda de generalidade, que a parametrização é tal que $g(0, \dots, 0)$ corresponde ao elemento unidade de S , ou seja, à transformação identidade. A ação de um elemento de S em F é dada por ($f \in F$):

$$f'(x) = f(x') = g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)f(x), \quad (3.2)$$

onde $x = (x^1, \dots, x^n)$ e $x' = g(\alpha_1, \dots, \alpha_m)x$. Tomemos agora os $\alpha_i = 0$ exceto para $i = k$, para o qual $\alpha_k \ll 1$. Temos então que:

$$x'^i - x^i = \alpha^k \eta^i(x),$$

para certas funções η^i . Expandindo o lado esquerdo de (3.2) obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x + \alpha_k \eta) = \left(1 + \alpha_k \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f(x) \\ &= g(0, \dots, \alpha_k, \dots, 0) f(x), \end{aligned}$$

com $\eta^i = (\eta^1, \dots, \eta^n)$. Da mesma maneira, podemos mostrar que para todos os $\alpha_i \ll 1$ temos que:

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) f(x) = \left(1 + \sum_{i,k} \alpha_k \eta_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f(x). \quad (3.3)$$

Dizemos então que os operadores:

$$I_k = \eta_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

são os geradores infinitesimais do grupo de Lie S . O termo gerador vem do fato que os operadores I_k permitem construir o grupo S , como veremos mais adiante. Para o caso das simetrias de equações diferenciais, os geradores representam as transformações infinitesimais de simetria. Para mostrar a importância dos geradores infinitesimais, tomamos um elemento de S com parâmetros $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ agindo em um elemento $f \in F$. O resultado é um elemento de F , que denotamos por $F[\alpha]$, enquanto que o elemento original é denotado de maneira óbvia por $f[0]$. Temos assim que

$$f[\alpha] = g(\alpha) f[0].$$

Multiplicamos à esquerda por $g(\beta)$:

$$g(\beta) f[\alpha] = g(\beta) g(\alpha) f[0] = f[\gamma], \quad (3.5)$$

onde os parâmetros $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ são dados por (3.1):

$$\gamma_i = h_i(\beta, \alpha).$$

Podemos também escrever que

$$\beta_i = h_i(\gamma, \tilde{\alpha}),$$

onde $\tilde{\alpha}_a$ são os parâmetros da inversa do elemento de parâmetros α_a , de modo que obtemos de (3.5):

$$g(h(\gamma, \tilde{\alpha}))f[\alpha] = f[\gamma], \quad (3.6)$$

onde temos dois conjuntos de parâmetros independentes, α e γ (e os das suas respectivas inversas). Se supormos que α é próximo de γ , isto é, $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\gamma}_i + \epsilon \tilde{\xi}_i$, e usando (3.3) e (3.4), teremos que

$$g(h(\gamma, \tilde{\alpha})) = 1 + \sum_{i,j} \frac{\partial h_i(\gamma, \beta)}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta=\tilde{\gamma}} \epsilon \tilde{\xi}_i I_j,$$

e de (3.6) decorre que

$$\epsilon \sum_{i,j} \frac{\partial h_i(\gamma, \beta)}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta=\tilde{\gamma}} \epsilon \tilde{\xi}_i I_j f[\alpha] = f[\gamma] - f[\alpha] = -\epsilon \sum_i \frac{\partial f[\gamma]}{\partial \gamma_i} \tilde{\xi}_i, \quad (3.7)$$

onde $\tilde{\xi}_i = -\xi_i$, sendo que nesse caso $g(\beta)$ corresponde a uma transformação infinitesimal de parâmetros ξ_i . Como (3.7) é verdadeira para qualquer ξ_i , temos

$$\sum_j S_{ij} I_j f[\gamma] = \frac{\partial f[\gamma]}{\partial \gamma_i}, \quad (3.8)$$

com

$$S_{ij} = - \frac{\partial h_i(\gamma, \beta)}{\partial \beta_i} \Big|_{\beta=\tilde{\gamma}},$$

que é o sistema de equações diferenciais de primeira ordem para $f[\alpha]$, com a condição inicial

$$f[\alpha]|_{\alpha=0} = f[0]. \quad (3.9)$$

A equação (3.8) em conjunto com (3.9) determina $f[\alpha]$ de forma única. Assim se os geradores infinitesimais de dois grupos S e S' coincidem, então $S \equiv S'$ necessariamente.

Comentário: Na verdade apenas as partes de S e S' que podem ser conectadas continuamente à identidade são iguais.

A condição suficiente e necessária para que (3.8) tenha solução é

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_j \partial \gamma_i}. \quad (3.10)$$

A relação (3.8) nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} &= \sum_k \left[\frac{\partial S_{ik}}{\partial \gamma_b} I_k f[\gamma] + S_{ik} I_k \frac{\partial f[\gamma]}{\partial \gamma_j} \right] \\ &= \sum_k \left[\frac{\partial S_{ik}}{\partial \gamma_j} I_k f[\gamma] + \sum_l S_{ik} S_{jl} I_k I_l f[\gamma] \right], \end{aligned}$$

e assim temos de (3.10) que

$$\sum_{k,l} S_{ik} S_{jl} (I_k I_l - I_l I_k) f[\gamma] = \sum_k \left[\frac{\partial S_{jk}}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial S_{ik}}{\partial \gamma_j} \right] I_k f[\gamma], \quad (3.11)$$

e tomando $\gamma = (0, \dots, 0)$ (o elemento identidade) temos

$$S_{ij} = \delta_{ij},$$

e, como(3.11) vale para toda função f , obtemos

$$I_i I_j - I_j I_i = \sum_k C_{ij}^k I_k, \quad (3.12)$$

que são as relações de comutação entre os geradores do grupo, e C_{ij}^k são constantes de estrutura que caracterizam o grupo.

Como (3.10) são também condições suficientes, se conhecermos um conjunto de operadores lineares $\{I_i\}$ que satisfaçam (3.12), poderemos integrar (3.8) e assim construir o correspondente grupo de Lie. É evidente de (3.12) que as constantes de estrutura possuem a seguinte propriedade:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k.$$

Os geradores infinitesimais I_i geram um espaço vetorial de dimensão m . O espaço vetorial gerado pelos geradores I_i de grupo de Lie, munido da operação de comutação

$$[A, B] \equiv AB - BA, \quad (3.13)$$

possui a estrutura de álgebra, notando apenas que o comutador de dois elementos do espaço vetorial é um outro elemento do espaço, como podemos ver de (3.12). Uma álgebra é caracterizada pelos axiomas de grupo em conjunto com os de espaço vetorial. Se além disso, o comutador (3.13) satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0,$$

dizemos que temos uma estrutura de *álgebra de Lie*. Em conclusão, todo grupo tem associado uma álgebra de Lie, que por sua vez pode ser usada para reconstruir a parte do grupo conexa à identidade. Mais ainda, toda álgebra de Lie permite gerar um grupo de Lie.

3.2 A condição de simetria para equações diferenciais ordinárias

Denominamos por simetria de Lie de um conjunto de equações diferenciais uma transformação que mantém invariante a forma de uma equação, e que depende apenas das variáveis dependentes (as incógnitas das equações). Generalização com as transformações dependendo das derivadas das incógnitas são possíveis (simetrias de Lie - Backlund [19]).

Considere equações diferenciais ordinárias (EDO's) da forma

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.14)$$

onde ω é uma função localmente suave de todos os seus argumentos e

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Uma simetria da equação (3.14) é um difeomorfismo que mapeia o conjunto de soluções da equação diferencial ordinária (EDO) nela própria, que leva curvas de soluções suaves em curvas de soluções suaves:

$$\Gamma : (x, y) \longrightarrow (x'(x, y), y'(x, y)).$$

Um difeomorfismo desse tipo é conhecido como *transformação de ponto*; se esta também for uma simetria, damos o nome de simetria de ponto de Lie. Nesta dissertação, vamos trabalhar somente com simetrias desse tipo.

Estendendo a ação de Γ nas derivadas $y^{(k)}$ em (3.14), temos que

$$\Gamma : (x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \longrightarrow (x', y', y'^{(1)}, \dots, y'^{(n)}),$$

onde

$$y'^{(k)} = \frac{d^k y'}{dx'^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Dessa forma, a condição de simetria para a equação (3.14) é

$$y'^{(n)} = \omega(x', y', y'^{(1)}, \dots, y'^{(n-1)}), \quad (3.15)$$

dado que a forma de (3.14) se mantêm.

Observação: As funções $y'^{(k)}$ são calculadas respectivamente usando a regra da cadeia como segue

$$y'^{(k)} = \frac{\partial y'^{(k-1)}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{D_x y'^{(k-1)}}{D_x x'}, \quad y'^{(0)} = y', \quad (3.16)$$

onde o operador D_x é a derivada total em relação a x :

$$D_x = \partial_x + y^{(1)} \partial_y + y^{(2)} \partial_y^{(1)} + \dots$$

Uma transformação de simetria pode depender também de um parâmetro

$$\Gamma_\epsilon : x_s \longrightarrow x'_s(x_1, \dots, x_N; \epsilon) \quad s = 1, 2, \dots, N,$$

onde

$$x'_s(x_1, \dots, x_N; \epsilon) = x_s + \epsilon \xi(x_1, \dots, x_L) + O(\epsilon^2), \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Simetrias desse tipo são denominados de *grupo de Lie a um parâmetro*. Tomando o parâmetro ϵ como infinitesimal obtemos a álgebra de Lie do grupo (vizinça da identidade).

Para quase todas as EDO's, a condição de simetria dada pela equação (3.15) é não-linear. A noção de simetria infinitesimal reduz esse problema a um problema linear, que tratamos a seguir.

3.3 O gerador infinitesimal

Vamos inicialmente considerar geradores infinitesimais com apenas uma variável independente x e uma variável dependente y . A generalização para o caso com qualquer número de variáveis independentes e dependentes é facilmente conseguido. Antes de definir o gerador infinitesimal, vamos introduzir a idéia de *vetor tangente*.

Definição 3.1 *A órbita de um grupo de Lie de simetrias a um parâmetro através de um ponto (x, y) é o conjunto de pontos*

$$(x', y') = (x'(x, y; \epsilon), y'(x, y; \epsilon)),$$

onde

$$(x'(x, y; 0), y'(x, y; 0)) = (x, y).$$

Definição 3.2 *Considere uma órbita através do ponto não-invariante (x, y) . O vetor tangente para a órbita no ponto (x', y') é $(\xi(x', y'), \eta(x', y'))$, onde*

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\epsilon} &= \xi(x', y') \\ \frac{dy'}{d\epsilon} &= \eta(x', y'). \end{aligned}$$

Com isso, vamos supor que uma EDO de primeira ordem tem um grupo de simetrias de Lie a um parâmetro, cujo vetor tangente em (x, y) é (ξ, η) . Então, podemos definir que o operador diferencial parcial é dado por

$$G = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$$

conhecido como *gerador infinitesimal* do grupo de Lie de simetrias. A partir daí, podemos estender o tratamento para equações diferenciais de ordem n ou de ordens maiores, introduzindo o *gerador infinitesimal prolongado*

$$G^{(n)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta_{(1)}\partial_y^{(1)} + \cdots + \eta_{(n)}\partial_y^{(n)}.$$

Podemos usar o gerador infinitesimal prolongado para escrever a condição de simetria linearizada como:

$$G^{(n)}(y^{(n)} - \omega(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})) = 0,$$

e impondo a equação original (3.14).

Para um número qualquer de variáveis dependentes, a generalização é direta.

3.4 As equações determinantes para as simetrias de ponto de Lie

Para determinar as simetrias de Lie de EDO's da forma (3.14)

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}),$$

devemos calcular primeiro as componentes $\eta^{(k)}$'s dos geradores de simetria usando a relação:

$$\eta_{(k)}(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}) = D_x\eta_{(n-1)} - y^{(k)}D_x\xi, \quad (3.17)$$

que decorre de (3.16), lembrando que as funções ξ e η dependem somente de x e y .

Impondo que (3.14) é invariante obtemos

$$\eta_{(n)} = \xi\omega_x + \eta\omega_y + \eta_{(1)}\omega_{y^{(1)}} + \cdots + \eta_{(n-1)}\omega_{y^{(n-1)}}, \quad (3.18)$$

na qual devemos substituir a EDO (3.14). Com isto, chegaremos a um sistema de EDP's, denominado de *equações determinantes* para as simetrias de ponto de Lie. Para EDO's mais complexas faz-se necessário o uso de um sistema de computação algébrica.

Como um exemplo, vamos obter as equações determinantes das EDO's de segunda ordem com duas variáveis independentes:

$$y^{(2)} = \omega(x, y, y^{(1)}). \quad (3.19)$$

Para obtermos $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ vamos utilizar a fórmula (3.17):

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y^{(1)} - \xi_y [y^{(1)}]^2 \\ \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y^{(1)} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) [y^{(1)}]^2 - \xi_{yy} [y^{(1)}]^3 + \\ &\quad + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y^{(1)}) y^{(2)}. \end{aligned}$$

Substituindo-as na condição de simetria linearizada (3.18), temos

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y^{(1)} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) [y^{(1)}]^2 - \xi_{yy} [y^{(1)}]^3 + \\ + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y^{(1)}) y^{(2)} = \xi\omega_x + \eta\omega_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y^{(1)} - \xi_y y^{(2)}] \omega_{y^{(1)}}, \end{aligned}$$

e usando a definição da EDO de segunda ordem (3.19) obtemos,

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y^{(1)} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) [y^{(1)}]^2 - \xi_{yy} [y^{(1)}]^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y^{(1)}) y^{(2)} \omega \\ - \xi\omega_x - \eta\omega_y - \left\{ \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y^{(1)} - \xi_y [y^{(1)}]^2 \right\} \omega_{y^{(1)}} = 0. \end{aligned}$$

Esta equação é polinomial em $y^{(1)}$ (ξ e η independem de $y^{(1)}$). Igualando a zero os coeficientes das várias potências de $y^{(1)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= (\eta_y - 2\xi_x) \omega + \xi\omega_x + \eta\omega_y + \eta_x \omega_{y^{(1)}}; \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} &= 3\xi_y \omega + (\eta_y - \xi_x) \omega_{y^{(1)}}; \\ \eta_{yy} - 2\xi_{xy} &= -\xi_y \omega_{y^{(1)}}; \\ \xi_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

que são as equações determinantes para as simetrias de ponto de Lie da equação (3.19). Resolvendo esse sistemas determinamos as expressões para as funções $\xi^{(i)}$ e $\eta^{(i)}$, que são as várias soluções possíveis.

O gerador infinitesimal geral se escreve então

$$G = \sum_{i=1}^n c_i G_i = \sum_{i=1}^n c_i \left[\xi^{(i)} \frac{\partial}{\partial x} + \eta^{(i)} \frac{\partial}{\partial y} \right].$$

3.5 Condição de simetria linearizada para EDP's gerais

A técnica para a obtenção de grupos de Lie de simetrias de ponto a um parâmetro para EDP's é essencialmente a mesma utilizada para as EDO's. Considere EDP's que possuem a seguinte forma

$$\Delta_\beta \equiv u_{\sigma_\beta} - \omega_\beta(x, u^{(n)}) = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, M. \quad (3.20)$$

Onde $u = (u^1, \dots, u^M)$ são as variáveis dependentes e $x = (x^1, \dots, x^N)$ são as variáveis independentes; $u^{(n)}$ representa o conjunto de variáveis dependentes e suas derivadas de ordem n ou menores. Cada u_{σ_β} é a maior derivada para algum u^α , o que garante que não exista nenhum outro termo no sistema que contenha u_{σ_β} ou qualquer de suas derivadas. Isto permite substituir cada u_{σ_β} na condição de simetria linearizada pelo seu correspondente ω_β .

A fórmula mais geral para os geradores infinitesimais prolongados (no sentido de estendido para as derivadas) é

$$G = \xi^i(x, u) \partial_{x^i} + \eta_\alpha(x, u) \partial_{u^\alpha} + \eta_\alpha^J \partial_{u_\alpha^J}, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, N \\ \alpha = 1, \dots, M \end{cases} \quad (3.21)$$

onde η_α representa a ordem da derivada em η ,

$$u_\alpha^J = D_J u^\alpha$$

em que

$$D_J = D_{x^1}^{j_1} D_{x^2}^{j_2} \dots D_{x^M}^{j_M},$$

sendo j_M um número inteiro e

$$\eta_\alpha^J = D_J (\eta_\alpha - \xi^i u_{x^i}^\alpha) + \xi^i D_J u_{x^i}^\alpha.$$

Normalmente, utilizamos a *característica do grupo* Q definida como

$$Q = \eta_\alpha - \xi^i u_{x^i}^\alpha = 0,$$

para caracterizar a condição de simetria.

Observação: Para mostrarmos como é a definição da derivada total D , tomemos como exemplo $x^1 = x$ e $x^2 = t$, e assim escrevermos

$$D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{xx} \partial_{u_x} + u_{xt} \partial_{u_t} + \dots,$$

$$D_t = \partial_t + u_t \partial_u + u_{xt} \partial_{u_x} + u_{tt} \partial_{u_t} + \dots.$$

A condição de simetria linearizada para as EDP's é dada pela expressão

$$G\Delta_\beta = 0,$$

impondo que (3.20) se mantêm. O sistema resultante pode ser dividido em equações determinantes igualando as potências das derivadas das variáveis dependentes remanescentes.

3.6 Coordenadas canônicas

Suponhamos como exemplo que as simetrias da EDO de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y), \tag{3.22}$$

inclui o grupo de Lie de translações na direção y

$$(x, y) = (x, y + \epsilon) \tag{3.23}$$

com $\epsilon \ll 1$. A condição de simetria nos leva à seguinte redução

$$\omega(x, y) = \omega(x, y + \epsilon).$$

Diferenciando esta última equação com relação a y em $\epsilon = 0$ nos leva ao resultado

$$\omega_y(x, y) = 0.$$

Portanto, a EDO mais geral cujas simetrias incluem o grupo de Lie de translações (3.23) é da forma

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x)$$

onde a solução geral é obtida diretamente

$$y = \int \omega(x) dx + \text{constante}.$$

Isso nos leva a concluir que, se uma EDO de primeira ordem tem simetrias de Lie que são equivalentes a translações sob uma mudança de coordenadas, então a EDO pode ser resolvida reescrevendo-a em termos de novas coordenadas. Passamos agora a descrever como estas novas coordenadas são definidas.

Sabemos que todas as órbitas das simetrias de translações têm o mesmo vetor tangente em todos os pontos:

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (0, 1).$$

Dado qualquer grupo de Lie de simetrias a um parâmetro, podemos introduzir as coordenadas

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$$

tais que

$$(r', s') \equiv (r'(x', y'), s'(x', y')) = (r, s + \epsilon)$$

Se isto é possível então o vetor tangente nas novas coordenadas no ponto (r, s) é $(0, 1)$ ou melhor,

$$\left. \frac{dr'}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

$$\left. \frac{ds'}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 1.$$

Com o uso da regra da cadeia e da definição de vetor tangente obtemos,

$$\begin{aligned}\xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y &= 0 \\ \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y &= 1.\end{aligned}\tag{3.24}$$

A mudança de coordenadas é inversível em qualquer vizinhança de (x, y) , assim impomos a condição

$$r_x s_y - r_y s_x \neq 0,\tag{3.25}$$

que assegura que as curvas das constantes r e s se cruzam transversalmente. Portanto, qualquer par de funções $r(x, y)$ e $s(x, y)$ que satisfazem (3.24) e (3.25) é conhecido como um par de *coordenadas canônicas*.

Com a definição de coordenadas canônicas, podemos reescrever o gerador infinitesimal nessas novas coordenadas. Para isso, vamos utilizar a definição do gerador infinitesimal, dada pela equação (3.22) e reescrever o par de equações (3.24) da seguinte forma

$$\begin{aligned}Gr &= 0 \\ Gs &= 1.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Agora, seja $F(r, s)$ uma função suave arbitrária. Pela regra da cadeia temos que:

$$\begin{aligned}GF(r, s) &= GF(r(x, y), s(x, y)) \\ &= \xi(r_x F_r + s_x F_s) + \eta(r_y F_r + s_y F_s) \\ &= (Gr)F_r + (Gs)F_s.\end{aligned}$$

Só que $F(r, s)$ é uma função arbitrária então, em termos das novas coordenadas, o gerador infinitesimal é

$$G = (Gr)\partial_r + (Gs)\partial_s.$$

Mas, se levarmos em conta o par de equações (3.26) vemos que o gerador infinitesimal nas coordenadas canônicas é representado pela expressão

$$G = \partial_s. \quad (3.27)$$

Uma vez obtidas as coordenadas canônicas, a solução da equação pode ser obtida diretamente da equação escrita em termos de r e s .

Geradores infinitesimais escritos na forma (3.27) podem ser usados para reduzir a quantidade de variáveis independentes de uma equação diferencial. Para mostrarmos isso, vamos considerar uma EDP geral com duas variáveis independentes e uma variável dependente na forma

$$F(x, t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots), \quad (3.28)$$

onde a notação a_b e a_{bc} usada representa respectivamente as derivadas parciais

$$a_b = \frac{\partial a}{\partial b} \quad \text{e} \quad a_{bc} = \frac{\partial^2 a}{\partial b \partial c}.$$

A equação (3.28) é invariante sob grupos de Lie a um parâmetro, em que G é o gerador infinitesimal. Realizando uma mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} y^1 &= \phi(x, t, u; \epsilon), \\ y^2 &= \psi(x, t, u; \epsilon), \\ w &= \Omega(x, t, u; \epsilon). \end{aligned}$$

É possível reduzir o gerador para

$$Y = \frac{\partial}{\partial y^1}.$$

Então a equação transformada fica assim escrita

$$F'(y^1, y^2, u, w_{y^1}, w_{y^2}, \dots) = 0,$$

que é independente de y^1 . Reduzindo, assim, o número de variáveis independentes de dois para um.

Dessa forma, se tivermos uma equação diferencial com quatro variáveis independentes, por exemplo, x , y , z e t , conhecendo-se os geradores de simetria, poderemos reduzi-la a uma EDO com apenas uma variável independente, contanto que utilizemos três geradores infinitesimais de simetria. Em outras palavras, o conhecimento de três geradores de simetria, permite reduzir a equação original a uma equação ordinária, que então podemos tentar resolver analiticamente. Esse procedimento consiste em encontrar coordenadas conônicas tais que os geradores se tornam geradores de translações em três coordenadas. A quarta coordenada é então chamada de variável de similaridade. Quando procuramos uma solução, escrita em termos dessas variáveis, e impomos que é invariante pelos três geradores considerados, a que resulta é necessariamente uma equação ordinária, que, como veremos, muitas vezes pode ser resolvida analiticamente.

Capítulo 4

Equações de Burgers

A equação generalizada de Burgers com ruído em sua forma mais geral é escrita como [7]

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = \lambda \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{\nabla} \eta.$$

Na equação acima temos que a variável \vec{u} é a velocidade e η é uma variável aleatória que depende do tempo, ou seja, uma variável estocástica. Na forma em que está escrita, o termo do lado esquerdo da equação é a aceleração. Já o primeiro termo do lado direito, o termo não-linear ou termo inercial, permite calcular a variação da velocidade devida à troca de momento entre uma variedade de escalas de diferentes comprimentos [21]. Esse termo é modulado pelo parâmetro λ , que representa o quanto de não-linearidade possui o problema abordado por tal equação. Esse parâmetro é adimensional. O segundo termo do lado direito da equação acima é conhecido na literatura como termo difusivo, onde ν é o coeficiente de difusão ou viscosidade. Finalmente, a equação de Burgers é dirigida pela flutuação, geralmente definida com “ruído branco”, η (Vide [7]).

Nesta dissertação omitiremos o termo estocástico e lidaremos com a forma mais conhecida da equação de Burgers, a equação de Burgers sem ruído:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = \lambda \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (4.1)$$

Comumente, o parâmetro λ é tomado igual a 1, mas aqui será mantido arbitrário.

No caso particular da equação de Burgers sem ruído e com $\lambda = 1$,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (4.2)$$

é um bom exemplo de EDP não-linear cuja solução pode ser construída a partir de uma EDP linear, e talvez seja o único exemplo. O que torna essa equação particularmente interessante é o fato dela poder ser reduzida para a forma mais simples da equação de Navier-Stokes em uma dimensão [18]. Inicialmente, a equação de Burgers foi proposta para estudar turbulências em fluidos e hoje pode ser aplicada em muitos campos da ciência, como, por exemplo, química, biologia e astronomia [25]. A equação (4.1) descreve a complicada ação mútua entre um aumento não-linear e a difusão de uma onda [21].

A primeira solução da equação de Burgers foi encontrada independentemente por Cole [4] e Hopf [12] para a equação de Burgers unidimensional quando $\lambda = 1$ e quando o termo estocástico não havia sido considerado. Passaremos agora a apresentar a solução obtida e, depois, apresentaremos algumas variações da equação de Burgers.

4.1 Equação de Burgers unidimensional

Vamos apresentar a primeira derivação da solução da equação de Burgers em sua forma unidimensional, dada independentemente por Cole [4] e Hopf [12]. Antes disso, vamos escrever a equação de Burgers em uma dimensão, na forma que foi considerada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.3)$$

lembrando que escrita dessa maneira, a equação de Burgers é conhecida como equação de Burgers sem ruído, onde $\lambda = 1$ e a variável temporal é representada por t .

A transformação usada para resolver (4.3) é

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4.4)$$

onde

$$\varphi = \varphi(x, t).$$

Substituindo-as em (4.3) e integrando termo a termo com respeito a x obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (4.5)$$

Como a equação (4.3) é invariante sob as transformações:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow ax, \\ t &\rightarrow a^2 t, \end{aligned}$$

onde a é uma constante. Como (4.3) também é uma equação de difusão, isso sugere que exista uma solução da forma

$$\varphi(x, t) = \varphi(\theta(x, t)), \quad (4.6)$$

onde θ é uma solução da equação de difusão

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (4.7)$$

Substituindo em (4.3) e depois subtraindo (4.7) temos

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 = 2\nu \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2}, \quad (4.8)$$

cujas soluções são

$$\varphi(\theta) = -2\nu \ln(\theta - c_1) + c_2,$$

que para $c_1 = 0$ obtemos

$$u(x, t) = -\frac{2\nu}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Várias aplicações dessa solução existem na literatura: na matemática [27], magnetohidrodinâmica [9], astrofísica [15, 16] e cosmologia [11, 17].

4.2 Equação de Burgers vetorial

Nerney [21] apresenta formalmente a derivação das soluções da equação de Burgers vetorial usando uma generalização da transformação de Hopf-Cole, que passamos a apresentar nesta seção.

Temos que a forma vetorial da equação de Burgers (4.3) é dada por:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (4.9)$$

Essa equação representa fluxos bastante gerais, mas as únicas soluções analíticas conhecidas são irrotacionais [21].

Vamos assumir que o campo de fluxo é irrotacional, e assim obter a extensão da transformação de Hopf-Cole:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0,$$

então

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi. \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é a generalização da equação (4.4) para três dimensões e, junto com as equações

$$\nabla^2 \vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u},$$

e

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \vec{\nabla} \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u},$$

permite reescrever a equação (4.9) na forma:

$$\vec{\nabla} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} - \nu \nabla^2 \varphi \right] = 0. \quad (4.11)$$

A equação (4.11) implica que a quantidade dentro dos colchetes é uma função do tempo somente, que denotamos por $E(t)$. Dessa forma temos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} - \nu \nabla^2 \varphi = E(t). \quad (4.12)$$

A forma da função desconhecida $E(t)$ é irrelevante para nossa discussão pois não afeta a velocidade. De fato podemos definir um novo potencial:

$$\varphi_1 = \varphi - \int E(t)dt,$$

que fornece o mesmo campo de velocidades que ϕ e obedece a mesma equação (4.12) mas com $E(t)$ nula.

Consideraremos a identidade vetorial a seguir:

$$\vec{\nabla}\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\vec{\nabla}\theta, \quad (4.13)$$

satisfeita em qualquer sistema de coordenadas curvilíneo e ortogonal. Tomando a divergência de ambos os lados com $\alpha = \varphi$ e usando (4.13) outra vez com $\alpha = \partial\varphi/\partial\theta$ temos

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}(\vec{\nabla}\theta)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\nabla^2\theta. \quad (4.14)$$

Usando também a equação de difusão em três dimensões

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \nu\nabla^2\theta. \quad (4.15)$$

Agora aplicamos as equações (4.6), (4.14) e (4.15) na equação (4.12) para obter:

$$\vec{u} = -\frac{2\nu}{\theta}\vec{\nabla}\theta.$$

Que representa a forma tri-dimensional da transformação de Hopf-Cole.

4.3 Equação de Burgers sem ruído

Esta dissertação constitui uma primeira etapa de um sistemático estudo de soluções analíticas da equação de Burgers. Dessa forma, consideraremos apenas soluções da equação sem o termo estocástico, invariantes por simetrias de Lie. Os métodos algébricos implementados que utilizamos não permitem tratar termos estocásticos. Dessa forma, estudaremos a equação generalizada de Burgers com ruído

sem o termo estocástico:

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \lambda \left(u \vec{\nabla} \right) u + \nu \nabla^2 u.$$

Escrita dessa forma, essa equação é conhecida na literatura como *equação generalizada de Burgers sem ruído* ou *equação determinística* [25], que descreve um decaimento passageiro de uma interface sujeita ao termo de amortecimento (viscosidade) $\nu \nabla^2 u$ em combinação com o crescimento do termo não-linear $\lambda u \vec{\nabla} u$.

A equação de Burgers sem ruído (4.1) pode ser resolvida analiticamente por meios da transformação não-linear de Hopf-Cole [4, 12]:

$$w = \exp \left[\frac{\lambda}{2\nu} \int u dx \right],$$

que mapeia (4.1) na equação de difusão linear

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \nabla^2 w.$$

Uma análise do valor inicial é feita em particular no limite sem viscosidade $\nu \rightarrow 0$.

Fogedby [7] apresenta duas soluções para (4.1) no limite sem viscosidade, onde ele utiliza os modos de Sóliton e de Rampa: para o modo Sóliton localizado na parte positiva da reta real, a equação (4.1) admite uma solução senoidal de Gordon

$$u_k(x) = u_+ \tanh k_s(x - x_0),$$

violando a simetria de paridade, onde x_0 é a posição central, u_+ é a amplitude e a largura inversa dada por:

$$k_s = \frac{\lambda u_+}{2\nu}.$$

No limite sem viscosidade $\nu \rightarrow 0$, $k_s \rightarrow \infty$, o sóliton torna-se uma onda de choque. Tentando a invariância Galileana

$$x \rightarrow x - \lambda u_0 t,$$

e,

$$u \rightarrow u + u_0.$$

Facilmente obtemos também um sólito aumentado se movendo com velocidade v . Adotando a seguinte notação para os valores de fronteira em $x = \pm\infty$ por u_{\pm} , inferimos que a única condição de sólito é

$$u_+ + u_- = -\frac{2v}{\lambda},$$

expressando a velocidade do sólito em termos dos valores de fronteira u_{\pm} . O modo de sólito é uma “estrutura dissipativa” estável, correspondendo a uma entrada determinística nas fronteiras e dissipativa no sólito central (hot spot). Na figura 4.1 é representado um sólito se movendo no sentido positivo para equação de Burgers sem ruído [7].

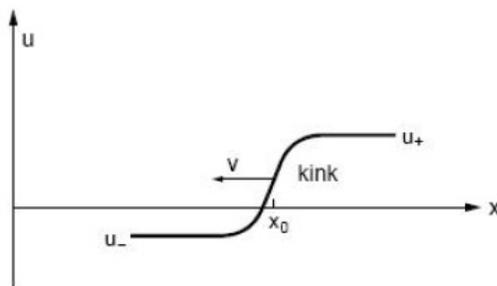


Figura 4.1: Sólito se movendo no sentido positivo como solução da equação de Burgers sem ruído [7].

Além disso, também no limite sem viscosidade, a equação (4.1) admite uma Rampa com inclinação negativa como solução:

$$u(xt) \propto -\frac{x}{\lambda t}.$$

Na figura 4.2 é mostrada uma solução em forma de Rampa para a equação de Burgers sem ruído [7].

No próximo capítulo, apresentaremos novas soluções analíticas que são invariantes por simetrias de Lie, da equação (4.1) para qualquer valor de ν e λ , que

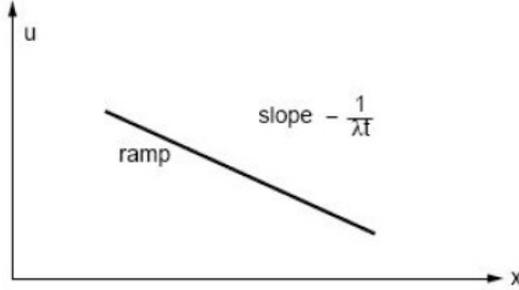


Figura 4.2: Modo rampa com inclinação negativa como solução da equação de Burgers sem ruído [7].

obtivemos com o pacote SADE (Symmetry Analysis of Differential Equations), escrito no sistema *Maple* e desenvolvido no Grupo de Física-Matemática do IF-UnB [20].

4.4 Equação de Edwards-Wilkinson

No caso em que o parâmetro λ é muito pequeno ou igual a zero, a equação de Burgers (4.1) toma a forma da Equação de Edwards-Wilkinson (EW) [6]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} \approx \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{\nabla} \eta, \quad (4.16)$$

que é uma equação de difusão linear dirigida pelo termo de ruído.

Uma aplicação dessa equação foi feita por [23] em cosmologia, onde foi considerado um fluido cosmológico em escalas maiores do que $5h^{-1}Mpc$. Nessa situação, (4.20) descreve o fluido em um regime difusivo-estocástico. A solução é obtida através da equação de Fokker-Planck associada à equação EW com a distribuição de probabilidades para os modos de número de ondas u_k dada por:

$$P(u_k, b) \propto \prod_k \exp \left[-\frac{\nu}{\Delta G} \frac{1}{L} \frac{|u_k - u_k^0 e^{-\nu k^2 b}|^2}{1 - e^{-2\nu k^2 b}} \right],$$

onde u_k^0 é o valor inicial quando $b = 0$, L é a escala de comprimento, e para o termo de ruído é assumido uma distribuição de amplitude gaussiana dada por:

$$P(\eta) = \exp \left[-\frac{1}{2\Delta^G} \int \eta(xb)^2 dx db \right],$$

com correlações satisfazendo

$$\langle \eta, \eta' \rangle = \Delta^G \delta(x - x') \delta(t - t'),$$

onde Δ^G é a intensidade do ruído [8]. Se $b \rightarrow \infty$, então $P(u_k, b)$ aproxima-se da distribuição gaussiana estacionária:

$$P(u) \propto \exp \left[-\frac{\nu}{\Delta^G} \int u(x)^2 dx \right].$$

Ao mesmo tempo, os modos de correlações no espaço de Fourier tem a forma de uma lorentziana característica de um modo difusivo conservado:

$$\langle u, u' \rangle = \frac{\Delta^G}{\nu} \frac{\nu k^2}{\omega^2 + (\nu k^2)^2}, \quad (4.17)$$

com a largura da amplitude hidrodinâmica νk^2 desaparecendo no limite de comprimentos de onda longos, como é mostrado na figura 4.3 [7].

Em termos de quantidades físicas, podemos obter a largura da linha fazendo $\nu k^2 \rightarrow \sigma_{12}/L$ (σ_{12} é a dispersão para os pares de velocidades peculiares). A inclinação da função de correlação para os modos difusivos seria comparada à transformação de Fourier da distribuição de velocidades dos pares de galáxias [23].

4.5 Equação de difusão

No caso em que $\lambda = 0$, a equação de Burgers sem ruído reduz-se à equação de difusão ordinária [25]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = \nu \nabla^2 \vec{u},$$

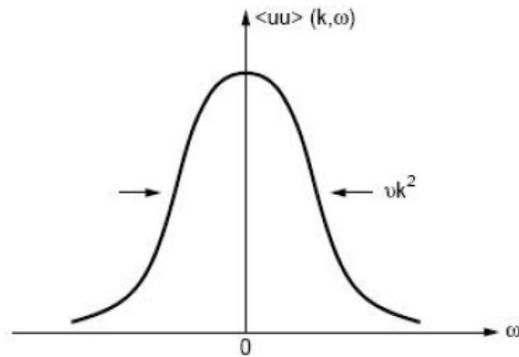


Figura 4.3: Função de correlação para os modos difusivos no caso EW. A lorentziana está centrada em $\omega = 0$ e tem uma largura de amplitude νk^2 desaparecendo para grandes comprimentos de onda [7].

que suporta modos difusivos de decaimento da forma:

$$u(xt) \propto \exp[-i\omega_k^0 t + ikx],$$

com dispersão quadrática sem espaço (*gapless*) dada pela expressão

$$\omega_k^0 = -i\nu k^2,$$

onde é mostrado na figura 4.4 para os modos difusivos

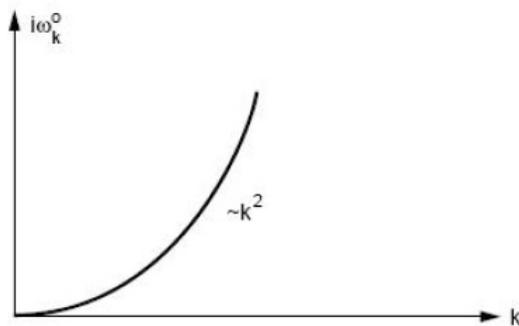


Figura 4.4: Lei de dispersão sem espaço dos modos difusivos para o caso EW [7].

4.6 Difusão nula ($\nu = 0$)

No caso em que $\nu = 0$, a equação de Burgers sem ruído reduz-se a:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}.$$

Esta última equação não tem sentido astrofísico. Uma flutuação de densidade que contribui para o processo de formação de grandes estruturas segue o seguinte caminho até passar a ser considerada como um sistema de galáxias gravitacionalmente ligado: inicialmente, as estruturas começam a ser formadas devido a aderência entre as concentrações de massa. Nesse estágio, o regime de formação é linear, pois não há cruzamento de trajetórias (o fluido é estritamente acolisional). Após esse regime, a formação de estruturas entra em um nível não-linear de formação, onde o termo não-linear começa a ter relevância crescente. Mais adiante discutiremos soluções obtidas para esse caso.

4.7 Movimento inercial: $\nu = 0$ e $\lambda = 0$

Finalmente, para o caso em que $\nu = 0$ e $\lambda = 0$, a equação de Burgers sem ruído reduz-se a

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial b} = 0,$$

que representa uma flutuação de densidade que viaja no Universo com um movimento uniforme.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo vamos apresentar soluções explícitas da equação generalizada de Burgers sem ruído (4.1) em três dimensões espaciais, obtidas como soluções invariantes por simetrias de Lie. A equação escrita em termos das componentes de \vec{u} , das coordenadas espaciais e do tempo é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_x(x, y, z, t) = & \lambda \left[u_x(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_x(x, y, z, t) \right) + \right. \\ & \left. + u_y(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial y} u_y(x, y, z, t) \right) + u_z(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial z} u_z(x, y, z, t) \right) \right] + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_x(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_y(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_z(x, y, z, t) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_y(x, y, z, t) = & \lambda \left[u_x(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_x(x, y, z, t) \right) + \right. \\ & \left. + u_y(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial y} u_y(x, y, z, t) \right) + u_z(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial z} u_z(x, y, z, t) \right) \right] + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_x(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_y(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_z(x, y, z, t) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_z(x, y, z, t) = & \lambda \left[u_x(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} u_x(x, y, z, t) \right) + \right. \\ & \left. + u_y(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial y} u_y(x, y, z, t) \right) + u_z(x, y, z, t) \left(\frac{\partial}{\partial z} u_z(x, y, z, t) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_x(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_y(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u_z(x, y, z, t) \right),$$

Nessa equação, x, y, z e t são as quatro variáveis independentes, e u_x, u_y e u_z as três variáveis dependentes que representam, por sua vez, as componentes da velocidade.

Encontrar soluções analíticas da equação acima é uma tarefa muito árdua. Até mesmo utilizando aproximações ou métodos de resolução, a dificuldade em obter as soluções dessa equação ainda é muito grande.

Apresentamos a seguir um exemplo utilizando o método de resolução que apresentamos no terceiro capítulo desta dissertação.

Para definir as simetrias de ponto de Lie para o trio de equações acima vamos representá-la da seguinte maneira:

$$\Delta \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.1)$$

Como o total de variáveis é 7, logo temos 7 transformações de ponto de Lie:

$$\begin{aligned} x' &= x + \epsilon \xi_1(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) + O(\epsilon^2); \\ y' &= y + \epsilon \xi_2(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) + O(\epsilon^2); \\ z' &= z + \epsilon \xi_3(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) + O(\epsilon^2); \\ t' &= t + \epsilon \xi_4(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) + O(\epsilon^2); \\ u'_x &= u_x + \epsilon \eta_1(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) + O(\epsilon^2); \\ u'_y &= u_y + \epsilon \eta_2(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) + O(\epsilon^2); \\ u'_z &= u_z + \epsilon \eta_3(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

A prolongação para as primeiras derivadas inclui mais 4 transformações de ponto às 7 relacionadas acima:

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x'} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \epsilon \eta_x \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) + O(\epsilon^2);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'_y}{\partial y'} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \epsilon \eta_y \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) + O(\epsilon^2); \\
\frac{\partial u'_z}{\partial z'} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \epsilon \eta_z \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) + O(\epsilon^2); \\
\frac{\partial u'_t}{\partial t'} &= \frac{\partial u_t}{\partial t} + \epsilon \eta_t \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) + O(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

que obedecem à seguinte condição de simetria:

$$\Delta \left(x', y', z', t', u'_x, u'_y, u'_z, \frac{\partial u'_x}{\partial x'}, \frac{\partial u'_y}{\partial y'}, \frac{\partial u'_z}{\partial z'}, \frac{\partial u'_t}{\partial t'} \right) = 0, \quad (5.2)$$

que por si só é extremamente complicada.

O gerador infinitesimal de simetria G é dado pela expressão:

$$G = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial z} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial u_y} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial u_z},$$

de acordo com a equação (3.21). O gerador infinitesimal prolongado para incluir também as derivadas é então:

$$\begin{aligned}
G &= \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial z} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial u_y} + \eta_3 \frac{\partial}{\partial u_z} + \\
&+ \eta_x \frac{\partial}{\partial(\partial u / \partial x)} + \eta_y \frac{\partial}{\partial(\partial u / \partial y)} + \eta_z \frac{\partial}{\partial(\partial u / \partial z)} + \eta_t \frac{\partial}{\partial(\partial u / \partial t)} \\
&+ \eta_{xx} \partial_{u_{xx}} + \eta_{xy} \partial_{u_{xy}} + \eta_{xz} \partial_{u_{xz}} + \eta_{xt} \partial_{u_{xt}} + \eta_{yy} \partial_{u_{yy}} + \eta_{yz} \partial_{u_{yz}} + \\
&+ \eta_{yt} \partial_{u_{yt}} + \eta_{zz} \partial_{u_{zz}} + \eta_{zt} \partial_{u_{zt}} + \eta_{tt} \partial_{u_{tt}},
\end{aligned} \quad (5.3)$$

onde optamos em utilizar a notação u_{bc} para representar derivadas de segunda ordem na velocidade u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c}.$$

As componentes η_x , η_y , η_z e η_t são obtidas utilizando as derivadas totais definidas nas seções 3.2 e 3.5:

$$\begin{aligned}
\eta_x(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) &= D_x \eta_1 + D_x \eta_2 + D_x \eta_3 - u_x D_x \xi_1 - u_y D_x \xi_2 \\
&- u_z D_x \xi_3 - u_t D_x \xi_4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_y(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) &= D_y\eta_1 + D_y\eta_2 + D_y\eta_3 - u_x D_y\xi_1 - u_y D_y\xi_2 \\ &- u_z D_y\xi_3 - u_t D_y\xi_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_z(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) &= D_z\eta_1 + D_z\eta_2 + D_z\eta_3 - u_x D_z\xi_1 - u_y D_z\xi_2 \\ &- u_z D_z\xi_3 - u_t D_z\xi_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_t(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z) &= D_t\eta_1 + D_t\eta_2 + D_t\eta_3 - u_x D_t\xi_1 - u_y D_t\xi_2 \\ &- u_z D_t\xi_3 - u_t D_t\xi_4.\end{aligned}$$

Já as componentes η_{xx} , η_{xy} , η_{xz} , η_{xt} , η_{yy} , η_{yz} , η_{yt} , η_{zz} , η_{zt} e η_{tt} são obtidas através das fórmulas:

$$\begin{aligned}\eta_{Jx} \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) &= D_x\eta_J - u_{Jx} D_x\xi_1 - u_{Jy} D_x\xi_2 \\ &- u_{Jz} D_x\xi_3 - u_{Jt} D_x\xi_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{Jy} \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) &= D_y\eta_J - u_{Jx} D_y\xi_1 - u_{Jy} D_y\xi_2 \\ &- u_{Jz} D_y\xi_3 - u_{Jt} D_y\xi_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{Jz} \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) &= D_z\eta_J - u_{Jx} D_z\xi_1 - u_{Jy} D_z\xi_2 \\ &- u_{Jz} D_z\xi_3 - u_{Jt} D_z\xi_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_{Jt} \left(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_t}{\partial t} \right) &= D_t\eta_J - u_{Jx} D_t\xi_1 - u_{Jy} D_t\xi_2 \\ &- u_{Jz} D_t\xi_3 - u_{Jt} D_t\xi_4;\end{aligned}$$

onde o índice J representa qualquer derivada com respeito a x , y , z ou t .

Após escrever todos os η 's explicitamente, as simetrias de ponto de Lie da equação são obtidas diferenciando a condição de simetria (5.2) com respeito a ϵ em $\epsilon = 0$:

$$G\Delta = 0,$$

quando $\Delta = 0$, que é a condição de simetria linearizada. Só assim poderemos igualar a zero os coeficientes das várias potências das derivadas de u , e obter um sistema linear de equações determinantes, que resultará em 12 equações com 7 incógnitas: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2$ e η_3 . A determinação desse sistema e suas soluções são realizadas pelo pacote SADE.

5.1 Os geradores infinitesimais da equação de Burgers

Os geradores infinitesimais que dão origem a álgebra de Lie do grupo de simetrias da equação (4.1) são:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\partial}{\partial x}; \\ G_2 &= \frac{\partial}{\partial y}; \\ G_3 &= \frac{\partial}{\partial z}; \\ G_4 &= \frac{\partial}{\partial t}; \\ G_5 &= \frac{\partial}{\partial u_x} - \lambda t \frac{\partial}{\partial x}; \\ G_6 &= \frac{\partial}{\partial u_y} - \lambda t \frac{\partial}{\partial y}; \\ G_7 &= \frac{\partial}{\partial u_z} - \lambda t \frac{\partial}{\partial z}; \\ G_8 &= u_y \frac{\partial}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial}{\partial u_y} + y \frac{\partial}{\partial u_x} - x \frac{\partial}{\partial u_y}; \\ G_9 &= u_z \frac{\partial}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial}{\partial u_z} + z \frac{\partial}{\partial u_x} - x \frac{\partial}{\partial u_z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{10} &= u_z \frac{\partial}{\partial u_y} - u_y \frac{\partial}{\partial u_z} + z \frac{\partial}{\partial u_y} - y \frac{\partial}{\partial u_z}; \\
G_{11} &= u_x \frac{\partial}{\partial u_x} + u_y \frac{\partial}{\partial u_y} + u_z \frac{\partial}{\partial u_z} - x \frac{\partial}{\partial u_x} - y \frac{\partial}{\partial u_y} - z \frac{\partial}{\partial u_z} - 2t \frac{\partial}{\partial u_t}; \\
G_{12} &= -\frac{(\lambda t u_x + x)}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u_x} - \frac{(\lambda t u_y + y)}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u_y} - \frac{(\lambda t u_z + z)}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u_z} \\
&\quad - x t \frac{\partial}{\partial u_x} - y t \frac{\partial}{\partial u_y} - z t \frac{\partial}{\partial u_z} - t^2 \frac{\partial}{\partial u_t}.
\end{aligned}$$

O grupo de simetrias de Lie é construído a partir da álgebra de Lie gerada por esses 12 geradores. Na figura 5.1 apresentamos uma tabela com todos os comutadores formados pela combinação entre os geradores G_i .

$[G_i, G_j]$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9	G_{10}	G_{11}	G_{12}
G_1	0	0	0	0	0	0	0	$-G_2$	$-G_3$	0	$-G_1$	$-\frac{G_5}{\lambda}$
G_2	0	0	0	0	0	0	0	G_1	0	$-G_3$	$-G_2$	$-\frac{G_6}{\lambda}$
G_3	0	0	0	0	0	0	0	0	G_1	G_2	$-G_3$	$-\frac{G_7}{\lambda}$
G_4	0	0	0	0	λG_1	λG_2	λG_3	0	0	0	$-2G_4$	G_{11}
G_5	0	0	0	$-\lambda G_1$	0	0	0	$-G_6$	$-G_7$	0	G_5	0
G_6	0	0	0	$-\lambda G_2$	0	0	0	G_5	0	$-G_7$	G_6	0
G_7	0	0	0	$-\lambda G_3$	0	0	0	0	G_5	G_6	G_7	0
G_8	G_2	$-G_1$	0	0	G_6	$-G_5$	0	0	G_{10}	$-G_9$	0	0
G_9	G_3	0	$-G_1$	0	G_7	0	$-G_5$	$-G_{10}$	0	G_8	0	0
G_{10}	0	G_3	$-G_2$	0	0	G_7	$-G_6$	G_9	$-G_8$	0	0	0
G_{11}	G_1	G_2	G_3	$2G_4$	$-G_5$	$-G_6$	$-G_7$	0	0	0	0	$-2G_{12}$
G_{12}	$\frac{G_5}{\lambda}$	$\frac{G_6}{\lambda}$	$\frac{G_7}{\lambda}$	$-G_{11}$	0	0	0	0	0	0	$2G_{12}$	0

Figura 5.1: Comutadores que geram a álgebra de Lie da equação de Burgers sem ruído.

5.2 Soluções invariantes por simetrias de Lie da equação de Burgers

As soluções invariantes de uma EDP são encontradas quando decidimos o grau de simetria das soluções invariantes, pois cada gerador reduz o número de variáveis independentes da equação diferencial. Como o número de variáveis independentes da equação de Burgers é 4, são necessários 3 geradores de simetrias para reduzir a equação original a uma EDO, que quando resolvida resulta na solução invariante sob os três geradores escolhidos. Para a equação de Burgers em questão, encontramos 220 subgrupos de três elementos cada (três geradores), obtidos através de uma combinação simples com os doze geradores descritos na seção anterior.

Cada um desses subgrupos pode ou não resultar em uma solução invariante. As soluções obtidas por simples permutação de x , y e z são representadas por apenas uma delas. Passamos agora a apresentar todas as soluções obtidas.

5.2.1 Soluções constantes

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_2 e G_3 :

$$u_x(x, y, z, t) = c_3;$$

$$u_y(x, y, z, t) = c_2;$$

$$u_z(x, y, z, t) = c_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_2 e G_9 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_y(x, y, z, t) = c_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_2 e G_{10} :

$$u_x(x, y, z, t) = c_2,$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_3 e G_8 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_z(x, y, z, t) = c_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_3 e G_9 :

$$u_x(x, y, z, t) = c_1,$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0.$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_3 e G_8 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_z(x, y, z, t) = c_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_3 e G_9 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_y(x, y, z, t) = c_1.$$

Onde c_1 , c_2 e c_3 são constantes arbitrárias. Este tipo de solução não possui nenhuma relevância física, em especial.

5.2.2 Soluções lineares no tempo

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_2 e G_7 :

$$u_x(x, y, z, t) = c_2;$$

$$u_y(x, y, z, t) = c_3;$$

$$u_z(x, y, z, t) = tc_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_3 e G_6 :

$$u_x(x, y, z, t) = c_2;$$

$$u_y(x, y, z, t) = tc_1;$$

$$u_z(x, y, z, t) = c_3.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_6 e G_7 :

$$u_x(x, y, z, t) = c_3;$$

$$u_y(x, y, z, t) = tc_2;$$

$$u_z(x, y, z, t) = tc_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_6 e G_9 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_y(x, y, z, t) = tc_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_7 e G_8 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_z(x, y, z, t) = tc_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_3 e G_5 :

$$u_x(x, y, z, t) = tc_1;$$

$$u_y(x, y, z, t) = c_2;$$

$$u_z(x, y, z, t) = c_3.$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_5 e G_7 :

$$u_x(x, y, z, t) = tc_1;$$

$$u_y(x, y, z, t) = c_3;$$

$$u_z(x, y, z, t) = tc_2.$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_5 e G_{10} :

$$u_x(x, y, z, t) = tc_1,$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0.$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_7 e G_8 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_z(x, y, z, t) = tc_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_3 , G_5 e G_6 :

$$u_x(x, y, z, t) = tc_1;$$

$$u_y(x, y, z, t) = tc_2;$$

$$u_z(x, y, z, t) = c_3.$$

Solução gerada pela combinação de G_3 , G_5 e G_{10} :

$$u_x(x, y, z, t) = tc_1,$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0.$$

Solução gerada pela combinação de G_3 , G_6 e G_9 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_y(x, y, z, t) = tc_1.$$

Solução gerada pela combinação de G_5 , G_6 e G_7 :

$$u_x(x, y, z, t) = tc_3;$$

$$u_y(x, y, z, t) = tc_1;$$

$$u_z(x, y, z, t) = tc_2.$$

Esse tipo de solução corresponde a partículas com aceleração constante, e não tem especial interesse para este trabalho.

5.2.3 Soluções estacionárias

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_2 e G_4 :

$$u_x(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_1 \sqrt{\lambda c_5} - c_2 c_6 \sqrt{\lambda c_5} + c_2 \sqrt{2\nu} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (z + c_6) \right) \right];$$

$$u_y(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_3 \sqrt{\lambda c_5} - c_4 c_6 \sqrt{\lambda c_5} + c_4 \sqrt{2\nu} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (z + c_6) \right) \right];$$

$$u_z(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_5}{\lambda}} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (z + c_6) \right).$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_3 e G_4 :

$$u_x(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_1 \sqrt{\lambda c_5} - c_2 c_6 \sqrt{\lambda c_5} + c_2 \sqrt{2\nu} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (y + c_6) \right) \right];$$

$$u_y(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_5}{\lambda}} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (y + c_6) \right);$$

$$u_z(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_3 \sqrt{\lambda c_5} - c_4 c_6 \sqrt{\lambda c_5} + c_4 \sqrt{2\nu} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (y + c_6) \right) \right].$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_4 e G_8 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = 0, \quad (5.4)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_1}{\lambda}} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_1}{\nu}} (z + c_2) \right). \quad (5.5)$$

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_4 e G_9 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_y(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_1}{\lambda}} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_1}{\nu}}(y + c_2)\right).$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_3 e G_4 :

$$u_x(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_5}{\lambda}} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}}(x + c_6)\right); \quad (5.6)$$

$$u_y(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_1\sqrt{\lambda c_5} - c_2c_6\sqrt{\lambda c_5} + c_2\sqrt{2\nu} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}}(x + c_6)\right) \right]; \quad (5.7)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_3\sqrt{\lambda c_5} - c_4c_6\sqrt{\lambda c_5} + c_4\sqrt{2\nu} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}}(x + c_6)\right) \right]. \quad (5.8)$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_4 e G_8 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_z(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_1}{\lambda}} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_1}{\nu}}(z + c_2)\right).$$

Solução gerada pela combinação de G_2 , G_5 e G_7 :

$$u_x(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_1}{\lambda}} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_1}{\nu}}(x + c_2)\right),$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0.$$

Solução gerada pela combinação de G_3 , G_4 e G_9 :

$$u_x(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_y(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_1}{\lambda}} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_1}{\nu}}(y + c_2)\right).$$

Solução gerada pela combinação de G_3 , G_4 e G_{10} :

$$u_x(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_1}{\lambda}} \cdot \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda c_1}{\nu}}(x + c_2)\right),$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0.$$

Em que c_4 , c_5 e c_6 também são constantes arbitrárias.

Essas soluções merecem destaque, principalmente as que possuem a mesma forma da solução (5.6-5.8), pois elas representam o único de tipo de solução que possui expressões relevantes para todas as coordenadas da velocidade u . As outras que possuem a mesma forma da solução (5.4-5.5) são casos mais particulares que fogem do interesse deste trabalho. Na próxima seção discutiremos a relevância das soluções do tipo (5.6-5.8).

5.2.4 Soluções temporais

Solução gerada pela combinação de G_1 , G_{10} e G_{11} :

$$u_x(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ e^{\frac{1}{8} \frac{z^2 + y^2}{t\nu}} \left[c_1 I_0 \left(0, \frac{1}{8} \frac{z^2 + y^2}{t\nu} \right) + c_2 K_0 \left(0, \frac{1}{8} \frac{z^2 + y^2}{t\nu} \right) \right] \right\}, \quad (5.9)$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0. \quad (5.10)$$

Onde as funções I_0 e K_0 são as funções modificadas de Bessel.

Solução gerada pela combinação de G_3 , G_8 e G_{11} :

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = 0,$$

$$u_z(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ e^{\frac{1}{8} \frac{x^2 + y^2}{t\nu}} \left[c_1 I_0 \left(0, \frac{1}{8} \frac{x^2 + y^2}{t\nu} \right) + c_2 K_0 \left(0, \frac{1}{8} \frac{x^2 + y^2}{t\nu} \right) \right] \right\}.$$

Note que duas das coordenadas da velocidade são nulas, o que dificulta a aplicação da mesma ao modelo apresentado no segundo capítulo.

5.2.5 Soluções triviais:

$$u_x(x, y, z, t) = u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0$$

Encontramos soluções triviais como solução da equação de Burgers quando utilizamos as seguintes combinações de geradores:

$$\{G_1, G_2, G_5\}, \{G_1, G_2, G_6\}, \{G_1, G_2, G_8\}, \{G_1, G_2, G_{12}\}, \{G_1, G_3, G_5\}, \\ \{G_1, G_3, G_7\}, \{G_1, G_3, G_9\}, \{G_1, G_3, G_{12}\}, \{G_1, G_4, G_5\}, \{G_1, G_4, G_6\},$$

$\{G_1, G_4, G_7\}, \{G_1, G_4, G_{12}\}, \{G_1, G_5, G_6\}, \{G_1, G_5, G_7\}, \{G_1, G_5, G_8\},$
 $\{G_1, G_5, G_9\}, \{G_1, G_5, G_{10}\}, \{G_1, G_5, G_{11}\}, \{G_1, G_5, G_{12}\}, \{G_1, G_6, G_8\},$
 $\{G_1, G_6, G_{11}\}, \{G_1, G_6, G_{12}\}, \{G_1, G_7, G_9\}, \{G_1, G_7, G_{12}\}, \{G_1, G_8, G_9\},$
 $\{G_1, G_8, G_{10}\}, \{G_1, G_8, G_{12}\}, \{G_1, G_9, G_{10}\}, \{G_1, G_9, G_{11}\}, \{G_1, G_9, G_{12}\},$
 $\{G_1, G_{10}, G_{12}\}, \{G_1, G_{11}, G_{12}\};$

$\{G_2, G_3, G_6\}, \{G_2, G_3, G_7\}, \{G_2, G_3, G_{10}\}, \{G_2, G_3, G_{11}\}, \{G_2, G_3, G_{12}\},$
 $\{G_2, G_4, G_5\}, \{G_2, G_4, G_6\}, \{G_2, G_4, G_7\}, \{G_2, G_4, G_{12}\}, \{G_2, G_5, G_6\},$
 $\{G_2, G_5, G_8\}, \{G_2, G_5, G_{12}\}, \{G_2, G_6, G_7\}, \{G_2, G_6, G_8\}, \{G_2, G_6, G_9\},$
 $\{G_2, G_6, G_{10}\}, \{G_2, G_6, G_{11}\}, \{G_2, G_6, G_{12}\}, \{G_2, G_7, G_{10}\}, \{G_2, G_7, G_{11}\},$
 $\{G_2, G_7, G_{12}\}, \{G_2, G_8, G_9\}, \{G_2, G_8, G_{10}\}, \{G_2, G_8, G_{12}\}, \{G_2, G_9, G_{10}\},$
 $\{G_2, G_9, G_{12}\}, \{G_2, G_{10}, G_{12}\}, \{G_2, G_{11}, G_{12}\};$

$\{G_3, G_4, G_5\}, \{G_3, G_4, G_6\}, \{G_3, G_4, G_7\}, \{G_3, G_4, G_{12}\}, \{G_3, G_5, G_7\},$
 $\{G_3, G_5, G_9\}, \{G_3, G_5, G_{12}\}, \{G_3, G_6, G_7\}, \{G_3, G_6, G_{10}\}, \{G_3, G_6, G_{11}\},$
 $\{G_3, G_6, G_{12}\}, \{G_3, G_7, G_8\}, \{G_3, G_7, G_9\}, \{G_3, G_7, G_{10}\}, \{G_3, G_7, G_{11}\},$
 $\{G_3, G_7, G_{12}\}, \{G_3, G_8, G_9\}, \{G_3, G_8, G_{10}\}, \{G_3, G_8, G_{12}\}, \{G_3, G_9, G_{10}\},$
 $\{G_3, G_9, G_{11}\}, \{G_3, G_9, G_{12}\}, \{G_3, G_{10}, G_{12}\}, \{G_3, G_{11}, G_{12}\};$

$\{G_4, G_5, G_6\}, \{G_4, G_5, G_7\}, \{G_4, G_5, G_8\}, \{G_4, G_5, G_9\}, \{G_4, G_5, G_{10}\},$
 $\{G_4, G_5, G_{11}\}, \{G_4, G_5, G_{12}\}, \{G_4, G_6, G_7\}, \{G_4, G_6, G_8\}, \{G_4, G_6, G_9\},$
 $\{G_4, G_6, G_{10}\}, \{G_4, G_6, G_{11}\}, \{G_4, G_6, G_{12}\}, \{G_4, G_7, G_8\}, \{G_4, G_7, G_9\},$
 $\{G_4, G_7, G_{10}\}, \{G_4, G_7, G_{11}\}, \{G_4, G_7, G_{12}\}, \{G_4, G_8, G_{12}\}, \{G_4, G_9, G_{12}\},$
 $\{G_4, G_{10}, G_{12}\}, \{G_4, G_{11}, G_{12}\};$

$\{G_5, G_6, G_8\}, \{G_5, G_6, G_{11}\}, \{G_5, G_7, G_9\}, \{G_5, G_8, G_9\}, \{G_5, G_8, G_{10}\},$
 $\{G_5, G_8, G_{11}\}, \{G_5, G_9, G_{10}\}, \{G_5, G_9, G_{11}\}, \{G_5, G_{10}, G_{11}\}, \{G_5, G_{11}, G_{12}\};$

$\{G_6, G_7, G_{10}\}, \{G_6, G_7, G_{11}\}, \{G_6, G_8, G_9\}, \{G_6, G_8, G_{10}\}, \{G_6, G_8, G_{11}\},$

$$\{G_6, G_9, G_{10}\}, \{G_6, G_9, G_{11}\}, \{G_6, G_{10}, G_{11}\}, \{G_6, G_{11}, G_{12}\};$$

$$\{G_7, G_8, G_9\}, \{G_7, G_8, G_{10}\}, \{G_7, G_8, G_{11}\}, \{G_7, G_9, G_{10}\}, \{G_7, G_9, G_{11}\}, \\ \{G_7, G_{10}, G_{11}\}, \{G_7, G_{11}, G_{12}\};$$

$$\{G_8, G_9, G_{10}\}, \{G_8, G_9, G_{11}\}, \{G_8, G_{10}, G_{11}\}, \{G_8, G_{11}, G_{12}\};$$

$$\{G_9, G_{10}, G_{11}\}, \{G_9, G_{11}, G_{12}\}, \{G_{10}, G_{11}, G_{12}\}.$$

Esse tipo de solução não tem nenhuma relevância física.

5.2.6 Soluções complexas

As combinações dos geradores mostradas a seguir geram como solução funções complexas que fogem completamente do interesse físico:

$$\{G_1, G_8, G_{11}\};$$

$$\{G_2, G_8, G_{12}\}, \{G_2, G_{10}, G_{11}\};$$

$$\{G_3, G_{10}, G_{11}\};$$

$$\{G_4, G_8, G_9\}, \{G_4, G_8, G_{10}\}, \{G_4, G_8, G_{11}\}, \{G_4, G_9, G_{10}\}, \{G_4, G_{10}, G_{11}\}.$$

5.2.7 Soluções contendo funções e parâmetros arbitrários

a) Soluções contendo funções a determinar:

$$\{G_1, G_3, G_{11}\}, \{G_1, G_4, G_{10}\}, \{G_1, G_4, G_{11}\}, \{G_1, G_7, G_{11}\};$$

$$\{G_2, G_4, G_9\}, \{G_2, G_5, G_{11}\};$$

$$\{G_3, G_4, G_8\}, \{G_3, G_4, G_{11}\}, \{G_3, G_5, G_{11}\};$$

$$\{G_4, G_9, G_{11}\}, \{G_4, G_6, G_{12}\};$$

$$\{G_5, G_7, G_{11}\}, \{G_5, G_7, G_{12}\};$$

$$\{G_6, G_7, G_{12}\};$$

$$\{G_8, G_9, G_{12}\}, \{G_8, G_{10}, G_{12}\};$$

$$\{G_9, G_{10}, G_{12}\}.$$

As combinações dos geradores citadas acima geram como solução da equação de Burgers soluções contendo funções que dependem da solução de equações diferenciais complicadas e que não consideraremos aqui.

b) Soluções contendo somente parâmetros a determinar:

$$\{G_1, G_6, G_{10}\}, \{G_1, G_7, G_{10}\};$$

$$\{G_2, G_5, G_9\}, \{G_2, G_7, G_9\};$$

$$\{G_3, G_5, G_8\}, \{G_3, G_6, G_8\};$$

$$\{G_5, G_6, G_9\}, \{G_5, G_6, G_{10}\}, \{G_5, G_7, G_8\}, \{G_5, G_7, G_{10}\}, \{G_5, G_8, G_{12}\},$$

$$\{G_5, G_9, G_{12}\};$$

$$\{G_6, G_7, G_8\}, \{G_6, G_7, G_9\}, \{G_6, G_8, G_{12}\}, \{G_6, G_{10}, G_{12}\};$$

$$\{G_7, G_9, G_{12}\}, \{G_7, G_{10}, G_{12}\}.$$

As combinações dos geradores citadas acima geram sistema de equações contendo parâmetros arbitrários que impedem a obtenção de soluções.

5.3 Discussões

Apresentamos agora uma aplicação das soluções obtidas da equação generalizada de Burgers sem o termo estocástico mostradas na seção anterior. Para isso, utilizaremos a solução (5.6-5.8), pois é o único tipo de solução, como havíamos dito anteriormente, que apresenta uma forma com as três componentes da velocidade

não-nulas. Já o tipo de solução (5.4-5.5) pode ser considerado um caso particular das soluções do tipo (5.6-5.8) e as soluções temporais do tipo (5.9-5.10) têm ao menos uma das componentes nula, tornando-as irrelevantes para a análise que faremos. A solução escolhida para a análise será comparada com dados observacionais do campo de velocidades peculiares de galáxias do catálogo “A list of peculiar velocities of RFCG galaxies” [14]. Essa lista corresponde a objetos centrados num volume local do Universo onde a distribuição de galáxias respeita a função de correlação de dois pontos dada por

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1.77}, \quad (5.11)$$

onde $r_0 \approx 5\text{Mpc}$ (*e.g.* [5], [22]) e r é a posição a ser considerada. A função de correlação de dois pontos é uma medida quantitativa de aglomerados de galáxias e é definida via a probabilidade de encontrar pares de galáxias em uma distância r :

$$dN_{par} = N_0^2 (1 + \xi(r)) dV_1 dV_2,$$

onde N_0 é a densidade de massa média e dV_1 e dV_2 são elementos de volumes em torno das posições consideradas. A função $\xi(r)$ também pode ser definida utilizando o contraste de densidade $\delta(\vec{x}) = \delta\rho/\rho_0$:

$$\begin{aligned} dN_{par} &= \rho(\vec{x})dV_1\rho(\vec{x} + \vec{r})dV_2 \\ &= \rho_0^2 (1 + \delta(\vec{x})) (1 + \delta(\vec{x} + \vec{r})) dV_1 dV_2. \end{aligned}$$

Calculando a média em um grande volume, removemos os termos lineares em $\delta(\vec{x})$ e obtemos

$$\langle dN_{par} \rangle = \rho_0^2 (1 + \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle) dV_1 dV_2,$$

e portanto,

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle.$$

O procedimento utilizado nessa aplicação foi dividido em duas etapas: na primeira etapa, realizamos simulações de Monte Carlo que geram distribuições de

pontos, de acordo com o método de metrópolis, seguindo a mesma lei dada por (5.11). Estas posições foram introduzidas na solução (5.6-5.8), gerando assim campos de velocidades teóricos. Na segunda etapa, executamos ajustes estatísticos das distribuições de velocidades teóricas. Com esses testes podemos indicar valores para os parâmetros que devem ser usados para que a solução produza um campo de velocidades com distribuição aproximadamente equivalente à dos dados observados de velocidades peculiares do catálogo [14].

5.3.1 Obtenção das posições de galáxias

Para calcularmos as velocidades a partir da solução (5.6-5.8), necessitamos de um conjunto de posições representativas da distribuição de galáxias em um certo volume do espaço. De posse dessas posições, podemos introduzi-las na função-solução, e dessa forma obtermos o campo teórico de velocidades peculiares, que por sua vez satisfaça uma determinada combinação numérica dos parâmetros: λ , ν , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 e c_6 . Tais posições podem ser obtidas a partir de grandes simulações cosmológicas. Simulações desse tipo levam em conta a escolha dos parâmetros cosmológicos que descrevem a evolução do Universo, tais como, taxa de expansão, conteúdo de matéria, e a equação de estado. Simular a evolução do Universo equivale a realizar as interações entre as partículas, passo a passo, até que, dentro de um volume simulado, estruturas sejam formadas, tais como galáxias, aglomerados, superaglomerados e filamentos, dependendo da escala observada, e então finalmente pode-se obter as posições dos objetos de interesse. Contudo, esse processo tem um alto custo computacional e produz resultados fortemente dependentes das escolhas das condições iniciais.

Por outro lado, uma vez que os dados que serão comparados com os campos teóricos correspondem a um volume do Universo Local, sabemos que tais posições devem respeitar a função de correlação dada por (5.11).

Para o nosso caso específico, ao invés de fazermos uma simulação cosmológica, o que demandaria tempo e recursos computacionais, realizamos 25 simulações do tipo Monte Carlo (qual geram pontos aleatórios pelo método de metropolis) com 10 mil partículas cada. Tais simulações reproduziram “realizações” do Universo atual, onde consideramos um cubo (volume simulado) com aresta de 120 *Mpc*. Cada simulação gerou uma distribuição de pontos respeitando a função de correlação de galáxias (5.11). Assim, obtivemos ao todo 250 mil posições de galáxias que, usadas na solução (5.6-5.8), geram 250 mil dados de velocidades peculiares teóricos. Utilizamos para tal o programa desenvolvido por Andrade [1], no qual se realizou a leitura das posições simuladas via solução (5.6-5.8). Dessa forma, foi gerado não somente o campo teórico das velocidades peculiares, mas também o histograma da distribuição dessas velocidades obtidas.

5.3.2 Análise

Inicialmente, realizamos o histograma da distribuição de velocidades com os dados observacionais do catálogo RFGC (Redshift Flat Galaxies Catalog) mostrado na figura 5.2. No gráfico mostrado nessa figura estão apresentados 1326 dados de velocidades peculiares de galáxias observadas. O eixo das ordenadas representa as velocidades peculiares do catálogo RFGC, compreendidas entre os valores -7823 km/s e $+9439 \text{ km/s}$. O eixo das abscissas representa o índice inteiro correspondente a cada galáxia, por exemplo: para a galáxia 1, a velocidade será v_1 ; para a galáxia 2, será v_2 ; e assim por diante. O valor médio obtido para esse campo de velocidades foi de 54.4 km/s e a dispersão dos dados foi de 47.2 km/s .

Nas figuras 5.3 e 5.4, mostramos o histograma, que representa uma contagem relativa de galáxias que possui uma determinada velocidade, obtido para o campo observacional de velocidades peculiares apresentado na figura 5.2; na primeira figura utilizamos um ajuste gaussiano e na segunda um ajuste loretziano.

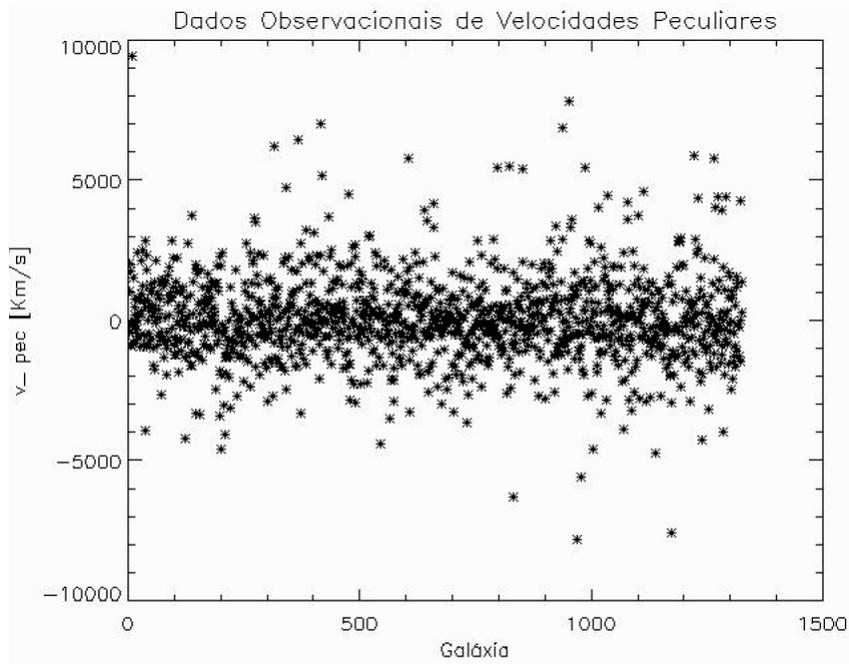


Figura 5.2: Dados observacionais de velocidades peculiares de galáxias [14].

Chamamos a atenção do leitor para o valor do parâmetro χ^2 obtido para cada ajuste estatístico. Note que o valor do χ^2 do ajuste lorentziano é levemente melhor do que o do ajuste gaussiano, o que nos sugere que o ajuste lorentziano serve como melhor base para comparações futuras.

A seguir, com os dados das 250 mil posições obtidas pelo processo de Monte Carlo, estimamos as velocidades mediante o cálculo da solução (5.6-5.8). Para que fosse efetuado esse cálculo, realizamos uma análise qualitativa para o comportamento do histograma simulado com algumas combinações numéricas para os parâmetros ν , λ , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 e c_6 . A análise que fizemos das unidades de medidas de cada parte da solução (5.6-5.8) é mostrada abaixo:

- Para a velocidade $u(x, y, z, t)$: a unidade de medida para a velocidade u é $[u] = km/s$, compatível com a unidade dos dados observacionais das velocidades peculiares;

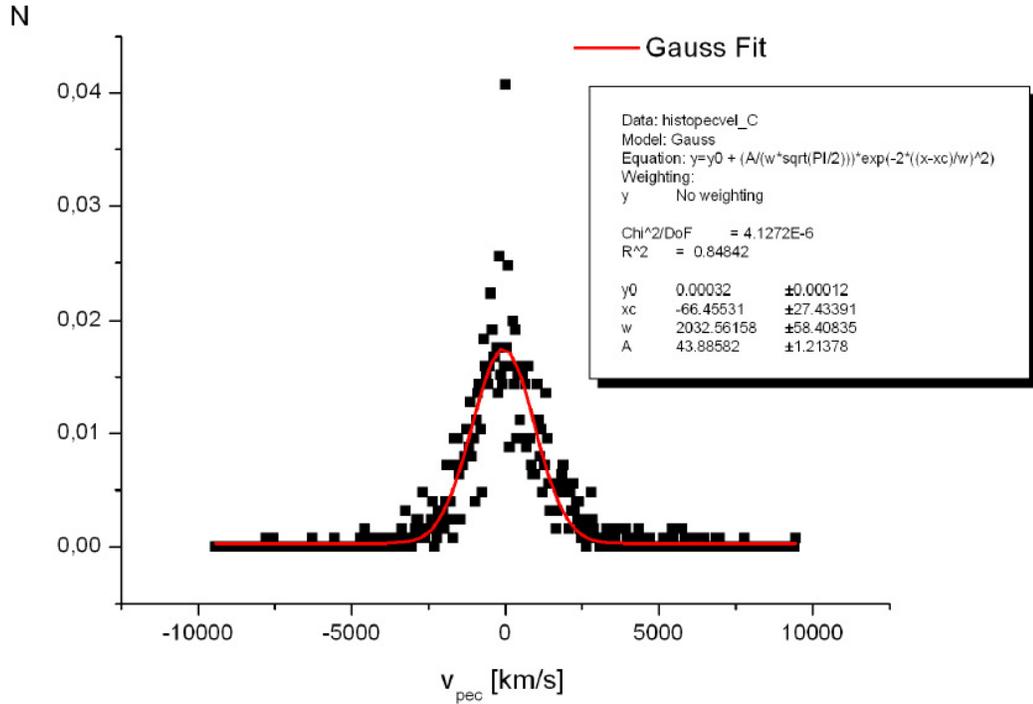


Figura 5.3: Ajuste gaussiano para os dados observacionais de velocidades peculiares.

- Para as posições x , y e z : apesar da escala do problema astrofísico em questão ser comumente medida em parsecs (pc) ou Megaparsecs (Mpc), vamos utilizar a unidade de medida quilômetro (km) para sermos coerentes com a unidade de u ;
- Para o tempo t : também para sermos coerentes com a unidade de u , vamos utilizar para o tempo t a unidade de medida segundo (s), apesar de comumente ser utilizada a unidade Giga-anos (Gyr);
- Para o parâmetro ν : sabemos que modula o termo difusivo. Ele é medido em $[\nu] = km^2/s$. Para que haja formação de estruturas seu valor deve ser grande e positivo;
- Para o parâmetro λ : esse parâmetro controla a não-linearidade do problema. Ele não possui unidade de medida, ou seja, é adimensional. Sabemos que o problema

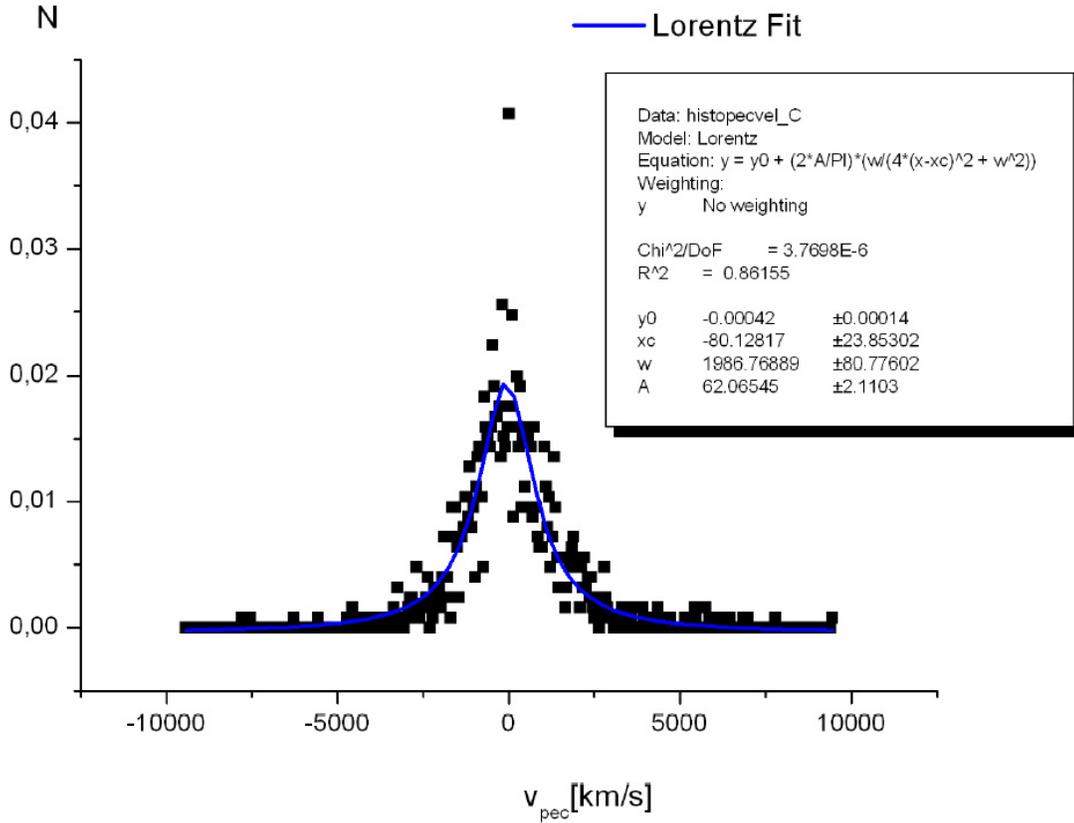


Figura 5.4: Ajuste lorentziano para os dados observacionais de velocidades peculiares.

de formação de estruturas em grandes escalas está em um estágio inicial de não-linearidade, mas não sabemos ainda como expressar isso em um determinado valor numérico, somente sabemos que λ pode ser próximo de 1;

- Para as constantes c_5 e c_6 : note nas equações (5.6-5.8) que essas duas constantes estão dentro da função tangente, cujo argumento deve ser adimensional, logo vemos que a unidade de medida de c_6 tem que ser igual a unidade da posição x , ou seja, $[c_6] = km$. Para a unidade de c_5 temos que:

$$\left(\frac{[\lambda][c_5]}{[\nu]} \right)^{\frac{1}{2}} [x] = 1$$

$$\left(\frac{1 \cdot [c_5]}{\frac{km^2}{s}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot km = 1$$

$$([c_5])^{\frac{1}{2}} \cdot km = \frac{km}{s^{\frac{1}{2}}},$$

ou seja,

$$[c_5] = \frac{1}{s}.$$

Note que $c_5 > 0$, pois caso contrário a solução em questão não teria significado físico;

- Para as constantes c_1 e c_3 : essas duas constantes têm unidades de velocidade e podem assumir qualquer valor numérico: $[c_1] = [c_3] = km/s$;
- Para as constantes c_2 e c_4 : essas duas constantes têm a mesma unidade de c_5 , ou seja, $[c_2] = [c_4] = 1/s$. Tanto c_2 quanto c_4 podem também assumir qualquer valor numérico.

Para compatibilizarmos as unidades na solução introduzimos um fator numérico de conversão na variável x e no parâmetro c_6 . Assim, a solução escolhida para os testes toma a seguinte forma:

$$u_x(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{2\nu c_5}{\lambda}} \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (x + c_6) \cdot 3.085677 \times 10^{19} \right); \quad (5.12)$$

$$u_y(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_1 \sqrt{\lambda c_5} - c_2 c_6 \sqrt{\lambda c_5} + c_2 \sqrt{2\nu} \times \right. \\ \left. \times \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (x + c_6) \cdot 3.085677 \times 10^{19} \right) \right] \quad (5.13)$$

$$u_z(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda c_5}} \left[c_3 \sqrt{\lambda c_5} - c_4 c_6 \sqrt{\lambda c_5} + c_4 \sqrt{2\nu} \times \right. \\ \left. \times \tan \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda c_5}{\nu}} (x + c_6) \cdot 3.085677 \times 10^{19} \right) \right], \quad (5.14)$$

onde levamos em conta o fato de que $1 pc = 30\,856\,775\,800\,000 km$.

Na obtenção da combinação de parâmetros, fixamos valores para ν , λ , c_5 e c_6 . Isso facilita a análise, pois a função tangente apresenta um comportamento muito irregular numa mudança mínima nos seus argumentos. Depois, por causa

da simetria óbvia entre as componentes u_y e u_z , impomos que os valores dados a c_1 seriam os mesmos aos dados a c_3 e os valores dados a c_2 seriam os mesmos dados a c_4 . Observamos então, que as constantes c_2 e c_4 influenciam na largura da distribuição, seja ela lorentziana ou gaussiana. Por sua vez, c_1 e c_3 determinam a posição do pico central da distribuição, valores negativos ocasionavam uma média negativa de velocidades. O intuito é “casar” a distribuição simulada com a distribuição das velocidades observadas. Dessa forma, fomos ajustando os valores dos parâmetros até obter um histograma simulado com aproximadamente a mesma média, largura a meia altura e cauda do histograma das distribuições das velocidades observadas.

A combinação de parâmetros mais adequada ao ajuste dos dados observacionais que encontramos foi a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \nu &= 1.0 \cdot 10^2 \text{ km}^2/\text{s}; & (5.15) \\
 \lambda &= 5.0 \cdot 10^5; \\
 c_1 = c_3 &= 4.3 \cdot 10^1 \text{ km}/\text{s}; \\
 c_2 = c_4 &= -8.0 \cdot 10^4 / \text{s}; \\
 c_5 &= 5.0 / \text{s}; \\
 c_6 &= 0.
 \end{aligned}$$

Com essa combinação de parâmetros e as 250 mil posições simuladas substituídas na solução modificada (5.12-5.14) geramos o campo teórico de velocidades peculiares com 250 mil dados. Esse campo de velocidades é mostrado na figura 5.5, onde o eixo das ordenadas representa as velocidades peculiares simuladas, e o eixo das abscissas o índice de cada galáxia.

O histograma gerado a partir do campo teórico de velocidades peculiares apresentado na figura 5.5, é mostrado nas figuras 5.6 e 5.7, em que na primeira fizemos um ajuste gaussiano e na segunda, um ajuste lorentziano.

A média das velocidades para o campo de velocidades apresentado na figura

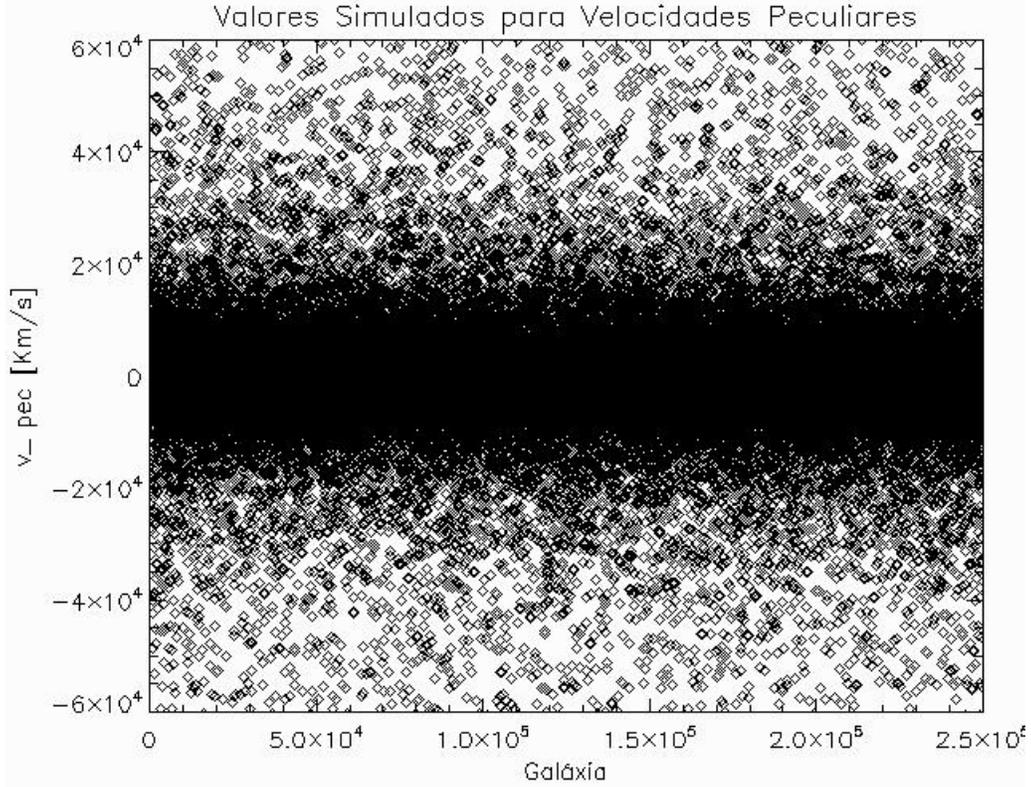


Figura 5.5: Dados de velocidades peculiares obtidas com a solução (5.11-5.14), onde foi usada a combinação de parâmetros (5.15).

5.5 obtida foi de 56.3 km/s ; bem próximo do valor da média para os dados observacionais, que foi de 54.4 km/s . Note que o parâmetro χ^2 dos gráficos acima também mostra que o ajuste lorentziano é melhor do que o ajuste gaussiano, como nos histogramas para os dados observacionais, e como obtido por Ribeiro e Falcão [23] para o caso do regime linear de difusão estocástica da equação de Burgers generalizada com ruído. Lembrando que a equação de Burgers na forma que está escrita em (4.1) está em um regime difusivo não-linear. Comparando a figura 5.6 com a figura 1 de Ribeiro e Falcão [23], representada aqui nesta dissertação na figura 5.8, mostra que ambas tem o mesmo comportamento qualitativo. Essas comparações estatísticas como resultado podem ser, em algumas áreas da ciência, consideradas muito sim-

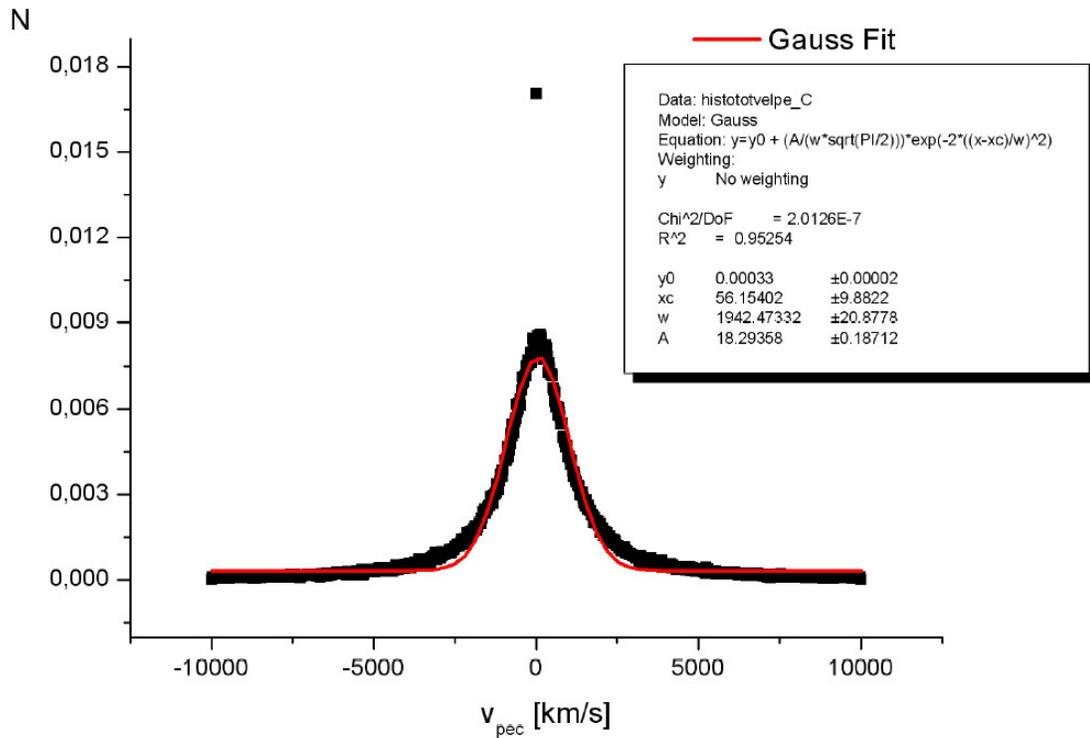


Figura 5.6: Ajuste gaussiano para as velocidades peculiares mostradas na figura 5.5.

ples, mas em cosmologia é normal, pois o intuito é “casar” ordens de grandezas e distribuições de dados observacionais com as de dados teóricos.

Esse resultado tem um aspecto interessante porque indica que tanto o crescimento da granulosidade (que aumenta o termo de ruído na equação do fluido) como a existência de um regime não-linear de formação de estruturas, concorrem para um mesmo efeito sobre a distribuição de velocidades peculiares das galáxias, ou seja, ambos levam à definição de um perfil aproximadamente lorentziano. Um resultado juntamente interessante ao fato de termos obtido um perfil lorentziano melhor do que o gaussiano para os dados de velocidades simuladas, é o de não ter obtido um perfil gaussiano melhor do que o lorentziano. Naturalmente, esses resultados têm um caráter exploratório, ainda preliminar, e estudos subsequentes são necessários para confirmar ou não o efeito de granulosidade e não-linearidade sobre o campo de

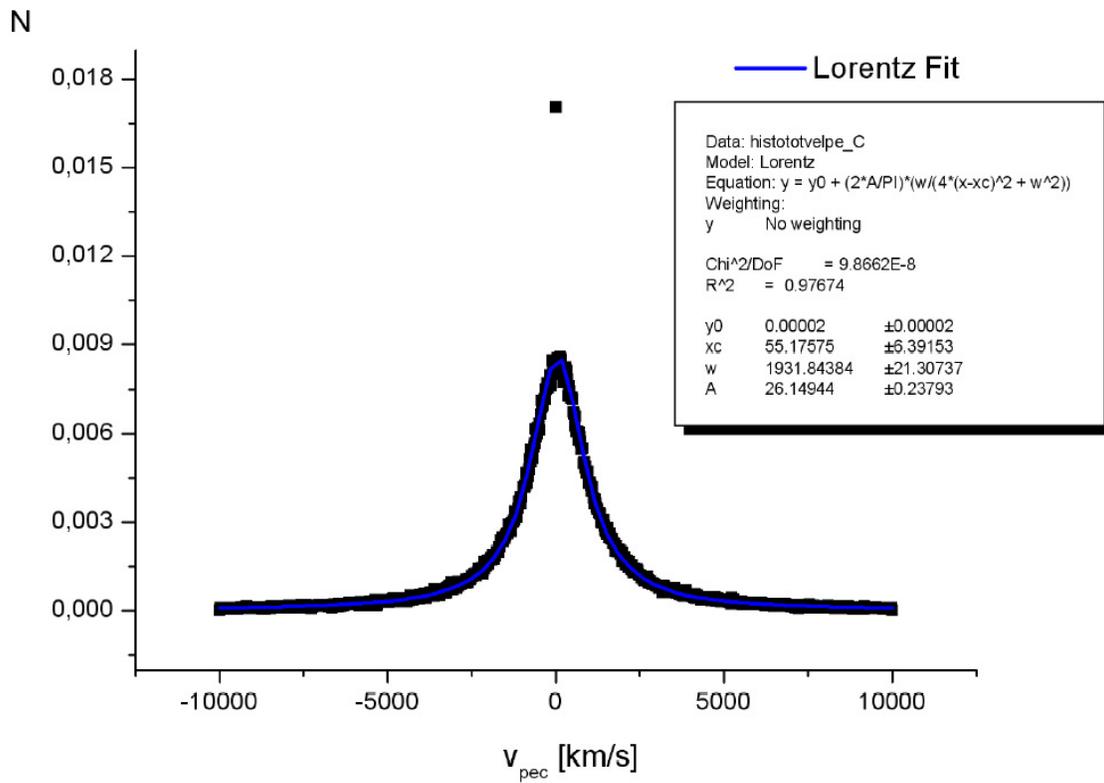


Figura 5.7: Ajuste lorentziano para as velocidades peculiares mostradas na figura 5.5.

velocidades peculiares.

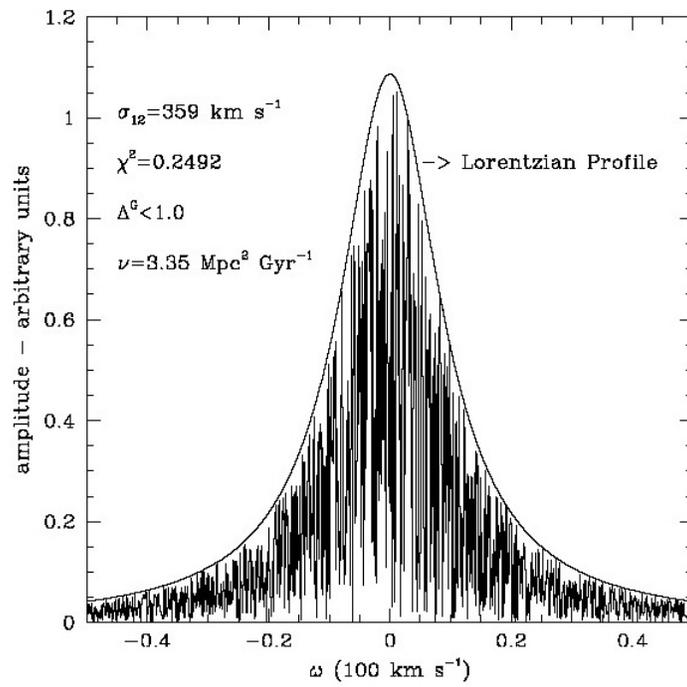


Figura 5.8: Perfil lorentziano para a função de correlação $\langle u, u' \rangle$ dado pela equação (4.17), segundo Ribeiro e Falcão [23].

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho, apresentamos um aspecto do problema astrofísico de formação de estruturas em grandes escalas a partir de soluções analíticas obtidas utilizando computação algébrica.

No segundo capítulo, mostramos que o Universo pode ser considerado como um fluido ideal, que com o uso das equações da hidrodinâmica, mais precisamente, da equação de Euler, nos leva à equação generalizada de Burgers com ruído. Como uma primeira etapa de um sistemático estudo de soluções analíticas dessa equação, consideramos somente as soluções da equação sem o termo estocástico, invariantes por simetrias de Lie, pois os métodos algébricos implementados que utilizamos não permitem tratar termos estocásticos. Mas mesmo assim, obtemos soluções relevantes que ainda resultam em resultados de interesse físico.

No terceiro capítulo, delineamos o método de solução utilizado pelo pacote SADE, escrito em Maple, que nos permitiu obter as soluções da equação generalizada de Burgers sem ruído usando simetrias de Lie. Tal método de solução de equações diferenciais, nos permite obter soluções através de transformações infinitesimalmente próximas à origem que mantêm invariante a forma original da equação diferencial considerada, e que depende apenas das variáveis dependentes. Essas soluções obtidas são chamadas de soluções invariantes. A idéia por trás do método é reescrever as

variáveis independentes da equação diferencial em que se quer obter suas soluções de tal maneira que, quando introduzidas na mesma equação, a sua forma original é preservada. Essa reescritura das variáveis independentes é uma transformação infinitesimalmente próxima a unidade, obtida através de uma expansão de Taylor em que são consideradas somente os termos de primeira ordem da expansão. A determinação dos geradores de simetria da equação diferencial envolve a solução de um sistema de equações diferenciais parciais lineares, denominado sistema de equações determinantes. Cada gerador de simetria nos permite reduzir o número de variáveis independentes da equação diferencial. No nosso caso em específico em que temos quatro variáveis independentes, o conhecimento de três geradores de simetria nos permite reduzir a equação generalizada de Burgers sem ruído a uma EDO, que então podemos tentar resolver analiticamente. Todo o procedimento apresentado no terceiro capítulo foi implementado no pacote SADE, que obtêm os geradores de simetria e as correspondentes soluções invariantes de uma determinada equação diferencial automaticamente.

No quinto capítulo apresentamos todas as 220 soluções invariantes por simetrias de Lie obtidas com o programa computacional conseguidas com os 12 geradores de simetria também obtidos com o programa.

Feito isso, aplicamos a solução invariante (5.6-5.8), pois foi o único tipo de solução obtida em que todas as componentes da velocidade apresentam uma forma não-nula, ao problema de formação de estruturas. Tal aplicabilidade foi conseguida simulando uma distribuição de posições de galáxias respeitando a função de correlação de dois pontos. As simulações realizadas forma do tipo Monte Carlo, em que os pontos foram gerados através do método de metrópolis. Com as posições obtidas, usamos a solução para gerar campos de velocidades teóricos. Então iniciamos vários testes para obtermos uma combinação de parâmetros que gerasse uma distribuição de velocidades compatível com a distribuição de velocidades pe-

culiars observadas. Essa compatibilidade foi verificada através de histogramas de distribuição de velocidades, onde comparamos os histogramas de distribuição de velocidades observacionais com os histogramas obtidos com as velocidades simuladas a partir da solução (5.6-5.8).

Com a combinação de parâmetros obtida em (5.15), verificamos que a compatibilidade entre as duas distribuições de velocidades é boa e sugere que o modelo exposto no segundo capítulo desta dissertação é relevante para descrever a formação de estruturas no Universo. Estes ainda são resultados preliminares que necessitam de mais testes. Também, é aconselhável analisar algumas outras soluções como por exemplo a solução do tipo (5.4-5.5) a solução do tipo (5.9-5.10) apresentadas na seção 5.2; podendo inclusive obter mais soluções com o método de simetrias não-clássicas, que é uma generalização das simetrias de Lie. Podemos também, obter os parâmetros analiticamente, utilizando tanto catálogos de velocidades peculiares como simulações numéricas de N -corpos. Outras análises também podem ser realizadas utilizando outros bancos de dados observacionais mais recentes ou com uma amostragem maior.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrade, A.P.A., *Comunicação privada*.
- [2] Binney, J e Tremaine, S., *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press (Princeton, 1987).
- [3] Buchert, T., Domínguez, A. and Pérez-Mercader, J., *Extending the scope of models for large-scale structure formation in the universe*, Astronomy and Astrophysics, 9709218, 1999.
- [4] Cole, J. D., *A quasi-linear parabolic equation in aerodynamics*, Quart. Appl. Math, **9**, 225, (1951).
- [5] Coles, P., and Lucchin 1995, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, (John Wiley & Sons Ltd.).
- [6] Edwards, S. F., and Wilkinson, D. R. 1982, *The surface statistics of a granular aggregate*, Proc. R. Soc. London A., **381**, 17.
- [7] Fogedby, H. 1998, *Aspects of the noisy Burgers equation*, Proceedings of the XIth Max Born Symposium, Ladek Zdroj, Poland, 20-27.
- [8] Fogedby, H. 2005, *Localized growth modes, dynamics textures, and upper critical dimension for the Kardar-Parisi-Zhang equation in the weak-noise limit*, Phys. Rev. Lett., 94, 19570.

- [9] Gol'berg, Z. A., *Finite amplitude waves in magnetohydrodynamics*, JETP, **15**, 179, (1962).
- [10] Gurbatov, S. N., Saichev A. I., and Shandarin, S. F. 1985, *Model description of the large-scale structure of the Universe development*, Sov. Phys. Doklady, **30**, 921-923.
- [11] Gurbatov, S. N., Saichev, A. I., and Shandarin, S. 1989, *The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion*, MNRAS, **236**, 385-402.
- [12] Hopf, E., *The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , Comm. Pure and Appl. Math., **3**, 201, (1950).
- [13] Hydon, P. E., *Symmetry Methods for Differential Equations*, Cambridge Univ. Press (Cambridge, 2000).
- [14] Karachentsev I.D., Karachentseva V.E., Kudrya Y.N., Makarov D.I., Parnovsky S.L., *A list of peculiar velocities of RFCG galaxies*, Bull. Special Astrophys. Obs., **50**, 5 (2000).
- [15] Katz, J. I. and Green, M. L., *A Burgers model of interstellar dynamics*, Astron. Astrophys., **161**, (1986).
- [16] Kofman, L. A. and Raga, A. C., *Modeling structures of knots in jet flows with the Burgers equation*, Astrophys. J., **390**, 359, (1992).
- [17] Kofman, L. A. and Shandarin, S. F., *Theory of adhesion for the large-scale structure of the universe*, Nature, **334**, 129, (1988).
- [18] Lagerstrom, P., Cole, J.D. and Trilling, L., *Problems in the Theory of Viscous Compressible Fluids*, monograph, California Institute of Technology (1949).

- [19] Olver, P. S., *Application of Lie groups to differential equations*, 2.ed, Springer (Nova Iorque, 1993).
- [20] Rocha Filho, T. M. and Figueiredo, A., *A Maple package for the symmetry analysis of differential equations*, preprint submitted to Elsevier.
- [21] Nerney, S., Schmahl, E. and Musiela, Z. E. 1993, *Limits to extensions of Burgers equation*, Quarterly J. of Appl. Math., 9410004.
- [22] Padmanabhan, T., *Structure formation in the universe*, Cambridge University Press, 1993.
- [23] Ribeiro, A. L. B., and Falcão, M. A. 2006, *Galaxy peculiar motions under a diffusive-stochastic regime*, A & A, **450**, 83.
- [24] Ribeiro, A. L. B., and Peixoto de Faria, J. G. 2005, *Weakly nonlocal hydrodynamics and origin of viscosity in the adhesion model*, Phys. Rev. D., **71**, 67302.
- [25] Shandarin, S. F. 1995, *Three-dimension Burgers' equation as a model for the large-scale structure formation in the Universe*, Cornell University Library, 9507082.
- [26] Souza, Ronaldo E. de, *Introdução à Cosmologia*, ed. Edusp, 2004.
- [27] Van Der Pol, B., *On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobian theta-functions, with arithmetical application*, Proc.Acad. Amsterdam, **A13**, 261, (1951).
- [28] White, S. D. M. 1994, *Formation evolution of galaxies*, Lectures given at Les Houches.