

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

**Dinâmica de Campos Térmicos em Espaços
Não-Comutativos**

Marcelo Leineker Costa

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana

Co-orientador: Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz

Brasília-DF

Junho, 2010

Aos meus pais, à minha irmã, à Shara e nosso(a) filho(a).

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Carme-Lúcia e Luiz Carlos e a minha irmã Adriana pelo amor e apoio incondicionais. Aos meus familiares de Curitiba e Recife, cujos nomes não caberiam em uma só página de agradecimentos. À Shara pelo amor e pela companhia neste último ano de trabalho. Aos professores Ademir Eugênio de Santana e Amílcar Rabelo de Queiroz pelo imensurável aprendizado e pela grande amizade e paciência nestes quatro anos de trabalho. Aos amigos, que tenho como irmãos, Álvaro, Luis, Osvaldo e Roberto Louzada por tudo o que passamos, e ainda passaremos, juntos. Aos amigos Crhystian, Abraão, Ronni, Pedro Ivo, Pedro, Willian, Eduardo e Roberto Steiner. Aos professores Magela e Gargano pelos bons conselhos e pela amizade. Aos professores Annibal, Marciano, Amato e Dodonov. Aos amigos Caio e Antony Polito. Aos amigos Michel, Nanda, Anas, Ricardo e Diogo. Aos professores e amigos da UFT, em especial ao meu compadre Gentil, Patrick, George, Rafael, Glenda e Warley. Agradeço também à Iara e família. Agradeço ao apoio financeiro do CNPQ e da Finatec.

Resumo

Nesta tese apresentamos uma introdução detalhada da dinâmica de campos térmicos (DCT), formalismo que se propõe a tratar sistemas térmicos. A DCT se mostra útil por incorporar as mesmas técnicas de cálculo que a teoria quântica de campos a temperatura zero, incluindo formalismo canônico, formalismo funcional e técnicas de renormalização. É neste contexto que introduzimos um formalismo funcional que trata naturalmente sistemas interagentes. Como um dos desenvolvimentos do projeto aplicamos a DCT em um modelo ϕ^4 definido sobre um espaço-tempo não-comutativo. Tal aplicação, entre outros interesses, nos possibilita comparar a DCT aos resultados obtidos por outros formalismos térmicos (por exemplo, Matsubara) quando aplicado à sistemas definidos sobre um espaço-tempo não-comutativo encontrados na literatura. Afim de construir uma teoria térmica sobre espaços não-comutativos, invariante sob transformações do grupo de Poincaré, obtivemos o grupo de Poincaré com o coproduto deformado. Neste formalismo mostramos que a matriz S independe do parâmetro de não-comutatividade, porém a estatística da teoria é alterada. Obtemos, ainda, a expressão para o teorema de Wick desta teoria.

Abstract

In this work we present a detailed introduction to thermofield dynamics (TFD), a formalism dealing with thermal systems. TFD is useful because it uses the same technics of quantum field theory at zero temperature to finite temperature systems, including canonical formalism, functional formalism and renormalization technics. In this context we introduce a functional formalism that treats naturally interacting systems. We apply this formalism to ϕ^4 model defined over a non-commutative space-time. This application is interesting because it enable us a comparison of DCT with other results obtained by other thermal formalisms, *e.g.* Matsubara's formalism, applied over non-commutative space-time. In order to approach a thermofield theory over non-commutative space-time, invariant by Poincaré group, we obtain the twisted Poincaré group. In this formalism we show that the S-matrix do not depend of the non-commutative parameter, but the statistics is changed. We obtain the Wick's theorem for this theory.

Lista de Publicações

O presente trabalho é baseado nos artigos sobre dinâmica de campos térmicos em espaços não-comutativos e sobre a álgebra de Poincaré deformada na dinâmica de campos térmicos.

Estes artigos são:

1. **M. L. COSTA**, A. R. QUEIROZ e A. E. SANTANA.

Noncommutative Thermofield Dynamics.

International Journal of Modern Physics A 25, 3209 (2010).

2. **M. L. COSTA**, A. R. QUEIROZ, A. E. SANTANA e C. A. SIQUEIRA.

Wick's Theorem on Noncommutative Thermofield Dynamics.

Em preparação (2010).

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Publicações	iv
1 Introdução	1
2 Formalismo de DCT	5
2.1 Dinâmica de campos térmicos.	5
2.2 O significado da duplicação em DCT	8
2.2.1 Geradores de simetrias e observáveis	8
2.2.2 Álgebra de Lie duplicada	8
2.2.3 Regras de conjugação til	9
2.3 Estados térmicos do sistema \mathcal{OB}_ω	10
2.4 Transformação de Bogoliubov	12
2.4.1 Operadores térmicos	14
2.5 Notação matricial	17

3	Campo escalar real em DCT	19
3.1	O campo escalar real	19
3.2	Notação matricial para o campo real	26
4	DCT interagente	29
4.1	Lei de substituição til para campos livres e a condição KMS para o propagador livre.	29
4.1.1	Lei de substituição til: caso livre	31
4.2	Representação de interação na DCT e funções de Green interagentes	33
4.3	Teorema de Wick para DCT	36
5	Teoria de campo sobre espaços não-comutativos	40
5.1	O plano de Groenewald-Moyal	41
5.2	A teoria livre	44
5.3	Interações	45
5.4	Modelo ϕ^4	46
5.5	Divergências ultravioleta e infravermelha (mistura UV-IR)	50
6	Teorias de campos não-comutativas e DCT	54
6.1	Funcional gerador para bósons	54
6.2	Transformação de Bogoliubov e integrais de trajetórias	56
6.3	DCT no plano não-comutativo	58
6.4	Função de dois pontos β, θ em (1+1)-dimensões	60

7	Ordenamento temporal para DCT não-comutativa a partir de espaços de Fock deformados	63
7.1	Álgebra de Hopf deformada dos geradores de Poincaré	65
7.2	Matriz S para a DCT com álgebra deformada de Poincaré	67
7.2.1	DCT com álgebra deformada de Poincaré	67
7.2.2	Matriz S	70
7.3	Teorema de Wick	73
8	Conclusão e perspectiva	81

Capítulo 1

Introdução

As teorias de campos formuladas sobre espaços não-comutativos tem atraído atenção nas últimas décadas por vários motivos. Em particular, estas tem sido associadas com o comportamento de campos de calibre não-abelianos e com efeitos fenomenológicos em física da matéria condensada, incluindo aspectos de transição de fase [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Adicionalmente, existem alguns resultados advindos de teorias de cordas. Neste caso, Connes, Douglas e Schwarz [9] mostraram que uma teoria-M pode ser equivalente a um campo super-simétrico de Yang-Mills sobre um toro não-comutativo; um resultado explorado e expandido por Seiberg e Witten [10].

Um ingrediente das teorias de campos sobre espaços não-comutativos é a mistura das divergências infravermelha e ultravioleta (mistura UV-IR) se manifestando simultaneamente nos esquemas de perturbação. Esta divergência é uma marca da não-comutatividade devido ao aparecimento de diagramas não planares; e uma forma de regularizar as divergências UV é requerer que os *momenta* externos estejam distantes do regime IR. A mistura UV-IR é relevante para aplicações da não-comutatividade em sistemas da matéria condensada, incluindo os casos a temperatura finita, como no efeito Hall quântico [1]. Uma das maneiras de se testar a não-comutatividade entre coordenadas espaciais consiste em considerar o limite de altas temperaturas [11]. Estes elementos tem então motivado diversos estudos que levam em conta a temperatura, e todos são baseados no formalismo de Matsubara [12, 13, 14, 15, 16].

Nas teorias de campos existem métodos para se introduzir o efeito de temperatura que são implementados por diferentes escolhas de contornos do plano de tempo complexo. Um desses métodos é o formalismo de tempo imaginário (Matsubara) [17], construído por uma

rotação de Wick na evolução temporal do fator de Boltzmann, $\exp(-\beta H)$, onde β é o inverso da temperatura T^1 , de modo que o tempo t é mapeado em um tempo imaginário: $t \rightarrow t = i\tau$, com $0 \leq \tau \leq \beta$. O outro formalismo é denominado tempo real e, como não trata de tempo imaginário, pode ser aplicado a problemas fora do equilíbrio térmico. O primeiro formalismo de tempo real foi proposto por Schwinger [18] e Keldysh [19], incluindo um desenvolvimento funcional. Uma outra forma para se introduzir um método de tempo real é denominado dinâmica de campos térmicos (DCT) [20, 21], e é estabelecido a partir da noção de espaços lineares e teorias de representação. Ambos os formalismos, Keldysh-Schwinger e DCT, são essencialmente o mesmo para situações de equilíbrio termodinâmico [22].

A DCT foi proposta por Takahashi e Umezawa para sanar dificuldades com a utilização do formalismo de tempo imaginário [23]. Os elementos básicos da DCT são a duplicação do espaço de Hilbert e uma transformação de Bogoliubov. Esta última consiste em uma rotação, que associada com a duplicação conduz à termalização. Este formalismo foi desenvolvido para fins práticos, e acomoda esquemas perturbativos e regras de Feynman que seguem em paralelo com as das teorias quânticas de campos a temperatura finita [20, 24]. As aplicações incluem sistemas supercondutores [25], sistemas magnéticos como ferromagnetismo e paramagnetismo [26], ótica quântica [27, 28, 29, 30, 31], fenômenos de transporte [32], d-branas [33, 34] e física de partículas [24].

Formalmente a teoria de tempo real pode ser estudada usando DCT no contexto de álgebras- C^* [35] e grupos de simetria [21, 36, 37]. Nesta análise a estrutura da representação de Tomita-Takesaki [38, 39] é usada e, em particular, o significado físico da duplicação do espaço de Hilbert é totalmente identificado com a noção de grupos-térmicos de Lie [40, 21]. Nesta perspectiva, existem diversas possibilidades algébricas para se explorar os efeitos térmicos. Como exemplo, a teoria cinética tem sido formulada a partir de representações de grupos de simetria [21] e elementos de q-grupos tem sido considerados, onde o efeito da temperatura fica relacionado a uma deformação da álgebra de Weyl-Heisenberg [41, 42].

Um aspecto interessante que surge naturalmente a partir da estrutura algébrica da DCT é o propagador escrito em duas partes: uma descreve a teoria a $T = 0$, enquanto a outra é responsável pelo efeito de temperatura. Este não é o caso do formalismo de tempo imaginário, onde o propagador se reduz ao de uma teoria euclideana 3-dimensional no espaço dos *momenta*, envolvendo uma soma infinita das frequências de Matsubara: $w_n = 2\pi n/\beta$ no caso de bósons e $w_n = \pi(2n + 1)/\beta$ no caso de férmions.

O uso da DCT passa a ser muito apropriado quando o efeito de temperatura concorre com

¹Neste trabalho adotaremos $k_B = 1$.

outro parâmetro, como em uma teoria não-comutativa. Este é um aspecto que exploraremos em detalhe neste trabalho.

Objetivo geral

Neste trabalho nosso principal objetivo é analisar a competição entre o efeito térmico e o parâmetro de não-comutatividade em uma teoria de campo a temperatura finita com tempo real. Nosso ponto de partida é a dinâmica de campos térmicos (DCT). Para isso desenvolvemos vários elementos da DCT para o contexto de teorias não-comutativas. Os procedimentos com o uso da DCT são frequentemente implementados no esquema da quantização canônica. Aqui consideramos a quantização através de um formalismo de integral de trajetória duplicado [21, 43, 44], estendido ao espaço não-comutativo. O teorema de Wick na forma canônica é demonstrado de modo generalizado na DCT, incluindo a não-comutatividade. Concentramos o estudo à teoria $\lambda\phi^4$, embora nosso procedimento possa ser estendido a outras teorias de campos interagentes sobre espaços não comutativos. Como aplicação, calculamos a função de dois pontos a 1-loop, com tempo real, mostrando explicitamente o efeito de temperatura e não comutatividade.

Estrutura da tese e objetivos específicos

Esta tese é organizada como se segue. No capítulo 2 fazemos uma introdução ao formalismo da DCT, evidenciando a necessidade da duplicação do espaço de Hilbert e mostrando o esquema de termalização via transformação de Bogoliubov. Aplicamos este formalismo ao oscilador bosônico. No capítulo 3 desenvolvemos em detalhes a DCT para um sistema de infinitos osciladores bosônicos aplicando este a um campo escalar real. Obtemos ainda o propagador térmico para o campo escalar real. No capítulo 4 é mostrado o formalismo de DCT para campos interagentes, com as leis de substituição til, a matriz de evolução temporal e o teorema de Wick para DCT. No capítulo 5 fazemos uma introdução às teorias de campos sobre espaços não comutativos, analisando as peculiaridades dos diagramas não planares e aplicando esta teoria ao modelo ϕ^4 . Os capítulos 6 e 7 contêm as contribuições originais da tese. No capítulo 6 obtemos a DCT sobre espaços não-comutativos via integral de trajetória para o modelo ϕ^4 . Analisamos este modelo para duas dimensões (1 + 1) afim de avaliar o comportamento em termos da temperatura e do parâmetro de não-comutatividade. No capítulo 7 estudaremos a álgebra de Poincaré deformada (*twisted*)

aplicada a uma teoria de campos escalares. Obtemos a álgebra de Poincaré deformada para o espaço de Hilbert duplicado, a matriz S e o teorema de Wick para esta teoria.

Capítulo 2

Formalismo de DCT

Neste capítulo vamos estudar a conexão entre a DCT e a Mecânica Estatística Quântica. Esta conexão é possível pela introdução do conceito de um estado térmico, associado a um ensemble estatístico via duplicação dos graus de liberdade do sistema. Abordaremos as possíveis interpretações para esta duplicação e veremos que esta pode, também, ser obtida a partir da estrutura algébrica da TQC. Como primeiro exemplo, estudaremos o sistema \mathcal{OB}_ω composto por um oscilador bosônico com um grau de liberdade. Este sistema será a base para construção dos campos que estudaremos ao longo desta tese.

2.1 Dinâmica de campos térmicos.

Em mecânica estatística a média de um observável \mathcal{O} em equilíbrio térmico é dada por

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(\mathcal{O}\rho(\beta)), \quad (2.1)$$

onde $Z(\beta) = \text{Tr}(\rho(\beta))$ é a função de partição, $\rho(\beta) = e^{-\beta H}$ é a matriz densidade, H é o operador Hamiltoniano do sistema e $\beta = (kT)^{-1}$, T sendo a temperatura e k a constante de Boltzmann, no que segue adotamos $k = 1$. Em teoria quântica de campos a temperatura zero, a média de um observável \mathcal{O} é dada pelo valor esperado no vácuo,

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle,$$

Na tentativa de construir um formalismo térmico com estrutura formal análoga ao formalismo de temperatura zero, assumimos a existência de um estado térmico puro $|0(\beta)\rangle$, tal

que

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(\mathcal{O}\rho(\beta)), \quad (2.2)$$

Considerando que $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ e $\rho(\beta)|n\rangle = \rho_n(\beta)|n\rangle = e^{-\beta E_n}|n\rangle$, com $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, podemos escrever

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | \mathcal{O} | n \rangle. \quad (2.3)$$

Podemos tentar descrever o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ como uma superposição dos auto-estados $|n\rangle$

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | 0(\beta) \rangle \equiv \sum_n f_n(\beta) |n\rangle, \quad (2.4)$$

sendo os coeficientes $f_n(\beta)$ números complexos. Assim podemos reescrever

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle = \sum_{nm} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n | \mathcal{O} | m \rangle. \quad (2.5)$$

Isto nos daria o resultado correto, Eq.(2.3), se tivéssemos

$$f_n^*(\beta) f_m(\beta) = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n} \delta_{nm}. \quad (2.6)$$

Esta relação, no entanto, não pode ser satisfeita para $m \neq n$ pois os coeficientes $f_n(\beta)$ são números complexos. Este resultado já era fisicamente esperado, e diz apenas que não podemos descrever um estado misto em termos de um estado puro $|0(\beta)\rangle$, caso fiquemos restritos ao espaço de Hilbert original. Se verificarmos que a Eq.(2.6) pode ser entendida como uma condição de ortogonalidade e introduzirmos uma duplicação no espaço de Hilbert, poderemos verificar que essa condição é satisfeita para m e n quaisquer. Este procedimento de duplicação do espaço de Hilbert é comum em qualquer formalismo que trate de fenômenos térmicos e se justifica no fato de que geradores de simetria e observáveis dinâmicos, apesar de serem indistinguíveis do ponto de vista algébrico, são distinguíveis em nível dinâmico. Considere a Eq.(2.3)

$$\langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_n \rho_n(\beta) \langle n | \mathcal{O} | n \rangle,$$

onde fizemos $\rho_n(\beta) = e^{-\beta E_n}$. Podemos estender a soma sob os elementos diagonais $\langle n | \mathcal{O} | n \rangle$ para uma soma sobre todos os elementos $\langle n | \mathcal{O} | m \rangle$ introduzindo uma delta de Kroneker no

somatório

$$\langle 0(\beta)|\mathcal{O}|0(\beta)\rangle = Z^{-1}(\beta) \sum_{n,m} \rho_n^{1/2}(\beta) \rho_m^{1/2}(\beta) \delta_{m,n} \langle n|\mathcal{O}|m\rangle. \quad (2.7)$$

Considerando agora que estamos trabalhando num espaço que consiste de um produto tensorial de dois espaços de Hilbert, ou seja, expandido por um conjunto de auto-estados $\{|n, \tilde{m}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle\}$, onde o observável \mathcal{O} , é agora representado por $\mathcal{O} \otimes \tilde{\mathbf{I}}$, podemos escrever a seguinte relação

$$\delta_{n,m} \langle n|\mathcal{O}|m\rangle = \langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle \langle n|\mathcal{O}|m\rangle = \langle n, \tilde{n}|\mathcal{O} \otimes \tilde{\mathbf{I}}|m, \tilde{m}\rangle,$$

onde utilizamos ortonormalidade $\langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle = \delta_{\tilde{n}\tilde{m}}$ dos auto-estados $\{|\tilde{n}\rangle\}$ e consideramos também $\tilde{m} = m$, $\tilde{n} = n$. Substituindo essa relação na Eq.(2.7), obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|\mathcal{O}|0(\beta)\rangle &= Z^{-1}(\beta) \sum_{n,m} \rho_n^{1/2}(\beta) \rho_m^{1/2}(\beta) \langle n, \tilde{n}|\mathcal{O} \otimes \tilde{\mathbf{I}}|m, \tilde{m}\rangle. \\ &= Z^{-1}(\beta) \sum_{n,m} \rho_n^{1/2}(\beta) \langle n, \tilde{n}|\mathcal{O} \otimes \tilde{\mathbf{I}}|m, \tilde{m}\rangle \rho_m^{1/2}(\beta) \\ &= \left(Z^{-1/2}(\beta) \sum_n \rho_n^{1/2}(\beta) \langle n, \tilde{n}| \right) \mathcal{O} \otimes \tilde{\mathbf{I}} \left(Z^{-1/2}(\beta) \sum_m \rho_m^{1/2}(\beta) |m, \tilde{m}\rangle \right). \end{aligned}$$

Vemos portanto que o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ fica sendo dado por

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= Z(\beta)^{-1/2} \sum_n \rho_n^{1/2}(\beta) |n, \tilde{n}\rangle \\ &= Z(\beta)^{-1/2} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A Eq.(2.4) fica reescrita como

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n, \tilde{n}\rangle. \quad (2.9)$$

Substituindo esta expressão na Eq.(2.5), ficamos com

$$f_n(\beta) f_n^*(\beta) = Z^{-1}(\beta) e^{-\beta E_n},$$

que tem como solução $f_n(\beta) = f_n^*(\beta) = Z^{-1/2}(\beta) e^{-\beta E_n/2}$, confirmando que o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ é, portanto, definido neste espaço de Hilbert duplicado.

Em termos da matriz densidade, a duplicação está presente quando escrevemos a equação de Liouville-von Neumann, $i\partial_t\rho = L\rho$, com $L = [H, \cdot]$ sendo o Liouvilliano. Neste caso L é o gerador das translações temporais de $\rho(t)$, enquanto que o Hamiltoniano H é um observável. Eles estão em correspondência, mas são objetos diferentes física e matematicamente. Na seção seguinte exploraremos esta diferença em um contexto mais geral.

2.2 O significado da duplicação em DCT

2.2.1 Geradores de simetrias e observáveis

A fim de introduzirmos um formalismo baseado no estado $|0(\beta)\rangle$ a partir de considerações gerais, assumimos que o conjunto de variáveis cinemáticas, \mathcal{V} , é um espaço vetorial dos automorfismos em um espaço de Hilbert \mathcal{H}_T . O conjunto \mathcal{V} é composto de dois subespaços e é escrito como $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{ob} \oplus \mathcal{V}_{gen}$, onde \mathcal{V}_{ob} consiste no conjunto de observáveis cinemáticas, enquanto que \mathcal{V}_{gen} consiste no conjunto de geradores (cinemáticos) de simetria. Esta classificação de \mathcal{V} é usual em teoria quântica (e também em clássica), mas neste caso temos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{ob} = \mathcal{V}_{gen}$. Isto ocorre porque para cada gerador de simetria existe um correspondente observável descrito pelo mesmo objeto algébrico.

Deve-se enfatizar que, a despeito da correspondência 1-1 entre observáveis e geradores de simetria ser fisicamente embasada, não existe nenhuma imposição mecânica (ou cinemática) *a priori* para considerar que um gerador de simetria e o correspondente observável devem ser descritos pelo mesmo objeto matemático. De fato, estamos livres para assumir uma situação mais geral. Aqui iremos considerar a mesma correspondência entre geradores e observáveis, mas \mathcal{V}_{ob} e \mathcal{V}_{gen} serão considerados como diferentes entre si. Ou seja, \mathcal{V}_{ob} e \mathcal{V}_{gen} serão descritos por diferentes aplicações em \mathcal{H}_T . Para enfatizar esta diferença, denotaremos elementos arbitrários de \mathcal{V}_{ob} por A e por \hat{A} o correspondente elemento em \mathcal{V}_{gen} . Agora analisaremos a consequência de tal *condição de separabilidade* em uma situação geral.

2.2.2 Álgebra de Lie duplicada

Tomando \mathcal{H}_T como um espaço vetorial para a representação da álgebra de Lie l , podemos escrever

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i c_{ij}^k \hat{A}_k, \quad (2.10)$$

onde $\hat{A}_i \in \mathcal{V}_{gen}$. A presença do número imaginário i serve para enfatizar que estamos tratando com uma representação unitária de l .

A Eq.(2.10) mostra que temos uma representação para l em termos dos operadores do tipo \widehat{A} . Contudo, como \mathcal{H}_T é o espaço de representação, devemos considerar os operadores do tipo A (de modo contrário teremos apenas a representação usual). Conseqüentemente temos relações de comutação adicionais entre os operadores A e \widehat{A} , e entre os operadores A . Ou seja,

$$[\widehat{A}_i, A_j] = if_{ij}^k A_k, \quad (2.11)$$

$$[A_i, A_j] = ig_{ij}^k A_k, \quad (2.12)$$

onde f_{ij}^k e g_{ij}^k são constantes de estrutura a serem fixadas. Observe que estas relações de comutação Eq.(2.10-2.12) descrevem uma álgebra de Lie (a ser denotada por l_T) que é um produto semi-direto de duas subálgebras, \mathcal{V}_{gen} e \mathcal{V}_{obs} , sendo \mathcal{V}_{obs} a subálgebra invariante. A razão para isto é uma imposição física. Desde que os operadores A descrevem observáveis cinemáticas, a Eq.(2.11) é interpretada como a ação infinitesimal da simetria gerada por \widehat{A}_i no observável A_i , resultando em outro observável dado por $if_{ij}^k A_k$. Aqui tomamos $f_{ij}^k = g_{ij}^k \equiv c_{ij}^k$ [45].

2.2.3 Regras de conjugação til

Algumas propriedades da álgebra l_T , que serão úteis no estudo das representações, podem ser imediatamente deduzidas. Definindo a variável $\widetilde{A} = A - \widehat{A}$, as relações de comutação dadas por Eqs.(2.10)-(2.12) são agora reescritas como

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= ic_{ij}^k A_k, \\ [\widetilde{A}_i, \widetilde{A}_j] &= -ic_{ij}^k \widetilde{A}_k, \\ [A_i, \widetilde{A}_j] &= 0. \end{aligned}$$

Este resultado mostra que a duplicação dos graus de liberdade foi introduzida, em comparação com a teoria de representação de grupos padrão (irredutível). Esta é uma consequência direta da separabilidade entre as aplicações em \mathcal{H}_T descrevendo os geradores de simetria e aquelas descrevendo os observáveis.

A duplicação é um automorfismo de \mathcal{V} , isto é, $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, tal que $\tau(A) = \widetilde{A}$, satisfazendo

as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
\widetilde{(A_i A_j)} &= \widetilde{A}_i \widetilde{A}_j, \\
\widetilde{(cA_i + A_j)} &= c^* \widetilde{A}_i + \widetilde{A}_j, \\
\widetilde{(A_i^\dagger)} &= (\widetilde{A}_i)^\dagger, \\
\widetilde{(\widetilde{A}_i)} &= A_i.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Estas propriedades são denominadas *regras de conjugação til*, e diferem da conjugação complexa (onde $(A_i A_j)^* = A_j^* A_i^*$). Assim, a representação de um dado sistema físico em DCT deve possuir estrutura duplicada do espaço de Hilbert usual e os operadores definidos sobre este espaço devem satisfazer as regras de conjugação til.

2.3 Estados térmicos do sistema \mathcal{OB}_ω

Seja o sistema \mathcal{OB}_ω composto por um oscilador bosônico e descrito pelo seguinte Hamiltoniano¹,

$$H = w a^\dagger a.$$

sendo w a frequência angular natural do oscilador. Os operadores de criação e destruição, a^\dagger e a respectivamente, satisfazem a álgebra

$$[a, a^\dagger] = 1; \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{2.14}$$

Os autovalores e autoestados de H são dados por

$$H|n\rangle = nw|n\rangle,$$

onde o estado de vácuo é $|n=0\rangle \equiv |0\rangle$, tal que

$$a|0\rangle = 0 \tag{2.15}$$

$$(a^\dagger)^n |0\rangle = (n!)^{1/2} |n\rangle, \tag{2.16}$$

$$a|n\rangle = n^{1/2} |n-1\rangle. \tag{2.17}$$

¹Nesta tese adotamos o sistema de unidades no qual $\hbar = 1$

Estes estados são ortonormais, ou seja, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$. Podemos definir o operador número, $N = a^\dagger a$, de forma que

$$N|n\rangle = n|n\rangle.$$

Os autovalores de N , os inteiros $n = 0, +1, +2, \dots$, determinam os níveis de energia do oscilador, nw . Assim os operadores a^\dagger e a descrevem bósons, assim como no caso dos fótons no eletromagnetismo, tal que $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n|0\rangle}{(n!)^{1/2}}$ é o estado com n bósons. A partir de (2.14) podemos escrever

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a. \quad (2.18)$$

Afim de construir o formalismo de DCT para tal sistema, a duplicação dos graus de liberdade tem de ser definida em acordo com as regras de conjugação dual, ou seja, os operadores til \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} têm de ser introduzidos. Aplicando as regras de conjugação dual para a álgebra dada em Eq.(2.14), ou seja

$$(aa^\dagger - a^\dagger a) = \tilde{1},$$

obtemos

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1; \quad [\tilde{a}, \tilde{a}] = [\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0, \quad (2.19)$$

e para relações equivalentes como em Eqs.(2.15)–(2.17), temos

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{(\tilde{a}^\dagger)^{\tilde{n}}|0\rangle}{(\tilde{n}!)^{1/2}}, \quad (2.20)$$

$$\sum_{\tilde{n}} |\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}| = 1, \quad \langle\tilde{m}|\tilde{n}\rangle = \delta_{\tilde{m}\tilde{n}}, \quad (2.21)$$

$$\tilde{N}|\tilde{n}\rangle = \tilde{n}|\tilde{n}\rangle, \quad \tilde{H}|\tilde{n}\rangle = \tilde{n}\omega|\tilde{n}\rangle. \quad (2.22)$$

Assim, temos o oscilador bosônico relativo ao grau de liberdade til, denotado por $\widetilde{\mathcal{OB}}_\omega$, definido sobre os espaço de Hilbert \widetilde{H}_ω . Como vimos anteriormente, os graus de liberdade til são independentes dos graus de liberdade ordinários. Portanto a álgebra entre os operadores til e os operadores ordinários é

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \tilde{a}] = [a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0 \quad (2.23)$$

O gerador das translações no tempo \hat{H} pode ser escrito em termos das variáveis til

$$\hat{H} = H - \tilde{H} = w(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}),$$

O estado térmico $|0(\beta)\rangle$ é dado por

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_n e^{-n\beta w/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)^{1/2}} \sum_n e^{-n\beta w/2} \frac{1}{(n!)^{1/2}} \frac{1}{(\tilde{n}!)^{1/2}} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (2.24)$$

segue então que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} \langle m, \tilde{m} | e^{-\beta w(n+m)/2} |n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta w(n+m)/2} \delta_{nm} \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta w n}. \end{aligned}$$

Usando $\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1$, e a expansão $\sum_n x^n = 1/(1-x)$, obtemos

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta w}}. \quad (2.25)$$

Observe que nestes cálculos o til no estado $|n, \tilde{n}\rangle$ serve apenas para indicar o vetor no qual o operador til atua, mas n e \tilde{n} são o mesmo número $n = \tilde{n}$ na soma. Finalmente, partindo da Eq.(2.24) temos

$$|0(\beta)\rangle = (1 - e^{-\beta w})^{1/2} \sum_n \frac{e^{-n\beta w/2}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.26)$$

Os cálculos posteriores podem ser simplificados se Eq.(2.26) puder ser escrita em termos de uma transformação unitária, na forma $|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle$, onde $U(\beta)$ é um operador unitário.

2.4 Transformação de Bogoliubov

A soma na Eq.(2.26) é uma expansão da exponencial, ou seja

$$|0(\beta)\rangle = (1 - e^{-\beta w})^{1/2} \exp(e^{-\beta w/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger) |0, \tilde{0}\rangle. \quad (2.27)$$

Este resultado pode ser escrito como uma função exponencial apenas. Para isto utilizamos a seguinte relação de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\ln \cosh \alpha C} e^{\tanh \alpha A}, \quad (2.28)$$

onde $C = [A, B]$. Primeiro introduzimos

$$\cosh \theta(\beta) = \frac{1}{(1 - e^{-\beta w})^{1/2}} \equiv u(\beta), \quad (2.29)$$

$$\sinh \theta(\beta) = \frac{e^{-\beta w/2}}{(1 - e^{-\beta w})^{1/2}} \equiv v(\beta); \quad (2.30)$$

que é uma definição consistente já que

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = \cosh^2 \theta(\beta) - \sinh^2 \theta(\beta) = 1. \quad (2.31)$$

Como resultado das definições dadas nas Eqs.(2.29) e (2.30), temos

$$\tanh \theta(\beta) = e^{-\beta w/2}. \quad (2.32)$$

Usando as Eqs.(2.29) e (2.32), da Eq.(2.27) chegamos em

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1} \theta(\beta) e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{\ln(\cosh^{-1} \theta)} e^{-\ln \cosh \theta \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln(\cosh \theta)} e^{-\ln \cosh \theta \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} e^{-\ln \cosh \theta a^\dagger a} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta (\tilde{a}^\dagger \tilde{a} + a^\dagger a + 1)} |0, \tilde{0}\rangle \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta (\tilde{a} \tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{\tanh \theta (-\tilde{a} a)} |0, \tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde usamos as relações de comutação $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1$ e

$$e^{f(\theta) \tilde{a}^\dagger \tilde{a}} |0, \tilde{0}\rangle = e^0 |0, \tilde{0}\rangle = |0, \tilde{0}\rangle,$$

sendo $f(\theta)$ uma função arbitrária de θ .

Considerando a Eq.(2.28), com

$$\begin{aligned} A &= -\tilde{a}a, \quad B = a^\dagger \tilde{a}^\dagger, \\ C &= [A, B] = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a, \\ \alpha &= \theta = \theta(\beta), \end{aligned}$$

a Eq.(2.33) fica

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG(\beta)}|0, \tilde{0}\rangle, \quad (2.34)$$

onde

$$G(\beta) = -i\theta(\beta)(\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \quad (2.35)$$

Por fim o operador unitário, que transforma $|0, \tilde{0}\rangle$ em $|0(\beta)\rangle$, é dado por

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)}. \quad (2.36)$$

Este operador $U(\beta)$ faz o papel da transformação de Bogoliubov, como veremos adiante. Acima de tudo, este operador deve gerar o vácuo térmico a partir do vácuo do espaço de Hilbert duplicado, conforme a Eq.(2.34) desde que as equações (2.24) e (2.25) sejam válidas.

2.4.1 Operadores térmicos

Usando $U(\beta)$, introduzimos os seguintes operadores térmicos a partir das relações

$$\begin{aligned} a(\beta) &= U(\beta) a U(\beta)^\dagger \\ a^\dagger(\beta) &= U(\beta) a^\dagger U(\beta)^\dagger, \\ \tilde{a}(\beta) &= U(\beta) \tilde{a} U(\beta)^\dagger, \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= U(\beta) \tilde{a}^\dagger U(\beta)^\dagger. \end{aligned}$$

A importância destes operadores é que

$$\begin{aligned} a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta) a U(\beta)^\dagger U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle \\ &= U(\beta) a |0, \tilde{0}\rangle = 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

e

$$\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle = 0. \quad (2.38)$$

Portanto $|0(\beta)\rangle$ é um estado de vácuo para os operadores $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$, mas não o é para os operadores a e \tilde{a} . Neste sentido, $|0(\beta)\rangle$ é um estado puro para os operadores térmicos, e um estado misto (ou térmico) para os operadores não térmicos; esta é a razão pela qual $|0(\beta)\rangle$ é usualmente chamado de vácuo térmico. Isto nos permite construir o espaço de Hilbert térmico que consiste dos estados

$$|0(\beta)\rangle; \quad a^\dagger|0(\beta)\rangle; \quad \tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle; \quad a^\dagger\tilde{a}^\dagger|0(\beta)\rangle \dots$$

É importante notar que o espaço de Hilbert térmico e o espaço de Hilbert original não são isomórficos quando o espaço contém um número infinito de modos. Em outras palavras, a transformação (2.36), apesar de formalmente unitária, é mais que uma transformação de Bogoliubov. Também deve-se notar, das Eq.s(2.37) e (2.38), que aniquilar um quanta no vácuo térmico equivale a criar um quanta til e vice-versa. Isto nos permite, intuitivamente, visualizar as partículas til como um tipo de estado-buraco de partícula ou estados do reservatório térmico, que dá um significado à duplicação dos graus de liberdade em DCT.

Desde que $U(\beta)$ seja uma transformação unitária, a álgebra dos operadores a and \tilde{a} é mantida invariante, ou seja, os operadores $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$ satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[a(\beta), a^\dagger(\beta)] = 1; \quad [\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)] = 1, \quad (2.39)$$

As demais relações de comutação são nulas.

O operador $a(\beta)$ pode ser escrito na seguinte forma

$$a(\beta) = u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger. \quad (2.40)$$

Este resultado pode ser obtido escrevendo

$$a(\beta) = e^{-iG(\beta)} a e^{iG(\beta)}, \quad (2.41)$$

e usando a relação

$$\begin{aligned} e^{-iG(\beta)} a e^{iG(\beta)} &= a + (-i)[G(\beta), a] + \frac{(-i)^2}{2!}[G(\beta), [G(\beta), a]] \\ &+ \frac{(-i)^3}{3!}[G(\beta), [G(\beta), [G(\beta), a]]] + \dots \quad (2.42) \end{aligned}$$

Considerando ainda a Eq.(2.41), temos

$$\begin{aligned}
a(\beta) &= (1 + \frac{1}{2!}\theta^2(\beta) + \frac{1}{4!}\theta^4(\beta) + \dots)a \\
&\quad - (\theta(\beta) + \frac{1}{3!}\theta^3(\beta) + \frac{1}{5!}\theta^5(\beta) + \dots)\tilde{a}^\dagger \\
&= \cosh \theta(\beta)a - \sinh \theta(\beta)\tilde{a}^\dagger \\
&= u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Podemos obter um resultado similar para $\tilde{a}^\dagger(\beta)$,

$$\tilde{a}^\dagger(\beta) = u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a. \tag{2.44}$$

Tal resultado pode ser obtido usando $\tilde{a}^\dagger(\beta) = e^{-iG(\beta)}\tilde{a}^\dagger e^{iG(\beta)}$, ou usando as regras de conjugação til e a conjugação hermitiana na Eq.(2.40). Com isso, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^\dagger(\beta) &= u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v(\beta)a, \\
\tilde{a}(\beta) &= u(\beta)\tilde{a} - v(\beta)a^\dagger, \\
a(\beta) &= u(\beta)a - v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \\
a^\dagger(\beta) &= u(\beta)a^\dagger - v(\beta)\tilde{a}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Podemos inverter estas relações notando que

$$\begin{aligned}
u(\beta)a(\beta) &= u^2(\beta)a - u(\beta)v(\beta)\tilde{a}^\dagger, \\
v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) &= v(\beta)u(\beta)\tilde{a}^\dagger - v^2(\beta)a,
\end{aligned}$$

obtemos

$$a = u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta). \tag{2.46}$$

De maneira similar, ou simplesmente utilizando as conjugações til e adjunta, temos

$$\tilde{a} = u(\beta)\tilde{a}(\beta) + v(\beta)a^\dagger(\beta), \tag{2.47}$$

$$a^\dagger = u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta), \tag{2.48}$$

$$\tilde{a}^\dagger = u(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta)a(\beta). \tag{2.49}$$

Estas relações são muito práticas na realização de alguns cálculos. Consideremos, com exemplo, o cálculo da média térmica $\langle N \rangle_\beta$ do operador $N = a^\dagger a$, que é dada por (2.2), isto

é,

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle_\beta &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | [u(\beta)a^\dagger(\beta) + v(\beta)\tilde{a}(\beta)] [u(\beta)a(\beta) + v(\beta)\tilde{a}^\dagger(\beta)] | 0(\beta) \rangle \\
&= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\beta w} - 1},
\end{aligned} \tag{2.50}$$

onde usamos $a(\beta)|0(\beta)\rangle = 0$. Vemos que $v^2(\beta)$ é a função de distribuição dos bósons, como deveria ser.

2.5 Notação matricial

É conveniente representar as transformações (2.45) e suas transformações inversas em uma notação compacta. Podemos fazer isto notando que podemos escreve-las como

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Onde a matriz

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

representa a transformação de Bogoliubov.

A partir deste ponto iremos adotar a seguinte notação. Dados dois operadores arbitrários (para bósons) A e \tilde{A} , uma notação de dubleto é dada por

$$(A^a) = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^\dagger \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

com a transposição til definida por

$$(A^{aT}) = (A^\dagger, -\tilde{A}). \tag{2.54}$$

Com esta notação o conjunto de relações de comutação para os operadores de criação e destruição da teoria duplicada e termalizada, respectivamente, é escrito como

$$[a^a, a^{bT}] = \delta^{ab}; \quad [a^a(\beta), a^{bT}(\beta)] = \delta^{ab}. \tag{2.55}$$

Podemos também reescrever as transformações (2.45)

$$a^a(\beta) = B(\beta)^{ab} a^b. \quad (2.56)$$

E com o auxílio da matriz inversa da transformação de Bogoliubov

$$B^{-1}(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & v(\beta) \\ v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

escrevemos as transformações inversas (2.47-2.49)

$$a^a = (B^{-1}(\beta))^{ab} a^b(\beta). \quad (2.58)$$

Esta notação será útil mais adiante ao descrevermos os propagadores da DCT para o campo real escalar.

Capítulo 3

Campo escalar real em DCT

Neste capítulo iremos introduzir os efeitos de temperatura em teoria quântica de campos. Para isto consideraremos o caso do campo escalar real em um espaço \mathcal{H}_T , com seus modos termalizados via transformação de Bogoliubov, conforme foi feito para o sistema \mathcal{OB}_ω . O objetivo é obter a expressão do propagador térmico para o campo livre, em paralelo com a teoria a $T = 0$.

3.1 O campo escalar real

A densidade Lagrangiana do campo escalar real com uma fonte externa é escrita na teoria duplicada como

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}} \tag{3.1}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} + \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 - J\tilde{\phi}. \tag{3.2}$$

Os *momenta* canônicos são definidos por

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)}{\partial\dot{\phi}}, \tag{3.3}$$

$$\tilde{\pi}(x) = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}, \partial\tilde{\phi})}{\partial\dot{\tilde{\phi}}}. \tag{3.4}$$

Assim o Hamiltoniano da teoria duplicada é definido

$$\hat{H} = \int \hat{\mathcal{H}}d^3x = \int \{\mathcal{H}(\phi, \pi) - \tilde{\mathcal{H}}(\tilde{\phi}, \tilde{\pi})\}, \tag{3.5}$$

onde a densidade Hamiltoniana, $\hat{\mathcal{H}}$, é

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J\phi - \frac{1}{2}\tilde{\pi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\tilde{\phi}^2 + \tilde{J}\tilde{\phi}. \quad (3.6)$$

Podemos então construir uma teoria quântica de campos, a partir dos elementos acima, pela introdução das relações de comutação

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.7)$$

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = 0, \quad (3.8)$$

$$[\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}(t, \mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.9)$$

$$[\tilde{\phi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\phi}(t, \mathbf{y})] = [\tilde{\pi}(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}(t, \mathbf{y})] = 0. \quad (3.10)$$

Os campos ϕ , π , $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\pi}$ são operadores definidos pela sua ação sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H}_T . Podemos usar as transformações de Bogoliubov para introduzir os operadores térmicos [46]. Neste caso existem infinitos modos e a transformação de Bogoliubov é definida para cada modo. Assim temos¹,

$$\phi(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k; \beta)e^{-ikx} + a^\dagger(k; \beta)e^{+ikx}], \quad (3.11)$$

e

$$\tilde{\phi}(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [\tilde{a}(k; \beta)e^{+ikx} + \tilde{a}^\dagger(k; \beta)e^{-ikx}], \quad (3.12)$$

onde os operadores $a(k; \beta)$, $\tilde{a}(k; \beta)$, $a^\dagger(k; \beta)$ e $\tilde{a}^\dagger(k; \beta)$ são os operadores de criação e destruição da teoria duplicada. Podemos escrever os *momenta*

$$\pi(x; \beta) = \dot{\phi}(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(-i)}{2} [a(k; \beta)e^{-ikx} - a^\dagger(k; \beta)e^{+ikx}], \quad (3.13)$$

e

$$\tilde{\pi}(x; \beta) = \dot{\tilde{\phi}}(x; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} [\tilde{a}(k; \beta)e^{+ikx} - \tilde{a}^\dagger(k; \beta)e^{-ikx}], \quad (3.14)$$

onde os campos $\tilde{\phi}(x; \beta)$ e $\tilde{\pi}(x; \beta)$ foram obtidos, através das regras de conjugação til, a partir dos campos $\phi(x; \beta)$ e $\pi(x; \beta)$ respectivamente.

Podemos obter a álgebra dos operadores $a(k; \beta)$, $a^\dagger(k; \beta)$ e $\tilde{a}(k; \beta)$, $\tilde{a}^\dagger(k; \beta)$ a partir das

¹A partir deste ponto fica subentendido que os *momenta* nos operadores de criação e destruição representam a parte euclidiana dos quadri-*momenta*. Denotamos, ainda, o produto $k \cdot x \equiv kx$ como o produto escalar entre o quadrimomento k e o quadrivetor x .

relações (3.11) e (3.12) em conjunto com as regras de comutação (3.7-3.10). Assim, as relações de comutação para os modos térmicos são dadas por

$$[a(k; \beta), a^\dagger(k'; \beta)] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.15)$$

$$[a(k; \beta), a(k'; \beta)] = [a^\dagger(k; \beta), a^\dagger(k'; \beta)] = 0, \quad (3.16)$$

$$[\tilde{a}(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k'; \beta)] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.17)$$

$$[\tilde{a}(k; \beta), \tilde{a}(k'; \beta)] = [\tilde{a}^\dagger(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k'; \beta)] = 0, \quad (3.18)$$

$$[a(k; \beta), \tilde{a}(k'; \beta)] = [a(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k'; \beta)] = 0, \quad (3.19)$$

$$[a^\dagger(k; \beta), \tilde{a}(k'; \beta)] = [a^\dagger(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k'; \beta)] = 0. \quad (3.20)$$

a transformação geral de Bogoliubov aplicada a estes modos é escrita como

$$U(\beta) = \exp\left\{\sum_k \theta_k(\beta) [a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)]\right\} \quad (3.21)$$

$$= \prod_k \exp\{\theta_k(\beta) [a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)]\} \quad (3.22)$$

$$= \prod_k U(k, \beta), \quad (3.23)$$

com θ_k definido pela expressão $\cosh(\theta_k) = v(k; \beta)$ no limite do contínuo. Entretanto, neste limite a transformação de Bogoliubov não é unitária, o que leva a vácuos térmicos não equivalentes na teoria [47, 48]. No entanto, apesar da perda da unitariedade, a transformação de Bogoliubov continua sendo canônica, neste sentido, a estrutura algébrica da teoria é preservada [20]. Assim podemos escrever

$$U(\beta) = e^{-iG_B(\beta)}, \quad (3.24)$$

com

$$G_B(\beta) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta_k(\beta) [a^\dagger(k)\tilde{a}^\dagger(k) - a(k)\tilde{a}(k)] \quad (3.25)$$

O espaço de Hilbert para a teoria termalizada é construído a partir do vácuo térmico

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)|0, \tilde{0}\rangle, \quad (3.26)$$

onde

$$|0, \tilde{0}\rangle = \bigotimes_k |0, \tilde{0}\rangle_k \quad (3.27)$$

e $|0, \tilde{0}\rangle_k$ é o vácuo duplicado para o modo k . O vácuo térmico é tal que a ação dos operadores de destruição térmicos é dada por

$$a(k; \beta)|0(\beta)\rangle = \tilde{a}(k; \beta)|0(\beta)\rangle = 0. \quad (3.28)$$

A condição de normalização é

$$\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle = 1. \quad (3.29)$$

Assim o espaço de Hilbert é completamente expandido pelos vetores de base

$$[a^\dagger(k_1; \beta)]^{n_1} \cdots [a^\dagger(k_N; \beta)]^{n_N} [\tilde{a}^\dagger(q_1; \beta)]^{m_1} \cdots [\tilde{a}^\dagger(q_M; \beta)]^{m_M} |0(\beta)\rangle, \quad (3.30)$$

onde $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ e k_i se refere a um modo arbitrário.

Podemos relacionar os operadores térmicos com os da teoria a $T = 0$ pela transformação

$$a(k; \beta) = U(\beta)a(k)U^{-1}(\beta) = e^{-iG_B(\beta)}a(k)e^{iG_B(\beta)} \quad (3.31)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a(k), iG_B(\theta)]^n}{n!} \quad (3.32)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a(k), iG_B(\theta)]^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a(k), iG_B(\theta)]^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (3.33)$$

onde

$$[a(k), iG_B(\theta)]^{2n} = \theta_k(\beta)^{2n} a(k), \quad (3.34)$$

$$[a(k), iG_B(\theta)]^{2n+1} = \theta_k(\beta)^{(2n+1)} \tilde{a}^\dagger(k). \quad (3.35)$$

Podemos, então, escrever

$$a(k; \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_k(\beta)^{2n}}{(2n)!} a(k) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_k(\beta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tilde{a}^\dagger(k) \quad (3.36)$$

$$= \cosh \theta_k(\beta) a(k) - \sinh \theta_k(\beta) \tilde{a}^\dagger(k) \quad (3.37)$$

$$= u(k, \beta) a(k) - v(k, \beta) \tilde{a}^\dagger(k), \quad (3.38)$$

onde

$$v(k, \beta) = \frac{1}{(e^{\beta\omega_k} - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.39)$$

e ainda

$$u^2 - v^2 = 1. \quad (3.40)$$

Com as regras de conjugação til podemos obter as expressões para os outros operadores térmicos, assim as transformações são

$$a(k; \beta) = u(k, \beta)a(k) - v(k, \beta)\tilde{a}^\dagger(k), \quad (3.41)$$

$$a^\dagger(k; \beta) = -v(k, \beta)\tilde{a}(k) + u(k, \beta)a^\dagger(k), \quad (3.42)$$

$$\tilde{a}^\dagger(k; \beta) = -v(k, \beta)a(k) + u(k, \beta)\tilde{a}^\dagger(k), \quad (3.43)$$

$$\tilde{a}(k; \beta) = u(k, \beta)\tilde{a}(k) - v(k, \beta)a^\dagger(k). \quad (3.44)$$

Enquanto as transformações inversas são

$$a(k) = u(k, \beta)a(k; \beta) + v(k, \beta)\tilde{a}^\dagger(k; \beta), \quad (3.45)$$

$$a^\dagger(k) = u(k, \beta)a^\dagger(k; \beta) + v(k, \beta)\tilde{a}(k; \beta), \quad (3.46)$$

$$\tilde{a}(k) = u(k, \beta)\tilde{a}(k; \beta) + v(k, \beta)a^\dagger(k; \beta) \quad (3.47)$$

$$\tilde{a}^\dagger(k) = u(k, \beta)\tilde{a}^\dagger(k; \beta) + v(k, \beta)a(k; \beta). \quad (3.48)$$

Com estas expressões podemos escrever os campos térmicos e calcular a função de dois pontos para a teoria.

A média térmica de um observável, A , em DCT foi definida como $\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle$. O propagador de Feynmann para o campo real escalar livre é então

$$G_0(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T[\phi(x)\phi(y)] | 0(\beta) \rangle, \quad (3.49)$$

onde T é o ordenamento temporal dos campos $T[\phi(x)\phi(y)] = \theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x)$, e $\theta(x - y)$ é a função degrau ($\theta(x) = 1$ para $x > 0$ e $\theta(x) = 0$ para $x < 0$).

Temos então

$$iG_0(x - y; \beta) = \theta(x^0 - y^0)g(x - y; \beta) - \theta(y^0 - x^0)g(y - x; \beta), \quad (3.50)$$

onde

$$g(x - y; \beta) = \langle 0(\beta) | \phi(x)\phi(y) | 0(\beta) \rangle. \quad (3.51)$$

Explicitamente, devemos calcular

$$g(x - y; \beta) = \langle 0(\beta) | \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [a(k)e^{-ikx} + a^\dagger(k)e^{+ikx}] \quad (3.52)$$

$$\times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} [a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{+ipx}] |0(\beta)\rangle. \quad (3.53)$$

Assim temos quatro termos

$$g(x - y; \beta) = \int_k \int_p \{ \langle 0(\beta) | a(k)a(p) |0(\beta)\rangle e^{-i(kx+py)} \quad (3.54)$$

$$+ \langle 0(\beta) | a(k)a^\dagger(p) |0(\beta)\rangle e^{-i(kx-py)} \quad (3.55)$$

$$+ \langle 0(\beta) | a(k)^\dagger a(p) |0(\beta)\rangle e^{i(kx-py)} \quad (3.56)$$

$$+ \langle 0(\beta) | a(k)^\dagger a^\dagger(p) |0(\beta)\rangle e^{i(kx+py)} \} \quad (3.57)$$

$$(3.58)$$

onde $\int_k = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k}$. Usando as transformações (3.45-3.48) os operadores $a(k)$, $\tilde{a}(k)$, $a^\dagger(k)$ e $\tilde{a}^\dagger(k)$ em termos dos operadores térmicos, obtemos os quatro termos no integrando da expressão de $g(x - y; \beta)$. O primeiro é

$$\langle 0(\beta) | a(k)a(p) |0(\beta)\rangle = \langle 0(\beta) | [u(k, \beta)a(k; \beta) + v(k, \beta)\tilde{a}^\dagger(k; \beta)] \quad (3.59)$$

$$\times [u(p, \beta)a(p; \beta) + v(p, \beta)\tilde{a}^\dagger(p; \beta)] |0(\beta)\rangle, \quad (3.60)$$

que resulta em

$$\langle 0(\beta) | a(k)a(p) |0(\beta)\rangle = 0 \quad (3.61)$$

visto que os operadores $a(k)$ e $\tilde{a}^\dagger(p)$ comutam entre si.

O segundo termo de $g(x - y, \beta)$ é

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | a(k)a^\dagger(p) |0(\beta)\rangle &= \langle 0(\beta) | [u(k, \beta)a(k; \beta) + v(k, \beta)\tilde{a}^\dagger(k; \beta)] \\ &\quad \times [u(p, \beta)a^\dagger(p; \beta) + v(p, \beta)\tilde{a}(p; \beta)] |0(\beta)\rangle \\ &= u(k, \beta)u(p, \beta)\langle 0(\beta) | a(k; \beta)a^\dagger(p; \beta) |0(\beta)\rangle \\ &= u(k, \beta)u(p, \beta)\langle 0(\beta) | a^\dagger(p; \beta)a(k; \beta) + [a(k; \beta), a^\dagger(p; \beta)] |0(\beta)\rangle \\ &= u(k, \beta)u(p, \beta)\langle 0(\beta) | a^\dagger(p; \beta)a(k; \beta) + (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |0(\beta)\rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle 0(\beta) | a(k) a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle = u(k, \beta) u(p, \beta) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (3.62)$$

De forma análoga obtemos

$$\langle 0(\beta) | a^\dagger(k) a^\dagger(p) | 0(\beta) \rangle = 0, \quad (3.63)$$

$$\langle 0(\beta) | a^\dagger(k) a(p) | 0(\beta) \rangle = v(k, \beta) v(p, \beta) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (3.64)$$

Agora podemos escrever

$$g(x - y; \beta) = \int_k [u^2(k, \beta) e^{-ik(x-y)} + v^2(k, \beta) e^{ik(x-y)}]. \quad (3.65)$$

e

$$g(y - x; \beta) = \int_k [u^2(k, \beta) e^{-ik(y-x)} + v^2(k, \beta) e^{ik(y-x)}]. \quad (3.66)$$

A expressão para a função de dois pontos fica dada por

$$iG_0(x - y; \beta) = \theta(x^0 - y^0) \int_k [u^2(k, \beta) e^{-ik(x-y)} + v^2(k, \beta) e^{ik(x-y)}] \quad (3.67)$$

$$+ \theta(y^0 - x^0) \int_k [u^2(k, \beta) e^{-ik(y-x)} + v^2(k, \beta) e^{ik(y-x)}]. \quad (3.68)$$

Que pode ser reorganizada como

$$iG_0(x - y; \beta) = \theta(x^0 - y^0) \int_k [(v^2(k, \beta) + 1)(k, \beta) e^{-ik(x-y)} + v^2(k, \beta) e^{ik(x-y)}] \quad (3.69)$$

$$+ \theta(y^0 - x^0) \int_k [(v^2(k, \beta) + 1)(k, \beta) e^{-ik(y-x)} + v^2(k, \beta) e^{ik(y-x)}] \quad (3.70)$$

onde usamos o fato de que $u^2(k, \beta) - v^2(k, \beta) = 1$.

$$iG_0(x - y; \beta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega^k} [\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ik(y-x)}] \quad (3.71)$$

$$+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{v^2(k, \beta)}{2\omega^k} [\theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ik(y-x)}] \quad (3.72)$$

$$+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{v^2(k, \beta)}{2\omega^k} [\theta(x^0 - y^0) e^{ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik(y-x)}]. \quad (3.73)$$

E usando a representação de Fourier da função degrau

$$\theta(x^0 - y^0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^0 + \delta} e^{-ik^0(x-y)} dk^0, \quad (3.74)$$

obtemos

$$G_0(x - y; \beta) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} G_0(k; \beta) \quad (3.75)$$

onde a representação de Fourier do propagador térmico da teoria livre é

$$G_0(k; \beta) = G_0(k) + v^2(k, \beta)[G_0(k) - G_0^*(k)]. \quad (3.76)$$

Como

$$G_0(k) - G_0^*(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \quad (3.77)$$

$$= 2\pi i \delta(k^2 - m^2), \quad (3.78)$$

temos que

$$G_0(k; \beta) = G_0(k) + 2\pi i n(k, \beta) \delta(k^2 - m^2), \quad (3.79)$$

onde $n(k, \beta) = v^2(k, \beta)$ é a função de distribuição bosônica para o modo k .

3.2 Notação matricial para o campo real

Na seção anterior obtivemos o propagador térmico para o campo escalar real através da expressão

$$G_0(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T[\phi(x)\phi(y)] | 0(\beta) \rangle. \quad (3.80)$$

Expressões análogas podem ser calculadas para os outros valores esperados dos campos no vácuo térmico, como

$$G_0^{12}(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T[\phi(x)\tilde{\phi}(y)] | 0(\beta) \rangle, \quad (3.81)$$

$$G_0^{22}(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T[\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)] | 0(\beta) \rangle, \quad (3.82)$$

$$G_0^{21}(x - y; \beta) = -i \langle 0(\beta) | T[\tilde{\phi}(x)\phi(y)] | 0(\beta) \rangle, \quad (3.83)$$

onde classificamos os propagadores com índices 1 e 2 para denotar os campos til (2) e não til (1) no ordenamento temporal, respectivamente.

Podemos obter estes propagadores térmicos através dos não térmicos através da matriz que representa a transformação de Bogoliubov como foi feito para o sistema \mathcal{OB}_ω

$$B(k; \beta) = \begin{pmatrix} u(k, \beta) & -v(k, \beta) \\ -v(k, \beta) & u(k, \beta) \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Esta formulação nos possibilita introduzir o formalismo de integrais de trajetória no tempo real.

Sejam os vetores que representam os operadores do espaço de Hilbert duplicado

$$(A) = \begin{pmatrix} A(\beta) \\ \tilde{A}^\dagger(\beta) \end{pmatrix}, \quad (A)^T = \left(A^\dagger(\beta), -\tilde{A}(\beta) \right) \quad (3.85)$$

Assim podemos escrever as relações de comutação para os operadores de criação e destruição da teoria termalizada na forma compacta

$$[a^a(k; \beta), (a^T)^b(p; \beta)] = \delta^{ab}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad a, b = 1, 2. \quad (3.86)$$

Com esta notação podemos escrever as transformações dos operadores duplicados para os operadores térmicos (3.45-3.48) como

$$a^a = (B^{-1})^{ab} a^b(k; \beta) \quad \text{e} \quad (a^T)^a = (a^T)^b (B)^{ba}. \quad (3.87)$$

A densidade Lagrangiana para o campo real nesta notação é

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T(x) \partial^\mu \Phi(x) - \frac{m^2}{2} \Phi^T(x) \Phi(x), \quad (3.88)$$

onde

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi^T = \left(\phi(x), -\tilde{\phi}(x) \right). \quad (3.89)$$

As funções de dois pontos da teoria ficam agora escritas como

$$iG_0(x - y; \beta)^{ab} = \langle 0, \tilde{0} | T[\phi(x; \beta)^a \phi(y; \beta)^b] | 0, \tilde{0} \rangle \quad (3.90)$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G_0(k; \beta)^{ab} e^{ik(x-y)}, \quad (3.91)$$

onde $G_0(k; \beta)^{ab} = B^{-1}(\beta)G_0(k)^{ab}B(\beta)$, com

$$G_0(k)^{ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Com a definição de $B(\beta)$ recuperamos as funções de green do início desta seção

$$G_0^{11}(k; \beta) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi i n(k, \beta) \delta(k^2 - m^2), \quad (3.93)$$

$$G_0^{12}(k; \beta) = G_0^{21}(k; \beta) = -2\pi i [n(k, \beta) + n^2(k, \beta)]^{\frac{1}{2}} \delta(k^2 - m^2), \quad (3.94)$$

$$G_0^{22}(k; \beta) = \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi i n(k, \beta) \delta(k^2 - m^2). \quad (3.95)$$

O propagador $G_0^{11}(k; \beta)$ é o mesmo da teoria de tempo imaginário de Matsubara, enquanto a matriz dos propagadores $G_0(x - y; \beta)^{ab}$ é similar a matriz do formalismo de Keldysh-Schwinger. Tais resultados serão usado mais adiante na formulação da DCT em termos de integrais de trajetórias.

Capítulo 4

DCT interagente

Os desenvolvimentos deste capítulo servirão de base para aplicações do capítulo 7. Aqui apresentaremos a lei de substituição til [49] nas formas livre e interagente, discutindo o importante papel que elas desempenham na teoria de perturbação da DCT. Definiremos o operador de espalhamento térmico e o teorema de Wick para DCT [46].

Como antes, trataremos apenas do campo escalar real em equilíbrio térmico à temperatura $T = 1/\beta$.

4.1 Lei de substituição til para campos livres e a condição KMS para o propagador livre.

Em DCT as médias térmicas são definidas pela expressão

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\beta = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(\mathcal{O} \rho(\beta)), \quad (4.1)$$

com

$$\rho(\beta) = e^{-\beta H}. \quad (4.2)$$

Uma das consequências disso é a chamada condição Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [50] que é apresentada a seguir.

Na expressão para a média térmica (4.1), seja o operador $\mathcal{O} = A(t')B(t)$, com $A(t')$ e $B(t)$ operadores cuja dependência temporal pode ser escrita na representação de Heisenberg

$$A(t') = e^{it'H} A e^{-it'H}, \quad B(t) = e^{itH} B e^{-itH}.$$

A média do operador \mathcal{O} é

$$\begin{aligned}
\langle A(t')B(t) \rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(A(t')B(t)e^{-\beta H}), \\
&= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(B(t)e^{-\beta H}A(t')), \\
&= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H}(e^{\beta H}B(t)e^{-\beta H})A(t')), \\
&= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H}B(t-i\beta)A(t')), \\
&= \langle B(t-i\beta)A(t') \rangle_\beta,
\end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de invariância sob permutação cíclica do traço dos operadores e também

$$B(t-i\beta) = e^{\beta H}B(t)e^{-\beta H} = e^{i(t-i\beta)H}Be^{-i(t-i\beta)H}. \quad (4.3)$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\langle A(t')B(t) \rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(A(t')B(t)e^{-\beta H}), \\
&= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}((e^{-\beta H}A(t')e^{\beta H})e^{-\beta H}B(t)), \\
&= Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H}B(t)A(t'+i\beta)), \\
&= \langle B(t)A(t'+i\beta) \rangle_\beta,
\end{aligned}$$

A partir da igualdade destas médias térmicas obtemos a condição

$$\langle A(t')B(t) \rangle_\beta = \langle B(t-i\beta)A(t') \rangle_\beta = \langle B(t)A(t'+i\beta) \rangle_\beta$$

Denominada de condição KMS. Em DCT, onde os objetos básicos são as funções de correlação térmicas. No caso do campo escalar real

$$G(x-y; \beta) = Z^{-1}(\beta) \text{Tr}(e^{-\beta H}T\phi(x)\phi(y)), \quad (4.4)$$

a condição KMS tem uma consequência fundamental sobre as funções de correlação que consiste na sua periodicidade

$$G_0^*(x-y) = G_0(x-y-i\beta\eta(x_0-y_0)\hat{n}_0; \beta), \quad (4.5)$$

$$\eta(x_0-y_0) = \frac{x_0-y_0}{|x_0-y_0|}, \quad \hat{n}_0^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (4.6)$$

Se realizarmos uma rotação de Wick ($x^0 \rightarrow -i\tau$) a condição KMS representa uma condição de periodicidade, cujo período é dado por β [21, 24]. Na DCT, com os ingredientes algébricos da duplicação dos graus de liberdade, regras de conjugação til e a termalização do vácuo e dos operadores, temos que a média térmica fica escrita

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle \quad (4.7)$$

o que é consequência direta desta estrutura. Agora veremos como a condição KMS se expressa em termos destes ingredientes.

4.1.1 Lei de substituição til: caso livre

Seja o campo real escalar livre $\Phi(x) = (\phi(x), \tilde{\phi}(x))$, com

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_k} (e^{ikx} a(k) + e^{-ikx} a^\dagger(k)), \\ \tilde{\phi}(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_k} (e^{-ikx} \tilde{a}(k) + e^{ikx} \tilde{a}^\dagger(k)). \end{aligned}$$

As relações que definem o vácuo e os operadores de criação e aniquilação termalizados são

$$\begin{aligned} a(k; \beta) | 0(\beta) \rangle = 0 &\Rightarrow \tilde{a}^\dagger(k) | 0(\beta) \rangle = e^{\frac{\beta\omega_k}{2}} a(k) | 0(\beta) \rangle, \\ \tilde{a}(k; \beta) | 0(\beta) \rangle = 0 &\Rightarrow \tilde{a}(k) | 0(\beta) \rangle = e^{-\frac{\beta\omega_k}{2}} a^\dagger(k) | 0(\beta) \rangle, \\ \langle 0(\beta) | \tilde{a}^\dagger(k; \beta) = 0 &\Rightarrow \langle 0(\beta) | a(k) = \langle 0(\beta) | \tilde{a}^\dagger(k) e^{\frac{\beta\omega_k}{2}}, \\ \langle 0(\beta) | a^\dagger(k; \beta) = 0 &\Rightarrow \langle 0(\beta) | a^\dagger(k) = \langle 0(\beta) | \tilde{a}(k) e^{-\frac{\beta\omega_k}{2}}, \end{aligned}$$

podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \phi(x) &= \langle 0(\beta) | \tilde{\phi}^\dagger(x + i\hat{n}_0 \frac{\beta}{2}), \\ \tilde{\phi}^\dagger(x + i\hat{n}_0 \frac{\beta}{2}) | 0(\beta) \rangle &= \phi(x + i\hat{n}_0 \beta) | 0(\beta) \rangle, \end{aligned} \quad (4.8)$$

e

$$\begin{aligned} \phi(x) | 0(\beta) \rangle &= \tilde{\phi}^\dagger(x - i\hat{n}_0 \frac{\beta}{2}) | 0(\beta) \rangle, \\ \langle 0(\beta) | \tilde{\phi}^\dagger(x - i\hat{n}_0 \frac{\beta}{2}) &= \langle 0(\beta) | \phi(x + i\hat{n}_0 \beta), \end{aligned} \quad (4.9)$$

As relações (4.8) e (4.9) são leis de substituição til [49] para os campos $\phi(x)$ e $\tilde{\phi}(x)$. A partir destas relações, podemos mostrar, para $x_0 > y_0$

$$\begin{aligned}
G_>(x, y; \beta) &= \langle 0(\beta) | \phi(x) \phi(y) | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \tilde{\phi}^\dagger(x + i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) \phi(y) | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \phi(y) \tilde{\phi}^\dagger(x + i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \phi(y) \phi(x + i\beta\hat{n}_0) | 0(\beta) \rangle \\
&= G_<(y, x - i\beta\hat{n}_0; \beta),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

que foi obtida utilizando as relações (4.8). E de forma análoga, para $x_0 > y_0$

$$\begin{aligned}
G_<(y, x; \beta) &= \langle 0(\beta) | \phi(y) \phi(x) | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \phi(y) \tilde{\phi}^\dagger(x - i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \tilde{\phi}^\dagger(x - i\frac{\beta}{2}\hat{n}_0) \phi(y) | 0(\beta) \rangle \\
&= \langle 0(\beta) | \phi(x - i\beta\hat{n}_0) \phi(y) | 0(\beta) \rangle \\
&= G_>(x - i\beta\hat{n}_0, y; \beta),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde utilizamos as relações (4.9).

A partir dos resultados (4.10) e (4.11), temos

$$\begin{aligned}
G_0^*(x - y; \beta) &= \langle 0(\beta) | T \phi(y) \phi(x) | 0(\beta) \rangle^* \\
&= \theta(x_0 - y_0) G_>^*(x, y; \beta) + \theta(y_0 - x_0) G_<^*(y, x; \beta) \\
&= \theta(x_0 - y_0) G_<(y, x; \beta) + \theta(y_0 - x_0) G_>(x, y; \beta) \\
&= \theta(x_0 - y_0) G_>(x - i\beta\hat{n}_0, y; \beta) \\
&\quad + \theta(y_0 - x_0) G_<(y, x + i\beta\hat{n}_0; \beta).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Este resultado é a condição KMS (4.5) para a função de dois pontos da teoria livre térmica

$$G_0^*(x - y; \beta) = G_0(x - i\eta(x_0 - y_0)\beta\hat{n}_0 - y; \beta).$$

Além de descrever a condição KMS nos termos da DCT, na próxima seção veremos que as leis de substituição til, Eqs.(4.8) e (4.9), desempenham um papel importante na teoria de perturbação da DCT.

4.2 Representação de interação na DCT e funções de Green interagentes

Definimos as funções de correlação de n pontos interagentes como

$$G(x_1, \dots, x_n; \beta)_{A_1 \dots A_n} = \langle \Omega; \beta | T \Phi(x_1)_{A_1} \dots \Phi(x_n)_{A_n} | \Omega; \beta \rangle \quad (4.13)$$

onde usamos os operadores de campo $\phi(x_j)_{A_j}$ na representação de Heisenberg

$$\Phi(x_j)_{A_j} = e^{ix^0 \hat{H}} \phi(0, \vec{x}_j)_{A_j} e^{-ix^0 \hat{H}},$$

e a hamiltoniana da teoria duplicada, \hat{H} , é escrita como

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H - \tilde{H} \\ &= H_0 + H_{int} - (\tilde{H}_0 + \tilde{H}_{int}) \\ &= H_0 - \tilde{H}_0 + H_{int} - \tilde{H}_{int} \\ &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} \end{aligned}$$

Os operadores na representação de interação são definidos de maneira análoga a TQC a $T = 0$, ou seja,

$$\phi(x_j)_{A_j} = e^{ix_j^0 \hat{H}_0} \phi(0, \vec{x}_j)_{A_j} e^{-ix_j^0 \hat{H}_0}.$$

Seja \hat{U} , definido por

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_2, t_1) &= e^{it_2 \hat{H}_0} e^{-i(t_2 - t_1) \hat{H}} e^{-it_1 \hat{H}_0} \\ &= T \exp\left(-i \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{H}_I(t)\right), \end{aligned}$$

onde \hat{H}_I é dado por

$$\hat{H}_I(t) = e^{it \hat{H}_0} \hat{H} e^{-it \hat{H}_0}.$$

Note que

$$\hat{U}(t_2, t_1) = e^{it_2(H_0 - \tilde{H}_0)} e^{-i(t_2 - t_1)(H - \tilde{H})} e^{-it_1(H_0 - \tilde{H}_0)} \quad (4.14)$$

$$= e^{it_2 H_0} e^{-it_2 \tilde{H}_0} e^{-i(t_2 - t_1)H} e^{i(t_2 - t_1)\tilde{H}} e^{-it_1 H_0} e^{it_1 \tilde{H}_0} \quad (4.15)$$

$$= e^{it_2 H_0} e^{-i(t_2 - t_1)H} e^{-it_1 H_0} e^{-it_2 \tilde{H}_0} e^{i(t_2 - t_1)\tilde{H}} e^{it_1 \tilde{H}_0}. \quad (4.16)$$

$$= U(t_2, t_1) \tilde{U}(t_2, t_1). \quad (4.17)$$

Temos que a relação entre as representações é

$$\Phi(x_j)_{A_j} = \hat{U}(0, x_j^0) \phi(x_j)_{A_j} \hat{U}(x_j^0, 0), \quad (4.18)$$

sendo $x_j^0 = 0$ o instante em que as representações de Heisenberg e de interação coincidem.

Antes de aplicarmos (4.18) na função de correlação (4.13), precisamos escrever o vácuo térmico interagente $|\Omega; \beta\rangle$ em termos do livre $|0(\beta)\rangle$, definido por

$$|0(\beta)\rangle = Z_0(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H_0/2} |\mathbf{1}\rangle, \quad (4.19)$$

com $|\mathbf{1}\rangle \equiv \sum_n |n, \tilde{n}\rangle$ e

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | \mathcal{O} | 0(\beta) \rangle &= Z_0(\beta)^{-1/2} \text{Tr} e^{-\beta H_0/2} \mathcal{O}, \\ Z_0(\beta) &= \text{Tr} e^{-\beta H_0}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle \Omega; \beta | \mathcal{O} | \Omega; \beta \rangle &= Z(\beta)^{-1/2} \text{Tr} (e^{-\beta H/2} \mathcal{O}), \\ Z(\beta) &= \text{Tr} e^{-\beta H}, \end{aligned}$$

temos a definição para o vácuo térmico interagente

$$|\Omega; \beta\rangle = Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H/2} |\mathbf{1}\rangle. \quad (4.20)$$

Considerando as definições (4.19) e (4.20) podemos relacionar os vácuos térmicos livre e

interagente

$$\begin{aligned}
|\Omega; \beta\rangle &= Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H/2} |\mathbf{1}\rangle, \\
&= Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H/2} (Z_0(\beta)^{1/2} e^{\beta H_0/2} Z_0(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H_0/2}) |\mathbf{1}\rangle, \\
&= Z(\beta)^{-1/2} e^{-\beta H/2} Z_0(\beta)^{1/2} e^{\beta H_0/2} |0(\beta)\rangle, \\
&= \left(\frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \right)^{1/2} (e^{-\beta H/2} e^{\beta H_0/2}) |0(\beta)\rangle, \\
&= \left(\frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \right)^{1/2} U(0, i\frac{\beta}{2}) |0(\beta)\rangle, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\langle \Omega; \beta | = \langle 0(\beta) | U(-i\frac{\beta}{2}, 0) \left(\frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \right)^{1/2}, \tag{4.22}$$

onde U é dado por

$$U(t_2, t_1) = e^{it_2 H_0} e^{-i(t_2 - t_1) H} e^{-it_1 H_0}.$$

Agora voltemos à função de correlação. Substituindo (4.18), (4.21) e (4.22) em (4.13), obtemos

$$\begin{aligned}
G(x_1, \dots, x_n; \beta)_{A_1 \dots A_n} &= \langle \Omega; \beta | T \Phi(x_1)_{A_1} \dots \Phi(x_n)_{A_n} | \Omega; \beta \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0(\beta) | U\left(\frac{-i\beta}{2}, 0\right) \widehat{U}(0, x_1^0) \phi(x_1)_{A_1} \widehat{U}(x_1^0, 0) \dots \\
&\times \widehat{U}(0, x_n^0) \phi(x_n)_{A_n} \widehat{U}(x_n^0, 0) U\left(0, \frac{i\beta}{2}\right) | 0(\beta) \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0(\beta) | U\left(\frac{-i\beta}{2}, 0\right) U(0, \infty) \widetilde{U}(0, \infty) \widehat{U}(\infty, x_1^0) \dots \\
&\times \dots \widehat{U}(x_n^0, -\infty) \widetilde{U}(-\infty, 0) U(-\infty, 0) U\left(0, \frac{i\beta}{2}\right) | 0(\beta) \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0(\beta) | U\left(\frac{-i\beta}{2}, \infty\right) \widetilde{U}(0, \infty) \widehat{U}(\infty, x_1^0) \dots \\
&\times \dots \widehat{U}(x_n^0, -\infty) \widetilde{U}(-\infty, 0) U(-\infty, \frac{i\beta}{2}) | 0(\beta) \rangle \\
&= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0(\beta) | \widetilde{U}(0, \infty) U\left(\frac{-i\beta}{2}, \infty\right) \widehat{U}(\infty, x_1^0) \dots \\
&\times \dots \widehat{U}(x_n^0, -\infty) U(-\infty, \frac{i\beta}{2}) \widetilde{U}(-\infty, 0) | 0(\beta) \rangle.
\end{aligned}$$

Considerando a regra de substituição til para os termos extremos

$$\begin{aligned}\langle 0(\beta)|\tilde{U}(0, \infty) &= \langle 0(\beta)|U(\infty - i\frac{\beta}{2}, i\frac{\beta}{2}), \\ \tilde{U}(-\infty, 0)|0(\beta)\rangle &= U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2})|0(\beta)\rangle,\end{aligned}\tag{4.23}$$

temos

$$\begin{aligned}G(x_1, \dots, x_n; \beta)_{A_1 \dots A_n} &= \frac{Z_0(\beta)}{Z(\beta)} \langle 0(\beta)|U(\infty - i\frac{\beta}{2}, i\frac{\beta}{2})T[\hat{U}(\infty, -\infty) \\ &\quad \phi(x_1)_{A_1} \cdots \phi(x_n)_{A_n}]U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2})|0(\beta)\rangle.\end{aligned}$$

Se fizermos nesta fórmula $n = 0$ teremos

$$\frac{Z}{Z_0} = \langle 0(\beta)|U(-i\frac{\beta}{2} + \infty, \infty)T\hat{U}(\infty, -\infty)U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2})|0(\beta)\rangle,$$

e portanto

$$\begin{aligned}&G(x_1, \dots, x_n; \beta)_{A_1 \dots A_n} \\ &= \frac{\langle 0(\beta)|U(-i\frac{\beta}{2} + \infty, \infty)T\hat{U}(\infty, -\infty)\phi(x_1)_{A_1} \cdots \phi(x_n)_{A_n}U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2})|0(\beta)\rangle}{\langle 0(\beta)|U(-i\frac{\beta}{2} + \infty, \infty)T\hat{U}(\infty, -\infty)U(-\infty, -\infty + i\frac{\beta}{2})|0(\beta)\rangle}.\end{aligned}$$

A contribuição dos termos extremos no numerador e denominador se cancelam, resultando numa fórmula de Gell-Mann-Low para campos térmicos

$$G(x_1, \dots, x_n; \beta)_{A_1 \dots A_n} = \frac{\langle 0(\beta)|T\hat{U}(\infty, -\infty)\phi(x_1)_{A_1} \cdots \phi(x_n)_{A_n}|0(\beta)\rangle}{\langle 0(\beta)|T\hat{U}(\infty, -\infty)|0(\beta)\rangle}.\tag{4.24}$$

4.3 Teorema de Wick para DCT

Para calcularmos as funções de correlação (4.24) perturbativamente, precisamos expandir a exponencial

$$\hat{U}(\infty, -\infty) = T \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I(t)),$$

em potências do argumento

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I(t) = -i \int d^4x \mathcal{H}_{int}(x),$$

onde usualmente, no caso de interesse deste trabalho, a densidade hamiltoniana $\mathcal{H}(x)$ é dada por um produto dos campos envolvidos na teoria. Portanto, o objeto básico que nos resta calcular na expansão perturbativa é da forma $\langle 0(\beta)|T\phi(x_1)_{A_1}\cdots\phi(x_n)_{A_n}|0(\beta)\rangle$.

Analisemos o caso mais simples, com $n = 2$, isto é, vamos calcular

$$\langle 0(\beta)|T\phi(x_1)_{A_1}\phi(x_2)_{A_2}|0(\beta)\rangle. \quad (4.25)$$

Os campos na representação de interação são dados por

$$\phi(x)_A = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_k} (e^{-ikx} a_A(k) + e^{ikx} a_A^\dagger(k)). \quad (4.26)$$

E, como o valor esperado (4.25) é relativo ao vácuo térmico, convém escrever os operadores de criação e destruição em termos dos operadores térmicos por meio da transformação de Bogoliubov, $a_A = U(\beta)_{AB}a(k; \beta)_B$, o que, substituindo em (4.26), resulta em

$$\begin{aligned} \phi(x)_{\bar{A}} &= \phi(x)_{\bar{A}\beta}^+ + \phi(x)_{\bar{A}\beta}^-, \\ \phi(x)_{\bar{A}\beta}^- &= (\phi(x)_{\bar{A}\beta}^+)^\dagger, \end{aligned}$$

$$\phi(x)_{\bar{A}\beta} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_k} Q(x, k, \beta)_{\bar{A}\bar{B}} a(k; \beta)_{\bar{B}}, \quad (4.27)$$

onde Q é dado por

$$Q(x, p; \theta) = \begin{pmatrix} e^{-ikx} u(k; \beta) & e^{ikx} v(k; \beta) \\ e^{-ikx} v(k; \beta) & e^{ikx} u(k; \beta) \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

e portanto os campos se decompõem em ϕ_β^\dagger e ϕ_β^- da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \phi(x)_A &= \phi(x)_{A\beta}^+ + \phi(x)_{A\beta}^- \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_k} Q(x, k; \beta)_{AB} a(k; \beta)_B \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\omega_k} Q^*(x, k; \beta)_{AB} a^\dagger(k; \beta)_B. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Nas teorias quânticas de campos a $T = 0$ os índices $+$ e $-$ referem-se à decomposição dos campos em frequências positivas e negativas. Aqui essa interpretação da notação perde o sentido, visto que as frequências positivas e negativas se misturam em ϕ_β^+ e ϕ_β^- . No nosso caso, os sinais se referem a decomposição em operadores de aniquilação $a(k; \beta)_{\bar{A}} =$

$(a(k; \beta), \tilde{a}(k; \beta))$ para o sinal + e de criação $a^\dagger(k; \beta)_{\bar{A}} = (a^\dagger(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k; \beta))$ para o sinal -. Por isso modificamos os índices fazendo

$$A \rightarrow \bar{A}, \quad B \rightarrow \bar{B}. \quad (4.30)$$

A notação matricial definida para os operadores afim de descrever a transformação de Bogoliubov é

$$a(k; \beta)_A = (a(k; \beta), \tilde{a}^\dagger(k; \beta)), \quad a^\dagger(k; \beta)_A = (a^\dagger(k; \beta), \tilde{a}(k; \beta)).$$

Com a modificação (4.30), as componentes 1 e 2, significam respectivamente, não til e til.

Com os campos decompostos segundo (4.29), podemos estender o teorema de Wick para a DCT como

$$\begin{aligned} T\phi(x_1)_A\phi(x_2)_B &= \phi(x_1)_A\phi(x_2)_B \quad \text{para } x_1^0 > x_2^0 \\ &= (\phi(x_1)_{A\beta}^+ + \phi(x_1)_{A\beta}^-)(\phi(x_2)_{B\beta}^+ + \phi(x_2)_{B\beta}^-) \\ &= \underline{\phi(x_1)_{A\beta}^+\phi(x_2)_{B\beta}^+} + \phi(x_1)_{A\beta}^+\phi(x_2)_{B\beta}^- \\ &\quad + \underline{\phi(x_1)_{A\beta}^-\phi(x_2)_{B\beta}^+} + \phi(x_1)_{A\beta}^-\phi(x_2)_{B\beta}^- \\ &= \underline{\phi(x_1)_{A\beta}^+\phi(x_2)_{B\beta}^+} + \phi(x_2)_{B\beta}^-\phi(x_1)_{A\beta}^+ \\ &\quad + \underline{\phi(x_1)_{A\beta}^-\phi(x_2)_{B\beta}^+} + \phi(x_1)_{A\beta}^-\phi(x_2)_{B\beta}^- \\ &\quad + [\phi(x_1)_{A\beta}^+, \phi(x_2)_{B\beta}^-], \end{aligned} \quad (4.31)$$

os termos sublinhados estão normalmente ordenados relativamente aos operadores térmicos.

Definindo o ordenamento normal dos operadores térmicos por

$$\begin{aligned} N_\beta a(k; \beta) a^\dagger(q; \beta) &= a^\dagger(q; \beta) a(k; \beta), \\ N_\beta a^\dagger(q; \beta) a(k; \beta) &= a^\dagger(q; \beta) a(k; \beta), \\ N_\beta a(k_1; \beta) \tilde{a}^\dagger(q_1; \beta) \tilde{a}(k_1; \beta) a^\dagger(q_2; \beta) &= \tilde{a}^\dagger(q_1; \beta) a^\dagger(q_2; \beta) a(k_1; \beta) \tilde{a}(k_1; \beta), \\ &\vdots \end{aligned}$$

e definindo contração térmica entre campos por

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} &= \theta(x_1^0 - x_2^0) [\phi(x_1)_{A\beta}^+, \phi(x_2)_{B\beta}^-] \\ &+ \theta(x_2^0 - x_1^0) [\phi(x_2)_{B\beta}^+, \phi(x_1)_{A\beta}^-], \end{aligned}$$

podemos reescrever (4.31) como

$$T\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B = N_\theta \phi(x_1)_A \phi(x_2)_B + \overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B}.$$

A partir desta definição, segue que

$$\overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} = G_0(x_1 - x_2; \beta)_{AB} \quad (4.32)$$

Considerando este teorema de Wick para a DCT, quando $n = 3, 4, \dots$, podemos notar que

$$T \prod_{i=1}^n \phi(x_i)_{A_i} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{\pi\}} N_\theta \prod_{j=1}^{n-2k} \phi(x_{\pi_j})_{A_{\pi_j}} \prod_{\{(\pi l', \pi l)\}} G_0(x_{\pi l'} - x_{\pi l}; \beta)_{A_{\pi l'} A_{\pi l}} \quad (4.33)$$

onde $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ é uma permutação de $(1, \dots, n)$, onde que π_j é um elemento de uma combinação de $(1, \dots, n)$ tomados $n - 2k$ a $n - 2k$, para $j = 1, \dots, n - 2k$. $\{(\pi l, \pi l')\}$ é o conjunto de todos os pares entre os $\pi l', \pi l$ para $n - 2k \leq l, l' \leq n$, sendo $l \neq l'$. A expressão (4.33) é o Teorema de Wick para DCT. A partir desta expressão podemos calcular o produto ordenado dos campos, bem como o resultado da atuação do operador ordenamento temporal em funcionais dos campos.

Capítulo 5

Teoria de campo sobre espaços não-comutativos

A geometria não comutativa, desenvolvida por Connes, Rieffel e muitos outros [51, 52, 53], a partir dos trabalhos de Gel'fand e Naimark, foi incorporada em teorias físicas nas quais a álgebra do espaço-tempo é não comutativa. São duas as principais áreas para sua aplicação: modelos numéricos de teorias de campos sobre esfera Fuzzy [13, 54, 55, 56] e teoria quântica de campos (TQC) no plano Moyal [57, 58, 59, 60]. A primeira serve de ferramenta para regularizar TQC's e para métodos numéricos. Enquanto a segunda (de maior interesse nesta tese) busca investigar a física na escala de Planck.

A Ideia de que as coordenadas espaciais poderiam não comutar surgiu em uma carta de Heisenberg a Peierls [61, 62]. Heisenberg sugeriu que um princípio de incerteza como

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq \frac{1}{2} |\theta_{\mu\nu}|, \quad \theta_{\mu\nu} = \text{constante} \quad (5.1)$$

poderia gerar um “cut-off ” de curta distância regularizando TQC's. Peierl comunicou Pauli sobre esta ideia, Pauli comunicou Oppenheimer que, finalmente, comunicou a Snyder. Snyder escreveu o primeiro trabalho sobre o assunto [63].

Na mecânica quântica os operadores posição e *momentum* obedecem às seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{X}_i, \hat{P}_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ [\hat{X}_i, \hat{X}_j] &= [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Entretanto não existem evidências de que a distâncias muito pequenas (ou a energias

muito altas) estas relações ainda deixem de ser válidas, mas se pode supor que existem generalizações. Uma generalização natural destas relações consiste em tomar coordenadas espaciais que não comutam entre si

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\theta_{ij}, \quad (5.3)$$

onde θ_{ij} é uma constante, de dimensão $[L^2]$. Uma consequência imediata da introdução deste tipo de relação de comutação é a perda da invariância de Lorentz. No entanto, devemos lembrar que esta relação deve valer somente a distâncias muito pequenas, i.e. devemos recuperar a simetria de Lorentz para $\theta_{ij} \rightarrow 0$. Este deve ser um dos principais vínculos das teorias de campos não-comutativas: ao menos em nível clássico, no limite $\theta_{ij} \rightarrow 0$ deve-se obter a teoria de campos comutativa previamente conhecida. Podemos generalizar (5.3) para as coordenadas do espaço-tempo

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

No que segue iremos nos referir a um espaço com as relações de comutação acima como um espaço não-comutativo.

Na década de noventa, Doplicher, Fredenhagen e Roberts [64] construíram TQC's sobre o plano G-M e suas generalizações, incluindo não comutatividade do espaço-tempo. Mais tarde as teorias de cordas, como citado na introdução deste projeto, reencontrou estas estruturas.

5.1 O plano de Groenewald-Moyal

Para construir a formulação perturbativa das teorias de campos é interessante usar os campos como funções ao invés de operadores. Para fazer isso em concordância com (5.4) devemos redefinir o produto entre os campos. Este novo produto é induzido através da correspondência Weyl-Moyal [65, 66]

$$\hat{\Phi}(\hat{X}) \leftrightarrow \Phi(x); \quad (5.5)$$

$$\hat{\Phi}(\hat{X}) = \int_{\alpha} e^{i\alpha\hat{X}} \phi(\alpha) d\alpha \quad (5.6)$$

$$\phi(\alpha) = \int_x e^{i\alpha x} \hat{\Phi}(x) dx, \quad (5.7)$$

onde as variáveis α e x são reais. Assim,

$$\hat{\Phi}_1(\hat{X})\hat{\Phi}_2(\hat{X}) = \int \int_{\alpha\beta} e^{i\alpha\hat{X}} \phi(\alpha) e^{i\beta\hat{X}} \phi(\beta) d\alpha d\beta \quad (5.8)$$

$$= \int \int_{\alpha\beta} e^{(\alpha+\beta)\hat{X} - \frac{1}{2}\alpha\mu\beta\nu[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu]} \phi_1(\alpha)\phi_2(\beta) d\alpha d\beta, \quad (5.9)$$

onde usamos a expansão de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{i\alpha\mu\hat{X}^\mu} e^{i\beta\nu\hat{X}^\nu} = e^{\frac{1}{2}\alpha\mu[\hat{X}^\mu, \hat{X}^\nu]\beta\nu} e^{i(\alpha+\beta)_\mu\hat{X}^\mu} \quad (5.10)$$

e portanto o produto entre os operadores de campo pode se relacionar com o produto entre os campos como

$$\hat{\Phi}_1(\hat{X})\hat{\Phi}_2(\hat{X}) \leftrightarrow (\Phi_1 \star \Phi_2)(x), \quad (5.11)$$

onde o produto estrela é definido por

$$(\Phi_1 \star \Phi_2)(x) \equiv \left[e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{\xi^\mu}\partial_{\eta^\nu}} \Phi_1(x + \xi)\Phi_2(x + \eta) \right]_{\xi=\eta=0}. \quad (5.12)$$

Isto sugere que uma teoria de campos sobre um espaço não-comutativo $\mathcal{A}_\theta(\mathbb{R}^{d+1})$ pode ser vista como uma teoria de campos sobre um espaço comutativo $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{d+1})$ com funções complexas ϕ_1, ϕ_2, \dots e o produto entre os campos tomado como o produto estrela. O plano $\mathcal{A}_\theta(\mathbb{R}^{d+1})$ é denominado plano de Groenewald-Moyal.

É importante notar que a expansão

$$(\Phi_1 \star \Phi_2)(x) = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi_1(x) \cdot \partial_\nu\Phi_2(x) \quad (5.13)$$

$$- \frac{1}{8}\theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\partial_\mu\Phi_1(x) \cdot \partial_\lambda\partial_\nu\Phi_2(x) + \dots \quad (5.14)$$

evidencia que o produto estrela é uma deformação do produto usual entre funções em \mathbb{R}^d . Assim, o produto estrela entre as coordenadas do espaço-tempo fornece a relação de comutação entre estas

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = [x_\mu, x_\nu]_\star = x_\mu \star x_\nu - x_\nu \star x_\mu = i\theta_{\mu\nu}. \quad (5.15)$$

O produto estrela possui as seguintes propriedades:

1. Produto estrela entre exponenciais:

$$e^{ikx} \star e^{iqx} = \left[e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{\xi\mu}\partial_{\eta\nu}} e^{ik(x+\xi)} e^{iq(x+\eta)} \right]_{\xi=\eta=0} \quad (5.16)$$

$$= \left(1 + \left(\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{\xi\mu}\partial_{\eta\nu}\right) + \left(\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{\xi\mu}\partial_{\eta\nu}\right)^2 + \dots \right) e^{ik(x+\xi)} e^{iq(x+\eta)} \Big|_{\xi=\eta=0} \quad (5.17)$$

$$= \left(1 + \left(-\frac{i}{2}k \wedge q\right) + \left(-\frac{i}{2}k \wedge q\right)^2 + \dots \right) e^{ikx} e^{iqx} \quad (5.18)$$

$$= e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}(k \wedge q)}, \quad (5.19)$$

onde $k \wedge p \equiv k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu$. O produto entre n ondas planas

$$e^{ik_1x} \star e^{ik_2x} \star \dots \star e^{ik_nx} = \exp \left[ix \sum_{i=1}^n k_i - \frac{i}{2} \sum_{i<j}^n k_i \wedge k_j \right] \quad (5.20)$$

2. Representação no espaço dos *momenta*:

sejam $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{g}(q)$ as componentes de Fourier das funções complexas f e g .

$$f(x) = \int \bar{d}^4k \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad (5.21)$$

$$g(x) = \int \bar{d}^4q \tilde{g}(q) e^{iqx}, \quad (5.22)$$

onde $\bar{d}^4k \equiv \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$.

O produto estrela entre $f(x)$ e $g(x)$ é

$$(f \star g)(x) = \iint \bar{d}^4k \bar{d}^4q \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{-\frac{i}{2}k \wedge q} e^{i(k+q)x}. \quad (5.23)$$

3. Conjugação complexa:

$$(f \star g)^*(x) = g^* \star f^*. \quad (5.24)$$

4. Associatividade

Sejam f , g e h funções complexas, então

$$[(f \star g) \star h](x) = [f \star (g \star h)](x), \quad (5.25)$$

pode ser provada escrevendo as representações de f , g e h no espaço dos *momenta*:

$$[(f \star g) \star h](x) = \iiint \bar{d}^4 k \bar{d}^4 q \bar{d}^4 p \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-\frac{i}{2}k \wedge q} e^{-\frac{i}{2}(k+q) \wedge p} e^{i(k+q+p)x}, \quad (5.26)$$

e

$$[f \star (g \star h)](x) = \iiint \bar{d}^4 k \bar{d}^4 q \bar{d}^4 p \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \tilde{h}(p) e^{-\frac{i}{2}q \wedge p} e^{-\frac{i}{2}k \wedge (q+p)} e^{i(k+q+p)x}. \quad (5.27)$$

5. Produto estrela sob sinal de integração:

$$\int d^4 x (f \star g)(x) = \iiint d^4 x \bar{d}^4 k \bar{d}^4 q \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) e^{i(k+q)x} e^{-\frac{i}{2}k \wedge q} \quad (5.28)$$

$$= (2\pi)^4 \iiint \bar{d}^4 k \bar{d}^4 q \tilde{f}(k) \tilde{g}(q) \delta^4(k+q) e^{-\frac{i}{2}k \wedge q} \quad (5.29)$$

$$= \int \bar{d}^4 k \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) = \int d^4 x (g \star f)(x) = \int d^4 x (f \cdot g)(x), \quad (5.30)$$

onde usamos a anti-simetria de θ ($k\theta k = 0$). Usando (5.30) podemos mostrar que o produto estrela entre n funções complexas sob integração é cíclico:

$$\int (f_1 \star f_2 \star \dots \star f_n)(x) d^4 x = \int (f_n \star f_1 \star \dots \star f_{n-1})(x) d^4 x. \quad (5.31)$$

A representação de Fourier da integração, no espaço tempo, do produto de n funções

$$\int d^4 x \Phi_1(x) \star \Phi_2(x) \star \dots \star \Phi_n(x) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n \Phi_j(k_j) \delta^4\left(\sum_{l=1}^n k_l\right) \left[e^{-\frac{i}{2} \sum_{a < b} k_a \wedge k_b} \right]. \quad (5.32)$$

Estas propriedades serão úteis nas manipulações em teorias de perturbação. Na seção seguinte formularemos a teoria de campos livre sobre espaços não-comutativos.

5.2 A teoria livre

Como citado na introdução deste capítulo, as primeiras tentativas de formulação de teorias sobre espaços não-comutativos surgiram como uma tentativa de regularizar as teorias de campos. De fato a formulação de teorias de campos sobre espaços não-comutativos leva a comportamentos não usuais para os propagadores, por exemplo, a mistura entre as divergências ultravioleta (UV) e infravermelha (IR) características dos diagramas de

Feynman não planares. No entanto estes efeitos só surgem ao considerarmos campos interagentes. Veremos a seguir que não é possível distinguir uma teoria de campos livre da correspondente teoria sobre espaços não-comutativos.

Seja a ação livre de uma teoria de campo real

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (5.33)$$

a ação correspondente no espaço não-comutativo é

$$S_{nc}[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi \star \phi \right), \quad (5.34)$$

que pela propriedade (5.30) é equivalente à (5.33). É de se esperar que isto aconteça, visto que as propriedades físicas (observáveis) de uma partícula livre não devem ser alteradas pelas condições do espaço tempo. Porém quando consideramos interações esta condição se altera.

5.3 Interações

Como vimos anteriormente, uma teoria de campos sobre espaços não-comutativos pode ser construída como uma teoria de campos usual com o produto estrela entre campos. Assim uma teoria de campos interagentes é montada sobre o espaço de Hilbert usual porém com interações modificadas pelo produto entre os campos. Por esta razão, as funções de correlação não comutativas devem ser definidas como nas teorias comutativas.

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\hat{\Phi}(x_1) \dots \hat{\Phi}(x_n)) | 0 \rangle. \quad (5.35)$$

A ação é obtida pela substituição dos produtos ordinários pelo produto \star de Moyal.

$$S[\hat{\Phi}] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\Phi}(x) \partial^\mu \hat{\Phi}(x) - \frac{1}{2} m^2 \hat{\Phi}^2 + V(\hat{\Phi}) \right]. \quad (5.36)$$

No caso de potenciais polinomiais $V(\hat{\Phi}) = \frac{g^{\frac{n}{2}}}{n!} (\hat{\Phi})^n$, onde g é a constante de acoplamento, temos

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \star \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi \star \phi + \frac{g^{\frac{n}{2}}}{n!} (\phi \star \dots \star \phi) \right] \quad (5.37)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{g^{\frac{n}{2}}}{n!} (\phi \star \dots \star \phi) \right]. \quad (5.38)$$

Portanto a diferença em relação às regras de Feynman da teoria usual advém do termo

$$\frac{g^{\frac{n}{2}}}{n!} (\phi \star \dots \star \phi) = \frac{g^{\frac{n}{2}}}{n!} \int \prod_{i=1}^n d^4k_i \phi(k_i) \delta^4\left(\sum_{l=1}^n k_l\right) \left[e^{-\frac{i}{2} \sum_{a<b}^n k_a \wedge k_b} \right], \quad (5.39)$$

devido a presença do fator de fase

$$V(k_1, \dots, k_n) = e^{-\frac{i}{2} \sum_{a<b}^n k_a \wedge k_b}, \quad (5.40)$$

onde introduzimos a forma bilinear $k_a \wedge k_b = k_{a\mu} \theta^{\mu\nu} k_{b\nu}$. Iremos considerar, por simplicidade, que θ é uma matriz inversível (espaço tempo com dimensão par).

A expressão (5.40) é invariante por permutação cíclica, mas não por permutação arbitrária dos *momenta* $k_1 \dots k_n$. Assim deve-se fixar as linhas de entrada e saída no vértice, em sua ordem cíclica, e considerar todos os diagramas possíveis. Assim podemos classificar os digramas em duas classes: planares e não planares, como veremos no modelo ϕ^4 .

5.4 Modelo ϕ^4

A ação (5.38) para $n = 4$ é

$$S[\phi] = S[\phi] + S_{int}(\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{g^2}{4!} (\phi \star \phi \star \phi \star \phi) \right]. \quad (5.41)$$

onde a ação de interação pode ser escrita como

$$S_{int}(\phi) = \frac{g^2}{4!} \int d^4x (\phi \star \phi \star \phi \star \phi) \quad (5.42)$$

$$= \frac{g^2}{4!} \int \bar{d}^4k_1 \dots \bar{d}^4k_4 \phi(k_1) \dots \phi(k_4) \delta^4\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) \prod_{i<j}^4 e^{-\frac{i}{2} (k_i \wedge k_j)} \quad (5.43)$$

Podemos, então, construir os diagramas para 1-loop. Sejam k_1, k_2, k_3, k_4 as linhas de entrada em um vértice, e p e $-p$ as linhas externas. Podemos ligar a primeira linha externa p à linha k_1 do vértice

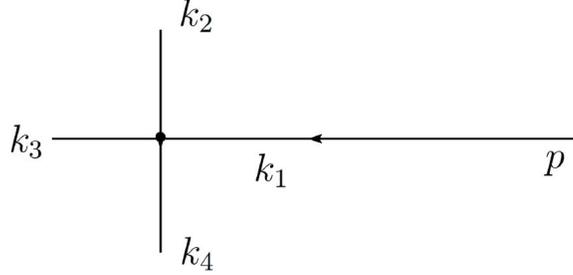


Figura 5.1: Diagrama a

Restam três escolhas para conectar a linha externa $-p$ ao vértice. Conectando a linha externa a linha k_2 do vértice podemos conectar as linhas k_3 e k_4 por um propagador $-q$ de forma a obter o seguinte diagrama

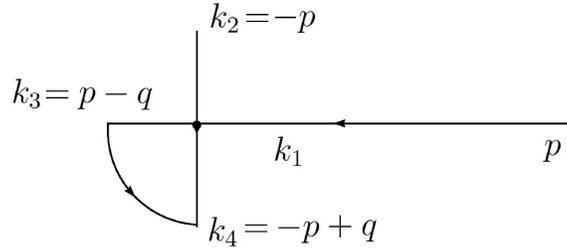


Figura 5.2: Diagrama b

O fator de fase (5.40) para este diagrama é dado por

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = V(p, -p, p - q, -p + q) \quad (5.44)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \quad (5.45)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(p \wedge (-p) + (p - q) \wedge (-p + q))} \quad (5.46)$$

$$= 1. \quad (5.47)$$

Alternativamente, podemos conectar a linha externa $-p$ à linha k_4 do vértice. Conectando as linhas restantes, k_2 e k_3 por um propagador q , obtendo o seguinte diagrama

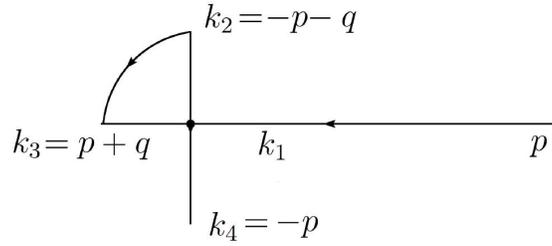


Figura 5.3: Diagrama c

O fator de fase correspondente a este diagrama é dado por

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = V(p, -p - q, p + q, -p) \quad (5.48)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \quad (5.49)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(p \wedge (-p - q) + (p + q) \wedge (-p))} \quad (5.50)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(p \wedge (-p) p \wedge (-q) + p \wedge (-p) + q \wedge (-p))} \quad (5.51)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(-p \wedge q - q \wedge (p))} \quad (5.52)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(q \wedge p - q \wedge (p))} \quad (5.53)$$

$$= 1 \quad (5.54)$$

Estes diagramas são equivalentes aos obtidos na teoria comutativa, para cada linha k_1, k_2, k_3 e k_4 do vértice podemos conectar a linha externa p restando duas possibilidades de conexão das linhas restantes, totalizando 8 diagramas. Estes diagramas são denominados diagramas planares pois suas linhas podem ser conectadas sem a necessidade de sair do plano, o que não é possível para diagramas em que o fator de fase é diferente da unidade.

Podemos construir diagramas distintos dos anteriores conectando linhas não cíclicas do vértice através de um propagador q . Conectando a linha externa p à linha k_1 do vértice e esta à linha k_3 , nos resta conectar as linhas k_2 e k_4 através de um propagador q . Este

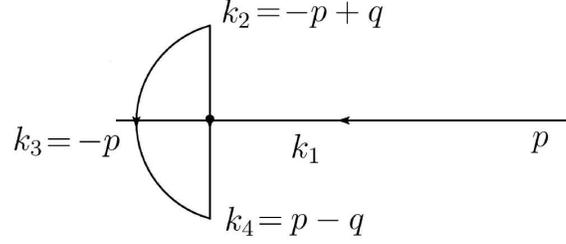


Figura 5.4: Diagrama d

diagrama é não planar, e o fator de fase correspondente é

$$V(k_1, k_2, k_3, k_4) = V(p, -p + q, -p, p - q) \quad (5.55)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4)} \quad (5.56)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(p \wedge (-p+q) + -p \wedge (p-q))} \quad (5.57)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(p \wedge (-p)p \wedge q + p \wedge p + q \wedge (-p))} \quad (5.58)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(p \wedge q - q \wedge p)} \quad (5.59)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}(p \wedge q + p \wedge q)} \quad (5.60)$$

$$= e^{-ip \wedge q}. \quad (5.61)$$

Podemos construir este diagrama associando a linha externa p a qualquer linha k_i do vértice e associando esta à linha k_{i+2} para $i = 1, 2$ e k_{i-2} para $i = 3, 4$. Portanto temos quatro diagramas não planares idênticos com fator de fase

$$V = e^{-ip \wedge q}. \quad (5.62)$$

Agora podemos escrever a função de dois pontos a 1-loop para o este modelo no espaço dos *momenta*

$$\mathcal{G}_{1-loop}^{(2)}(p, -p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - \left(\frac{g^2}{6}\right) \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \int \bar{d}^4 q \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.63)$$

$$- \left(\frac{g^2}{3}\right) \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \int \bar{d}^4 q \frac{e^{-p \wedge q}}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (5.64)$$

Cujo diagrama é

Note que o primeiro termo é equivalente à teoria comutativa livre. O segundo termo é um diagrama planar, presente na teoria comutativa porém o fator de simetria é distinto.

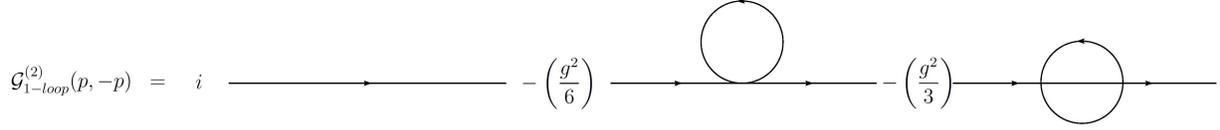


Figura 5.5: Diagrama e

O diagrama não planar, último termo, tem um fator de fase sob integração gerando características distintas da teoria de campos comutativa. Como veremos a seguir, este termo é responsável pela não localidade que fará com que o *cutoff* da teoria renormalizada dependa do momento, o que faz com que as divergências se comportem de maneira intrigante.

É importante notar que no limite $\theta \rightarrow 0$ o expoente $-i(p \wedge q)$ do fator de fase se anula, assim o fator de fase assume o valor equivalente ao de um diagrama planar. Neste caso a teoria só possui diagramas planares e a soma destes é igual ao do caso comutativo. Portanto neste limite a teoria se torna comutativa como era de esperar.

5.5 Divergências ultravioleta e infravermelha (mistura UV-IR)

A função de dois pontos (5.64) tem comportamento distinto da teoria comutativa, como vimos isto se deve ao fator de fase $e^{-ip \wedge q}$ do vértice do diagrama não planar. Podemos analisar a renormalização dos campos pela função irreduzível a uma partícula $1PI$

$$\Gamma^{(2)}(p) = (p^2 - m^2) + \frac{g^2}{3} \int \bar{d}^4 k \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{g^2}{6} \int \bar{d}^4 k \frac{e^{ik \wedge p}}{k^2 - m^2} \quad (5.65)$$

Assim, temos que regularizar os diagramas

$$\Gamma_p^{(2)}(p) = \frac{g^2}{3} \int \bar{d}^4 k \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (5.66)$$

$$\Gamma_{np}^{(2)}(p) = \frac{g^2}{6} \int \bar{d}^4 k \frac{e^{ik \wedge p}}{k^2 - m^2} \quad (5.67)$$

O diagrama planar $\Gamma^{(2)}(p)$ é responsável pela mesma correção da massa da teoria comutativa. A nova contribuição devido ao diagrama não planar $\Gamma_{np}^{(2)}(p)$ é responsável por uma melhor convergência devido ao fator de fase no integrando.

Seja a integral

$$\frac{1}{k^2 - m^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha(k^2 - m^2)} d\alpha \quad (5.68)$$

o diagrama planar pode ser reescrito como

$$\Gamma_p^{(2)}(p) = \frac{g^2}{3} \int_0^\infty d\alpha \int \bar{d}^4 k e^{-\alpha(k^2 - m^2)} \quad (5.69)$$

As integrais sobre os *momenta* tornam-se integrais gaussianas que podem ser resolvidas explicitamente

$$\Gamma_p^{(2)}(p) = \frac{g^2}{3} \int_0^\infty d\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k e^{\alpha m^2} e^{-\alpha k^2} \quad (5.70)$$

$$= \frac{g^2}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha m^2}}{\alpha^2} d\alpha. \quad (5.71)$$

O diagrama não planar pode ser escrito como

$$\Gamma_{np}^{(2)}(p) = \frac{g^2}{6} \int_0^\infty \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-\alpha(k^2 - m^2)} e^{ik \wedge p} d\alpha \quad (5.72)$$

$$= \frac{g^2}{6} \int_0^\infty \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{\alpha m^2} e^{-\alpha k^2} e^{ik \wedge p} d\alpha \quad (5.73)$$

$$= \frac{g^2}{6} \int_0^\infty \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{\alpha m^2} e^{-\alpha k^\mu \eta_{\mu\nu} k^\nu} e^{ik^\mu \theta_{\mu\nu} p^\nu} d\alpha \quad (5.74)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski. Seja A uma matriz diagonal com elementos a_1, \dots, a_4 , x um vetor com componentes x_1, \dots, x_4 e b um vetor com componentes b_1, \dots, b_4 . Podemos usar a seguinte identidade (apêndice)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}[(x, Ax) + (b, x)]} d^4 k = (2\pi)^2 (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(b, A^{-1}b)} \quad (5.75)$$

com $A_{\mu\nu} = 2\alpha\eta^{\mu\nu}$, $x^\mu = k^\mu$ e $b^\mu = i\theta^{\mu\nu} p_\nu$. Assim

$$\Gamma_{np}^{(2)}(p) = \frac{g^2}{6(2\pi)^4} \int_0^\infty e^{\alpha m^2} (2\pi)^2 [\det(2\alpha\eta^{\mu\nu})]^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(i\theta^{\mu\nu} p_\nu) \frac{\eta_{\mu\gamma}}{2\alpha} (i\theta^{\gamma\lambda} p_\lambda)} d\alpha \quad (5.76)$$

$$= \frac{g^2}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{(\alpha m^2 - \frac{\theta^{\mu\nu} p_\nu \theta_{\mu\gamma} p^\gamma}{4\alpha})}}{\alpha^2} d\alpha \quad (5.77)$$

$$= \frac{g^2}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{(\alpha m^2 - \frac{p \circ p}{4\alpha})}}{\alpha^2} d\alpha \quad (5.78)$$

onde $p \circ p = p_\mu \theta^{\mu\rho} \theta^\nu_\rho p_\nu$. Podemos regularizar as integrais em α nos diagramas reparametrizados introduzindo um fator $e^{-\frac{1}{\alpha\Lambda^2}}$, onde Λ faz o papel de *cut-off*. Reescrevendo temos

$$\Gamma^{(2)}(p) = \frac{g^2}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha m^2 - \frac{1}{\alpha\Lambda^2}}}{\alpha^2} d\alpha \quad (5.79)$$

$$\Gamma_{np}^{(2)}(p) = \frac{g^2}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\alpha m^2 - \frac{p \circ p}{4\alpha} - \frac{1}{4\alpha\Lambda^2}}}{\alpha^2} d\alpha \quad (5.80)$$

Podemos ainda escrever um *cutoff* efetivo para o diagrama não planar dado por

$$\Lambda_{ef}^2 = \frac{1}{p \circ p + \frac{1}{\Lambda^2}} \quad (5.81)$$

Assim os dois diagramas contém integrais do tipo

$$\int_0^\infty \frac{e^{\alpha m^2 - \frac{1}{\alpha\Lambda^2}}}{\alpha^2} d\alpha = 2m\Lambda K_1\left(\frac{2m}{\Lambda}\right) \quad (5.82)$$

onde $K_1(x)$ é a função de Bessel modificada. Para $\Lambda \rightarrow \infty$ o argumento de K_1 se torna pequeno e podemos expandir

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad (5.83)$$

Neste limite as integrais se tornam

$$\int_0^\infty \frac{e^{\alpha m^2 - \frac{1}{\alpha\Lambda^2}}}{\alpha^2} d\alpha = \Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \quad (5.84)$$

Os diagramas planar e não planar podem ser escritos como

$$\Gamma^{(2)}(p) = \frac{g^2}{48\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] \quad (5.85)$$

$$\Gamma_{np}^{(2)}(p) = \frac{g^2}{96\pi^2} \left[\Lambda_{ef}^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda_{ef}^2}{m^2}\right) \right] \quad (5.86)$$

A massa renormalizada é

$$m_{ren}^2 = m^2 + \Gamma^{(2)}(p) + \Gamma_{np}^{(2)}(p) \quad (5.87)$$

$$= m^2 + \frac{g^2}{48\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \right] + \frac{g^2}{96\pi^2} \left[\Lambda_{ef}^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda_{ef}^2}{m^2}\right) \right]. \quad (5.88)$$

O termo advindo do diagrama planar diverge para $\Lambda \rightarrow \infty$, no regime ultravioleta. Neste regime o termo advindo do diagrama não planar apresenta valor $\Lambda_{ef}^2 = \frac{1}{p \circ p}$ assim o diagrama diverge no regime infravermelho ($p \rightarrow 0$). Então existe uma mistura entre as regiões de divergência (UV e IR) caracterizando um comportamento típico desta formulação das teorias de campo não-comutativas denominado *UV-IR mixing*.

Capítulo 6

Teorias de campos não-comutativas e DCT

Neste capítulo introduziremos o funcional gerador para sistemas de bósons em DCT. Faremos isto da mesma maneira em que procedemos para a termalização do campo real. Duplicaremos o espaço de Hilbert do sistema introduzindo o funcional para este sistema e em seguida aplicaremos a transformação de Bogoliubov afim de obter os funcional do sistema térmico. Este procedimento será feito da mesma maneira que na teoria de campos a $T = 0$, o que caracteriza uma vantagem na escolha da DCT. Aqui desenvolveremos o funcional para DCT sobre espaços não-comutativos e o utilizaremos para investigar a relação entre a temperatura e o parâmetro de não-comutatividade $\theta^{\mu\nu}$. Para isto nos restringiremos a estudar o campo real em um modelo com interação ϕ^4 . Ao final veremos que a função de dois pontos a 1-loop desta teoria pode ser separada em termos que contém somente a temperatura ou o parâmetro de não-comutatividade e termos onde estes aparecem juntos.

6.1 Funcional gerador para bósons

Para construir uma teoria quântica de campos no espaço de Hilbert duplicado \mathcal{H}_T vamos considerar inicialmente uma sistema de bósons livres, e aplicar as regras de conjugação til para introduzir, a menos de um fator de normalização, o seguinte funcional gerador [67, 68]

$$\begin{aligned} Z_0 &\simeq \int D\phi D\tilde{\phi} e^{-iS} \\ &= \int D\phi D\tilde{\phi} \exp[-i \int dx \hat{L}], \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $\widehat{L} = L - \widetilde{L}$ é a densidade Lagrangiana duplicada, dada por

$$\widehat{L} = \frac{1}{2}\phi(\square + m)\phi - J\phi - \frac{1}{2}\widetilde{\phi}(\square + m)\widetilde{\phi} + \widetilde{J}\widetilde{\phi} \quad (6.2)$$

Este funcional pode ser escrito como

$$Z_0 \simeq \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx dy \left[J(x)(\square + m^2 - i\varepsilon)^{-1} J(y) - \widetilde{J}(x)(\square + m^2 + i\varepsilon)^{-1} \widetilde{J}(y) \right] \right\}. \quad (6.3)$$

A partir de \widehat{L} , podemos escrever as equações de movimento, tais que, o propagador de Feynman para as variáveis não til é dado como na teoria usual, $(\square + m^2 + i\varepsilon)G_0(x) = -\delta(x)$. Para as variáveis til temos, $(-1)(\square + m^2 - i\varepsilon)\widetilde{G}_0(x) = -\delta(x)$, resultando que

$$\widetilde{G}_0(x) = -G_0^*(x). \quad (6.4)$$

Com estes resultados, nós obtemos o funcional gerador normalizado

$$Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}] = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx dy [\mathbf{J}^T(x) \mathbf{G}_0(x-y) \mathbf{J}(y)] \right\}, \quad (6.5)$$

onde as correntes na notação matricial aqui adotada são

$$\mathbf{J}(x) = \begin{pmatrix} J(x) \\ \widetilde{J}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^T(x) = (J(x), -\widetilde{J}(x)), \quad (6.6)$$

e a matriz dos propagadores é

$$\mathbf{G}_0(x) = (\mathbf{G}_0^{ab}(x)) = \begin{pmatrix} G_0(x) & 0 \\ 0 & -G_0^*(x) \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

A partir da definição do funcional (6.1) podemos mostrar que

$$\mathbf{G}_0(x-y) = i \frac{\delta^2 Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}]}{\delta \mathbf{J}(y) \delta \mathbf{J}^T(x)} \Big|_{J=J^T=0}, \quad (6.8)$$

onde a notação utilizada é tal que,

$\mathbf{G}_0^{ab}(x-y) = i\delta^2 Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}]/\delta J_a(x)\delta J_b(y)|_{J=J^T=0}$. A componente $\mathbf{G}_0^{11}(x)$ é a componente física. Enquanto que $\mathbf{G}_0^{22}(x) = \widetilde{G}_0(x) = -G_0^*(x)$ é, a menos da conjugação complexa

e do sinal, a componente física. A motivação da duplicação é a de podermos explorar um mapeamento linear entre as componentes til e não til do propagador; ou de forma equivalente, conforme (6.8) entre as componentes do funcional gerador. Este é o mecanismo que introduz um parâmetro extra na teoria, que iremos usar para introduzir a temperatura.

6.2 Transformação de Bogoliubov e integrais de trajetórias

Vamos proceder com a introdução de rotações, com a natureza de transformações de Bogoliubov nas componentes de Fourier do propagador. Então temos um mapeamento $B(\beta) : Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}] \mapsto Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta]$, tal que

$$\mathbf{G}(x-y; \beta)^{ab} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \mathbf{G}_0(k; \beta)^{ab} e^{-ik(x-y)} \quad (6.9)$$

onde $\mathbf{G}(k; \beta)^{ab} = B^{-1}(\beta) \mathbf{G}_0(k)^{ab} B(\beta)$, com

$$(\mathbf{G}_0(k)^{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$B(k; \beta) = \begin{pmatrix} u(k; \beta) & -v(k; \beta) \\ -v(k; \beta) & u(k; \beta) \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

tal que $u^2(k; \beta) - v^2(k; \beta) = 1$ e

$$u(k; \beta) = \frac{1}{[1 - e^{-\beta w_k}]^{1/2}}, \quad (6.12)$$

$$v(k; \beta) = \frac{1}{[e^{\beta w_k} - 1]^{1/2}}. \quad (6.13)$$

Como fizemos em (3.92), usando a definição de $B(k; \beta)$, as componentes $\mathbf{G}(k; \beta)^{ab}$ se tornam [21]

$$G_0^{11}(k; \beta) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi i n(k, \beta) \delta(k^2 - m^2), \quad (6.14)$$

$$G_0^{12}(k; \beta) = G_0^{21}(k; \beta) = -2\pi i [n(k, \beta) + n^2(k, \beta)]^{1/2} \delta(k^2 - m^2), \quad (6.15)$$

$$G_0^{22}(k; \beta) = \frac{-1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} - 2\pi i n(k, \beta) \delta(k^2 - m^2), \quad (6.16)$$

onde $G_0(k) - G_0^*(k) = 2\pi i \delta(k^2 - m^2)$ e

$$n(k_0; \beta) = \frac{1}{e^{\beta w_k} - 1}. \quad (6.17)$$

O funcional gerador é, então, dado por

$$Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta] = \exp\left\{-\frac{i}{2} \int dx dy [\mathbf{J}^T(x) \mathbf{G}_0(x-y; \beta) \mathbf{J}(y)]\right\}. \quad (6.18)$$

Portanto, é simples mostrar que, a função de dois pontos térmica para o campo escalar livre é

$$\tau_0^{ab}(x-y; \beta) = -\frac{\delta^2 Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta]}{\delta J_a(x) \delta J_b(y)} \Big|_{J=J^T=0}, \quad (6.19)$$

reproduzindo da maneira correta os resultados do formalismo canônico. Afim de tratar a interação, vamos considerar

$$\begin{aligned} \widehat{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{m^2}{2} \phi^2(x) + L_{int} \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi}(x) \partial^\mu \tilde{\phi}(x) + \frac{m^2}{2} \tilde{\phi}^2(x) - \tilde{L}_{int}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Neste caso, como no formalismo a temperatura zero, e considerando primeiro a estrutura duplicada, o funcional $Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}]$ satisfaz a seguinte equação

$$(\square + m^2) \frac{\delta Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}]}{i \delta \mathbf{J}(x)} + \widehat{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^T} \right) Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}] = \mathbf{J}(x) Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}], \quad (6.21)$$

com solução

$$Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}] = N \exp \left[i \int dx \widehat{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^T} \right) \right] Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}], \quad (6.22)$$

onde $\widehat{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}} \right) = L_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}} \right) - \tilde{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{J}}} \right)$. Para introduzir um funcional gerador dependente da temperatura usamos o mapeamento $B(\beta) : Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}] \rightarrow Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta]$, como antes, resultando em

$$Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta] = \frac{\exp \left[i \int dx \widehat{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^T} \right) \right] Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta]}{\exp \left[i \int dx \widehat{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^T} \right) \right] Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta] \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{J}^T=0}}. \quad (6.23)$$

Quando $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$), o resultado para temperatura zero é recuperado. Agora vamos voltar nossa atenção a teoria $\lambda\phi^4$ não comutativa a temperatura finita no formalismo de

tempo real, usando o funcional gerador introduzido acima.

6.3 DCT no plano não-comutativo

Nós obtemos uma teoria de campos não comutativa trocando o produto usual entre os campos pelo produto estrela de Moyal [2] na densidade lagrangiana, i.e.

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) = e^{i\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta^\nu}} \phi_1(x + \xi) \phi_2(x + \zeta) \Big|_{\xi=\zeta=0}, \quad (6.24)$$

onde o parâmetro não-comutativo $\theta^{\mu\nu}$ é antissimétrico ($\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$). Este produto reproduz um espaço não-comutativo [63]

$$[x^\mu, x^\nu]^\star = x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu}. \quad (6.25)$$

Então a ação para a teoria ϕ^4 sobre este espaço não-comutativo é [69]

$$S = S_0 + S_{int} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g^2}{4!}(\phi \star \phi \star \phi \star \phi)(x) \right]. \quad (6.26)$$

Com os resultados da última seção, introduzimos o funcional gerador para esta teoria não comutativa no formalismo de DCT, i.e.

$$Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}, \beta]^\star = \frac{\exp \left[i \int dx \widehat{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^T} \right)^\star \right] Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta]}{\exp \left[i \int dx \widehat{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}}; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}^T} \right)^\star \right] Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}; \beta] \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{J}^T=0}}. \quad (6.27)$$

Vamos expandir este funcional, a menos de um fator de normalização

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}, \beta]^\star &= Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}, \beta] + \frac{ig^2}{4!} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} a_n \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(\frac{ig^2}{4!} \right)^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 (-1)^{n+m+2} b_{nm} + \dots, \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde

$$a_n \equiv \int dz \left(\frac{\delta}{\delta J_n(z)} \right)^{4\star} Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}, \beta], \quad (6.29)$$

$$b_{nm} \equiv \int \int dz dw \left(\frac{\delta}{\delta J_n(z)} \right)^{4\star} \left(\frac{\delta}{\delta J_m(w)} \right)^{4\star} Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}, \beta]. \quad (6.30)$$

Afim de realizar o produto \star , as correntes devem ser escritas no espaço dos *momenta*

$$J_a(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{(ik^\mu x_\nu)} J_a(k), \quad (6.31)$$

$$\frac{\delta}{\delta J_a(x)} = \int \frac{d^4 k}{2\pi} e^{-(ik^\mu x_\nu)} \frac{\delta}{\delta J_a(k)}. \quad (6.32)$$

De forma que

$$\frac{\delta}{\delta J_b(y)} J_a(x) = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} e^{(ik_1^\mu x_\nu)} e^{-(ik_2^\mu y_\nu)} \frac{\delta J_a(k_1)}{\delta J_b(k_2)} \quad (6.33)$$

$$= \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} e^{(ik_1^\mu x_\nu) - (ik_2^\mu y_\nu)} \delta_a^b (2\pi)^4 \delta(k_2 - k_1) \quad (6.34)$$

$$= \delta_a^b \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} e^{ik_1(x-y)} \quad (6.35)$$

$$= \delta_a^b \delta(x - y) \quad (6.36)$$

O produto no lagrangiano de interação resulta em

$$\left(\frac{\delta}{\delta J_n(z)} \right)^{4\star} = \int \prod_{i=1}^4 \frac{dk_i}{(2\pi)^{16}} e^{-\frac{i}{2}(k_1 \wedge k_2)} e^{-\frac{i}{2}(k_3 \wedge k_4)} e^{-i(\sum_{j=1}^4 k_j^\mu) z_\mu} \frac{\delta}{\delta J_n(k_i)}, \quad (6.37)$$

onde $k_i \wedge k_j \equiv k_i^\mu \theta_{\mu\nu} k_j^\nu$. Portanto, obtemos

$$a_n = \int \prod_{i=1}^4 \frac{dk_i}{(2\pi)^{12}} e^{-\frac{i}{2} \sum_{i=1}^2 (k_{2i-1} \wedge k_{2i})} \delta\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) \frac{\delta}{\delta J_n(k_i)} Z_0[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}, \beta]. \quad (6.38)$$

A função de dois pontos desta teoria de campos não-comutativa é

$$\tau^{ab}(k_1, k_2; \beta)^\star = - \left. \frac{\delta^2 Z[\mathbf{J}^T, \mathbf{J}, \beta]^\star}{\delta J_a(k_2) \delta J_b(k_1)} \right|_{\mathbf{J}^T = \mathbf{J} = 0}; \quad (6.39)$$

tal que, até primeira ordem no termo de interação, temos

$$\tau_1^{ab}(k_1, k_2; \beta)^* = -\frac{ig^2}{4!} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} \frac{\delta a_n}{\delta J_a(k_2) \delta J_b(k_1)} \Big|_{\mathbf{J}^T = \mathbf{J} = 0}. \quad (6.40)$$

A única parte fisicamente relevante desta matriz de função de dois pontos é a componente $\tau^{11}(k_1, k_2; \beta)^*$. Portanto, ela contém todas as componentes da matriz de propagador livre e , conseqüentemente, o efeito de temperatura, que é

$$\begin{aligned} \tau_1^{11}(k_1, k_2; \beta)^* = & -\frac{g^2}{6} \Lambda(k_1, k_2) \mathbf{G}_0^{11}(k_1; \beta) \mathbf{G}_0^{11}(k_2; \beta) \int \frac{dp}{(2\pi^4)} \mathbf{G}_0^{11}(p; \beta) \\ & -\frac{g^2}{3} \mathbf{G}_0^{11}(k_1; \beta) \mathbf{G}_0^{11}(k_2; \beta) \int \frac{dp}{(2\pi^4)} \Lambda(k_1, p) \Lambda(k_2, p) \mathbf{G}_0^{11}(p; \beta) \\ & +\frac{g^2}{6} \Lambda(k_1, k_2) \mathbf{G}_0^{21}(k_1; \beta) \mathbf{G}_0^{21}(k_2; \beta) \int \frac{dp}{(2\pi^4)} \mathbf{G}_0^{22}(p; \beta) \\ & +\frac{g^2}{3} \mathbf{G}_0^{21}(k_1; \beta) \mathbf{G}_0^{21}(k_2; \beta) \int \frac{dp}{(2\pi^4)} \Lambda(k_1, p) \Lambda(k_2, p) \mathbf{G}_0^{22}(p; \beta), \end{aligned} \quad (6.41)$$

onde

$$\Lambda(k_i, k_j) \equiv e^{-\frac{i}{2} k_i \wedge k_j} \quad (6.42)$$

e G_0^{ij} são as componentes do propagador do campo escalar livre em DCT. Estes resultados serão analisados na seção seguinte.

6.4 Função de dois pontos β, θ em (1+1)-dimensões

Encontramos a estrutura da função $\tau_1^{11}(k_1, k_2; \beta)^*$, dada em Eq.(6.41), considerando θ uma pequena quantidade, tal que $\Lambda(k_i, k_j) \simeq 1 - \frac{i}{2} k_i \wedge k_j$. Desde que $\mathbf{G}_0^{11}(k_1; \beta)$ é dado pela Eq.(6.14), a contribuição a $T = 0$ e $\theta = 0$ é

$$\tau_1^{11}(k_1, k_2) = -\frac{g^2}{2} G_0(k_1) G_0(k_2) \int \frac{dp}{(2\pi^4)} G_0(p), \quad (6.43)$$

recuperando o resultado usual. A primeira linha em Eq.(6.41) fornece, neste caso, o seguinte termo dependente de β e θ :

$$I(k_1, k_2; T, \theta) = \frac{g^2}{6} \frac{i}{2} k_1 \wedge k_2 n(k_1; \beta) G_0(k_1) G_0(k_2) \int \frac{dp}{(2\pi^4)} G_0(p). \quad (6.44)$$

Neste caso, a não comutatividade, caracterizada pelo parâmetro θ , compete com a temperatura, descrita por $n(k_1; \beta)$. Note que para temperaturas suficientemente altas, considerando θ fixo, estes termos estão presentes na função de dois pontos; e portanto interferem nas quantidades mensuráveis, calculadas a partir de τ_1^{11} , como a seção de choque.

A inter-relação entre temperatura e o parâmetro de não comutatividade para a parte não planar de $\tau_1^{11}(k_1, k_2)^*$ é melhor observada no caso de $(1+1)$ dimensões. Neste limite temos

$$\omega_k^2 = k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + m^2 \rightarrow k_1^2 + m^2, \quad (6.45)$$

$$k \wedge p = \sum_{i,j=0}^3 k_i \theta^{ij} p_j \rightarrow k_0 \theta^{01} p_1 + k_1 \theta^{10} p_0 = \theta(k_0 p_1 - k_1 p_0), \quad (6.46)$$

e a parte não planar da função de dois pontos é

$$\begin{aligned} \tau_{np}^{11}(k_1, k_2; \beta)^* &= \frac{g^2}{3} \{ -\mathbf{G}_0^{11}(k_1; \beta) \mathbf{G}_0^{11}(k_2; \beta) \int \frac{dp}{(2\pi^2)} \Lambda(k_1, p) \Lambda(k_2, p) \mathbf{G}_0^{11}(p; \beta) \\ &+ \mathbf{G}_0^{21}(k_1; \beta) \mathbf{G}_0^{21}(k_2; \beta) \int \frac{dp}{(2\pi^2)} \Lambda(k_1, p) \Lambda(k_2, p) \mathbf{G}_0^{22}(p; \beta) \}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Agora escrevemos $\omega_k^2 = k_1^2 + m^2$, $k \wedge p = \theta(k_0 p_1 - k_1 p_0)$ e definimos dois parâmetros adimensionais $\alpha \equiv \beta \omega_k$ e $\gamma \equiv k \wedge p$. Quando a temperatura é muito maior que a massa do campo ($\beta m \ll 1$) nós temos $\alpha \simeq \beta k_1$ e $\gamma \simeq \alpha \frac{\theta}{\beta} (p_1 - p_0)$.

Neste limite

$$\Lambda(\gamma) = e^{-\frac{i}{2}\gamma} \simeq 1 - \frac{i}{2}\gamma, \quad (6.48)$$

$$n(\alpha) = \frac{1}{e^\alpha - 1} \simeq \frac{1}{\alpha}. \quad (6.49)$$

Assim a parte não planar da função de dois pontos é

$$\tau_{np}^{11}(k_1, k_2; \beta)^* = \frac{g^2}{3} \left\{ -A(k_1, k_2) + \frac{1}{\beta} B(k_1, k_2) + \theta C(k_1, k_2) + \frac{\theta}{\beta} D(k_1, k_2) \right\}, \quad (6.50)$$

onde

$$A(k_1, k_2) = G_0(k_1) \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} G_0(p) \right] G_0(k_2), \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} B(k_1, k_2) = & 2\pi i \left\{ \frac{\delta(k_1^2 - m^2)}{\omega_{k_1}} \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} G_0(p) \right] G_0(k_2) \right. \\ & + G_0(k_1) \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} G_0(p) \right] \frac{\delta(k_2^2 - m^2)}{\omega_{k_2}} \\ & \left. + G_0(k_1) \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{\delta(p^2 - m^2)}{\omega_p} \right] G_0(k_2) \right\}, \quad (6.52) \end{aligned}$$

$$C(k_1, k_2) = \frac{i}{2} [\omega_{k_1} + \omega_{k_2}] \left\{ G_0(k_1) \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} (p_1 - p_0) G_0(p) \right] G_0(k_2) \right\}, \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} D(k_1, k_2) = & \pi [\omega_{k_1} + \omega_{k_2}] \left\{ \frac{\delta(k_1^2 - m^2)}{\omega_{k_1}} \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} (p_1 - p_0) G_0(p) \right] G_0(k_2) \right. \\ & + G_0(k_1) \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} (p_1 - p_0) G_0(p) \right] \frac{\delta(k_2^2 - m^2)}{\omega_{k_2}} \\ & \left. + G_0(k_1) \left[\int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{(p_1 - p_0) \delta(p^2 - m^2)}{\omega_p} \right] G_0(k_2) \right\}. \quad (6.54) \end{aligned}$$

A partir do lado direito da Eq.(6.50), identificamos a dependência em θ e β explicitamente: no primeiro termo, $-A(k_1, k_2)$ é independente de θ e β e, adicionalmente, este termo é o valor da função de dois pontos no caso de $T = 0$ e $\theta = 0$; o segundo termo depende somente da temperatura; o terceiro somente do parâmetro de não comutatividade; e o quarto depende da inter-relação da não comutatividade e da temperatura.

Notamos que Eq.(6.50) mostra como é o comportamento destes diagramas não planares com respeito a temperatura e a não comutatividade. *Estes diagramas são responsáveis pela existência de um comportamento não singular no limite $\theta \rightarrow 0$, no caso usual de temperatura zero, $\beta \rightarrow \infty$.* Fica claro a partir desta expansão que mesmo na teoria a temperatura finita não há modificação deste comportamento não-singular no limite $\theta \rightarrow 0$.

Capítulo 7

Ordenamento temporal para DCT não-comutativa a partir de espaços de Fock deformados

Como vimos no capítulo 5, existe muito interesse em teorias de campos sobre um espaço-tempo não-comutativo [70, 71, 72, 69, 2], no qual as coordenadas satisfazem a relação de comutação,

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (7.1)$$

com $\theta^{\mu\nu}$ sendo uma matriz constante e antissimétrica. Pela correspondência de Moyal-Weyl [73, 66, 65], uma teoria de campos em um espaço-tempo não-comutativo satisfazendo a Eq.(7.1) é equivalente a uma teoria de campos sobre um espaço comutativo no qual o produto de duas funções é definido pelo produto de Moyal. Devido ao parâmetro de não-comutatividade a teoria não é invariante por transformações de Poincaré. Propriedades como causalidade e unitariedade são violadas quando existe não-comutatividade do espaço-tempo [74, 75, 76, 77, 78], enquanto permanecem válidas na não comutatividade espaço-espaço ($\theta^{0\mu} = 0$). Existem algumas tentativas de resolver estes problemas [79, 80, 81, 82, 83]. Recentemente, Chaichian *et al.* [84], e Wess [85] propuseram um modelo de construção de teorias quânticas sobre espaços não-comutativos invariante sob a álgebra de Poincaré deformada¹ $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\mathcal{P})$ usando como elemento próprio de deformação $\mathcal{F} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, onde \mathcal{P} é a álgebra de Poincaré e \mathcal{U} é a sua álgebra envelopante universal. Neste contexto, a teoria de campos sobre um espaço-tempo não-comutativo se torna uma teoria de campos sobre um

¹Adotamos deformado como a tradução do inglês do termo *twisted*. Não há um termo consagrado na literatura. Uma tradução alternativa seria: torcido.

espaço-tempo comutativo com o coproduto deformado dos geradores do grupo de Poincaré. Isto justifica o uso do grupo de Poincaré no estudo de teorias quânticas de campos sobre espaço-tempo não-comutativo. Para construir um formalismo de quantização consistente da teoria de campos também é necessário deformar a álgebra dos operadores de campo consistentemente. Existem alguns estudos deste problema [84, 86, 87].

Neste capítulo desenvolvemos uma álgebra deformada para as frequências da expansão de Fourier do campos e, conseqüentemente, para os operadores de criação e destruição $\{a, a^\dagger\}$ como base para construir uma teoria quântica de campos em DCT, invariante sob simetria deformada de Lorentz. Como extensão do capítulo anterior nos restringimos a tratar o caso de campos escalares com interações polinomiais $\frac{g^n}{n!}\phi^n$. Estendemos estes resultados à álgebra dos operadores de criação e destruição do espaço de Hilbert duplicado e termalizado.

A DCT consiste de dois passos principais. O primeiro é a duplicação do espaço de Hilbert em cada ponto do espaço-tempo, isto é, a duplicação do número de graus de liberdade usados para descrever o sistema. Um conjunto dos graus de liberdade é relativo à cinemática do sistema, enquanto o outro conjunto é responsável pelas simetrias do sistema. O segundo passo é a transformação de Bogoliubov, que mistura os dois conjuntos, de maneira a construir estados mistos, e portanto térmicos. A duplicação seguida pela transformação de Bogoliubov pode ser rigorosamente descrita pelo uso de estruturas da álgebra de Hopf [88].

Em sistemas de muitas partículas, do ponto de vista quântico, uma propriedade crucial é a estatística das partículas. Isto é formalmente colocado na forma como os estados se comportam sob a troca da ordem das partículas. Esta propriedade tem uma relação com o spin de partículas idênticas que formam o sistema. Esta propriedade surge naturalmente da representação do grupo de Poincaré do sistema. Para espaço-tempo com dimensão acima de três, há somente duas classes possíveis para o spin, inteiro e semi-inteiro, levando a duas classes de estatísticas, bósons e férmions, respectivamente.

Se agora a teoria de campo for construída sobre um espaço-tempo não-comutativo como na Eq.(7.1) então podemos fazê-lo de forma invariante sob o grupo de Poincaré, mas a estatística das partículas é modificada. Estas teorias são denominadas teorias de campos com grupo deformado de Poincaré. O formalismo destas teorias inclui uma deformação da ação do grupo de Poincaré nos tensores de estado (estados de muitas partículas), de forma a preservar a invariância da teoria sob a ação do grupo de Poincaré.

No que segue iremos mostrar como formalizar a descrição de um sistema de muitas

partículas com a álgebra deformada de Poincaré à temperatura finita. Para isto vamos considerar o formalismo de DCT descrito nos capítulos anteriores. Especificamente, iremos mostrar que o teorema de Wick pode ser formalizado nesta descrição.

7.1 Álgebra de Hopf deformada dos geradores de Poincaré

Seja $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ uma álgebra universal envelopante da álgebra de Poincaré \mathcal{P} e $Y(= P_\rho, M_{\mu\nu})$ seus elementos. Eles satisfazem as propriedades da álgebra de Hopf

$$\Delta Y = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y, \quad (7.2)$$

$$\epsilon(Y) = 0, S(Y) = -Y, \quad (7.3)$$

onde Δ é o co-produto, ϵ a co-unidade e S a antípoda. Seja uma \mathcal{A} uma álgebra do espaço de funções, com produto \cdot e $\phi, \psi \in \mathcal{A}$. A ação de Y em \mathcal{A} satisfaz a relação

$$Y \triangleright (\phi \cdot \psi) = \sum (Y_{(1)} \triangleright \phi) \cdot (Y_{(2)} \triangleright \psi), \quad (7.4)$$

onde usamos a notação de Sweedler $\Delta Y = \sum Y_{(1)} \otimes Y_{(2)}$ e Δ denota a ação dos geradores do grupo de Poincaré na álgebra \mathcal{A} do espaço de funções complexas.

A representação da ação dos geradores do grupo de Poincaré no espaço de funções é

$$P_\rho \triangleright \phi(x) = -i\partial_\rho \phi(x), \quad (7.5)$$

$$M_{\mu\nu} \triangleright \phi(x) = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi(x) \quad (7.6)$$

Se definirmos um elemento deformador $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{P})$, podemos gerar outra álgebra de Hopf $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\mathcal{P})$, usando \mathcal{F} para deformar $\mathcal{U}(\mathcal{P})$. O elemento deformador \mathcal{F} satisfaz

$$(\mathcal{F} \otimes 1) \cdot (\Delta \otimes id)\mathcal{F} = (1 \otimes \mathcal{F}) \cdot (id \otimes \Delta)\mathcal{F}, \quad (7.7)$$

$$(\epsilon \otimes id)\mathcal{F} = 1 = (id \otimes \epsilon)\mathcal{F}. \quad (7.8)$$

Como a álgebra de Poincaré \mathcal{P} possui uma sub-álgebra comutativa $\{P_\rho\}$, podemos construir um elemento deformador \mathcal{F} a partir dos elementos P_ρ da álgebra de Poincaré

$$\mathcal{F} = \exp \left(\frac{i}{2} \theta^{\alpha\beta} P_\alpha \otimes P_\beta \right). \quad (7.9)$$

A nova álgebra de Hopf gerada a partir deste elemento deformador \mathcal{F} é a mesma da álgebra de Hopf original, no entanto a estrutura da co-álgebra correspondente é diferente da co-álgebra original. Isto significa que as relações de comutação da álgebra de Lie têm a mesma forma e que a representação dos geradores do grupo de Poincaré não é alterada.

O novo co-produto $\Delta_{\mathcal{F}}$ tem a forma

$$\Delta_{\mathcal{F}}Y = \mathcal{F} \cdot \Delta Y \cdot \mathcal{F}^{-1}, \quad (7.10)$$

$$\epsilon_{\mathcal{F}}(Y) = \epsilon(Y), S_{\mathcal{F}}(Y) = S(Y). \quad (7.11)$$

Com o co-produto alterado, a ação de Y , Eq.(7.4), não se transforma covariantemente. Para que a ação de Y na álgebra \mathcal{A} continue a ser covariante, devemos deformar a álgebra alvo \mathcal{A} em $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ apropriadamente. Isto pode ser feito através da substituição do produto \cdot pelo produto

$$\phi * \psi = \cdot[\mathcal{F}^{-1} \triangleright (\phi \otimes \psi)]. \quad (7.12)$$

Quando $\phi, \psi \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ são funções das coordenadas do mesmo espaço-tempo, o produto $*$ se torna o produto \star de Moyal visto nos capítulos anteriores. Como nesta representação $P_{\alpha} \rightarrow -i\partial_{\alpha}$, a relação de comutação entre as coordenadas do espaço-tempo é deduzida através do produto $*$

$$x^{\mu} * x^{\nu} = \cdot[e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\otimes\partial_{\beta}} \triangleright (x^{\mu} \otimes x^{\nu})] \quad (7.13)$$

$$= x^{\mu} \cdot x^{\nu} + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}, \quad (7.14)$$

que leva à seguinte relação de comutação

$$[x^{\mu}, x^{\nu}]_{*} = i\theta^{\mu\nu}. \quad (7.15)$$

O desenvolvimento acima implica que, com um elemento deformador \mathcal{F} satisfazendo a condição 7.8, podemos construir um novo par de álgebras $\{\mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\mathcal{P}), \mathcal{A}_{\mathcal{F}}\}$ a partir do par original $\{\mathcal{U}(\mathcal{P}), \mathcal{A}\}$. Portanto podemos pensar em uma teoria de campos pertencendo a uma classe $\{\mathcal{U}(\mathcal{P}), \mathcal{A}\}$ em um espaço-tempo não-comutativo como uma teoria de campos pertencendo à classe $\{\mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\mathcal{P}), \mathcal{A}_{\mathcal{F}}\}$ em um espaço-tempo comutativo. Esta última possui muitas vantagens. Um fato importante é que estas teorias possuem uma álgebra de Poincaré deformada. Portanto operadores como P^2 e W^2 ($W_{\alpha} = \frac{-1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\beta\gamma}P^{\delta}$) continuam a ser operadores de Casimir nesta álgebra deformada. Então, neste formalismo, as simetrias

da teoria são mais transparentes, e podemos usar a representação irredutível do grupo de Poincaré para estudar teorias de campos não-comutativas.

7.2 Matriz S para a DCT com álgebra deformada de Poincaré

Nesta seção iremos obter a expressão para a matriz S térmica usando o formalismo de DCT para campos escalares interagentes.

7.2.1 DCT com álgebra deformada de Poincaré

Para construir uma teoria de campos térmicos não-comutativa podemos usar os formalismos de DCT e de grupos deformados apresentados anteriormente. Primeiro deformando o espaço de Hilbert duplicado $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ e, em seguida, aplicando a transformação de Bogoliubov B_β .

Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert dos campos escalares ϕ . Então, o espaço de Hilbert duplicado é $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$. Os campos podem ser escritos como

$$\phi(x) = \int d\mu(p)(c(p)e^{ipx} + c(p)^\dagger e^{-ipx}), \quad (7.16)$$

$$\tilde{\phi}(x) = \int d\mu(p)(\tilde{c}(p)e^{-ipx} + \tilde{c}(p)^\dagger e^{ipx}), \quad (7.17)$$

onde $d\mu = \frac{d^3p}{(2\pi)^4 2\omega_p}$.

O gerador da translação temporal é o hamiltoniano duplicado $\hat{H} = H - \tilde{H}$

$$\hat{H} = \int d\mu(p)\omega(p)(c(p)c(p)^\dagger - \tilde{c}(p)\tilde{c}(p)^\dagger) \quad (7.18)$$

e o operador *momentum* total é

$$\hat{P}_\nu = P_\nu - \tilde{P}_\nu = \int d\mu(p)p_\nu(c(p)^\dagger c(p) - \tilde{c}(p)^\dagger \tilde{c}(p)), \quad (7.19)$$

com

$$\left[\hat{P}_\nu, c(p) \right] = -p_\nu c(p), \quad \left[\hat{P}_\nu, c(p)^\dagger \right] = p_\nu c(p)^\dagger \quad (7.20)$$

$$\left[\hat{P}_\nu, \tilde{c}(p) \right] = -p_\nu \tilde{c}(p), \quad \left[\hat{P}_\nu, \tilde{c}(p)^\dagger \right] = p_\nu \tilde{c}(p)^\dagger. \quad (7.21)$$

Usando \hat{P} para construir um coproduto que atua em $\hat{\mathcal{H}}$ podemos encontrar uma forma simples para a qual a teoria é invariante de Poincaré. Neste caso os operadores de criação e destruição são deformados em

$$a(p) = c(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}, \quad (7.22)$$

$$a(p)^\dagger = e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} c(p)^\dagger, \quad (7.23)$$

$$\tilde{a}(p) = \tilde{c}(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}, \quad (7.24)$$

$$\tilde{a}(p)^\dagger = e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \tilde{c}(p)^\dagger, \quad (7.25)$$

onde usamos $(\hat{P}_\nu)^\sim = -\hat{P}_\nu$. Nesta teoria duplicada deformada o operador *momentum* é

$$\hat{P}_\nu = \int d\mu(p) p_\nu (a(p)^\dagger a(p) - \tilde{a}(p)^\dagger \tilde{a}(p)) \quad (7.26)$$

$$= \int d\mu(p) p_\nu (c(p)^\dagger c(p) - \tilde{c}(p)^\dagger \tilde{c}(p)). \quad (7.27)$$

Transformação de Bogoliubov

Agora iremos termalizar os campos aplicando a transformação de Bogoliubov

$$U(\beta) = e^{-iG_\beta} \quad (7.28)$$

onde

$$G_\beta = i \int d\mu(p) \theta_p(\beta)(p) (a(p)^\dagger \tilde{a}(p)^\dagger - a(p) \tilde{a}(p)). \quad (7.29)$$

Os campos térmicos são

$$\phi_\beta(x) = \int d\mu(p) (a_\beta(p) e^{ipx} + a_\beta(p)^\dagger e^{-ipx}), \quad (7.30)$$

$$\tilde{\phi}_\beta(x) = \int d\mu(p) (\tilde{a}_\beta(p) e^{-ipx} + \tilde{a}_\beta(p)^\dagger e^{ipx}), \quad (7.31)$$

onde os operadores deformados de criação e destruição são

$$a_\beta(p) = U_\beta a(p) U_\beta^{-1}. \quad (7.32)$$

As transformações inversas podem ser escritas

$$a(p) = U_\beta^{-1} a_\beta(p) U_\beta. \quad (7.33)$$

A expressão explícita para (7.32) em termos dos operadores não deformados é

$$a_\beta(p) = U_\beta c(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} U_\beta^{-1}. \quad (7.34)$$

Será útil para os cálculos escrever esta expressão como

$$a_\beta(p) = c_\beta(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}. \quad (7.35)$$

Note que o comutador

$$\left[\hat{P}_\mu, ((a(p)^\dagger \tilde{a}(p)^\dagger - a(p) \tilde{a}(p))) \right] = \left[P_\mu, ((a(p)^\dagger \tilde{a}(p)^\dagger - a(p) \tilde{a}(p))) \right] \quad (7.36)$$

$$- \left[\tilde{P}_\mu, ((a(p)^\dagger \tilde{a}(p)^\dagger - a(p) \tilde{a}(p))) \right] \quad (7.37)$$

$$= \left[P_\mu, a(p)^\dagger \right] \tilde{a}(p)^\dagger - \left[P_\mu, a(p) \right] \tilde{a}(p) \quad (7.38)$$

$$- a(p)^\dagger \left[\tilde{P}_\mu, \tilde{a}(p)^\dagger \right] + a(p) \left[\tilde{P}_\mu, \tilde{a}(p) \right] \quad (7.39)$$

$$= 0 \quad (7.40)$$

Então

$$\left[\hat{P}, G_\beta \right] = 0. \quad (7.41)$$

Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$Z(X, Y) = \ln(e^X e^Y) \quad (7.42)$$

$$= X + Y + [X, Y] + \frac{1}{12} [X, [X, Y]] + \dots, \quad (7.43)$$

onde X e Y são operadores. Se $[X, Y]=0$ podemos escrever

$$e^X e^Y = e^Y e^X, \quad (7.44)$$

com este resultado podemos escrever a expressão para $a_\beta(p)$ como

$$a_\beta(p) = U_\beta c(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} U_\beta^{-1} \quad (7.45)$$

$$= U_\beta c(p) U_\beta^{-1} e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \quad (7.46)$$

$$= c_\beta(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}, \quad (7.47)$$

e os outros operadores deformados são

$$a_\beta(p)^\dagger = e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} c_\beta(p) \quad (7.48)$$

$$\tilde{a}_\beta(p) = \tilde{c}_\beta(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \quad (7.49)$$

$$\tilde{a}_\beta(p)^\dagger = e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \tilde{c}_\beta(p), \quad (7.50)$$

7.2.2 Matriz S

Na última seção nós construímos o espaço de Hilbert deformado para uma teoria de campos escalares térmicos, os campos são (7.31). Pelo formalismo de DCT existem duas formas equivalentes de escrever os propagadores para os campos livres

$$\langle 0(\beta) | T \phi(x) \phi(y) | 0(\beta) \rangle = \langle 0, 0 | T \phi_\beta(x) \phi_\beta(y) | 0, 0 \rangle. \quad (7.51)$$

Aqui usaremos a primeira. As motivações para esta escolha ficarão claras na próxima seção quando realizarmos a teoria de perturbação.

O propagador para a teoria livre é

$$\Delta_0^*(x - y; \beta) = \langle 0(\beta) | T \phi(x) * \phi(y) | 0(\beta) \rangle, \quad (7.52)$$

onde $*$ denota a ação do coproduto deformado Δ_θ sobre o produto dos campos $(\phi(x) \otimes \phi(y))$.

Para campos interagentes, com interação polinomial da forma

$$\hat{H}_I = H_I - \tilde{H}_I \quad (7.53)$$

$$= \lambda \int d^d x (: \phi^{*n}(x) : - : \tilde{\phi}^{*n}(x) :), \quad (7.54)$$

onde $::$ denota o ordenamento normal dos operadores de criação e destruição sobre o espaço de Hilbert duplicado².

²O ordenamento normal dos operadores térmicos é diferente devido à mistura dos operadores duplicados,

A matriz S é

$$\hat{S}_\theta = Texp\left(-i \int dx^0 \hat{H}_I x^0\right) \quad (7.55)$$

$$= Texp\left(-i \int dx^{d+1} (: \phi^{*n}(x) : - : \tilde{\phi}^{*n}(x) :)\right). \quad (7.56)$$

Antes de trabalhar a expressão para \hat{S}_θ iremos mostrar que esta expressão não depende de θ . Isto pode ser feito escrevendo os campos na formam

$$\phi_\beta(x) = \phi_{\beta 0} e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}, \quad (7.57)$$

onde $\phi_{\beta 0}$ é o campo térmico não deformado, construído com os operadores não deformados $c_\beta(p)$ and $c(p)^\dagger$. Vamos calcular a ação do coproduto Δ_θ sobre o produto de ondas planas da expansão de Fourier dos campos. Seja $e_p = e^{ipx}$ a onda plana de frequências positivas, a ação de Δ_θ sobre o produto de duas ondas planas é

$$e_p * e_q = e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} q_\nu} e_{p+q}. \quad (7.58)$$

Por simplicidade iremos escrever $a(p)^\dagger = a(-p)$. Portanto o campo é

$$\phi_\beta(x) = \int d\mu(p) (a_\beta(p) e_p + a_\beta(-p) e_{-p}). \quad (7.59)$$

Então, para $n = 2$ em \hat{H} o primeiro termo da expansão de \hat{S}_θ é

$$\hat{S}_\theta^{(1)} = -\lambda \int dx^{d+1} (: \phi * \phi : - : \tilde{\phi} * \tilde{\phi} :). \quad (7.60)$$

Portanto temos temos do tipo

$$a_\beta(p) a_\beta(q) e_p * e_q = a_\beta(p) a_\beta(q) e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} q_\nu} e_{p+q}. \quad (7.61)$$

Com a expressão de $a_\beta(p)$ em termos dos operadores não deformados

$$a_\beta(p) a_\beta(q) e_p * e_q = c_\beta(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} c_\beta(q) e^{\frac{i}{2} q_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} q_\nu} e_{p+q} \quad (7.62)$$

$$= c_\beta(p) c_\beta(q) e_{p+q} e^{\frac{i}{2} (p+q)_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}. \quad (7.63)$$

realizada pela transformação de Bogoliubov.

Note que podemos escrever

$$\partial_\mu e_{p+q} = i(p+q)_\mu e_{p+q} \quad (7.64)$$

portanto,

$$e_{p+q} e^{\frac{i}{2}(p+q)_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} = e_{p+q} \left(1 + \frac{i}{2}(p+q)_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu + \dots \right) \quad (7.65)$$

$$= e_{p+q} \left(1 + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu + \dots \right) \quad (7.66)$$

$$= e_{p+q} e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}, \quad (7.67)$$

e

$$a_\beta(p) a_\beta(q) e_p * e_q = c_\beta(p) c_\beta(q) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}. \quad (7.68)$$

Então o termos de ordem λ da matriz S é

$$\hat{S}_\theta^{(1)} = -i\lambda \int d^{d+1}x (: \phi * \phi : - : \tilde{\phi} * \tilde{\phi} :) \quad (7.69)$$

$$= -i\lambda \int d^{d+1}x (: \phi^2 : - : \tilde{\phi}^2 :) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}. \quad (7.70)$$

Aqui nos restringimos a interações que não envolvem forças de longo alcance. Neste caso podemos expandir a exponencial no integrando e descartar os termos de superfície. Finalmente obtemos

$$\hat{S}_\theta^{(1)} = \hat{S}_0^{(1)}. \quad (7.71)$$

Façamos o mesmo procedimento para ordem λ^2

$$\hat{S}_\theta^{(2)} = \frac{(-i\lambda^2)}{2!} \int d^{d+1}x_1 d^{d+1}x_2 \{ \quad + \theta(x_1^0 - x_2^0) (: (\phi * \phi)(x_1) : * : (\phi * \phi)(x_2) :) \quad (7.72)$$

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) (: (\phi * \phi)(x_2) : * : (\phi * \phi)(x_1) :) \quad (7.73)$$

$$- \theta(x_1^0 - x_2^0) (: (\tilde{\phi} * \tilde{\phi})(x_1) : * : (\tilde{\phi} * \tilde{\phi})(x_2) :) \quad (7.74)$$

$$- \theta(x_2^0 - x_1^0) (: (\tilde{\phi} * \tilde{\phi})(x_2) : * : (\tilde{\phi} * \tilde{\phi})(x_1) :) \} \quad (7.75)$$

temos termos do tipo

$$\theta(x_1^0 - x_2^0) : a_\beta(p_1) a_\beta(q_1) :: a_\beta(p_2) a_\beta(q_2) : (e_{p_1} * e_{q_1})(x_1) * (e_{p_2} * e_{q_2})(x_2). \quad (7.76)$$

Com o resultado (7.63), (7.76) fica

$$= \theta(x_1^0 - x_2^0) : c_\beta(p_1)c_\beta(q_1) :: c_\beta(p_2)c_\beta(q_2) : e^{-\frac{i}{2}(p_1+q_1)\mu\theta^{\mu\nu}(p_2+q_2\nu)} \quad (7.77)$$

$$\times \left[e_{p_1+q_1}(x_1)e_{p_2+q_2}(x_2)e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{1\mu}} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{2\mu}}\right)\theta^{\mu\nu}\hat{P}_\nu} \right]. \quad (7.78)$$

Pela conservação do *momentum*, podemos escrever

$$e^{-\frac{i}{2}(p_1+q_1)\mu\theta^{\mu\nu}(p_2+q_2\nu)} = 1, \quad (7.79)$$

e, notando que

$$\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{1\mu}} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{2\mu}}\right)\theta(x_1^0 - x_2^0) = 0 \quad (7.80)$$

podemos escrever a exponencial $e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{1\mu}} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_{2\mu}}\right)\theta^{\mu\nu}\hat{P}_\nu}$ atuando em $\theta(x_1^0 - x_2^0)$. Desta forma, todos os termos envolvendo o parâmetro não-comutativo $\theta^{\mu\nu}$, quando expandimos a exponencial, no integrando de (7.78) são diferenciais totais e desaparecem quando a integral é resolvida. Portanto temos, para segunda ordem em λ ,

$$\hat{S}_\theta^{(2)} = \hat{S}_0^{(2)}. \quad (7.81)$$

Isto pode ser verificado para todas as ordens de λ . Portanto, para $n = 2$ temos

$$\hat{S}_\theta = \hat{S}_0. \quad (7.82)$$

7.3 Teorema de Wick

Na última seção provamos que a matriz \hat{S}_θ é a mesma do caso comutativo. A expressão de \hat{S}_θ envolve o ordenamento normal dos operadores de criação e destruição. Portanto não é simples visualizar como ordenar esta expressão. Para obter o teorema de Wick temos que calcular expressões do tipo

$$\langle 0|T\phi_{\beta A_1} * \phi_{\beta A_2} * \cdots * \phi_{\beta A_n}|0\rangle. \quad (7.83)$$

Equivalentemente podemos escrever

$$\langle 0(\beta)|T\phi_{A_1} * \phi_{A_2} * \cdots * \phi_{A_n}|0(\beta)\rangle. \quad (7.84)$$

onde $\phi_A(x) = (\phi(x), \tilde{\phi}(x)^\dagger)$. A representação de Fourier é

$$\phi(x)_A = \int d\mu(p)(a(p)_A e_p + a(p)_A^\dagger e_{-p}) \quad (7.85)$$

$$= \phi^+(x)_A + \phi^-(x)_A, \quad (7.86)$$

e

$$\phi^+(x)_1 = \int d\mu(p) a(p) e_p, \quad \phi^-(x)_2 = \int d\mu(p) \tilde{a}(p) e_{-p} \quad (7.87)$$

$$\phi^-(x)_1 = \int d\mu(p) a^\dagger(p) e_{-p}, \quad \phi^+(x)_2 = \int d\mu(p) \tilde{a}(p)^\dagger e_p. \quad (7.88)$$

Agora devemos escrever os operadores deformados em termos dos operadores térmicos, afim de realizar o valor médio com respeito ao vácuo térmico. Podemos fazer isto aplicando a transformação de Bogoliubov

$$a(p)_A = (U_\beta^{-1})_{AB} a_\beta(p)_B, \quad (7.89)$$

onde

$$a(p)_A = \begin{pmatrix} a(p) \\ \tilde{a}(p)^\dagger \end{pmatrix} \quad a_{\beta B}(p) = \begin{pmatrix} a_\beta(p) \\ \tilde{a}_\beta(p)^\dagger \end{pmatrix} \quad (7.90)$$

Por exemplo

$$\phi(x) = \phi_1(x) \quad (7.91)$$

$$= \int d\mu(p) [(U_\beta^{-1})_{AB} a_{\beta B}(p) e_p + (U_\beta^{-1})_{AB} a_{\beta B}(p)^\dagger e_{-p}] \quad (7.92)$$

$$= [(U_\beta^{-1})_{11} a_{\beta 1}(p) e_p + (U_\beta^{-1})_{12} a_{\beta 2}(p) e_p] \quad (7.93)$$

$$+ [(U_\beta^{-1})_{11} a_{\beta 1}^\dagger(p) e_{-p} + (U_\beta^{-1})_{12} a_{\beta 2}^\dagger(p) e_{-p}] \quad (7.94)$$

$$= [u a_{\beta 1}(p) e_p + v a_{\beta 2}(p) e_p] \quad (7.95)$$

$$+ [u a_{\beta 1}^\dagger(p) e_{-p} + v a_{\beta 2}^\dagger(p) e_{-p}] \quad (7.96)$$

$$= [u a_{\beta 1}(p) e_p + v a_{\beta 2}^\dagger(p) e_{-p}] \quad (7.97)$$

$$+ [v a_{\beta 2}(p) e_p + u a_{\beta 1}^\dagger(p) e_{-p}], \quad (7.98)$$

onde

$$a_\beta(p)_1 = a_\beta(p), \quad a_\beta(p)_2^\dagger = \tilde{a}_\beta(p), \quad (7.99)$$

$$a_\beta(p)_2 = \tilde{a}_\beta(p)^\dagger, \quad a_\beta(p)_1^\dagger = a_\beta(p)^\dagger. \quad (7.100)$$

Então podemos escrever $\phi(x)_A$, a representação do campo duplicado em termos dos operadores térmicos como

$$\phi(x)_A = \phi_\beta^+(x)_A + \phi_\beta^-(x)_A. \quad (7.101)$$

Agora os sobrescritos $+$ e $-$ denotam os operadores de destruição e criação, respectivamente. Para $A = 1$

$$\phi_\beta^+(x)_1 = \int d\mu(p)(ue_p a_\beta(p) + ve_{-p} \tilde{a}_\beta(p)), \quad (7.102)$$

e

$$\phi_\beta^-(x)_1 = \int d\mu(p)(ue_{-p} a_\beta(p)^\dagger + ve_p \tilde{a}_\beta(p)^\dagger). \quad (7.103)$$

Os campos ϕ^+ and ϕ^- descrevem as partes de destruição e criação, respectivamente, de $\phi_\beta(x)$. Em notação compacta

$$\phi(x)_A = \phi_\beta^+(x)_A + \phi_\beta^-(x)_A \quad (7.104)$$

$$= \int d\mu(p) Q_\beta(x, p)_{AB} a_\beta(p)_B \quad (7.105)$$

$$+ \int d\mu(p) \bar{Q}_\beta(x, p)_{AB} a_\beta(p)_B^\dagger, \quad (7.106)$$

onde $a_\beta(p)_A = (a_\beta(p), \tilde{a}_\beta(p))$ e

$$Q_\beta(x, p)_{AB} = \begin{pmatrix} ue_p & ve_{-p} \\ ve_p & ue_{-p} \end{pmatrix}, \quad (7.107)$$

e a linha sobre Q denota a conjugação complexa. Nós podemos escrever

$$a_\beta(p)_A = \begin{pmatrix} c_\beta(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \\ \tilde{c}_\beta(p) e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\beta(p) \\ \tilde{c}_\beta(p) \end{pmatrix} e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \quad (7.108)$$

e

$$a_\beta(p)_A^\dagger = \begin{pmatrix} c_\beta(p)^\dagger \\ \tilde{c}_\beta(p)^\dagger \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} \quad (7.109)$$

então

$$a_\beta(p)_A = c_\beta(p)_A e^{\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}, \quad (7.110)$$

$$a_\beta(p)_A^\dagger = c_\beta(p)_A^\dagger e^{-\frac{i}{2} p_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}. \quad (7.111)$$

Agora estamos aptos a calcular os produtos $\phi_\beta^\pm(x) * \phi_\beta^\pm(y)$ em

$$\phi_\beta(x) * \phi_\beta(y) = \int d\mu(p) d\mu(q) \{ Q_\beta(x, p)_{AA'} a_\beta(p)_{A'} Q_\beta(y, q)_{BB'} a_\beta(q)_{B'} \quad (7.112)$$

$$+ Q_\beta(x, p)_{AA'} a_\beta(p)_{A'} \bar{Q}_\beta(y, q)_{BB'} a_\beta(q)_{B'}^\dagger \quad (7.113)$$

$$+ \bar{Q}_\beta(x, p)_{AA'} a_\beta(p)_{A'}^\dagger Q_\beta(y, q)_{BB'} a_\beta(q)_{B'} \quad (7.114)$$

$$+ \bar{Q}_\beta(x, p)_{AA'} a_\beta(p)_{A'}^\dagger \bar{Q}_\beta(y, q)_{BB'} a_\beta(q)_{B'}^\dagger \}. \quad (7.115)$$

O primeiro termo envolve

$$\phi_\beta^+(x) * \phi_\beta^+(y) = a_\beta(p)_1 a_\beta(q)_1 Q_\beta(x, p)_{11} * Q_\beta(y, q)_{11} \quad (7.116)$$

$$+ a_\beta(p)_1 a_\beta(q)_2 Q_\beta(x, p)_{11} * Q_\beta(y, q)_{12} \quad (7.117)$$

$$+ a_\beta(p)_2 a_\beta(q)_1 Q_\beta(x, p)_{12} * Q_\beta(y, q)_{11} \quad (7.118)$$

$$+ a_\beta(p)_2 a_\beta(q)_2 Q_\beta(x, p)_{22} * Q_\beta(y, q)_{22}, \quad (7.119)$$

cada um podendo ser escrito como

$$a_\beta(p)_i a_\beta(q)_j Q_\beta(x, p)_{ii'} * Q_\beta(y, q)_{jj'}. \quad (7.120)$$

Note que

$$Q_\beta(x, p)_{ij} = U_{ij}^{-1} E(x, p)_{ij} \quad (7.121)$$

com

$$E(x, p)_{ij} = \begin{pmatrix} e_p & e_{-p} \\ e_p & e_{-p} \end{pmatrix}. \quad (7.122)$$

Então os produtos dos elementos das matrizes Q são

$$Q_\beta(x, p)_{ij} * Q_\beta(y, q)_{kl} = U_{ij}^{-1} E(x, p)_{ij} * U_{kl}^{-1} E(y, q)_{kl} \quad (7.123)$$

$$= U_{ij}^{-1} U_{kl}^{-1} E(x, p)_{ij} * E(y, q)_{kl} \quad (7.124)$$

$$= U_{ij}^{-1} U_{kl}^{-1} E(x, p)_{ij} E(y, q)_{kl} e^{\frac{i}{2} \bar{p}_\mu \theta^{\mu\nu} \bar{q}_\nu} \quad (7.125)$$

$$= Q_\beta(x, p)_{ij} Q_\beta(y, q)_{kl} e^{\frac{i}{2} \bar{p}_\mu \theta^{\mu\nu} \bar{q}_\nu}, \quad (7.126)$$

com

$$\bar{p}_\mu = \begin{cases} +p_\mu & \text{if } j = 1; \\ -p_\mu & \text{if } j = 2. \end{cases} \quad (7.127)$$

Usando (7.63) e (7.111) obtemos

$$\phi_\beta^\pm(x) * \phi_\beta^\pm(y) = \phi_\beta^\pm(x) \phi_\beta^\pm(y) e^{\frac{i}{2} (\bar{p} + \bar{q})_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}. \quad (7.128)$$

Com o produto deformado (7.128) podemos escrever o ordenamento temporal em termos do ordenamento normal

$$T\phi(x_1)_A * \phi(x_2)_B = \theta(x_1^0 - x_2^0) \phi(x_1)_A * \phi(x_2)_B \quad (7.129)$$

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) \phi(x_2)_B * \phi(x_1)_A \quad (7.130)$$

$$= \theta(x_1^0 - x_2^0) (\phi_\beta^+(x_1) + \phi_\beta^-(x_1)_A) * (\phi_\beta^+(x_2) + \phi_\beta^-(x_2)_B) \quad (7.131)$$

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) (\phi_\beta^+(x_2) + \phi_\beta^-(x_2)_B) * (\phi_\beta^+(x_1) + \phi_\beta^-(x_1)_A) \quad (7.132)$$

O primeiro termo do lado direito é

$$(\phi_\beta^+(x_1)_A + \phi_\beta^-(x_1)_A) * (\phi_\beta^+(x_2)_B + \phi_\beta^-(x_2)_B) = \underline{\phi_\beta^+(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B} \quad (7.133)$$

$$+ \phi_\beta^+(x_1)_A * \phi_\beta^-(x_2)_B \quad (7.134)$$

$$+ \underline{\phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B} \quad (7.135)$$

$$+ \underline{\phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^-(x_2)_B}, \quad (7.136)$$

onde os termos sublinhados estão normalmente ordenados com respeito aos operadores térmicos. Usando o comutador com o produto deformado $[\phi_\beta^+(x_1)_A, \phi_\beta^-(x_2)_B]^*$ podemos

reescrever

$$(\phi_\beta^+(x_1)_A + \phi_\beta^-(x_1)_A) * (\phi_\beta^+(x_2) + \phi_\beta^-(x_2)_B) = \frac{\phi_\beta^+(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B}{+ \phi_\beta^-(x_2)_B * \phi_\beta^+(x_1)_A} \quad (7.137)$$

$$+ \frac{\phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B}{+ \phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B} \quad (7.138)$$

$$+ \frac{\phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B}{+ \phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B} \quad (7.139)$$

$$+ \frac{\phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B}{+ \phi_\beta^-(x_1)_A * \phi_\beta^+(x_2)_B} \quad (7.140)$$

$$+ [\phi_\beta^+(x_1)_A, \phi_\beta^-(x_2)_B]^* \quad (7.141)$$

Vamos denotar o ordenamento normal relativamente aos operadores térmicos como

$$N_\theta a_\beta(p) a_\beta(q)^\dagger = a_\beta(q)^\dagger a_\beta(p) \quad (7.142)$$

$$N_\theta a_\beta(p)^\dagger a_\beta(q) = a_\beta(p)^\dagger a_\beta(q) \quad (7.143)$$

$$N_\theta a_\beta(p_1) \tilde{a}_\beta(q_1)^\dagger \tilde{a}_\beta(p_2) a_\beta(q_2)^\dagger = \tilde{a}_\beta(q_1)^\dagger a_\beta(q_2)^\dagger \tilde{a}_\beta(p_2) a_\beta(p_1) \quad (7.144)$$

$$\vdots \quad (7.145)$$

Então nós obtemos

$$T\phi(x_1)_A * \phi(x_2)_B = N_\theta \phi(x_1)_A * \phi(x_2)_B \quad (7.146)$$

$$+ \theta(x_1^0 - x_2^0) [\phi_\beta^+(x_1)_A, \phi_\beta^-(x_2)_B]^* \quad (7.147)$$

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) [\phi_\beta^+(x_2)_B, \phi_\beta^-(x_1)_A]^* . \quad (7.148)$$

Definindo a contração dos campos como

$$\overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} = +\theta(x_1^0 - x_2^0) [\phi_\beta^+(x_1)_A, \phi_\beta^-(x_2)_B]^* \quad (7.149)$$

$$+ \theta(x_2^0 - x_1^0) [\phi_\beta^+(x_2)_B, \phi_\beta^-(x_1)_A]^* . \quad (7.150)$$

Obtemos

$$T\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B = N_\theta \phi(x_1)_A \phi(x_2)_B + \overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} . \quad (7.151)$$

Portanto

$$\langle 0; \beta | T\phi(x_1)_A * \phi(x_2)_B | 0; \beta \rangle = \langle 0; \beta | N_\theta \phi(x_1)_A * \phi(x_2)_B | 0; \beta \rangle \quad (7.152)$$

$$+ \langle 0; \beta | \overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} | 0; \beta \rangle \quad (7.153)$$

A última expressão é o nosso guia para definir o propagador da teoria. O propagador de Feynman para a DCT deformada é

$$\Delta_0^*(x_1 - x_2; \beta)_{AB} = \langle 0; \beta | \overline{\phi(x_1)_A * \phi(x_2)_B} | 0; \beta \rangle \quad (7.154)$$

$$= \langle 0; \beta | \overline{\phi(x_1)_A \phi(x_2)_B} e^{\frac{i}{2}(\bar{p} + \bar{q})_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu} | 0; \beta \rangle \quad (7.155)$$

$$\Delta_0(x_1 - x_2; \beta)_{AB} \quad (7.156)$$

onde expandimos a exponencial e usamos o fato de que $\hat{P}_\mu |0; \beta\rangle = 0$.

Para qualquer número de campos estamos interessados em produtos do tipo

$$\phi(x_1)_{A_1} * \phi(x_2)_{A_2} * \cdots * \phi(x_n)_{A_n} = \quad (7.157)$$

$$= (\phi_\beta^+(x_1)_{A_1} + \phi_\beta^-(x_1)_{A_1}) * \cdots \quad (7.158)$$

$$\cdots * (\phi_\beta^+(x_n)_{A_n} + \phi_\beta^-(x_n)_{A_n}). \quad (7.159)$$

Nós temos 2^n produtos da forma

$$\phi_\beta^\pm(x_1)_{A_1} * \cdots * \phi_\beta^\pm(x_n)_{A_n}. \quad (7.160)$$

Com cada um dos campos escritos em termos dos operadores não deformados, temos para (7.160)

$$\phi_\beta^\pm(x_1)_{A_1} \cdots \phi_\beta^\pm(x_n)_{A_n} e^{\frac{i}{2} \sum_{j=1}^n (p_j)_\mu \theta^{\mu\nu} \hat{P}_\nu}. \quad (7.161)$$

Novamente, isto implica, juntamente com $\hat{P}_\mu |0; \beta\rangle = 0$, que

$$\langle 0; \beta | T \phi(x_1)_{A_1} * \cdots * \phi(x_n)_{A_n} | 0; \beta \rangle = \langle 0; \beta | T \phi(x_1)_{A_1} \cdots \phi(x_n)_{A_n} | 0; \beta \rangle \quad (7.162)$$

e o teorema de Wick permanece inalterado para a DCT com a álgebra de Poincaré deformada:

$$T \prod_{i=1}^n \phi(x_i)_{A_i} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\{\pi\}} N_\theta \prod_{j=1}^{n-2k} \phi(x_{\pi_j})_{A_{\pi_j}} \prod_{\{(\pi l', \pi l)\}} G_0(x_{\pi l'} - x_{\pi l}; \beta)_{A_{\pi l'} A_{\pi l}} \quad (7.163)$$

onde $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ é uma permutação $(1, \dots, n)$, com π_j um elemento da combinação $(1, \dots, n)$ tomados $n - 2k$ a $n - 2k$, para $j = 1, \dots, n - 2k$. $\{(\pi l', \pi l)\}$ é o conjunto de todos

os pares entre $\pi^{l'}, \pi^l$ para $n - 2k \leq l, l' \leq n$, com $l \neq l'$. Portanto introduzindo a não-comutatividade através da deformação do grupo de Poincaré, não existem manifestações desta na matriz S e, conseqüentemente, o teorema de Wick permanece inalterado em relação a DCT.

Capítulo 8

Conclusão e perspectiva

Neste trabalho desenvolvemos um formalismo de integrais de trajetória no contexto da dinâmica de campos térmicos (DCT) para calcular a função de dois pontos a *1-loop* para a teoria ϕ^4 não comutativa. O principal resultado é a natureza das contribuições dos diferentes termos do propagador: um termo das teorias sem temperatura, para o qual $T = 0$, um termo com o parâmetro θ , termos dependentes de T somente e termos que dependem de ambos os parâmetros θ e T como os das equações (6.44) e (6.50). Para θ fixo e altas temperaturas, as contribuições dos termos mistos não podem ser descartadas trivialmente, e podem contribuir para quantidades mensuráveis. Uma análise semelhante é válida para termos de outras ordens de perturbação e que podem incluir efeitos de não equilíbrio, desde que se considere o formalismo de tempo real. Além disto, muitos outros aspectos importantes devem ser estudados, como a aplicação aos problemas de teorias de calibre não comutativas e renormalização, que tem sido estudados de diferentes formas [2, 69, 89]. No contexto do formalismo real, deve ser interessante investigar a renormalização do modelo ϕ^4 como desenvolvido por Grosse e Wulkenhaar [90, 91, 92].

O estudo de álgebras de Poincaré deformadas em DCT interagente também deve também ser considerado, principalmente no que se refere à tentativa de formulação do teorema de Wick. Deve-se verificar se na teoria térmica os resultados da teoria a $T = 0$ permanecem válidos, no que se refere à estrutura da teoria, como a unitariedade da matriz S e a sua independência do parâmetro de não-comutatividade [86].

A principal vantagem em relação ao formalismo de Matsubara, de amplo uso, é a separação dos propagadores em duas partes, com e sem temperatura. Além disso, o uso da DCT possibilita a avaliação dos sistemas fora do equilíbrio.

Na tentativa de testar, e compreender melhor, o formalismo de integrais de trajetória

em DCT, devemos continuar o estudo do modelo ϕ^4 nos espaços-tempos comutativos e não-comutativos. O cálculo de ordens superiores em teoria de perturbação nos permitirá comparar a DCT, sobre espaços não-comutativos, com outros formalismos térmicos existentes. Uma forma de realizar esta comparação é através do cálculo da energia livre [?], $F = -\beta^{-1} \ln \text{Tr}[e^{-\beta H}]$. Estes cálculos também nos permitirão abordar problemas, como a renormalizabilidade das quantidades físicas da teoria e a compactificação espacial.

Realizar cálculos para campos de calibre ampliará o número de problemas a serem estudados. A análise de quebra espontânea de simetria, e sua restauração, utilizando DCT e geometria não-comutativa. Neste caso, em particular, o formalismo funcional é essencial para tratar o problema de potencial efetivo.

Os resultados obtidos se devem basicamente a estrutura algébrica da DCT, a álgebra $\mathbb{C}*$, onde as regras de conjugação til são identificadas com a conjugação modular na representação padrão. Neste contexto, a transformação de Bogoliubov, outro ingrediente básico da DCT, corresponde a uma transformação linear envolvendo os comutantes da álgebra de von Neumann. É importante ressaltar que vários destes elementos algébricos também são encontrados nas teorias não comutativas. Uma consequência é que o caso $T = \theta = 0$ é facilmente identificado visto que a temperatura e a não comutatividade são implementadas por mapeamentos, em uma álgebra de von Neumann, conectada à identidade. Esta observação aponta para uma conexão estrutural entre os formalismos que merece maiores estudos.

A construção da teoria térmica sobre espaços não-comutativos, pela utilização dos grupos deformados de Poincaré, possibilita explorar os efeitos da estatística deformada não só em sistemas de matéria condensada como também possibilita aplicações cosmológicas envolvendo a radiação cósmica de fundo [15]. Por outro lado mostramos que teorema de Wick permanece válido na teoria com o grupo de Poincaré deformado.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Susskind. *arXiv:hep-th/0101029*, 2001.
- [2] R.J. Szabo. *Phys. Rep.*, 378:207, 2003.
- [3] D. Zappala P. Castorina, G. Riccobene. *Phys. Rev. D*, 69:105024, 2004.
- [4] B.A. Campbell e A. Kaminsky. *Nucl. Phys. B*, 581:240, 2000.
- [5] Y.S. Wu G.H. Chen. *Nucl. Phys. B*, 622:189, 2002.
- [6] Y.L. Ma I. Hinchliffe, N. Kersting. *Int. J. Mod. Phys. A*, 19:179, 2004.
- [7] A.Yu. Petrov V.O. Rivelles A.J. Silva H.O. Girotti, M. Gomes. *Phys. Rev. D*, 67:125003, 2003.
- [8] A. Pinzul e A. R. Queiroz A. P. Balachandran. *Phys.Lett.B*, 668:241-245,2008, April 2008.
- [9] M. R. Douglas e A. Schwarz A. Connes. *J.High Energy Phys.*, 2:3, 1998.
- [10] E. Witten N. Seiberg. *J.High Energy Phys.*, 09:032, 1999.
- [11] G. Arcioni e M. A. Vazquez-Mozo. *JHEP*, 0001:028, 2000.
- [12] E. Gorbatov A. Kashani-Poor S. Paban e P. Pouliot W. Fischler, Joaquim Gomis. *JHEP*, 0005:024, 2000.
- [13] S. Kurkcuoglu e S. Vaidya A. P. Balachandran. 2007.
- [14] A.M. Marques e P. Teotonio-Sobrinho A.P. Balachandran, A.R. Queiroz. *Phys. Rev. D*, 77:105032, 2008.

- [15] A.R. Queiroz L. Barosi, F.A. Brito. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 05:0804, 2008.
- [16] S. Digal e T.R. Govindarajan C.R. Das. *Phys. Lett. A*, 231781, 2008.
- [17] T. Matsubara. *Prog. Theor. Phys.*, 14:351, 1955.
- [18] J. Schwinger. *J. Math. Phys.*, 02:407, 1961.
- [19] L.V. Keldysh. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 47:1515, 1964.
- [20] H. Umezawa. *Advanced Field Theory : Micro, Macro and Thermal Physics*. American Institute of Physics, New York, 1993.
- [21] J.M.C. Malbouisson e A.E. Santana F.C. Khanna, A.P.C Malbouisson. *Thermal Quantum Field Theory: Algebraic Aspects and Applications*. W. Scientific, Singapore, 2009.
- [22] H. Chu e H. Umezawa. *Int. J. Mod. Phys. A*, 09:2363, 1994.
- [23] H. Umezawa Y. Takahashi. *Coll. Phenomena*, 02:055, 1975.
- [24] A. Das. *Finite Temperature Field Theory*. World Scientific, Singapore, 1997.
- [25] H. Matsumoto e M. Tachiki H. Umezawa. *Thermofield Dynamics and Condensed States*. North-Holland, 1982.
- [26] H. Umezawa J.P. Whitehead, H. Matsumoto. *Phys. Lett. A*, 103:408, 1984.
- [27] P.L. Knight S.M. Barnett. *Opt. Soc. Am. B*, 02:467, 1985.
- [28] H. Umezawa e Y. Yamanaka A. Mann, M. Revzen. *Phys. Lett. A*, 149:475, 1989.
- [29] A. Mann e M. Revzen. *Phys. Lett. A*, 134:273, 1989.
- [30] V. Srinivasan S. Chaturvedi, R. Sandhya. *Phys. Rev. A*, 41:3969, 1990.
- [31] G.S. Agarwal S. Chaturvedi, V. Srinivasan. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 32:1909, 1999.
- [32] J.D.M. Vianna L.M. Silva, A.E. Santana. *Braz. J. Phys.*, 27:619, 1997.
- [33] I.V. Vancea M.C.B. Abdala, A.L. Gadelha. *Phys. Rev. D*, 64:086005, 2001.
- [34] I.V. Vancea M.C.B. Abdala, A.L. Gadelha. *Int. J. Mod. Phys. A*, 18:2109, 2003.

- [35] I. Ojima. *Ann. Phys.*, 137:001, 1981.
- [36] J.D.M. Vianna e F.C. Khanna A.E. Santana, A. Matos Neto. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:641, 1999.
- [37] J.D.M. Vianna e F.C. Khanna A.E. Santana, A. Matos Neto. *Physica A*, 280:405, 2000.
- [38] G. G. Emch. *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [39] O. Bratteli e D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, vols. I and II*. Springer, Berlin, 1979.
- [40] A.E. Santana e F.C. Khanna. *Phys. Let. A*, 203:068, 1995.
- [41] F.C. Khanna T. Kopf, A.E. Santana. *J. Math. Phys.*, 38:4971, 1997.
- [42] E. Celeghini et. al. *Phys. Lett. A*, 244:455, 1998.
- [43] G. W. Semenoff e H. Umezawa. *Nucl. Phys. B*, 220:196, 1983.
- [44] C. A. Siqueira e A. E. Santana. *PoS*, IC2006:044, 2007.
- [45] H. Chu e Y. C. Chang A. E. Santana, F. C. Khanna. *Ann.Phys.*, 249:481, 1996.
- [46] C. A. Siqueira. *Teoria de Perturbação na Dinâmica de Campos Térmicos: Aspectos Formais, Fórmula de Redução e Cálculo de Taxas de Decaimento*. PhD thesis, IF-UnB, 2009.
- [47] K.O. Friedrichs. *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*. Interscience, New York, 1953.
- [48] A.S. Wightman. *Phys. Rev.*, 98:812, 1955.
- [49] H. Umezawa H. Matsumoto, Y. Nakano. *Phys. Rev. D*, 31:429, 1985.
- [50] R. Kubo. *J. Phys. Soc. Japan*, 12:570, 1957.
- [51] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [52] H. Figueroa e J. M. Gracia-Bondia J. C. Varilly. *Elements of Noncommutative Geometry*. Birkhouser, 2000.

- [53] G. Landi. *Introction to Noncommutative Spaces and their Goemtries*. Springer Verlag, 1997.
- [54] J. Hoppe. *Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two Dimensional Bound State Problem*. PhD thesis, MIT, 1982.
- [55] J. Madore. *Classical Quantum Gravity*, 09:69–88, 1992.
- [56] J. Madore. *An Introduction to Non-Commutative Differential Geometry and its Physical Implications*. Cambridge University Press, 1995.
- [57] T. Filk. *Phys. Lett. B*, 376:53, 1996.
- [58] Joseph C. Varilly e Jose M. Gracia-Bondia. *Int.J.Mod.Phys. A*, 14:1305, 1999.
- [59] A. Demichev e P. Presnajder M. Chaichian. *Nucl.Phys. B*, 567:360–390, 2000.
- [60] Eli Hawkins. 2007.
- [61] R. Jackiw. *Nucl.Phys.Proc.Suppl. S6-S11*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. S6-S11:Nucl.Phys.Proc.Suppl.108(2002)30–36;Phys.Part.Nucl.33(2002) S6–S11, 2002 S6-S11.
- [62] W. Pauli. *Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence vol. 2*. Springer Velag, 1985.
- [63] H. Snyder. *Phys. Rev.*, 71:38–41, 1947.
- [64] Klaus Fredenhagen e John E. Roberts Sergio Doplicher. *Commun.Math.Phys.*, 172:187–220, 1995.
- [65] H. Weyl. *Z. Phys.*, 46:01, 1927.
- [66] J. E. Moyal. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 45:99, 1949.
- [67] A.J. Niemi e G.W. Semenoff. *Nucl. Phys. B*, 230:181, 1984.
- [68] A.J. Niemi e G.W. Semenoff. *Phys. Rev. Lett.*, 54:2166, 1985.
- [69] N. A. Nekrasov M. R. Douglas. *Rev. Mod. Phys.*, 73:977, 2001.
- [70] Wolfgang Behr. 2007.
- [71] J. E. Roberts S. Doplicher, K. Fredenhagen. *Comm. Math. Phys.*, 172:187, 1995.

- [72] C. Fronsdal A. Lichnerowicz e D.sternheimer F. Bayen, M.Flato. *Ann. Phys.*, 111:61, 1978.
- [73] H. J. Groenewold. *Physica*, 12:405, 1946.
- [74] N. Toumbar N. Seiberg, L. Susskind. *J. High Energy Phys.*, 06:044, 2000.
- [75] J. L. F. Barbon L. Álvarez Gaumé. *Int. J. Mod. Phys. A*, 16:1123, 2001.
- [76] A. Tureanu M. Chaichian, K. Nishijima. *Phys. Lett. B*, 568:146, 2003.
- [77] T. Mehen J. Gomes. *Nuclear Phys. B*, 591:265, 2000.
- [78] K. Fredenhagen e G. Piacitelli D. Bahns, S.Doplicher. *Phys. Lett. B*, 533:178, 2002.
- [79] D. Bahns. *Fortsch. Phys.*, 51:658, 2003.
- [80] D. Bahns. *Fortsch. Phys.*, 52:458, 2004.
- [81] K. Fredenhagen e G. Piacitelli D. Bahns, S. Doplicher. *Comm. Math. Phys.*, 237:221, 2003.
- [82] K. Sibold Y. Liao. *Eur. Phys. J. C*, 25:469, 2002.
- [83] J. H. Yee C. Rim. *Phys. Lett. B*, 574:111, 2003.
- [84] P. Presnajder e A.Tureanu M. Chaichian. *Phys. Rev. Lett.*, 94:151602, 2005.
- [85] Julius Wess. 2007.
- [86] A. Pinzul e S. Vaidya A. P. Balachandran, G. Mangano. *Int.J.Mod.Phys. A*, 21:3111–3126, 2006.
- [87] Jochen Zahn. *Phys.Rev.D*, 73:105005,2006, *Phys.Rev.D*73:105005,2006.
- [88] T. Kopf e F. C. Khanna A. E. Santana. *Hopf Algebras, Lie Symmetries and Thermal Field Theory*. W. Scientific, Singapore, 1997.
- [89] J.C. Wallet. *SIGMA*, 5:13, 2009.
- [90] R. Wulkenhaar H. Grosse. *Commun. Math. Phys*, 256:305, 2005.
- [91] R. Wulkenhaar H. Grosse. *Commun. Math. Phys*, 254:91, 2005.

- [92] V. Rivasseau F. Vignes-Tourneret R. Gurau, J. Magnen. *Commun. Math. Phys.*, 267:515, 2006.