Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teorema de Bernstein

por

Ricardo Ruviaro

Brasília
2007

Resumo

O presente trabalho de investigação tem como tema o Teorema de Bernstein. Buscou-se como objetivo demonstrar de formas diferentes o Teorema de Bernstein, já que este teorema é um resultado muito extraordinário, pois levando em conta a multiplicidade de soluções que possui a equação de Lagrange, é realmente instigante que o mero fato da solução estar definida para todo (x, y) exclua todas as soluções menos a solução trivial. Far-se-á também a demonstração para o Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen.

Palavras-chaves: Teorema de Bernstein, Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen.

Abstract

In this dissertation. We give three different proofs of the Bernstein theorem and a proof of the theorem of do Carmo-Peng and Fischer Colbrie-Schoen.

Key Words: Bernstein Theorem, Theorem of do Carmo-Peng and Fischer Colbrie-Schoen.

Introdução

A questão das superfícies mínimas, esta relacionada com um problema proposto por Lagrange [La], em 1760, quando o mesmo considerou o problema de encontrar uma superfície de área mínima cuja fronteira é uma curva fechada sem auto-interseções. Apezar de ter levantado esta questão Lagrange não conseguiu demonstrar a existência de outra superfície mínima a não ser o plano. Para uma superfície ser mínima é necessário que a mesma tenha curvatura média identicamente nula, e obter superfíces com esta propriedade não é algo muito fácil. Note que para o caso de superfícies que são gráficos $z = f(x, y)$ de funções diferenciáveis, a condição $H = 0$ é equivalente à equação

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \qquad (1)$$

onde $q = f_y$, $p = f_x$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$ e $t = f_{yy}$. Desta forma, achar uma superfície mínima na forma acima é achar uma função $f(x, y)$ que satisfaz (1).

Só depois de dezesseis anos de Lagrange ter descobrido a equação (1), Meusnier [M] mostrou que ela era equivalente ao fato que $K_1 + K_2 = 0$ (onde K_1 e K_2 são as curvaturas principais), e obteve duas soluções não triviais desta equação, descobrindo assim o catenóide e o helicóide como novas superfícies mínimas. E em 1835, Scherk [Sc] obteve outra superfície mínima, ficando a mesma conhecida como Superfície de Scherk.

Scherk provou também que o helicóide e o catenóide descobertos por Meusnier, são apenas dois elementos de uma família de superfícies mínimas, através da qual poder-se-á deformar continuamente o catenóide menos um meridiano em uma volta completa do helicóide. Esta deformação é isométrica, isto é, os comprimentos das curvas são preservadas ao longo da deformação. Além disto, a imagem esférica de um domínio também é preservada. Um pouco mais tarde por volta de 1864, foi descoberta outra superfície mínima, conhecida como a superfície de Enneper [E], que possuem propriedades interessantes pois as funções que a representam só envolvem somas e produtos.

Em 1916, S. Bernstein demonstrou o seguinte resultado. Se uma superfície mínima é um gráfico completo, então ela é um plano. Em outras palavras, se $f(x, y)$ é uma solução da equação de Lagrange dada em (1) definida em todo plano (x, y) então f é linear. Por volta de 1960, R. Osserman, mostrou que se dada uma superfície mínima completa, e sendo N a sua aplicação normal e supondo que exista um domínio aberto de $S^2(1)$ que não está contido em $N(S)$, então S é um plano. Implicando assim, no Teorema de Bernstein.

Em agosto de 1978, em uma Conferência, Manfredo do Carmo propôs a seguinte questão: "Será que toda superfície mínima completa e estável é um plano"?. No mesmo ano, em colaboração com Alexandre M. da Silveira, demonstraram um caso particular, e em 1979, o problema foi resolvido, em conjunto com C. K. Peng [CP] e independentemente por Fischer Colbrie-Schoen [FS].

Neste trabalho, far-se-á demonstrações para o teorema de Bernstein, já que este teorema é um resultado muito extraordinário, pois levando em conta a multiplicidade de soluções que possui a equação de Lagrange, é realmente instigante que o mero fato da solução estar definida para todo (x, y) exclua todas as soluções exceto a solução trivial. Demonstrar-se-á também o Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen.

Referências Bibliográficas

[1] ALMGREN, F. J. Jr., *Some interior regularity for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math., **85**, 277-292 (1966).

[2] BARBOSA, J. L. and do CARMO, M. P., *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math Z., **185**, 339-353 (1984).

[3] BARBOSA, J. L. and do CARMO, M. P., *On the size of a stable minimal surface in* $\mathbb{R}^3$, Amer. J. Math, **98**, 515-528 (1976).

[4] BARBOSA, J. L. and do CARMO, M. P, ESCHENBURG, J., *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannianan manifolds*, Preprint.

[5] CHERN SHIING-SHEN, *Simple Proofs of Two Theorems on Minimal Surfaces.*

[6] CHERN SHIING-SHEN, *Curves and Surfaces in Euclidean Space*, pp. 53-56.

[7] COLDING T. H. and MINICOZZI W. P., *Estimates for parametric elliptic integrands*,Int. Math. Res. Not 291-297 (2002).

[8] COSTA, C. J., *Funções Elípticas e Superfícies mínimas* , IMPA, Brasil (1991).

[9] da SILVEIRA, ALEXANDRE, M., *Stability of Complete Noncompact Surfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Ann., **277**, 629-638 (1987).

[10] DIERKES, U. and HILDEBRANDT, S. and KÜSTER, A. and WOHBRAB, O., *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1992).

[11] do CARMO, M. P. and da SILVEIRA, A. M., *Globally stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$,Proc. Amer. Math. Soc.(to appear).

[12] do CARMO, M. P. and PENG, C. K., *Estable complete minimal surfaces em $\mathbb{R}^3$ are planes*, American Mathematical Society, **1**, 903-906 (1979).

[13] do CARMO, M. P., *Superfícies Mínimas*, IMPA, Brasil (2003).

[14] do CARMO, M. P., *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, New York, (1994).

[15] do CARMO, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, IMPA, Brasil (1976).

[16] FISCHER-COLBRIE, D., *On complete minimal surfaces with finite Morse index in 3-manifolds*, Invent. Math., **82**, 121-132 (1985)

[17] FISCHER-COLBRIE, D. and SCHOEN, R., *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl.Math., **33**, 199-211 (1980)

[18] MEEKS III. W. H., *Proofs of Some Classical Theorems in Minimal Surface Theory*, Indiana University Mathematics Journal, **54**, 1031-1044 (2005).

[19] NITSCHE, J. C. C., *On new results in the theory of minimal surfaces*, Bulletin of the American Mathematical Society, **71**, 195-270 (1965).

[20] OSSERMAN, R., *A survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand, (1969).

[21] POGORELOV, ALEKSEI. V., *On the stability of minimal surfaces*, Soviet Math., **24**, 274-276 (1981)

[22] PROTTER, M. H. and WEINBERGER, H., *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, (1966).