Existência de Solução Positiva para Problemas Quasilineares Envolvendo Expoente Crítico de Sobolev.

MARCUS ANTONIO MENDONÇA MARROCOS †

Orientador:

PROF.JOÃO CARLOS NASCIMENTO PADUA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática, da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências na área de Matemática.

UnB - Brasília
Junho de 2006

†Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Abstract

The sub and supersolution method will be used to show that a class of quasilinear problens, involving a sublinear term and with critical growth, has a positive solution. Moreover, when the sublinear term is changed by a linear one, the existence of the positive solution will be gotten by the variational method.

Resumo

O método de sub e supersolução será usado para demonstrar que uma classe de problemas quasilineares, envolvendo um termo sublinear e um com crescimento crítico, possui solução positiva. Além disso, quando o termo sublinear é substituido por um linear, a exitência de solução positiva será obtida pelo método variacional.

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{s-2}u + |u|^{t-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.0}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-laplaciano com $1 < p < N$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 < s \leq p < t \leq p^*$; $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico do teorema das imersões de Sobolev. Ao longo deste e dos capítulos restantes vamos nos referir ao problema (1) por $(1)_\lambda$ para enfatizar a dependência do parâmetro λ.

Consideramos o problema $(1)_\lambda$ no sentido fraco, isto é, entendemos como soluções para o problema $(1)_\lambda$ as funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfazem

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega (\lambda|u|^{s-2}u + |u|^{t-2}u)\phi \, dx,$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja, pontos críticos do funcional de energia definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$ por

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{\lambda}{s}\int_\Omega |u|^s \, dx - \frac{1}{t}\int_\Omega |u|^t \, dx.$$

Os capítulos estão distribuidos como se segue :

No Capítulo 2, apresentamos alguns resultados preliminares que servirão de suporte para os capítulos posteriores. Dentre eles destacamos os Teoremas de regularidade 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 que garantem que as soluções fracas do problema $(1)_\lambda$ são de classe $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$; e o Teorema de não existência 2.5.1. Esse último, mostra que o termo $\lambda|u|^{s-2}$ é essencial para garantir a existência de uma solução para o problema $(1)_\lambda$.

No Capítulo 3, estudamos o problema $(1)_\lambda$ no caso em que $s < p$. O principal resultado desse capítulo é devido a Huang [19]:

Teorema 1.0.1. *Se $1 < s < p < t \leq p^*$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que para qualquer $0 < \lambda < \lambda^*$, o problema $(1)_\lambda$ possui uma solução fraca positiva minimal u_λ (ver definição 2.2.1), e para $\lambda > \lambda^*$ não possui solução. Se além disso, $p \geq 2$, então o problema $(1)_\lambda$ possui uma solução fraca positiva para $\lambda = \lambda^*$.*

O procedimento é essencialmente o mesmo utilizado por Ambrosetti, Brezis e Cerami em [2], isto é, o método de subsolução e supersolução . Devemos salientar que os métodos apresentados no Capítulo 3 não são extensões diretas dos utilizados em [2], onde foi tratado o caso $p = 2$.

No Capítulo 4, estudamos o problema $(1)_\lambda$, quando $s = p$, seguindo [17]. Notamos ainda que as técnicas utilizadas no Capítulo 2 para o caso $s < p$ não se aplicam quando $s = p$. O principais resultados do terceiro capítulo são:

Teorema 1.0.2. *Se $1 < p^2 \leq N$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é definido por*

$$\lambda_1 = \inf\{|\nabla u|_p : |u|_p = 1, u \in W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

então o problema $(1)_\lambda$, quando $s = p$, admite uma solução positiva em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 1.0.3. *Se $1 < p < N$, $\lambda \leq 0$ e Ω é estrelado, então o problema $(1)_\lambda$, quando $s = p$, não admite solução em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema 1.0.4. *Se $1 < p < N$ e $\lambda \geq \lambda_1$, então o problema $(1)_\lambda$, quando $s = p$, não admite solução positiva em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Os resultados deste capítulo generalizam o primeiro resultado encontrado por Brezis e Nirenberg em [11], quando $p = 2$.

As idéias usadas para provar o Teorema 1.0.2 são essencialmente as mesmas usadas em Brezis e Nirenberg [11] com técnicas de Aubin [3] e Trundiger [31]: primeiro definimos

$$S_\lambda = \inf\left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^p - \lambda |u|^p)\, dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |u|^{p^*} dx = 1 \right\}, \tag{1.0}$$

para λ real e não negativo; se $\lambda = 0$ temos,

$$S = S_0 = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |u|^{p^*} dx = 1 \right\} \tag{1.0}$$

definido como a melhor constante para a imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. A partir daí, provamos que se $0 < S_\lambda < S$, então o ínfimo (1) é atingido por uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que após uma mudança de escala torna-se uma solução para o problema $(1)_\lambda$.

Já o Teorema 1.0.3 é uma conseqüência de um tipo de identidade de Pohozaev (ver Teorema 2.5.1), isto é, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada e satisfaz $-\Delta_p u = g(u)$ em Ω, onde g é uma função real Hölder contínua, então vale a identidade

$$\int_\Omega [NH(u) + \left(1 - \frac{N}{p}\right) ug(u)]\, dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^p d\sigma \tag{1.1}$$

onde $H(s) = \int_0^s g(t)\, dt$.

Para provar o Teorema 1.0.4, argumentamos por contradição . Supondo a existência de uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para o problema $(1)_\lambda$, onde $\lambda \geq \lambda_1$, e considerando uma autofunção positiva $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ associada ao autovalor λ_1 (ver Teorema 2.1.2), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda_1 v^{p-1} & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

obtemos uma contradição com o princípio da comparação forte (Teorema 4.0.6), comparando u e ϵv, onde $\epsilon = \sup\{a \in \mathbb{R} : u(x) - av(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega\}$.

O problema $(1)_\lambda$ tem sido intensivamente estudado na literatura, ver por exemplo [5, 6, 9, 13, 17, 18, 19] e suas referências.

Está demonstrado em [5] que existe $\Lambda > 0$ e $R > 0$ tais que para $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema $(1)_\lambda$, considerando $s < p$, possui infinitas soluções mudando de sinal e uma única solução positiva com norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ inferior a R e com energia negativa. Esse resultado foi demonstrado a partir da construção de pontos críticos utilizando propriedades do gênero.

Huang em [19], apresenta um resultado de multiplicidade de soluções para o problema $(1)_\lambda$, mais precisamente: supondo $2 \leq s < p < t \leq p^*$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema $(1)_\lambda$ possui pelo menos duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Esse λ_0 não é ótimo, ou seja, não se sabe se para $\lambda \geq \lambda_0$ o problema $(1)_\lambda$ possui pelo menos duas soluções positivas. A técnica utilizada foi a de encontrar mínimos para o funcional de energia J no conjunto $\Gamma = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \psi(u) = J'(u)u = 0\}$. Para mostrar que as soluções são distintas verifica-se que uma solução pertence ao conjunto $\Gamma^+ = \{u \in \Gamma : \psi'(u)u > 0\}$ e outra em $\Gamma^- = \{u \in \Gamma : \psi'(u)u < 0\}$.

Já em [17] encontramos resultados de existência para o caso $s = p$ e $t = p^*$, onde a maior dificuldade se deve a perda de compacidade da imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$. Porém, o caso subcrítico pode ser tratado facilmente, pois basta considerar uma seqüência $\{u_n\}$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ que minimiza (1.2). Supondo $0 < \lambda < \lambda_1$ vemos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto segue da reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e da compacidade da imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ que $\{u_n\}$ converge fortemente em $L^t(\Omega)$ para uma solução do problema $(1)_\lambda$ (ver, Lema 4.0.8).

Salientamos que no presente trabalho apresentamos resultados que garantem a existência de pelo menos uma solução positiva para o problema $(1)_\lambda$. Nos trabalhos citados anteriormente, e em suas referências, existem vários resultados de multiplicidade.