



Universidade de Brasília

**Cálculo Estocástico Aplicado à
Precificação de Ativos no Mercado
Financeiro**

Paul Martinez Vilca

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique Pereira Da Costa

Departamento de Matemática

Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 29 de Julho de 2025

Dedico este trabajo a mis padres, Víctor y Patricia,
a mi hermana, Yeny, y a mi abuela, Lucía (Mamá Grande),
por todo su amor y apoyo a lo largo de esta jornada.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela minha vida, por me ouvir, abençoar e cuidar de mim ao longo desta jornada, concedendo-me força, sabedoria e perseverança para superar cada desafio. Mesmo distante da minha família, confio que Ele sempre os guarda, e a Ele devo todas as graças.

Aos meus pais, Victor Martinez Chelmapocco e Patricia Vilca García, expresso meus eternos agradecimentos. Eles são os pilares de todas as minhas conquistas e os exemplos de dedicação mais profundos que conheço, jamais medindo esforços para oferecer a mim e à minha irmã oportunidades que eles próprios não tiveram. Registro, ainda, minha sincera gratidão à minha irmã, Yeny, pelo apoio emocional constante e por tornar minha vida mais feliz.

Aos ilustres professores do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, que moldaram meu conhecimento, dirijo meus sinceros agradecimentos. Destaco, em especial, meu orientador, Paulo Henrique da Costa, cuja dedicação, valiosos ensinamentos e conversas enriquecedoras foram indispensáveis para a realização deste trabalho. Agradeço também ao professor Leandro Martins Cioletti pelos sábios conselhos durante a elaboração da dissertação, um exemplo de professor a ser seguido. Ao professor Luís Henrique de Miranda, pelo apoio, pela cordial atenção e pela sabedoria compartilhada; considero uma grande honra tê-lo conhecido. E à professora Cátia Regina Gonçalves, uma professora excelente, sempre animada e irradiando uma energia boa!.

Aos amigos e colegas da UnB, em especial a Ângelo e Samuel, meus sinceros agradecimentos por tornarem esta trajetória significativamente mais suave. Nossas ricas discussões sobre os mais diversos temas e os momentos de descontração foram igualmente enriquecedores. Estendo, ainda, minha gratidão aos amigos de longa data da Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, cuja parceria e apoio permanecem firmes, apesar da distância que nos separa.

Este trabalho contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por meio do processo nº 132423/2020-0 GM. Agradeço, igualmente, ao Programa de Acompanhamento Continuado Elos da UnB, cujo suporte foi fundamental para a realização desta pesquisa.

Resumo

Nesta dissertação, iniciamos com uma revisão dos conceitos fundamentais de Teoria da Medida, Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos, essenciais para o desenvolvimento do cálculo estocástico. Em seguida, construímos a integral de Itô para processos reais e vetoriais que sejam progressivamente mensuráveis com relação à filtração natural do processo de Wiener e quadrado-integráveis com respeito à medida produto $\lambda \otimes \mathbb{P}$, destacando suas principais propriedades e formulando a versão multidimensional da fórmula de Itô. Apresentamos também os teoremas centrais de representação de martingales e de mudança de medida (Girsanov), fundamentais para aplicações em finanças. Com base nessas ferramentas, modelamos mercados financeiros de dimensão finita arbitrária por meio de equações diferenciais estocásticas, demonstrando a ausência de arbitragem e a completude do mercado sob a existência de uma medida martingale equivalente. Estabelecemos, então, a fórmula geral de precificação de opções europeias, $p(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F]$, e construímos o portfólio de *hedge* associado, por meio da equação $\xi_t \hat{\theta}_t \sigma_t = \phi_t$, com ϕ obtido via teorema de representação. Por fim, aplicamos essa estrutura teórica ao modelo generalizado de Black–Scholes, no qual os coeficientes de juros e volatilidade são funções do tempo, obtendo fórmulas explícitas para a precificação e a cobertura de opções europeias, sendo o modelo clássico recuperado como caso particular.

Palavras-chave:

cálculo estocástico; equações diferenciais estocásticas; integral de Itô; mercado financeiro; precificação de opções; modelo de Black-Scholes.

Abstract

In this dissertation, we begin with a review of the fundamental concepts of Measure Theory, Probability Theory, and Stochastic Processes, which are essential for the development of stochastic calculus. We then construct the Itô integral for real- and vector-valued processes that are progressively measurable with respect to the natural filtration of the Wiener process and square-integrable with respect to the product measure $\lambda \otimes \mathbb{P}$, highlighting its main properties and presenting the multidimensional version of Itô's formula. We also introduce the central theorems of martingale representation and change of measure (Girsanov), which are fundamental for financial applications. Based on these tools, we model financial markets of arbitrary finite dimension through stochastic differential equations, proving the absence of arbitrage and the completeness of the market under the existence of an equivalent martingale measure. We then establish the general pricing formula for European options, $p(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F]$, and construct the associated hedging portfolio through the equation $\xi_t \hat{\theta}_t \sigma_t = \phi_t$, with ϕ obtained via the martingale representation theorem. Finally, we apply this theoretical framework to the generalized Black–Scholes model, in which the interest rate and volatility coefficients are time-dependent, obtaining closed-form solutions for both the pricing and hedging of European options, with the classical model recovered as a particular case.

Keywords:

stochastic calculus; stochastic differential equations; Itô integral; financial market; option pricing; Black-Scholes model.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Teoria da medida	3
1.1.1 Definições Básicas	3
1.1.2 Funções mensuráveis	6
1.1.3 Teoria da Integração Abstrata	7
1.1.4 Modos de Convergência	10
1.1.5 O Teorema de Radon-Nikodym	11
1.1.6 Medidas sobre espaços de produtos	13
1.2 Teoria da Probabilidade	14
1.2.1 Definições Básicas	15
1.2.2 Independência	18
1.2.3 A Distribuição Normal Multivariada	19
1.2.4 Esperança Condicional	20
1.3 Processos Estocásticos	21
1.3.1 Definições Básicas	21
1.3.2 Lei de um Processo Estocástico	22
1.3.3 Equivalência de Processos e Propriedades de Trajetória	25
1.3.4 Mensurabilidade de Processos Estocásticos	26
1.3.5 Processo de Wiener	29
2 Integral de Itô, Fórmula de Itô e Teoremas de Representação	34
2.1 Motivação	35
2.2 Construção da Integral de Itô	36
2.2.1 Integral de Itô de Processos Simples	37
2.2.2 Integral de Itô para Processos Gerais	40
2.3 A Integral de Itô como um Processo Estocástico	42

2.4	Integral de Itô Multidimensional	43
2.5	Processos de Itô	44
2.6	Fórmula de Itô	47
2.7	Teoremas de Representação e Mudança de Medida	50
3	Equações Diferenciais Estocásticas	55
3.1	Definição Geral	55
3.2	Soluções Fortes e Fracas de Equações Diferenciais Estocásticas	56
4	Precificação e Replicação de Opções Europeias no Modelo de Black-Scholes	60
4.1	Modelo de Mercado Financeiro e Definições Básicas	61
4.2	Resultados Sobre a Ausência de Arbitragem	71
4.3	<i>Hedging</i> e Completude	79
4.4	Precificação de Opções Europeias	85
4.5	<i>Hedging</i> de Opções Europeias Atingíveis	87
4.6	O Modelo Generalizado de Black-Scholes	89
	Bibliografia	95

Introdução

O modelo de Black-Scholes, desenvolvido por Fischer Black, Myron Scholes e posteriormente complementado por Robert Merton, marcou um ponto de inflexão na história da matemática financeira. Publicado originalmente em 1973, o modelo propôs uma formulação inovadora para a precificação de opções europeias, introduzindo o uso do cálculo estocástico em tempo contínuo para modelar o comportamento incerto dos preços de ativos financeiros. A elegância do modelo, aliada à sua capacidade preditiva e ao impacto prático nos mercados, rendeu a Scholes e Merton o Prêmio Nobel de Economia em 1997 (Black já havia falecido e não pôde ser contemplado).

O modelo clássico considera um mercado idealizado, que representamos por um processo $X = \{(X_t^{(0)}, X_t^{(1)})\}_{t \in [0, T]}$, onde $X^{(0)}$ representa um ativo livre de risco crescendo a uma taxa constante r , e $X^{(1)}$ é um ativo de risco, cujo preço segue uma equação diferencial estocástica do tipo:

$$dX_t^{(1)} = \mu X_t^{(1)} dt + \sigma X_t^{(1)} dW_t,$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é a taxa de retorno esperada, $\sigma > 0$ a volatilidade (constante) do ativo, e W é um processo de Wiener padrão unidimensional. Nesse contexto, uma opção europeia é um contrato financeiro cujo valor na data de vencimento T depende apenas do preço do ativo subjacente naquele instante, ou seja, de uma função $h(X_T^{(1)})$. O modelo permite então determinar seu valor atual por meio da fórmula clássica e estabelecer uma estratégia de *hedge*.

Embora extremamente influente, o modelo clássico tem limitações, como a suposição de coeficientes constantes. Por isso, extensões foram desenvolvidas. Uma generalização natural é permitir que μ e σ dependam do tempo (e, eventualmente, do próprio ativo), o que conduz ao **modelo generalizado de Black-Scholes** - um dos principais resultados desta dissertação. Essa versão oferece maior aderência a dados empíricos e amplia o escopo de aplicação da teoria.

Neste trabalho, buscamos apresentar uma exposição sistemática dos principais conceitos de cálculo estocástico aplicados à precificação de opções e à construção de portfólios replicantes no modelo de Black-Scholes generalizado. Mostramos como ferramentas como a integral e a

fórmula de Itô, os teoremas de representação e o teorema de Girsanov estruturam a teoria de precificação.

Como o foco da dissertação é a aplicação ao contexto financeiro, optamos por não apresentar demonstrações completas de certos resultados fundamentais, como: a propriedade de martingale da integral de Itô, as versões da fórmula de Itô, o teorema de Girsanov e os teoremas de existência e unicidade de EDEs. Indicamos, sempre que necessário, referências clássicas como Karatzas e Shreve [21], Øksendal [42], Pascucci [30] e Björk [5]. A dissertação está organizada da seguinte forma:

- **O Capítulo 1** apresenta os conceitos preliminares necessários, incluindo tópicos essenciais de Teoria da Medida, Teoria da Probabilidade e Processo Estocásticos. Estudamos aqui os principais resultados que servirão de base para a construção da integral de Itô, com destaque para dois exemplos centrais: martingales e o processo de Wiener.
- **O Capítulo 2** é dedicado à construção da integral de Itô, à apresentação dos processos de Itô, da fórmula de Itô e aos principais teoremas de representação e mudança de medida. São desenvolvidos os instrumentos centrais do cálculo estocástico contínuo, indispensáveis para a formulação e análise de modelos financeiros em tempo contínuo.
- **O Capítulo 3** aborda as equações diferenciais estocásticas (EDEs), incluindo as noções de solução forte e fraca, e o teorema de existência e unicidade. Estas equações modelam, de maneira natural, a evolução temporal de ativos financeiros, fornecendo a base matemática para o modelo de Black-Scholes.
- **O Capítulo 4** apresenta aplicações dos conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores ao campo das finanças matemáticas. De fato, essas aplicações foram um dos grandes motivadores do desenvolvimento do cálculo estocástico, a partir dos trabalhos de Black, Scholes e Merton em 1973. Introduzimos formalmente o modelo de mercado financeiro contínuo, formulamos os conceitos de portfólio, ausência de arbitragem e completude de mercado, e conduzimos uma análise detalhada da construção de estratégias de replicação. Finalmente, enunciamos e demonstramos a Fórmula generalizada de Black-Scholes.

Acreditamos que este trabalho oferece uma ponte clara entre a teoria abstrata do cálculo estocástico e suas aplicações concretas à matemática. Ao longo da dissertação, buscamos manter um equilíbrio entre rigor matemático, clareza expositiva e motivação financeira.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria da medida

Nesta primeira seção, apresentaremos uma breve introdução à Teoria da Medida, com ênfase nos conceitos e resultados fundamentais que serão utilizados ao longo desta dissertação. O objetivo é fornecer ao leitor uma noção geral para uma boa compreensão dos tópicos subsequentes, como a Teoria da Probabilidade e os Processos Estocásticos, sem nos aprofundarmos em detalhes técnicos. Para as demonstrações completas e uma discussão mais detalhada, sugerimos ao leitor consultar obras clássicas, como Folland [14], Bogachev [7], Cohn [11] dentre outras referências.

1.1.1 Definições Básicas

O primeiro conceito que introduziremos é o de σ -álgebra. Ele desempenhará um papel central em toda esta dissertação, sendo utilizado para definir medidas, integrar funções e modelar sistemas aleatórios em contextos como finanças.

Definição 1.1.1. Seja Ω um conjunto qualquer. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é chamada de **σ -álgebra** em Ω se satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;
- iii) Se $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma coleção enumerável de elementos de $\mathcal{F}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Neste caso, o par $(\Omega, \mathcal{F})$ é chamado de **espaço mensurável**, e os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de conjuntos mensuráveis de $(\Omega, \mathcal{F})$.

Antes de avançarmos para a definição de medida - que gera uma estrutura matemática chamada de espaço de medida -, é essencial destacar algumas propriedades fundamentais

das σ -álgebras: Um resultado útil é que a interseção arbitrária de σ -álgebras em Ω ainda é uma σ -álgebra. Esse resultado permite definir, para qualquer coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω , a σ -álgebra **gerada** por $\mathcal{C}$, denotada por $\sigma(\mathcal{C})$, como a menor σ -álgebra contendo $\mathcal{C}$. Formalmente, essa construção é realizada via interseção de todas as σ -álgebras que incluem $\mathcal{C}$, garantindo existência e unicidade. Adicionalmente, dadas $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ duas σ -álgebras sobre Ω , dizemos que $\mathcal{G}$ é uma **sub- σ -álgebra** de $\mathcal{F}$ se $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Definição 1.1.2. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma **medida** em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma função de conjunto $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- ii) Para toda sequência $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{F}$,

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Neste caso, o trio $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ denomina-se **espaço de medida**.

Geralmente, faremos um abuso de notação e diremos uma medida μ em Ω em vez de uma medida em $(\Omega, \mathcal{F})$, especialmente quando a σ -álgebra $\mathcal{F}$ estiver clara pelo contexto. Se $\mu(\Omega) < +\infty$, se diz que μ é uma medida finita. Se existe uma sequência $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\mu(A_i) < +\infty$ para todo $i \geq 1$, a medida μ é dita σ -finita.

Um conceito fundamental relacionado aos espaços de medida é o de completude. Para defini-lo de forma precisa, vejamos antes a definição de conjunto de medida nula.

Definição 1.1.3. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que um subconjunto $N \subset \Omega$ é um **conjunto de medida nula** (ou μ -nulo) se existe um conjunto $A \in \mathcal{F}$ tal que $N \subset A$ e $\mu(A) = 0$.

Definição 1.1.4. Dizemos que um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é **completo** (ou que a medida μ é **completa**) se $\mathcal{F}$ contém todos os conjuntos de medida nula de Ω .

Um resultado importante, que pode ser encontrado em Folland [14], é que todo espaço de medida pode ser completado. Isso significa que, se um espaço de medida não for completo, é possível estender sua σ -álgebra e sua medida para incluir todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula, tornando-o completo. Essa completude é essencial para garantir que propriedades como igualdade quase certa ou quase sempre (com respeito à medida μ) sejam bem comportadas. Por exemplo, dizemos que uma propriedade vale quase sempre (abreviado como q.s. ou μ -q.s.) se ela é válida em todo o espaço, exceto possivelmente

em um conjunto de medida nula. Ao longo desta dissertação, trabalharemos sempre sobre espaços de medida completos pois garantem maior robustez matemática e simplificam muitas construções teóricas, evitando complicações técnicas desnecessárias.

Finalizamos esta subseção com o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. (Espaços mensuráveis e medidas fundamentais).

- 1) **Medidas de Borel:** Seja (Ω, τ) um espaço topológico. A σ -álgebra gerada pela coleção de abertos τ é chamada de σ -álgebra Borel sobre Ω e o denotamos por $\mathcal{B}(\Omega)$. Mais geralmente, se $S \in \mathcal{B}(\Omega)$, sua σ -álgebra de Borel é definida como

$$\mathcal{B}(S) := \{A \cap S : A \in \mathcal{B}(\Omega)\}.$$

Os elementos de $\mathcal{B}(S)$ são chamados conjuntos de Borel, e qualquer medida definida em $(S, \mathcal{B}(S))$ é chamada **medida de Borel**. Neste trabalho, consideraremos $\mathcal{B}(S)$, onde $S \subset \mathbb{R}^n$, e a topologia será a induzida pela métrica euclidiana.

O exemplo clássico de medida de Borel em $\mathbb{R}^n$ é a **medida de Lebesgue**, denotada por λ^n . Para conjuntos da forma $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, com $-\infty < a_i < b_i < \infty$ para $i = 1, \dots, n$, a medida de Lebesgue é dada por

$$\lambda^n(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i),$$

Mais geralmente, λ^n é definida como a extensão, via o Teorema de Extensão de Carathéodory, dessa medida definida inicialmente nos retângulos (ver Folland [14]). Note que λ^n não é finita, mas é σ -finita.

- 2) **Medidas de Lebesgue-Stieltjes:** Uma medida de Lebesgue-Stieltjes μ em $\mathbb{R}^n$ é uma medida de Borel tal que $\mu(A) < \infty$ para todo conjunto limitado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. A medida de Lebesgue é um caso particular de medida de Lebesgue-Stieltjes. Em uma dimensão, essas medidas são geradas por funções de distribuição $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, funções não decrescentes, contínuas à direita e com limite à esquerda, (ver Folland [14]).
- 3) **Medida de probabilidade:** Qualquer medida definida sobre um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, que comumente é denotada por $\mathbb{P}$, é chamada de **medida de probabilidade** se satisfaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Nesse contexto, entende-se que os elementos de Ω representam os possíveis resultados de um experimento aleatório, enquanto os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de eventos. Além disso, para qualquer $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B)$ representa a probabilidade de que o resultado do experimento pertença ao evento B . A medida de probabilidade e o espaço de medida correspondente $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ serão estudados com mais profundidade na Seção 1.2.

1.1.2 Funções mensuráveis

Nesta subseção, apresentamos brevemente um elemento fundamental da Teoria da Medida: o conceito de função mensurável, destacando algumas de suas propriedades mais importantes. Estas constituem a base para a construção de muitos objetos matemáticos essenciais, em particular para a teoria de integração que desenvolveremos posteriormente.

Definição 1.1.5. Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\Omega', \mathcal{F}')$ espaços mensuráveis. Uma função $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ é chamada $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -**mensurável** se, para todo conjunto mensurável $B \in \mathcal{F}'$, tem-se $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Note que a mensurabilidade de uma função depende das σ -álgebras envolvidas. Na definição acima, quando $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, diremos que a função f é $\mathcal{F}$ -mensurável. Se além disso $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, a função f será dita Borel mensurável. Ao longo deste trabalho, sempre que as σ -álgebras $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ forem evidentes no contexto, f será dita simplesmente mensurável.

Definição 1.1.6. Sejam $(\Omega', \mathcal{F}')$ um espaço mensurável, Ω um espaço e $T: \Omega \rightarrow \Omega'$ uma função. Definimos a **σ -álgebra gerada por T** , que denotamos por $\sigma(T)$, como a σ -álgebra gerada pela coleção de conjuntos da forma $T^{-1}(B)$, com $B \in \mathcal{F}'$. Ou seja:

$$\sigma(T) := \sigma(\{T^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}'\}).$$

Note que $\sigma(T)$ é uma σ -álgebra em Ω . Esta definição de σ -álgebra gerada por uma função será particularmente útil quando estudarmos variáveis aleatórias e filtrações em processos estocásticos, onde a informação disponível em cada momento é modelada por σ -álgebras.

No Teorema a seguir, apresentamos as propriedades fundamentais de funções mensuráveis que serão amplamente utilizadas em construções posteriores.

Teorema 1.1.1. Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) espaços mensuráveis e $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções $\mathcal{F}$ -mensuráveis. Valem as seguintes propriedades:

- 1) Se $h_1: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ é $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ -mensurável e $h_2: \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ é $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ -mensurável, então $h_2 \circ h_1: \Omega_1 \rightarrow \Omega_3$ é $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3)$ -mensurável.
- 2) $af + bg$ é mensurável para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$; fg é mensurável; f/g é mensurável se $g(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in \Omega$.
- 3) As funções f^+ e f^- definidas por $f^+(\omega) := \max(0, f(\omega))$ e $f^-(\omega) := -\min(0, f(\omega))$, respectivamente, são funções mensuráveis positivas e satisfazem:

$$f = f^+ - f^- \quad e \quad |f| = f^+ + f^-.$$

O próximo resultado mostra que funções mensuráveis permitem "transportar" medidas entre espaços mensuráveis, preservando sua estrutura de mensurabilidade.

Proposição 1.1. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(\Omega', \mathcal{F}')$ espaços mensuráveis, e seja $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ uma função $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -mensurável. Se μ é uma medida em Ω , então a função de conjunto $\mu_T : \mathcal{F}' \rightarrow [0, +\infty]$ definida por*

$$\mu_T(B) := \mu \circ T^{-1}(B) = \mu(T^{-1}(B)),$$

é uma medida em $(\Omega', \mathcal{F}')$

Definição 1.1.7. A medida μ_T da Proposição 1.1 é denominada **medida push-forward** de μ por T .

Para ver a demonstração da Proposição 1.1, assim como para mais detalhes sobre medidas *push-forward* recomenda-se Cohn [11] ou Schilling [36].

1.1.3 Teoria da Integração Abstrata

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, e seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma dada função $\mathcal{F}$ -mensurável. Nesta subseção daremos a definição para a expressão $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega)$, a qual será feita de forma gradual. Em seguida, vemos suas principais propriedades e também resultados fundamentais sobre os espaços $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Definição 1.1.8. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **função simples** se é $\mathcal{F}$ -mensurável e assume um número finito de valores. Neste caso, f pode ser escrita ou representada como:

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}, \quad (1.1.1)$$

onde $a_k \in \mathbb{R}$ e $A_k \in \mathcal{F}$, para todo $k = 1, \dots, n$.

Teorema 1.1.2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Se $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ é uma função $\mathcal{F}$ -mensurável, então existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:*

- i) $0 \leq \varphi_n(\omega) \leq \varphi_{n+1}(\omega) \leq f(\omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\omega \in \Omega$;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\omega) = f(\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$.

Definição 1.1.9. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida arbitrário e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{F}$ -mensurável. A integral de f com relação à medida μ , denotada por $\int_{\Omega} f d\mu$, é definida como:

- (1) Se f é uma função simples não negativa com representação $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, então

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k).$$

(2) Se $f \geq 0$, então

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sup \left\{ \int_{\Omega} \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \quad \phi \text{ é função simples} \right\}.$$

(3) Se f é uma função arbitrária e ao menos uma das integrais $\int_{\Omega} f^+ d\mu$ ou $\int_{\Omega} f^- d\mu$ é finita, então

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu.$$

Definição 1.1.10. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{F}$ -mensurável. Dizemos que f é **integrável com respeito a μ** (ou **μ -integrável**, ou simplesmente **integrável**) se $\int_{\Omega} |f| d\mu$ é finita.

Observação 1.1.1. (**O Espaço $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$**) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. Na literatura, é comum denotar por $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ o conjunto das funções mensuráveis $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem $\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty$. É conhecido que a função $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}: \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ definida por

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

embora útil, não é uma norma em $\mathcal{L}^p$, pois pode ocorrer $\|f\|_{\mathcal{L}^p} = 0$ mesmo que f não seja identicamente nula (isso acontece se $f = 0$ μ -quase sempre). Para contornar esse problema, adota-se o procedimento padrão de identificar funções que coincidem μ -quase sempre definindo sobre $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uma relação de equivalência: duas funções $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes se $f = g$ μ -quase sempre. A classe de equivalência associada a essa relação de equivalência denotamos por $[f]$, e consideramos o espaço quociente correspondente

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \sim.$$

Neste conjunto, podemos definir operações binárias por: $[f] + [g] := [f + g]$, e $c[f] := [cf]$, para $c \in \mathbb{R}$, as quais estão bem definidas. Dessa forma, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ adquire a estrutura de um espaço vetorial. Além disso, a função $\|\cdot\|_{L^p}: L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por:

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{\mathcal{L}^p},$$

é uma norma, o que faz com que L^p seja um espaço normado real. Embora os elementos deste espaço sejam classes de equivalência, é costume identificar cada classe com um de seus representantes, escrevendo simplesmente f em vez de $[f]$.

No teorema a seguir listamos as principais propriedades da integral. A demonstração delas podem se ser encontradas em Folland [14].

Teorema 1.1.3. (Propriedades da integral e desigualdades em espaços L^p) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, e sejam $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Valem:

$$1) \left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

2) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, a função $af + bg$ é integrável, e vale a igualdade

$$\int_{\Omega} (af + bg) d\mu = a \int_{\Omega} f d\mu + b \int_{\Omega} g d\mu.$$

3) Se $f \geq g$ μ -quase sempre, então

$$\int_{\Omega} f d\mu \geq \int_{\Omega} g d\mu.$$

4) Se $f = g$ μ -quase sempre, então $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu$.

5) Se $B \in \mathcal{F}$, então $f \mathbb{1}_B$ é mensurável, e define-se

$$\int_B f d\mu := \int_{\Omega} f \mathbb{1}_B d\mu.$$

Além disso, se $\int_B f d\mu = 0$, para todo $B \in \mathcal{F}$, então $f = 0$ μ -quase sempre.

6) **Desigualdade de Hölder:** Seja $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $fg \in L^1$ e

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Quando $p = q = 2$, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

7) **Desigualdade de Minkowski:** Se $f, g \in L^p$ com $p > 1$, então $f + g \in L^p$ e

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Encerramos esta subseção com dois resultados fundamentais sobre os espaços $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$: a completude desses espaços e a estrutura de espaço de Hilbert no caso $p = 2$. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas em Folland [14] e Botelho [8].

Teorema 1.1.4. Seja $p \geq 1$. O espaço vetorial normado $(L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$ é completo, ou seja, toda sequência de Cauchy em L^p converge para um elemento $f \in L^p$. Em outras palavras, se $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{L^p} = 0$, então existe $f \in L^p$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$.

Teorema 1.1.5. *O espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por $\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} fg d\mu$.*

1.1.4 Modos de Convergência

Apresentamos nesta subseção os principais modos de convergência de funções mensuráveis, seguidos de três teoremas fundamentais da teoria da integração. Esses resultados constituem ferramentas essenciais na análise de integrabilidade e na justificação da troca entre limites e integrais, sendo amplamente utilizados na demonstração de propriedades da integral.

Iniciamos com a definição dos principais modos de convergência, cuja formulação segue a linha de Folland [14].

Definição 1.1.11. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, e sejam $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $\mathcal{F}$ -mensuráveis e f uma função também $\mathcal{F}$ -mensurável. Dizemos que:

- (1) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f **μ -quase sempre**, que denota-se por $f_n \rightarrow f$ μ -q.s., se existe um conjunto mensurável $N \subset \Omega$ com $\mu(N) = 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus N.$$

- (2) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f **em L^p** (para $1 \leq p < \infty$), que denota-se por $f_n \xrightarrow{L^p} f$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

- (3) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f **em medida**, que denota-se por $f_n \xrightarrow{\mu} f$, se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Entre os modos de convergência apresentados, há relações importantes a serem destacadas. A convergência em L^p implica convergência em medida, e esta, por sua vez, garante a existência de uma subsequência que converge μ -quase sempre. Quando a medida do domínio é finita, a convergência μ -quase sempre implica convergência em medida. Além disso, se as funções da sequência são dominadas por uma função $g \in L^p$, então a convergência μ -quase sempre (ou em medida) também implica convergência em L^p . Todas essas relações, bem como resultados mais gerais, podem ser consultados em Folland [14] e Cohn [11].

As demonstrações dos teoremas a seguir podem ser encontradas em Folland [14], Cohn [11] e Schilling [36].

Teorema 1.1.6. (Convergência Monótona) *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, e seja $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável. Suponha que existe uma sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções mensuráveis $f_n: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ tal que:*

- i) $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $\omega \in \Omega$;
- ii) $f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ para quase todo $\omega \in \Omega$.

Então as integrais de f_n , para todo $n \in \mathbb{N}$, e de f existem, e vale

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Em particular, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu < +\infty$, então f_n , para todo $n \in \mathbb{N}$, e f são integráveis.

Teorema 1.1.7. (Lema de Fatou) *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$. Defina $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ por:*

$$f(\omega) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega), \quad \text{para todo } \omega \in \Omega.$$

Então as integrais de f_n , para todo $n \in \mathbb{N}$, e de f existem, e vale

$$\int_{\Omega} f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Em particular, se $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu < +\infty$, então f é integrável.

Teorema 1.1.8. (Convergência Dominada). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- i) $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$ para quase todo $\omega \in \Omega$, para alguma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável;
- ii) Existe uma função $g: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$, integrável ($g \in L^1(\mu)$), tal que $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e quase todo $\omega \in \Omega$.

Então f_n , para todo $n \in \mathbb{N}$, e f são integráveis, e vale

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

1.1.5 O Teorema de Radon-Nikodym

Um dos resultados mais importantes da Teoria da Medida é o Teorema de Radon-Nikodym. Ele fornece as condições sob as quais uma medida pode ser expressa como uma integral em relação a outra medida, por meio de uma função densidade. Apresentamos aqui uma versão particular, restrita ao caso de medidas positivas. Versões mais gerais, envolvendo medidas com sinal, podem ser encontradas, por exemplo, em Billingsley [4], Folland [14] e Ash [1].

Iniciamos com um resultado fundamental. Uma versão mais geral, acompanhada de sua demonstração, pode ser consultada em Ash [1].

Teorema 1.1.9. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função $\mathcal{F}$ -mensurável. Então, a função-conjunto $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$, definida por*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad (1.1.2)$$

é uma medida sobre $\mathcal{F}$.

O resultado acima mostra que toda função mensurável e não negativa define uma nova medida por meio de 1.1.2. Nesse contexto, a função f é chamada de **densidade da medida** ν com respeito à medida μ .

A pergunta natural que surge é: sob que condições uma medida ν , qualquer que seja, pode ser expressa como uma integral em relação a uma outra medida μ , como no teorema anterior? Para responder a essa pergunta, introduzimos o conceito de continuidade absoluta entre medidas.

Definição 1.1.12. Sejam μ e ν duas medidas sobre um mesmo espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$. Dizemos que ν é **absolutamente contínua** em relação a μ , e denotamos por $\nu \ll \mu$, se

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Além disso, se $\mu \ll \nu$ e $\nu \ll \mu$, dizemos que μ e ν são **medidas equivalentes**, e denotamos essa relação por $\mu \sim \nu$.

Note que, no contexto do Teorema 1.1.9, a medida ν definida por $\nu(A) = \int_A f d\mu$ satisfaz automaticamente $\nu \ll \mu$. De fato, se $\mu(A) = 0$, então $\int_A f d\mu = 0$, para qualquer que seja a função $f \geq 0$. Isso motiva a seguinte questão: será que toda medida ν pode ser representada nessa forma? O Teorema de Radon-Nikodym, que enunciaremos a seguir, responde afirmativamente a essa pergunta, sob a suposição adicional de σ -finitude da medida μ .

Teorema 1.1.10. (Radon-Nikodym). *Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e μ e ν duas medidas definidas sobre $\mathcal{F}$, com μ σ -finita. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *Existe uma função $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$, $\mathcal{F}$ -mensurável e μ -integrável, tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F};$$

ii) *A medida ν é absolutamente contínua em relação a μ , ou seja, $\nu \ll \mu$.*

Além disso, a função f é única μ -quase certamente, e é chamada de **derivada de Radon-Nikodym** de ν em relação a μ , sendo denotada por $f = d\nu/d\mu$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Folland [14] e em Cohn [11].

1.1.6 Medidas sobre espaços de produtos

Definição 1.1.13. Seja $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{i \in I}$ uma família de espaços mensuráveis, e considere $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$, o produto cartesiano da família $\{\Omega_i\}_{i \in I}$. Para cada $i \in I$, seja $\pi_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$, a projeção canônica sobre o i -ésimo fator. A σ -álgebra produto de $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$, denotada por $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$, é a σ -álgebra gerada pela coleção de conjuntos da forma $\pi_i^{-1}(A_i)$, com $A_i \in \mathcal{F}_i$ e $i \in I$. Isto é,

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i := \sigma \left(\{ \pi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{F}_i, i \in I \} \right).$$

Na definição acima, podemos dizer também que $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ é a σ -álgebra gerada pelas projeções $\{\pi_i\}_{i \in I}$. Se denotamos $\mathcal{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$, o par $(\Omega, \mathcal{F})$ é chamado de **espaço produto mensurável da família** $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{i \in I}$. No caso de uma família finita de espaços mensuráveis $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i)\}_{i=1}^n$, é possível provar que a σ -álgebra produto $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ coincide com a σ -álgebra gerada pelos conjuntos da forma $A_1 \times \cdots \times A_n$, com $A_i \in \mathcal{F}_i$, que são chamados de retângulos mensuráveis. Ou seja:

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i := \sigma \left(\{ \pi_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, n \} \right) = \sigma \left(\{ A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, n \} \right).$$

Definição 1.1.14. Seja $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)\}_{i=1}^n$ uma família finita de espaços de medida. A **medida produto** sobre $\left(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right)$, que denotamos por $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$, é a medida que satisfaz:

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n),$$

para todo $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$.

Apesar da definição acima indicar naturalmente o comportamento desejado da medida produto sobre retângulos mensuráveis, sua existência e unicidade como medida sobre toda a σ -álgebra produto não são automáticas. Para garantir a construção rigorosa da medida produto, é essencial recorrer ao Teorema de Extensão de Carathéodory (ver Folland [14] ou Durrett [13]), que assegura que uma medida definida inicialmente sobre uma álgebra pode ser estendida de maneira consistente a toda a σ -álgebra gerada. No entanto, essa extensão só resulta em uma medida bem definida e única sob a hipótese de σ -finitude

das medidas envolvidas. Isto é, quando $\mu_1, \dots, \mu_n$ são σ -finitas, então existe uma única medida $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ que satisfaz a condição dos retângulos e está definida sobre a σ -álgebra $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$. No contexto desta dissertação, faremos uso da medida produto para tratar de integrais envolvendo processos estocásticos. Em particular, consideramos o espaço mensurável $([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \lambda)$, onde λ é a medida de Lebesgue, e o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Como ambos os espaços são σ -finitos, a medida de Lebesgue é finita sobre $[0, T]$ e $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade, o Teorema de Extensão de Carathéodory garante que a medida $\lambda \otimes \mathbb{P}$ está bem definida e será utilizada como base para o tratamento de mensurabilidade e integração de processos estocásticos definidos sobre $[0, T] \times \Omega$.

Encerramos esta subseção com um resultado que garante a possibilidade de trocar a ordem de integração em espaços produto. A primeira parte aplica-se a funções não negativas; a segunda, mais geral, exige integrabilidade da função. O enunciado e suas demonstrações podem ser encontrados em Folland [14] e Schilling [36].

Teorema 1.1.11. (Fubini-Tonelli) *Sejam $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ espaços de medida σ -finitos, e seja $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -mensurável. Para cada $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$, definem-se as funções $f_x : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f^y : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_x(y) := f(x, y)$ e $f^y(x) := f(x, y)$, respectivamente. Ademais, definem-se as funções $g : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = \int_{\Omega_2} f_x d\mu_2(y)$ e $h(y) = \int_{\Omega_1} f^y d\mu_1(x)$, respectivamente.*

i) (Tonelli) Se $f \geq 0$, então, para quase todo $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$, as funções f_x e f^y são mensuráveis. Além disso, as funções g e h são mensuráveis, e vale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

ii) (Fubini) Se $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, então, para quase todo $x \in \Omega_1$, $f_x \in L^1(\mu_2)$, e, para quase todo $y \in \Omega_2$, $f^y \in L^1(\mu_1)$. Além disso, as funções g e h , definidas quase em toda parte, pertencem a $L^1(\mu_1)$ e $L^1(\mu_2)$, respectivamente, e vale 1.1.3.

1.2 Teoria da Probabilidade

Nesta seção, apresentamos os principais conceitos da Teoria da Probabilidade que serão utilizados ao longo deste trabalho, com foco nas definições e propriedades fundamentais de variáveis aleatórias, independência, distribuições gaussianas e esperança condicional. Para

uma abordagem mais aprofundada, com detalhes técnicos e demonstrações, remetemos o leitor aos textos de Chung [10], Billingsley [4], Durrett [13], Ahs [1] e Vershynin [39].

1.2.1 Definições Básicas

Iniciamos formalizando a estrutura $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, vista no item 3 do Exemplo 1.1.

Definição 1.2.1. Seja $\mathbb{P}$ uma medida de probabilidade definida sobre um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, isto é, uma medida $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. O espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é denominado **espaço de probabilidade**.

O espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ fornece a estrutura matemática para modelagem de fenômenos aleatórios. Para transformar esta estrutura abstrata em objetos quantificáveis, definimos, a seguir, um tipo especial de funções mensuráveis.

Definição 1.2.2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $(E, \mathcal{E})$ um espaço mensurável. Uma **variável aleatória** é uma função mensurável $X: \Omega \rightarrow E$, ou seja, uma função que para todo B em $\mathcal{E}$, satisfaz

$$X^{-1}(B) = [X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Em muitos contextos da Teoria da Probabilidade, o espaço mensurável $(E, \mathcal{E})$ pode assumir diferentes formas, dependendo da natureza das variáveis aleatórias que se deseja analisar. Como neste trabalho estudaremos aplicações em finanças, destacamos dois casos particulares. Primeiro, quando $E = \mathbb{R}$ e $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$; neste caso, algumas vezes X será chamado de **variável aleatória real**. Segundo, quando $E = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; neste caso, algumas vezes X será chamado de **vetor aleatório n -dimensional**, e denotamos por $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$.

Embora uma variável real seja um caso particular de um vetor aleatório com $n = 1$, apresentaremos a seguir definições separadas para esses dois casos, por razões de clareza. Antes disso, pela Definição 1.1.6, a σ -álgebra gerada por uma variável aleatória X é dada por

$$\sigma(X) := \sigma(\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}) \subset \mathcal{F}, \quad (1.2.1)$$

sendo esta a menor σ -álgebra em Ω que torna X mensurável.

Definição 1.2.3. Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória real definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- (1) A medida *push-forward* de $\mathbb{P}$ por X , ou seja, a medida $\mathbb{P}_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}),$$

é chamada de **lei** (ou **distribuição**) da variável aleatória X , que denotamos por $\mathcal{L}(X)$.

- (2) A função de distribuição associada à medida $\mathbb{P}_X$, ou seja, a função $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_X(x) := \mathbb{P}_X((-\infty, x])$ é chamada de **função de distribuição** da variável aleatória X .

Definição 1.2.4. Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor aleatório definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- (1) A **lei** (ou **distribuição**) de um vetor aleatório $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$, denotada por $\mathcal{L}(X)$, é a medida *push-forward* de $\mathbb{P}$ por X , ou seja, é a medida $\mathbb{P}_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B\}).$$

A lei de cada X_i , para $i = 1, \dots, n$, isto é, $\mathbb{P}_{X_i}$ definida por $\mathbb{P}_{X_i}(B) := \mathbb{P}(X_i \in B)$, é chamada de **lei marginal** de X_i .

- (2) A função de distribuição associada à medida $\mathbb{P}_X$, isto é, a função $F_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F_X(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}_X((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$

é chamada de **função de distribuição** (conjunta) de X .

Observamos que a lei de um vetor aleatório $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ determina as leis marginais de seus componentes X_i , mas o contrário não ocorre em geral.

Definição 1.2.5. Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- (1) Dizemos que X é **absolutamente contínua** quando sua lei $\mathbb{P}_X$ é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue λ^n , isto é, quando $\mathbb{P}_X \ll \lambda^n$.
- (2) Seja $\mathbb{P}_X \ll \lambda^n$. A derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}_X$ com respeito a λ^n , isto é, a função $f_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_X = d\mathbb{P}_X/d\lambda^n$, é chamada de **densidade** de X .

Nesse caso, tem-se:

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X d\lambda^n, \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Adicionalmente, se F_X for diferenciável em $x = (x_1, \dots, x_n)$, vale

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_X(x_1, \dots, x_n),$$

Definição 1.2.6. Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A **esperança** de X , denotamos por $\mathbb{E}[X]$, é definida por

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X d\mathbb{P},$$

desde que a integral esteja bem definida, isto é, pelo menos uma das duas quantidades $\int_{\Omega} X^+ d\mathbb{P}$ ou $\int_{\Omega} X^- d\mathbb{P}$ seja finita.

Assim, $\mathbb{E}[X]$ é a integral da função $\mathcal{F}$ -mensurável X em relação à medida de probabilidade $\mathbb{P}$, de modo que todos os resultados da teoria da integração são aplicáveis.

Em muitas situações, calcular $\mathbb{E}[X]$ integrando sobre Ω pode ser inconveniente. O resultado a seguir permite reescrever essa esperança como uma integral sobre $\mathbb{R}^n$, em relação à medida de probabilidade induzida $\mathbb{P}_X$.

Teorema 1.2.1. *Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma variável aleatória definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e seja $\mathbb{P}_X$ sua lei. Então, para toda função Borel mensurável $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mathbb{P}_X(x),$$

desde que a integral exista.

Em particular, se X for uma variável aleatória real, então

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x),$$

desde que a integral exista.

Além disso, se $\mathbb{P}_X \ll \lambda^n$, com densidade $f_X = d\mathbb{P}_X/d\lambda^n$, então

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f_X d\lambda^n.$$

Definição 1.2.7. Seja $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ um vetor aleatório definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos:

- (1) Se $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$ para $i = 1, \dots, n$, o vetor $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])^\top$ é chamado de **vetor médias** de X .
- (2) Se, para todo $i = 1, \dots, n$, $X_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, então a matriz

$$\Sigma = \text{Cov}(X) = [\text{Cov}(X_i, X_j)]_{n \times n} = (\mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)])_{n \times n}$$

é denominada **matriz de covariância** de X . Neste caso, definimos a variância de X_i como $\text{Var}[X_i] := \text{Cov}(X_i, X_i)$, para $i = 1, \dots, n$.

A matriz de covariância Σ de um vetor aleatório X é sempre simétrica e semidefinida positiva, ou seja, $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$ para todo i, j , e $y^\top \Sigma y \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Quando $\det(\Sigma) > 0$, dizemos que a lei de X é **não-degenerada**; caso contrário, se $\det(\Sigma) = 0$, a lei é dita **degenerada** (ou **singular**).

1.2.2 Independência

Definição 1.2.8. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Uma família de eventos $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ é dita **independente** se, para todo subconjunto finito J de I , temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Definição 1.2.9. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$, com $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}$, uma família de coleções de eventos. Dizemos que $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ é **independente** se toda família $\{A_i\}_{i \in I}$, com $A_i \in \mathcal{C}_i$, é independente.

Definição 1.2.10. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de variáveis aleatórias reais sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que $\{X_i\}_{i \in I}$ é **independente** se a família de σ -álgebras $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$ é independente.

Das definições anteriores decorre que uma família $\{X_i\}_{i \in I}$ de variáveis aleatórias definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é independente se, e somente se, para todo subconjunto finito $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ e para todos os conjuntos $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_{i_1} \in B_1, \dots, X_{i_n} \in B_n\}) &= \mathbb{P}(\{X_{i_1} \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_{i_n} \in B_n\}) \\ &= \mathbb{P}(X_{i_1} \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \in B_n). \end{aligned}$$

O teorema a seguir caracteriza a independência de variáveis aleatórias através de suas leis, funções de distribuição e, no caso absolutamente contínuo, densidades.

Teorema 1.2.2. Sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sejam $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ variáveis aleatórias com leis $\mathbb{P}_{X_i}$, $i = 1, \dots, n$, respectivamente, e seja $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ o vetor aleatório com lei $\mathbb{P}_X$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1) $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ são independentes;
- 2) $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$;

$$3) F_X(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, se assumirmos que $\mathbb{P}_X \ll \lambda_n$, então $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ são independentes se e somente se,

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad \text{para quase todo } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

A proposição abaixo lista propriedades fundamentais de variáveis aleatórias independentes:

Proposição 1.2. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.*

- 1) *Se $\{X_i\}_{i \in I}$ uma família de variáveis aleatórias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\{g_i\}_{i \in I}$ uma família de funções Borel mensuráveis, então a família de variáveis aleatórias $\{g_i \circ X_i\}_{i \in I}$ é independente.*
- 2) *Se $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ são independentes com $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$, então $\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n]$.*
- 3) *Se $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ são independentes com $\mathbb{E}[|X_i|^2] < \infty$, então*

$$\text{Var}[X_1 + \cdots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \cdots + \text{Var}[X_n].$$

1.2.3 A Distribuição Normal Multivariada

Uma variável aleatória $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tem **distribuição gaussiana** (ou **normal**) padrão, que denota-se por $\mathcal{N}(0, 1)$, se sua função densidade $f_Z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.2.11. *Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que X tem **distribuição gaussiana univariada** se existem constantes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, e uma normal padrão Z , tais que $X = aZ + b$.*

Inclui-se o caso degenerado ($a = 0$) se $\mathbb{P}(X = b) = 1$. Uma variável aleatória com distribuição gaussiana univariada de média μ e variância σ^2 é denotada por $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Definição 1.2.12. *Seja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor aleatório de dimensão n , definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ tem **distribuição gaussiana multivariada** (ou **normal multivariado**) se todas as combinações lineares de suas coordenadas $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ tem distribuição gaussiana univariada (possivelmente degenerada).*

Neste caso, usamos a notação $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ para denotar que X é uma gaussiana multivariada com vetor de médias μ e matriz de covariância Σ de ordem $n \times n$. Se $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$, dizemos que X tem **distribuição normal multivariado padrão**.

Teorema 1.2.3. *Seja $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, e defina $Y = BX + b$. Então,*

$$Y \sim \mathcal{N}(B\mu + b, B\Sigma B^\top).$$

O teorema acima é útil para obter um vetor aleatório $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ como uma transformação afim de um vetor aleatório $Z \sim \mathcal{N}(0, I_d)$. Tem-se que $X = \Sigma^{1/2}Z + \mu$, onde $\Sigma^{1/2}$ é uma raiz quadrada da matriz de covariância Σ , isto é, uma matriz B tal que $BB^\top = \Sigma$.

Teorema 1.2.4. *Seja $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ com $\det \Sigma > 0$. Então X admite uma densidade $f_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x - \mu) \right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.2.5. *Seja $X = (X_1, \dots, X_n)^\top \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Então as componentes $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ são independentes se, e somente se,*

$$\Sigma_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \quad \text{para } i \neq j.$$

Além disso, se $\det \Sigma > 0$, então a função densidade de X é dada por:

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi \Sigma_{i,i}}} \exp \left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\Sigma_{i,i}} \right).$$

1.2.4 Esperança Condicional

O conceito de esperança condicional é fundamental em diversas áreas da Teoria da Probabilidade. Processos estocásticos importantes, como martingales e cadeias de Markov, são definidos a partir desse conceito.

Definição 1.2.13. Sejam X uma variável aleatória em $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{G}$ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$. A **esperança condicional** de X dada a σ -álgebra $\mathcal{G}$, denotada por $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, é a variável aleatória $\mathcal{G}$ -mensurável (única $\mathbb{P}$ -quase certamente) que satisfaz:

$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_B X d\mathbb{P}, \quad \forall B \in \mathcal{G}.$$

Pode-se demonstrar que a esperança condicional está bem definida e é única quase certamente, como consequência de uma versão mais geral do Teorema de Radon-Nikodym, válida para medidas com sinal. Uma apresentação detalhada pode ser encontrada, por exemplo, em Billingsley [4].

Teorema 1.2.6. (Propriedades da Esperança Condicional) Sejam $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $\mathcal{G}$ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$. Valem as seguintes propriedades:

- 1) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$.
- 2) *Linearidade:* Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$.
- 3) *Desigualdade de Jensen condicional:* Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, $\varphi(X) \in L^1$. Então,

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}].$$

- 4) *Propriedade da torre:* Seja $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{G}$. Então,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}].$$

- 5) *Suponha que $XZ \in L^1$ e que Z é $\mathcal{G}$ -mensurável. Então,*

$$\mathbb{E}[XZ|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

Em particular, se X é $\mathcal{G}$ -mensurável, então $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.

- 6) *Se $\mathcal{H}$ é uma σ -álgebra independente de $\sigma(\mathcal{G}, \sigma(X))$, então*

$$\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

Em particular, se X é independente de $\mathcal{H}$, então $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X]$.

- 7) *Seja $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{G}$, e seja X uma variável $\mathcal{G}$ -mensurável. Então,*

$$\mathbb{E}[XY | \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}] | \mathcal{H}].$$

Demonstração. A demonstração completa deste resultado pode ser encontrada em Billingsley [4]. Para uma abordagem semelhante, ver Durrett [13]. $\square$

1.3 Processos Estocásticos

1.3.1 Definições Básicas

Definição 1.3.1. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, $(E, \mathcal{E})$ um espaço mensurável e I um conjunto de índices. Um **processo estocástico** sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexado por I e com valores em E , é uma família $\{X_t\}_{t \in I}$ de variáveis aleatórias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com valores em E .

Assim como no caso das variáveis aleatórias, nesta dissertação consideraremos apenas processos estocásticos com valores em $\mathbb{R}^n$, também chamados de processos estocásticos de dimensão n , ou seja, quando $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Além disso, o conjunto de índices I será sempre um subconjunto de $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}_+$, ou o intervalo fechado $[0, T]$, com $T > 0$. Processos com esse tipo de indexação são chamados de **processos estocásticos a tempo contínuo**. Embora também seja comum considerar $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{Z}$, casos em que o processo é dito **a tempo discreto**, esses não serão abordados neste trabalho.

Observação 1.3.1. Como mencionado por Oksendal [42], uma abordagem que costuma ser mais natural na Análise Estocástica é ver um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in I}$ como uma função de duas variáveis $X: I \times \Omega \rightarrow E$, $(t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ pois, como será visto na construção da integral de Itô no Capítulo 2, será essencial que X seja mensurável em relação à $\mathcal{B}(I) \otimes \mathcal{F}$. Além disso, essa perspectiva evidencia que um processo estocástico X induz dois tipos distintos de funções:

- Para cada $\omega \in \Omega$ fixado, o processo X define a função

$$\begin{aligned} X(\cdot, \omega): I &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto X(t, \omega), \end{aligned}$$

que é chamada de **trajetória** (ou **caminho de amostra**) do processo.

- Para cada $t \in I$ fixado, o processo X define a função

$$\begin{aligned} X(t, \cdot): \Omega &\longrightarrow E \\ \omega &\longmapsto X(t, \omega), \end{aligned}$$

isto é, uma **variável aleatória**.

1.3.2 Lei de um Processo Estocástico

Assim como uma variável aleatória possui uma lei de probabilidade associada, o mesmo ocorre com processos estocásticos. Nesta subseção, definimos a lei de um processo estocástico real e, como seu estudo direto é geralmente complexo, utilizamos as distribuições finito-dimensionais como principal ferramenta de análise. Encerramos com propriedades relevantes que dependem apenas dessa lei. Os resultados apresentados foram adaptados de Kallenberg [20], Billingsley, P. [4], Rogers, D. W. [25] e Rosenthal [34], onde também podem ser encontradas extensões para processos com valores em $\mathbb{R}^n$.

Seja $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ um processo estocástico real definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Como discutido na subseção anterior, podemos ver X como uma função

$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que, para cada $\omega \in \Omega$ fixo, a função $X(\cdot, \omega) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ representa uma trajetória do processo. Outra forma útil, é considerar X como uma aplicação $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$, definida por $\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$, onde $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ denota o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}$. Equipando a $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ com a σ -álgebra produto de cópias de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ indexadas por $\mathbb{R}_+$, isto é, a σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+})$, a aplicação $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ torna-se $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}))$ -mensurável. Logo, o processo X é uma variável aleatória com valores em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$, o que permite definir sua lei.

Antes de definir a lei de um processo estocástico, enunciaremos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em Kallenberg [20].

Proposição 1.3. *Seja $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ um processo estocástico real definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se considerarmos em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ a σ -álgebra produto $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+})$, então a aplicação $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ é $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}))$ -mensurável.*

Estabelecida essa mensurabilidade, definimos a seguir a lei de um processo estocástico, de maneira análoga à definição da lei de uma variável aleatória.

Definição 1.3.2. A lei de um processo estocástico real $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é a lei da variável aleatória $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$, isto é, a medida *push-forward* $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}) \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B), \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}).$$

Trabalhar diretamente com a medida $\mathbb{P}_X$ pode ser bastante difícil. Por essa razão, é comum estudá-la por meio de seu comportamento em subconjuntos finitos de $\mathbb{R}_+$, conforme os resultados a seguir. Antes, apresentamos uma observação.

Observação 1.3.2. Seja μ uma medida de probabilidade sobre $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}))$. Dado um subconjunto finito $J = \{t_1, \dots, t_k\} \subset \mathbb{R}_+$, a medida *push-forward* de μ pela projeção natural $\pi_J : \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \rightarrow \mathbb{R}^k$, isto é, a medida de probabilidade $\mu_J : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \rightarrow [0, 1]$, é definida por

$$\mu_J(B) := \mu(\pi_J^{-1}(B)), \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Definição 1.3.3. Seja $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}), \mu)$ um espaço de probabilidade. A família de probabilidades $\{\mu_J : J \subset \mathbb{R}_+ \text{ finito}\}$, onde μ_J é definida como na observação 1.3.2, é chamada de **família de distribuições finito-dimensionais** da medida μ .

Se $\mu = \mathbb{P}_X$ for a lei de um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, dizemos que $\{\mu_J : J \subset \mathbb{R}_+ \text{ finito}\}$ é a **família de distribuições finito-dimensionais** do processo X .

O teorema a seguir, um dos resultados centrais desta teoria, foi adaptada de Billingsley [4], onde também pode ser encontrada sua demonstração.

Teorema 1.3.1. (Extensão de Kolmogorov). Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\{\mu_{t_1, \dots, t_k} : \{t_1, \dots, t_k\} \subset \mathbb{R}_+\}$ uma família de medidas de probabilidade $\mu_{t_1, \dots, t_k} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \rightarrow [0, 1]$, satisfazendo as condições de consistência:

- 1) Para toda permutação σ do conjunto $\{1, \dots, k\}$, e para todo produto de conjuntos mensuráveis $F_1 \times \dots \times F_k \subset \mathbb{R}^k$, vale:

$$\mu_{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(k)}}(F_{\sigma(1)} \times \dots \times F_{\sigma(k)}) = \mu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k).$$

- 2) Para todo $m \in \mathbb{N}$, quaisquer $t_1, \dots, t_{k+m} \in \mathbb{R}_+$, e todo conjunto mensurável $F_1 \times \dots \times F_k \subset \mathbb{R}^k$, vale:

$$\mu_{t_1, \dots, t_k}(F_1 \times \dots \times F_k) = \mu_{t_1, \dots, t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_k \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{m \text{ vezes}}).$$

Então, existe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e um processo estocástico real $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, definido nesse espaço, cuja família de distribuições finito-dimensionais coincide com a família $\{\mu_{t_1, \dots, t_k} : \{t_1, \dots, t_k\} \subset \mathbb{R}_+\}$.

Corolário 1.1. A lei de um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é completamente determinada pela família associada de distribuições finito-dimensionais, isto é, por:

$$\mathbb{P}_{X; t_1, \dots, t_k}(B) := \mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \quad \{t_1, \dots, t_k\} \subset \mathbb{R}_+, \quad k \in \mathbb{N}.$$

O teorema de extensão de Kolmogorov mostra que, desde que tenhamos uma família razoável (consistente) de distribuições finito-dimensionais, podemos construir um processo estocástico real (na verdade, um espaço de probabilidade que o contém) tal que sua lei tenha como distribuições finito-dimensionais exatamente essa família. Assim, dado um processo estocástico definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, podemos sempre realizá-lo no espaço canônico $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}), \mu)$, onde $\mu = \mathbb{P}_X$ é a lei do processo.

Encerramos esta subseção com a definição de algumas propriedades importantes de processos estocásticos que são determinadas unicamente por sua lei.

Definição 1.3.4. Seja $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico real definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que:

- (1) X **gaussiano** se, para qualquer escolha $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$, o vetor aleatório $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ tem distribuição normal multivariada;
- (2) X tem **incrementos independentes** se, para quaisquer $u \leq r \leq s \leq t$, as variáveis aleatórias $X_t - X_s$ e $X_r - X_u$ são independentes;

(3) X tem **incrementos estacionários** se, para quaisquer $s \leq t$ em I , tivermos:

$$\mathcal{L}(X_t - X_s) = \mathcal{L}(X_{t'-s'}), \quad \text{sempre que } t - s = t' - s'.$$

1.3.3 Equivalência de Processos e Propriedades de Trajetória

Em geral, dois processos estocásticos definidos sobre um mesmo espaço de probabilidade podem ter a mesma lei e, ainda assim, apresentar comportamentos bastante distintos quando considerados como aplicações de Ω em $\mathbb{R}^I$. Um exemplo dessa situação pode ser encontrado em Øksendal [42] (Exercício 2.9). Isso evidencia que a igualdade em lei não é suficiente para caracterizar completamente o comportamento de um processo estocástico. Por essa razão, precisamos de conceitos mais fortes de equivalência entre processos, além da igualdade em lei.

Definição 1.3.5. Sejam $X = \{X_t\}_{t \in I}$ e $Y = \{Y_t\}_{t \in I}$ dois processos definidos sobre um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que:

- (1) Y é uma **modificação** (ou **versão**) de X se, para cada $t \in I$ fixo, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.
- (2) Y é **indistinguível** de X se $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \in I\}) = 1$, ou seja, se $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ para todo t , $\mathbb{P}$ -quase sempre.

Observe que, se dois processos são indistinguíveis, então um é uma modificação do outro. Além disso, se Y é uma modificação de X , então ambos possuem a mesma lei — isto é, têm as mesmas distribuições finito-dimensionais.

Teorema 1.3.2. (Critério de Continuidade de Kolmogorov) Seja $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico definido em algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha que, para todo $T > 0$, existam constantes $\alpha > 0$, $r > 0$ e $K > 0$ tais que

$$E[|X_t - X_s|^r] \leq K|t - s|^{1+\alpha}, \quad 0 \leq s < t \leq T.$$

Então, existe uma modificação $\tilde{X}$ de X cujas trajetórias são quase certamente contínuas.

Demonstração. Ver em Ikeda e Watanabe [15] □

No que diz respeito às propriedades de regularidade das trajetórias, as classes mais importantes de processos são as seguintes:

Definição 1.3.6. Seja $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico a valores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que:

- (1) X é contínuo se, $\mathbb{P}$ -quase sempre, todas as suas trajetórias são contínuas.

- (2) X é càdlàg se, $\mathbb{P}$ -quase sempre, todas as suas trajetórias são contínuas à direita e possuem limites finitos pela esquerda. Ou seja, para todo $\forall t > 0$,

$$X_t = X_{t+} := \lim_{s \downarrow t} X_s \quad \text{e} \quad X_{t-} := \lim_{s \uparrow t} X_s \quad \text{existem e são finitos.}$$

- 3) Dizemos que X é càdlàe se, $\mathbb{P}$ -quase sempre, todas as suas trajetórias são contínuas à esquerda e possuem limites finitos pela direita em todo ponto. Ou seja, para todo $\forall t > 0$,

$$X_t = X_{t-} := \lim_{s \uparrow t} X_s \quad \text{e} \quad X_{t+} := \lim_{s \downarrow t} X_s \quad \text{existem e são finitos.}$$

Encerramos esta subseção com a definição de um tipo particular de processo estocástico. Embora técnica e não apresentada de forma explícita em textos de referência como Øksendal [42], Karatzas e Shreve [21] ou Protter [32], essa definição será fundamental para certos resultados discutidos nas próximas seções, especialmente no contexto do modelo de Black-Scholes generalizado.

Definição 1.3.7. Um processo estocástico real $X = \{X_t\}_{t \in I}$, definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é chamado **determinístico** se existe uma função $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X(t, \omega) = f(t), \quad \text{para todo } t \in I \text{ e para todo } \omega \in \Omega.$$

Ou seja, um processo estocástico determinístico é constante em ω , implicando que todas as suas trajetórias coincidem com a função f . Trata-se, portanto, de um processo sem comportamento aleatório.

1.3.4 Mensurabilidade de Processos Estocásticos

Nesta subseção, apresentamos os conceitos fundamentais de mensurabilidade para o desenvolvimento da teoria da integração de Itô, pois asseguram que os processos envolvidos sejam mensuráveis com respeito às estruturas de tempo e informação do modelo. O conteúdo desta subseção é inspirado nas exposições de Pascucci [30], Jeanblanc [19] e Karatzas e Shreve [21], com adaptações à notação e ao estilo adotados nesta dissertação.

Definição 1.3.8. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto de índices. Uma **filtração** sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indexada em I , é uma família $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ de sub- σ -álgebras de $\mathcal{F}$ tal que:

$$\forall s, t \in I, \quad s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

Neste caso, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ é denominado **espaço de probabilidade filtrado**.

Nas aplicações desta dissertação, a filtração estará, em geral, associada a um processo estocástico.

Definição 1.3.9. Seja $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. A **filtração natural** de X é uma filtração sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, denotada por $\tilde{\mathbb{F}}^X = \{\tilde{\mathcal{F}}_t^X\}_{t \in I}$, tal que, para todo $t \in I$,

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^X := \sigma(\{X_s : s \leq t\}).$$

A filtração natural $\tilde{\mathbb{F}}^X$ representa formalmente a informação disponível até o tempo t por meio da observação do processo X . Observe que a filtração natural está bem definida, pois para qualquer processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in I}$ definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\tilde{\mathcal{F}}_t^X := \sigma(\{X_s : s \leq t\})$ para cada $t \in I$, é uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$ (ver 1.2.1), e, portanto, está bem definida. Além disso, como $\{X_s : s \leq t\} \subset \{X_s : s \leq u\}$ para $t \leq u$, segue que $\tilde{\mathcal{F}}_t^X \subset \tilde{\mathcal{F}}_u^X$, o que garante que $\tilde{\mathbb{F}}^X$ satisfaz a Definição 1.3.8.

Dessa forma, concluímos que a filtração natural de qualquer processo estocástico pode ser construída de forma canônica a partir do próprio processo. De modo mais específico, se $X = \{(X_t^1, \dots, X_t^n)\}_{t \in I}$ é um processo estocástico com valores em $\mathbb{R}^n$, então sua filtração natural $\tilde{\mathbb{F}}^X$ é dada por:

$$\tilde{\mathcal{F}}_t^X := \sigma(\{X_s^i : s \leq t, i = 1, \dots, n\}), \quad \forall t \in I,$$

ou seja, a menor σ -álgebra que torna mensuráveis todas as componentes do processo até o instante t . No caso real, para cada $t \in I$, $\tilde{\mathcal{F}}_t^X := \sigma(\{X_s : s \leq t\})$ é a menor σ -álgebra que torna mensuráveis todas as variáveis aleatórias X_s para $s \leq t$.

Definição 1.3.10. Sejam $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ uma filtração e $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico, ambos definidos sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que X é **adaptado** à filtração $\mathbb{F}$ (ou que é **$\mathbb{F}$ -adaptado**) se, para cada $t \in I$, a variável aleatória X_t for $\mathcal{F}_t$ -mensurável.

Ao longo desta dissertação, diremos que um processo estocástico X está definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ sempre que X estiver definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e for adaptado à filtração $\mathbb{F}$.

Da definição 1.3.9, tem-se, em particular, que, para cada $t \in I$, que a σ -álgebra $\tilde{\mathcal{F}}_t^X$ é a menor σ -álgebra que torna X_t mensurável. Assim, se X é $\mathbb{F}$ -adaptado, então $\tilde{\mathcal{F}}_t^X \subset \mathcal{F}_t$, para todo $t \in I$. Portanto, conclui-se que a filtração natural $\tilde{\mathbb{F}}^X$ é a menor filtração com respeito à qual o processo X é adaptado.

Definição 1.3.11. Seja $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ uma filtração sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que $\mathbb{F}$ satisfaz as **condições usuais** com respeito a $\mathbb{P}$ se:

- (1) $\mathcal{F}_0$ contém $\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(F) = 0\}$, família dos eventos $\mathbb{P}$ -nulos.
- (2) $\mathbb{F}$ é contínua à direita, isto é, para todo $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.

Observe que a partir do item (1) da definição acima, na filtração $\mathbb{F}$ tem-se que para cada $t > 0$, a σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ também contém o conjunto $\mathcal{N}$.

Como mencionado por Pascucci [30], em geral, mesmo que X seja um processo estocástico contínuo, sua filtração natural $\tilde{\mathbb{F}}^X$ pode não satisfazer as condições usuais e, em particular, pode não ser contínua à direita. Isso motiva a seguinte definição, que embora técnica, é de grande importância no desenvolvimento do Cálculo Estocástico.

Definição 1.3.12. Sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sejam $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico com sua filtração natural $\tilde{\mathbb{F}}^X = \{\tilde{\mathcal{F}}_t^X\}_{t \in I}$ e $\mathcal{N} = \{F \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(F) = 0\}$ a família dos eventos $\mathbb{P}$ -nulos. Define-se, para cada $t \in I$,

$$\mathcal{F}_t^X := \bigcap_{\varepsilon > 0} \hat{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}^X, \quad \text{onde} \quad \hat{\mathcal{F}}_t^X := \sigma(\tilde{\mathcal{F}}_t^X \cup \mathcal{N}).$$

Pode-se verificar que $\mathbb{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in I}$ é uma filtração que satisfaz as condições usuais. Esta filtração é chamada de **filtração padrão** de X .

Observação 1.3.3. Ao longo deste trabalho, salvo indicação em contrário, dada uma filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$, assumimos implicitamente que ela satisfaz as condições usuais (Definição 1.3.11). Em particular, dado um processo estocástico X , empregaremos, em geral, a filtração padrão $\mathbb{F}^X$ em vez da filtração natural $\tilde{\mathbb{F}}^X$.

Na definição a seguir, introduzimos um tipo especial de processo estocástico, cuja propriedade de mensurabilidade será fundamental para o desenvolvimento da teoria de integração de Itô.

Definição 1.3.13. Sejam $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico e $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ uma filtração, ambos definidos sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dizemos que X é **progressivamente mensurável** com respeito a $\mathbb{F}$ se, para todo $t \in I$, a restrição $X|_{[0,t] \times \Omega}: [0,t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável com respeito à σ -álgebra produto $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

É claro que todo processo progressivamente mensurável é mensurável, isto é, $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}$ -mensurável. No entanto, é importante destacar que a mensurabilidade de cada variável aleatória X_t não implica, em geral, na mensurabilidade progressiva do processo X .

Uma vez garantida a mensurabilidade do processo X , podemos considerar integrais sobre $I \times \Omega$.

Teorema 1.3.3. *Seja $X = \{X_t\}_{t \in I}$ um processo estocástico mensurável sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se $X \in L^1([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes \mathbb{P})$, então*

$$\int_{I \times \Omega} X(t, \omega) d(\lambda \otimes \mathbb{P})(t, \omega) = \int_I \mathbb{E}[X_t] d\lambda(t) = \mathbb{E} \left[\int_I X_t d\lambda(t) \right] < +\infty.$$

Pelo Teorema de Fubini-Tonelli 1.1.11, segue que se X é um processo progressivamente mensurável com respeito a uma filtração $\mathbb{F}$, então ele é $\mathbb{F}$ -adaptado.

1.3.5 Pocesso de Wiener

Antes de estudar o processo de Wiener, elemento fundamental na teoria de integração de Itô e em aplicações em finanças, introduzimos a definição de Martingale. Martingales são exemplos importantes de processos estocásticos que modelam cenários onde a esperança condicional de ganho ou perda futura, dado o passado, é nula. Em outras palavras, representam contextos onde a informação acumulada até o presente não permite obter vantagem estatística futura, caracterizando assim um "jogo justo".

Martingales

Definição 1.3.14. Sejam $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico e $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ uma filtração, ambos definidos sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Diz-se que X é uma **$\mathbb{F}$ -martingale** se:

- (i) X é $\mathbb{F}$ -adaptado;
- (ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$, para todo $t \in [0, T]$;
- (iii) Para quaisquer $s, t \in I$ com $0 \leq s \leq t$, tem-se $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ $\mathbb{P}$ -quase certamente.

Se, na definição acima, adicionalmente X satisfaz $\mathbb{E}[|X_t|^2] < \infty$ para todo $t \in [0, T]$, X é dita **martingale quadrado integrável**. Por outro lado, se a igualdade do item (iii) for substituída por $\leq$ ou $\geq$, o processo X é chamado de **submartingale** ou **supermartingale**, respectivamente. A propriedade característica dos martingales é a condição (iii), que, em termos intuitivos, afirma que a melhor previsão para o valor futuro do processo, dada a informação disponível até o presente, é o seu valor atual. Essa propriedade pode ser ilustrada tomando esperança em ambos os lados da igualdade em (iii), o que implica $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s]$, para $0 \leq s \leq t$. Logo, $\mathbb{E}[X_t - X_s] = 0$, o que significa que o ganho (ou a perda) esperado entre os instantes s e t é nulo, caracterizando um "jogo justo".

Como será discutido no próximo capítulo, as integrais de Itô, vistas como processos estocásticos, são exemplos importantes de martingales. Esse resultado é fundamental para a

formulação matemática da precificação de opções no modelo de Black-Scholes, no qual a hipótese de ausência de arbitragem está intrinsecamente ligada à existência de uma medida de probabilidade equivalente sob a qual os preços normalizados dos ativos são martingales.

Processo de Wiener

Processos de Wiener modelam movimentos imprevisíveis e contínuos no tempo, caracterizados por incrementos independentes e distribuídos normalmente. Antes de estudar este importante exemplo de processo estocástico, o qual terá um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho, em especial como base da teoria da integral de Itô, é relevante contextualizar brevemente sua origem histórica. O processo de Wiener surgiu como a formulação matemática rigorosa do fenômeno físico conhecido como movimento browniano. O primeiro registro científico desse fenômeno data de 1827, quando o botânico escocês Robert Brown descreveu, em seu artigo [9], publicado na revista *Edinburgh Philosophical Journal*, que grãos de pólen suspensos em uma substância líquida, observados ao microscópio, exibiam um movimento irregular e inexplicável. Independentemente da descoberta de Brown, o matemático francês Louis Bachelier, em sua tese de doutorado intitulada "*Théorie de la spéculation*" (1900) [2], orientado por Henri Poincaré, propôs que as flutuações de preços em mercados financeiros seguiriam padrões aleatórios e imprevisíveis — um análogo econômico do fenômeno físico observado por Brown. Cinco anos depois, Albert Einstein (1905) utilizou um modelo matemático semelhante para explicar o movimento de partículas em fluidos, causado por colisões com moléculas de água. A partir das previsões teóricas de Einstein, o físico francês Jean Perrin (1909) forneceu evidências experimentais conclusivas da existência de átomos e moléculas, trabalho que lhe rendeu o Prêmio Nobel de Física em 1926. Em 1923, o matemático Norbert Wiener apresentou a formulação matemática do movimento Browniano, uma abstração matemática das observações empíricas de Brown e Bachelier, em seu trabalho *Differential space* [40]. Nesse trabalho, com base no Teorema de Extensão de Kolmogorov 1.3.1 e no Critério de Continuidade de Kolmogorov 1.3.2, Wiener demonstrou a existência e unicidade de um processo com as propriedades listadas na definição a seguir.

Definição 1.3.15. Um **processo de Wiener unidimensional** $\mathbb{F}$ -adaptado de parâmetro $\sigma^2 > 0$, denotado por $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$, é um processo estocástico real $\mathbb{F}$ -adaptado definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $W_0 = 0$, $\mathbb{P}$ -quase certamente;
- (ii) W possui trajetórias contínuas $\mathbb{P}$ -quase certamente;
- (iii) Para quaisquer $s, t \in [0, T]$ com $s < t$, a variável aleatória $W_t - W_s$ é independente de $\mathcal{F}_s$;
- (iv) Para quaisquer $s, t \in [0, T]$ com $s < t$, a distribuição de $W_t - W_s$ é $\mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$.

Na definição acima, se $\sigma^2 = 1$, W é chamado de processo de Wiener padrão $\mathbb{F}$ -adaptado. Uma observação importante a destacar é que qualquer processo de Wiener que não seja padrão pode ser transformado em um processo de Wiener padrão $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t\}_{t \in [0, T]}$ $\mathbb{F}$ -adaptado. Uma forma de fazer isso é definir $\tilde{W}_t = W_t/\sigma$, para todo $t \in [0, T]$. É claro que este novo processo satisfaz todas as propriedades da definição acima, mas agora tem-se que $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, para quaisquer $s, t \in [0, T]$ com $s < t$. Portanto, a menos que seja especificado o contrário e sem perda de generalidade, a partir de agora assumiremos que o processo de Wiener é padrão. Adicionalmente, embora em muitos textos a propriedade do item (iii) diga que W tem incrementos independentes, essa condição é uma consequência do item (iii) acima, pois se $W_t - W_s$ é independente de $\mathcal{F}_s$, então ele também é independente de $W_u - W_v$ para $0 \leq v \leq u \leq s$, e W é um processo com incrementos independentes. Dessa forma, podemos dizer que a afirmação de que W é um processo de Wiener unidimensional $\mathbb{F}$ -adaptado é mais forte do que simplesmente dizer que W é um processo de Wiener unidimensional. No decorrer deste trabalho, a filtração $\mathbb{F}$ sempre será assumida como sendo a filtração padrão de W , isto é, $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$, onde $\mathbb{F}^W$ é como na Definição 1.3.12.

Antes de enunciar um teorema listando as principais propriedades do processo de Wiener, vemos na definição a seguir a p -variação de uma função sobre um intervalo, um conceito fundamental que está intimamente ligado à natureza irregular das trajetórias do processo de Wiener.

Definição 1.3.16. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p > 0$ um número real. Seja $\Pi([a, b])$ o conjunto de todas as partições $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. A p -variação de f , denotada por $v_p(f)$, é definida por

$$v_p(f) := v_p(f; [a, b]) := \sup\{s_p(f; \pi) : \pi \in \Pi([a, b])\},$$

onde $s_p(f; \pi) := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p$ para $\pi = \{x_i : i = 0, \dots, n\}$. Se $v_p(f; [a, b]) < \infty$, dizemos que a função f tem p -variação limitada em $[a, b]$.

O comportamento das trajetórias de processos estocásticos, em especial do processo de Wiener, pode ser analisado por meio da sua p -variação. Se $W(\cdot, \omega)$ é uma trajetória do processo de Wiener $W = \{W_t\}_{t \in I}$, então sua p -variação é o valor $v_p(W(\cdot, \omega); I)$. Se considerarmos o intervalo $[0, t]$, para o caso particular de $p = 1$, o valor $v_1(W(\cdot, \omega); [0, t])$ é denominado **variação total** da trajetória $W(\cdot, \omega)$ em $[0, t]$, e para o caso $p = 2$, o valor $v_2(W(\cdot, \omega); [0, t])$, que denotaremos simplesmente por $[W]_t$, é denominado **variação quadrática** de W em $[0, t]$, mas deve entender-se que nessa notação, está implicitamente indicado que se trata da 2-variação das trajetórias do processo de Wiener W no intervalo $[0, t]$.

Como veremos no teorema a seguir, a variação quadrática $[W]_t$ das trajetórias do processo de Wiener é finita $\mathbb{P}$ -quase sempre, o que viabiliza a definição da integral de Itô. Além disso, veremos que, para $p < 2$, a p -variação é infinita, e isto implica que as trajetórias do processo de Wiener não podem ser tratadas pelos métodos do cálculo clássico.

Teorema 1.3.4. *Seja $W = \{W_t\}_{t \in I}$ um processo de Wiener definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Valem as seguintes propriedades:*

- 1) *Para todo $t \in I$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$;*
- 2) *Para todo $s, t \in I$, $\text{Cov}(W_t, W_s) = \min\{t, s\}$;*
- 3) *W é um processo gaussiano;*
- 4) *(Variação quadrática) Para todo $t \in I$, $[W]_t = t$ $\mathbb{P}$ -quase sempre;*
- 5) *(p -variação) Para todo $t \in I$: Se $0 < p < 2$, então $v_p(W(\cdot, \omega); [0, t]) = \infty$, e se $p > 2$, então $v_p(W(\cdot, \omega); [0, t]) = 0$;*
- 6) *(Não diferenciabilidade) As trajetórias de W são $\mathbb{P}$ -quase sempre não diferenciáveis em qualquer ponto;*
- 7) *(Propriedade de martingale) O processo de Wiener é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale.*

Demonstração. Ver Karatzas e Shreve [21], Schilling e Partzsch [37] e Øksendal [42]. $\square$

O processo de Wiener unidimensional pode estender-se a um processo com valores em $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

Definição 1.3.17. Sejam $\{W_t^1\}_{t \in [0, T]}, \dots, \{W_t^n\}_{t \in [0, T]}$ processos de Wiener independentes unidimensionais, todos eles definidos sobre um mesmo espaço de probabilidade. O processo estocástico n -dimensional $W = \{(W_t^1, \dots, W_t^n)\}_{t \in [0, T]}$ é denominado de **processo de Wiener n -dimensional**.

Finalizamos o estudo do processo de Wiener com um exemplo que apresenta dois processos derivados dele.

Exemplo 1.2. Um processo $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ é chamado de **processo de Wiener com drift μ e volatilidade σ** se puder ser escrito como

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad \text{para todo } t \in I,$$

onde W é um processo de Wiener padrão. Esse tipo de processo foi utilizado por Louis Bachelier em sua tese de doutorado, *Théorie de la Spéculation* (1900) [2], para modelar o comportamento dos preços de ativos financeiros — trabalho que é amplamente reconhecido como o ponto de partida das Finanças Matemáticas. Uma limitação importante desse modelo é que ele permite preços negativos com probabilidade positiva, o que compromete sua

aplicabilidade prática em finanças.

Para contornar essa limitação e garantir a positividade dos preços, considera-se o **processo de Wiener geométrico** $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, definido por

$$X_t = \exp(\mu t + \sigma W_t), \quad \text{para todo } t \in I,$$

onde W é um processo de Wiener padrão. Esse processo foi proposto por Paul Samuelson em 1964 [35] e posteriormente adotado por Black e Scholes (1973) [6] em sua teoria de precificação de opções. Sua principal vantagem é assegurar que os preços modelados sejam sempre positivos, o que o torna mais adequado para representar ativos financeiros reais.

No Capítulo 3, veremos que ambos os processos acima podem ser obtidos como soluções de equações diferenciais estocásticas adequadas.

Capítulo 2

Integral de Itô, Fórmula de Itô e Teoremas de Representação

A integral de Itô, introduzida por Kiyoshi Itô em [16], e posteriormente expandida em [18] e [17], estabeleceu as bases do Cálculo Estocástico, permitindo a integração de certos processos com respeito ao processo de Wiener e abrindo caminho para o estudo das equações diferenciais estocásticas (Karatzas e Shreve [21]; Øksendal [42]). Além de seu impacto teórico, a integral de Itô teve aplicações revolucionárias em diversas áreas, notadamente na matemática financeira. Como destacado por Shreve em [38], trata-se da ferramenta central das finanças quantitativas, sendo essencial na formulação do modelo de Black-Scholes e na construção de estratégias de precificação e replicação de opções europeias.

Neste capítulo, definimos a integral de Itô, uma integral da forma $\int_0^t X_s dW_s$, onde X é um processo estocástico pertencente a uma classe específica que será formalmente definida na Seção 2.2, e W é um processo de Wiener. Como discutiremos na Seção 2.1, esse tipo de integral não pode ser definido trajetória por trajetória como uma integral de Lebesgue-Stieltjes clássica, é por isso que se precisa desenvolver uma nova teoria de integração. A construção dessa integral baseia-se em uma abordagem probabilística, explorando, em particular, a estrutura de martingale do processo de Wiener. Após sua definição, apresentaremos suas principais propriedades, estudaremos os processos de Itô, a fórmula de Itô e, ao final do capítulo, enunciaremos os teoremas de representação de Itô e de martingales, bem como o teorema de Girsanov — todos com aplicações fundamentais, especialmente na modelagem de mercados financeiros, como será visto no Capítulo 4.

2.1 Motivação

Suponha que, em um intervalo de tempo $[0, T]$, desejamos modelar o preço de um ativo financeiro, representado por um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$. Em um cenário determinístico, livre de incertezas, sua dinâmica poderia ser modelada por uma equação diferencial ordinária (EDO) da forma:

$$\frac{dX_t}{dt} = f(t)X_t, \quad X_0 = x_0, \quad (2.1.1)$$

na qual $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função determinística que modela a taxa de crescimento relativa do ativo no instante t . A solução dessa EDO é $X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t f(s) ds\right)$, o que representa um crescimento contínuo e suave, previsível a partir da função f . No entanto, em mercados financeiros reais, flutuações imprevisíveis, como crises econômicas, mudanças na oferta e demanda, ou eventos geopolíticos, introduzem flutuações aleatórias na dinâmica dos preços dos ativos. Esses fenômenos não podem ser adequadamente capturados por modelos determinísticos. Para incorporar essa aleatoriedade, substituímos a taxa determinística f por uma função $t \mapsto g(t) + h(t) \cdot (\text{ruído})_t$, onde g corresponde à parte média da taxa de crescimento e h mede a sensibilidade do ativo às oscilações aleatórias representadas pelo termo ruído. Dessa forma, a EDO 2.1.1 transforma-se na seguinte "equação diferencial":

$$\frac{dX_t}{dt} = g(t)X_t + h(t)X_t \cdot (\text{ruído})_t,$$

que pode ser expressa de modo mais genérico como:

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu_t + \sigma_t \cdot (\text{ruído})_t. \quad (2.1.2)$$

onde $\mu_t = g(t)X_t$ e $\sigma_t = h(t)X_t$. Ao integrarmos essa equação no intervalo $[0, t]$, obtemos:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s \cdot (\text{ruído})_s ds. \quad (2.1.3)$$

A primeira integral do lado direito da equação acima 2.1.3 é de Lebesgue e já foi tratada no Capítulo 1; a segunda, porém, envolve um “ruído” cujo comportamento exige cuidado. Se supusermos que esse ruído seja puramente aleatório, estacionário no tempo e de incrementos independentes — condições que garantem continuidade quase certa e distribuição invariante dos incrementos —, concluímos que ele deve ser um processo de Wiener padrão W . Logo,

podemos reescrever

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

No entanto, o processo de Wiener W não é diferenciável nem de variação limitada, conforme o Teorema 1.3.4, o que impede o uso direto da integral de Lebesgue–Stieltjes. A incapacidade das teorias clássicas de integração em lidar com essa irregularidade exigiu uma revolução matemática: Como dito na introdução geral deste capítulo, em 1944, Kiyoshi Itô publicou em [16], propondo uma definição de integral que substituíu a **variação total** pela **variação quadrática**. Itô aproximou integrandos adaptados por processos simples, avaliados no ponto esquerdo dos intervalos obtidos pelas partições, garantindo que a integral resultante preservasse a propriedade de martingale — crucial para evitar viés por antecipação de informação. Essa construção foi refinada por contribuições como a teoria de martingales de Joseph Doob (1953) e a fórmula de Itô (1951), que estendeu a regra da cadeia ao contexto estocástico. A solução foi, portanto, a criação de uma nova teoria de integração — a **integral de Itô** — que explora a variação quadrática de W e preserva a propriedade de martingale. Nas próximas seções, desenvolveremos sua definição rigorosa, partindo de processos simples e evoluindo para o caso geral.

2.2 Construção da Integral de Itô

Antes de iniciar a construção da integral de Itô — partindo de processos simples para processos mais gerais —, fixaremos, na definição abaixo, uma classe de processos estocásticos adequada, sobre a qual a integral de Itô será definida de maneira rigorosa. Essa classe garante uma boa definição da integral de Itô, além de incluir processos estocásticos típicos em modelagem financeira, como os processos que descrevem a dinâmica de portfólios em mercados financeiros.

Definição 2.2.1. Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener padrão unidimensional definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, onde $\mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$ é a filtração padrão gerada por W . Definimos $\mathcal{V}(0, T)$ como a classe de todas as funções $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem:

- (i) f é progressivamente mensurável com respeito à filtração $\mathbb{F}^W$;
- (ii) $\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right] < +\infty$.

As propriedades que caracterizam $\mathcal{V}(0, T)$ são exigências amplamente reconhecidas na literatura de Cálculo Estocástico. Como destacam Øksendal em [42] e Karatzas e Shreve em [21], essas condições são mínimas para garantir a boa definição da integral de Itô. A

progressiva mensurabilidade assegura que o integrando não antecipe informações futuras. Já a integrabilidade quadrática garante a existência da integral e, sobretudo, a propriedade de martingale do processo resultante— aspecto essencial para a formulação de modelos financeiros livres de arbitragem Delbaen [12]. Embora extensões sejam possíveis, como integrais com integrandos não adaptados ou com integrabilidade mais fraca (ver Protter, [32]), a classe $\mathcal{V}(0, T)$ é suficiente para os propósitos desta dissertação.

Um exemplo de elemento em $\mathcal{V}(0, T)$ é o próprio processo de Wiener W , pois é adaptado, progressivamente mensurável e satisfaz:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T W_t^2 dt \right] = \int_0^T \mathbb{E}[W_t^2] dt = \int_0^T t dt = \frac{T}{2} < +\infty.$$

Além disso, note que $\mathcal{V}(0, T)$ é um subespaço vetorial de $L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}, dt \otimes \mathbb{P})$, que é um espaço de Hilbert com produto interno: $\langle f, g \rangle := \mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, \omega) g(t, \omega) dt \right]$. Pode-se demonstrar que $\mathcal{V}(0, T)$ é um subespaço fechado deste espaço, e portanto também é um espaço de Hilbert. Em particular, é um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}(0, T)} : \mathcal{V}(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\|f\|_{\mathcal{V}(0, T)} = \left(\mathbb{E} \left[\int_0^T f(t, \omega)^2 dt \right] \right)^{1/2}.$$

2.2.1 Integral de Itô de Processos Simples

Como mencionado anteriormente, primeiro definiremos a integral de Itô de processos que têm a forma indicada na definição a seguir:

Definição 2.2.2. Um processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ em $\mathcal{V}(0, T)$ é dito simples se ele pode ser escrito da seguinte forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2.1)$$

onde $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ é uma partição de $[0, T]$, com $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, e cada h_k é uma variável aleatória.

Um processo simples é, portanto, um processo constante por partes em cada subintervalo da partição Π , cujas trajetórias amostrais são càdlàg (ver 1.3.6). Note que, como $X \in \mathcal{V}(0, T)$, as variáveis aleatórias h_k são necessariamente $\mathcal{F}_{t_k}$ -mensuráveis e quadrado integráveis, ou seja, $h_k \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_k}, \mathbb{P})$ para todo $k = 0, \dots, n-1$. Vale destacar que a representação 2.2.1 não é única, no sentido de que diferentes partições e famílias de coeficientes podem gerar o

mesmo processo simples. Denotaremos por $\mathcal{S}(0, T)$ a classe de todos os processos simples em $\mathcal{V}(0, T)$, isto é:

$$\mathcal{S}(0, T) := \{X \in \mathcal{V}(0, T) : X \text{ é um processo estocástico simples}\}$$

Definição 2.2.3. Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo simples em $\mathcal{S}(0, T)$, com representação 2.2.1. A integral de Itô de X em relação ao processo de Wiener $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$, que denotamos por $\int_0^T X_t dW_t$, é definida como

$$\int_0^T X_t dW_t := \sum_{k=0}^{n-1} h_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \quad (2.2.2)$$

Mesmo que a representação de um processo simples não seja, em geral, única, a quantidade 2.2.2 não depende da escolha específica de partição nem dos coeficientes h_k , o que garante que a integral de Itô de um processo simples está bem definida. Além disso, observe que 2.2.2 é uma variável aleatória, e mais ainda, uma variável aleatória integrável, isto é, pertence a $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pois como as variáveis aleatórias h_k e $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ são independentes, cada termo da soma tem esperança zero, e portanto, a esperança da integral de Itô é zero, ou seja, é finita.

O seguinte teorema contém as propriedades importantes da integral de Itô de processos simples.

Teorema 2.2.1. *Sejam $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ e $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ processos simples em $\mathcal{S}(0, T)$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- 1) **Esperança nula:** $\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t dW_t \right] = 0$.
- 2) **Linearidade:** Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, o processo $aX + bY$ pertence a $\mathcal{S}(0, T)$ e

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dW_t = a \int_0^T X_t dW_t + b \int_0^T Y_t dW_t.$$

- 3) **Isometria de Itô:** $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 dt \right]$.

Demonstração. Sejam $X_t = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$ e $Y_t = \sum_{l=0}^{m-1} g_l \mathbb{1}_{[s_l, s_{l+1})}(t)$ as representações respectivas dos processos simples X e Y . Então:

1) Por definição da integral de Itô:

$$\int_0^T X_t dW_t = \sum_{k=0}^{n-1} h_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Como h_k é $\mathcal{F}_{t_k}$ -mensurável e $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ é independente de $\mathcal{F}_{t_k}$, com esperança nula, temos $\mathbb{E}[h_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] = \mathbb{E}[h_k] \cdot \mathbb{E}[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}] = 0$. Portanto,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t dW_t \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[h_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})] = 0.$$

2) Primeiramente, seja $\Pi = \{u_0, \dots, u_p\}$ a partição refinada obtida como a união ordenada das partições de X e Y . Na partição Π , reescrevemos os processos como $X_t = \sum_{i=0}^{p-1} h'_i \mathbb{1}_{[u_i, u_{i+1})}(t)$ e $Y_t = \sum_{i=0}^{p-1} g'_i \mathbb{1}_{[u_i, u_{i+1})}(t)$, onde $h'_i = h_k$ quando $[u_i, u_{i+1}) \subset [t_k, t_{k+1})$ e $g'_i = g_l$ quando $[u_i, u_{i+1}) \subset [s_l, s_{l+1})$. A combinação linear $aX_t + bY_t$ tem representação $\sum_{i=0}^{p-1} (ah'_i + bg'_i) \mathbb{1}_{[u_i, u_{i+1})}(t)$. Logo, por definição da integral de Itô, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T (aX_t + bY_t) dW_t &= \sum_{i=0}^{p-1} (ah'_i + bg'_i) (W_{u_{i+1}} - W_{u_i}) \\ &= a \sum_{i=0}^{p-1} h'_i (W_{u_{i+1}} - W_{u_i}) + b \sum_{i=0}^{p-1} g'_i (W_{u_{i+1}} - W_{u_i}) \\ &= a \int_0^T X_t dW_t + b \int_0^T Y_t dW_t, \end{aligned}$$

completando a demonstração.

3) Por definição da integral de Itô, $\int_0^T X_t dW_t = \sum_{k=0}^{n-1} h_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$. Elevando ao quadrado e tomando a esperança:

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} h_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right)^2 \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [h_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2],$$

onde usamos que os termos cruzados $\mathbb{E}[h_k h_l (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{l+1}} - W_{t_l})]$ com $k \neq l$ se anulam, pois os incrementos $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ são independentes e centrados. Além disso, como h_k é $\mathcal{F}_{t_k}$ -mensurável e independente de $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$, temos

$$\mathbb{E} [h_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2] = \mathbb{E} [h_k^2] \cdot (t_{k+1} - t_k).$$

Logo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_t dW_t \right)^2 \right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[h_k^2](t_{k+1} - t_k) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} h_k^2(t_{k+1} - t_k) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 dt \right],\end{aligned}$$

o que conclui a prova. $\square$

Da propriedade 3), segue que a integral de Itô não apenas associa a cada processo em $\mathcal{S}(0, T)$ uma variável aleatória em $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, mas, de fato, uma variável aleatória em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Falando com mais propriedade, o termo isometria, utilizado em 3) decorre do fato de que a aplicação $\mathcal{I} : \mathcal{S}(0, T) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definida por $\mathcal{I}(X) := \int_0^T X_t dW_t$ é linear e preserva as normas, ou seja, tanto o processo simples X quanto a variável aleatória $\mathcal{I}(X)$ possuem a mesma norma em seus respectivos espaços. Como se verá na próxima subseção, essa igualdade, $\|X\|_{\mathcal{V}(0, T)} = \|\mathcal{I}(X)\|_{L^2(\Omega)}$, para X simples, desempenha um papel fundamental na definição geral da integral de Itô, pois garante que a aplicação $\mathcal{I}$ é contínua.

2.2.2 Integral de Itô para Processos Gerais

Nesta subseção, estendemos a definição da integral de Itô para processos estocásticos mais gerais pertencentes a $\mathcal{V}(0, T)$. Para isso, partimos de um resultado de densidade fundamental.

Lema 2.2.1. *Para qualquer processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ em $\mathcal{V}(0, T)$, existe uma sequência de processos simples $\{h^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(0, T)$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - h^n\|_{\mathcal{V}(0, T)} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^T |X_t - h_t^n|^2 dt \right] = 0.$$

O lema acima garante que a classe dos processos simples $\mathcal{S}(0, T)$ é densa em $\mathcal{V}(0, T)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{V}(0, T)}$. A demonstração deste lema técnico, fundamental para a definição geral da integral de Itô, pode ser consultada, por exemplo, em Oksendal [42].

Definição 2.2.4. Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico em $\mathcal{V}(0, T)$. A integral de Itô de X em relação ao processo de Wiener $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$, que denotamos por $\int_0^T X_t dW_t$, é definida por

$$\int_0^T X_t dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T h_t^n dW_t,$$

onde $\{h^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de processos simples em $\mathcal{S}(0, T)$ aproximante de X .

Pode-se demonstrar que tal definição é correta no sentido de que esse limite existe e não depende da sequência aproximante.

O seguinte resultado é uma extensão natural do Teorema 2.2.1 para processos em $\mathcal{V}(0, T)$.

Teorema 2.2.2. *Sejam $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ e $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ processos em $\mathcal{V}(0, T)$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- 1) **Esperança zero:** $\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t dW_t \right] = 0$.
- 2) **Linearidade:** Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, o processo $aX + bY$ pertence a $\mathcal{V}(0, T)$ e

$$\int_0^T (aX_t + bY_t) dW_t = a \int_0^T X_t dW_t + b \int_0^T Y_t dW_t.$$

- 3) **Isometria de Itô:** $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_t dW_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 dt \right]$.

Demonstração. As propriedades seguem do fato de que a integral de Itô é o limite em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ das integrais de processos simples, para os quais os resultados já foram estabelecidos no Teorema 2.2.1. O limite preserva essas propriedades devido à linearidade e continuidade da aplicação $\mathcal{I}$. $\square$

Antes de concluir esta seção, consideremos o exemplo a seguir, que ilustra uma das integrais de Itô mais clássicas:

Exemplo 2.1. Demonstremos que $\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$.

Seja $\{t_i^n = \frac{iT}{n}, i = 0, 1, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de partições de $[0, T]$, e defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$h_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n} \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(t).$$

A sequência $\{h^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para W_t em $\mathcal{V}(0, T)$. De fato:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |W_t - h_t^n|^2 dt \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (t - t_i^n) dt = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \leq \frac{T^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Além disso, notamos que:

$$W_{t_i^n} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) = \frac{1}{2} \left[(W_{t_{i+1}^n}^2 - W_{t_i^n}^2) - (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 \right].$$

Portanto, pela definição da integral de Itô,

$$\int_0^T W_t dW_t \stackrel{L^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 \xrightarrow{L^2} T,$$

segue que:

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2} (W_T^2 - T).$$

Este exemplo ilustra de maneira clara uma das diferenças fundamentais entre a integral de Itô e a integral de Lebesgue-Stieltjes. De fato, se f for uma função de classe $C^1([0, T])$, vale $\int_0^T f(t) df(t) = \frac{f^2(T)}{2}$, enquanto, na integral de Itô, surge o termo de correção $-\frac{T}{2}$, resultado da variação quadrática do processo de Wiener. Esse fenômeno reflete o fato de que, com probabilidade 1, as trajetórias de W não têm variação finita.

Na Seção 2.6, veremos novamente este exemplo sob a luz da fórmula de Itô, que nos permitirá obter a expressão de $\int_0^T W_t dW_t$ de forma direta.

2.3 A Integral de Itô como um Processo Estocástico

Na seção anterior, construímos a integral de Itô para processos simples e, em seguida, estendemos essa definição a qualquer processo X em $\mathcal{V}(0, T)$. Até aqui, sempre fixamos o instante T e vimos $\int_0^T X_t dW_t$ como uma variável aleatória em $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nesta seção, ampliamos essa perspectiva.

Considere X um processo estocástico em $\mathcal{V}(0, T)$. Para cada $t \in [0, T]$, definamos

$$\begin{aligned} X \mathbb{1}_{[0, t]} : [0, T] \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \omega) &\longmapsto X \mathbb{1}_{[0, t]}(s, \omega) := X(s, \omega) \mathbb{1}_{[0, t]}(s) \end{aligned}$$

Claramente esta função é um elemento de $\mathcal{V}(0, T)$. Portanto, para cada $t \in [0, T]$ a integral de Itô $\mathcal{I}(X \mathbb{1}_{[0, t]}) := \int_0^T X_s \mathbb{1}_{[0, t]}(s) dW_s$ está bem definida. Observe que:

$$\int_0^T X_s \mathbb{1}_{[0, t]}(s) dW_s := \int_0^t X_s dW_s$$

Assim, reescrevendo $\mathcal{I}(X\mathbb{1}_{[0,t]})$ como $\mathcal{I}_t(X)$, temos que a aplicação $t \mapsto \mathcal{I}_t(X)$ define um novo processo $\mathcal{I}(X) = \{\mathcal{I}_t(X)\}_{t \in [0,T]}$ definido por $\mathcal{I}_t(X) = \int_0^t X_s dW_s$. Este processo é chamado de integral indefinida de Itô de X em relação ao processo de Wiener W .

É importante destacar que o processo $\{\mathcal{I}_t(X)\}_{t \in [0,T]}$ não é, a priori, contínuo. No entanto, pode-se demonstrar que ele admite uma versão com trajetórias contínuas $\mathbb{P}$ -quase seguramente, como afirma o teorema a seguir, cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em Øksendal [42]. Essa construção é essencial para formulações dinâmicas de problemas de precificação e para a determinação de portfólios de *hedge* de opções.

Teorema 2.3.1. *Seja $X \in \mathcal{V}(0, T)$. Então existe um processo estocástico $\{M_t\}_{t \in [0, T]}$, com trajetórias $\mathbb{P}$ -quase certamente contínuas, tal que:*

$$\mathbb{P}\left(M_t = \int_0^t X_s dW_s, \forall t \in [0, T]\right) = 1.$$

Em outras palavras, $\{\mathcal{I}_t(X)\}_{t \in [0, T]}$ admite uma versão contínua $\mathbb{P}$ -quase certamente.

Corolário 2.1. *Seja $X \in \mathcal{V}(0, T)$. Então o processo $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por:*

$$M_t = \int_0^t X_s dW_s$$

é um martingale em relação à filtração $\mathbb{F}^W$ sob $\mathbb{P}$.

As propriedades estabelecidas na Seção 2.2 continuam válidas nesse contexto, correspondendo ao caso em que $t = T$. A consideração da integral de Itô como um processo estocástico será fundamental para o estudo dos chamados processos de Itô, da fórmula de Itô e, no tratamento de equações diferenciais estocásticas.

2.4 Integral de Itô Multidimensional

Como veremos no Capítulo 4, muitas aplicações exigem a integração de processos estocásticos vetoriais em relação a processos de Wiener também vetoriais. Nesta seção, que segue de perto a abordagem apresentada por Øksendal [42], estendemos a construção da integral de Itô unidimensional para lidar com integrais de processos a valores em $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Como no caso unidimensional, fixamos, na definição a seguir, uma classe apropriada de processos estocásticos matriciais, sobre os quais a integral de Itô será definida de maneira rigorosa no contexto multidimensional.

Definição 2.4.1. Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener n -dimensional sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, junto com sua filtração padrão $\mathbb{F}^W$. Definimos $\mathcal{V}^{m \times n}(0, T)$ como a classe das funções matriciais

$$f : [0, T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$(t, \omega) \longmapsto f(t, \omega) = [f^{i,j}(t, \omega)]_{m \times n}$$

tal que:

- i) f é progressivamente mensurável com respeito à filtração $\mathbb{F}^W$;
- ii) $\mathbb{E} \left[\int_0^T \|f(t, \omega)\|^2 dt \right] < +\infty$.

Definição 2.4.2. Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico em $\mathcal{V}^{m \times n}(0, T)$, isto é, $X_t = [X_t^{ij}]_{m \times n}$, para todo $0 \leq t \leq T$. A integral de Itô de X com respeito ao processo de Wiener n -dimensional $W = \{(W_t^1, \dots, W_t^n)\}_{t \in [0, T]}$ é definida como

$$\int_0^T X_t dW_t = \int_0^T \begin{pmatrix} X_t^{11} & X_t^{12} & \dots & X_t^{1n} \\ X_t^{21} & X_t^{22} & \dots & X_t^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_t^{m1} & X_t^{m2} & \dots & X_t^{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \\ \vdots \\ dW_t^n \end{pmatrix}.$$

Assim, a integral de Itô de $X \in \mathcal{V}^{m \times n}(0, T)$ resulta em um vetor aleatório m -dimensional, onde sua i -ésima componente é $\sum_{j=1}^n \int_0^T X_t^{ij} dW_t^j$, soma de integrais de Itô unidimensionais.

Observação 2.4.1. Seja $\mathcal{V}^{m \times n}(0, T)$.

- 1) Quando $m = 1$ e $n = 1$, recuperamos a integral de Itô unidimensional.
- 2) Se $m = 1$ e $n \geq 1$, usaremos a notação $\mathcal{V}^n(0, T)$ em vez de $\mathcal{V}^{1 \times n}(0, T)$, e nesse caso, a sua integral de Itô será denotada por $\int_0^T X_t \cdot dW_t$. Tem-se, então:

$$\int_0^T X_t \cdot dW_t = \int_0^T X_t^1 dW_t^1 + \dots + \int_0^T X_t^n dW_t^n.$$

2.5 Processos de Itô

Os processos de Itô constituem uma classe fundamental de processos estocásticos, cuja dinâmica incorpora tanto um termo determinístico quanto um termo aleatório impulsionado por um processo de Wiener. Esses processos estão na base do Cálculo Estocástico e permitem

modelar uma ampla variedade de fenômenos com incerteza contínua, sendo particularmente relevantes em finanças matemáticas. Esta seção segue de perto as apresentações de Karatzas e Shreve [21], Øksendal [42], Pascucci [30], Schilling e Partzsch [37] e Shreve [38], com adaptações ao contexto desta dissertação.

Definição 2.5.1. Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener n -dimensional definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e seja $\mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$ a filtração padrão gerada por W . Um **processo de Itô m -dimensional** é qualquer processo estocástico $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e com valores em $\mathbb{R}^m$, que admite a seguinte representação:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.5.1)$$

onde X_0 é um vetor aleatório de dimensão m com componentes em $L^2(\Omega, \mathcal{F}_0^W, \mathbb{P})$, μ é um processo estocástico m -dimensional com componentes em $\mathcal{V}(0, T)$ e σ é um processo estocástico em $\mathcal{V}^{m \times n}(0, T)$.

Observe que as componentes do processo de Itô m -dimensional $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ são da forma:

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \mu_s^i ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_s^{i,j} dW_s^j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.5.2)$$

Quando $m = n = 1$, X é um **processo de Itô unidimensional**.

Em versões mais gerais dessa definição, costuma-se exigir apenas que X_0 seja $\mathcal{F}_0^W$ -mensurável e finito quase certamente ($\mathbb{P}(\|X_0\| < +\infty) = 1$) e que os processos μ e σ sejam processos $\mathbb{F}^W$ -adaptados, com μ integrável e σ quadrado integrável. A equação 2.5.1, chamada de **forma integral** do processo de Itô, pode ser interpretada como a evolução do processo X ao longo do tempo. Essa evolução é composta: pelo valor inicial X_0 , que pode ser um valor determinístico ou um vetor aleatório representando a incerteza inicial; a integral ordinária $\int_0^t \mu_s ds$, na qual o processo μ , chamado de **drift**, representa o comportamento médio ou determinístico do processo X ; e a integral de Itô $\int_0^t \sigma_s dW_s$, onde σ é chamada de **volatilidade**, a qual representa as flutuações aleatórias do processo introduzidas pelo processo de Wiener.

Observação 2.5.1. Da definição acima, temos:

- 1) A representação 2.5.1 é única quase sempre, ou seja, se além de X_0 , μ e σ , o vetor aleatório X'_0 e os processos μ' , σ' satisfazem tal representação, então $X_0 = X'_0$ $\mathbb{P}$ -quase sempre e $\mu_t(\omega) = \mu'_t(\omega)$ e $\sigma_t(\omega) = \sigma'_t(\omega)$ são iguais $\lambda \otimes \mathbb{P}$ -quase sempre. Para uma prova formal, ver Karatzas e Shreve [21].
- 2) Como $\mathcal{F}_0^W = \{\emptyset, \Omega\}$ e valor inicial X_0 é $\mathcal{F}_0$ -mensurável, segue que X_0 é uma variável aleatória constante.

- 3) Do ponto de vista notacional, especialmente em finanças, as vezes é conveniente escrever a expressão 2.5.1 na **forma diferencial**:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.5.3)$$

que, no caso m -dimensional, a suas componentes tem a seguinte forma:

$$dX_t^i = \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_t^{i,j} dW_t^j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.5.4)$$

No entanto, a forma diferencial é apenas uma notação prática para a forma integral, que é a que possui um significado matemático sólido, pois as trajetórias do processo de Wiener não são diferenciáveis em nenhum ponto. Note que, uma vez que temos a forma diferencial de um processo de Itô, podemos imediatamente convertê-lo para a sua forma integral.

Definição 2.5.2. Um processo de Itô $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ é chamado de **difusão de Itô** quando tanto o *drift* quanto a volatilidade dependem apenas de X . Ou seja, X tem a forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

A definição a seguir, que poderia ser apresentada como um lema, foi adaptada de Shreve [38] e Pascucci [30]. Como veremos adiante, trata-se de um resultado fundamental, especialmente na formulação e aplicação da fórmula de Itô para processos vetoriais. Além disso, esses objetos surgem naturalmente em modelos financeiros ao se quantificarem volatilidades e correlações entre ativos.

Definição 2.5.3. Sejam $X^1 = \{X_t^1\}_{t \in [0, T]}$ e $X^2 = \{X_t^2\}_{t \in [0, T]}$ processos de Itô tomando valores em $\mathbb{R}^m$, com decomposições

$$X_t^1 = X_0^1 + \int_0^t \mu_s^1 ds + \int_0^t \sigma_s^1 dW_s \quad \text{e} \quad X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t \mu_s^2 ds + \int_0^t \sigma_s^2 dW_s,$$

respectivamente, onde $\sigma^1, \sigma^2 \in \mathcal{V}^{m \times n}(0, T)$. Define-se:

- (1) A **covariação quadrática** entre X^1 e X^2 , denotada por $[X^1, X^2]$, é o processo matricial simétrico definido por

$$[X^1, X^2]_t := \int_0^t \sigma_s^1 (\sigma_s^2)^\top ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

2) A **variação quadrática** de X^1 , denotada por $[X^1]$, é o processo matricial definido por

$$[X^1]_t := [X^1, X^1]_t = \int_0^t \sigma_s^1 (\sigma_s^1)^\top ds.$$

Finalizamos esta seção com um resultado importante sobre a distribuição de processos de Itô cujos processos de *drift* e volatilidade são determinísticos. Esse resultado será essencial na demonstração da fórmula generalizada de Black-Scholes, pois garante que a variável aleatória que representa o logaritmo do preço do ativo nesse modelo segue uma distribuição normal. A demonstração pode ser consultada em Pascucci [30].

Proposição 2.1. *Sejam μ e σ processos determinísticos pertencentes a $\mathcal{V}(0, T)$. Então o processo de Itô unidimensional definido por*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é tal que, para cada $t \in [0, T]$, a variável aleatória X_t é normalmente distribuída com:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + \int_0^t \mu_s ds, \quad e \quad \text{Var}(X_t) = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

2.6 Fórmula de Itô

No cálculo diferencial clássico, a integral de Riemann geralmente não é calculada diretamente a partir de sua definição, mas sim por meio do Teorema Fundamental do Cálculo. Uma situação semelhante ocorre no contexto estocástico: em poucos casos, a integral de Itô pode ser efetivamente calculada a partir de sua definição — por exemplo, quando X é um processo simples. Isso se torna ainda mais relevante no contexto estocástico, pois as trajetórias do processo de Wiener não são diferenciáveis em nenhum ponto e possuem variação total infinita em qualquer intervalo, o que exige o desenvolvimento de novas ferramentas.

O objetivo desta seção é justamente apresentar essa ferramenta: a **Fórmula de Itô**, que permite calcular integrais de funções compostas com processos estocásticos. Serão enunciadas e discutidas três versões da fórmula: a forma clássica para funções de um processo de Wiener, a forma para processos de Itô unidimensionais e, por fim, a formulação geral para processos de Itô multidimensionais. Essas versões serão fundamentais nos capítulos seguintes, especialmente para resolver equações diferenciais estocásticas e para a obtenção das dinâmicas de processos financeiros.

Iniciamos esta seção com a formulação mais simples da fórmula de Itô, aplicada diretamente ao processo de Wiener. Este resultado fundamental foi introduzido por Kiyoshi Itô em 1944 [16]. A demonstração completa pode ser encontrada, por exemplo, em Kuo [24].

Teorema 2.6.1. (*Fórmula de Itô para o processo de Wiener; Itô 1944*) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ e $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener. Então, para $t \in [0, T]$:

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds. \quad (2.6.1)$$

Em notação diferencial, a expressão correspondente é:

$$df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) dt.$$

No Exemplo 2.1, demonstramos, a partir da definição da integral de Itô, que $\int_0^T W_s dW_s = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T$. No exemplo a seguir, reobtemos esse resultado de forma mais direta utilizando a fórmula de Itô.

Exemplo 2.2. Aplicando a fórmula de Itô para o processo de Wiener, vamos calcular a integral $\int_0^t W_s dW_s$, para $t \in [0, T]$.

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$, claramente de classe $C^2(\mathbb{R})$, com derivadas $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$. Aplicando 2.6.1 ao processo de Wiener $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$, e substituindo a derivadas obtidas anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} W_t^2 = f(W_t) &= f(W_0) + \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds. \\ &= W_0^2 + \int_0^t 2W_s dW_s + \int_0^t 1 ds. \end{aligned}$$

Como $W_0 = 0$, segue que $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + t$, e, portanto,

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Fazendo $t = T$, recuperamos o resultado obtido anteriormente no Exemplo 2.1.

Mais geralmente, podemos aplicar 2.6.1 a potências inteiras de W_t . Seja $f(x) = x^n$, com $n \geq 2$. Como $f'(x) = nx^{n-1}$ e $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, a fórmula 2.6.1 fornece:

$$W_t^n = n \int_0^t W_s^{n-1} dW_s + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t W_s^{n-2} ds.$$

Este exemplo evidencia como a fórmula de Itô permite calcular integrais de Itô de forma direta, evitando demonstrações longas pela definição.

No que segue, utilizaremos a notação $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^m)$ para denotar o espaço das funções $f : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ que são continuamente diferenciáveis em relação à variável temporal t , e duas vezes continuamente diferenciáveis em relação à variável espacial $x \in \mathbb{R}^m$, com todas essas derivadas sendo funções contínuas.

Teorema 2.6.2. (Fórmula de Itô para Processos de Itô) *Seja $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, e seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Itô unidimensional com forma integral:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Então, o processo $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por $Y_t := f(t, X_t)$ também é um processo de Itô e satisfaz:

$$Y_t = f(0, X_0) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \mu_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right\} ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dW_s,$$

para $0 \leq t \leq T$.

Demonstração. A demonstração deste resultado encontra-se em Øksendal [42]. □

Fórmula de Itô Multidimensional

Teorema 2.6.3. *Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener de dimensão n e $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Itô de dimensão m . Seja f uma função tomando valores em $\mathbb{R}^d$ com componentes em $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^m)$. Então, o processo $Z = \{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por $Z_t := f(t, X_t)$ é um processo de Itô de dimensão d , e cada uma de suas componentes $Z_t^k = f^k(t, X_t)$, $k = 1, \dots, d$ tem a seguinte forma diferencial:*

$$dZ_t^k = \frac{\partial f^k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) d[X^i, X^j]_t.$$

Como aplicação direta das fórmulas de Itô, tem-se a seguinte identidade fundamental, que desempenha o papel da fórmula clássica de integração por partes no Cálculo Estocástico.

Proposição 2.2. (Fórmula de Integração por Partes). *Sejam $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ e $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ dois processos de Itô. Então, vale a seguinte igualdade diferencial:*

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[X, Y]_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

2.7 Teoremas de Representação e Mudança de Medida

Nesta seção, assumimos que a filtração padrão $\mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$ do processo de Wiener definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, satisfaz $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T^W$. Essa suposição é crucial, pois os resultados aqui apresentados, em geral, não permanecem válidos caso $\mathcal{F}$ contenha mais informações do que aquelas geradas por W até o instante T .

Iniciamos com o Teorema de Representação de Itô, adaptado de Øksendal [42], onde também se encontra sua demonstração.

Teorema 2.7.1. (Representação de Itô) *Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener padrão n -dimensional, definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, onde $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$. Então, para qualquer variável aleatória $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, existe um processo estocástico $\phi = \{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$, com valores em $\mathbb{R}^n$, progressivamente mensurável com respeito à filtração $\mathbb{F}$, tal que $\mathbb{E}[\int_0^T \|\phi_t\|^2 dt] < +\infty$, e*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T \phi_t \cdot dW_t = \mathbb{E}[F] + \sum_{j=1}^n \int_0^T \phi_t^j dW_t^j$$

Além disso, esse processo ϕ é único $\lambda \otimes \mathbb{P}$ -quase sempre.

O Teorema de Representação de Itô garante que, sob condições bastante gerais, qualquer variável aleatória F em $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ pode ser representada como uma integral de Itô. Esse resultado desempenha um papel fundamental em finanças matemáticas e será importante no Capítulo 4, especialmente na precificação e *hedging* de opções europeias, permitindo representar *payoffs* como integrais estocásticas, o que está diretamente relacionado à construção de portfólios de replicação.

Como consequência direta do teorema anterior, apresentamos a seguir um resultado que caracteriza martingales quadrado integráveis adaptadas à filtração padrão de um processo de Wiener. A formulação é adaptada de Øksendal [42] e também aparece em Shreve [38], acompanhada de uma discussão sobre sua aplicação em finanças.

Teorema 2.7.2. (Representação de Martingale) *Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener padrão n -dimensional, definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, junto com sua filtração padrão $\mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$. Sobre esse mesmo espaço de probabilidade, seja $M = \{M_t\}_{t \in [0, T]}$ uma $\mathbb{F}^W$ -martingale com valores em $\mathbb{R}^m$, quadrado integrável. Então, existe um processo $\{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ em $\mathcal{V}^{m \times n}(0, T)$, tal que:*

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t \phi_s dW_s, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Além disso, esse processo ϕ é único $\lambda \otimes \mathbb{P}$ -quase sempre.

Um dos resultados centrais na análise de processos estocásticos sob diferentes medidas de probabilidade é o Teorema de Girsanov. Esse teorema descreve como a dinâmica de um processo de Wiener é modificada sob uma nova medida de probabilidade equivalente. No Capítulo 4, essa mudança de medida desempenha papel fundamental ao possibilitar a transformação de um mercado em que os preços normalizados dos ativos não são, a priori, martingales, em um novo espaço de probabilidade no qual passam a ser. Isso viabiliza a aplicação dos principais resultados teóricos relativos à ausência de arbitragem em mercados financeiros. Antes de enunciar tal teorema, apresentamos a fórmula de Bayes e a condição de Novikov.

Lema 2.7.1. (Fórmula de Bayes) Sejam $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$ duas medidas de probabilidade em algum espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ tais que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Seja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ e $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ uma sub- σ -álgebra de $\mathcal{F}$. Então,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{H}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right].$$

Demonstração. Ver Pascucci [30] ou Karatzas e Shreve [21]. □

Proposição 2.3. (Condição de Novikov) Seja $u = \{u_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo estocástico com valores em $\mathbb{R}^n$, definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e pertencente à classe $\mathcal{V}^n(0, T)$, tal que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \|u_t\|^2 dt\right)\right] < +\infty,$$

então o processo $Z = \{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t u_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|u_s\|^2 ds\right)$$

é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{P}$ com $\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[Z_0] = 1$, para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Ver Pascucci [30]. Para uma versão mais geral, consultar Revuz e Yor [33]. □

Teorema 2.7.3. (Teorema de Girsanov) Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener padrão n -dimensional sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com sua filtração padrão $\mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in [0, T]}$. Seja $u = \{u_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo n -dimensional em $\mathcal{V}^n(0, T)$. Se o processo

$Z = \{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t u_s \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|u_s\|^2 ds \right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

for uma $\mathbb{F}^W$ -martingale com respeito a $\mathbb{P}$, então:

- 1) Existe uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$ tal que $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$;
- 2) O processo $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t u_s ds$$

é um processo de Wiener padrão n -dimensional sob $\mathbb{Q}$.

A demonstração deste teorema, bem como de versões mais gerais, pode ser encontrada em Øksendal [42], Pascucci [30], Karatzas e Shreve [21].

Corolário 2.2. Sob as hipóteses do Teorema de Girsanov, valem:

- a) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$ são medidas de probabilidade equivalentes sobre $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$
- b) O processo de Wiener $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t\}_{t \in [0, T]}$ é uma martingale com respeito à filtração $\mathbb{F}^W$ sob a medida $\mathbb{Q}$.

Demonstração. (Recordamos que estamos assumindo $\mathcal{F}_T^W = \mathcal{F}$)

- a) i) Pelo Teorema de Girsanov, $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$, com $Z_T > 0$. Logo, pelo Teorema de Radon-Nikodym 1.1.10, segue que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.
- ii) Também pelo Teorema de Girsanov, como $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$, então, para todo $A \in \mathcal{F}_T^W$, tem-se $\mathbb{Q}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$. Se $\mathbb{Q}(A) = 0$, então $\int_A Z_T d\mathbb{P} = 0$. Como $Z_T > 0$, segue que $\mathbb{P}(A) = 0$. Pela arbitrariedade de A , conclui-se que $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$.

Portanto, pelos itens i) e ii), concluímos que $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

- b) i) Como u é $\mathbb{F}^W$ -progressivamente mensurável, então, para todo $t \in [0, T]$, a aplicação $\omega \mapsto \int_0^t u_s(\omega) ds$ é $\mathcal{F}_t^W$ -mensurável. Como W_t também é $\mathcal{F}_t^W$ -mensurável, segue que $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t u_s ds$ é $\mathcal{F}_t^W$ -mensurável para todo t . Portanto, $\tilde{W}$ é um processo $\mathbb{F}^W$ -adaptado.
- ii) Para todo $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|\tilde{W}_t|] < \infty$, pois, como pelo Teorema de Girsanov, $\tilde{W}$ é um processo de Wiener padrão sob $\mathbb{Q}$. Assim, $\tilde{W}_t$ possui distribuição normal sob $\mathbb{Q}$, com esperança nula e variância t , o que garante que seu valor absoluto tem esperança finita.

- iii) Defina o processo $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ por $Y_t := Z_t \tilde{W}_t$, para todo $t \in [0, T]$. Aplicando a Fórmula de integração por partes 2.2, obtemos:

$$dY_t = d(Z_t \tilde{W}_t) = \tilde{W}_t dZ_t + Z_t d\tilde{W}_t + d[Z, \tilde{W}]_t.$$

Como $dZ_t = -Z_t u_t \cdot dW_t$ e $d\tilde{W}_t = u_t dt + dW_t$, e pela Definição 2.5.3, a covariação quadrática entre Z e $\tilde{W}$ é $[Z, \tilde{W}]_t = \int_0^t -Z_s u_s ds$, para cada $t \in [0, T]$, temos $d[Z, \tilde{W}]_t = -Z_t u_t dt$. Substituindo essas expressões, obtemos:

$$\begin{aligned} dY_t &= \tilde{W}_t (-Z_t u_t \cdot dW_t) + Z_t (u_t dt + dW_t) + (-Z_t u_t dt) \\ &= -Z_t u_t \cdot \tilde{W}_t dW_t + Z_t u_t dt + Z_t dW_t - Z_t u_t dt \\ &= Z_t dW_t - Z_t u_t \cdot \tilde{W}_t dW_t \\ &= (Z_t - Z_t u_t \tilde{W}_t) \cdot dW_t, \end{aligned}$$

que, em sua forma integral pode ser escrito como:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (Z_s - Z_s u_s \cdot \tilde{W}_s) dW_s = \int_0^t (Z_s - Z_s u_s \cdot \tilde{W}_s) dW_s,$$

onde usamos que $Y_0 = Z_0 \tilde{W}_0 = 0$. Isto mostra que o processo Y é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale com respeito a $\mathbb{P}$, pois, para cada t , Y_t é uma integral Itô com respeito ao processo de Wiener W , que é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale com relação a $\mathbb{P}$.

Agora, como $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ e, para todo $t \in [0, T]$ temos $\tilde{W}_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, pela Fórmula de Bayes 2.7.1 tem-se:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{W}_t | \mathcal{F}_s^W] = \frac{1}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T | \mathcal{F}_s^W]} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{W}_t Z_T | \mathcal{F}_s^W] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{W}_t Z_T | \mathcal{F}_s^W],$$

onde para a segunda igualdade usamos que Z é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale com respeito a $\mathbb{P}$. Como $\tilde{W}_t$ é $\mathcal{F}_t^W$ -mensurável e $\mathcal{F}_t^W \supset \mathcal{F}_s^W$, para todo $s \leq t$, segue pelo item 7) do Teorema das propriedades da esperança condicional 1.2.6 que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{W}_t | \mathcal{F}_s^W] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T | \mathcal{F}_t^W] \tilde{W}_t | \mathcal{F}_s^W \right].$$

Usando novamente que Z é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale com respeito a $\mathbb{P}$ e o processo Y também é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{P}$, do anterior segue:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s^W] = \frac{1}{Z_s} \tilde{W}_s Z_s = \tilde{W}_s,$$

o que mostra a condição (iii) da definição de martingale 1.3.14 para $\tilde{W}$ sob $\mathbb{Q}$. Portanto, pelos itens i), ii) e iii), concluímos a prova de b).

□

Capítulo 3

Equações Diferenciais Estocásticas

Um caso particularmente relevante no estudo dos processos de Itô são as soluções de Equações Diferenciais Estocásticas (EDE). Essas equações desempenham um papel fundamental na modelagem de sistemas sujeitos a flutuações aleatórias, com aplicações em finanças, física estatística, biologia matemática e teoria do controle estocástico. Diferentemente das equações diferenciais ordinárias, as EDE incorporam um termo estocástico – frequentemente representado por um processo de Wiener – que captura efeitos aleatórios intrínsecos ao sistema em estudo.

3.1 Definição Geral

Esta seção apresenta a definição geral de uma equação diferencial estocástica, adaptada das formulações de Revuz e Yor [33] e Jeanblanc [19].

Definição 3.1.1. Uma **equação diferencial estocástica (EDE)** é uma equação da forma:

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad (3.1.1)$$

onde:

- $X = \{(X_t^1, \dots, X_t^n)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ é um processo estocástico com trajetórias contínuas, adaptado a uma filtração $\mathbb{F}$, definido sobre um espaço de probabilidade adequado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $b(t, x) = (b^1(t, x), \dots, b^n(t, x))$, é uma função progressivamente mensurável em relação à filtração $\mathbb{F}$, denominada **termo de drift**. Em finanças, representa a taxa de retorno esperada dos ativos;
- $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, com $\sigma(t, x) = [\sigma^{ij}(t, x)]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$, é uma função progressivamente mensurável em relação à filtração $\mathbb{F}$, denominada **matriz de dispersão**. Em finanças, representa a volatilidade dos ativos;

- $W = \{(W_t^1, \dots, W_t^m)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ é um processo de Wiener m -dimensional adaptado à filtração $\mathbb{F}$.

Os elementos conhecidos desta equação são os coeficientes: uma condição inicial, que seria a variável aleatória X_0 , o vetor $b(t, x)$ e a matriz $\sigma(t, x)$. A incógnita é o processo X , isto é, a solução da equação. O processo solução pode ser interpretado como o estado de um sistema que descreve a evolução de um sistema com dinâmica híbrida, isto é, composta por componentes determinísticas e aleatórias. Note que a equação 3.1.1 pode ser escrita componente a componente como:

$$dX_t^i = b^i(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma^{ij}(t, X_t) dW_t^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

3.2 Soluções Fortes e Fracas de Equações Diferenciais Estocásticas

Nesta seção, apresentamos as definições de solução forte e solução fraca para equações diferenciais estocásticas (EDEs), bem como um teorema de existência e unicidade quase certamente de uma solução forte. As formulações foram adaptadas de Karatzas e Shreve [21], Revuz e Yor [33], Øksendal [42] e Jeanblanc [19].

Definição 3.2.1. Sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sejam $W = \{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ um processo de Wiener padrão m -dimensional e ξ uma variável aleatória independente de W . Uma **solução forte** da EDE 3.1.1 em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e com respeito ao processo de Wiener W e à condição inicial ξ , é um processo $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ com trajetórias contínuas e que satisfaz:

- (1) X é adaptado à filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, onde $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^W$ é a menor σ -álgebra que contém as informações de ξ e do processo W até o tempo t , completada com os conjuntos nulos de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- (2) $\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1$.
- (3) Para todo $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ e $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P} \left(\int_0^t (|b^i(s, X_s)| + |\sigma^{ij}(s, X_s)|^2) ds < \infty \right) = 1.$$

- (4) A forma integral de 3.1.1 é válida, ou seja,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad \mathbb{P}\text{-quase certamente.}$$

Na definição acima, dizer que ξ é independente de W significa que este valor inicial ξ não é influenciado pelo comportamento futuro do processo de Wiener W e que W não carrega nenhuma informação sobre ξ . No capítulo 4, quando estudemos mercados financeiros, essa independência reflete a ideia de que o preço inicial não está correlacionado com as flutuações futuras do mercado. No termo $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^W$, o símbolo $\vee$ denota a σ -álgebra gerada pela união de $\sigma(\xi)$ e $\mathcal{F}_t^W$.

O teorema a seguir estabelece condições suficientes sobre os coeficientes b e σ para garantir a existência e unicidade (quase sempre) de soluções para a equação 3.1.1. Uma discussão sobre sua prova pode ser encontrada em Karatzas e Shreve [21], enquanto uma demonstração para uma versão análoga é apresentada em Øksendal [42]. $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana na dimensão apropriada.

Teorema 3.2.1. *Sejam os coeficientes b e σ da equação 3.1.1 que satisfazem:*

i) (Coeficientes Lipschitz)

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K\|x - y\|,$$

ii) (Crescimento linear)

$$\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2),$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ e uma constante $K > 0$. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado que satisfaz a condição usual, $W = \{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ um processo de Wiener m -dimensional adaptado à filtração $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, e $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$, uma variável aleatória com valores em $\mathbb{R}^n$ independente de W , e com segundo momento finito $\mathbb{E}[\|\xi\|^2] < \infty$. Então, existe um processo adaptado $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, que é uma solução forte da equação (3.1.1) com condição inicial ξ relativo a W . Além disso, esse processo é quadrado-integrável: para todo $T > 0$, existe uma constante C , dependendo apenas de K e T , tal que

$$\mathbb{E}[\|X_t\|^2] \leq C(1 + \mathbb{E}[\|\xi\|^2])e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Definição 3.2.2. Uma **solução fraca** da EDE 3.1.1 é a tripla $((X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \mathbb{F})$, onde:

- (1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, e $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ é uma filtração que satisfaz as condições usuais, isto é, é contínua à direita e $\mathcal{F}_0$ contém todos os conjuntos nulos de $\mathcal{F}$.
- (2) $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ é um processo contínuo e $\mathbb{F}$ -adaptado, com valores em $\mathbb{R}^n$, e $W = \{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ é um processo de Wiener m -dimensional em relação à filtração $\mathbb{F}$.

(3) Para todo $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ e $t \in \mathbb{R}_+$,

$$P \left(\int_0^t (|b^i(s, X_s)| + |\sigma^{ij}(s, X_s)|^2) ds < +\infty \right) = 1.$$

(4) A forma integral de 3.1.1 é válida, ou seja,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad \mathbb{P}\text{-quase certamente.}$$

Uma solução forte é sempre uma solução fraca, mas o recíproco nem sempre é verdadeiro. Existem equações diferenciais estocásticas que admitem soluções fracas, mas para as quais não existe uma solução forte. Um exemplo clássico é a chamada **equação de Tanaka**:

$$dX_t = \text{sgn}(X_t) dW_t, \quad X_0 = 0,$$

onde W é um processo de Wiener unidimensional e sgn denota a função sinal. Esta equação admite uma solução fraca, mas não admite uma solução forte. A demonstração desse fato pode ser consultada, por exemplo, em Revuz e Yor [33] ou em Øksendal [42].

Os teoremas apresentados nesta seção não fornecem métodos explícitos para obter a solução de uma EDE, mas apenas garantem sua existência — e, sob certas condições, também sua unicidade — no sentido fraco ou forte. A seguir, apresentamos um exemplo de EDE cuja solução pode ser explicitamente determinada por meio da fórmula de Itô. Este tipo de equação é fundamental para o desenvolvimento do modelo de Black-Scholes, que será estudado em detalhes no Capítulo 4.

Exemplo 3.1. Sejam $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, $\mu = \{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$, $\sigma = \{\sigma_t\}_{t \in [0, T]}$ processos estocásticos pertencentes à classe $\mathcal{V}(0, T)$. Considere a seguinte equação

$$dX_t^{(1)} = \mu_t X_t^{(1)} dt + \sigma_t X_t^{(1)} dW_t, \quad X_0^{(1)} = x_0^{(1)} > 0 \quad (3.2.1)$$

onde $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ é um processo de Wiener unidimensional. Então 3.2.1 é uma equação diferencial estocástica com coeficientes da forma $b(t, x) = \mu_t x$ e $\sigma(t, x) = \sigma_t x$, em que os processos μ e σ pertencem a $\mathcal{V}(0, T)$, isto é, são progressivamente mensuráveis e quadrado integráveis com respeito à medida produto $\lambda \otimes \mathbb{P}$. Esses coeficientes são Lipschitz e satisfazem uma condição de crescimento linear em x . Assim, pelo Teorema 3.2.1, segue que a equação 3.2.1 admite uma única solução forte (até indistinguibilidade), com valor inicial $X_0^{(1)} > 0$.

Encontremos essa solução: Defina a função $f: [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t, x) = \log x$, onde $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$. Essa função claramente pertence à classe $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+^*)$, pois é continua-

mente diferenciável em t e duas vezes continuamente diferenciável em x sobre $\mathbb{R}_+^*$. De fato, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Logo, pela Fórmula de Itô 2.6.2, segue que o processo $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$, definido por $Y_t := \log X_t^{(1)}$, também é um processo de Itô e satisfaz:

$$\begin{aligned} \log X_t^{(1)} &= \log x_0^{(1)} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \mu_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right\} ds + \int_0^t \sigma_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dW_s, \\ &= \log x_0^{(1)} + \int_0^t \left(\mu_s X_s^{(1)} \frac{1}{X_s^{(1)}} - \frac{1}{2} (\sigma_s X_s^{(1)})^2 \frac{1}{(X_s^{(1)})^2} \right) ds + \int_0^t \sigma_s X_s^{(1)} \frac{1}{X_s^{(1)}} dW_s \\ &= \log x_0^{(1)} + \int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s. \end{aligned}$$

Portanto, como $Y_t := \log X_t^{(1)}$, a solução da equação 3.2.1 é:

$$X_t^{(1)} = x_0^{(1)} \exp \left(\int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right).$$

Em particular, se os coeficientes $\mu_t = \mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma_t = \sigma > 0$, forem constantes, a solução se reduz a:

$$X_t^{(1)} = x_0^{(1)} \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right),$$

que é um processo de Wiener geométrico com *drift* $\mu - 1/2\sigma^2$ e volatilidade σ , conforme apresentado no exemplo 1.2 do Capítulo 1.

Capítulo 4

Precificação e Replicação de Opções Europeias no Modelo de Black-Scholes

A modelagem de mercados financeiros em tempo contínuo recorre a equações diferenciais estocásticas para incorporar, de forma realista, a incerteza na evolução dos preços dos ativos, combinando componentes determinísticos (*drift*) e aleatórios (volatilidade). Consideramos, neste contexto, um mercado composto por um ativo livre de risco, que cresce a uma taxa constante, e por ativos de risco, cujos preços seguem dinâmicas estocásticas.

Aplicamos, então, os conceitos desenvolvidos nos capítulos anteriores à formulação de um mercado financeiro de dimensão arbitrária, especificando os ativos, os portfólios admissíveis e os processos de valor. Introduzimos os princípios fundamentais de ausência de arbitragem e completude de mercado, e mostramos, com o auxílio do Teorema de Girsanov, que a existência de uma medida de probabilidade equivalente sob a qual os preços normalizados dos ativos são martingales implica a inexistência de oportunidades de arbitragem. Além disso, sob hipóteses adequadas, demonstramos que todo T -contrato atingível pode ser replicado por um portfólio autofinanciado, o que conduz naturalmente à fórmula geral de precificação $p(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F]$. Em seguida, aplicamos essa base conceitual ao modelo generalizado de Black–Scholes, no qual os coeficientes de taxa livre de risco e volatilidade são funções do tempo. Obtemos expressões explícitas para o preço e o portfólio de *hedge* de opções europeias, recuperando a fórmula clássica como caso particular quando os coeficientes são constantes. Este capítulo, portanto, consolida os principais resultados da dissertação, evidenciando a aplicabilidade do cálculo estocástico à teoria moderna de precificação de derivativos.

4.1 Modelo de Mercado Financeiro e Definições Básicas

Iniciamos esta seção definindo o objeto principal deste capítulo, o mercado financeiro, como um conjunto de processos de Itô que representam os ativos livre de risco e os ativos de risco. Em seguida, introduzimos o conceito de mercado normalizado e formalizamos os principais objetos: portfólio, valor de portfólio e portfólio autofinanciado, demonstrando tanto a invariância da autofinanciabilidade sob normalização do mercado quanto a existência de portfólios autofinanciados. Esses elementos constituem a base para a análise de arbitragem, completude e precificação de opções, que será desenvolvida nas seções seguintes.

A apresentação segue de perto os desenvolvimentos clássicos encontrados em Øksendal [42], Björk [5], Jeanblanc, Yor e Chesney [19], Musiela e Rutkowski [28], Baldi [3] e Petters e Dong [31]. Para isso, nesta seção e ao longo deste capítulo, consideramos um processo de Wiener padrão m -dimensional $W = \{ (W_t^1, \dots, W_t^m) \}_{t \in [0, T]}$, para algum $T > 0$, definido sobre um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com sua filtração padrão $\mathbb{F}^W = \{ \mathcal{F}_t^W \}_{t \in [0, T]}$ (ver Definição 1.3.12), que satisfaz as condições usuais (ver Definição 1.3.11).

Definição 4.1.1. Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener padrão m -dimensional definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com sua filtração padrão $\mathbb{F}^W$. Um **mercado financeiro** com $n + 1$ ativos e horizonte de investimento T é um processo de Itô $(n + 1)$ -dimensional $X = \{ (X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) \}_{t \in [0, T]}$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, adaptado à filtração $\mathbb{F}^W$, tal que:

- (i) O processo $X^{(0)} = \{X_t^{(0)}\}_{t \in [0, T]}$ satisfaz a equação diferencial estocástica:

$$dX_t^{(0)} = r_t X_t^{(0)} dt, \quad X_0^{(0)} = 1, \quad (4.1.1)$$

onde $r = \{r_t\}_{t \in [0, T]}$ é um processo estocástico determinístico, limitado e não negativo pertencente à classe $\mathcal{V}(0, T)$.

- (ii) Para $i = 1, \dots, n$, os processos $X^{(i)} = \{X_t^{(i)}\}_{t \in [0, T]}$ satisfazem as equações diferenciais estocásticas:

$$dX_t^{(i)} = \mu_t^{(i)} dt + \sum_{j=1}^m \sigma_t^{(i)j} dW_t^j, \quad X_0^{(i)} = x_0^{(i)}, \quad (4.1.2)$$

onde $\mu^{(i)} = \{\mu_t^{(i)}\}_{t \in [0, T]}$ e $\sigma^{(i)j} = \{\sigma_t^{(i)j}\}_{t \in [0, T]}$ são processos estocásticos pertencentes à classe $\mathcal{V}(0, T)$.

Comentários da Definição 4.1.1

Como o mercado financeiro X com $n + 1$ ativos consiste em $n + 1$ processos de Itô reais $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$, cada ativo é descrito por um processo de Itô com valores em $\mathbb{R}$. A forma como suas equações diferenciais estocásticas estão definidas permite classificar os ativos da seguinte maneira:

a) **Ativo Livre de Risco ($X^{(0)}$):**

O processo $X^{(0)}$, que descreve o primeiro ativo do mercado financeiro, é governado pela equação diferencial estocástica 4.1.1. Essa equação não possui termo de volatilidade, apenas *drift*. Por essa razão, $X^{(0)}$ é denominado **ativo livre de risco** do mercado X , sendo o processo r interpretado como sua taxa de juros ao longo do tempo.

b) **Ativos com Risco ($X^{(i)}$):**

Os processos $X^{(i)}$, com $i = 1, \dots, n$, que representam os n ativos restantes do mercado financeiro, são governados pelas equações diferenciais estocásticas dadas em 4.1.2. Essas equações, que em sua forma integral são escritas como

$$X_t^{(i)} = x_0^{(i)} + \int_0^t \mu_s^{(i)} ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_s^{(i)j} dW_s^j, \quad i = 1, \dots, n,$$

possuem termos *drift* e volatilidade. Isso significa que o valor de cada i -ésimo ativo em cada instante de tempo t , $X_t^{(i)}$, é aleatório. Por essa razão, esses processos são denominados **ativos com risco** do mercado X , onde os processos $\mu^{(i)}$ e $\sigma^{(i)j}$, com $j = 1, \dots, m$, representam, respectivamente, a taxa de retorno esperada do ativo i em cada instante t , e sua volatilidade ou sensibilidade do ativo i em cada instante t à fonte de incerteza $W^j = \{W_t^j\}_{t \in [0, T]}$. De forma geral, ao longo deste capítulo:

- O processo n -dimensional $\mu = \left\{ \left(\mu_t^{(1)}, \dots, \mu_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ representará as taxas instantâneas de retorno esperado dos ativos de risco;
- O processo matricial $\sigma = [\sigma^{(i)j}]_{n \times m}$ descreve a relação dos ativos com risco e os fatores de incerteza modelados pelo processo de Wiener W . Para cada i , denotamos por $\sigma_t^{(i)} = \left(\sigma_t^{(i)1}, \dots, \sigma_t^{(i)m} \right)$ o vetor correspondente à i -ésima linha da matriz σ , o qual expressa a sensibilidade do ativo i a cada componente do W .

Ao longo do capítulo, por vezes denotaremos um mercado financeiro simplesmente por X , entendendo que se trata de um processo da forma $X = \{(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})\}_{t \in [0, T]}$, e ele sempre estará definido sobre o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$ conforme fixado no início desta seção. Alternativamente, quando conveniente, representaremos o mercado pela tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, \mu, \sigma, r)$, explicitando os parâmetros que determinam sua dinâmica.

Uma técnica amplamente utilizada em finanças matemáticas é a normalização do mercado, que consiste em expressar os preços dos ativos em termos relativos a um ativo de referência, denominado *numeraire*. Neste trabalho, adotamos como *numeraire* o ativo livre de risco. Como veremos, tal normalização simplifica a análise matemática e preserva propriedades fundamentais do mercado financeiro.

Definição 4.1.2. Dizemos que um mercado financeiro X é **normalizado** se o processo que representa o ativo livre de risco $X^0 = \{X_t^{(0)}\}_{t \in [0, T]}$ for constante e igual a 1, ou seja,

$$X_t^{(0)} = 1, \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

Observação 4.1.1. Nesta observação, mostramos que todo mercado financeiro X pode ser transformado em um mercado financeiro normalizado.

Defina a função $f : [0, T] \times (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ como:

$$f(t, x_0, x_1, \dots, x_n) := \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

onde $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$. As funções coordenadas f^k , definidas por $f^0(t, \mathbf{x}) = 1$ e, para $k = 1, \dots, n$, por $f^k(t, \mathbf{x}) = \frac{x_k}{x_0}$, onde $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, pertencem ao espaço das funções $C^{1,2}([0, T] \times (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n))$, conforme verificamos a seguir:

- Para $k = 0$: Temos $\frac{\partial f^0}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0$, $\frac{\partial f^0}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) = 0$ e $\frac{\partial^2 f^0}{\partial x_i \partial x_l}(t, \mathbf{x}) = 0$, para cada $(t, \mathbf{x})$ e para todos $i, l \in \{0, 1, \dots, n\}$.
- Para $k = 1, \dots, n$: Temos $\frac{\partial f^k}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0$,

$$\frac{\partial f^k}{\partial x_i}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{x_k}{x_0^2}, & i = 0, \\ \frac{1}{x_0}, & i = k, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_l}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2x_k}{x_0^3}, & i = l = 0, \\ -\frac{1}{x_0^2}, & (i, l) = (0, k) \text{ ou } (k, 0), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

para cada $(t, \mathbf{x})$ e todos $i, l \in \{0, 1, \dots, n\}$.

O que implica que as funções f^k , para $k = 0, 1, \dots, n$, são continuamente diferenciáveis em relação à variável t , e duas vezes continuamente diferenciáveis em relação à variável $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n)$, com todas essas derivadas parciais sendo funções contínuas.

Logo, pela fórmula de Itô multidimensional 2.6.3, o processo $\bar{X} = \{\bar{X}_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por

$$\bar{X}_t := f(t, X_t) = \left(1, \frac{X_t^{(1)}}{X_t^{(0)}}, \dots, \frac{X_t^{(n)}}{X_t^{(0)}}\right) := \left(1, \bar{X}_t^{(1)}, \dots, \bar{X}_t^{(n)}\right),$$

que está bem definido, pois a solução da equação 4.1.1 é $X_t^{(0)} = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) > 0$, para todo $t \in [0, T]$, é também um processo de Itô $(n+1)$ -dimensional, cujas componentes $\bar{X}_t^{(k)} := f^k(t, X_t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica:

- Para $k = 0$:

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t^{(0)} &= \frac{\partial f^0}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=0}^n \frac{\partial f^0}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,l=0}^n \frac{\partial^2 f^0}{\partial x_i \partial x_l}(t, X_t) d[X^{(i)}, X^{(l)}]_t. \\ &= 0 dt + \sum_{i=0}^n 0 dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,l=0}^n 0 d[X^{(i)}, X^{(j)}]_t \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Para $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t^{(k)} &= \frac{\partial f^k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=0}^n \frac{\partial f^k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,l=0}^n \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_l}(t, X_t) d[X^{(i)}, X^{(l)}]_t. \\ &= 0 dt + A + \frac{1}{2} B. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial f^k}{\partial x_i}(t, X_t) = 0$, para $i \neq 0, k$, e substituindo as derivadas parciais obtidas anteriormente, temos que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial f^k}{\partial x_0}(t, X_t) dX_t^{(0)} + \frac{\partial f^k}{\partial x_k}(t, X_t) dX_t^{(k)} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 0, k}}^n \frac{\partial f^k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^{(i)}, \\ &= -\frac{X_t^{(k)}}{(X_t^{(0)})^2} dX_t^{(0)} + \frac{1}{X_t^{(0)}} dX_t^{(k)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_l}(t, X_t) \neq 0$ se, e somente se, $(i, l) \in \{(0, 0), (i, l), (0, k)\}$ e, $d[X^{(0)}, X^{(0)}]_t = 0$, $d[X^{(0)}, X^{(k)}]_t = d[X^{(k)}, X^{(0)}]_t = 0$ pois $X^{(0)}$ não tem componente

estocástico (ver Definição 2.5.3), obtemos que:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_0^2}(t, X_t) d[X^{(0)}, X^{(0)}]_t + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_0 \partial x_k}(t, X_t) d[X^{(0)}, X^{(k)}]_t + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_k \partial x_0}(t, X_t) d[X^{(k)}, X^{(0)}]_t \\ &= \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_0^2}(t, X_t) 0 + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_0 \partial x_k}(t, X_t) 0 + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_k \partial x_0}(t, X_t) 0, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, neste caso, combinando os termos, temos:

$$d\bar{X}_t^{(k)} = \frac{1}{X_t^{(0)}} dX_t^{(k)} - \frac{X_t^{(k)}}{(X_t^{(0)})^2} dX_t^{(0)}.$$

Substituindo $dX_t^{(0)} = r_t X_t^{(0)} dt$ e $dX_t^{(k)} = \mu_t^{(k)} dt + \sum_j \sigma_t^{(k)j} dW_t^j$, e definindo $\xi = \{\xi_t\}_{t \in [0, T]}$ por $\xi_t := 1/X_t^{(0)} = e^{-\int_0^t r_s ds}$, para todo t em $[0, T]$, obtemos que a dinâmica do processo de Itô $\bar{X}$ é:

i) Para o processo $\bar{X}^{(0)}$:

$$d\bar{X}_t^{(0)} = 0, \quad \bar{X}_0^{(0)} = 1,$$

ii) Para os processos $\bar{X}^{(k)}$, onde $k = 1, \dots, n$:

$$d\bar{X}_t^{(k)} = \xi_t \left(dX_t^{(k)} - r_t X_t^{(k)} dt \right) = \xi_t \left(\left(\mu_t^{(k)} - r_t X_t^{(k)} \right) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_t^{(k)j} dW_t^j \right), \quad \bar{X}_0^{(k)} = x_0^{(k)}. \quad (4.1.3)$$

De forma vetorial, a dinâmica do $\bar{X}$ pode ser expressa como:

$$\begin{cases} d\bar{X}_t = \xi_t (dX_t - r_t X_t dt), & t \in [0, T], \\ \bar{X}_0 = X_0, \end{cases}$$

onde $\bar{X}_t = (\bar{X}_t^{(0)}, \dots, \bar{X}_t^{(n)})^\top$, $dX_t = (dX_t^{(0)}, \dots, dX_t^{(n)})^\top$, $r_t X_t dt = (r_t X_t^{(0)} dt, \dots, r_t X_t^{(n)} dt)^\top$. Portanto, a partir do mercado financeiro X , obtemos o processo $\bar{X} = \left\{ \left(1, \bar{X}_t^{(1)}, \dots, \bar{X}_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ junto com sua dinâmica, o qual satisfaz a definição de mercado normalizado. A este processo $\bar{X}$ o chamaremos de **mercado normalizado de X** , e ao processo determinístico ξ , de **fator de normalização de X** .

Em um mercado financeiro, a alocação de recursos em diferentes ativos pelos investidores é representada formalmente por um portfólio. A seguir, definimos esse conceito, fundamental para analisar o comportamento dos investimentos em um mercado financeiro.

Definição 4.1.3. Seja $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro com $n + 1$ ativos, definido sobre o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$. Um **portfólio** sobre X é um processo estocástico $(n + 1)$ -dimensional $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$, progressivamente mensurável com relação à filtração $\mathbb{F}^W$, cujas componentes pertencem à classe $\mathcal{V}(0, T)$.

Do ponto de vista financeiro, considerando o portfólio como uma função de duas variáveis, $\theta: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, interpreta-se $\theta(t, \omega) = (\theta^0(t, \omega), \theta^1(t, \omega), \dots, \theta^n(t, \omega))$ como a posição do investidor no instante t , sob o cenário ω . Como θ é adaptado à filtração $\mathbb{F}^W$, essa posição depende apenas das informações disponíveis até o instante t . Especificamente, $\theta^{(0)}(t, \omega)$ representa a quantidade de unidades do ativo livre de risco $X^{(0)}$ no instante t , sob o cenário ω , enquanto $\theta^{(i)}(t, \omega)$, para $i = 1, \dots, n$, representa a quantidade de unidades do ativo com risco $X^{(i)}$ mantidas nesse mesmo instante e cenário. A exigência de que cada componente de θ pertença ao espaço $\mathcal{V}(0, T)$ é técnica e, como veremos, garante propriedades de regularidade necessárias para os próximos resultados.

Uma vez definido o conceito de portfólio, é natural associar a ele um valor que representa a riqueza total do investidor em cada instante.

Definição 4.1.4. Seja $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ um portfólio sobre um mercado financeiro $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$. O **valor do portfólio** no instante t , denotado por V_t^θ , é definido como

$$V_t^\theta := \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)}.$$

Assim, em cada instante $t \in [0, T]$, o valor V_t^θ é dado pela soma ponderada das quantidades de unidades dos ativos, $\theta_t^{(i)}$, pelos respectivos preços dos ativos, $X_t^{(i)}$. Esse valor fornece uma métrica central para avaliar o desempenho de um portfólio e, como veremos mais adiante, será fundamental no estudo de temas como a ausência de arbitragem e os T -contratos atingíveis.

Como, para cada $t \in [0, T]$, o valor V_t^θ está bem definido, e esse depende das incertezas do mercado financeiro, já que tanto as alocações $\theta^{(i)}$ quanto os preços dos ativos $X^{(i)}$ são componentes de processos estocásticos, associamos a esses valores um processo estocástico

real $V^\theta = \{V_t^\theta\}_{t \in [0, T]}$, definido por:

$$V_t^\theta = \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Chamaremos esse processo estocástico, que descreve a evolução temporal da riqueza acumulada pelo portfólio ao longo do intervalo $[0, T]$, de **processo de valor** do portfólio θ . Na Observação 4.1.1, vimos que todo mercado financeiro X pode ser normalizado. O processo de valor de θ sobre o mercado normalizado $\bar{X} = \left\{ \left(1, \bar{X}_t^{(1)}, \dots, \bar{X}_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ é um processo estocástico denotado por $\bar{V}^\theta = \{ \bar{V}_t^\theta \}_{t \in [0, T]}$, e está definido, para todo $t \in [0, T]$, por:

$$\bar{V}_t^\theta := \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} \bar{X}_t^{(i)} = \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} \xi_t X_t^{(i)} = \xi_t \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} = \xi_t V_t^\theta,$$

onde ξ é o fator de normalização do mercado X . Chamaremos $\bar{V}^\theta$ de **processo de valor normalizado** do portfólio θ .

A definição a seguir, baseada em Björk [5] e Øksendal [42], introduz um tipo especial de portfólio cuja estrutura é central para a modelagem de estratégias de investimento realistas.

Definição 4.1.5. Um portfólio $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$, definido sobre um mercado financeiro $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$, é dito **autofinanciado** se o processo de valor associado V^θ satisfaz, para todo $t \in [0, T]$, a equação

$$V_t^\theta = V_0^\theta + \sum_{i=0}^n \int_0^t \theta_s^{(i)} dX_s^{(i)}, \quad (4.1.4)$$

que, em sua forma diferencial, pode ser escrita como:

$$dV_t^\theta = \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} dX_t^{(i)}. \quad (4.1.5)$$

Observe que, para que a equação 4.1.4 esteja bem definida, é necessário que as integrais estocásticas envolvidas existam. A equação 4.1.5 pode ser escrita explicitamente como:

$$dV_t^\theta = \theta_t^{(0)} r_t X_t^{(0)} dt + \sum_{i=1}^n \theta_t^{(i)} \mu_t^{(i)} dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_t^{(i)} \sigma_t^{(i)j} dW_t^j,$$

o que é claramente um processo de Itô, pois resulta da combinação dos processos de Itô $X^{(i)}$ com coeficientes $\theta^{(i)}$ adaptados e integráveis. Portanto, segue que o processo de valor V^θ de um portfólio autofinanciado também é, por construção, um processo de Itô.

O significado de portfólio autofinanciado, caracterizado pela condição 4.1.5, é que as variações no valor do portfólio dV_t decorrem exclusivamente das mudanças nos preços dos ativos dX_t , e não de aportes ou retiradas de capital. Em outras palavras, fixada a riqueza inicial V_0^θ , não há entradas nem saídas de capital ao longo do tempo: todo o financiamento necessário para ajustar as posições do portfólio provém do próprio portfólio, por meio da compra e venda de ativos.

O lema a seguir mostra que a propriedade de autofinanciabilidade de um portfólio é preservada sob a normalização do mercado.

Lema 4.1.1. *Seja $\bar{X} = \xi X$ a normalização de um mercado financeiro X , e seja θ um portfólio sobre X . Então, θ é autofinanciado em X se, e somente se, também é autofinanciado em $\bar{X}$.*

Demonstração. Suponha que θ é autofinanciado em X . Sejam V^θ e $\bar{V}^\theta$ os processos de valor de θ sobre X e $\bar{X}$, respectivamente. Como, para todo $t \in [0, T]$, temos $\bar{V}_t^\theta = \xi_t V_t^\theta$, então aplicando a fórmula de integração por partes 2.2, obtemos:

$$d\bar{V}_t^\theta = d(\xi_t V_t^\theta) = \xi_t dV_t^\theta + V_t^\theta d\xi_t + d[\xi, V^\theta]_t.$$

Como $\xi = \{\xi_t\}_{t \in [0, T]}$ é um processo determinístico, por 2.5.3, temos $d[\xi, V^\theta]_t = 0$. Logo,

$$d\bar{V}_t^\theta = \xi_t dV_t^\theta + V_t^\theta d\xi_t.$$

Pela condição de autofinanciabilidade de θ em X , assim como da definição de $\bar{V}^\theta$, e da derivada $d\xi(t) = -r_t \xi(t) dt$, resulta que:

$$d\bar{V}_t^\theta = \xi_t \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} dX_t^{(i)} + \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} (-r_t \xi_t dt).$$

Finalmente, substituindo as equações do mercado normalizado 4.1.3, da anterior temos:

$$d\bar{V}_t^\theta = \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} \left[\xi_t \left(dX_t^{(i)} - r_t X_t^{(i)} dt \right) \right] = \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} d\bar{X}_t^{(i)}.$$

Daí, conclui-se que θ também é autofinanciado no mercado normalizado $\bar{X}$.

Reciprocamente, suponha que, sobre o mercado normalizado $\bar{X}$, o portfólio θ é autofinanciado. Sejam V^θ e $\bar{V}^\theta$ os processos de valor de θ sobre X e $\bar{X}$, respectivamente. Como,

para todo $t \in [0, T]$, vale $\bar{V}_t^\theta = \xi_t V_t^\theta$, e como $\xi_t > 0$, então $V_t^\theta = \bar{V}_t^\theta / \xi_t$. Logo, aplicando a fórmula de integração por partes 2.2, obtemos:

$$dV_t^\theta = d\left(\frac{\bar{V}_t^\theta}{\xi_t}\right) = \frac{1}{\xi_t} d\bar{V}_t^\theta + \bar{V}_t^\theta d\left(\frac{1}{\xi_t}\right) + d\left[\bar{V}^\theta, \frac{1}{\xi}\right]_t.$$

Como $1/\xi$ continua sendo determinístico, a covariação entre $1/\xi$ e $\bar{V}^\theta$ é nula. Assim, a equação acima se reduz a:

$$dV_t^\theta = \frac{1}{\xi_t} d\bar{V}_t^\theta + \bar{V}_t^\theta d\left(\frac{1}{\xi_t}\right).$$

Utilizando a condição de autofinanciabilidade de θ em $\bar{X}$, bem como $\bar{V}_t^\theta = \xi_t V_t^\theta$, e a derivada $d\left(\frac{1}{\xi_t}\right) = r_t \frac{1}{\xi_t} dt$, segue que:

$$dV_t^\theta = \frac{1}{\xi_t} \left(\sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} d\bar{X}_t^{(i)} \right) + \xi_t V_t^{(\theta)} \left(r_t \frac{1}{\xi_t} dt \right) = \frac{1}{\xi_t} \left(\sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} d\bar{X}_t^{(i)} \right) + \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} r_t dt.$$

Finalmente, substituindo as equações do mercado normalizado 4.1.3 e fatorando convenientemente, obtemos

$$\begin{aligned} dV_t^\theta &= \frac{1}{\xi_t} \left[\sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} \left(\xi_t \left(dX_t^{(i)} - r_t X_t^{(i)} dt \right) \right) \right] + \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} r_t dt \\ &= \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} dX_t^{(i)} - \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} r_t dt + \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} r_t dt \\ &= \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} dX_t^{(i)}. \end{aligned}$$

Isso mostra que θ é autofinanciado no mercado original X . □

Para concluir esta seção, apresentamos um lema fundamental que garante a existência de um portfólio autofinanciado em um mercado financeiro X , uma vez fixadas as alocações nos ativos com risco $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$.

Lema 4.1.2. *Sejam $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}$ processos que descrevem o número de unidades dos ativos com risco de um mercado financeiro $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$. Então, sempre é possível definir um processo $\theta^{(0)}$ que descreve o número de unidades do ativo livre de risco $X^{(0)}$ de tal forma que $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ seja um portfólio autofinan-*

ciado em X . Além disso, o valor inicial V_0^θ do processo de valor V^θ pode ser escolhido arbitrariamente.

Demonstração. Seja V^θ o processo de valor do portfólio θ sobre o mercado X . Então, para cada $t \in [0, T]$, temos:

$$V_t^\theta := \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} = \theta_t^{(0)} X_t^{(0)} + \sum_{i=1}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)}.$$

Por outro lado, se θ for autofinanciado, então, por 4.1.4, para todo $t > 0$ tem-se:

$$V_t^\theta = V_0^\theta + \sum_{i=0}^n \int_0^t \theta_s^{(i)} dX_s^{(i)} = V_0^\theta + \int_0^t \theta_s^{(0)} dX_s^{(0)} + \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta_s^{(i)} dX_s^{(i)},$$

ou, na forma diferencial:

$$dV_t^\theta = \theta_t^{(0)} dX_t^{(0)} + \sum_{i=1}^n \theta_t^{(i)} dX_t^{(i)}.$$

Agora, aplicando a fórmula de integração por partes a V_t^θ , obtemos:

$$dV_t^\theta = d \left(\theta_t^{(0)} X_t^{(0)} + \sum_{i=1}^n \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} \right) = \theta_t^{(0)} dX_t^{(0)} + X_t^{(0)} d\theta_t^{(0)} + \sum_{i=1}^n \left(\theta_t^{(i)} dX_t^{(i)} + X_t^{(i)} d\theta_t^{(i)} \right).$$

Daí, comparando com a equação da autofinanciabilidade, na sua forma diferencial, obtemos:

$$\theta_t^{(0)} dX_t^{(0)} + \sum_{i=1}^n \theta_t^{(i)} dX_t^{(i)} = \theta_t^{(0)} dX_t^{(0)} + X_t^{(0)} d\theta_t^{(0)} + \sum_{i=1}^n \left(\theta_t^{(i)} dX_t^{(i)} + X_t^{(i)} d\theta_t^{(i)} \right).$$

Cancelando os termos comuns, resulta $0 = X_t^{(0)} d\theta_t^{(0)} + \sum_{i=1}^n X_t^{(i)} d\theta_t^{(i)}$ ou, equivalentemente:

$$d\theta_t^{(0)} = - \sum_{i=1}^n \frac{X_t^{(i)} d\theta_t^{(i)}}{X_t^{(0)}}.$$

Essa expressão define diferencialmente o processo $\theta^{(0)}$ de forma a manter a autofinanciabilidade. Para construir esse processo, definimos:

$$A_t := \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t \theta_u^{(i)} dX_u^{(i)} - \theta_t^{(i)} X_t^{(i)} \right).$$

cujas diferenciais são:

$$dA_t = \sum_{i=1}^n \left(\theta_t^{(i)} dX_t^{(i)} - X_t^{(i)} d\theta_t^{(i)} - \theta_t^{(i)} dX_t^{(i)} \right) = - \sum_{i=1}^n X_t^{(i)} d\theta_t^{(i)}.$$

Logo, substituindo na igualdade $d\theta_t^{(0)} = - \sum_{i=1}^n \frac{X_t^{(i)} d\theta_t^{(i)}}{X_t^{(0)}}$, temos:

$$d\theta_t^{(0)} = \frac{dA_t}{X_t^{(0)}}.$$

Integrando essa expressão, obtemos:

$$\theta_t^{(0)} = \theta_0^{(0)} + \int_0^t \frac{1}{X_u^{(0)}} dA_u.$$

Portanto, definindo $\left\{ \theta_t^{(0)} \right\}_{t \in [0, T]}$ pela igualdade acima, concluímos que para quaisquer processos $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}$, é sempre possível definir $\theta^{(0)}$ de forma que o portfólio θ seja autofinanciado.

Por fim, dado um valor inicial arbitrário V_0^θ , a equação:

$$V_0^\theta = \theta_0^{(0)} X_0^{(0)} + \sum_{i=1}^n \theta_0^{(i)} X_0^{(i)}.$$

permite determinar o montante inicial investido no ativo livre de risco $\theta_0^{(0)}$ como:

$$\theta_0^{(0)} = \frac{V_0^\theta - \sum_{i=1}^n \theta_0^{(i)} X_0^{(i)}}{X_0^{(0)}}.$$

Isso conclui a demonstração. □

4.2 Resultados Sobre a Ausência de Arbitragem

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre a ausência de arbitragem em um mercado financeiro. Iniciamos com dois conceitos fundamentais para a formulação matemática dessa hipótese: a noção de portfólio admissível e a definição de arbitragem. Ambas aparecem nas referências indicadas para a Seção 4.1 e serão essenciais na demonstração dos principais teoremas desta seção.

Definição 4.2.1. Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, e seja $\theta = \{\theta_t\}_{t \in [0, T]}$ um portfólio autofinanciado em X . Dizemos que θ é **admissível** para X se existir uma constante $K_\theta \geq 0$ tal que, para todo t em $[0, T]$, seu processo de valor V^θ satisfaça:

$$V_t^\theta \geq -K_\theta, \quad \mathbb{P} - \text{quase sempre.}$$

Note que, como assumimos que a taxa de juros r é limitada, a condição de admissibilidade também poderia ser expressa em termos do processo de valor normalizado $\bar{V}^\theta$, levando a uma definição equivalente. Formalizaremos esse fato no próximo lema, o qual pode ser encontrado em Øksendal [42]. Antes disso, introduzimos a seguinte notação: denotamos por $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os portfólios admissíveis associados a um dado mercado financeiro X . Mais precisamente:

$$\mathcal{A} := \{ \theta = \{\theta_t\}_{t \in [0, T]} \mid \theta \text{ é um portfólio admissível para } X \}.$$

Lema 4.2.1. *Seja $\bar{X} = \xi X$ a normalização de um mercado financeiro X , e seja θ um portfólio sobre X . Então, θ é admissível para X se, e somente se, θ é admissível para $\bar{X}$.*

Demonstração. Suponha que θ é admissível para X . Isso significa que θ é autofinanciado em X e existe uma constante $K_\theta \geq 0$ tal que, para todo $t \in [0, T]$, $V_t^\theta \geq -K_\theta$, $\mathbb{P}$ -quase sempre. Seja $\bar{V}^\theta$ o processo de valor correspondente no mercado normalizado $\bar{X}$. Como, para este processo de valor, temos

$$\bar{V}_t^\theta := \xi_t V_t^\theta \geq \xi_t (-K_\theta) = -\xi_t K_\theta,$$

e como r é limitado e ξ , que é definido por $\xi_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$, satisfaz $\xi_t \leq 1$ para todo $t \in [0, T]$, segue que, para todo $t \in [0, T]$,

$$\bar{V}_t^\theta \geq -\xi_t K_\theta \geq -K_\theta, \quad \mathbb{P} - \text{quase sempre.}$$

Portanto, $\bar{V}^\theta$ é limitado inferiormente $\mathbb{P}$ -quase sempre. Além disso, como θ é autofinanciado em X , segue do Lema 4.1.1 que θ também é autofinanciado em $\bar{X}$. Logo, conclui-se que θ é admissível no mercado normalizado $\bar{X}$.

Reciprocamente, suponha que θ seja admissível para o mercado normalizado $\bar{X}$. Isso significa que θ é autofinanciado em $\bar{X}$ e que existe uma constante $\bar{K}_\theta \geq 0$ tal que, para todo $t \in [0, T]$, $\bar{V}_t^\theta \geq -\bar{K}_\theta$, $\mathbb{P}$ -quase sempre. Como o processo de valor $\bar{V}_t^\theta$ é dado por $\bar{V}_t^\theta = \xi_t V_t^\theta$, temos $V_t^\theta = \xi_t^{-1} \bar{V}_t^\theta$, para todo $t \in [0, T]$. Além disso, como $\xi_t > 0$ e $\xi_t \leq 1$

para todo $t \in [0, T]$, obtemos:

$$V_t^\theta = \xi_t^{-1} \bar{V}_t^\theta \geq \xi_t^{-1} (-\bar{K}_\theta), \quad \mathbb{P}\text{-quase sempre.}$$

Como ξ é contínuo e estritamente positivo em um intervalo compacto, existe uma constante finita $C > 0$ tal que $\xi_t^{-1} \leq C$ para todo $t \in [0, T]$. Assim, definindo $K_\theta := C \bar{K}_\theta \geq 0$, segue que, para todo $t \in [0, T]$,

$$V_t^\theta \geq -K_\theta, \quad \mathbb{P}\text{-quase sempre.}$$

Portanto, V^θ é limitado inferiormente $\mathbb{P}$ -quase sempre. Além disso, como θ é autofinanciado em $\bar{X}$, segue novamente do Lema 4.1.1 que θ também é autofinanciado em X . Logo, θ é admissível no mercado original X . $\square$

As equivalências dadas pelos Lemas 4.1.1 e 4.2.1 são cruciais para garantir que os resultados obtidos no mercado normalizado possam ser aplicados ao mercado original.

Definição 4.2.2. Seja θ um portfólio admissível em um mercado financeiro X , definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$. Dizemos que θ constitui uma **arbitragem** se seu processo de valor V^θ associado satisfaz:

- (i) $V_0^\theta = 0$,
- (ii) $V_T^\theta \geq 0$ $\mathbb{P}$ -q.s e $\mathbb{P}(V_T^\theta > 0) > 0$.

Em outras palavras, uma arbitragem é um portfólio admissível com valor inicial zero que, ao tempo T , garante ganho não-negativo quase seguramente e ganho estritamente positivo com probabilidade positiva. Tal situação representa uma forma de lucro sem risco, evidenciando um desequilíbrio de mercado e uma falha grave na precificação de ativos. Diremos que um mercado financeiro possui oportunidades de arbitragem se for possível nele construir um portfólio de arbitragem; caso contrário, o mercado será dito livre de arbitragem.

Como veremos, a hipótese de ausência de arbitragem será fundamental para a formulação do modelo de Black-Scholes. Por isso, é essencial dispor de critérios que permitam verificar se um mercado financeiro admite ou não oportunidades de arbitragem. Uma condição suficiente para garantir a ausência de arbitragem pode ser expressa por meio da seguinte definição fundamental, adaptada de Baldi [3], onde supomos que $\mathcal{F}_T^W = \mathcal{F}$.

Definição 4.2.3. Seja X um mercado financeiro definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$. Dizemos que uma medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$ é uma **medida martingale equivalente** para X se satisfaz as seguintes condições:

- i) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$;

ii) O mercado normalizado $\bar{X}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$.

Uma medida martingale equivalente também é chamada de **probabilidade neutra ao risco**. Como será estudada na Seção 4.4, tal medida é uma ferramenta essencial na precificação de opções europeias, pois permite interpretar seu preço como o valor esperado (descontado) do seu *payoff* terminal sob $\mathbb{Q}$.

Apresentamos a seguir um resultado fundamental que conecta a existência de uma medida martingale equivalente à ausência de arbitragem. Versões mais gerais podem ser encontradas em Øksendal [42], Shreve [38] e em Jeanblanc [19].

Teorema 4.2.1. *Se existe uma medida martingale equivalente para um mercado financeiro $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, então o mercado X é livre de arbitragem.*

Demonstração. Seja $\mathbb{Q}$ a medida martingale equivalente para o mercado X , isto é, $\mathbb{Q}$ é equivalente a $\mathbb{P}$ e o mercado normalizado $\bar{X}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$. Suponha, por contradição, que o mercado X admite uma oportunidade de arbitragem, ou seja, sobre X existe um portfólio admissível θ tal que seu processo de valor $\{V_t^\theta\}_{t \in [0, T]}$ satisfaz:

$$V_0^\theta = 0, \quad V_T^\theta \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-q.s.}, \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(V_T^\theta > 0) > 0.$$

Como θ é admissível para X , segue do Lema 4.2.1 que θ também é admissível para o mercado normalizado $\bar{X}$. Assim, o processo de valor normalizado $\bar{V}^\theta$ é limitado inferiormente, e θ é autofinanciado em $\bar{X}$. Além disso, como $V_0^\theta = 0$, temos $\bar{V}_0^\theta = \xi_0 V_0^\theta = 0$. Agora, como θ é autofinanciado e $\bar{X}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$, segue que $\bar{V}^\theta$ também é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$. Logo,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{V}_T^\theta] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{V}_T^\theta | \mathcal{F}_0^W]] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{V}_0^\theta] = \bar{V}_0^\theta = 0.$$

Por outro lado, da condição de arbitragem e do fato de que $\xi_T > 0$, segue que $\bar{V}_T^\theta = \xi_T V_T^\theta \geq 0$ $\mathbb{P}$ -quase sempre, e que $\mathbb{P}(\bar{V}_T^\theta > 0) > 0$. Como $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, essas propriedades também valem sob $\mathbb{Q}$, ou seja, $\bar{V}_T^\theta \geq 0$ $\mathbb{Q}$ -quase sempre e $\mathbb{Q}(\bar{V}_T^\theta > 0) > 0$. Assim,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{V}_T^\theta] > 0,$$

o que contradiz o fato de que $\bar{V}^\theta$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$, com valor inicial nulo. Essa contradição mostra que não pode existir tal portfólio admissível com as propriedades da condição de arbitragem. Portanto, o mercado X é livre de arbitragem. $\square$

Observação 4.2.1. Para um mercado financeiro $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$, adotamos a seguinte convenção de notação:

- $\widehat{X}_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)})^\top$, para todo $t \in [0, T]$, representa o vetor coluna de preços dos ativos de risco no instante t .

Os dois teoremas a seguir, centrais na modelagem matemática de mercados financeiros, fornecem, respectivamente, uma condição suficiente e uma "condição necessária" para a ausência de arbitragem em um mercado. Formulações análogas desses resultados podem ser encontradas em Øksendal [42], Kuo [24] e Karatzas e Shreve [22].

Teorema 4.2.2. *Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro com $n + 1$ ativos, representado pela tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, \mu, \sigma, r)$. Suponha que exista um processo m -dimensional u em $\mathcal{V}^m(0, T)$ tal que*

$$\sigma(t, \omega)u(t, \omega) = \mu(t, \omega) - r(t, \omega)\widehat{X}(t, \omega), \quad \lambda \otimes \mathbb{P}\text{-q.c.} \quad (4.2.1)$$

e

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|u_t\|^2 dt \right) \right] < +\infty. \quad (4.2.2)$$

Então o mercado X é livre de arbitragem.

Demonstração. Dado que o processo $u \in \mathcal{V}^m(0, T)$ satisfaz a condição 4.2.2, segue pela Condição de Novikov 2.3 que o processo $\{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por:

$$Z_t := \exp \left(- \sum_{j=1}^m \int_0^t u_s^j dW_s^j - \frac{1}{2} \int_0^t \|u_s\|^2 ds \right)$$

é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale com respeito à $\mathbb{P}$. Assim, pelo Teorema de Girsanov 2.7.3, sob a medida de probabilidade $\mathbb{Q}: \mathcal{F}_T^W \rightarrow [0, 1]$ definida por $d\mathbb{Q} := Z_T d\mathbb{P}$, tem-se que o processo $\widetilde{W} = \{\widetilde{W}_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por:

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t u_s ds + W_t, \quad (4.2.3)$$

que, em sua forma diferencial pode ser escrito como

$$d\widetilde{W}_t = u_t dt + dW_t, \quad (4.2.4)$$

é um processo de Wiener padrão m -dimensional. Além disso, pelo Corolário 2.2, $\mathbb{Q}$ é equivalente a $\mathbb{P}$ e $\widetilde{W}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$.

Pela Observação 4.1.1, a dinâmica do mercado normalizado $\bar{X} = \left\{ \left(1, \bar{X}_t^{(1)}, \dots, \bar{X}_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$,

sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, é dada por:

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t^{(0)} &= 0, & \bar{X}_0^{(0)} &= 1, \\ d\bar{X}_t^{(i)} &= \xi_t \left[\left(\mu_t^{(i)} - r_t X_t^{(i)} \right) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_t^{(i)j} dW_t^j \right], & \bar{X}_0^{(i)} &= x_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Como, por 4.2.4, para cada $j = 1, \dots, m$, tem-se $dW_t^j = d\tilde{W}_t^j - u_t^j dt$ e, pela equação 4.2.1, para cada $i = 1, \dots, n$, vale $\mu_t^{(i)} - r_t X_t^{(i)} = \sum_{j=1}^m \sigma_t^{(i)j} u_t^j$, então substituindo essas expressões na dinâmica dos ativos de risco, obtemos que:

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t^{(i)} &= \xi_t \left[\left(\sum_{j=1}^m \sigma_t^{(i)j} u_t^j \right) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_t^{(i)j} (d\tilde{W}_t^j - u_t^j dt) \right] = \xi_t \sum_{j=1}^m \sigma_t^{(i)j} d\tilde{W}_t^j \\ &= \xi_t \sigma_t^{(i)} d\tilde{W}_t, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

para todo $i = 1, \dots, n$, onde $\sigma_t^{(i)} = (\sigma_t^{(i)1}, \dots, \sigma_t^{(i)m})$.

Agora, como $\xi_t \leq 1$ para todo $t \in [0, T]$, tem-se $|\xi_t|^2 \|\sigma_t^{(i)}\|^2 \leq \|\sigma_t^{(i)}\|^2$, para todo $t \in [0, T]$, e como $\sigma \in \mathcal{V}^{n \times m}(0, T)$ sob $\mathbb{P}$, e $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, segue que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T |\xi_t|^2 \|\sigma_t^{(i)}\|^2 dt \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^T \|\sigma_t^{(i)}\|^2 dt \right] < +\infty,$$

Portanto, como $\tilde{W}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$, da equação 4.2.5 segue que cada processo $\bar{X}^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$. Como $\bar{X}^{(0)} \equiv 1$, é trivialmente uma martingale, concluímos que $\bar{X}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$, onde $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Assim, construímos uma medida martingale equivalente $\mathbb{Q}$ para o mercado X , o que, pelo Teorema 4.2.1, implica que o mercado é livre de arbitragem. $\square$

O teorema a seguir é um tipo de recíproco do anterior. No entanto, sua demonstração exigirá o uso de um resultado clássico da álgebra linear, conhecido como Alternativa de Fredholm, o qual pode ser interpretado como um caso particular da versão funcional apresentada em Kreyszig [23].

Proposição 4.1. (Alternativa de Fredholm) Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um vetor $b \in \mathbb{R}^m$, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- 1) $Ax = b$ tem uma solução $x \in \mathbb{R}^n$.
- 2) Existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y = 0$ e $\langle y, b \rangle \neq 0$.

Teorema 4.2.3. *Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro com $n + 1$ ativos, representado pela tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, \mu, \sigma, r)$. Se o mercado X é livre de arbitragem, então existe um processo u em $\mathcal{V}^m(0, T)$ tal que:*

$$\sigma(t, \omega)u(t, \omega) = \mu(t, \omega) - r(t, \omega)\hat{X}(t, \omega), \quad \lambda \otimes \mathbb{P} - q.s. \quad (4.2.6)$$

Demonstração. Como todo mercado pode ser normalizado, podemos assumir, sem perda de generalidade, que X está normalizado, ou seja, que $r \equiv 0$. Nosso objetivo é mostrar que, se o mercado X é livre de arbitragem, então a equação 4.2.6 admite uma solução $u(t, \omega)$ para quase todo ponto (t, ω) em $[0, T] \times \Omega$. A demonstração baseia-se na alternativa de Fredholm, e no fato de que a suposição de inexistência de solução para a equação 4.2.6 levará à construção de um portfólio admissível que constitui uma arbitragem, o que contradiz a hipótese de que X é livre de arbitragem.

Suponhamos, por contradição, que o mercado X é livre de arbitragem, isto é, não existe portfólio admissível θ para X que satisfaça:

$$V_0^\theta = 0, \quad V_T^\theta \geq 0, \quad \mathbb{P} - q.s. \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(V_T^\theta > 0) > 0.$$

e, ao mesmo tempo, que a equação 4.2.6 não possui solução para um conjunto de pontos (t, ω) de medida positiva em $[0, T] \times \Omega$. Para esses pontos $t \in [0, T]$, defina o conjunto:

$$F_t = \{\omega \in \Omega : \sigma(t, \omega)u(t, \omega) = \mu(t, \omega) \quad \text{não admite solução}\}.$$

Então, pela Proposição 4.1 existe $v(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\sigma^T(t, \omega)v(t, \omega) = 0 \quad \text{e} \quad \langle v(t, \omega), \mu(t, \omega) \rangle \neq 0.$$

Defina então, para $i = 1, \dots, n$, os processos $\{\theta_t^{(i)}\}_{t \in [0, T]}$ por:

$$\theta^{(i)}(t, \omega) = \text{sgn}(\langle v(t, \omega), \mu(t, \omega) \rangle) v^{(i)}(t, \omega) \mathbb{1}_{F_t}(\omega).$$

Devido a que os processos μ, σ e v satisfazem as propriedades de $\mathbb{F}^W$ -adaptabilidade, mensurabilidade e as condições adequadas de regularidade, segue que os processos $\theta^{(i)}$ também herdam tais propriedades. Dessa forma, e utilizando o Lema 4.1.2, consideramos que o processo $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ é um portfólio autofinanciado em X , com valor inicial $V^\theta(0, \omega) = 0$. Como este portfólio é autofinanciado, então por 4.1.4, para cada $t > 0$,

tem-se que:

$$V^\theta(t, \omega) = V^\theta(0, \omega) + \sum_{i=0}^n \int_0^t \theta^{(i)}(s, \omega) dX^{(i)}(s, \omega).$$

Dado que $V^\theta(0, \omega) = 0$ e o mercado X é normalizado (isto é, tem-se $dX_s^{(0)} = 0$ e para $i = 1, \dots, n$, $dX_s^{(i)}$ é dado por 4.1.2), segue que:

$$\begin{aligned} V^\theta(t, \omega) &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta^{(i)}(s, \omega) dX^{(i)}(s, \omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta^{(i)}(s, \omega) \left(\mu^{(i)}(s, \omega) ds + \sum_{j=1}^m \sigma^{(i)j}(s, \omega) dW^j(s, \omega) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta^{(i)}(s, \omega) \mu^{(i)}(s, \omega) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta^{(i)}(s, \omega) \sum_{j=1}^m \sigma^{(i)j}(s, \omega) dW^j(s, \omega) \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \theta^{(i)}(s, \omega) \mu^{(i)}(s, \omega) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta^{(i)}(s, \omega) \sigma^{(i)j}(s, \omega) dW^j(s, \omega). \end{aligned}$$

Utilizando a definição dos processos $\theta^{(i)}$, o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ e a identidade $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ para $x \neq 0$, a integral ordinária torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{i=1}^n \theta^{(i)}(s, \omega) \mu^{(i)}(s, \omega) ds &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn}(\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle) v^{(i)}(s, \omega) \mu^{(i)}(s, \omega) \mathbb{1}_{F_s}(\omega) ds. \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{F_s}(\omega) \operatorname{sgn}(\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle) \sum_{i=1}^n v^{(i)}(s, \omega) \mu^{(i)}(s, \omega) ds. \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{F_s}(\omega) \operatorname{sgn}(\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle) \langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle ds. \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{F_s}(\omega) |\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle| ds. \end{aligned}$$

Enquanto, utilizando novamente a definição dos processos $\theta^{(i)}$, bem como o fato de que $\sigma^T(s, \omega) v(s, \omega) = 0$, e isto implica que $\sum_{i=1}^n v^{(i)}(s, \omega) \sigma^{(i)j}(s, \omega) = 0$ para todo $j = 1, \dots, m$, a integral Itô de acima é igual a:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta^{(i)}(s, \omega) \sigma^{(i)j}(s, \omega) dW^j(s, \omega) &= \\ &= \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \operatorname{sgn}(\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle) v^{(i)}(s, \omega) \mathbb{1}_{F_s}(\omega) \sigma^{(i)j}(s, \omega) dW^j(s, \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \mathbb{1}_{F_s}(\omega) \operatorname{sgn}(\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle) \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n v^{(i)}(s, \omega) \sigma^{(i)j}(s, \omega) dW^{(j)}(s, \omega) \\
&= \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta^{(i)}(s, \omega) \sigma^{(i)j}(s, \omega) dW^{(j)}(s, \omega) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos para todo $t > 0$:

$$V^\theta(t, \omega) = \int_0^t \mathbb{1}_{F_s}(\omega) |\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle| ds.$$

Como $\mathbb{1}_{F_s}(\omega) \geq 0$ e $|\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle| \geq 0$, segue que:

$$V^\theta(t, \omega) \geq 0 \quad \mathbb{P} - \text{quase certamente.}$$

Além disso, como supusemos que o conjunto de pontos (t, ω) para os quais a equação $\sigma(t, \omega)u(t, \omega) = \mu(t, \omega)$ não admite solução possui medida estritamente positiva em $[0, T] \times \Omega$, então existe um subconjunto de Ω com probabilidade positiva no qual a função indicadora $\mathbb{1}_{F_s}(\omega)$ é não nula em um subconjunto de $[0, T]$ de medida positiva. Como $\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle \neq 0$ em F_s , conclui-se que:

$$\mathbb{P}(V^\theta(T) > 0) > 0, \quad \text{pois} \quad V^\theta(T, \omega) = \int_0^T \mathbb{1}_{F_s}(\omega) |\langle v(s, \omega), \mu(s, \omega) \rangle| ds > 0.$$

Claramente, o portfólio autofinanciado θ é admissível, pois desde que $V^\theta(t, \omega) \geq 0$ para quase todo ponto em $[0, T] \times \Omega$, ele é limitado inferiormente. Logo, temos que θ é um portfólio admissível satisfazendo:

$$V^\theta(0) = 0, \quad V^\theta(T) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-q.s.}, \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(V^\theta(T) > 0) > 0,$$

ou seja, θ é uma arbitragem no mercado X , o que contradiz a hipótese de ausência de arbitragem. Assim, a suposição de que a equação 4.2.6 não possui solução em um subconjunto de medida positiva de $[0, T] \times \Omega$ leva a uma contradição. Portanto, a equação 4.2.6 admite uma solução $u(t, \omega)$ para $\lambda \otimes \mathbb{P}$ -quase todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, o que conclui a demonstração. $\square$

4.3 Hedging e Completude

Começamos esta seção com a seguinte suposição.

Suposição 4.1. *Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro com $n + 1$ ativos, representado pela tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, \mu, \sigma, r)$. Assuma que existe um processo $u = \{u_t\}_{t \in [0, T]}$ m -dimensional pertencente à classe $\mathcal{V}^m(0, T)$ satisfazendo:*

- 1) $\sigma(t, \omega)u(t, \omega) = \mu(t, \omega) - r(t, \omega)\hat{X}(t, \omega), \quad \lambda \otimes \mathbb{P}\text{-q.s.}$
- 2) $\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|u_t\|^2 dt \right) \right] < +\infty.$

Observação 4.3.1. Se a Suposição 4.1 for válida, a qual coincide exatamente com a hipótese do Teorema 4.2.2, então, conforme demonstrado nesse teorema, o processo $\{Z_t\}_{t \in [0, T]}$, definido por:

$$Z_t := \exp \left(- \int_0^t u_s \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|u_s\|^2 ds \right)$$

é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{P}$, pois o processo $u \in \mathcal{V}^m(0, T)$ satisfaz a Condição de Novikov 2.3. Com base nesse processo, e aplicando o Teorema de Girsanov, obtemos os seguintes elementos:

- Uma medida de probabilidade $\mathbb{Q} : \mathcal{F}_T^W \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}_T^W.$$

- Um processo Wiener m -dimensional $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t\}_{t \in [0, T]}$, sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, definido por:

$$\tilde{W}_t := \int_0^t u_s ds + W_t,$$

o qual pode ser representado, na forma diferencial, como:

$$d\tilde{W}_t = u_t dt + dW_t.$$

Além disso, de acordo com o Corolário 2.2, o processo $\tilde{W}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$.

O lema a seguir, que enunciaremos sem demonstração, constitui uma versão do teorema de representação de martingales no novo espaço de probabilidade, construído a partir do processo de Wiener $\tilde{W}$.

Lema 4.3.1. *Seja válida a Suposição 4.1 (note-se que, para o resultado a seguir, basta que a condição de Novikov seja satisfeita). Então, o processo $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por*

$$\tilde{W}_t := \int_0^t u_s ds + W_t,$$

é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$ (e, portanto, um processo de Wiener sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{Q})$). Além disso, qualquer $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, \mathbb{Q})$ admite a seguinte representação única ($\lambda \otimes \mathbb{Q}$ -quase seguramente)

$$F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F] + \int_0^T \phi_t \cdot d\tilde{W}_t \quad (4.3.1)$$

em que $\phi = \{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ é um processo m -dimensional $\mathbb{F}^W$ -adaptado, mensurável que satisfaz $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \|\phi_t\|^2 dt \right] < \infty$.

Na observação a seguir, reunimos os principais resultados obtidos até o momento, com foco na caracterização do mercado sob a nova medida de probabilidade $\mathbb{Q}$ e o processo de Wiener transformado $\tilde{W}$.

Observação 4.3.2. Considere um mercado financeiro $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ representado pela tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, \mu, \sigma, r)$, e assuma que a Suposição 4.1 seja satisfeita. De acordo com o Teorema 4.2.2 e a notação estabelecida na Observação 4.3.1, temos que a medida $\mathbb{Q}$ é equivalente a $\mathbb{P}$. No espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{Q})$, o **mercado normalizado** $\bar{X} = \left\{ \left(1, \bar{X}_t^{(1)}, \dots, \bar{X}_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$, e sua dinâmica de preços é descrita pelas seguintes equações diferenciais estocásticas:

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t^{(0)} &= 0, & \bar{X}_0^{(0)} &= 1, \\ d\bar{X}_t^{(i)} &= \xi_t \sum_{j=1}^m \sigma_t^{(i)j} d\tilde{W}_t^j = \xi_t \sigma_t^{(i)} \cdot d\tilde{W}_t & \bar{X}_0^{(i)} &= x_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

onde ξ é o fator de normalização e $\sigma_t^{(i)} = \left(\sigma_t^{(i)1}, \dots, \sigma_t^{(i)m} \right)$. Portanto, $\mathbb{Q}$ constitui uma **medida martingale equivalente** para o mercado X .

Além disso, o processo de valor normalizado $\bar{V}^\theta = \left\{ \bar{V}_t^\theta \right\}_{t \in [0, T]}$ de um portfólio admissível $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ para X também é uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$, pois sua dinâmica é dada por:

$$d\bar{V}_t^\theta = \sum_{i=0}^n \theta_t^{(i)} d\bar{X}_t^{(i)} = \sum_{i=1}^n \theta_t^{(i)} \left(\xi_t \sigma_t^{(i)} d\tilde{W}_t \right) = \xi_t \sum_{i=1}^n \theta_t^{(i)} \sigma_t^{(i)} d\tilde{W}_t = \xi_t \hat{\theta}_t \sigma_t d\tilde{W}_t \quad (4.3.2)$$

onde $\hat{\theta}_t = \left(\theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right)$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \xi_t^2 |\hat{\theta}_t \sigma_t|^2 dt \right] < +\infty$, que é a condição de integrabilidade que garante que a integral de Itô em 4.3.2 seja bem definida.

A partir deste ponto, assumiremos que a Suposição 4.1 é válida.

As três definições a seguir foram adaptadas das formulações apresentadas por Øksendal [42] e Jeanblanc, Yor, Chesney [19].

Definição 4.3.1. Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$. Dizemos que uma variável aleatória $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é um **T -contrato contingente europeu** (ou simplesmente um **T -contrato**) sobre X se:

- (i) F é $\mathcal{F}_T^W$ -mensurável;
- (ii) F é limitada inferiormente;
- (iii) Sob a medida martingale equivalente $\mathbb{Q}$ para X , tem-se $F \in L^2(\mathbb{Q})$.

Definição 4.3.2. Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, e seja F um T -contrato sobre X . Dizemos que F é **atingível** se existe um portfólio admissível $\theta = \{\theta_t\}_{t \in [0, T]}$ em X e um número real z tais que

$$F = V_T^{\theta, z} := z + \int_0^T \theta_t \cdot dX_t, \quad \mathbb{P}\text{-quase seguramente,}$$

e tal que o processo $\{\bar{V}_t^{\theta, z}\}_{t \in [0, T]}$, dado por:

$$\bar{V}_t^{\theta, z} := z + \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta_s^{(i)} d\bar{X}_s^{(i)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

seja uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$. Quando tal θ existir, chamamos θ de **portfólio hedging** (ou **portfólio replicante**) para F .

Assim, um T -contrato F é considerado atingível se existir um portfólio admissível θ , com investimento inicial $V_0^{\theta, z} = z$, tal que a riqueza gerada no instante T satisfaça $V_T^{\theta, z} = F$, $\mathbb{P}$ -quase seguramente. Ressaltamos que, se não impusermos a condição de que o processo de valor normalizado seja uma martingale sob alguma medida martingale equivalente $\mathbb{Q}$, o portfólio replicante que satisfaz $F = V_T^{\theta, z}$ pode não ser único.

Definição 4.3.3. Um mercado financeiro $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ é denominado **completo** se todo T -contrato sobre X for atingível.

Determinar quais T -contratos são atingíveis e quando um mercado é completo são questões fundamentais em Finanças Matemáticas, embora, em geral, sejam difíceis de responder. A seguir, apresentamos uma caracterização de completude de mercados baseada no Lema 4.3.1.

Teorema 4.3.1. *Seja $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro com $n + 1$ ativos, representado pela tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, \mu, \sigma, r)$. Esse mercado é completo se, e somente se, a matriz $\sigma(t, \omega)$ admite uma inversa à esquerda para $\lambda \otimes \mathbb{P}$ -quase todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$; ou seja, existe um processo matricial Λ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, com valores em $\mathbb{R}^{m \times n}$, tal que:*

$$\Lambda(t, \omega) \sigma(t, \omega) = I_m(t, \omega), \quad \text{para } \lambda \otimes \mathbb{P} - \text{quase todo } (t, \omega). \quad (4.3.3)$$

Demonstração. Suponha que para quase todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, a equação $\Lambda(t, \omega) \sigma(t, \omega) = I_m$ seja válida. Sejam $\mathbb{Q}$ e $\tilde{W}$ definidos como na Observação 4.3.1, e seja F um T -contrato qualquer sobre o mercado X . Precisamos provar F é atingível, isto é, que existe um portfólio admissível θ em X e um número real z tais que se

$$V_t^{\theta, z} = z + \int_0^t \theta_s \cdot dX_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

então o processo de valor normalizado como valor inicial z , $\{\bar{V}_t^{\theta, z}\}_{t \in [0, T]}$, definido por:

$$\bar{V}_t^{\theta, z} = \xi_t V_t^{\theta, z} := z + \int_0^t \theta_s \cdot d\bar{X}_s,$$

seja uma $\mathbb{F}^W$ -martingale sob $\mathbb{Q}$ e $F = V_T^{\theta, z}$.

Como $\xi_T > 0$, provar $F = V_T^{\theta, z}$ é equivalente a provar que $\xi_T F = \xi_T V_T^{\theta, z}$.

Pelo lema 4.3.1, como $\xi_T F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, \mathbb{Q})$, existe um único processo m -dimensional $\phi \in \mathcal{V}^m(0, T)$ tal que:

$$\xi_T F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F] + \int_0^T \phi_t \cdot d\tilde{W}_t.$$

Por outro lado, por 4.3.2 da Observação 4.3.2 temos:

$$\xi_T V_T^{\theta, z} = \bar{V}_T^{\theta, z} = z + \int_0^T \xi_t \hat{\theta}_t \sigma_t d\tilde{W}_t.$$

Portanto, para que o portfólio θ replique o T -contrato F , precisamos ter:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F] + \int_0^T \phi_t \cdot d\tilde{W}_t = z + \int_0^T \xi_t \hat{\theta}_t \sigma_t d\tilde{W}_t.$$

Para que essa igualdade seja válida, os termos constantes e as integrais de Itô devem coincidir. Assim, defina $z = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F]$ e o processo $\phi = \{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ por $\phi(t, \omega) = \xi(t, \omega) \hat{\theta}(t, \omega) \sigma(t, \omega)$, para todo $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$. Usando que $\Lambda(t, \omega) \sigma(t, \omega) = I_m(t, \omega)$, da anterior equação obtemos que $\hat{\theta}(t, \omega) = \xi(t, \omega)^{-1} \phi(t, \omega) \Lambda(t, \omega)$. Definamos o portfólio $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$

por $\theta_t = \xi_t^{-1} \phi_t \Lambda_t$, onde $\theta^{(0)}$ é construído como no Lema 4.1.2 de modo que θ seja autofinanciado. A Admissibilidade de θ segue do fato de F ser limitado inferiormente e r é limitado, e assim o processo de valor com valor inicial z , $V_t^{\theta,z}$, é limitado inferiormente. Ademais, como

$$\begin{aligned} \bar{V}_t^{\theta,z} &= \xi_t V_t^{\theta,z} = z + \int_0^t \hat{\theta}_s d\bar{X}_s = z + \int_0^t \hat{\theta}_s \xi_s \sigma_s d\tilde{W}_s \\ &= z + \int_0^t \xi_s^{-1} \xi_s \phi_s \Lambda_s \sigma_s d\tilde{W}_s \\ &= z + \int_0^t \phi_s d\tilde{W}_s, \end{aligned}$$

segue que o processo $\{\bar{V}_t^{\theta,z}\}_{t \in [0,T]}$ é uma martingale sob $\mathbb{Q}$, pois é uma integral de Itô em relação a $\tilde{W}$, que é um processo de Wiener sob $\mathbb{Q}$. Portanto, qualquer T -contrato F é replicável por um portfólio admissível autofinanciado, o que demonstra a completude do mercado X .

Por outro lado, suponha que o mercado X seja completo. Como a completude é preservada pela normalização, o mercado normalizado $\bar{X}$ também é completo, e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $r \equiv 0$. Na prova da condição suficiente, vimos que o processo de valor de um portfólio admissível θ , com valor inicial $V_0^{\theta,z} = z$, é dado por:

$$V_t^{\theta,z} = z + \int_0^t \hat{\theta}_s \sigma_s d\tilde{W}_s.$$

Como o mercado é completo, qualquer T -contrato pode ser replicado. Seja, então, γ um processo pertencente à classe $\mathcal{V}^m([0,T];\mathbb{Q})$, ou seja, γ é $\mathbb{F}^W$ -adaptado tal que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \|\gamma_t\|^2 dt \right] < \infty.$$

Defina o T -contrato por $F := \int_0^T \gamma_t d\tilde{W}_t$. Pela completude do mercado, existe um portfólio admissível $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0,T]}$ tal que o processo de valor associado satisfaz $V_T^{\theta,z} = F$, com $V_0^{\theta,z} = 0$, e

$$\bar{V}_t^{\theta,z} = z + \int_0^t \hat{\theta}_s \sigma_s d\tilde{W}_s,$$

é uma martingale sob $\mathbb{Q}$. Pela unicidade na representação martingale, obtemos que:

$$\gamma(t, \omega) = \hat{\theta}(t, \omega) \sigma(t, \omega), \quad \text{para quase todo } (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$

Isso implica que $\gamma(t, \omega)$ pertence ao espaço linear gerado pelas linhas de $\sigma(t, \omega)$. Como $\gamma(t, \omega)$ foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que o espaço linear gerado pelas linhas de $\sigma(t, \omega)$ coincide com $\mathbb{R}^m$, para quase (t, ω) . Assim, $\text{rank}(\sigma(t, \omega)) = m$, quase seguramente. Assim, existe uma matriz $\Lambda(t, \omega) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\Lambda(t, \omega)\sigma(t, \omega) = I_m(t, \omega), \quad \text{para } \lambda \otimes \mathbb{P} - \text{quase todo } (t, \omega).$$

□

Corolário 4.1. 1) Se $n = m$, então o mercado é completo se, e somente se, a matriz $\sigma(t, \omega)$ é invertível $\mathbb{P} \otimes \lambda$ -quase sempre.

2) Se o mercado é completo, então

$$\text{rank } \sigma(t, \omega) = m, \quad \mathbb{P} \otimes \lambda\text{-q.s.}$$

Em particular, $n \geq m$. Além disso, o processo $u = \{u_t\}_{t \in [0, T]}$ satisfazendo 4.2.1 é único.

Observação 4.3.3. Combinando a Suposição 4.1 e o Corolário acima, concluímos que, se o mercado for completo, então a medida de probabilidade $\mathbb{Q}$, estabelecida na Observação 4.3.1, é a única medida martingale equivalente no mercado X .

4.4 Precificação de Opções Europeias

Na seção anterior, definimos um T -contrato sobre um mercado financeiro X como uma variável aleatória F , limitada inferiormente e pertencente ao espaço $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^W, \mathbb{Q})$. Na prática, essa variável aleatória representa o pagamento de um contrato financeiro no instante terminal T . Dois exemplos clássicos de T -contratos são as opções de compra (*call*) e de venda (*put*) europeias, cujas definições apresentamos a seguir.

Definição 4.4.1. Seja $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro definido sobre o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, e seja $K > 0$.

- Uma **opção de compra europeia (Call)** escrita sobre o ativo $X^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, com vencimento T e preço de exercício K , é um T -contrato $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$F = \max(X_T^{(i)} - K, 0).$$

- Uma **opção de venda europeia (Put)** escrita sobre o ativo $X^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, com vencimento T e preço de exercício K , é um T -contrato $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$F = \max(K - X_T^{(i)}, 0).$$

Do ponto de vista financeiro, uma opção de compra europeia sobre o ativo $X^{(i)}$ concede ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de adquirir uma unidade do ativo no instante T ao preço fixado K . Por outro lado, uma opção de venda europeia concede o direito, mas não a obrigação, de vender uma unidade do ativo no instante T ao preço fixado K . O *payoff* associado a esses contratos financeiros é modelado pelas variáveis aleatórias F definidas acima, cujo valor depende do preço do ativo subjacente no instante de vencimento T .

Uma pergunta natural é: qual seria o preço justo a ser pago no instante $t = 0$ por uma opção europeia cujo *payoff* é dado por F no tempo terminal T ? Em geral, a resposta depende da perspectiva do comprador ou do vendedor do contrato. Assumindo que ambas as partes desejam evitar perdas, definimos a seguir os conceitos de preço do comprador e do vendedor.

Definição 4.4.2. Seja F uma T -contrato sobre um mercado financeiro $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, definido sobre um espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$.

- (1) O **preço do vendedor** de F , que denotamos por $p_v(F)$, é definido por:

$$p_v(F) = \inf \left\{ z \in \mathbb{R} : \exists \theta \in \mathcal{A} \text{ tal que } V_T^{\theta, z} := z + \int_0^T \theta_s dX_s \geq F, \quad \mathbb{P} - q.s. \right\}$$

- (2) O **preço do comprador** de F , que denotamos por $p_c(F)$, é definido por:

$$p_c(F) = \sup \left\{ z \in \mathbb{R} : \exists \theta \in \mathcal{A} \text{ tal que } V_T^{\theta, -z} := -z + \int_0^T \theta_s dX_s \geq -F, \quad \mathbb{P} - q.s. \right\}$$

- (3) Se $p_v(F) = p_c(F) := p(F)$, dizemos que $p(F)$ é o **preço justo** do T -contrato F no tempo $t = 0$.

Intuitivamente, o preço do vendedor representa o menor valor que este pode cobrar no instante inicial para garantir que poderá honrar o *payoff* de F no tempo T , em quase todos os cenários. De forma análoga, o preço do comprador representa o maior valor que este está disposto a pagar no instante inicial, assegurando que sua posição resultará em uma perda não superior a F . Quando esses valores coincidem, temos o **preço justo** do contrato.

O resultado a seguir relaciona os conceitos de preço do comprador, do vendedor e o valor esperado do contrato sob a medida martingale equivalente. Ele também fornece uma caracterização do preço justo no caso em que o contrato F é replicável.

Teorema 4.4.1. *Suponha que a Suposição 4.1 seja válida, e seja $\mathbb{Q}$ a medida martingale equivalente para X , construída na Observação 4.3.1. Seja F um T -contrato sobre o mercado X , e defina $\bar{F} = \xi_T F$, onde $\xi = \{\xi_t\}_{t \in [0, T]}$ dado por $\xi_t := e^{-\int_0^t r_s ds}$, $0 \leq t \leq T$, é o fator de normalização do mercado X . Então:*

- 1) $\text{ess inf}(\xi(T, \omega)F(\omega)) \leq p_c(F) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{F}] \leq p_v(F) \leq \infty$.
- 2) Se F é replicável, então $p_c(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\bar{F}] = p_v(F)$.

Demonstração. Ver Øksendal [42]

□

4.5 Hedging de Opções Europeias Atingíveis

Nas seções anteriores, vimos que, ao assumir a validade da Suposição 4.1 para um mercado financeiro X , e utilizando a notação estabelecida na Observação 4.3.1, o processo de valor normalizado $\bar{V}^{\theta, z}$, com valor inicial z , de um portfólio admissível $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$, é dado por

$$\bar{V}_t^{\theta, z} = \xi_t V_t^{\theta, z} = z + \int_0^t \theta_s d\bar{X}_s = z + \int_0^t \xi_s \hat{\theta}_s \sigma_s d\tilde{W}_s.$$

Portanto, o portfólio θ necessário para realizar o *hedging* de um dado T -contrato F , definido sobre o mercado X , deve satisfazer

$$\xi(t, \omega) \hat{\theta}(t, \omega) \sigma(t, \omega) = \phi(t, \omega)$$

onde $\hat{\theta}(t, \omega) = (\theta^{(1)}(t, \omega), \dots, \theta^{(n)}(t, \omega))$ e $\phi = \{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ é como no Lema 4.3.1, isto é,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \|\phi_t\|^2 dt \right] < +\infty \quad \text{e} \quad \xi_T F = z + \int_0^T \phi_t \cdot d\tilde{W}_t.$$

Encontrar explicitamente um processo ϕ satisfazendo as condições acima é, em geral, um problema difícil. A seguir, apresentamos um método que pode ser aplicado quando a dinâmica do mercado é descrita por uma difusão de Itô. O resultado baseia-se no seguinte teorema, adaptado de Øksendal [42], onde também pode ser encontrada sua demonstração.

Teorema 4.5.1. *Seja $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ uma difusão de Itô n -dimensional da forma*

$$dY_t = b(Y_t) dt + \sigma(Y_t) d\tilde{W}_t, \quad Y_0 = y,$$

onde $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções Lipschitz contínuas com crescimento linear. Suponha que $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função dada, tal que

i) Para todo $i = 1, \dots, n$, as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial y_i} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^y [h(Y_{T-t})]$ existem para todo $t \in [0, T]$.

ii) Definindo o processo $\phi = \{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ por

$$\phi_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^y [h(Y_{T-t})] \Big|_{y=Y_t} \sigma^{(i)}(Y_t),$$

$$\text{tem-se } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \|\phi_t\|^2 dt \right] < \infty.$$

Então, a seguinte representação de Itô vale:

$$h(Y_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [h(Y_T)] + \int_0^T \phi_t \cdot d\tilde{W}_t.$$

Como aplicação direta do Teorema anterior, obtemos o seguinte resultado no contexto de um modelo de mercado financeiro.

Observação 4.5.1. Seja $X = \left\{ \left(X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro definido sobre o espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, com dinâmica dada por:

$$\begin{aligned} dX_t^{(0)} &= r_t X_t^{(0)} dt, & X_0^{(0)} &= 1, \\ dX_t^{(i)} &= \mu^{(i)}(X_t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma^{(i)j}(X_t) dW_t^j & X_0^{(1)} &= x_0^{(1)} > 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Suponha que sobre este mercado a Suposição 4.1 seja satisfeita, ou seja, existe um processo $u \in \mathcal{V}^m(0, T)$ satisfazendo 4.2.1 e 4.2.2. Sob a medida de probabilidade equivalente $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$, e com o processo de Wiener $\tilde{W}$ definido em 4.2.3, que em sua forma diferencial é $d\tilde{W}_t = u_t dt + dW_t$, para todo $t \in [0, T]$ e usando a Equação 4.2.1, que neste caso é da forma $\sigma(X_t)u_t = \mu(X_t) - r_t \hat{X}_t$, a dinâmica do mercado X pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} dX_t^{(0)} &= r_t X_t^{(0)} dt, & X_0^{(0)} &= 1, \\ dX_t^{(i)} &= r_t X_t^{(i)} dt + \sum_{j=1}^m \sigma^{(i)j}(X_t) d\tilde{W}_t & X_0^{(1)} &= x_0^{(1)} > 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dessa forma, o mercado X é uma difusão de Itô sob $\mathbb{Q}$.

Suponha que $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada tal que

i) Para todo $i = 1, \dots, n$, as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^x [H(X_{T-t})]$ existem para todo $t \in [0, T]$.

ii) Definindo o processo $\phi = \{\phi_t\}_{t \in [0, T]}$ por

$$\phi_t = \sum_{i=1}^n \xi_T \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^x [H(X_{T-t})] \Big|_{x=X_t} \sigma^i(X_t), \quad (4.5.1)$$

temos que: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \|\phi_t\|^2 dt \right] < \infty$.

Então, a seguinte fórmula de representação de Itô é válida:

$$\xi_T H(X_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\xi_T H(X_T)] + \int_0^T \phi_t \cdot d\tilde{W}_t.$$

Encerramos esta seção com um teorema que consolida os principais resultados obtidos para a precificação e o *hedging* de opções europeias em mercados financeiros.

Teorema 4.5.2. *Seja X um mercado financeiro completo. Suponha que a Suposição 4.1 seja válida, e sejam $\mathbb{Q}$ e $\tilde{W}$ como na Observação 4.3.1. Então, o preço justo de um T -contrato europeu de tempo de maturidade T , com payoff F é dado por*

$$p(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\xi_T F].$$

Além disso, para construir um portfólio hedging $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ para o contrato F , utilizamos a Observação 4.5.1 para determinar um processo ϕ tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T \|\phi_t\|^2 dt \right] < \infty$ e

$$\xi_T H(X_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\xi_T H(X_T)] + \int_0^T \phi_t d\tilde{W}_t.$$

Em seguida, definimos $\hat{\theta}_t = \left(\theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(n)} \right)$ como o vetor que satisfaz $\xi(t) \hat{\theta}_t \sigma_t = \phi_t$ e escolhemos $\theta^{(0)}$ conforme construído no Lema 4.1.2, de forma que o portfólio θ seja autofinanciado.

4.6 O Modelo Generalizado de Black-Scholes

Nesta seção final, aplicamos os resultados desenvolvidos nas seções anteriores em um dos modelos de mercado mais influentes: o modelo de Black-Scholes. Diferentemente da versão clássica (Black & Scholes, 1973 [6] ; Merton, 1973 [26]), consideramos que os coeficientes de retorno esperado e volatilidade podem variar ao longo do tempo, sendo modelados por processos determinísticos. Embora existam extensões ainda mais sofisticadas — por

exemplo, modelos com saltos (Øksendal e Sulem, 2007 [29]), essa generalização já permite uma descrição mais realista do comportamento dos ativos, ampliando consideravelmente o alcance do modelo clássico. Consideramos um mercado financeiro composto por dois ativos: um livre de risco e outro com risco e, sob hipóteses que garantem ausência de arbitragem e completude, obtemos uma expressão fechada para o preço justo de opções europeias, bem como o portfólio replicante associado. Mostramos ainda que, no caso de coeficientes constantes, recuperamos como caso particular o modelo clássico.

Seja $W = \{W_t\}_{t \in [0, T]}$ um processo de Wiener padrão unidimensional definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, junto com sua filtração padrão $\mathbb{F}^W$. Consideramos, sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, um mercado financeiro $X = \{(X_t^{(0)}, X_t^{(1)})\}_{t \in [0, T]}$ com a seguinte dinâmicas:

$$\begin{aligned} dX_t^{(0)} &= r_t X_t^{(0)} dt, & X_0^{(0)} &= 1, \\ dX_t^{(1)} &= \mu_t X_t^{(1)} dt + \sigma_t X_t^{(1)} dW_t, & X_0^{(1)} &= x_0^{(1)} > 0, \end{aligned}$$

onde $r = \{r_t\}_{t \in [0, T]}$, $\mu = \{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$ e $\sigma = \{\sigma_t\}_{t \in [0, T]}$, com $\sigma_t > 0$ $\mathbb{P}$ -quase certamente, são processos determinísticos pertencentes ao espaço $\mathcal{V}(0, T)$.

A equação para o ativo com risco $X^{(1)}$ admite solução explícita, dada por:

$$X_t^{(1)} = x_0^{(1)} \exp \left(\int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) ds \right),$$

obtida por meio da Fórmula de Itô 2.6.2 aplicada ao processo $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ definida por $Y_t := \log(X_t^{(1)})$ (ver o Exemplo 3.1). A equação 4.2.1 assume a forma:

$$\sigma_t X_t^{(1)} u_t = \mu_t X_t^{(1)} - r_t X_t^{(1)},$$

a qual, como $\sigma_t > 0$, tem solução dada por

$$u_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}.$$

Portanto, se a condição 4.2.2, ou seja, se

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \frac{|\mu_t - r_t|^2}{\sigma_t^2} dt \right) \right] < +\infty,$$

também é satisfeita, temos que a Suposição 4.1 é válida. Assim, pelo Teorema 4.2.2, existe uma medida martingale equivalente $\mathbb{Q}$ sob a qual o mercado X é livre de arbitragem, onde $\mathbb{Q}$ é como na Observação 4.3.1 e, mais ainda, pelo Corolário 4.1, ele é completo. Além disso,

pelo Teorema 4.4.1, qualquer T -contrato com *payoff* F pode ser perfeitamente replicado, e seu preço justo no instante inicial é dado por:

$$p(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F],$$

onde $\xi = \{\xi_t\}_{t \in [0, T]}$ dado por $\xi_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$, é o fator de normalização do X .

No restante desta seção, assumiremos a seguinte hipótese:

Suposição 4.2. *Seja $X = \{(X_t^{(0)}, X_t^{(1)})\}_{t \in [0, T]}$ um mercado financeiro representado pela tupla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}, \mu, \sigma, r)$, e seja F um T -contrato sobre X , conforme a Definição 4.3.1. Assumimos que:*

- i) *Os processos r , μ e σ são determinísticos.*
- ii) *O contrato F é da forma $F = f(X_T^{(1)})$, onde $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada inferiormente tal que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left| f(X_T^{(1)}) \right|^2 \right] < +\infty,$$

para alguma medida de martingale equivalente $\mathbb{Q}$ ao mercado X .

Com base nessas premissas, obtemos o seguinte resultado central da seção:

Teorema 4.6.1. (Fórmula generalizada de Black-Scholes) *Considere um mercado financeiro $X = \{(X_t^{(0)}, X_t^{(1)})\}_{t \in [0, T]}$, modelado sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, \mathbb{P})$, cuja dinâmica dos preços é descrita pelas equações diferenciais estocásticas:*

$$\begin{aligned} dX_t^{(0)} &= r_t X_t^{(0)} dt, & X_0^{(0)} &= 1, \\ dX_t^{(1)} &= \mu_t X_t^{(1)} dt + \sigma_t X_t^{(1)} dW_t, & X_0^{(1)} &= x_0^{(1)} > 0. \end{aligned}$$

Assuma que a suposição 4.2 é válida e

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \frac{|\mu_t - r_t|^2}{|\sigma_t|^2} dt \right) \right] < \infty.$$

- 1) *Nessas condições, o mercado é livre de arbitragem e completo. O preço justo no instante $t = 0$ de uma opção europeia com vencimento em T e *payoff* $F = f(X_T^{(1)})$, para função f apropriada, é dado por*

$$p(F) = \frac{\xi_T}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f \left(x_0^{(1)} \exp \left(y + \int_0^T \left(r_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt \right) \right) \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right) dy,$$

onde

$$\xi_T = \exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \quad e \quad \bar{\sigma}^2 = \int_0^T \sigma_t^2 dt.$$

- 2) Além disso, se os coeficientes $r, \mu, \sigma \neq 0$ forem constantes e $f \in C^1(\mathbb{R})$, então existe um portfólio autofinanciado $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$, que replica a opção europeia com payoff $F = f(X_T^{(1)})$, é tal que:

$$\theta_t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} f' \left(X_t^{(1)} e^{\sigma y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \right) \exp \left(\sigma y - \frac{y^2}{2(T-t)} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right) dy,$$

e $\theta_t^{(0)}$ é determinada como no Lema 4.1.2 e $V_0^\theta = p(F)$.

Demonstração. 1) Que o mercado seja livre de arbitragem e completo já foi demonstrado anteriormente, com base na existência de uma medida martingale equivalente $\mathbb{Q}$. Para deduzirmos a fórmula de precificação $p(F)$, reescrevemos inicialmente a dinâmica do preço do ativo de risco sob a medida $\mathbb{Q}$. Pela Observação 4.5.1, dado que

$$dX_t^{(1)} = \mu_t X_t^{(1)} dt + \sigma_t X_t^{(1)} dW_t, \quad X_0^{(1)} = x_0^{(1)} > 0,$$

segue que, sob $\mathbb{Q}$, a dinâmica de $X^{(1)}$ é descrita por

$$dX_t^{(1)} = r_t X_t^{(1)} dt + \sigma_t X_t^{(1)} d\tilde{W}_t, \quad X_0^{(1)} = x_0^{(1)} > 0,$$

onde $\tilde{W}$ é um processo de Wiener sob $\mathbb{Q}$, definido por

$$\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t \frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s} ds.$$

Aplicando a Formula de Itô 2.6.2, obtemos a solução explícita para $X_T^{(1)}$:

$$X_T^{(1)} = x_0^{(1)} \exp \left(\int_0^T \sigma_t d\tilde{W}_t + \int_0^T \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right) dt \right),$$

na qual, pela Proposição 2.1, temos que a variável aleatória

$$Y := \int_0^T \sigma_t d\tilde{W}_t \sim \mathcal{N}(0, \bar{\sigma}^2), \quad \text{com } \bar{\sigma}^2 := \int_0^T \sigma_t^2 dt.$$

Logo, o preço justo da opção é dado por:

$$\begin{aligned}
 p(F) &:= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_T F] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} f(X_T^{(1)}) \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_t dt} f \left(x_0^{(1)} \exp \left(\int_0^T \sigma_t d\tilde{W}_t + \int_0^T \left(r_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt \right) \right) \right] \\
 &= e^{-\int_0^T r_t dt} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[f \left(x_0^{(1)} \exp \left(\int_0^T \sigma_t d\tilde{W}_t + \int_0^T \left(r_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt \right) \right) \right] \\
 &= \frac{\xi_T}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f \left(x_0^{(1)} \exp \left(y + \int_0^T \left(r_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt \right) \right) \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right) dy.
 \end{aligned}$$

- 2) Como o mercado é completo é livre de arbitragem (pelo item 1), o Teorema 4.5.2 garante a existência de um portfólio de *hedge* $\theta = \left\{ \left(\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)} \right) \right\}_{t \in [0, T]}$ que replica a opção europeia com *payoff* $F = f(X_T^{(1)})$. Segundo esse teorema, a componente $\theta^{(1)}$ satisfaz a equação $\xi_t \theta_t^{(1)} \sigma_t X_t^{(1)} = \phi_t$. Isolando $\theta_t^{(1)}$, obtemos:

$$\theta_t^{(1)} = \frac{\phi_t}{\xi_t \sigma X_t^{(1)}} = \frac{\phi_t}{e^{-rt} \sigma X_t^{(1)}} = \frac{e^{rt}}{\sigma X_t^{(1)}} \phi_t$$

Nos resta, portanto, calcular ϕ_t . Pelo Teorema 4.5.2 temos:

$$\phi_t = \xi_T \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^x \left[f \left(X_{T-t}^{(1)} \right) \right] \Big|_{x=X_t^{(1)}} \sigma X_t^{(1)}, \quad (\text{Equação 4.5.1}),$$

em que $X_{T-t}^{(1)}$ denota o valor do ativo em T , condicionado a um valor inicial x no tempo t , isto é,

$$X_{T-t}^{(1)} = x \exp \left(\sigma \tilde{W}_{T-t} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right), \quad \text{onde } \tilde{W}_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, T-t).$$

Aplicando a derivada dentro da esperança (usando a regra de diferenciação sob o sinal de integral), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \theta_t^{(1)} &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^x \left[f \left(X_{T-t}^{(1)} \right) \right] \Big|_{x=X_t^{(1)}} \\
 &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[f \left(x \exp \left(\sigma \tilde{W}_{T-t} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right) \right) \right] \Big|_{x=X_t^{(1)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[f' \left(x \exp \left(\sigma \tilde{W}_{T-t} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left(\sigma \tilde{W}_{T-t} + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right) \right] \Big|_{x=X_t^{(1)}} \\
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} f' \left(X_t^{(1)} \exp \left(\sigma y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right) \right) \\
&\quad \times \exp \left(\sigma y + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right) e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} f' \left(X_t^{(1)} e^{\sigma y + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)} \right) \exp \left(\sigma y - \frac{y^2}{2(T-t)} - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right) dy
\end{aligned}$$

Finalmente, a componente $\theta_t^{(0)}$ é determinada via o Lema $\theta_t^{(1)}$ utilizando o Lema 4.1.2, garantindo que o portfólio seja autofinanciado e satisfaça $V_0^\theta = p(F)$, como requerido. $\square$

Corolário 4.2. (Fórmula clássica de Black-Scholes).

1) Suponha que $X = \left\{ (X_t^{(0)}, X_t^{(1)}) \right\}_{t \in [0, T]}$ seja o mercado clássico de Black-Scholes:

$$\begin{cases} dX_t^{(0)} = rX_t^{(0)} dt, & X_0^{(0)} = 1, \\ dX_t^{(1)} = \mu X_t^{(1)} dt + \sigma X_t^{(1)} dW_t, & X_0^{(1)} = x > 0, \end{cases}$$

onde $r, \mu, \sigma > 0$ são constantes. Então, o preço justo C no instante $t = 0$ da opção de compra europeia com payoff $F = (X_T^{(1)} - K)^+$, onde $K > 0$ é uma constante, é dado por

$$C = x \Phi \left(\eta + \frac{\sigma \sqrt{T}}{2} \right) - K \Phi \left(\eta - \frac{\sigma \sqrt{T}}{2} \right),$$

em que $\eta = \frac{\log \left(\frac{x}{K} \right) + rT}{\sigma \sqrt{T}}$, e Φ é a função de distribuição da normal padrão.

2) O portfólio hedge $\theta = \left\{ (\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}) \right\}_{t \in [0, T]}$ para a opção de compra europeia é dada por

$$\theta_t^{(1)} = \Phi \left(\frac{\log \left(\frac{X_t^{(1)}}{K} \right) + r(T-t) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right),$$

e $\left\{ \theta_t^{(0)} \right\}_{t \in [0, T]}$ é determinado de forma que o portfólio seja autofinanciado e satisfaça $V_0^\theta = C$.

Bibliografia

- [1] Ash, R. B. and Doléans-Dade, C. A. (2000). *Probability and measure theory*. Academic press.
- [2] Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 17, pages 21–86.
- [3] Baldi, P. (2017). *An Introduction Through Theory and Exercises*. Springer.
- [4] Billingsley, P. (2017). *Probability and measure*. John Wiley & Sons.
- [5] Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press.
- [6] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.
- [7] Bogachev, V. I. and Ruas, M. A. S. (2007). *Measure theory*, volume 1. Springer.
- [8] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. (2025). Introduction to functional analysis. (*No Title*).
- [9] Brown, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The philosophical magazine*, 4(21):161–173.
- [10] Chung, K. L. (2000). *A course in probability theory*. Elsevier.
- [11] Cohn, D. L. (2013). *Measure theory*, volume 2. Springer.
- [12] Delbaen, F. (2006). *The mathematics of arbitrage*. Springer.
- [13] Durrett, R. (2019). *Probability: theory and examples*, volume 49. Cambridge university press.
- [14] Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons.
- [15] Ikeda, N. and Watanabe, S. (2014). *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24. Elsevier.
- [16] Itô, K. (1944). Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524.

- [17] Itô, K. (1951). On a formula concerning stochastic differentials. *Nagoya Mathematical Journal*, 3:55–65.
- [18] Ito, K. (1978). On stochastic differential equations. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4:1051.
- [19] Jeanblanc, M., Yor, M., and Chesney, M. (2009). *Mathematical methods for financial markets*. Springer Science & Business Media.
- [20] Kallenberg, O. and Kallenberg, O. (1997). *Foundations of modern probability*, volume 2. Springer.
- [21] Karatzas, I. and Shreve, S. (1991). *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media.
- [22] Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1998). *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer.
- [23] Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons.
- [24] Kuo, H.-H. (2006). *Introduction to Stochastic Integration*. Springer.
- [25] L. C. G. Rogers, D. W. (2000). *Diffusions, Markov Processes, and Martingales: Volume 1, Foundations*. Cambridge University Press.
- [26] Merton, R. C. et al. (1973). Theory of rational option pricing. *Journal of political economy*, 4(1):141–183.
- [27] Merton, R. C. and Samuelson, P. A. (1992). Continuous-time finance.
- [28] Musiela, M. and Rutkowski, M. (2006). *Martingale methods in financial modelling*, volume 36. Springer Science & Business Media.
- [29] Øksendal, B. and Sulem, A. (2007). *Applied stochastic control of jump diffusions*, volume 3. Springer.
- [30] Pascucci, A. (2011). *PDE and martingale methods in option pricing*. Springer Science & Business Media.
- [31] Petters, A. O. and Dong, X. (2016). An introduction to mathematical finance with applications. *New York, NY: Springer. doi, 10:978–1*.
- [32] Protter, P. E. (2004). Stochastic integration and differential equations.
- [33] Revuz, D. and Yor, M. (2013). *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293. Springer Science & Business Media.
- [34] Rosenthal, J. S. (2006). *First look at rigorous probability theory*, A. World Scientific Publishing Company.
- [35] Samuelson, P. A. (1965). Rational theory of warrant pricing. In *Henry P. McKean Jr. Selecta*, pages 195–232. Springer.

- [36] Schilling, R. L. (2017). *Measures, integrals and martingales*. Cambridge University Press.
- [37] Schilling, R. L. and Partzsch, L. (2014). *Brownian motion: an introduction to stochastic processes*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
- [38] Shreve, S. E. et al. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, volume 11. Springer.
- [39] Vershynin, R. (2018). *High-dimensional probability: An introduction with applications in data science*, volume 47. Cambridge university press.
- [40] Wiener, N. (1923). Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1-4):131–174.
- [41] Wiener, N. and Masani, P. (1976). Mathematical philosophy and foundations; potential theory; brownian movement, wiener integrals, ergodic and chaos theories, turbulence and statistical mechanics. (*No Title*).
- [42] Øksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.

