

**ALGORITMO DE MENOR CUSTO COMPUTACIONAL
PARA A BUSCA DO PLANO CRÍTICO USANDO
MÉTODOS DE MÁXIMA VARIÂNCIA**

JÉSSICA NAYARA DIAS

ORIENTADOR: JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA

TESE DE DOUTORADO – DOUTORADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**ALGORITMO DE MENOR CUSTO COMPUTACIONAL PARA A
BUSCA DO PLANO CRÍTICO USANDO MÉTODOS DE MÁXIMA
VARIÂNCIA**

JÉSSICA NAYARA DIAS

APROVADA POR:

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr. (UnB)
(Orientador)

Prof. Fábio Comes de Castro, Dr. (UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Raimundo Carlos Silvério Freire Júnior, Dr. (UFRN)
(Examinador Externo)

Prof. Waldek Wladimir Bose Filho, Ph.D. (USP)
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Raphael Araújo Cardoso (UnB)
(Examinador Interno - Suplente)

BRASÍLIA/DF, 17 DE DEZEMBRO DE 2024.

FICHA CATALOGRÁFICA

Dias, Jéssica Nayara

Algoritmo de menor custo computacional para a busca do plano crítico usando métodos de máxima variância [Distrito Federal] 2024.

160p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutora, Ciências Mecânicas, 2024).

Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Fadiga Multiaxial

2. Método da Máxima Variância

3. Carregamento aleatório

4. Amplitude constante

5. Plano crítico

5. Previsão de vida em fadiga

I. ENM/FT/UnB

II. Algoritmo de menor custo computacional

para a busca do plano crítico usando métodos de máxima variância

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Dias, Jéssica Nayara. (2024). Algoritmo de menor custo computacional para a busca do plano crítico usando métodos de máxima variância. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação YYYYYY/XX, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 160p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Jéssica Nayara Dias.

TÍTULO: Algoritmo de menor custo computacional para a busca do plano crítico usando métodos de máxima variância.

GRAU: Doutor

ANO: 2024

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Jéssica Nayara Dias
75.000-000, Anápolis – GO – Brasil.

Por tudo aquilo que só a gente sabe... Pela nossa caminhada, pelos sacrifícios que fizemos, e ainda fazemos, para nos tornarmos melhores. Que essa seja a primeira de muitas vitórias que ainda conquistaremos lado a lado. Obrigada por ser meu suporte, seu incentivo e amor me trouxeram até aqui.

Te dedico a minha tese hoje, e prometo sonhar e chegar até a sua junto com você.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me permitir chegar até aqui e sei que, senão por Ele, sem sua graça e bondade infinita, nada seria possível. À minha Nossa Senhora, que nunca me desamparou e nunca me deixou órfã da sua proteção e cuidado de mãe.

Ao meu pai Adenilson, que não teve as mesmas oportunidades que batalhou para me proporcionar e que lutou para que, através do seu trabalho, eu pudesse estar onde estou hoje. À minha mãe, que zelou pelo meu filho e esteve, tantas vezes, no meu lugar, quando me fiz ausente para correr atrás dos meus sonhos. Ao meu filho Arthur, por quem procuro melhorar, sempre foi e será por você. A minha irmã Nayanne e minha avó Ivete, pelo incentivo, carinho e amizade e aos meus sobrinhos, Pedro e Manuela. Sem o apoio de vocês, nada seria possível.

Ao meu orientador, professor Jorge Luiz, pela amizade, paciência, confiança, incentivo, por acreditar em mim, desde o mestrado. Nunca me senti sozinha e desamparada em toda essa jornada acadêmica. Agradeço por toda a dedicação como professor e orientador, e por ser inspiração. Pelo suporte que recebi, mesmo nos momentos em que passei por problemas pessoais, sempre recebi apoio para não desistir.

Agradeço à Universidade de Brasília pelo acolhimento e pela excelência no ensino. Expresso minha profunda gratidão a todos que contribuem para essa instituição, incluindo docentes e técnicos, que fazem da UnB um espaço de aprendizado de alta qualidade e, ao mesmo tempo, um ambiente acolhedor, tornando-a um verdadeiro segundo lar para seus estudantes.

Aos meus amigos, minha sincera gratidão por estarem ao meu lado nos momentos em que precisei conversar e me distrair. Saibam que, para mim, vocês são mais que amigos – são família. Obrigada por todo o apoio.

Por fim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma, auxiliaram na elaboração deste trabalho.

RESUMO

Dados os estados complexos de tensões e deformações a quais muitos materiais, sujeitos a carregamentos multiaxiais, ficam expostos, o desenvolvimento de modelos de previsão de vida em fadiga eficientes, tanto em termos de precisão quanto em relação ao seu custo computacional, se torna indispensável. Partindo do exposto, esta tese propõe e valida o Método Rápido de Máxima Variância (FMVM), uma abordagem otimizada para a previsão de vida em fadiga multiaxial em materiais submetidos a carregamentos de amplitude variável e constante. O FMVM, derivado do Método da Máxima Variância, utiliza autovalores e autovetores da matriz de covariância das tensões cisalhantes para identificar planos críticos, buscando uma maior eficiência computacional sem prejuízo à precisão. Neste trabalho, inicialmente o método foi desenvolvido e avaliado em condições de carregamento aleatório de amplitude variável. Em seguida, o FMVM foi adaptado para cenários de amplitude constante. A validação teórico-experimental utilizou dados da literatura, abrangendo diferentes condições de carregamento, como flexão, torção e combinações não proporcionais. O desempenho do FMVM foi comparado a métodos já conhecidos, incluindo o método direto e o método do gradiente, visando uma melhor avaliação do seu desempenho. Além disso, foi analisada a influência da discretização dos ângulos de Euler no tempo de processamento e na precisão das previsões. Os resultados obtidos demonstraram que, em condições de carregamento aleatório de amplitude variável, o FMVM reduziu o tempo de processamento em até 70%, enquanto manteve precisão equivalente ou superior na identificação de planos críticos. Para cenários de amplitude constante, o FMVM destacou-se pela robustez e consistência nas previsões de vida em fadiga, com índices de erro inferiores aos observados em outros modelos. Em relação a influência da discretização dos ângulos de Euler, foi possível observar que o método se mostrou eficiente em otimizar o uso de recursos computacionais e manter a precisão das estimativas obtidas. O método também apresentou menor sensibilidade a variações de parâmetros como fase, tensão média e sincronismo, em comparação com abordagens clássicas. Os resultados obtidos destacam o potencial do FMVM para aplicações industriais que demandam previsões precisas e rápidas em análises de fadiga multiaxial. Dessa forma, foi possível concluir que o FMVM é um método que contribui para o avanço das técnicas de previsão de vida em fadiga, se mostrando como uma ferramenta confiável, com considerável precisão nas previsões de vida obtidas, e de baixo custo computacional. Sua flexibilidade e desempenho destacam seu potencial para integração em sistemas computacionais de projeto estrutural, além de estabelecer uma base sólida para futuros aprimoramentos em cenários de maior complexidade.

Palavras-chave: Fadiga multiaxial, Método da Máxima Variância, Carregamento aleatório, Amplitude constante, Plano crítico, Previsão de vida em fadiga.

ABSTRACT

Given the complex states of stress and strain to which many materials are subjected under multiaxial loading, the development of efficient fatigue life prediction models—both in terms of accuracy and computational cost—becomes indispensable. In this context, this thesis proposes and validates the Fast Maximum Variance Method (FMVM), an optimized approach for multiaxial fatigue life prediction in materials subjected to variable and constant amplitude loadings. The FMVM, derived from the Maximum Variance Method, utilizes eigenvalues and eigenvectors of the shear stress covariance matrix to identify critical planes, aiming to achieve higher computational efficiency without compromising accuracy. Initially, the method was developed and evaluated under variable amplitude random loading conditions. Subsequently, the FMVM was adapted for constant amplitude scenarios. The theoretical-experimental validation employed data from the literature, encompassing different loading conditions, such as bending, torsion, and non-proportional combinations. The performance of the FMVM was compared to established methods, including the direct method and the gradient method, to better evaluate its efficiency. Additionally, the influence of Euler angle discretization on processing time and prediction accuracy was analyzed. The results demonstrated that under variable amplitude random loading, the FMVM reduced processing time by up to 70% while maintaining equivalent or superior accuracy in identifying critical planes. For constant amplitude scenarios, the FMVM stood out for its robustness and consistency in fatigue life predictions, with error rates lower than those observed in other models.

Regarding the influence of Euler angle discretization, the method proved efficient in optimizing computational resources while maintaining prediction accuracy. The FMVM also exhibited reduced sensitivity to parameter variations such as phase, mean stress, and synchronization compared to classical approaches. The obtained results highlight the FMVM's potential for industrial applications that demand precise and rapid predictions in multiaxial fatigue analyses. Thus, it can be concluded that the FMVM contributes to the advancement of fatigue life prediction techniques, proving to be a reliable tool with considerable prediction accuracy and low computational cost. Its flexibility and performance underscore its potential for integration into computational structural design systems, while also providing a solid foundation for future improvements in more complex scenarios.

Keywords: Multiaxial fatigue, Maximum Variance Method, Random loading, Constant amplitude, Critical plane, Fatigue life prediction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Representação esquemática de um corpo sujeito a um sistema externo de forças variáveis no tempo e os respectivos componentes de tensão aplicados no plano Δ (Adaptado de (J. L. A. Ferreira <i>et al.</i> , 2022)).	21
Figura 2.1 – Comparação entre sinais harmônicos (a) e não harmônicos (b).	30
Figura 2.2 – Representação temporal e diagrama de fase para um carregamento proporcional: (a) evolução das tensões $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$; (b) representação da evolução das tensões $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ no espaço de tensões, caracterizando a proporcionalidade entre as componentes.	33
Figura 2.3 – Representação temporal e diagrama de fase para um carregamento não proporcional: (a) evolução das tensões $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ com defasagem e frequências distintas; (b) diagrama de fase ilustrando a relação não linear entre as componentes $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$.	33
Figura 2.4 – Conjunto de registros de histórico temporal que definem um processo aleatório (Bendat e Piersol, 2010).	35
Figura 2.5 – Representação Esquemática do Diagrama de Wöhler.	40
Figura 2.6 – Dados experimentais comparados com algumas expressões que consideram o efeito da tensão média em fadiga uniaxial (Susmel, Tovo, e Lazzarin 2005).	43
Figura 2.7 – Identificação de Picos e Vales em um Histórico de Carregamento.	51
Figura 2.8 – Exemplo do comportamento da curva tensão-deformação para uma dada história de tensões – (a) Evolução da sequência de picos e vales e (b) Representação dos ciclos correspondentes no diagrama tensão-deformação.	52
Figura 2.9 – Representação das reversões de carregamento ($\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k$) e das faixas de tensão esquerda R_l e direita R_r utilizadas no método Rainflow.	53
Figura 3.1 – Representação Esquemática da Orientação do Plano Material Δ em Relação ao Sistema de Coordenadas O_{xyz} , com Vetor Normal \mathbf{n} e Componentes de Tensão Normal e Cisalhantes (Adaptado de Susmel, 2010).	57
Figura 3.2 – Trajetória e Decomposição do Vetor de Tensões de Cisalhamento Resolvido, $\tau(t)$ no Plano Material Δ .	58
Figura 3.3 – Definição da direção \mathbf{q} situada no plano material Δ e das tensões de cisalhamento resolvidas atuando no plano Δ ao longo da direção \mathbf{q} (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	59

Figura 3.4 – Representação Esquemática do Método da Maior Corda (LCM) para Determinação da Amplitude da Tensão Cisalhante (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	66
Figura 3.5 – Representação Esquemática do Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC) para Determinação da Amplitude da Tensão Cisalhante (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	67
Figura 3.6 – Representação comparativa entre o MCC e o MEM na determinação da amplitude de tensões cisalhantes.	69
Figura 3.7 – Representação gráfica do Método da Maior Envoltória Retangular (MRH) (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	71
Figura 3.8 – Representação das Condições de Tensão no Plano Normal, \mathbf{A}_0 , e no Plano Inclinado a 45° , \mathbf{A}_0 , em um Elemento de Tensão na Superfície Livre sob Condições de Flexo-Torção (Adaptado de Socie, 2023).	72
Figura 3.9 – Representação gráfica das trajetórias das tensões cisalhantes τ_{e_a} e τ_{e_b} , indicando as variações máximas e mínimas utilizadas no cálculo da tensão cisalhante resolvida, $\tau_{n,a}$ (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	74
Figura 3.10 – Representação da trajetória de tensões, centroide e momento de inércia no plano material (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	75
Figura 3.11 – Diagrama de Wöhler modificado para definição da curva S-N de referência para um carregamento multiaxial genérico (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	81
Figura 4.1 – Representação: (a) dos autovalores e autovetores e de uma linha de contorno representada pelas distâncias dos autovalores a partir da origem do sistema $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$; (b) Construção do círculo de Mohr para estimar os autovalores e o ângulo que a direção principal forma com o eixo \mathbf{e}_a (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	87
Figura 4.2 – Fluxograma resumindo o algoritmo proposto para a determinação, segundo o Método da Máxima Variância, da orientação do plano crítico (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	89
Figura 4.3 – Forma e dimensões do corpo de prova submetido aos testes de fadiga (Łagoda <i>et al.</i> , 2005).	90
Figura 4.4 – Representação esquemática da reconstrução de sinais a partir da Densidade Espectral de Potência (PSD).	94
Figura 4.5 – Representação esquemática das etapas do processo de reconstrução de sinal	94

Figura 4.6 – Comparação entre a vida estimada por fadiga pelo método proposto e os dados de teste experimental para o aço 18G2A obtidos por (Łagoda <i>et al.</i> , 2003, 2005; Niesłony e Macha, 2007) (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	98
Figura 4.7 – Comparação entre as vidas observadas nos testes de fadiga realizados com aço 18G2A e as estimadas usando os métodos do gradiente (a) e direto (b) (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	99
Figura 4.8 – Comparação entre os coeficientes de variação das estimativas de vida realizadas usando métodos de plano crítico e os observados experimentalmente (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	100
Figura 4.9 – Comparação entre o custo computacional do método proposto, método do gradiente e método direto (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	101
Figura 4.10 – Comportamento da "Máxima Variância" de $\tau_q(t)$ em uma série de planos materiais (θ , ϕ) para testes de fadiga sob (a) flexão pura (N01), (b) torção pura (N02) e (c) flexão não proporcional com torção, com um coeficiente de correlação $r_{\sigma,\tau} \approx 0$ (N03) (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	102
Figura 4.11 – Comparação entre o custo computacional dos algoritmos de busca de plano crítico utilizando o método direto e o método proposto (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	103
Figura 4.12 – Diagrama de dispersão comparando a influência do incremento dos ângulos de Euler no comportamento das previsões de vida considerando o método direto e o método proposto (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2022).	105
Figura 5.1 – Índice de erro nas previsões de falha por fadiga considerando testes realizados sob condições de tensão média nula: (a) Critério de Susmel e Lazzarin e (b) Critério de Findley (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	112
Figura 5.2 – Índice de erro nas previsões de falha por fadiga considerando testes realizados sob condições de tensão média não nula: (a) Critério de Susmel e Lazzarin e (b) Critério de Findley (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	114
Figura 5.3 – Índice de Erro nas Previsões de Falha por Fadiga com Base no Critério de Susmel e Lazzarin sob Condições de Carregamento Não Harmônico e Representação Gráfica dos Caminhos de Tensão de Cisalhamento Resolvida nos Planos Críticos (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	116
Figura 5.4 – Índice de Erro nas Previsões de Falha por Fadiga com Base no Critério de Findley sob Condições de Carregamento Não Harmônico e Representação Gráfica dos	

Caminhos de Tensão de Cisalhamento Resolvida nos Planos Críticos (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).	116
Figura 5.5 – Influência dos Critérios de Falha e da Estratégia de Pesquisa de $\tau_{n,a}$ no Índice de Erro (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).....	118
Figura 5.6 – Influência do Sincronismo, Fase, Tensão Média e Critérios de Falha no Índice de Erro (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).....	120
Figura 5.7 – Análise Comparativa da Influência da Discretização dos Ângulos de Euler na (a) Convergência do Índice de Erro e (b) Tempo de Processamento, considerando cada uma das estratégias de busca de τ_a (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).....	124
Figura 5.8 – Análise Comparativa da Influência da Discretização dos Ângulos de Euler na (a) Convergência do Índice de Erro e (b) Tempo de Processamento, considerando cada uma das estratégias de busca de τ_a (Adaptado de Ferreira <i>et al.</i> , 2024).....	126

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Algumas histórias típicas de carga atuando em componentes estruturais (J. L. de A. Ferreira, Lima, e Cardoso, 2022).....	29
Quadro 5.1 – Materiais investigados com suas respectivas referências bibliográficas	107
Quadro 5.2 – Estratégias de previsão da resistência à fadiga adotadas.	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Constantes que caracterizam as relações empíricas utilizadas para avaliar o efeito da tensão média no comportamento em fadiga.	43
Tabela 4.1 – Relação entre o ângulo β_1 e o ângulo α que representa o ângulo entre e_1 e ea	88
Tabela 4.2 – Composição química do aço 18G2A e equivalentes em outras normas internacionais.....	91
Tabela 4.3 – Composição química do aço 18G2A e equivalentes em outras normas internacionais.....	91
Tabela 4.4 – Propriedades de fadiga do aço 18G2A.	92
Tabela 4.5 – Condições de teste descritas no trabalho de Łagoda <i>et al.</i> , (2005).....	92
Tabela 4.6 – Características dos tipos de testes de fadiga realizados experimentalmente.	92
Tabela 5.1 – Dados experimentais e propriedades de resistência à fadiga para Corpos de Prova Lisos sob Carregamentos Não-Senoidais (Propriedades mecânicas em MPa) ..	107
Tabela 5.2 – Dados Experimentais e Propriedades de Resistência à Fadiga para Corpos de Prova Lisos sob Carregamentos Não-Senoidais, Frequências Variáveis ou Sequências de Tempo Complexas (Propriedades Mecânicas em MPa).....	108
Tabela 5.3 – Resultados da Análise de Variância para Avaliar o Impacto das Variáveis no Índice de Erro.	117
Tabela B.1 – Resultados dos ensaios de fadiga sob a combinação de flexão com torção e vida em fadiga calculada	144
Tabela C.1 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e em fase com média zero.....	149
Tabela C.2 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase com média zero.	150
Tabela C.3 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento assíncrono e em fase com média zero.....	151
Tabela C.4 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e em fase com média diferente de zero.....	151
Tabela C.5 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_{xy} \neq 0$) com média diferente de zero.	153
Tabela C.6 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de	

fase ($\beta_y \neq 0$) com média diferente de zero.....	155
Tabela C.7 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_y \neq 0$) com média diferente de zero.....	156
Tabela C.8 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento assíncrono com média diferente de zero.....	157
Tabela D.1 – Descrição dos Históricos de Carregamento para Ensaios de Fadiga Não Harmônica no Aço 25CrMo4(b)	158
Tabela D.2 – Descrição dos Históricos de Carregamento para Ensaios de Fadiga Não Harmônica no Aço 34Cr4(a)	158
Tabela D.3 – Descrição dos Históricos de Carregamento para Ensaios de Fadiga Não Harmônica Triangular no Aço St35(c)	159
Tabela D.4 – Descrição dos Históricos de Carga para Ensaios de Fadiga Não Harmônica Trapezoidal no Aço St35(c).....	160

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ASTM	American Society for Testing and Materials
DLDR	Regra de Dano Linear Duplo
FMVM	Método Rápido da Máxima Variância
FMVM-P	Método Rápido da Máxima Variância – Projeção
FMVM-S	Método Rápido da Máxima Variância – Simplificado
HCF	Fadiga de alto ciclo
IE	Índice de Erro
LCM	Método da Maior Corda
MCC	Método da Menor Circunferência Circunscrita
MEM	Método da Elipse Mínima
MOI	Método do Momento de Inércia
MRH	Método da Maior Envoltória Retangular
MVM	Método da Máxima Variância
MWCM	Método da Curva de Wöhler modificado
PSD	Densidade Espectral de Potência
S-L	Critério de falha de Susmel e Lazzarin
SOC	Método de Socie
SOCIE-M	Método de Socie Modificado
SWT	Smith-Watson-Topper
VHCF	Fadiga de altíssimo ciclo

LISTA DE SÍMBOLOS

A_ρ, b_ρ	Parâmetros de resistência do material em fadiga que caracterizam a curva interpolada para o MWCM
A_σ, b_σ	Parâmetros de resistência do material em fadiga sob carregamento axial completamente reverso
A_τ, b_τ	Parâmetros de resistência do material em fadiga sob torção alternada
α	Ângulo entre os vetores unitários e_a e e_b
B	Taxa de amostragem
β_{ij}	Ângulo de fase entre as componentes de tensão
γ	Propriedade material crítica no modelo de Walker
D	Dano acumulado estimado usando o método rainflow
D_c	Dano crítico
\mathbf{d}_*	Vetor que depende da direção dos cossenos
Δ	Plano material
Δf	Intervalo de frequência
δ	Incremento de ângulo
$E[\cdot]$	Valor esperado
e_a	Vetor unitário que define a orientação do eixo a
e_b	Vetor unitário definindo a orientação do eixo b
$e_{a'}$	Direção principal da elipse em relação ao eixo a para o MEM
$e_{b'}$	Direção principal da elipse em relação ao eixo b para o MEM
f_{-1}	Resistência à fadiga uniaxial reversa
\mathbf{G}	Matriz de transformação ortogonal
κ, λ	Parâmetros materiais
\mathbf{L}	Matriz diagonal de autovalores
λ_*	Autovalores de $\boldsymbol{\mu}_\Delta$
λ_{ij}	Frequência do carregamento
\mathbf{m}	Vetor contendo estimativas dos componentes de tensão
$\boldsymbol{\mu}$	Matriz de covariância
$\boldsymbol{\mu}_\Delta$	Matriz de covariância da tensão de cisalhamento resolvida representada nas direções a e b
$\boldsymbol{\mu}_{\tau_q}$	Varição da tensão de cisalhamento resolvida
μ_X	Média

N_{block}	Número total de ciclos aplicados
N_f	Número de ciclos até a falha
N_k	Número de ciclos necessários para a falha em um nível de tensão específico
N_{∞}	Vida infinita em fadiga
\hat{n}	Vetor normal unitário
n	Vetor unitário normal ao plano Δ
n_k	Número de ciclos aplicados em um nível de tensão específico
P	Ponto material
P_{swt}	Parâmetro de Smith-Watson-Topper
P_w	Parâmetro de Walker
q	Vetor unitário definindo a orientação da direção q
R	Razão de fadiga
R	Raio da circunferência mínima circunscrita
$R_{a'}$	Semieixo maior da Menor Elipse Circunscrita
$R_{b'}$	Semieixo menor da Menor Elipse Circunscrita
RMS	Raiz quadrada média do histórico de tensão (*)
$R_X(\tau)$	Função de autocorrelação considerando um intervalo τ
$r_{\sigma,\tau}$	Coefficiente de correlação
ρ	Razão de tensão em relação ao plano crítico
S	Matriz de dados
s	Vetor que representa os componentes do tensor σ
$s(t_i)$	Sinal no tempo
S_e	Limite de resistência à fadiga
S_u	Resistência à tração
S_y	Limite de escoamento
σ	Tensor das tensões
σ_{-1}	Limite de fadiga em flexão (ou tração-compressão) alternada
$\sigma - \epsilon$	Tensão-deformação
σ_a	Amplitude de tensão alternante
σ'_f	Coefficiente de resistência a fadiga
$\tilde{\sigma}_{fB}$	Tensão verdadeira na fratura
$\sigma_{ij}(t)$	Componente de tensão

$\hat{\sigma}_{ij}$	Componente de tensão média
$\sigma_{ij,a}$	Amplitude da tensão alternada
σ_m	Tensão Média
σ_{max}	Tensão Máxima
$\sigma_n(t)$	Valor instantâneo do vetor de tensão normal ao plano material
$\sigma_{n,max}$	Valor máximo da tensão normal relativa ao plano Δ
T	Período de amostragem
T_{samp}	Tempo de amostragem
t	Tempo
t_{-1}	Resistência à fadiga torsional reversa
$\mathbf{t}(t)$	Valor instantâneo do vetor de tensão relativo ao plano Δ
τ^*	Centro da circunferência mínima circunscrita
τ_{-1}	Limite de fadiga em torção alternada
$\boldsymbol{\tau}(t)$	Valor instantâneo da tensão de cisalhamento resolvida
τ_A	Tensão de cisalhamento no plano no SOC
τ_a	Amplitude da tensão cisalhante relativa ao plano Δ
$\tau_{a,max}$	Amplitude máxima da tensão de cisalhamento
τ_B	Tensão de cisalhamento fora do plano no SOC
$\tau_{e_a}(t)$	Tensão cisalhante ao longo da direção e_a
$\tau_{e_b}(t)$	Tensão cisalhante ao longo da direção e_b
$\boldsymbol{\tau}_m$	Vetor médio que aponta do centro da circunferência mínima circunscrita até o ponto de origem
$\tau_{n,a}$	Amplitude da tensão de cisalhamento resolvida
$\boldsymbol{\tau}_q$	Valor instantâneo da tensão de cisalhamento resolvida ao longo da direção de variância máxima
ϕ, θ	Ângulo de Euler
Ψ	Trajectoria de tensões no plano material
ω_{ij}	Frequência angular do carregamento

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	20
1.1 Contextualização e Relevância do Problema	20
1.2 Objetivos e Contribuições da Tese	25
1.2.1 <i>Objetivo Geral</i>	25
1.2.2 <i>Objetivos Específicos</i>	25
1.2.3 <i>Contribuições da Tese</i>	25
1.3 Estruturação da Tese	26
1.4 Publicações realizadas a partir da Tese	27
CAPÍTULO 2 – FADIGA UNIAXIAL	28
2.1 Classificação das Histórias de Carregamento	28
2.1.1 <i>Carregamentos de Amplitude Constante</i>	29
2.1.1.1 Carregamentos Harmônicos e Não Harmônicos	29
2.1.1.2 Carregamentos Síncronos e Assíncronos	31
2.1.1.3 Carregamentos em Fase e Fora de Fase	31
2.1.1.4 Carregamentos Proporcionais e Não Proporcionais	32
2.1.2 <i>Carregamentos Aleatórios</i>	34
2.1.2.1 Estacionariedade	35
2.1.2.2 Ergodicidade	37
2.1.2.3 Processos Não Estacionários	38
2.2 Fundamentos da Fadiga: Abordagem Tensão-Vida, Dano Acumulado e Contagem de Ciclos	39
2.2.1 <i>Abordagem Tensão-Vida</i>	39
2.2.1.1 Efeito da tensão média	41
2.2.2 <i>Formas de Projeto na Abordagem Tensão-Vida</i>	45
2.2.3 <i>Dano Acumulado</i>	47
2.2.4 <i>Identificação e Contagem de Ciclos de Carregamento</i>	50
CAPÍTULO 3 – FUNDAMENTOS DA FADIGA SOB CONDIÇÕES MULTIAXIAIS	56
3.1 Análise de Tensões	56
3.2 O Método da Máxima Variância – Abordagem Clássica	60
3.2.1 Estimativa da Máxima Variância do Histórico das Tensões Cisalhantes Resolvidas na Direção q	62

3.3 Análise de Fadiga sob Condições Multiaxiais	64
<i>3.3.1 Medidas de Amplitude da Tensão Cisalhante</i>	<i>64</i>
3.3.1.1 Método da Maior Corda (LCM)	65
3.3.1.2 Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC)	66
3.3.1.3 Método da Elipse Mínima (MEM)	68
3.3.1.4 Método da Maior Envoltória Retangular (MRH)	70
3.3.1.5 Método de Socie (SOC).....	72
3.3.1.6 Método do Momento de Inércia (MOI).....	74
3.4 Acúmulo de Dano em Condições Multiaxiais	75
3.5 Identificação e contagem de ciclos em condições multiaxiais	77
3.6 Critérios de falha multiaxial baseados no conceito de plano crítico.....	78
<i>3.6.1 Critério de Findley</i>	<i>79</i>
<i>3.6.2 Método de Susmel e Lazzarin</i>	<i>79</i>
CAPÍTULO 4 – DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DO MÉTODO RÁPIDO DE MÁXIMA VARIÂNCIA	84
4.1 Desenvolvimento do Método Rápido de Máxima Variância (FMVM).....	84
<i>4.1.1 Implementação Computacional do FMVM</i>	<i>89</i>
4.2 Validação com Dados da Literatura e Comparação com Modelos Existentes .	90
<i>4.2.1 Comparação com Dados Experimentais</i>	<i>90</i>
<i>4.2.2 Parâmetro de Dano por Fadiga – Método da Curva de Wöhler Modificada.....</i>	<i>95</i>
<i>4.2.3 Análise Computacional e Eficiência</i>	<i>96</i>
<i>4.2.4 Análise dos Resultados Experimentais</i>	<i>97</i>
<i>4.2.5 Comparação com Outras Abordagens</i>	<i>98</i>
<i>4.2.6 Custo Computacional.....</i>	<i>100</i>
<i>4.2.7 Influência da discretização dos ângulos de Euler no tempo de processamento e precisão das Estimativas de Vida.....</i>	<i>103</i>
CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DO MÉTODO RÁPIDO DE MÁXIMA VARIÂNCIA EM CONDIÇÕES DE AMPLITUDE CONSTANTE	106
5.1 Análise Comparativa.....	106
<i>5.1.1 Análise considerando Carregamentos Harmônicos.....</i>	<i>108</i>
<i>5.1.2 Análise considerando Carregamentos Não Harmônicos</i>	<i>109</i>
<i>5.1.3 Análise Quantitativa dos Fatores que Influenciam o Comportamento do IE</i>	<i>109</i>
<i>5.1.4 Análise da Influência dos Fatores no IE: Abordagem de Comparação Múltipla</i>	<i>110</i>

5.1.5	<i>Custo Computacional</i>	111
5.2	Resultados para Carregamento de Amplitude Constante	111
5.2.1	<i>Para Análise considerando Carregamentos Harmônicos</i>	111
5.2.2	<i>Para Análise considerando Carregamentos Não Harmônicos</i>	115
5.2.3	<i>Comportamento do Índice de Erro</i>	117
5.2.4	<i>Avaliação Comparativa do Impacto dos Critérios de Falha e da Estratégia de Pesquisa de $\tau n, \alpha$ no Índice de Erro</i>	118
5.2.5	<i>Avaliação Comparativa do Impacto do Sincronismo, Fase, Tensão Média e Critérios de Falha no Índice de Erro</i>	119
5.2.5.1	Impacto do Sincronismo	120
5.2.5.2	Impacto da Presença de Tensão Média	121
5.2.5.3	Impacto da Presença de Fase	121
5.2.5.4	Impacto dos Critérios de Falha	122
5.2.6	<i>Fatores Críticos que Influenciam as Previsões de Fadiga</i>	122
5.2.7	<i>Custo Computacional</i>	123
5.2.7.1	Influência da Discretização do Histórico de Carregamento na Convergência dos Resultados e no Tempo de Processamento	123
5.2.7.2	Influência da Discretização dos Ângulos de Euler na Convergência dos Resultados e no Tempo de Processamento	124
	CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	128
6.1	Conclusões Gerais	128
6.2	Recomendações para Trabalhos Futuros	129
	REFERÊNCIAS	131
	APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DA TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO DE TAYLOR	142
	APÊNDICE B – RESULTADOS OBTIDOS EM TESTES EXPERIMENTAIS (TABELA 6.2 DE NIESŁONY & MACHA (2007))	144
	APÊNDICE C – DADOS COLETADOS, CONDIÇÕES DE TESTE	149
	APÊNDICE D – IDENTIFICAÇÃO DOS ENSAIOS REALIZADOS SOB CONDIÇÕES NÃO HARMÔNICAS	158

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização e Relevância do Problema

A previsão de vida em fadiga é uma necessidade crítica na engenharia estrutural, dado que muitos componentes são submetidos a carregamentos complexos ao longo de sua vida útil. Em condições operacionais reais, esses carregamentos geralmente apresentam características aleatórias, influenciadas por fatores ambientais como vento e ondas, além de vibrações mecânicas. Esses fatores podem gerar carregamentos multiaxiais que induzem estados complexos de tensões e deformações nos materiais. Nessas condições, modelos e dados oriundos da análise de fadiga uniaxial são insuficientes para lidar com a natureza dos problemas de fadiga multiaxial (Fatemi e Socie, 1988; Smith, Watson, e Topper, 1970; Susmel e Lazzarin, 2002).

Desde os estudos iniciais de Gough (Reddy e Fatemi, 1992; Socie e Marquis, 1999), várias estratégias foram investigadas, resultando em técnicas de estimativa de vida em fadiga baseadas em diferentes hipóteses iniciais. Em geral, os modelos de fadiga podem ser categorizados da seguinte forma (Glinka, Wang, e Plumtree, 1995): i) modelos baseados em deformação, ii) modelos baseados em tensão, e iii) modelos baseados em energia de deformação. Considerando que a maioria das análises de fadiga sob condições de carregamento multiaxial foca na estimativa de resistência à fadiga ou na previsão de vida em processos controlados por tensão (regimes de médio e alto ciclos), modelos baseados em tensão continuam amplamente utilizados e são adequados para uma vasta classe de componentes estruturais.

Os modelos baseados em tensão podem ser subdivididos em quatro grupos (Glinka *et al.*, 1995; Lemaitre e Chaboche, 1994): a) tensões equivalentes empíricas, b) invariantes de tensão, c) tensões médias, e d) planos críticos. Abordagens baseadas no plano crítico fornecem uma interpretação física do processo de iniciação do dano (Stephens *et al.*, 2000). Segundo diversos autores (Castro *et al.*, 2009; Grubisic e Simbürger, 1976; Li, Santos, e De Freitas, 2000; Mamiya, Araújo, e Castro, 2009; Mamiya, Castro, e Araújo, 2014; Papadopoulos, 1998), a hipótese fundamental dos modelos de plano crítico é que a orientação da microtrinca pode ser identificada encontrando o plano material mais danificado. A quantificação do dano por fadiga em um dado plano é expressa como uma função de um parâmetro de dano, tipicamente representado por uma combinação dos componentes de tensão normal e cisalhante

atuantes nesse plano (Mamiya *et al.*, 2014; Meggiolaro e De Castro, 2012, 2014; Nobuo Mamiya e Alexander Araujo, 2002).

Conceitualmente, a aplicação de abordagens de plano crítico requer a avaliação dos parâmetros de dano em planos distintos de corte (θ, ϕ) em cada ponto material (ver Figura 1.1 (a)) para garantir resultados confiáveis. Há consenso de que o número de planos analisados não deve ser muito baixo, comprometendo a qualidade do resultado, nem muito alto, aumentando os custos computacionais. Além do processo de projeção do tensor de tensões nos planos (θ, ϕ) (ilustrado na Figura 1.1 (c)), são necessários algoritmos para estimar o parâmetro de dano com precisão. Vários modelos assumem que planos críticos são definidos como um ou mais planos em um material onde o valor máximo de um critério de dano é atingido. Esses critérios de dano, por sua vez, são funções dependentes das tensões, das deformações ou de uma combinação de ambas que atuam sobre o plano (Figura 1.1 (d)). Exemplos incluem parâmetros de dano associados aos modelos de Susmel e Lazzarin (Nobuo Mamiya e Alexander Araujo, 2002), Fatemi e Socie (Fatemi e Socie, 1988; Mamiya *et al.*, 2014; Stephens *et al.*, 2000), Glinka *et al.* (Glinka *et al.*, 1995), entre outros.

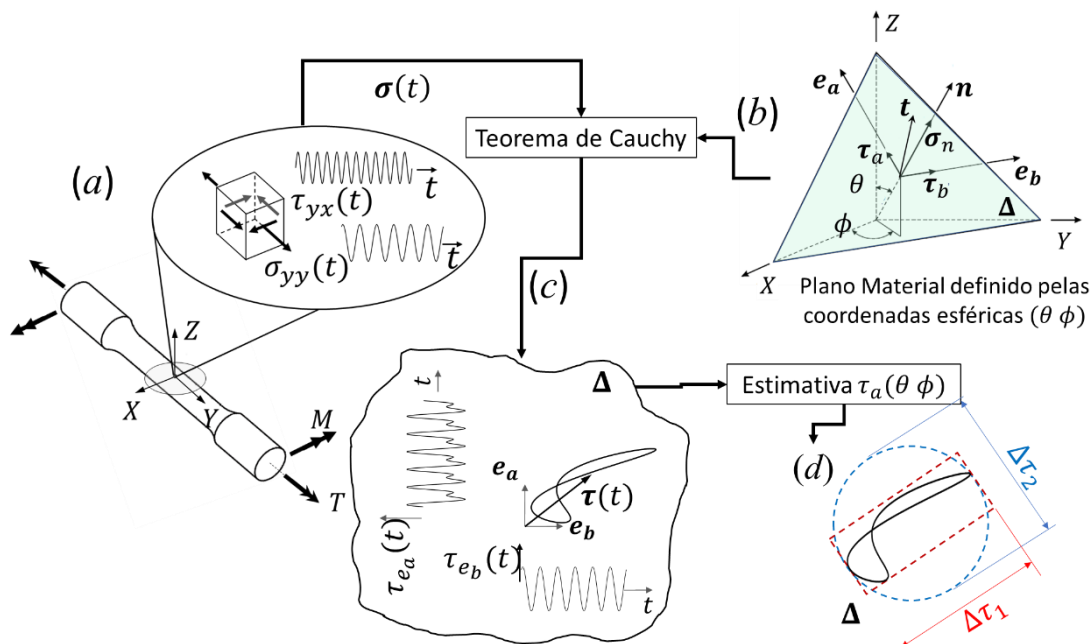


Figura 1.1 – Representação esquemática de um corpo sujeito a um sistema externo de forças variáveis no tempo e os respectivos componentes de tensão aplicados no plano Δ (Adaptado de (J. L. A. Ferreira *et al.*, 2022)).

Para extrair informações relevantes do parâmetro de dano a partir da história de tensões no plano de corte, foram desenvolvidos métodos ao longo do tempo para estimar,

por exemplo, a amplitude máxima da tensão de cisalhamento, $\tau_{a_{max}}$, e a máxima tensão normal e/ou a amplitude máxima da tensão normal, $\sigma_{n,max}$. Como observado na Figura 1.1 (c), a tensão de cisalhamento descreve uma curva bidimensional no plano de corte, tornando a determinação da amplitude máxima de tensão de cisalhamento uma tarefa complexa, que frequentemente requer um custo computacional relativamente alto.

Com o desenvolvimento de critérios precisos para a previsão de falhas sob condições multiaxiais, torna-se imprescindível elaborar estratégias que identifiquem as interações entre as histórias de tensão nos planos materiais e avaliem os impactos das variações dos trajetos de tensão no comportamento de fadiga. Essas estratégias devem contemplar a determinação da amplitude de tensão de cisalhamento, a tensão normal máxima e a quantificação da não-proporcionalidade dos caminhos de tensão atuantes nos planos analisados, elementos essenciais para o sucesso das análises de fadiga. Além de aprimorar a precisão dos critérios de falha por fadiga, observa-se um crescente interesse em aumentar a eficiência computacional das estratégias de busca por planos críticos. Esse interesse é impulsionado tanto pela ampla adoção de análises de fadiga baseadas em elementos finitos quanto pela demanda industrial por esquemas computacionais que otimizem o projeto de componentes para resistirem a condições de fadiga. As estratégias de busca de planos críticos na análise de fadiga podem ser classificadas em três categorias principais:

a) Métodos de Busca Exaustiva: Esses métodos exploram o espaço de soluções de forma abrangente para identificar os planos críticos, aplicando critérios de falha diretamente em uma ampla gama de orientações angulares. Nesta categoria, incluem-se as seguintes técnicas para determinar a amplitude da tensão de cisalhamento resolvida, $\tau_{n,a}$: Método da Maior Corda (Lemaitre e Chaboche, 1994; Stephens *et al.*, 2000), Método da Máxima Projeção (Grubisic e Simbürger, 1976), Método da Menor Circunferência Circunscrita (Bernasconi e Papadopoulos 2005; Li, Reis, e de Freitas 2009), Método da Elipse Mínima (Li *et al.*, 2009, 2000), Método da Maior Envoltória Retangular (Machado *et al.*, 2020; Mamiya *et al.*, 2009, 2014), Método de Socie (Socie, 2023), Método do Momento de Inércia (Bishop, 2003; Chu, Conle, e Hübner, 1996; Meggiolaro e Castro, 2015; Meggiolaro e De Castro, 2012), e Método da Máxima Variância (Luo, Yao, e Susmel, 2020; Macha, 1989b, 1991; Susmel, 2010).

b) Métodos de Otimização: Esses métodos iniciam com uma abordagem exaustiva para estabelecer um conjunto inicial de posições angulares e, em seguida, empregam

técnicas de otimização para refinar a busca e identificar os planos críticos de forma mais eficiente, equilibrando a abrangência da análise com a eficiência computacional. Referências relevantes incluem (Erickson *et al.*, 2008; Sartorti *et al.*, 2023; Scalet 2018; Susmel, 2010).

c) Métodos Baseados em Aprendizado de Máquina: Considerando a abordagem de planos críticos, esses métodos utilizam técnicas avançadas de aprendizado de máquina a partir de um conjunto de dados de entrada. Essa categoria aproveita algoritmos capazes de extrair padrões complexos e fazer inferências sobre as condições de fadiga, representando uma fronteira de inovação nas estratégias de busca de planos críticos. As técnicas utilizadas incluem Redes Neurais Artificiais (ANN) (Brito Oliveira *et al.*, 2022; He, Zhao, e Yan, 2023; Oliveira *et al.*, 2024; Tang, Zhou, e Tan, 2023), Stacking (Tang *et al.*, 2023), Lógica Fuzzy (Gao *et al.*, 2024).

Cada uma dessas abordagens apresenta vantagens e desvantagens distintas. Os Métodos de Busca Exaustiva oferecem uma análise abrangente ao avaliar uma ampla gama de orientações angulares, assegurando alta precisão na identificação de planos críticos. No entanto, a principal desvantagem desses métodos é a demanda computacional significativa, impulsionada pelos cálculos detalhados da história de tensões nos planos analisados, além das ineficiências computacionais na determinação da amplitude de tensão de cisalhamento, o que pode limitar sua aplicação em projetos de menor escala. Os Métodos de Otimização buscam um equilíbrio entre precisão e eficiência computacional. Esses métodos iniciam com uma busca exaustiva para estabelecer uma base de soluções potenciais e, em seguida, aplicam técnicas de otimização para identificar planos críticos de forma eficiente. Embora geralmente mais rápidos que os métodos exaustivos, esses métodos podem não explorar completamente o espaço de soluções, correndo o risco de negligenciar orientações sutis, porém críticas.

Os Métodos Baseados em Aprendizado de Máquina representam o avanço da inovação, prevendo planos críticos através de algoritmos orientados por dados. Esses métodos fornecem uma identificação rápida e precisa dos planos críticos, com potencial para melhorias contínuas à medida que mais dados se acumulam. No entanto, sua eficácia depende da qualidade e representatividade dos dados de treinamento, e a interpretação dos resultados exige conhecimentos avançados em aprendizado de máquina.

Apesar da variedade de métodos disponíveis para a análise de fadiga multiaxial, a busca por estratégias que combinem precisão analítica com eficiência computacional

permanece um desafio significativo. Os Métodos de Busca Exaustiva, embora precisos e extremamente flexíveis, enfrentam severas limitações devido à alta demanda computacional. Por exemplo, ao se analisar o comportamento de fadiga multiaxial de componentes estruturais submetidos a carregamentos variáveis ou aleatórios com características estacionárias, dois fatores adicionais impactam significativamente o custo computacional dos critérios de plano crítico: o período de amostragem T , que pode ser relativamente alto, e a taxa de amostragem B das histórias de carregamento. Com base no teorema de Nyquist (Bendat e Piersol, 2010), o número mínimo de pontos necessários para representar a história de um único componente de tensão é dado por $2BT$, onde B é a frequência máxima no sinal que representa a história de carregamento. Para a avaliação do comportamento de fadiga através da análise no domínio do tempo, o número de pontos necessários para representar a história de tensões deve estar em torno de 10 a 20 BT . Assim, os arquivos podem conter dezenas de milhares de pontos, tornando os algoritmos de plano crítico altamente ineficientes.

Para superar esses problemas, Będkowski e colaboradores (Bedkowski *et al.*, 1999; Będkowski e Macha, 1985; Bedkowski e Macha, 1987) propuseram um método para determinar a posição esperada do plano de fratura por fadiga sob fadiga multiaxial aleatória. Nesse método, assume-se que os planos para os quais a variância da tensão/deformação equivalente atinge o valor máximo, de acordo com o critério de falha de fadiga multiaxial selecionado, são críticos para o material, e um deles pode iniciar a falha por fadiga. Por essa razão, essa metodologia ficou conhecida como Método da Máxima Variância (Maximum Variance Method – MVM). Desde a proposição básica apresentada em (Bedkowski, Lachowicz, e Macha, 1988; Będkowski e Macha, 1985; Bedkowski e Macha, 1987), o modelo foi aprimorado várias vezes (Bel Knani *et al.*, 2007; ŁAgoda e Macha, 1994; Macha, 1989a, 1991; Susmel, 2010, 2010b; Susmel, Tovo, e Benasciutti, 2009; Tovo, Benasciutti, e Cristofori, 2005); contudo, a filosofia e a estrutura básica dos algoritmos de busca do plano crítico mantêm, em grande parte, a mesma abordagem.

Uma vantagem intrínseca do Método da Máxima Variância está relacionada à estratégia de busca do plano crítico, que utiliza relações funcionais entre a tensão de cisalhamento resolvida e a matriz de covariância dos componentes de tensão, aumentando significativamente a velocidade de determinação do plano crítico. Contudo, o preço pago do ponto de vista computacional é a necessidade de definir, além dos ângulos de Euler

(θ, ϕ) , o ângulo α , que representa a direção de variância máxima no plano em análise, denominado Δ . Assim, o processo de busca do plano precisa varrer os três ângulos (θ, ϕ, α) no intervalo $[0, 180^\circ)$, tornando o processo de busca do plano de máxima variância muito ineficiente.

1.2 Objetivos e Contribuições da Tese

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver um método eficiente e preciso para a previsão da vida em fadiga multiaxial, adequado para diferentes tipos de carregamento, incluindo tanto condições de amplitude variável quanto constante.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver um Método Rápido de Máxima Variância (FMVM): O primeiro objetivo específico é formular e implementar o FMVM, um método otimizado para análise de fadiga multiaxial sob condições de carregamento aleatório e de amplitude variável. O FMVM busca reduzir a demanda computacional dos métodos convencionais de busca de planos críticos, especialmente em cenários de carregamento aleatório. Essa inovação visa fornecer uma alternativa robusta que combine precisão na análise e eficiência computacional, tornando o método viável para aplicações industriais que requerem previsões rápidas e precisas;
- Aplicar o FMVM em condições de carregamento de amplitude constante: O segundo objetivo específico é avaliar a eficácia do FMVM em cenários de amplitude constante, comuns em ambientes industriais. Ao aplicar o FMVM em condições de carregamento constante, espera-se verificar sua adaptabilidade e precisão em problemas de fadiga com menor variabilidade, mas que ainda demandam previsões confiáveis. Isso permitirá validar a aplicabilidade do método em uma gama diversificada de problemas estruturais e industriais.

1.2.3 Contribuições da Tese

Esta pesquisa proporciona duas principais contribuições para o campo da análise de fadiga multiaxial:

- Desenvolvimento do FMVM para Carregamentos de Amplitude Variável: Como resultado direto do primeiro objetivo específico, esta tese apresenta o FMVM, um método inovador que permite análises eficientes e precisas em cenários de carregamento multiaxial aleatório. Este método oferece uma solução prática para a demanda computacional de métodos convencionais, permitindo análises eficazes em condições de carregamento complexas e aleatórias;
- Aplicação e Validação do FMVM em Cenários de Amplitude Constante: Em decorrência do segundo objetivo específico, a pesquisa também explora a eficácia do FMVM sob condições de carregamento de amplitude constante. Essa contribuição torna válida a adaptabilidade do FMVM, ampliando seu uso para diferentes cenários de carregamento e destacando seu valor para aplicações industriais onde previsões precisas e consistentes são essenciais.

1.3 Estruturação da Tese

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. No capítulo 1, é apresentada a introdução, abordando o panorama geral sobre o problema da fadiga multiaxial, destacando sua relevância para a engenharia estrutural, os desafios na previsão de vida em fadiga e os objetivos gerais e específicos da pesquisa, além das principais contribuições do trabalho. No capítulo 2, são discutidos os conceitos fundamentais da fadiga uniaxial, incluindo classificações de carregamento, métodos de contagem de ciclos, modelos de dano acumulado e a abordagem tensão-vida, que fornecem uma base teórica necessária para análises mais complexas. No capítulo 3, são apresentados os fundamentos da fadiga em condições multiaxiais, incluindo as bases matemáticas e mecânicas para a análise de tensões, os conceitos de dano, os métodos de contagem de ciclos, os critérios de falha baseados no plano crítico e as abordagens de projeto considerando vida e resistência. Esses fundamentos teóricos e computacionais são essenciais para o desenvolvimento do Método Rápido de Máxima Variância (FMVM).

No capítulo 4, é detalhado o desenvolvimento do FMVM, com foco na eficiência computacional e sua validação em condições de carregamento aleatório de amplitude variável. O método é comparado com abordagens tradicionais utilizando dados experimentais da literatura, destacando sua precisão e desempenho. No capítulo 5, é avaliada a aplicação do FMVM em condições de amplitude constante, típicas de cenários industriais. São discutidos os resultados obtidos, as vantagens e as limitações do método,

reforçando sua adaptabilidade a diferentes situações. Por fim, o capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho, sintetizando as principais contribuições científicas, as implicações práticas do FMVM, suas limitações e perspectivas para futuras investigações, com foco na aplicação do método em cenários mais desafiadores.

1.4 Publicações realizadas a partir da Tese

Ferreira, J.L.A.; Dias, J.N.; Cardoso, E. U.; Araújo, J.A.; Silva, C.R.M. da. A contribution to the identification of the critical plane using the maximum variance method. **International Journal of Fatigue**, Brasília, v. 165, p. 107228, dez. 2022.

Ferreira, J.L.A.; Dias, J.N.; Lima, F.M.; Araújo, J.A.; Silva, C.R.M. da. Evaluation of the accuracy and efficiency of the modified maximum variance method for multiaxial fatigue analysis under constant amplitude loading. **International Journal of Fatigue**, Brasília, v. 188, p. 108537, nov. 2024.

CAPÍTULO 2 – FADIGA UNIAXIAL

Este capítulo apresenta os conceitos fundamentais da fadiga uniaxial, que formam a base para o entendimento de análises mais complexas em condições multiaxiais. São discutidos os tipos de carregamentos, os fundamentos da abordagem tensão-vida, os métodos de contagem de ciclos e os modelos de dano acumulado. Essa revisão estabelece o contexto necessário para compreender os desafios associados à previsão da vida em fadiga e justifica a busca por métodos mais eficientes e aplicáveis em cenários práticos.

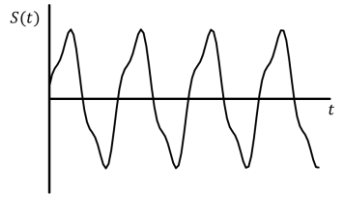
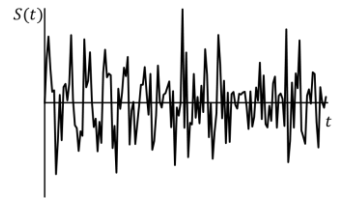
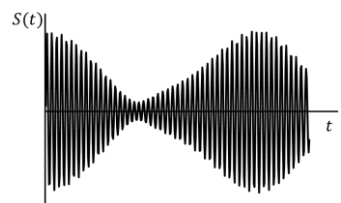
2.1 Classificação das Histórias de Carregamento

A compreensão das histórias de carregamento é um aspecto fundamental para a análise de fadiga multiaxial. Elas definem a maneira como as tensões variam ao longo do tempo e são a base para a aplicação de modelos e métodos preditivos. Antes de discutir os métodos de análise de tensões, como o cálculo de tensões normais e cisalhantes, ou a aplicação de métodos avançados como o da Máxima Variância, é essencial categorizar e entender os tipos de carregamento que um material ou componente pode experimentar.

De forma geral, os carregamentos estruturais podem ser classificados com base em suas características temporais e na interação entre suas componentes. A característica temporal, por exemplo, determina se o carregamento possui uma amplitude constante ou aleatória. Carregamentos de amplitude constante são típicos de ciclos regulares, enquanto carregamentos de amplitude aleatória surgem em situações imprevisíveis, como em condições ambientais. Já a interação entre as componentes de carga abrange fatores como proporcionalidade, fase e sincronismo, que influenciam diretamente a resposta do material e orientam a escolha de abordagens para a análise de fadiga.

No Quadro 2.1, são apresentados exemplos de histórias de carregamento, categorizados conforme sua forma de aplicação e os tipos de estruturas que enfrentam esses carregamentos. Essas categorias incluem os carregamentos de amplitude constante e os carregamentos aleatórios, amplamente observados em situações práticas. Cada uma dessas formas possui características específicas que influenciam diretamente o comportamento estrutural e exigem métodos distintos de análise de fadiga. A seguir, são detalhadas essas duas classes de carregamento, com ênfase em suas características e implicações práticas.

Quadro 2.1 – Algumas histórias típicas de carga atuando em componentes estruturais (J. L. de A. Ferreira, Lima, e Cardoso, 2022).

Forma do Carregamento		Tipos de Estruturas
(a)		<ul style="list-style-type: none"> • Mecanismos Simples; • Elementos de Transmissão em Máquinas; • Pontes Suspensas.
(b)		<ul style="list-style-type: none"> • Estruturas Marítimas; • Alguns componentes aeronáuticos durante voo.
(c)		<ul style="list-style-type: none"> • Cabos de Pontes Suspensas, Aéreos, Estais; • Edifícios Altos (Arranha-Céus); • Torres de Transmissão de Energia.

2.1.1 Carregamentos de Amplitude Constante

Os carregamentos de amplitude constante, ilustrados na linha (a) do Quadro 2.1, são caracterizados por uma variação regular e previsível de tensões ao longo do tempo. Esse tipo de carregamento ocorre frequentemente em mecanismos simples, como engrenagens e eixos rotativos, que operam de forma cíclica e estável. Elementos de transmissão em máquinas também exemplificam essa categoria, devido ao movimento repetitivo e constante das peças rotativas.

Dentro desse contexto, a análise do comportamento dos carregamentos de amplitude constante pode ser refinada ao considerarmos suas diferentes classificações, como harmônicos e não harmônicos, em fase e fora de fase, e síncronos e assíncronos. A seguir, cada uma dessas classificações é apresentada e discutida em detalhes.

2.1.1.1 Carregamentos Harmônicos e Não Harmônicos

Os carregamentos harmônicos são caracterizados por uma variação senoidal perfeita e regular ao longo do tempo, com amplitude e frequência constantes, conforme se observa na Fig. 2.1 (a). Esse tipo de comportamento cíclico e determinístico facilita a previsão da resposta estrutural, sendo comum em sistemas mecânicos como eixos

rotativos e mecanismos de transmissão. Para descrever matematicamente a evolução das tensões em um carregamento de amplitude constante, podemos utilizar a forma geral, como apresentada na Eq. (2.1):

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

em que cada componente de tensão, representada como $\sigma_{ij}(t)$ pode ser descrita como:

$$\sigma_{ij}(t) = \hat{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij,a} \cdot g(\omega_{ij}t + \beta_{ij}) \quad (2.2)$$

onde: $\hat{\sigma}_{ij}$ representa a tensão média; $\sigma_{ij,a}$ é a amplitude da tensão alternada; ω_{ij} é a frequência angular do carregamento; β_{ij} é o ângulo de fase entre as componentes.

No sentido estrito, $g(\cdot)$ deve ser definida como uma senoide ou cossenoide pura, com um único ω_{ij} , garantindo periodicidade uniforme e simplicidade no domínio da frequência. Contudo, a definição de harmônico pode ser ampliada para incluir funções periódicas mais complexas. Nesse contexto, $g(\cdot)$ pode ser uma soma de senoídes ou cossenoídes de frequências diferentes (fenômenos multi-harmônicos) ou mesmo uma função periódica aproximável por uma série de Fourier.

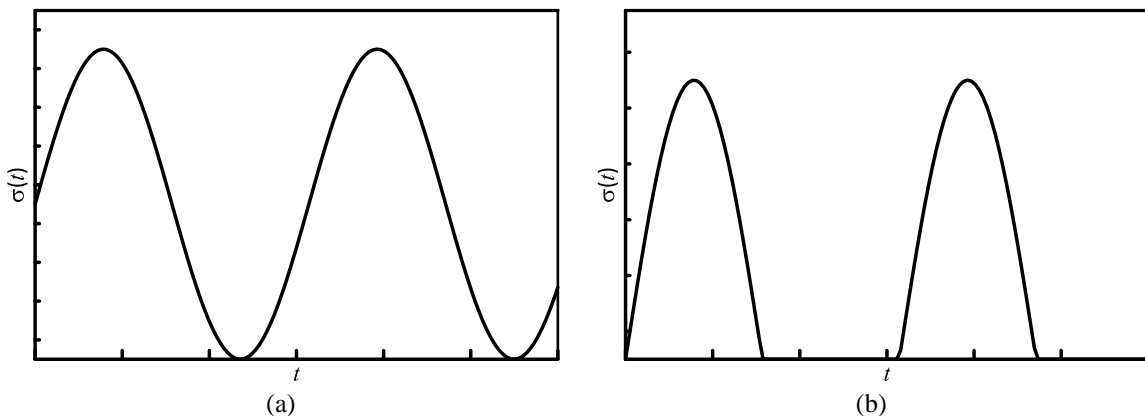


Figura 2.1 – Comparação entre sinais harmônicos (a) e não harmônicos (b).

Carregamentos não harmônicos, por sua vez, possuem formas de onda mais complexas e, frequentemente, não periódicas, o que inviabiliza sua descrição direta pela Eq. (2.2). Esses carregamentos costumam surgir em sistemas submetidos a condições dinâmicas irregulares, como vibrações multifrequenciais ou impactos transitórios. Para analisá-los, recorre-se a representações baseadas em séries temporais discretas ou transformadas matemáticas, como a análise de Fourier ou Wavelets, que permitem decompor o sinal em componentes representativas da variação de amplitude e frequência

ao longo do tempo. Essas diferenças entre carregamentos harmônicos e não harmônicos podem ser ilustradas na Fig. 2.1, onde (a) representa um carregamento harmônico com forma senoidal pura, enquanto (b) exemplifica um carregamento não harmônico, evidenciando a irregularidade na forma de onda.

2.1.1.2 Carregamentos Síncronos e Assíncronos

A sincronia e a assincronia referem-se à relação entre as frequências das componentes de carregamento, ampliando os conceitos de fase. Em um carregamento síncrono, todas as componentes oscilam com a mesma frequência angular ω_{ij} , garantindo que os ciclos de cada componente sejam alinhados temporalmente.

Em contraste, os carregamentos assíncronos apresentam frequências distintas entre as componentes, o que resulta em ciclos de carregamento desalinhados no tempo. A diferença de frequência ($\lambda_{ij} \neq 1$) pode gerar padrões de carregamento mais complexos, especialmente quando combinada com diferenças de fase. Por exemplo, em um eixo submetido a tração e torção, onde a tração completa dois ciclos enquanto a torção completa apenas um, o comportamento assíncrono cria trajetórias irregulares no diagrama de fase, dificultando a previsão do comportamento estrutural.

2.1.1.3 Carregamentos em Fase e Fora de Fase

A distinção entre carregamentos em fase e fora de fase está diretamente relacionada ao alinhamento temporal das componentes de carregamento, como tensões normais e cisalhantes. Em um carregamento em fase, essas componentes atingem seus valores máximos e mínimos simultaneamente, criando um comportamento sincronizado e alinhado ao longo do tempo. Essa característica favorece a análise estrutural, pois as tensões variam de forma previsível e muitas vezes proporcional. O diagrama de fase de um carregamento em fase geralmente exibe uma trajetória linear, refletindo a constância na relação entre as tensões.

Por outro lado, em um carregamento fora de fase, as componentes de carregamento apresentam uma defasagem angular β_{ij} de forma que os picos das tensões ocorrem em momentos distintos. Essa defasagem introduz uma complexidade adicional, resultando frequentemente em trajetórias elípticas ou mais complexas no diagrama de fase. Um exemplo típico é o comportamento de tração e torção em um eixo, onde, estando fora de fase, a tração atinge seu valor máximo enquanto a torção está no mínimo, gerando

uma relação variável ao longo do tempo. Esse comportamento fora de fase muitas vezes está associado à não proporcionalidade, pois as tensões principais podem variar de direção continuamente.

2.1.1.4 Carregamentos Proporcionais e Não Proporcionais

Um carregamento é considerado proporcional quando as relações entre suas componentes permanecem constantes ao longo do tempo, tanto em magnitude quanto em direção. Matematicamente, essa condição pode ser descrita conforme a Eq. (2.3).

$$\sigma_{ij}(t) = K\sigma'_{ij}(t) \quad (2.3)$$

onde K representa o coeficiente de proporcionalidade.

Em contraste, carregamentos não proporcionais ocorrem quando essas relações entre as componentes do carregamento mudam ao longo do tempo. Isso pode ser causado por diferenças de fase ($\beta_{ij} \neq 0$), frequências distintas ($\lambda_{ij} \neq 1$), resultando em trajetórias mais complexas nos diagramas de fase, como elipses no caso de variações regulares, ou formas ainda mais irregulares em sistemas dinâmicos com comportamento não periódico.

Essas diferenças entre carregamentos proporcionais e não proporcionais podem ser visualizadas nas Figuras 2.2 e 2.3, que apresentam as relações no espaço de tensões entre as componentes normais e cisalhantes. Na Figura 2.2, a trajetória linear observada no diagrama de fase reflete a constância das proporções e direções em carregamentos proporcionais, enquanto a trajetória curva ou irregular nos carregamentos não proporcionais indica uma variação contínua dessas relações ao longo do tempo.

Na Figura 2.2(a), as tensões $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ evoluem de forma síncrona e proporcional, mantendo uma relação constante ao longo do tempo. Esse comportamento é evidenciado pela trajetória linear no diagrama de fase (Fig. 2.2(b)), que reflete a constância tanto nas magnitudes quanto nas direções relativas das componentes de tensão. Em contraste, na Figura 2.3(a), observa-se uma defasagem e uma diferença de frequências entre $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$, características de carregamentos não proporcionais. Isso resulta em uma trajetória não linear no espaço de tensões (Figura 2.3(b)), refletindo a variação contínua das magnitudes e direções das tensões, característica de comportamentos mais complexos e não proporcionais.

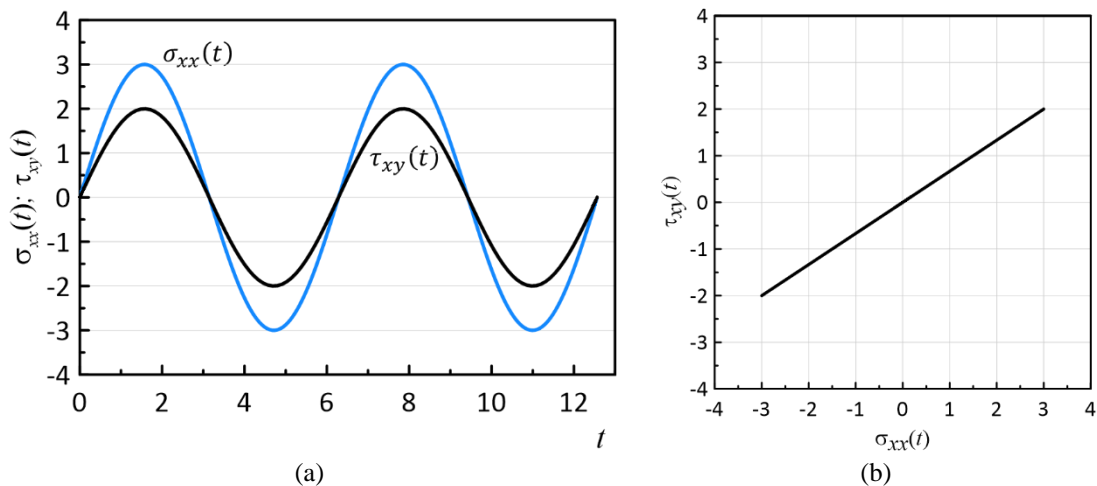


Figura 2.2 – Representação temporal e diagrama de fase para um carregamento proporcional: (a) evolução das tensões $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$; (b) representação da evolução das tensões $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ no espaço de tensões, caracterizando a proporcionalidade entre as componentes.

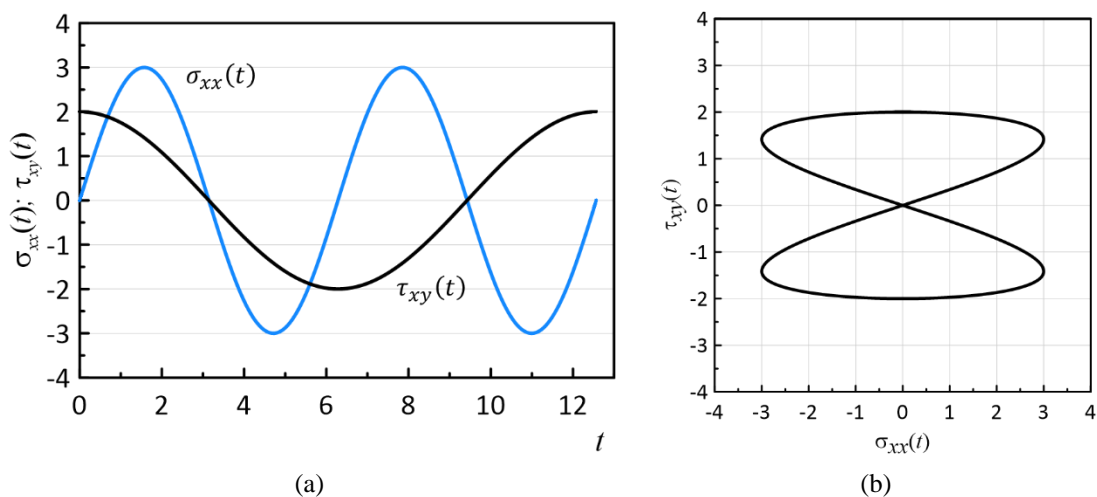


Figura 2.3 – Representação temporal e diagrama de fase para um carregamento não proporcional: (a) evolução das tensões $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ com defasagem e frequências distintas; (b) diagrama de fase ilustrando a relação não linear entre as componentes $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$.

Deve-se então considerar que a interação entre fases, sincronias e proporcionalidade desempenha um papel central na definição das histórias de tensões em pontos específicos de uma estrutura. Carregamentos proporcionais, com suas relações constantes entre as componentes, resultam em trajetórias lineares no espaço de tensões, simplificando a análise e a previsão do comportamento estrutural. Em contraste, carregamentos não proporcionais, caracterizados por variações temporais e direcionais, produzem trajetórias não lineares que refletem maior complexidade e exigem abordagens analíticas mais detalhadas.

2.1.2 Carregamentos Aleatórios

Carregamentos aleatórios, tais como os apresentados nas linhas (b) e (c) do Quadro 2.1, são caracterizados pela ausência de padrões fixos de amplitude e frequência ao longo do tempo, resultando em históricos de tensões imprevisíveis e, frequentemente, não periódicos. Esse comportamento estocástico é comum em estruturas expostas a condições ambientais dinâmicas, como plataformas marítimas sujeitas a ondas e correntes, ou componentes aeronáuticos enfrentando turbulências durante o voo. A análise de tais carregamentos requer uma compreensão detalhada de suas características estocásticas, que podem ser modeladas matematicamente usando a teoria de processos aleatórios, que fornece a base para descrever o comportamento de sistemas submetidos a condições imprevisíveis, como os carregamentos variáveis observados em fenômenos reais.

Assim, um processo aleatório é definido como uma coleção de variáveis aleatórias que evoluem no tempo ou no espaço, onde cada realização específica do processo corresponde a uma função amostral. A função amostral pode ser interpretada como uma trajetória particular do fenômeno, representando um histórico de tensões, deslocamentos ou outro parâmetro observado em um experimento ou condição específica. Cada função amostral reflete uma possível manifestação do processo aleatório em condições particulares, oferecendo uma visão individual do comportamento do sistema. Esse conceito é ilustrado na Fig. 2.4, que ilustra diferentes exemplos de possíveis realizações de um processo aleatório ao longo do tempo. Cada trajetória, identificada como $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, representa um registro de um sinal (função amostral) distinto, ou seja, uma manifestação particular do sistema em estudo, definida ao longo do tempo (t).

O conjunto completo de todas as funções amostrais define o processo aleatório, encapsulando a variabilidade inerente ao fenômeno e permitindo uma descrição estatística abrangente. Esse conjunto é modelado por um espaço probabilístico, no qual as funções amostrais estão associadas a distribuições de probabilidade que determinam suas características estatísticas, como média, variância e correlação. Para uma análise mais aprofundada dos processos aleatórios, é fundamental introduzir conceitos que ajudam a caracterizar seu comportamento ao longo do tempo. Entre eles, destacam-se a estacionariedade e a ergodicidade, que serão explorados em detalhes nos subtópicos a seguir.

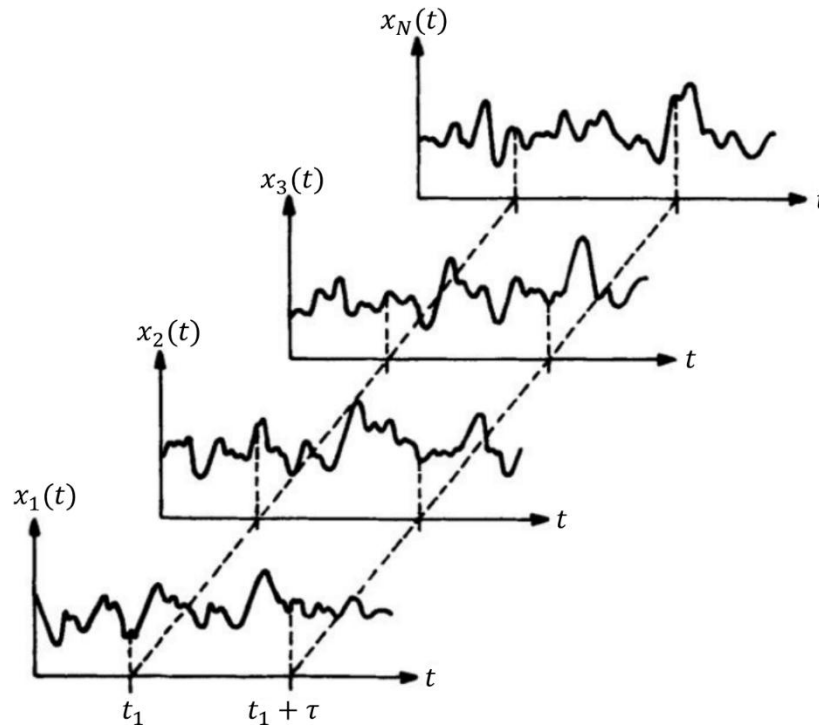


Figura 2.4 – Conjunto de registros de histórico temporal que definem um processo aleatório (Bendat e Piersol, 2010).

2.1.2.1 Estacionariedade

A estacionariedade é uma propriedade de processos aleatórios que descreve a invariância de suas características estatísticas ao longo do tempo. Em termos gerais, um processo é considerado estacionário se suas propriedades estatísticas, como média e a função de autocorrelação, não mudam quando o processo é deslocado no tempo. Essa invariância torna o processo mais previsível e simplifica sua análise matemática. Formalmente, um processo estacionário apresenta as seguintes características:

a) Média, μ_X : A média, definida pela Eq. (2.4), é constante ao longo do tempo. Nesse contexto, a média é calculada em um instante fixo t , considerando o valor esperado sobre todas as realizações $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$.

$$\mu_X = E[X(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t) \right) \quad (2.4)$$

onde $E[\cdot]$ denota o valor esperado. Para um processo estacionário, essa média é independente do tempo t , ou seja, $\mu_X(t) = \mu_X$ permanece constante.

b) Função de autocorrelação, $R_X(\tau)$: A função de autocorrelação, descrita pela Eq. (2.5), mede a relação entre os valores do processo em dois instantes de tempo separados por um intervalo τ . Ela é calculada considerando o valor esperado do produto dos valores

do processo em t_1 e $t_1 + \tau$ para todas as realizações $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$.

$$R_X = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n(t) x_n(t + \tau) \right) \quad (2.5)$$

Para um processo estacionário, a função de autocorrelação depende apenas do intervalo de tempo τ e não dos instantes absolutos t_1 e $t_1 + \tau$. Assim, a função é escrita como $R_X(\tau)$. Além das características fundamentais descritas anteriormente, os processos estacionários podem ser classificados em diferentes níveis de estacionariedade, dependendo das propriedades estatísticas que se mantêm invariantes ao longo do tempo. Essa classificação ajuda a distinguir processos que atendem apenas a condições básicas de estacionariedade daqueles que possuem invariâncias mais rigorosas.

Estacionariedade na Forma Fraca (Weak Stationarity)

Um processo aleatório é considerado estacionário na forma fraca se: a) A média do processo for constante ao longo do tempo ($\mu_X(t) = \mu_X$, conforme Eq. (2.4)), e b) A função de autocorrelação depender apenas do intervalo de tempo τ entre dois instantes ($R_X(t_1, t_1 + \tau) = R_X(\tau)$, conforme Eq. (2.5)).

Essas condições garantem que as propriedades estatísticas de primeira ordem (média) e segunda ordem (autocorrelação) não variam com o tempo, mas não exigem que outras estatísticas, como momentos de ordem superior ou distribuições conjuntas, sejam invariantes. Por isso, a forma fraca é amplamente utilizada em análises práticas, já que a maioria dos métodos de modelagem e análise de sinais se baseia nessas duas propriedades.

Estacionariedade na Forma Forte (Strong Stationarity)

A estacionariedade na forma forte (ou no sentido estrito) é uma definição mais rigorosa que exige que todas as propriedades estatísticas do processo sejam invariantes ao longo do tempo. Isso inclui:

- A invariância das distribuições de probabilidade associadas ao processo, ou seja, para quaisquer t_1, t_2, \dots, t_n e intervalo de tempo τ , expressa através da Eq. (2.6).

$$P(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) = P(X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)) \quad (2.6)$$

- A constância de todos os momentos estatísticos (média, variância, momentos de ordem superior etc.) ao longo do tempo.

Essa definição implica que as distribuições conjuntas dos valores do processo em diferentes instantes dependem apenas dos deslocamentos temporais entre os instantes, e

não de seus valores absolutos. Embora seja uma condição mais abrangente, a forte estacionariedade é raramente verificada em aplicações práticas devido à dificuldade de análise.

2.1.2.2 Ergodicidade

Após estabelecer as diferentes formas de estacionariedade, surge o conceito de ergodicidade, que descreve a equivalência entre as estatísticas de ensemble (calculadas sobre várias realizações em um instante fixo) e as estatísticas temporais (calculadas ao longo do tempo em uma única realização). Essa propriedade é fundamental para a análise prática de processos aleatórios, pois, em muitas situações, apenas uma realização do processo está disponível para análise.

Na Fig. 2.4, cada trajetória $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ representa uma realização do processo aleatório em estudo. A média de ensemble, por exemplo, pode ser obtida tomando o valor médio de todas as realizações no mesmo instante de tempo t_1 . No entanto, para um processo ergódico, seria possível calcular essa mesma média temporalmente em uma única realização, integrando ao longo do tempo t . Isso implica que, mesmo com o acesso a apenas uma trajetória $(x_1(t))$, é possível inferir as estatísticas globais do processo, desde que a trajetória seja suficientemente longa.

De forma análoga, a função de autocorrelação pode ser calculada tanto considerando o produto das amostras de todas as realizações em dois instantes fixos (t_1 e $t_1 + \tau$) quanto ao longo do tempo em uma única realização, avaliando o produto em diferentes intervalos t e $t + \tau$. A Fig. 2.4 ilustra esse conceito ao mostrar as várias realizações disponíveis $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, permitindo visualizar os cálculos de estatísticas de ensemble e temporais. Portanto, para processos ergódicos, a equivalência entre as estatísticas temporais e de ensemble simplifica significativamente a análise, já que uma única realização pode ser utilizada para estimar as propriedades globais do processo.

Assim como a estacionariedade, a ergodicidade pode ser classificada em diferentes níveis, dependendo das propriedades estatísticas que se mostram equivalentes entre as médias de ensemble e temporais:

Ergodicidade Fraca:

Um processo é considerado ergódico na forma fraca se as estatísticas de primeira ordem (média) e de segunda ordem (autocorrelação) obtidas a partir de uma única realização forem equivalentes às estatísticas de ensemble. Em termos práticos:

- A média temporal, calculada ao longo de uma realização única, deve ser igual à média de ensemble, conforme apresenta a Eq. (2.7).

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \mu_X \quad (2.7)$$

- A função de autocorrelação temporal, calculada ao longo de uma realização única, deve ser igual à função de autocorrelação de ensemble:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t + \tau) dt = R_X(\tau) \quad (2.8)$$

Esses critérios são frequentemente suficientes para aplicações práticas, como na análise de sinais estacionários em engenharia.

Ergodicidade Forte:

A ergodicidade na forma forte é uma definição mais abrangente que exige que todas as propriedades estatísticas do processo, incluindo distribuições conjuntas e momentos de ordem superior, sejam equivalentes entre o ensemble e o tempo. Para um processo ergódico na forma forte, todas as características estatísticas podem ser inferidas de uma única realização, o que raramente é necessário ou verificável em aplicações práticas devido à complexidade envolvida.

2.1.2.3 Processos Não Estacionários

Quando as condições de estacionariedade não são atendidas, o processo é classificado como não estacionário.

Na Fig. 2.4, um exemplo de um processo não estacionário seria aquele no qual as médias das realizações $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ variam significativamente ao longo do tempo, ou onde a relação entre os valores em diferentes instantes depende dos tempos absolutos ($t_1, t_1 + \tau$). Fenômenos reais frequentemente apresentam características de não estacionariedade, como sinais transitórios, vibrações induzidas por choques e condições ambientais que mudam dinamicamente.

2.2 Fundamentos da Fadiga: Abordagem Tensão-Vida, Dano Acumulado e Contagem de Ciclos

2.2.1 Abordagem Tensão-Vida

Segundo diversos autores (Dowling, 2013; Julie A. Bannantine, James L. Handrock, e Jess J. Comer, 1990; Lee *et al.*, 2005), a abordagem Tensão-Vida (ou método baseado em tensão) é amplamente utilizada para análises de fadiga, sendo especialmente relevante para estruturas que operam predominantemente no regime elástico. Fundamentada na relação entre a amplitude da tensão atuante nos pontos críticos de um componente e o número de ciclos até a falha, essa metodologia é tradicionalmente representada pela curva $S - N$ (ou curva de Wöhler). Esse diagrama, originado dos estudos pioneiros de August Wöhler em 1858, foi desenvolvido em sua forma essencial em 1955 e é construído experimentalmente a partir de ensaios com corpos de prova padronizados submetidos a esforços cíclicos.

O método baseado em tensão assume que o comportamento à fadiga de um material pode ser descrito em termos de tensões nominais aplicadas nos pontos críticos de um componente. Essas tensões são ajustadas para considerar os efeitos de tensões médias e concentrações locais, originadas de entalhes ou outros concentradores de tensão. Adicionalmente, a simplicidade de implementação e a adequação para componentes que apresentam longas vidas em serviço, com baixos níveis de deformação plástica, tornam este método a escolha mais tradicional para aplicações industriais e acadêmicas.

A curva $S - N$, é obtida experimentalmente por meio da aplicação de esforços cíclicos de amplitude prescrita em corpos de prova. Esses esforços, geralmente com valor médio nulo, permitem correlacionar a amplitude de tensão alternante, σ_a , ao número de ciclos até a falha N_f . Conforme ilustrado na Fig. 2.5, o diagrama cobre uma ampla faixa de vida útil, desde poucas dezenas de ciclos até número de ciclos extremamente elevados, e é comumente dividido em três regiões (Bandara *et al.*, 2015; Correia *et al.*, 2017; J. Kohout e Vechet, 2001): Esses regimes são tradicionalmente divididos em três regiões principais, que são definidas por características distintas de tensão, número de ciclos e mecanismos físicos associados.

Na região de fadiga de baixo ciclo (Low Cycle Fatigue, LCF), localizada no início da curva, predominam deformações plásticas significativas, devido às tensões elevadas que geralmente excedem o limite elástico do material. Essa região, representada na Fig.

2.5, abrange vidas inferiores a 10^3 ciclos e é observada em condições extremas de carregamento, onde a falha ocorre após poucos ciclos. Conforme o número de ciclos aumenta e as tensões diminuem, a curva entra no regime de fadiga de alto ciclo (High Cycle Fatigue, HCF), que compreende vidas entre 10^3 e 10^7 ciclos. Nesse regime, o material é submetido a deformações predominantemente elásticas, sendo uma faixa amplamente utilizada em projetos industriais que demandam componentes confiáveis sob carregamentos repetitivos.

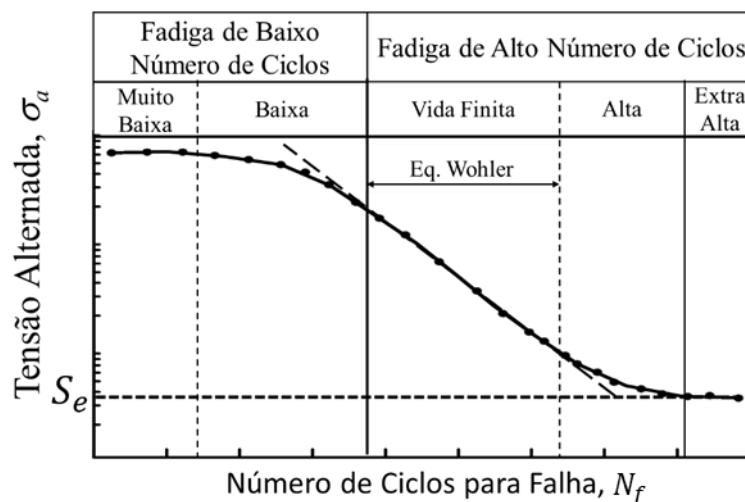


Figura 2.5 – Representação Esquemática do Diagrama de Wöhler.

Dentro do regime de fadiga de alto ciclo (HCF), destaca-se a região de vida finita, onde a relação entre a amplitude de tensão alternante, σ_a e o número de ciclos até a falha, N_f , pode ser descrita pela equação de Wöhler apresentada em (2.9).

$$\sigma_a^m N_f = C \quad (2.9)$$

onde m e C são parâmetros relacionados ao material.

Essa região, representada pela porção inclinada da curva $S - N$, caracteriza-se por falhas previsíveis em que o comportamento do material pode ser representado de forma linear em uma escala $\log\text{-}\log$. A região de vida finita é amplamente utilizada em engenharia para estimar a vida útil de componentes submetidos a carregamentos cíclicos em condições práticas de operação.

Em materiais ferrosos e algumas ligas metálicas específicas, o limite de resistência à fadiga, S_e , representado pelo trecho horizontal da curva, marca a transição para a região de vida infinita. Abaixo desse limite, assume-se que o material não falha por fadiga, mesmo após ciclos ilimitados. No entanto, para materiais que não apresentam um limite

de resistência claro, como ligas não ferrosas, a falha pode ocorrer mesmo em amplitudes de tensão muito baixas, desde que o número de ciclos seja extremamente elevado. Essa condição está associada à fadiga de altíssimo ciclo (Very High Cycle Fatigue, VHCF), localizada na extremidade direita da curva. No regime de VHCF, fenômenos específicos, como a nucleação de trincas subsuperficiais, tornam-se predominantes, especialmente em materiais de alta resistência com inclusões internas ou descontinuidades microestruturais (Bathias, 1999; Pyttel, Schwerdt, e Berger, 2011).

Os conceitos apresentados neste tópico, fundamentados na abordagem Tensão-Vida e no diagrama de Wöhler, fornecem a base para a aplicação de dois critérios amplamente utilizados no projeto de componentes sujeitos a carregamentos cíclicos: o projeto para vida infinita e o projeto para vida finita. Esses critérios estão diretamente associados ao uso do limite de resistência à fadiga, S_e , e da curva de Wöhler, permitindo avaliar o comportamento do material tanto em condições de longa duração quanto em situações de vida útil limitada.

No projeto para vida infinita, o componente é dimensionado para operar abaixo do limite de resistência à fadiga, S_e , garantindo, teoricamente, que o material não falhará por fadiga, mesmo após um número ilimitado de ciclos. Esse critério é amplamente aplicado em materiais ferrosos e em situações em que alta confiabilidade e longevidade são essenciais, como em componentes críticos de veículos automotivos e equipamentos industriais.

Por outro lado, o projeto para vida finita é utilizado quando o material está sujeito a amplitudes de tensão superiores ao limite de resistência, S_e , ou em casos em que esse limite não é bem definido, como ocorre em ligas não ferrosas. Nessa situação, a curva de Wöhler é usada como referência para estimar a vida útil do componente com base na amplitude de tensão alternante, σ_a e no número de ciclos até a falha, N_f . Essa abordagem é particularmente relevante para componentes submetidos a carregamentos cíclicos previsíveis, mas com durações limitadas.

2.2.1.1 Efeito da tensão média

A vida em fadiga de materiais submetidos a carregamentos cíclicos é, primariamente, influenciada pela amplitude da tensão alternada, σ_a , como observado no diagrama de Wöhler. No entanto, além dessa dependência predominante, é amplamente reconhecido que a presença de tensões médias, σ_m , no carregamento também afeta o

comportamento em fadiga, ainda que de forma secundária. Essas tensões médias podem alterar as condições para nucleação e propagação de trincas, modificando significativamente a vida útil do material.

De maneira geral, para caracterizar o efeito da tensão média no comportamento em fadiga, os diagramas $S - N$ devem ser construídos considerando que os pontos experimentais sejam obtidos sob condições de tensão média constante. Outra abordagem frequentemente utilizada para avaliar esse efeito é realizar ensaios sob condições de razão de fadiga constante, definida como $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$.

Uma forma amplamente utilizada para representar o efeito da tensão média é por meio do Diagrama de Haigh (ou diagrama de vida constante). No diagrama, a ordenada representa a amplitude de tensão σ_a normalizada pelo limite de resistência à fadiga S_e , enquanto a abscissa representa a tensão média σ_m normalizada pela resistência à tração S_u (ver Fig. 2.6). Em teoria, a curva que melhor ajusta os dados experimentais representa as combinações de σ_a e σ_m que resultam na falha por fadiga após N_f ciclos.

Apesar de sua utilidade, a construção experimental do diagrama de Haigh apresenta desafios, como o alto custo e a dependência da qualidade dos dados obtidos. Para superar essas limitações, foram desenvolvidas diversas relações empíricas que permitem prever as condições de falha de forma mais acessível e eficiente, especialmente em projetos para vida infinita. Essas relações, amplamente utilizadas em engenharia, simplificam a análise e a aplicação prática do efeito da tensão média em diferentes condições de carregamento, sendo representadas por funções que incorporam na formulação parâmetros do material, tal como: o limite de resistência à fadiga S_e , o limite de escoamento, S_y , a resistência à tração S_u ou a tensão verdadeira na fratura, $\tilde{\sigma}_{fB}$. Além disso, essas curvas incorporam as intensidades das tensões alternada e média para representar o nível de severidade do carregamento. A Eq. (2.10) apresenta uma expressão generalizada para representar relações empíricas amplamente utilizadas na avaliação do efeito da tensão média no comportamento em fadiga.

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma'_f(N_f)}\right)^n + \left(f \frac{\sigma_m}{S_u}\right)^m = 1 \quad (2.10)$$

onde f , m e n são constantes que assumem diferentes valores de acordo com a relação empírica considerada e σ'_f representa o coeficiente de resistência a fadiga. Os critérios mais adotados podem ser derivados da Eq. (2.10) considerando os valores das constantes apresentadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Constantes que caracterizam as relações empíricas utilizadas para avaliar o efeito da tensão média no comportamento em fadiga.

Relações Empíricas	Valor dos Parâmetros		
	m	n	f
Gerber	2	1	1
Goodman	1	1	1
Morrow	1	1	$S_u/\tilde{\sigma}_{fB}$
Elíptica (ASME)	2	2	1
Parabólica (Dietmann)	1	2	1

A Figura 2.6 apresenta diferentes modelos empíricos, representados por Goodman, Gerber, Dietman e ASME Elíptica, comparados com dados experimentais que consideram o efeito da tensão média em fadiga uniaxial. Observa-se que a precisão na previsão desse efeito varia entre os materiais analisados.

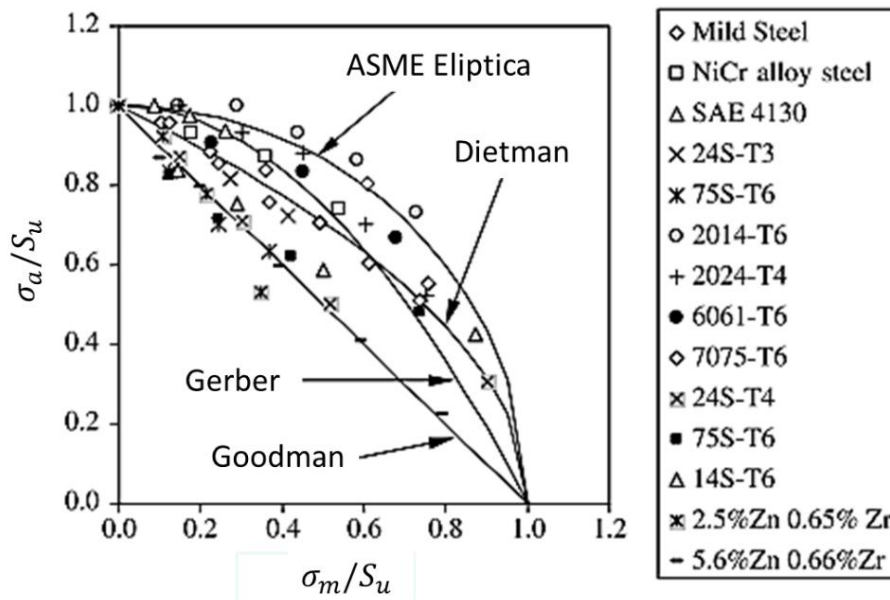


Figura 2.6 – Dados experimentais comparados com algumas expressões que consideram o efeito da tensão média em fadiga uniaxial (Susmel, Tovo, e Lazzarin 2005).

Ainda tomando por base a Figura 2.6, observa-se que as diferentes relações para avaliar o efeito da tensão média no comportamento em fadiga possuem limitações. A relação de Goodman, embora segura, por ser conservadora, é imprecisa. Já a relação de Gerber, apesar de frequentemente usada, é não conservadora, o que pode levar a previsões perigosas. A relação elíptica, por sua vez, representa bem materiais extra-dúcteis, enquanto as relações de Morrow e Goodman mostram resultados semelhantes para aços frágeis em condições de vida infinita. Apesar disso, Morrow, embora adequada para aços, não descreve bem ligas de alumínio. Os dados experimentais plotados na figura tendem

a se localizar entre as previsões de Goodman e Gerber, com algumas ligas de alumínio de baixa resistência caindo abaixo da linha de Goodman.

Embora as relações discutidas anteriormente ofereçam estimativas úteis para o efeito da tensão média em fadiga, sua precisão e aplicabilidade são limitadas em determinados cenários e materiais. Para superar essas limitações, abordagens mais avançadas têm sido desenvolvidas, como os modelos de Smith-Watson-Topper (SWT) (Norman E. Dowling 2012; Smith *et al.*, 1970) e Walker (Walker, 1970). Esses modelos se destacam por incorporar parâmetros adicionais que permitem uma descrição mais detalhada e flexível dos efeitos da tensão média, especialmente em situações em que os métodos tradicionais podem falhar.

Modelo de Smith-Watson-Topper

Para abordar de forma mais abrangente o efeito da tensão média em fadiga, Smith, Watson e Topper propuseram uma relação adequada que inclui tanto a faixa de deformação cíclica quanto a tensão máxima. Essa proposição é fundamentada na hipótese de que existe um parâmetro unificador que relaciona tensão e deformação, governando o processo de fadiga em metais. De acordo com os autores, essa função que controla o comportamento em fadiga é expressa pela Eq. (2.11).

$$P_{SWT} = \sqrt{\sigma_{max}\sigma_a} = \sigma_a \sqrt{\frac{2}{1-R}} = (\sigma_m + \sigma_a) \sqrt{\frac{1-R}{2}} \quad (2.11)$$

onde σ_{max} representa a tensão máxima, σ_a a amplitude de tensão, e P_{swt} é o parâmetro de Smith-Watson-Topper. Segundo os autores, ocorrerá falha por fadiga após a aplicação de N ciclos quando P_{SWT} for igual a amplitude de tensão para $\sigma_m = 0$, S_{ar} , ou seja:

$$S_{ar} = S_a(R = -1) = \sigma_f'(N_f)^b \quad (2.12)$$

onde σ_f' representa o coeficiente de resistência a fadiga e b é o expoente de resistência a fadiga.

Modelo de Walker

Enquanto o modelo de Smith-Watson-Topper (SWT) apresenta uma abordagem eficaz ao combinar a tensão máxima e a amplitude de tensão em um único parâmetro, Walker expandiu essa ideia ao introduzir maior flexibilidade por meio de um expoente ajustável, γ . Essa modificação permite que seu modelo seja adaptado às características específicas de diferentes materiais e condições de carregamento, considerando de forma

mais detalhada a influência da razão de tensão R sobre o comportamento em fadiga. A equação fundamental proposta por Walker é expressa através da Eq. (2.13).

$$P_w = \sigma_{max}^{1-\gamma} \sigma_a^\gamma = (\sigma_m + \sigma_a)^{1-\gamma} \cdot \sigma_a^\gamma \quad (2.13)$$

O expoente γ é uma propriedade material crítica no modelo de Walker, influenciando diretamente a sensibilidade do material ao efeito da tensão média. Para aços, γ pode ser correlacionado empiricamente com a resistência à tração S_u através da Eq. (2.14).

$$\gamma = -0,0002 \cdot S_u [MPa] + 0,8818 \quad (2.14)$$

No caso de ligas de alumínio, embora não haja uma relação empírica bem estabelecida, observou-se que:

- Ligas de alta resistência (como 2014, 2024 e 7075) apresentam γ na faixa de 0,41 a 0,57, com média de aproximadamente 0,47, valor próximo ao usado no modelo SWT ($\gamma = 0,50$).
- Ligas de baixa resistência (como 6061-T6 e AlMg4.5Mn) geralmente possuem γ em torno de 0,65.

Os modelos de Smith-Watson-Topper (SWT) e Walker são amplamente utilizados para analisar o efeito da tensão média no comportamento em fadiga, cada qual com vantagens específicas para diferentes contextos. O SWT destaca-se por sua simplicidade e eficiência em materiais metálicos sob condições gerais de carregamento, sendo amplamente aplicado devido à sua formulação direta e facilidade de implementação. Por outro lado, o modelo de Walker introduz maior flexibilidade ao incluir um expoente ajustável γ , que permite adaptar a análise às características específicas dos materiais e às condições de carregamento. Essa capacidade de ajuste torna o modelo mais adequado para materiais complexos ou situações em que a tensão média exerce um papel crítico no comportamento em fadiga. Entretanto, a determinação experimental de γ pode representar um desafio em situações em que dados não estão prontamente disponíveis. Assim, o SWT é ideal para análises mais gerais, enquanto o modelo de Walker é preferível em aplicações que exigem maior precisão e ajuste às propriedades específicas do material.

2.2.2 Formas de Projeto na Abordagem Tensão-Vida

A abordagem Tensão-Vida possibilita duas formas principais de projeto para componentes submetidos a carregamentos cíclicos: os projetos baseados em vida de

fadiga ("vida finita") e os projetos baseados em resistência ("vida infinita"). Essas metodologias são amplamente aplicadas na engenharia, sendo escolhidas de acordo com as condições de carregamento, os materiais envolvidos e os requisitos de confiabilidade do componente.

Projetos Baseados em Vida de Fadiga (Vida Finita)

Os projetos baseados em vida de fadiga são utilizados quando o componente está sujeito a amplitudes de tensão que excedem o limite de resistência à fadiga S_e ou em materiais que não apresentam esse limite claramente definido, como ligas não ferrosas. Nesse caso, a estimativa da vida útil é realizada com base na curva $S - N$, correlacionando a amplitude de tensão alternante σ_a ao número de ciclos até a falha N_f , conforme apresentado na Eq. (2.9).

Essa abordagem é amplamente utilizada para componentes que requerem longa vida útil em aplicações previsíveis, como em veículos automotivos, estruturas aeronáuticas e equipamentos industriais. Sua principal vantagem é permitir a previsão da vida útil do componente em condições operacionais específicas, possibilitando otimizações de projeto focadas na confiabilidade e no desempenho. Em situações em que as estruturas estão sujeitas a carregamentos aleatórios, como vibrações ou efeitos ambientais, essa metodologia também se destaca. Nesses casos, conceitos, que serão discutidos adiante, como contagem de ciclos e dano cumulativo tornam-se fundamentais para avaliar a degradação do material e prever sua durabilidade sob condições complexas de carregamento.

Projetos Baseados em Resistência (Vida Infinita)

Os projetos baseados em resistência têm como objetivo garantir que o componente opere abaixo do limite de resistência à fadiga S_e , de forma que, teoricamente, ele não falhe por fadiga, mesmo após um número ilimitado de ciclos. Essa metodologia é amplamente utilizada em materiais ferrosos, que apresentam um limite de resistência bem definido, e em componentes críticos que exigem alta confiabilidade e longa vida útil, como eixos, engrenagens e elementos estruturais de máquinas.

Além de prever a vida útil ou garantir a resistência em condições operacionais, ambos os critérios de projeto — vida de fadiga e resistência — exigem uma análise criteriosa das interações entre as componentes de tensões alternantes σ_a e médias σ_m . Para incorporar o impacto da tensão média no comportamento em fadiga, critérios

empíricos, como as relações de Goodman, Gerber, ASME Elíptica, SWT e Walker, são amplamente utilizados. Esses métodos asseguram que a combinação de σ_a e σ_m permaneça dentro da região de segurança nos projetos baseados em resistência ou permita uma representação precisa da durabilidade nos projetos baseados em vida de fadiga, garantindo previsões confiáveis em ambas as abordagens.

2.2.3 Dano Acumulado

O conceito de dano em materiais está relacionado ao acúmulo de defeitos internos, como microfissuras e descontinuidades, que se desenvolvem sob a aplicação de tensões cíclicas. Esse processo ocorre principalmente na microestrutura do material, onde mudanças localizadas, como intrusões e extrusões superficiais, favorecem a nucleação de trincas. Com o carregamento contínuo, essas trincas se propagam e coalescem, comprometendo gradualmente a integridade estrutural. A falha final acontece quando a área intacta remanescente do material não é mais capaz de suportar a carga aplicada, resultando na ruptura completa. (Lee *et al.*, 2005; Norman E. Dowling, 2012). Com a continuidade do carregamento cíclico, as microtrincas crescem de forma estável e podem se coalescer, formando trincas maiores que se propagam pelo material. Nesse estágio, o dano acumulado começa a comprometer significativamente a integridade estrutural, resultando em uma redução da capacidade de suportar cargas. O crescimento das trincas é impulsionado por mecanismos locais de concentração de tensões e, em alguns casos, pode ser influenciado por fatores externos, como condições ambientais ou características geométricas da peça (Lee *et al.*, 2005). Eventualmente, a propagação das trincas alcança um ponto crítico em que a seção transversal restante do material não é mais suficiente para resistir à carga aplicada. Nesse ponto, ocorre a falha final, marcada por uma ruptura rápida e catastrófica. Esse processo é intrinsecamente cumulativo e progressivo, embora, em muitas situações, a degradação significativa só se torne aparente em estágios avançados do dano.

Para compreender e prever esse comportamento, foi necessário aprofundar o estudo do fenômeno, o que resultou no desenvolvimento de modelos de análise de dano acumulado. Esses modelos descrevem e quantificam a relação entre os ciclos de carregamento e o comprometimento estrutural do material, fornecendo ferramentas indispensáveis para prever a vida útil de componentes e compreender o comportamento do dano ao longo do tempo. Entre os mais conhecidos está o Modelo Linear de Palmgren-

Miner (Lee *et al.*, 2005; Miner, 1945; Norman E. Dowling, 2012), amplamente utilizado devido à sua simplicidade, embora apresente limitações em condições de carregamento mais complexas, como de amplitude variável.

O Modelo de Miner assume que cada ciclo de carregamento consome uma fração fixa da vida útil do material, sendo o dano acumulado D , expresso pela soma das frações dos ciclos aplicados em diferentes níveis de tensão em relação ao número de ciclos até a falha nesses mesmos níveis. A formulação básica é representada pela Eq. (2.15).

$$D = \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{N_k} \quad (2.15)$$

onde n_k representa o número de ciclos aplicados em um nível de tensão específico e N_k é o número de ciclos necessários para a falha nesse nível, calculado usando a Eq. (2.9); e K é o número eventos ou de classes de amplitude de tensão presentes na história de tensões.

A falha estrutural ocorre quando D atinge ou excede um valor crítico D_c , que geralmente é assumido como 1,0 na ausência de informações adicionais. No entanto, estudos experimentais indicam que o valor crítico real de D_c pode variar significativamente em diferentes condições de carregamento, com valores medianos observados entre 0,15 e 1,6. Essa variação reflete a dependência do dano acumulado em fatores como a sequência de tensões e as propriedades do material.

Embora amplamente aplicado em análises de fadiga, o Modelo de Miner apresenta limitações significativas, particularmente em cenários de carregamento de amplitude variável. Ele não considera os efeitos da sequência de tensões, como a ordem em que ciclos de alta e baixa amplitude são aplicados, que pode influenciar diretamente a progressão do dano acumulado no material. Além disso, o modelo desconsidera interações entre ciclos consecutivos de diferentes amplitudes e mudanças no regime de fadiga (iniciação/propagação), fatores que podem alterar substancialmente o comportamento do material ao longo do tempo (Castro, 2007; Lee *et al.*, 2005; Mansur *et al.*, 2005).

Apesar dessas limitações, o Modelo Linear de Miner tem se mostrado uma ferramenta eficiente para prever a vida útil de componentes em condições de carregamento aleatório, mesmo quando as amplitudes de tensão variam de forma complexa e não claramente periódica. Sua aplicação deve ser acoplada a abordagens que permitam identificar e contar os ciclos de carregamentos presentes na história.

Por outro lado, em condições de carregamento onde os efeitos da sequência de tensões são predominantes, as limitações do Modelo de Miner tornam-se mais evidentes. A ordem de aplicação dos ciclos pode alterar significativamente o comportamento de fadiga, algo que o modelo, com sua abordagem linear, não é capaz de capturar. Essa simplificação compromete sua precisão em situações mais complexas, o que evidencia a necessidade de abordagens mais avançadas para integrar esses aspectos ao cálculo do dano acumulado. Essa lacuna motivou o desenvolvimento de diversos modelos não lineares, projetados para superar as limitações do Modelo de Miner e oferecer uma descrição mais precisa do comportamento de fadiga.

Entre esses modelos, destaca-se o de Manson e Halford (Manson e Halford, 1981), conhecido como Regra de Dano Linear Duplo (DLDR), que divide o processo de fadiga em duas fases distintas: iniciação e propagação de trincas. Cada fase é descrita separadamente por uma relação linear de dano, conectadas por um ponto crítico (kneepoint) que reflete a transição entre as etapas. Essa abordagem permite capturar as mudanças no comportamento do material à medida que o dano se desenvolve, representando uma evolução significativa em relação às suposições do modelo linear.

Por outro lado, o Modelo de Corten-Dolan (Corten e Dolan, 1956) adota uma perspectiva baseada na energia acumulada durante o carregamento cíclico. Ele avalia o dano como uma fração da energia de fadiga total do material, incorporando interações entre ciclos de diferentes amplitudes. Essa abordagem é particularmente útil em situações em que os ciclos mais intensos desempenham um papel desproporcional na degradação do material.

O Modelo de Mansur (Mansur *et al.*, 2005), por sua vez, ajusta o cálculo do dano acumulado com base no histórico de carregamento, atribuindo maior relevância aos ciclos de maior severidade. Essa característica permite que o modelo capture o impacto cumulativo de ciclos críticos, mesmo quando aplicados em sequência com amplitudes menores, oferecendo uma visão mais realista da progressão do dano em condições de carregamento variável.

Já o Modelo de Castro (Castro, 2007) vai além ao incorporar diretamente os efeitos do histórico de tensões e as interações entre diferentes ciclos. Ele considera explicitamente a influência das transições de amplitude e da sequência de carregamento, proporcionando uma análise mais detalhada e precisa do comportamento de fadiga em cenários complexos.

2.2.4 Identificação e Contagem de Ciclos de Carregamento

A análise de fadiga de componentes estruturais exige métodos robustos para estimar o dano acumulado ao longo do tempo. Como discutido anteriormente, modelos como o de Miner dependem de informações sobre ciclos de carregamento para calcular o dano acumulado e prever a vida útil de componentes. Apesar das limitações conhecidas, o Modelo Linear de Miner tem se mostrado uma ferramenta eficiente em condições de carregamento aleatório, mesmo quando as amplitudes de tensão variam de forma complexa e não claramente periódica. No entanto, sua aplicação requer abordagens complementares que permitam identificar e organizar os ciclos presentes no histórico de tensões.

Entre os métodos disponíveis para contagem de ciclos, amplamente adotados pela indústria e formalizados na norma ASTM E1049 (ASTM E1049 2017), destacam-se:

- Contagem por Cruzamento de Níveis (Level-Crossing Counting): Conta o número de vezes que o histórico de tensões cruza um nível de referência predefinido, tanto ascendendo quanto descendendo. É útil para identificar padrões gerais de carregamento, mas pode incluir ciclos menores que não contribuem significativamente para o acúmulo de dano;
- Contagem de Picos (Peak Counting): Registra picos e vales no histórico de tensões, representando os pontos de reversão de carregamento. Uma variação do método considera apenas os picos mais altos e os vales mais baixos entre cruzamentos do nível médio, eliminando eventos menores e irrelevantes para o comportamento de fadiga;
- Contagem por Intervalo Simples (Simple-Range Counting): Cada intervalo entre um pico e o vale subsequente é tratado como um ciclo completo. Embora simples de aplicar, o método não considera interações ou sequências de ciclos, sendo mais adequado para históricos de baixa complexidade;
- Contagem por Pares de Intervalos (Range-Pair Counting): Identifica ciclos fechados emparelhando intervalos opostos de picos e vales. Esse método oferece uma representação mais precisa dos ciclos significativos, descartando eventos menores que não impactam o acúmulo de dano.

Embora essas técnicas sejam úteis em diferentes contextos industriais, apresentam limitações importantes, especialmente para históricos de tensões complexos e variáveis. Métodos mais simples, como a Contagem de Cruzamento de Níveis e a Contagem de

Picos, podem superestimar ciclos menores que têm pouco impacto no comportamento de fadiga, enquanto métodos mais seletivos, como a Contagem por Intervalo Simples e a Contagem por Pares de Intervalos, ainda carecem de flexibilidade para capturar a interação entre ciclos de diferentes amplitudes ou a influência do histórico de tensões.

Considerando essas restrições, a técnica Rainflow é amplamente reconhecida como a abordagem mais robusta para análises de fadiga em condições de carregamentos aleatórios. Introduzida por Matsuishi e Endo (Matsuishi, e Endo, 1968) e formalizada na norma ASTM E1049-85 (ASTM E1049 2017), o Rainflow oferece uma metodologia sistemática para identificar ciclos significativos no histórico de tensões, superando as deficiências dos métodos mais simples.

Para implementar o método Rainflow, o primeiro passo é transformar o histórico de tensões em uma sequência de picos e vales, identificados como os pontos onde a derivada do histórico de tensões muda de sinal. Esses picos e vales representam as reversões de carregamento, que são fundamentais para delimitar ciclos completos no material.

A Fig. 2.7 mostra uma representação detalhada de uma sequência de picos (indicados em azul) e vales (indicados em vermelho) ao longo de um histórico de carregamento. Esses pontos, que marcam as reversões de direção no carregamento, delimitam os segmentos avaliados em pares para a identificação de ciclos completos de tensão.

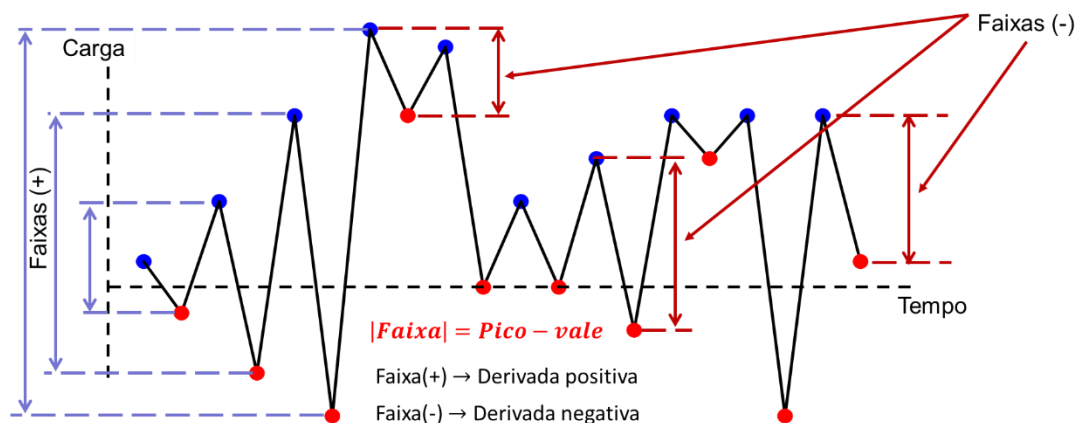


Figura 2.7 – Identificação de Picos e Vales em um Histórico de Carregamento.

A Fig. 2.7 também ilustra conceitos fundamentais, como a faixa de carregamento, definida como a diferença entre um pico e o vale correspondente, que é crucial para a determinação da amplitude de tensão. Esse mapeamento inicial organiza o histórico de

carregamento em eventos discretos e relevantes, permitindo a análise detalhada das condições de fadiga às quais o material foi submetido, ao mesmo tempo que simplifica a interpretação de históricos complexos.

A partir de observações empíricas da curva tensão-deformação obtida em testes sob condições de amplitude variável, verifica-se que, durante a aplicação de um histórico de tensões ou deformações, pequenas reversões de carga aparecem no diagrama tensão-deformação $\sigma - \epsilon$. No entanto, essas reversões menores não afetam significativamente as reversões de maior amplitude nem alteram a resposta global do material. Como destacado em (Dowling, 2013), o ciclo de histerese resultante reflete prioritariamente os carregamentos predominantes, enquanto pequenas flutuações dentro do histórico podem ser descartadas na análise de fadiga sem perda significativa de precisão.

Esse comportamento é ilustrado na Figura 2.8. À esquerda (Fig. 2.8(a)), o histórico de tensões é representado como uma sequência de picos (em azul) e vales (em vermelho), que delimitam reversões de carregamento ao longo do tempo — elementos essenciais para a análise de fadiga. À direita (Fig. 2.8(b)), no diagrama tensão-deformação $\sigma - \epsilon$, observa-se que a sequência de carregamento 2-3-4 contém um ciclo menor (2-3-2'), que é identificado pelo método Rainflow de forma independente. Esse ciclo não interfere na evolução do segmento 4-5, associado a uma reversão de maior amplitude. Essa organização sistemática, que identifica todos os ciclos presentes, reflete a precisão do Rainflow ao estruturar o histórico com base em parâmetros como amplitude e tensão média, permitindo uma análise detalhada e eficiente do comportamento de fadiga.

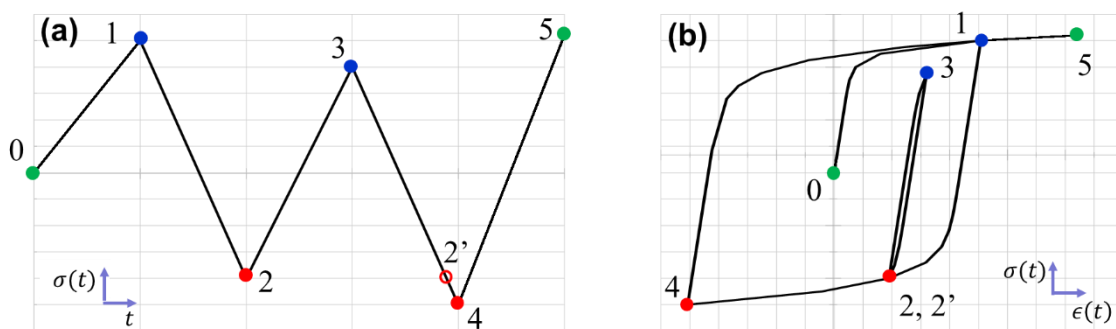


Figura 2.8 – Exemplo do comportamento da curva tensão-deformação para uma dada história de tensões – (a) Evolução da sequência de picos e vales e (b) Representação dos ciclos correspondentes no diagrama tensão-deformação.

Dessa forma, diferentemente de outros métodos, ao invés de descartar ciclos, o método fornece uma estrutura robusta para que o analista avalie sua relevância no

comportamento de fadiga. Essa abordagem torna o Rainflow particularmente eficiente para lidar com históricos de carregamento complexos, permitindo a identificação clara, precisa e detalhada dos ciclos presentes na história de carregamento.

A aplicação do método Rainflow envolve uma série de regras para identificar os ciclos de carregamento. O núcleo do processo consiste em comparar as faixas formadas por três reversões consecutivas $(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$, conforme ilustrado na Fig. 2.9. Essas reversões são usadas para definir os intervalos de tensão: $R_l = |\sigma_i - \sigma_j|$ (faixa à esquerda) e $R_r = |\sigma_j - \sigma_k|$ (faixa à direita). Se a faixa à esquerda R_l for menor ou igual à faixa à direita R_r , considera-se que o material foi submetido a 1 ou 1/2 ciclos de carregamento com tensão alternada σ_a e tensão média σ_m , calculadas usando as Eqs. (2.16) e (2.17).

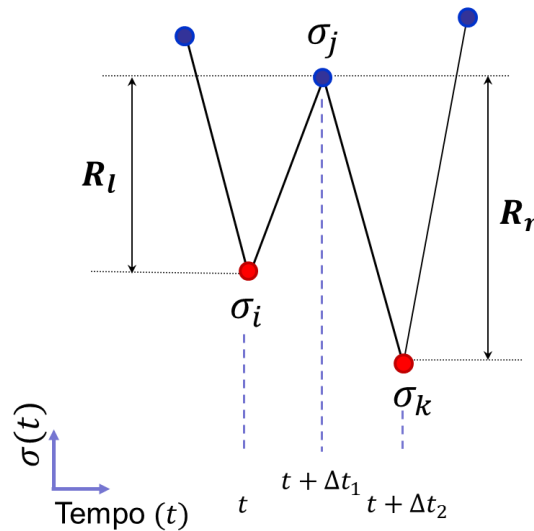


Figura 2.9 – Representação das reversões de carregamento $(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$ e das faixas de tensão esquerda R_l e direita R_r utilizadas no método Rainflow

$$\sigma_a = \frac{R_l}{2} \quad (2.16)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \quad (2.17)$$

Se a condição $R_l \leq R_r$ não for satisfeita, assume-se que a sequência de carregamento $(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$ não contém ciclos de carregamento no material. A partir da comparação entre R_l e R_r , algumas regras adicionais são empregadas para implementar o método Rainflow:

1. Transforme o histórico de carregamento em uma sequência de picos e vales, e quantifique o número de picos e vales presentes na sequência, V , e defina v como um

- contador, inicializando em $v = 1$ e atribua um marcador S ao primeiro ponto da sequência para estabelecer um ponto de referência.
2. Defina uma matriz dinâmica, M , $M \times 3$, na qual cada linha armazenará as informações sobre: a) intensidade da tensão alternada σ_a ; b) intensidade da tensão média σ_m ; e o número de ciclos, n , identificadas durante o processo de contagem Rainflow.
 3. A contagem é realizada inicialmente a partir da primeira posição da sequência de picos ou vales presente no histórico.
 4. Se $V > 2$, forme o primeiro terno $(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) = (\sigma_v, \sigma_{v+1}, \sigma_{v+2})$, $v = 1$.
 5. Calcular as faixas R_l e R_r usando o terno $(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$.
 6. Compare as faixas R_l e R_r .
 - 6.1. Se $R_l \leq R_r$
 - 6.1.1. Se a posição da reversão σ_i coincidir com a posição da referência S :
 - 6.1.1.1. Calcule σ_a e σ_m usando as Eqs. (2.16) e (2.17) e transporte σ_a , σ_m e $n = 1/2$ para a matriz M .
 - 6.1.1.2. Elimine o ponto $\sigma_{l=1}$ da sequência de picos e vales, reorganize a sequência de eventos, e atualize $V = V - 1$.
 - 6.1.2. Se $V > 2$
 - 6.1.2.1. Forme um novo terno $(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) = (\sigma_1, \sigma_2, S_3)$
 - 6.1.2.2. Volte para o início do passo 5.
 - 6.1.3. Se $V = 2$
 - 6.1.3.1. Calcule σ_a e σ_m e transporte os valores de σ_a , σ_m e $n = 1/2$ para a matriz M .
 - 6.1.3.2. Fim do processo de contagem.
 - 6.1.4. Se a reversão σ_i não estiver na primeira posição da sequência de picos e vales ($v \neq 1$):
 - 6.1.4.1. Calcule σ_a e σ_m e transporte os valores de σ_a , σ_m e $n = 1$ para a matriz M .
 - 6.1.4.2. Elimine os pontos σ_i e σ_j da sequência de picos e vales, reorganize e atualize $V = V - 2$ e $v = v - 1$.
 - 6.1.4.3. Forme novos ternos $(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k) = (\sigma_v, \sigma_{v+1}, \sigma_{v+2})$ e retorne para o passo 5.

6.2. Se $R_l > R_r$

6.2.1. Se $v \leq V - 3$

6.2.1.1. $v = v + 1$

6.2.1.2. Forme novo terno $(\sigma_l, \sigma_{l+1}, \sigma_{l+2})$ to passo 4.

6.2.2. Se $v > V - 3$

6.2.2.1. Calcule, para cada intervalo restante (σ_i, σ_j) , σ_a e S_m e transporte os valores de σ_a e σ_m $n = 1/2$ para a matriz M

6.2.2.2. Fim do processo de identificação e contagem.

CAPÍTULO 3 – FUNDAMENTOS DA FADIGA SOB CONDIÇÕES MULTIAXIAIS

Neste capítulo, são introduzidas as bases matemáticas e mecânicas para a análise de fadiga sob condições multiaxiais, incluindo o ferramental necessário para lidar com estados de tensões complexos. Além disso, discute-se o conceito de dano, os métodos de contagem de ciclos e as abordagens de projeto baseadas em previsões de vida e resistência. São explorados critérios de falha baseados no plano crítico e suas aplicações na identificação de trajetórias de tensão e na avaliação do comportamento estrutural. Esses elementos teóricos fornecem o alicerce para o desenvolvimento do Método Rápido de Máxima Variância (FMVM) nos capítulos seguintes.

3.1 Análise de Tensões

Seja $\boldsymbol{\sigma}(t)$ o tensor de tensões referenciado na base xyz , atuando sobre um ponto material P . Para o caso de tensões em 3D, o estado de tensões no ponto P é representado pelo tensor de tensões cartesianas $\boldsymbol{\sigma}$, conforme mostrado na Eq. (3.1).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde os termos da diagonal principal representam as componentes normais de tensão e os termos das diagonais secundárias os termos das componentes de cisalhamento.

Considere agora que o ponto material P está localizado em uma estrutura qualquer e que este ponto se encontra em um plano Δ , referenciado pelo sistema de coordenadas $Oxyz$. Para caracterizar a orientação do plano Δ , define-se o vetor normal unitário $\hat{\mathbf{n}}$, perpendicular a Δ e orientado em relação à base do sistema $Oxyz$, como ilustrado na Figura 3.1. A orientação desse vetor $\hat{\mathbf{n}}$ especificada pelos ângulos θ e ϕ , definidos em coordenadas esféricas, onde θ é o ângulo polar, medido a partir do eixo Z , e determina a inclinação de $\hat{\mathbf{n}}$ em relação ao plano XY , enquanto ϕ é o ângulo azimutal, medido no plano XY a partir do eixo X , definindo a rotação do vetor ao redor do eixo Z .

De acordo com o Teorema de Cauchy, o vetor de tensões $\mathbf{t}(t)$ em um plano material Δ , definido pelo vetor unitário \mathbf{n} , normal ao plano, obedece à Eq. (3.2).

$$\mathbf{t}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} \quad (3.2)$$

onde \mathbf{n} está referenciado ao sistema xyz pelos ângulos ϕ e θ , sendo definido pela Eq. (3.3).

$$\mathbf{n} = [n_x \quad n_y \quad n_z]^T = [\sin(\theta)\cos(\phi) \quad \sin(\theta)\sin(\phi) \quad \cos(\theta)]^T \quad (3.3)$$

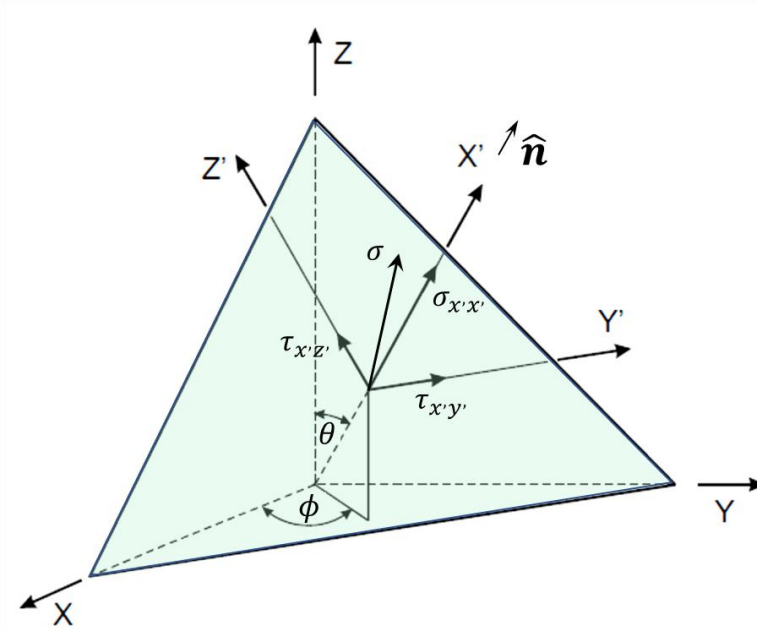


Figura 3.1 – Representação Esquemática da Orientação do Plano Material Δ em Relação ao Sistema de Coordenadas O_{xyz} , com Vetor Normal $\hat{\mathbf{n}}$ e Componentes de Tensão Normal e Cisalhantes (Adaptado de Susmel, 2010).

O vetor $\mathbf{t}(t)$ é composto por duas componentes principais: uma representada pelo vetor de tensão normal ao plano Δ , denominado vetor de tensão normal, $\sigma_n(t)$, e outro paralelo à superfície que define o plano Δ , denominado vetor de tensões de cisalhamento resolvidas, $\boldsymbol{\tau}(t)$. O vetor de tensão normal e o vetor de tensão de cisalhamento resolvido são calculados pelas Eqs. (3.4) e (3.5), respectivamente.

$$\sigma_n(t) = [(\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n} = [\mathbf{n}^T\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n}]\mathbf{n} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{t}(t) - \sigma_n(t) = \mathbf{t}(t) - [\mathbf{n}^T\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n}]\mathbf{n} \quad (3.5)$$

O vetor de tensões de cisalhamento resolvido, $\boldsymbol{\tau}(t)$, expresso na Eq. (3.5), muda tanto sua direção quanto sua magnitude ao longo do tempo, descrevendo uma trajetória específica no plano material Δ .

Considerando a análise de fadiga multiaxial na presença de componentes de tensão com amplitudes constantes, existem vários critérios para a busca de planos críticos baseados na máxima amplitude da tensão de cisalhamento, $\tau_{a_{max}}$. Para formular o método dos planos críticos baseado na identificação de $\tau_{a_{max}}$, o sistema de coordenadas

$(\mathbf{e}_a; \mathbf{e}_b; \mathbf{n})$ é introduzido, conforme mostrado nas Fig. 3.2. Nesta figura, os vetores unitários \mathbf{e}_a e \mathbf{e}_b representam a base de um sistema de coordenadas local, situado no plano material Δ , com \mathbf{e}_a paralelo à interseção do plano material com o plano xy e \mathbf{e}_b apontando para o eixo z . Nesta base específica, as histórias das tensões resolvidas nas direções a e b são calculadas utilizando as Eqs. (3.6) e (3.7).

$$\tau_{e_a}(t) = \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{e}_a = (\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_a^T \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} \quad (3.6)$$

$$\tau_{e_b}(t) = \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{e}_b = (\boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_b^T \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n} \quad (3.7)$$

onde os vetores \mathbf{e}_a e \mathbf{e}_b podem ser descritos como funções das coordenadas θ e ϕ conforme apresentado nas Eqs. (3.8) e (3.9).

$$\mathbf{e}_a = [a_x \ a_y \ a_z]^T = [\sin(\phi) \ -\cos(\phi) \ 0]^T \quad (3.8)$$

$$\mathbf{e}_b = [b_x \ b_y \ b_z]^T = [\cos(\theta)\cos(\phi) \ \cos(\theta)\sin(\phi) \ -\sin(\theta)]^T \quad (3.9)$$

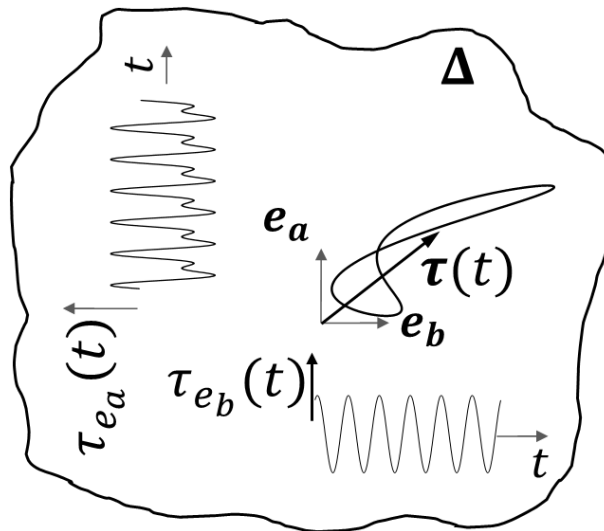


Figura 3.2 – Trajetória e Decomposição do Vetor de Tensões de Cisalhamento Resolvido, $\tau(t)$ no Plano Material Δ .

Considerando a base $(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$, a evolução temporal do vetor de tensão de cisalhamento resolvida pode ser expressa através da Eq. (3.10).

$$\boldsymbol{\tau}(t) = [\mathbf{e}_a^T \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n}]\mathbf{e}_a + [\mathbf{e}_b^T \boldsymbol{\sigma}(t)\mathbf{n}]\mathbf{e}_b \quad (3.10)$$

Outra forma de representar a evolução do vetor de tensão cisalhante é projetá-lo em uma direção genérica \mathbf{q} (calculada pela Eq. (3.11)) (Susmel, 2010; Tovo *et al.*, 2005), situada neste plano Δ e definida por um ângulo α , medido a partir da direção \mathbf{e}_a (ver Fig. 3.3). Dessa forma, a projeção do vetor de tensões cisalhantes resolvidas na direção \mathbf{q} , $\tau_q(t)$, é calculada através da Eq. (3.12).

$$\mathbf{q} = \mathbf{e}_a \cos(\alpha) + \mathbf{e}_b \sin(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \sin(\phi) + \sin(\alpha) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ -\cos(\alpha) \cos(\phi) + \sin(\alpha) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\alpha) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\tau_q(t) = [\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{q}] \mathbf{q} = [\mathbf{q}^T \boldsymbol{\sigma}(t) \mathbf{n}] \mathbf{q} = \tau_q(t) \mathbf{q} \quad (3.12)$$

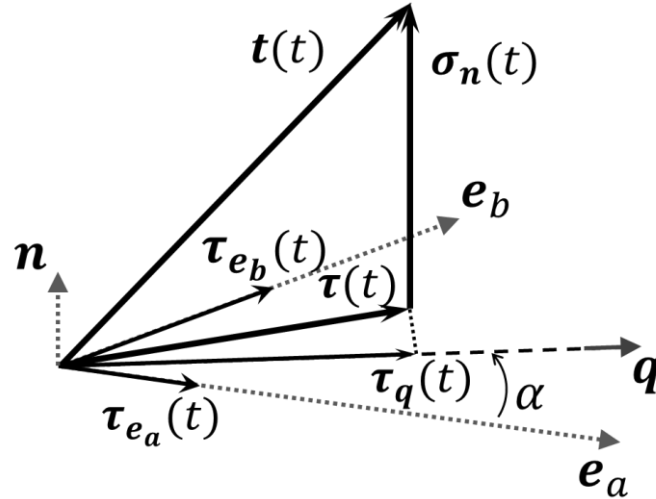


Figura 3.3 – Definição da direção \mathbf{q} situada no plano material Δ e das tensões de cisalhamento resolvidas atuando no plano Δ ao longo da direção \mathbf{q} (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

Desenvolvendo o termo entre colchetes da Eq. (3.12) e reorganizando os termos resultantes, é possível representar $\tau_q(t)$ de forma mais compacta usando a Eq. (3.13).

$$\tau_q(t) = \mathbf{d}_\tau^T \mathbf{s}(t) \quad (3.13)$$

onde \mathbf{d}_τ é um vetor que depende dos cossenos diretores, expresso através da Eq. (3.14).

$$\mathbf{d}_\tau = \begin{bmatrix} n_x q_x \\ n_y q_y \\ n_z q_z \\ n_x q_y + n_y q_x \\ n_x q_z + n_z q_x \\ n_y q_z + n_z q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [\cos(\alpha) \sin(\theta) \sin(2\phi) + \sin(\alpha) \sin(2\theta) \cos^2(\phi)] \\ \frac{1}{2} [-\cos(\alpha) \sin(\theta) \sin(2\phi) + \sin(\alpha) \sin(2\theta) \sin^2(\phi)] \\ -\frac{1}{2} [\sin(\alpha) \sin(2\theta)] \\ \frac{1}{2} [\sin(\alpha) \sin(2\theta) \sin(2\phi)] - \cos(\alpha) \sin(\theta) \cos(2\phi) \\ \sin(\alpha) \cos(2\theta) \cos(\phi) + \cos(\alpha) \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\alpha) \cos(2\theta) \sin(\phi) - \cos(\alpha) \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

e $\mathbf{s}(t)$ é um vetor que representa os componentes do tensor, tal que:

$$\mathbf{s}(t) = [\sigma_{xx}(t) \quad \sigma_{yy}(t) \quad \sigma_{zz}(t) \quad \tau_{xy}(t) \quad \tau_{xz}(t) \quad \tau_{yz}(t)]^T \quad (3.15)$$

Utilizando a representação vetorial do tensor $\boldsymbol{\sigma}(t)$, podemos ainda calcular o histórico das tensões atuantes na direção \mathbf{n} através da Eq. (3.16).

$$\sigma_n(t) = \mathbf{d}_\sigma^T \mathbf{s}(t) \quad (3.16)$$

onde \mathbf{d}_σ é um vetor construído a partir das projeções de $\hat{\mathbf{n}}$ no plano Δ conforme expresso na Eq. (3.17).

$$\mathbf{d}_\sigma = \begin{bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \\ 2n_x n_y \\ 2n_x n_z \\ 2n_y n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) \\ \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) \\ \cos^2(\theta) \\ 2 \sin(\phi) \cos(\phi) \sin^2(\theta) \\ 2 \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ 2 \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.2 O Método da Máxima Variância – Abordagem Clássica

No tópico 3.1, discutiu-se a decomposição das tensões normais e de cisalhamento resolvidas em direções específicas no plano material Δ e o cálculo das projeções de tensões ao longo de direções arbitrárias. Esse tipo de análise permite avaliar tensões críticas em planos de interesse, especialmente em contextos em que os carregamentos possuem caráter determinístico. No entanto, para estados de tensão aleatórias, como em muitos cenários de carregamento operacional, a variabilidade das tensões ao longo do tempo também deve ser considerada, pois afeta diretamente a resposta à fadiga do material.

A variância da tensão é uma medida fundamental para capturar o grau de dispersão dos eventos de um processo aleatório em torno de seu valor médio. No contexto de fadiga, essa dispersão está relacionada ao dano acumulado sob carregamentos flutuantes, já que as amplitudes de tensão variam ao longo do tempo de maneira estocástica. Estudos desenvolvidos por Rice (Rice, 1939, 1944), Wirsching (Wirsching, 1980, 1984, 1985; Wirsching & Chen, 1988, 2008; Wirsching & Haugen E. B., 1974; Wirsching & Shehata, 2010), Zhao e Baker (Zhao e Baker, 1992), e Dirlik (Turan DIRLIK, 1985), entre outros, indicam que o dano por fadiga depende consideravelmente da variância do histórico de tensões. Por essa razão, para estados de tensão aleatórios e estacionários, o Método da Máxima Variância assume que um plano em que a variância da tensão equivalente atinge seu máximo é crítico para o material, e a fratura por fadiga pode ser esperada neste plano (Bedkowski e Macha, 1987, 1992; Susmel, 2010). Em geral, em uma análise multivariada, é necessário conhecer não apenas as medidas de variância das variáveis aleatórias (calculadas usando a Eq. (3.18)), mas também a quantificação das relações de dependência entre as variáveis aleatórias (calculadas usando a Eq. (3.19)). Essas

quantidades são apresentadas na forma de uma matriz chamada matriz de covariância, determinada com base nas definições demonstradas a seguir.

Suponha que dois componentes do tensor $\boldsymbol{\sigma}(t)$, por exemplo, $\sigma_i(t)$ e $\sigma_j(t)$ ($i, j = xx, yy, zz, xy, xz, yz$), sejam variáveis estocásticas contínuas observadas no intervalo de tempo $[0, T]$ e que tenham valores médios iguais a $\sigma_{i,m}$ e $\sigma_{j,m}$, respectivamente. As variâncias de $\sigma_i(t)$ e $\sigma_j(t)$ podem ser calculadas na forma geral como segue:

$$Var[\sigma_i(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T [\sigma_i(t) - \sigma_{i,m}]^2 dt \quad (3.18)$$

$$Var[\sigma_j(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T [\sigma_j(t) - \sigma_{j,m}]^2 dt \quad (3.19)$$

A quantificação da dependência linear entre as variáveis $\sigma_i(t)$ e $\sigma_j(t)$ é feita por uma medida denominada covariância, que pode ser calculada pela Eq. (3.20).

$$CoV[\sigma_i(t), \sigma_j(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T [\sigma_i(t) - \sigma_{i,m}][\sigma_j(t) - \sigma_{j,m}] dt \quad (3.20)$$

Em geral, as medidas de variância e covariância são representadas por uma matriz quadrada, $\boldsymbol{\mu}$ (chamada matriz de variância-covariância, ou simplesmente matriz de covariância), onde os elementos diagonais representam a variância e os elementos fora da diagonal representam a covariância. Considerando os componentes do tensor de tensões mostrado na Eq. (3.1), a matriz de covariância terá a forma apresentada na Eq. (3.21) (Deng *et al.*, 2022; Susmel, 2010).

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{x,x} & \mu_{x,y} & \mu_{x,z} & \mu_{x,xy} & \mu_{x,xz} & \mu_{x,yz} \\ \mu_{x,y} & \mu_{y,y} & \mu_{y,z} & \mu_{y,xy} & \mu_{y,xz} & \mu_{y,yz} \\ \mu_{x,z} & \mu_{y,z} & \mu_{z,z} & \mu_{z,xy} & \mu_{z,xz} & \mu_{z,yz} \\ \mu_{x,xy} & \mu_{y,xy} & \mu_{z,xy} & \mu_{xy,xy} & \mu_{xy,xz} & \mu_{xy,yz} \\ \mu_{x,xz} & \mu_{y,xz} & \mu_{z,xz} & \mu_{xy,xz} & \mu_{xz,xz} & \mu_{xz,yz} \\ \mu_{x,yz} & \mu_{y,yz} & \mu_{z,yz} & \mu_{xy,yz} & \mu_{xz,yz} & \mu_{yz,yz} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

onde tem-se $\mu_{i,i} = Var[\sigma_i(t)]$ para $i = x, y, z, xy, xz, yz$, e $\mu_{i,j} = CoV[\sigma_i(t), \sigma_j(t)]$ para $i, j = x, y, z, xy, xz, yz$.

Em situações práticas, sinais de tempo contínuo são processados digitalmente, resultando em amostras discretizadas desses mesmos sinais, que podem ser representados, por exemplo, através de uma matriz de dados $\boldsymbol{S}(px6)$, apresentada na Eq. (3.22), que representa as observações discretizadas da evolução temporal do tensor $\boldsymbol{\sigma}(t)$ atuando em um ponto material de um componente estrutural qualquer.

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{\sigma}_{xx} \quad \boldsymbol{\sigma}_{yy} \quad \boldsymbol{\sigma}_{zz} \quad \boldsymbol{\tau}_{xy} \quad \boldsymbol{\tau}_{xz} \quad \boldsymbol{\tau}_{yz}] \quad (3.22)$$

Assim, considerando a matriz de dados \mathbf{S} , as estimativas da matriz de covariância, $\boldsymbol{\mu}$, são calculadas conforme a Eq. (3.23) (Härdle & Simar, 2019).

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{p} \mathbf{S}^T \mathbf{S} - \mathbf{m} \mathbf{m}^T = \frac{1}{p} \left(\mathbf{S}^T \mathbf{S} - \frac{1}{p} \mathbf{S}^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{S} \right) \quad (3.23)$$

onde $\mathbf{1}$ é um vetor coluna de p elementos unitários, e \mathbf{m} é um vetor contendo estimativas dos componentes de tensão, calculado pela Eq. (3.24).

$$\mathbf{m} = \frac{1}{p} \mathbf{S}^T \mathbf{1} \quad (3.24)$$

3.2.1 Estimativa da Máxima Variância do Histórico das Tensões Cisalhantes Resolvidas na Direção q

A variância de $\tau_q(t)$ pode ser obtida aplicando-se à Eq. (3.12) a técnica de linearização de Taylor (Deville e Sarndal, 1992; Wolter, 2007), cuja expressão geral é escrita conforme apresentado na Eq. (3.25) e o desenvolvimento teórico, para obtenção da expressão, se encontra no Apêndice A.

$$\text{Var}[g(\mathbf{X})] \cong \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g(\mathbf{X}^0) \right)^2 \text{Var}(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g(\mathbf{X}^0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g(\mathbf{X}^0) \right) \text{cov}[x_i^0, x_j^0] \quad (3.25)$$

onde $g(\mathbf{X})$ é uma função real definida no espaço Euclidiano N -dimensional com derivadas parciais contínuas de segunda ordem, $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ é um vetor aleatório de entrada N -dimensional, e $\mathbf{X}^0 = [x_1^0 \ \dots \ x_N^0]^T$ representa o vetor de médias.

Substituindo $g(\mathbf{X})$ pela Eq. (3.12) e considerando os termos da matriz de covariância $\boldsymbol{\mu}$ (estimada pela Eq. (3.23)), a variância de $\tau_q(t)$ é estimada pela Eq. (3.26). Considerando que a Eq. (3.13) é linear em relação as componentes de tensão e as distribuições das componentes de tensão são gaussianas, a solução é exata.

$$\text{Var}(\tau_q(t)) = \mu_{\tau_q} = \mathbf{d}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d} \quad (3.26)$$

Considerando a Eq. (3.26), é possível estimar a variância de $\tau_q(t)$ para qualquer tripla (θ, ϕ, α) . Assim, a determinação do plano de máxima variância pode ser obtida por meio de um processo sistemático de varredura dos ângulos de Euler. Além disso, dada a simetria do tensor de tensões, as tensões cisalhantes projetadas em planos ortogonais apresentam valores idênticos, o que significa que a variação dos ângulos de Euler é limitada ao intervalo $[0, 180^\circ)$. O pseudocódigo apresentado a seguir resume o algoritmo clássico para determinar a orientação do plano crítico, de acordo com o Método da Máxima Variância.

Entrada: História de tensões

Input: Stress history

Calcular: a matriz de covariância μ e a matriz de dados S

Compute covariance matrix μ

Compute data matrix S

Loop externo: loop ϕ (de 0° to 180° com incremento $\delta\phi$)

For ϕ from 0° to 180° with step $\delta\phi$:

Loop interno: loop θ (de 0° to 180° com incremento $\delta\theta$)

For θ from 0° to 180° with step $\delta\theta$:

Inicializar Máxima Variância

$Max_{var} = 0$

Loop mais interno: loop α (de 0° to 180° com incremento $\delta\alpha$)

For α from 0° to 180° with step $\delta\alpha$:

Calcular a variância de τ_q

Compute d (based on ϕ , θ , and α)

$Var(\tau_q) = d^T C d$

Verificar se $Var(\tau_q)$ é maior que Max_{var}

If $Var(\tau_q) > Max_{var}$:

$Max_{var} = Var(\tau_q)$

$\alpha_{max} = \alpha$

Após o loop α , registre os resultados para o ϕ e θ atuais

After α loop, record results for current ϕ and θ

Record Table [$P(\phi, \theta, \alpha_{max}, Max_{var})$]

No pseudocódigo apresentado, o símbolo # é utilizado para indicar comentários, de modo a explicar o código ou fornecer informações adicionais para quem o está lendo, e Max_{var} é a variável auxiliar usada para uma busca incremental da direção α em que a variância de $\tau_q(t)$ atinge o valor máximo no plano (θ, ϕ) . Adotando essa estratégia, o

tempo de processamento é significativamente reduzido em comparação ao processamento das dezenas de milhares de dados presentes nos históricos que representam os componentes de tensão. No entanto, tornou-se necessário introduzir o ângulo α para estimar o valor da variância máxima de τ_q atuando no plano Δ , o que aumenta consideravelmente o custo computacional – por exemplo, ao varrer cada um dos três ângulos no intervalo $[0, 180^\circ)$, com uma discretização de 1 grau, é necessário processar $5.83E6$ iterações para encontrar os planos candidatos.

Para melhorar a eficiência computacional do Método da Máxima Variância, as Referências (Susmel, 2010) e (Luo *et al.*, 2020) apresentaram um algoritmo que combina a metodologia de busca de plano crítico (que usa um refinamento muito grosseiro) com um método de otimização multivariada para avaliar a orientação do plano crítico, denominado Método Gradiente Ascendente.

O método de otimização utilizado por (Susmel, 2010), Método Gradiente Ascendente, em termos gerais, apresenta bons resultados e um tempo de convergência relativamente baixo (comparado ao método direto), desde que alguns parâmetros que controlam a convergência do método sejam apropriadamente selecionados. Mais recentemente, a Ref. (Luo *et al.*, 2020) introduziu o uso dos métodos de Newton e do Gradiente Conjugado para modificar o MVM, o que permitiu uma redução significativa no tempo de busca do plano crítico.

3.3 Análise de Fadiga sob Condições Multiaxiais

Este tópico aborda dois enfoques complementares: os projetos baseados em resistência, nos quais são discutidos modelos fundamentados no conceito de planos críticos e metodologias para estimar a amplitude da tensão cisalhante; e os projetos baseados em vida, que tratam da adaptação do método Rainflow e de modelos de acúmulo de dano para condições multiaxiais. O objetivo é detalhar essas abordagens, promovendo a integração criteriosa de métodos aplicados à análise de fadiga em condições de carregamento multiaxial.

3.3.1 Medidas de Amplitude da Tensão Cisalhante

A análise de fadiga multiaxial requer a determinação precisa da amplitude da tensão cisalhante, especialmente em condições em que os caminhos de tensão podem ser complexos e não proporcionais. Essa medida é essencial para prever a resposta de

materiais submetidos a carregamentos multiaxiais, pois controla os mecanismos de deslizamento nas interfaces cristalinas e, conseqüentemente, a nucleação e propagação de trincas de fadiga. As metodologias para calcular a amplitude da tensão cisalhante variam em complexidade e precisão, dependendo da natureza do carregamento e do comportamento do material. As metodologias para calcular a amplitude da tensão cisalhante são diversas e adaptadas às diferentes condições de carregamento. Neste tópico, são abordados alguns dos métodos amplamente utilizados para essa determinação, incluindo o Método da Maior Corda (LCM), métodos baseados em curvas convexas, como o Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC) e o Método da Maior Envoltória Retangular (MRH), além de abordagens mais recentes, como os Métodos de Momento de Inércia (MOI). A ênfase recai sobre suas formulações e aplicações práticas, sem pretensão de esgotar todas as alternativas disponíveis na literatura.

3.3.1.1 Método da Maior Corda (LCM)

Proposto por Lemaitre & Chaboche (Lemaitre e Chaboche, 1994), o Método da Maior Corda (LCM) define a amplitude da tensão cisalhante, $\tau_{n,a}$, como a metade do comprimento do maior segmento de linha que cruza a trajetória de tensão no plano material. Matematicamente, pode ser calculado através da Eq. (3.27).

$$\tau_{n,a} = \frac{1}{2} \text{Max}_{t^*} \left\{ \text{Max}_t |\tau(t) - \tau(t^*)| \right\} \quad (3.27)$$

onde t e t^* são dois instantes de tempo arbitrários.

A Fig. 3.4 apresentada ilustra o conceito fundamental do LCM. Os pontos representam o caminho descrito pela tensão cisalhante ao longo do tempo, enquanto as linhas azuis indicam o maior segmento (ou corda) entre dois pontos dessa trajetória. Esse maior segmento, uma vez identificado, é usado para calcular a amplitude da tensão cisalhante.

O método é reconhecido por sua simplicidade e facilidade de implementação, sendo particularmente eficiente em trajetórias proporcionais de tensão, nas quais o caminho é linear e a maior corda é facilmente identificada. No entanto, o LCM apresenta limitações importantes em condições de carregamento não proporcionais, pois não consegue capturar adequadamente a complexidade de trajetórias curvilíneas ou altamente não lineares. Além disso, esse método é computacionalmente caro, devido ao fato de que

o número de cordas, n_{cordas} a ser calculado é uma função quadrática do número de pontos do carregamento N . Essa relação pode ser expressa pela Eq. (3.28).

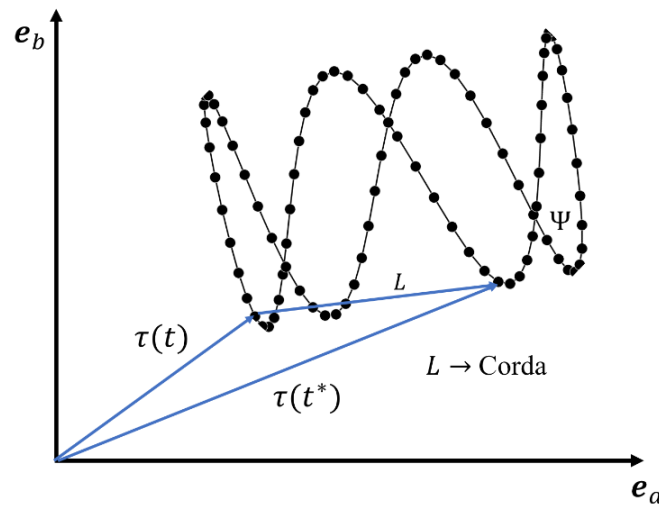


Figura 3.4 – Representação Esquemática do Método da Maior Corda (LCM) para Determinação da Amplitude da Tensão Cisalhante (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

$$n_{cordas} = \frac{1}{2}(n^2 - n) \quad (3.28)$$

Esse crescimento quadrático no número de cordas a serem avaliadas torna o método menos atrativo computacionalmente, especialmente quando aplicadas a trajetórias complexas e com alta densidade de pontos. Tais limitações reduzem a eficiência computacional do LCM e direcionam a escolha de métodos alternativos para condições de carregamento não proporcionais.

3.3.1.2 Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC)

O Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC), originalmente proposto por Dang Van (Dang Van, 1973), é amplamente descrito na literatura como uma abordagem geométrica para a determinação da amplitude da tensão cisalhante em análises de fadiga multiaxial. Conforme ilustrado na Fig. 3.5, o princípio fundamental do MCC é identificar a menor circunferência que engloba a trajetória descrita pela tensão cisalhante, $\tau(t)$, em um plano material, sendo o raio dessa circunferência, R , definido como a amplitude da tensão cisalhante resolvida, $\tau_{n,a}$.

Para localizar o menor círculo que circunscribe a trajetória, diferentes algoritmos foram propostos ao longo dos anos, com aplicações que variam em precisão e custo computacional. As principais estratégias incluem:

- Algoritmos de Combinação de Pontos (Weber *et al.*, 1999): Baseiam-se na análise de todas as combinações possíveis de pontos que podem definir a circunferência mínima. Apesar de precisos, são altamente custosos computacionalmente, tornando-se inviáveis para trajetórias densamente discretizadas.
- Algoritmos Aleatórios (De Berg, 2000; Bernasconi e Papadopoulos, 2005): Utilizam amostras aleatórias para estimar o menor círculo de maneira aproximada. Essa abordagem é menos precisa, mas pode ser útil para análises preliminares.
- Algoritmos Incrementais (Bernasconi e Papadopoulos, 2005; Papadopoulos, 1998): Considerados os mais eficientes e amplamente aceitos, os algoritmos incrementais foram inicialmente desenvolvidos por Dang Van e posteriormente refinados por Papadopoulos. Eles permitem determinar tanto a amplitude quanto o vetor médio da tensão cisalhante de forma iterativa e otimizada.

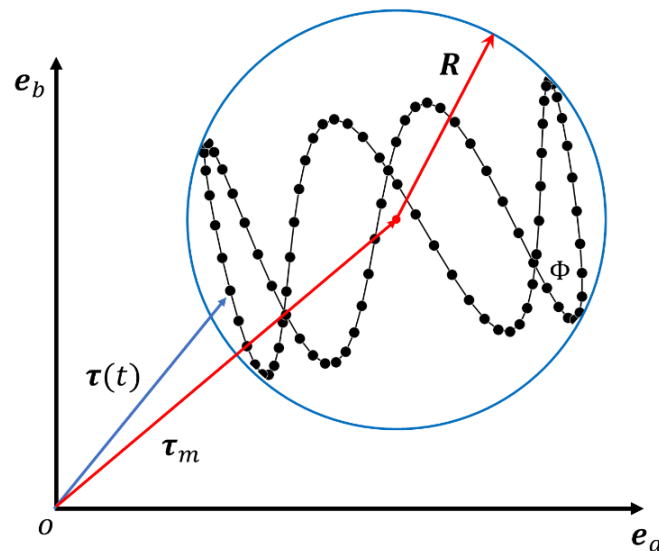


Figura 3.5 – Representação Esquemática do Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC) para Determinação da Amplitude da Tensão Cisalhante (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

A formulação matemática do MCC é comumente associada ao algoritmo incremental devido à sua eficiência e precisão. Primeiramente, o método localiza o centro, τ^* , da circunferência mínima circunscrita, resolvendo o problema de min-max apresentado na Eq. (3.29).

$$\tau_m = \text{Min}_{\tau^*} \left\{ \max_t \|\tau(t) - \tau^*\| \right\} \quad (3.29)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_m$ é o vetor médio que aponta do centro da circunferência até o ponto de origem. Após a determinação do centro, o raio R , que corresponde à amplitude da tensão cisalhante, é obtido por meio da Eq. (3.30).

$$\tau_{n,a} = \text{Max}_t |\boldsymbol{\tau}(t) - \boldsymbol{\tau}_m| \quad (3.30)$$

Apesar de sua relevância histórica, o Método da Menor Circunferência Circunscrita apresenta limitações significativas que comprometem sua aplicação em condições de carregamento não proporcional. Sua abordagem geométrica simplificada, baseada na circunscrição da trajetória de tensão cisalhante, desconsidera aspectos importantes da evolução da trajetória, como variações de fase e a complexidade geométrica de caminhos não lineares. Além disso, a implementação numérica do MCC é desafiadora, pois a identificação do menor círculo circunscrito requer a solução de um problema de otimização min-max. Esse processo, embora eficiente em trajetórias simples, torna-se computacionalmente oneroso em trajetórias densamente discretizadas ou altamente irregulares. Essas deficiências, somadas à incapacidade de incorporar explicitamente os efeitos da não proporcionalidade no comportamento em fadiga, limitam sua aplicabilidade a cenários idealizados ou moderadamente proporcionais. Conseqüentemente, o MCC tem sido progressivamente substituído em análises mais modernas que demandam maior precisão e eficiência.

3.3.1.3 Método da Elipse Mínima (MEM)

O Método da Menor Elipse Circunscrita (MEM), proposto por Bin Li *et al.* (De Freitas, Li, e Santos, 2000), foi desenvolvido como uma evolução do Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC). Enquanto o MCC utiliza um círculo para englobar a trajetória da tensão cisalhante $\tau(t)$, assumindo simetria em todas as direções no plano material, ele apresenta limitações em trajetórias não proporcionais, onde a direção da tensão varia ao longo do ciclo, resultando em descrições menos precisas.

O MEM surge como uma solução para casos mais complexos, oferecendo uma abordagem que ajusta uma elipse à trajetória da tensão cisalhante. Isso permite capturar nuances geométricas que o círculo não consegue representar, sendo particularmente eficaz em carregamentos fora de fase. Na Fig. 3.6, é possível observar a construção da elipse em relação à trajetória da tensão cisalhante, bem como as bases associadas. A base original (e_a, e_b) descreve o plano material, enquanto as direções principais da elipse $(e_{a'}, e_{b'})$ são rotacionadas para se alinhar aos semieixos maior R_a e menor R_b .

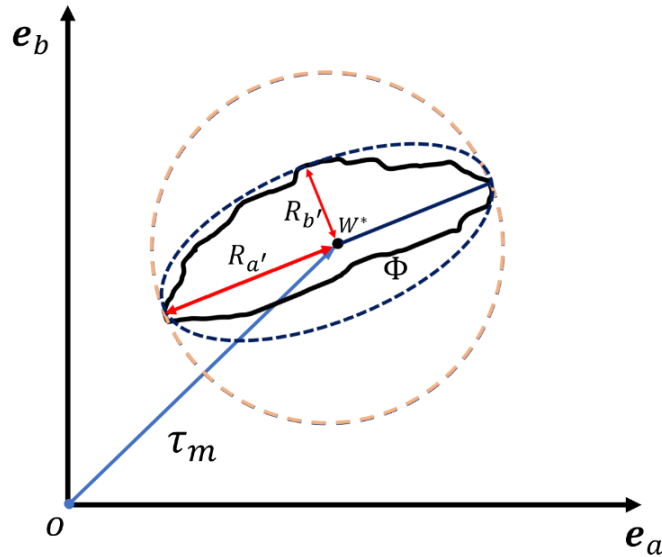


Figura 3.6 – Representação comparativa entre o MCC e o MEM na determinação da amplitude de tensões cisalhantes.

Diferentemente do MCC, que considera apenas $R_{a'}$ para determinar a amplitude efetiva, o MEM utiliza tanto $R_{a'}$ quanto $R_{b'}$ no cálculo de uma tensão equivalente, combinando suas contribuições. Assim, a forma generalizada da tensão equivalente pode ser expressa conforme apresentado na Eq. (3.31).

$$\tau_{n,a} = \sqrt{(R_{a'})^2 + (R_{b'})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta\tau_{e_{a'}})^2 + (\Delta\tau_{e_{b'}})^2} \quad (3.31)$$

Estratégias para Identificação da Menor Elipse Circunscrita

A implementação do Método da Menor Elipse Circunscrita (MEM) exige estratégias eficientes para determinar os semieixos $R_{a'}$ e $R_{b'}$, que descrevem as dimensões principais da elipse circunscrita à trajetória da tensão cisalhante $\tau(t)$. O processo consiste em identificar $R_{a'}$, correspondente ao semieixo maior, e $R_{b'}$, associado ao semieixo menor, garantindo que ambos contenham toda a trajetória projetada no plano material.

Inicialmente, $R_{a'}$ é determinado como o maior raio de uma circunferência que englobe completamente a trajetória $\tau(t)$. Esse passo estabelece um limite superior para o ajuste da elipse. Em seguida, $R_{b'}$ é calculado como o menor semieixo que circunscribe a trajetória, respeitando a condição $R_{b'} \leq R_{a'}$. Ambos os valores são ajustados iterativamente até que a elipse esteja otimizada.

Correções propostas por Zouain e colaboradores (Zouain, Mamiya, e Comes, 2006) introduziram melhorias significativas ao método original, garantindo que $R_{a'}$ e $R_{b'}$

sejam determinados com precisão, mesmo em trajetórias não proporcionais ou sobrepostas. Essas correções empregam critérios geométricos rigorosos, como a minimização da norma de Frobenius, que oferece maior consistência na definição dos valores de $R_{a'}$ e $R_{b'}$.

O Método da Menor Elipse Circunscrita (MEM) destaca-se por sua capacidade de lidar com trajetórias de tensão não proporcionais de forma precisa, superando as limitações do Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC). A abordagem baseada na elipse permite capturar as contribuições conjuntas das amplitudes de tensão orientadas segundo $e_{a'}$ e $e_{b'}$, proporcionando uma descrição mais detalhada da amplitude equivalente em trajetórias complexas. Essa formulação geométrica oferece flexibilidade para aplicações numéricas e experimentais, sendo uma ferramenta valiosa em análises de fadiga multiaxial. No entanto, o MEM apresenta como principal limitação o elevado custo computacional associado à identificação precisa dessas amplitudes, particularmente em trajetórias densamente discretizadas ou em modelos com alta complexidade geométrica. Esse desafio pode limitar sua aplicação prática em contextos que demandam grande eficiência computacional, especialmente quando comparado a métodos mais simples, como o MCC.

3.3.1.4 Método da Maior Envoltória Retangular (MRH)

O Método da Maior Envoltória Retangular (MRH), proposto por Araújo *et al.*, (2011), apresenta-se como uma abordagem alternativa e complementar ao Método da Elipse Mínima (MEM) para a análise de tensões cisalhantes em condições de carregamento multiaxial. Enquanto o MEM utiliza uma elipse para capturar de forma precisa as características geométricas de trajetórias complexas, o MRH adota a construção de uma envoltória retangular circunscrita à trajetória da tensão cisalhante no plano material. Essa escolha geométrica favorece a simplicidade e a eficiência computacional, mantendo uma boa representatividade das amplitudes equivalentes em trajetórias proporcionais e não proporcionais.

O Método utiliza as componentes da tensão cisalhante $\tau_{e_a}(t)$ e $\tau_{e_b}(t)$ ao longo das direções e_a e e_b no plano material. Para identificar a maior envoltória retangular, essas direções principais são rotacionadas por um ângulo α , definido em relação a direção e_a . A Fig. 3.7, ilustra a trajetória da tensão cisalhante no plano material e mostra como as projeções ao longo das direções rotacionadas $e_{a'}$ e $e_{b'}$ são usadas para construir a maior

envoltória retangular. Essas projeções, que variam com α , formam os lados do retângulo circunscrito.

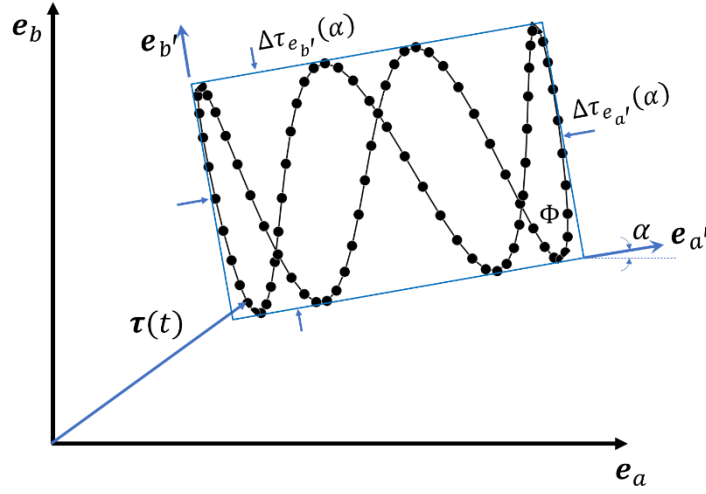


Figura 3.7 – Representação gráfica do Método da Maior Envoltória Retangular (MRH) (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

As projeções ao longo das novas direções $e_{a'}$ e $e_{b'}$ são descritas pelas expressões (3.32) e (3.33), respectivamente.

$$\tau_{e_{a'}} = \cos(\alpha)\tau_{e_a}(t) + \text{sen}(\alpha)\tau_{e_b}(t) \quad (3.32)$$

$$\tau_{e_{b'}} = -\text{sen}(\alpha)\tau_{e_a}(t) + \cos(\alpha)\tau_{e_b}(t) \quad (3.33)$$

Essas projeções permitem calcular as máximas e mínimas de $\tau_{e_{a'}}$ e $\tau_{e_{b'}}$, que correspondem aos lados do retângulo circunscrito. A amplitude equivalente da tensão cisalhante é então determinada através da expressão (3.34).

$$\tau_{n,a}(\alpha) = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\max_t (\tau_{e_{a'}}(\alpha, t)) - \min_t (\tau_{e_{a'}}(\alpha, t)) \right]^2 + \left[\max_t (\tau_{e_{b'}}(\alpha, t)) - \min_t (\tau_{e_{b'}}(\alpha, t)) \right]^2} \quad (3.34)$$

A amplitude máxima da tensão de cisalhamento resolvida atuando no plano (θ, ϕ) é estimada como o valor máximo de $\tau_{n,a}(\alpha)$, dentro do intervalo $0 \leq \alpha < 90^\circ$.

De maneira geral, o MRH caracteriza-se por sua simplicidade e eficiência computacional, permitindo análises rápidas e confiáveis de trajetórias de carregamento não proporcionais. Sua abordagem, que utiliza uma envoltória retangular para descrever a trajetória de tensões cisalhantes, oferece uma alternativa prática ao Método da Menor Elipse Circunscrita (MEM), com potencial para representar trajetórias complexas de forma eficiente em análises experimentais e numéricas. Apesar de sua eficiência superior em comparação ao MEM, o MRH ainda exige a varredura do parâmetro α para identificar a orientação crítica que maximiza $\tau_{n,a}$. Esse processo pode representar uma limitação

computacional em trajetórias densamente discretizadas. No entanto, o custo computacional do MRH permanece significativamente mais baixo do que o do MEM, tornando-o uma alternativa prática em situações em que eficiência computacional é um fator crítico. Ainda assim, a precisão do método depende diretamente da qualidade da representação da trajetória de tensão cisalhante, sendo sensível a dados incompletos ou simplificados.

3.3.1.5 Método de Socie (SOC)

Esta metodologia foi introduzida por Darrell Socie no site eFatigue (Socie, 2023) e busca avaliar a amplitude das tensões cisalhantes críticas em planos materiais inclinados, particularmente aqueles a 45° ou 90° da superfície livre. Esses planos são relevantes porque acumulam os danos cíclicos que frequentemente levam à iniciação de trincas por fadiga, como ilustrado na Fig. 3.8. Nessa figura, representa-se uma condição de flexo-torção em um componente estrutural, mostrando o elemento de tensão localizado na superfície livre. Nesse contexto, o estado de tensão é plano, tendo como componentes ativas σ_{xx} , τ_{xy} , e τ_{yx} , enquanto todas as componentes de tensão no plano z (perpendicular à superfície livre) são nulas.

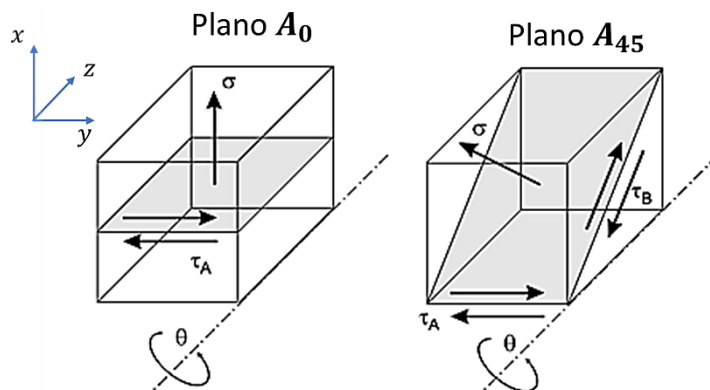


Figura 3.8 – Representação das Condições de Tensão no Plano Normal, A_0 , e no Plano Inclinado a 45° , A_{45} , em um Elemento de Tensão na Superfície Livre sob Condições de Flexo-Torção (Adaptado de Socie, 2023).

O plano A_0 , mostrado à esquerda na Fig. 3.8, é o plano normal à superfície livre, onde o estado de tensão é caracterizado pela presença da tensão normal σ e da tensão de cisalhamento τ_A . Por outro lado, o plano A_{45} , mostrado à direita, é inclinado a 45° em relação à superfície livre e apresenta tanto a tensão de cisalhamento no plano τ_A quanto a tensão de cisalhamento fora do plano τ_B .

A caracterização do comportamento da tensão normal σ é relativamente simples, já que sua direção é fixa e alinhada com o plano de análise, embora sua magnitude possa variar dependendo das condições de carregamento. Por outro lado, a tensão de cisalhamento apresenta maior complexidade, especialmente no plano A_{45} , onde ela pode variar tanto em magnitude quanto em direção, devido à interação entre as componentes no plano (τ_A) e fora do plano (τ_B). Assim, o estudo das condições de falha no plano A_{45} é essencial na abordagem proposta por Socie, pois é nesse plano que as tensões cisalhantes τ_A e τ_B podem atingir níveis críticos, favorecendo a iniciação de trincas por fadiga. A análise dessas componentes permite compreender como a interação entre elas afeta o comportamento do material sob carregamentos cíclicos, consolidando o plano A_{45} como elemento central da metodologia.

Com base na condição apresentada no plano A_{45} , o Socie propõe avaliar separadamente as duas componentes cisalhantes τ_A e τ_B , partindo da premissa de que, em um dado grão do material, apenas um dos sistemas de deslizamento será ativado de maneira predominante. Essa abordagem simplificada reflete o comportamento físico do material e facilita a análise das tensões críticas.

A amplitude máxima da tensão cisalhante resolvida pode ser determinada como o maior valor entre as variações de τ_A e τ_B durante o ciclo de carregamento, conforme descrito pela Eq. (3.35).

$$\tau_{n,a} = \frac{1}{2} \text{Max}(\Delta\tau_{e_a}, \Delta\tau_{e_b}) \quad (3.35)$$

onde as componentes $\tau_{e,a}$ e $\tau_{e,b}$ podem ser determinadas através da aplicação das Eqs. (3.36) e (3.37), respectivamente.

$$\tau_{e,a} = \text{Max}_t[\tau_{e_a}(t)] - \text{Min}_t[\tau_{e_a}(t)] \quad (3.36)$$

$$\tau_{e,b} = \text{Max}_t[\tau_{e_b}(t)] - \text{Min}_t[\tau_{e_b}(t)] \quad (3.37)$$

A Fig. 3.9 apresenta a trajetória das tensões cisalhantes τ_{e_a} e τ_{e_b} , destacando as amplitudes máximas e mínimas que formam os limites da envoltória. Essas informações são utilizadas para calcular a maior amplitude resolvida da tensão cisalhante, $\tau_{n,a}$, um elemento central para a avaliação do comportamento à fadiga.

Apesar de se tratar de um método eficiente computacionalmente, o cálculo de $\tau_{n,a}$, utilizando a Eq. (3.35) não considera o efeito da não-proporcionalidade no comportamento à fadiga do material. Dessa forma, uma alternativa para superar essa

limitação é utilizar a Eq. (3.38), conhecida como Socie Modificado (SOC-M), a fim de capturar o efeito da não proporcionalidade e aumentar a precisão dos resultados obtidos das previsões de resistência à fadiga.

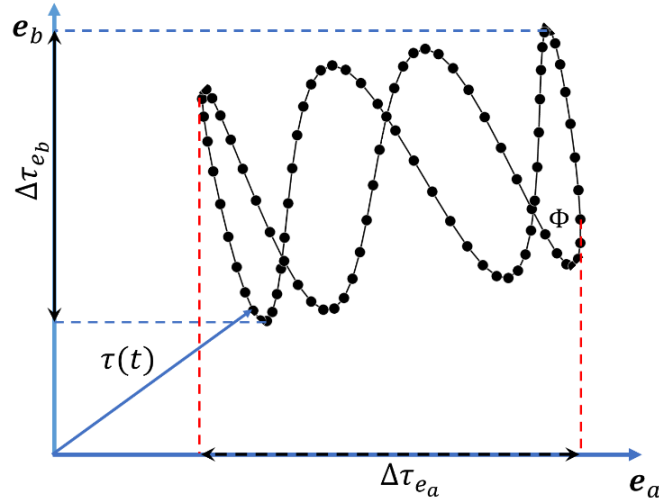


Figura 3.9 – Representação gráfica das trajetórias das tensões cisalhantes τ_{e_a} e τ_{e_b} , indicando as variações máximas e mínimas utilizadas no cálculo da tensão cisalhante resolvida, $\tau_{n,a}$ (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

$$\tau_{n,a} = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta\tau_{e_a})^2 + (\Delta\tau_{e_b})^2} \quad (3.38)$$

3.3.1.6 Método do Momento de Inércia (MOI)

O conceito inicial do Método do Momento de Inércia no campo da análise de fadiga multiaxial se deu através do trabalho de Chu *et al.*, (1996). A partir de então, tem-se o seu desenvolvimento através das pesquisas de Bishop (2003), com a introdução da primeira medida baseada em inércia para avaliar a não proporcionalidade nas trajetórias de tensões locais. Os métodos que têm por base a inércia distinguem-se dos demais pela sua abordagem para avaliar o Momento de Inércia (MOI). O método proposto por Bishop considera o cálculo do MOI em relação ao centroide do perímetro da trajetória de tensões (PC). Ao tratar de dados discretos, a avaliação é realizada através de uma soma ponderada, em que o comprimento de cada segmento serve como fator de ponderação.

Outra metodologia que calcula o MOI, porém difere significativamente daquela proposta por Bishop é a proposta por Gaier *et al.*, (2004). Em seu método, o autor calcula o MOI em relação à origem, não empregando o comprimento do segmento como fator de ponderação. Trata-se de uma estratégia adequada para trajetórias de tensões

caracterizadas por estados de tensão uniformemente espaçados no tempo, uma vez que o método atribui, para cada estado de tensão, um mesmo valor de massa.

Uma limitação comum ao método é a possibilidade de resultados inconsistentes ao lidar com trajetórias não proporcionais. Para corrigir isso, Meggiolaro & Castro (Meggiolaro & Castro, 2015; Meggiolaro & De Castro, 2012) propuseram uma estratégia baseada na avaliação de intervalos equivalentes de tensão e deformação. Essa abordagem considera que a trajetória de tensões pode ser representada como um fio homogêneo de massa unitária. O centro de massa (centroide) do fio define a tensão média da trajetória, localizada no ponto $(\tau_{m_{e_a}}, \tau_{m_{e_b}})$, cujas coordenadas correspondem aos valores médios das tensões nas direções e_a e e_b . A amplitude crítica de tensão cisalhante, τ_a , é então determinada pelo momento de inércia da trajetória em relação ao centroide. A Fig. 3.10 ilustra essa abordagem, mostrando a trajetória de tensões Ψ no plano material, o cálculo do centroide $(\tau_{m_{e_a}}, \tau_{m_{e_b}})$ e os componentes que contribuem para o cálculo do MOI, como o vetor r e o segmento d .

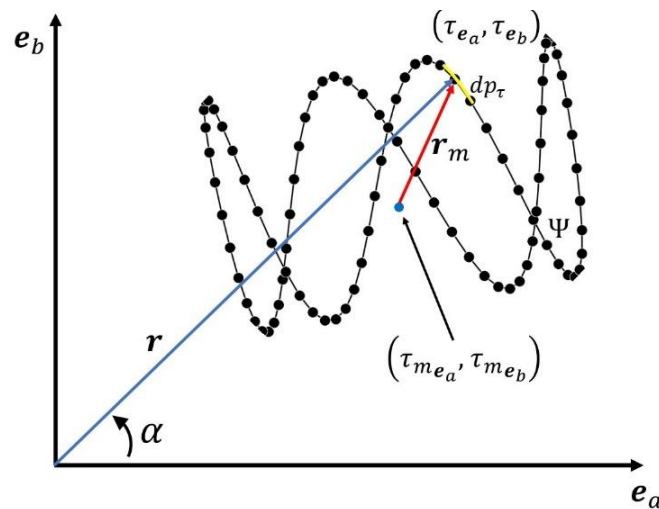


Figura 3.10 – Representação da trajetória de tensões, centroide e momento de inércia no plano material (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

3.4 Acúmulo de Dano em Condições Multiaxiais

O estudo do acúmulo de dano em condições multiaxiais é fundamental para compreender o comportamento de materiais submetidos a estados de tensão complexos. Nessas situações, as tensões normais e de cisalhamento interagem, formando históricos de carga não triviais que demandam metodologias específicas para análise. Uma abordagem amplamente utilizada é a transformação do carregamento multiaxial em uma

condição equivalente uniaxial, o que permite a aplicação de modelos tradicionais, como a regra de Miner, de maneira adaptada.

Uma das estratégias mais comuns nesse contexto é o uso do conceito de plano crítico, que identifica o plano material onde a combinação de tensões normal $\sigma_n(t)$ e de cisalhamento $\tau(t)$ causa o maior dano. Dessa forma, é possível reduzir o histórico multiaxial a essas duas histórias, facilitando a aplicação de técnicas como a contagem de ciclos *rainflow*. Esses ciclos são identificados com base nas amplitudes de tensão, permitindo associar cada ciclo ao número de falhas correspondente N_f por meio de modelos de fadiga multiaxial. Assim, o dano acumulado é então calculado com base na soma linear dos danos individuais, como mostra a Eq. (3.39).

$$D = \sum \frac{n_i}{N_f} \quad (3.39)$$

onde n_i é o número de ciclos aplicados para uma determinada amplitude de tensão, e N_f é o número de ciclos até a falha correspondente a essa condição. Nos modelos baseados no conceito de plano crítico, N_f pode ser definido como uma função de diferentes parâmetros extraídos das histórias de tensão. Esses parâmetros podem estar relacionados às amplitudes de tensão cisalhante resolvida $\tau_{n,a}$, às amplitudes da tensão normal σ_a ou ainda a uma combinação de ambos, como $\tau_{n,a}$, σ_a e a máxima tensão normal $\sigma_{n,max}$.

Segundo Socie (Socie e Marquis, 1999), a escolha da função para estimativa de N_f está intrinsecamente relacionada aos critérios de falha que governam o comportamento do material em condições multiaxiais. Nos modelos de plano crítico, esses critérios refletem como o material responde às combinações de tensões normais e cisalhantes, sendo definidos com base no modo de falha predominante. Materiais dúcteis, que frequentemente falham por mecanismos de cisalhamento, têm seu comportamento mais bem descrito por funções que priorizam parâmetros como as amplitudes de tensão cisalhante, $\tau_{n,a}$. Por outro lado, em materiais frágeis, onde tensões normais governam o processo de falha, as amplitudes de tensão normal, σ_a , tornam-se mais relevantes.

Esses critérios também incorporam propriedades intrínsecas do material, como resistência ao cisalhamento, limite de escoamento e comportamento anisotrópico, que influenciam diretamente como o dano se acumula e se propaga. Além disso, a microestrutura do material pode desempenhar um papel crítico. Por exemplo, materiais policristalinos frequentemente requerem funções que combinem múltiplos parâmetros,

incluindo $\tau_{n,a}$, σ_a e a tensão normal máxima, $\sigma_{n,max}$, para descrever com maior precisão o comportamento em fadiga.

Embora as histórias de carregamento sejam um fator importante na análise, especialmente em condições de amplitude variável ou carregamentos não proporcionais, é fundamental que a função para N_f seja escolhida considerando as características do material e o modo de falha esperado. Em carregamentos não proporcionais, onde as direções das tensões mudam continuamente, a sensibilidade do material a essas condições pode determinar a adequação de um critério. Materiais com baixa sensibilidade ao cisalhamento não proporcional, por exemplo, respondem de forma significativamente diferente daqueles que apresentam danos acentuados sob essas condições.

Portanto, a definição da função para N_f em condições multiaxiais exige uma análise detalhada tanto do comportamento do material quanto do carregamento aplicado. Essa abordagem permite não apenas estimar com precisão a vida em fadiga, mas também desenvolver critérios de projeto que atendam de forma otimizada às exigências de cada aplicação específica.

3.5 Identificação e contagem de ciclos em condições multiaxiais

A análise de fadiga em condições multiaxiais exige técnicas adequadas para identificar e contabilizar ciclos de carregamento relevantes, especialmente em cenários de amplitude variável. O presente trabalho parte de uma abordagem específica para simplificar a análise multiaxial, baseando-se no conceito de plano crítico e no uso de técnicas clássicas de contagem de ciclos uniaxiais, o que permite que o problema multiaxial seja tratado de forma mais prática e eficiente, mesmo em carregamentos complexos.

Uma vez definidas as histórias de tensão cisalhante resolvida $\tau(t)$ e de tensão normal $\sigma(t)$ em um plano de interesse, a contagem de ciclos é realizada utilizando técnicas adaptadas para condições multiaxiais, descrito em (Susmel *et al.*, 2009). O método descrito no trabalho emprega o algoritmo *rainflow*, amplamente reconhecido em análises de fadiga, para identificar ciclos significativos de carregamento a partir do histórico dessas tensões.

Os ciclos são determinados com base nos picos e vales dos sinais resolvidos, que representam variações de carregamento ao longo do tempo. Para cada ciclo identificado, são calculadas as amplitudes de $\tau(t)$ e $\sigma(t)$, que servem como parâmetros principais para

a avaliação do dano. Em situações em que há carregamentos não proporcionais, em que as direções das tensões variam dinamicamente, o processo requer atenção especial. Nessas condições, é possível que ciclos de cisalhamento sejam sobrepostos ou associados a diferentes ciclos de tensão normal, exigindo estratégias específicas para correlacionar esses eventos.

A metodologia também considera a influência das tensões médias, que podem alterar a magnitude do dano acumulado em cada ciclo. Para lidar com essas situações, cada ciclo de $\tau(t)$ é analisado em conjunto com a tensão normal média correspondente, garantindo que os efeitos combinados sejam devidamente contabilizados. Após a identificação e caracterização dos ciclos, o dano é calculado utilizando uma regra de acúmulo (por exemplo a adaptação da regra de Miner), que integra todas as contribuições individuais em um único valor representativo do dano total.

3.6 Critérios de falha multiaxial baseados no conceito de plano crítico

O comportamento de materiais submetidos a carregamentos multiaxiais é regido por interações complexas entre tensões normais e cisalhantes, que atuam simultaneamente em diferentes planos dentro do material. Para prever com precisão a resistência e a vida útil em fadiga, diversos critérios de falha foram desenvolvidos com base no conceito de plano crítico. Esses critérios buscam identificar o plano material onde os efeitos combinados das tensões são mais prejudiciais, permitindo estimar tanto a resistência ao carregamento aplicado quanto o número de ciclos até a falha, N_f .

A análise desses critérios naturalmente expande os conceitos já discutidos sobre a relação entre tensões atuantes, mecanismos de falha e os planos mais críticos dentro do material. Assim, o plano crítico é identificado como aquele onde a interação entre tensões normais e cisalhantes atinge condições mais severas, controlando o processo de falha. A determinação desse plano requer a projeção das tensões multiaxiais sobre diferentes orientações, avaliando parâmetros como a tensão cisalhante máxima e a tensão normal associada para identificar a orientação mais crítica.

Critérios baseados no conceito de plano crítico demonstram sua eficácia ao capturar os mecanismos de falha em condições multiaxiais complexas. Esses critérios são amplamente utilizados tanto em carregamentos proporcionais, onde as direções das tensões principais permanecem constantes, quanto em carregamentos não proporcionais, caracterizados por variações dinâmicas nas direções das tensões. Essa flexibilidade

permite descrever com precisão falhas associadas a diferentes modos de comportamento material, desde tensões normais elevadas em materiais frágeis até tensões cisalhantes predominantes em materiais dúcteis.

Nos tópicos seguintes, serão explorados os critérios de Findley e de Susmel e Lazzarin, que exemplificam como o conceito de plano crítico é implementado para abordar cenários distintos de carregamento multiaxial, destacando suas formulações, aplicações e limitações.

3.6.1 Critério de Findley

Dentre os primeiros modelos de fadiga baseados no conceito de plano crítico, o critério proposto por Findley (Findley, 1959; Socie e Marquis, 1999) permanece amplamente aceito pela comunidade científica e é amplamente utilizado na indústria. Nesse modelo, o plano crítico é definido como aquele onde a combinação entre a amplitude da tensão cisalhante τ_a e a tensão normal máxima $\sigma_{n,max}$ é mais severa, considerando todos os planos materiais possíveis. Findley demonstrou que a seguinte relação linear, apresentada na Eq. (3.40) é capaz de fornecer uma boa correlação entre os resultados experimentais e as previsões obtidas.

$$\min_{\theta, \phi} \{ \tau_a + \kappa \sigma_{n,max} \} = \lambda \quad (3.40)$$

onde κ e λ são parâmetros materiais a serem determinados. A identificação desses parâmetros, a partir dos limites de fadiga em flexão (ou tração-compressão) alternada, σ_{-1} , e torção alternada, τ_{-1} , é dada pelas seguintes relações apresentadas na Eq. (3.41).

$$\kappa = \frac{1-0,5r}{\sqrt{r-1}}, \lambda = \frac{\sigma_{-1}}{2\sqrt{r-1}}, r = \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} \quad (3.41)$$

3.6.2 Método de Susmel e Lazzarin

O Método de Susmel e Lazzarin, também conhecido como Método da Curva de Wöhler Modificada (MWCM), introduzido por Susmel e Lazzarin em 2002, foi idealizado como uma abordagem robusta para prever a vida em fadiga de componentes estruturais submetidos a condições multiaxiais. Esse método destaca-se por lidar diretamente com o impacto combinado de tensões normais, cisalhantes e médias, integrando esses efeitos em uma formulação que abrange estados proporcionais e não proporcionais de carregamento. O método surgiu em resposta às limitações de critérios clássicos da fadiga multiaxial, como os de Papadopoulos (Papadopoulos, 1995)

(McDiarmid, 1991) e Dang Van (Dang-Van, 1993), que, embora eficazes em contextos específicos, apresentavam dificuldades em capturar trajetórias de tensões fora de fase ou a interação de tensões médias com amplitudes de tensão.

A ideia central do MWCM reside na premissa de que o processo de iniciação de trincas em fadiga é dominado pelo Modo II (cisalhamento), independentemente da concentração de tensões ou do grau de multiaxialidade do campo de tensões na zona de dano. O método assume que o dano por fadiga depende de dois parâmetros principais no plano crítico: a amplitude da tensão cisalhante, τ_a , e a tensão normal máxima, $\sigma_{n,max}$. O parâmetro ρ , definido pela relação apresentada na Eq. (3.42), representa a relação entre essas tensões e é utilizado para interpolar entre os regimes de carregamento axial ($\rho = 1$) e torcional ($\rho = 0$).

$$\rho = \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a} \quad (3.42)$$

A Fig. 3.11 ilustra de forma detalhada a formulação do MWCM. No gráfico log-log, a ordenada representa a amplitude de tensão cisalhante, enquanto a abcissa indica o número de ciclos até a falha. A linha azul corresponde ao regime de carregamento axial puro, em condições de tensão média igual a zero ($R = -1$). Nesse caso $\rho = 1$ indicando a predominância das tensões normais no plano crítico. Esse regime é descrito pelos parâmetros A_σ e b_σ , que definem a resistência do material em fadiga sob carregamento axial completamente reverso. Por outro lado, a linha vermelha descreve o comportamento em fadiga sob condições de torção pura, onde $\rho = 0$, caracterizando a predominância das tensões cisalhantes. Este regime é governado pelos parâmetros A_τ e b_τ , representando a resistência do material sob torção alternada. Já a linha verde tracejada representa a curva interpolada para valores intermediários de ρ , que corresponde a uma condição geral de carregamento multiaxial. Essa interpolação é essencial para modelar situações em que tensões normais e cisalhantes coexistem, como em componentes submetidos a carregamentos fora de fase ou não proporcionais. O MWCM utiliza as Eqs. (3.43) e (3.44) de interpolação para determinar os parâmetros A_ρ e b_ρ que caracterizam a curva interpolada.

$$A_\rho = [A_\sigma - A_\tau] (1 - \rho) + A_\tau \quad (3.43)$$

$$b_\rho = [b_\sigma - b_\tau] (1 - \rho) + b_\tau \quad (3.44)$$

Essas expressões permitem construir uma curva $S - N$ para qualquer valor de ρ , ajustando os limites de fadiga para condições multiaxiais genéricas. A Fig. 3.11, ao

ilustrar graficamente esses regimes de carregamento, destaca a versatilidade e precisão do MWCM na integração de dados experimentais de fadiga axial e torcional para prever a vida útil de componentes submetidos a carregamentos multiaxiais.

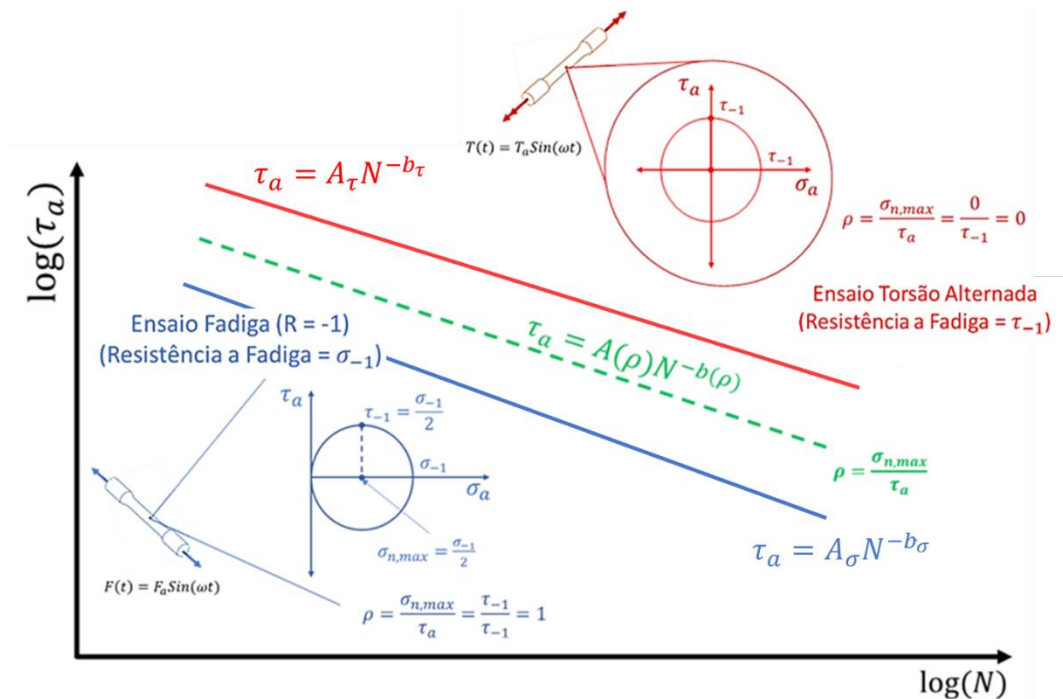


Figura 3.11 – Diagrama de Wöhler modificado para definição da curva S-N de referência para um carregamento multiaxial genérico (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022)

O MWCM oferece duas abordagens distintas para aplicação em condições de projeto: baseado em resistência e baseado em vida, dependendo das demandas do componente e do cenário de carregamento. No projeto baseado em resistência, verifica-se se o componente pode suportar carregamentos multiaxiais específicos sem falha, utilizando os limites de resistência do material. Já no projeto baseado em vida, o foco é estimar o número de ciclos até a falha N_f para uma amplitude de tensão específica, utilizando a curva interpolada $\tau_a - N$. Essas abordagens serão detalhadas a seguir, com o desenvolvimento das equações aplicáveis a cada condição.

Projeto Baseados em Resistência

Conforme discutido anteriormente, em projetos baseados em resistência, o objetivo é garantir que o componente seja capaz de suportar carregamentos multiaxiais específicos sem falha, assegurando sua integridade em condições de vida infinita N_∞ . Essa abordagem é amplamente utilizada em situações em que a segurança estrutural é prioritária e onde a falha por fadiga é inaceitável ao longo da vida útil prevista.

A análise no MWCM para essas condições considera os limites de resistência do material em carregamentos uniaxiais: o limite de resistência em tração ($f_{-1} = \sigma_{-1}$) e o limite de resistência em torção ($t_{-1} = \tau_{-1}$). Esses valores são utilizados para verificar se a amplitude de tensão cisalhante τ_a e a tensão normal máxima $\sigma_{n,max}$ no plano qualquer excedem a capacidade do material.

$$\tau_a + \kappa\rho \geq \lambda \quad (3.45)$$

onde κ e λ são parâmetros materiais definidos como:

$$\kappa = t_{-1} - \frac{f_{-1}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda = t_{-1} \quad (3.46)$$

Essa equação permite verificar diretamente se o componente é resistente a falhas sob condições de carregamento multiaxial. Para que o componente seja considerado seguro, a inequação deve ser satisfeita. Além disso, a interpolação linear entre os limites de resistência em tração σ_{-1} e torção τ_{-1} permite calcular a resistência à fadiga para qualquer valor intermediário de ρ através da Eq. (3.47).

$$\tau_a(\rho) = t_{-1} + (f_{-1} - t_{-1}) \cdot \rho \quad (3.47)$$

A Eq. (3.47) fornece uma solução prática para estimar a resistência a fadiga sob condições multiaxiais em condições genéricas de carregamento.

Projeto Baseados em Vida

Em projetos baseados em vida, o objetivo é estimar o número de ciclos até a falha, N_f , de um componente submetido a uma amplitude de tensão específica, τ_a . Essa abordagem é essencial em situações em que o componente será submetido a carregamentos cíclicos que resultam em uma vida útil finita, como em componentes rotativos, aeronáuticos ou sujeitos a vibrações.

Para uma condição de tensões τ_a e $\sigma_{n,max}$, a vida em fadiga pode ser estimada considerando o método MWCM, a relação entre a amplitude de tensão cisalhante τ_a e o número de ciclos até a falha N_f é descrita pela curva $\tau_a - N_f - \rho$. Essa curva depende diretamente do parâmetro ρ . A relação entre τ_a , N_f , e ρ é descrita pela Eq. (3.48).

$$\tau_a(\rho, N_f) = A_\rho N_f^{b_\rho} \quad (3.48)$$

onde A_ρ e b_ρ são parâmetros interpolados linearmente a partir das curvas de resistência à fadiga para tração pura ($\rho = 1$) e torção pura ($\rho = 0$) e que podem ser obtidos através das Eqs. (3.43) e (3.44), apresentadas anteriormente.

Assim, para uma condição específica de carregamento, ρ é calculado como a razão entre $\sigma_{n,max}$ e τ_a , representando a interação entre a tensão normal máxima e a amplitude de tensão cisalhante no plano crítico. Com ρ definido, a curva $\tau_a - N_f - \rho$ pode ser utilizada para determinar o número de ciclos até a falha N_f , de acordo com a Eq. (3.49).

$$N_f = \left(\frac{A\rho}{\tau_a}\right)^{\left(\frac{1}{b\rho}\right)} \quad (3.49)$$

CAPÍTULO 4 – Desenvolvimento e Validação do Método Rápido de Máxima Variância

Este capítulo apresenta o desenvolvimento e a validação do Método Rápido de Máxima Variância (FMVM), proposto como uma abordagem eficiente para identificar planos críticos em análises de fadiga multiaxial. O método busca reduzir significativamente o custo computacional, preservando a precisão necessária para estimativas confiáveis de vida à fadiga.

A formulação matemática do FMVM é detalhada, seguida por estudos comparativos com métodos tradicionais, como os de busca direta e gradiente, evidenciando as vantagens e limitações da metodologia proposta. Por fim, o método é validado com base em dados experimentais obtidos na literatura, permitindo uma análise do seu desempenho em condições reais e uma comparação com abordagens já consolidadas.

4.1 Desenvolvimento do Método Rápido de Máxima Variância (FMVM)

De forma geral, sabe-se que o Método da Máxima Variância busca o plano onde a variância atinge seu máximo, uma vez que este é considerado crítico para o material e a fratura e esperado nesse plano (Będkowski e Macha, 1992). De forma a melhor compreender a proposição do método proposto neste trabalho, será considerado, inicialmente, um componente estrutural cuja análise de planos permite identificar um dado plano Δ , sujeito a atuação das coordenadas esféricas (θ, ϕ) , conforme já visto anteriormente, através da Fig. 3.1 (apresentada na pag. 54), e um ângulo auxiliar, α , representado na Fig. 3.3 (pág. 56), a partir de \mathbf{e}_a da base estabelecida $(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$. Assim, a matriz de covariância, expressa por $\boldsymbol{\mu}_\Delta$, considerando os históricos de tensão $\tau_{e_a}(t)$ e $\tau_{e_b}(t)$ atuando em um plano qualquer Δ , pode ser expressa através da Eq. (4.1).

$$\boldsymbol{\mu}_\Delta = \begin{bmatrix} \mu_{\tau_{e_a}} & \mu_{\tau_{e_a}, \tau_{e_b}} \\ \mu_{\tau_{e_a}, \tau_{e_b}} & \mu_{\tau_{e_b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var[\tau_{e_a}(t)] & Cov[\tau_{e_a}(t), \tau_{e_b}(t)] \\ Cov[\tau_{e_a}(t), \tau_{e_b}(t)] & Var[\tau_{e_b}(t)] \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

onde os termos principais da diagonal da matriz $\boldsymbol{\mu}_\Delta$ podem ser obtidos aplicando a Eq. (3.25) aos estimadores de $\tau_{e_a}(t)$ (Eq. (3.6)) e $\tau_{e_b}(t)$ (Eq. (3.7)), resultando nas Eqs. (4.2) e (4.3).

$$Var(\tau_{e_a}(t)) = \mu_{\tau_a} \cong \mathbf{d}_a^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_a \quad (4.2)$$

$$Var(\tau_{e_b}(t)) = \mu_{\tau_b} \cong \mathbf{d}_b^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_b \quad (4.3)$$

onde \mathbf{d}_a e \mathbf{d}_b podem ser obtidos aplicando-se as Eqs. (4.4) e (4.5), respectivamente.

$$\mathbf{d}_a = [a_x n_x \quad a_y n_y \quad a_z n_z \quad a_x n_y + a_y n_x \quad a_x n_z + a_z n_x \quad a_y n_z + a_z n_y]^T \quad (4.4)$$

$$\mathbf{d}_b = [b_x n_x \quad b_y n_y \quad b_z n_z \quad b_x n_y + b_y n_x \quad b_x n_z + b_z n_x \quad b_y n_z + b_z n_y]^T \quad (4.5)$$

A determinação da matriz de covariância entre $\tau_{e_a}(t)$ e $\tau_{e_b}(t)$, considerando o exposto, pode ser expressa através da Eq. (4.6).

$$\begin{aligned} Cov(Z, W) \cong \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_z(\mathbf{X}^0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_w(\mathbf{X}^0) \right) var(x_i) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_z(\mathbf{X}^0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_w(\mathbf{X}^0) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_w(\mathbf{X}^0) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_z(\mathbf{X}^0) \right) \right] cov(x_i, x_j) \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $Z = g_z(\mathbf{X})$ e $W = g_w(\mathbf{X})$ são diferentes funções que relacionam os componentes do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} ($\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$) e \mathbf{X}^0 representa o vetor médio $\mathbf{X}^0 = [x_1^0 \quad \dots \quad x_N^0]^T$.

Ao resolver analiticamente a Eq. (4.6) para as funções $\tau_{e_a}(t)$ e $\tau_{e_b}(t)$, e realizando um rearranjo nos termos da expressão resultante, obtém-se a covariância entre essas duas funções, que é expressa pela Eq. (4.7).

$$Cov(\tau_{e_a}(t), \tau_{e_b}(t)) = \mu_{\tau_{e_a}, \tau_{e_b}} \cong \mathbf{d}_a^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_b \quad (4.7)$$

onde \mathbf{d}_a e \mathbf{d}_b já foram apresentados e podem ser calculados através das Eqs. (4.4) e (4.5).

Através do exposto, infere-se que através das Eqs. (4.2), (4.3) e (4.7), torna-se possível obter a expressão que representa a matriz de covariância dos históricos das tensões cisalhantes resolvidas atuantes no plano Δ , que é apresentada na Eq. (4.8).

$$\boldsymbol{\mu}_\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_a & \mathbf{d}_a^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_b \\ \mathbf{d}_a^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_b & \mathbf{d}_b^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_b \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

A matriz $\boldsymbol{\mu}_\Delta$ é descrita em relação a uma base genérica, $e_a - e_b$, que pode não estar alinhada à direção de máxima variância de $\tau_q(t)$. Para identificar a direção e magnitude que definem a condição de maior variância de $\tau_q(t)$ atuante no plano Δ , ao representar $\boldsymbol{\mu}_\Delta$ nesta base genérica, pode-se utilizar uma transformação ortogonal para projetar o histórico de tensão em um novo sistema de coordenadas, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, no qual (Mardia, Kent, e Bibby, 1979; Rencher e Christensen, 2012; Richardson, 2009):

- A maior variância de qualquer projeção de $\tau_q(t)$ esteja orientada ao longo da coordenada \mathbf{e}_1 (primeira componente);

- A segunda maior variância esteja orientada ao longo da coordenada \mathbf{e}_2 (segunda componente).

Uma vez que se trata de uma matriz simétrica, com base no teorema da decomposição espectral é possível encontrar a base $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ (Mardia *et al.*, 1979; Rencher e Christensen, 2012). De maneira simplificada, esse teorema estabelece as condições para a diagonalização de uma matriz simétrica em uma base ortonormal formada unicamente pelos autovetores dessa matriz, que podem ser ortogonalizados conforme expresso na Eq. (4.9).

$$\boldsymbol{\mu}_\Delta = \mathbf{GLG}^\top = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde \mathbf{L} é a matriz diagonal que contém apenas os autovalores de $\boldsymbol{\mu}_\Delta$, e \mathbf{G} é uma matriz 2×2 (ortonormal) cujas colunas são os autovetores ortonormais de $\boldsymbol{\mu}_\Delta$.

Os autovalores de $\boldsymbol{\mu}_\Delta$ podem ser encontrados calculando-se as raízes do polinômio característico representado na Eq. (4.10).

$$P_{\boldsymbol{\mu}_\Delta}(\lambda) = \det[\lambda \mathbf{I} - \boldsymbol{\mu}_\Delta] = \lambda^2 - \lambda(\mu_{\Delta_{11}} + \mu_{\Delta_{22}}) + (\mu_{\Delta_{11}}\mu_{\Delta_{22}} - \mu_{\Delta_{12}}^2) \quad (4.10)$$

onde $\mu_{\Delta_{11}} = \text{Var}[\tau_{e_a}(t)]$, $\mu_{\Delta_{22}} = \text{Var}[\tau_{e_b}(t)]$, e $\mu_{\Delta_{12}} = \text{Cov}[\tau_{e_a}(t), \tau_{e_b}(t)]$. Por sua vez, as raízes do polinômio expresso em (4.10) podem ser obtidas através das Eqs. (4.11) e (4.12).

$$\lambda_1 = \frac{\mu_{\Delta_{11}} + \mu_{\Delta_{22}}}{2} + \delta \quad (4.11)$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_{\Delta_{11}} + \mu_{\Delta_{22}}}{2} - \delta \quad (4.12)$$

onde $\delta = \sqrt{\left(\frac{\mu_{\Delta_{11}} - \mu_{\Delta_{22}}}{2}\right)^2 + (\mu_{\Delta_{12}})^2}$.

Associados a cada autovalor λ_i tem-se os autovetores \mathbf{e}_i , que podem ser obtidos através da resolução da Eq. (4.13).

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \boldsymbol{\mu}_\Delta)\mathbf{e}_i = 0 \quad (4.13)$$

Através da resolução e simplificação da Eq. (4.13), obtém-se os autovetores que estão expressos nas Eqs. (4.14) e (4.15).

É importante ressaltar que trabalhos como os de Härdle & Simar (2019); Rencher & Christensen (2012); Richardson (2009), trazem provas matemáticas que correlacionam os autovetores com a direção de máxima variância e os autovalores com as máximas variâncias.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{|\mu_{\tau e_a} - \mu_{\tau e_b} + \delta|^2}{4|\mu_{\tau e_a, \tau e_b}|^2} + 1}} \begin{bmatrix} \frac{\mu_{\tau e_a} - \mu_{\tau e_b} + \delta}{2\mu_{\tau e_a, \tau e_b}} \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.14)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{|\mu_{\tau e_b} - \mu_{\tau e_a} + \delta|^2}{4|\mu_{\tau e_a, \tau e_b}|^2} + 1}} \begin{bmatrix} -\frac{\mu_{\tau e_b} - \mu_{\tau e_a} + \delta}{2\mu_{\tau e_a, \tau e_b}} \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.15)$$

A Figura 4.1 apresenta uma outra forma de obter as equações que definem os autovalores e autovetores da matriz μ_{Δ} . No esquema, é possível visualizar, em (a), a representação gráfica da transformação ortogonal apresentada na Eq. (4.1). Conforme Fitzgerald (1968), esse procedimento é realizado por meio da construção do Círculo de Mohr, que representa matrizes de covariância 2x2, conforme pode ser observado na Fig. 4.1(b). Através da definição dos pontos representados, $P_a(\mu_{\tau e_a}, -\mu_{\tau e_a, \tau e_b})$ e $P_b(\mu_{\tau e_b}, \mu_{\tau e_a, \tau e_b})$, que são transportados para um sistema de coordenadas onde a abscissa representa as variâncias e a ordenada representa as covariâncias, constrói-se o círculo de Mohr proposto e o triângulo retângulo auxiliar com os vértices $\overline{P_a Q}$ e $\overline{P_b Q}$, como mostrado na Fig. 4.1(c).

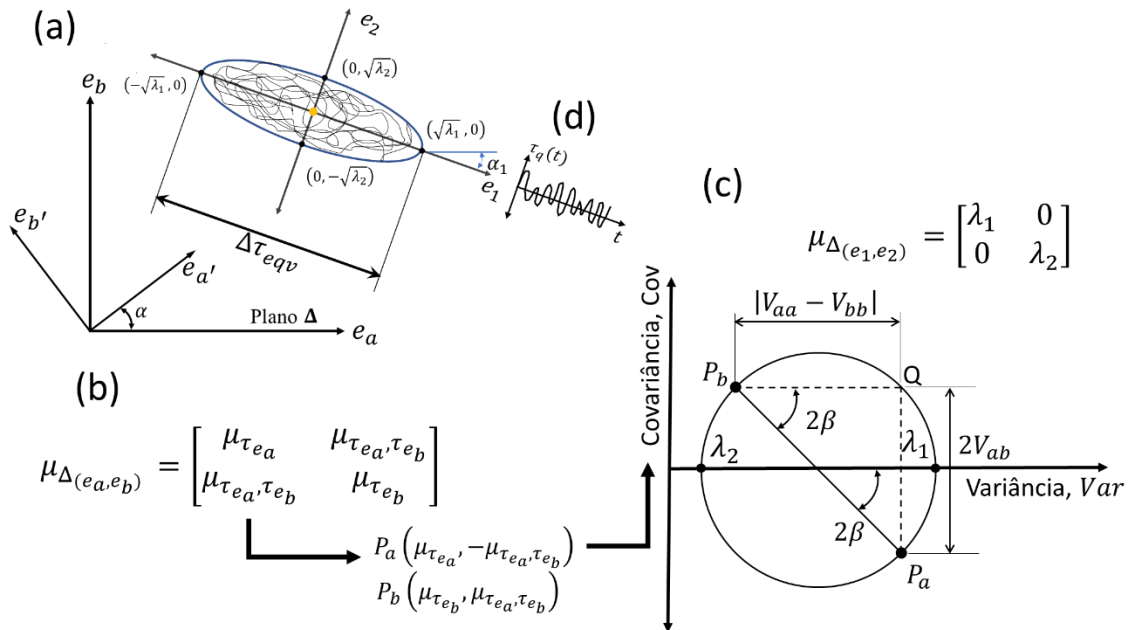


Figura 4.1 – Representação: (a) dos autovalores e autovetores e de uma linha de contorno representada pelas distâncias dos autovalores a partir da origem do sistema $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$; (b) Construção do círculo de Mohr para estimar os autovalores e o ângulo que a direção principal forma com o eixo \mathbf{e}_a (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

Ainda na Fig. 4.1(c) observa-se que a representação obtida, do Círculo de Mohr e do triângulo retângulo P_aQP_b , permite a obtenção dos valores de λ_1 e λ_2 utilizando as Eqs. (4.11) e (4.12). Além disso, o ângulo α_1 , que a direção principal \mathbf{e}_1 forma com a direção \mathbf{e}_a , pode ser obtido por intermédio de um ângulo auxiliar β , calculado considerando a Eq. (4.16) e as condições dadas na Tabela 4.1.

$$\beta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\mu_{\Delta_{12}}}{\mu_{\Delta_{11}} - \mu_{\Delta_{22}}} \right) \quad (4.16)$$

Tabela 4.1 – Relação entre o ângulo β_1 e o ângulo α que representa o ângulo entre \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_a .

$\mu_{\Delta_{11}} - \mu_{\Delta_{22}}$	$\mu_{\Delta_{12}}$	α_1
>0	>0	β
>0	<0	$180 + \beta$
<0	>0	$90 + \beta$
<0	<0	

Identificadas as componentes principais λ_i , duas medidas podem ser utilizadas para determinar o plano de máxima variância:

- A primeira assume que o valor RMS do histórico das tensões cisalhantes resolvidas atuantes na direção de máxima variância, \mathbf{e}_1 (ver Fig. 4.1(a)), está diretamente relacionado ao processo de falha por fadiga, o que resulta na relação apresentada na Eq. (4.17).

$$\tau_{aeqv_1} = \sqrt{2Var(\tau_q(t, \theta, \phi, \alpha_1))} = \sqrt{2\lambda_1} \quad (4.17)$$

- A Segunda considera o método do elipsoide mínimo circunscrito, apresentado neste trabalho na seção 3.3.7. O método supõe que os semieixos do elipsoide (veja Fig. 4.1(a)) contêm as informações necessárias para caracterizar a sollicitação de cisalhamento. Assim, considerando as componentes principais, essa medida é quantificada pela expressão apresentada na Eq. (4.18).

$$\tau_{aeqv_2} = \sqrt{2[Var(\tau_q(t, \theta, \phi, \alpha_1)) + Var(\tau_q(t, \theta, \phi, \alpha_1 + \pi/2))]} = \sqrt{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (4.18)$$

onde α_1 representa o ângulo que a direção principal, \mathbf{e}_1 , forma com o eixo \mathbf{e}_a .

Com a identificação dos planos candidatos, definidos como aqueles em que λ_1 varia entre seu valor máximo e uma pequena tolerância, utiliza-se a Eq. (3.13) para calcular o histórico das tensões cisalhantes resolvidas, $\tau_q(t)$, conforme mostra a Fig. 4.1(d).

4.1.1 Implementação Computacional do FMVM

A Fig. 4.2 resume o algoritmo proposto para a determinação, segundo o Método da Máxima Variância, da orientação do plano crítico.

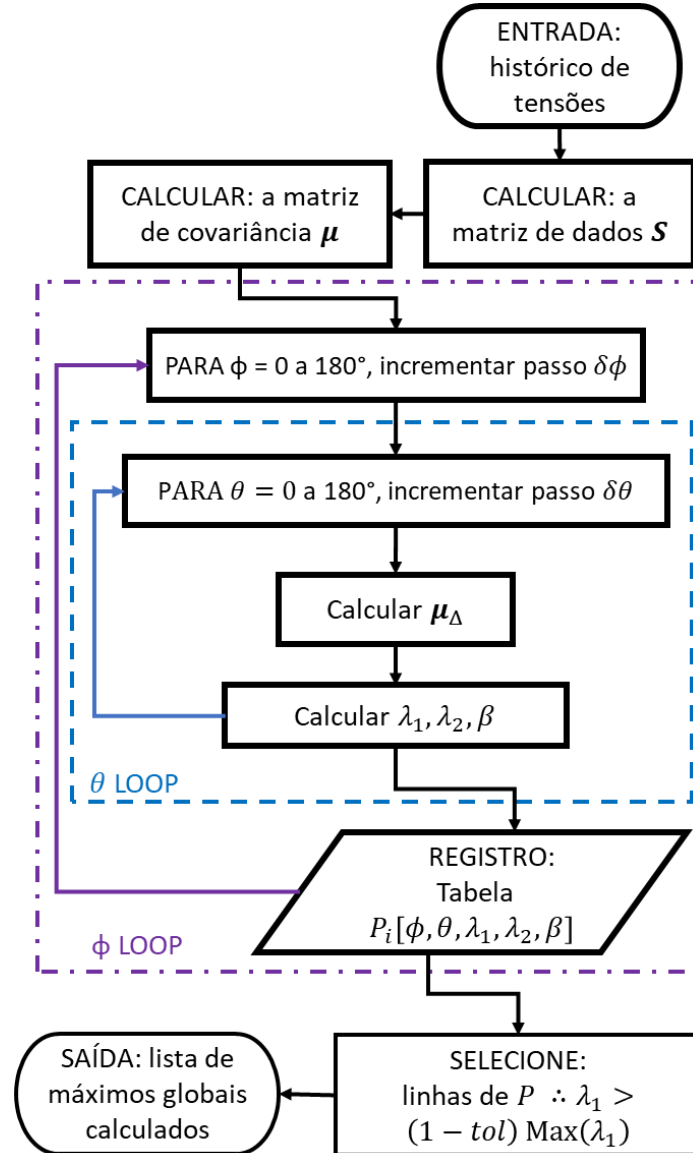


Figura 4.2 – Fluxograma resumindo o algoritmo proposto para a determinação, segundo o Método da Máxima Variância, da orientação do plano crítico (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

A determinação da direção e das características dos históricos das tensões cisalhantes resolvidas atuantes no plano de máxima variância é realizada de forma semelhante ao que se faz para condições de amplitude constante utilizando os métodos clássicos citados no parágrafo anterior. O que diferencia o método de identificação de plano crítico proposto neste trabalho dos demais, conforme apresenta a Fig. 4.2, é a

necessidade da determinação da matriz de covariância no plano em análise. Obtida a matriz de covariância entre τ_{e_a} e τ_{e_b} , determina-se seus autovalores, que representam as maiores magnitudes de variância no histórico de tensões cisalhantes resolvidas, $\tau_{e_a}(t)$, e os autovetores associados, que definem as direções em que essas maiores variâncias são observadas, $\tau(t)$.

4.2 Validação com Dados da Literatura e Comparação com Modelos Existentes

A validação do Método Rápido de Máxima Variância (FMVM) foi realizada com base em dados experimentais disponíveis na literatura e na comparação com métodos já estabelecidos. Essa análise permitiu avaliar a precisão das estimativas do FMVM em diferentes condições de carregamento e sua eficiência computacional em relação a outras abordagens. Neste tópico, apresentam-se os resultados dessa validação, destacando os principais pontos de concordância e divergência com os dados experimentais.

4.2.1 Comparação com Dados Experimentais

Resultados experimentais foram utilizados para a validação e análise da metodologia proposta nesse estudo (Łagoda, Macha, e Niesłony, 2003, 2005; Niesłony e Macha, 2007). Os procedimentos experimentais foram realizados por Łagoda *et al.*, (2005), considerando a combinação de flexão e torção em corpos de prova cilíndricos e lisos (Fig. 4.3) fabricados em aço 18G2A. Os testes assumiram que materiais disponíveis comercialmente poderiam ser submetidos aos testes de fadiga realizados, dessa forma, o material testado não passou por qualquer seleção preliminar.

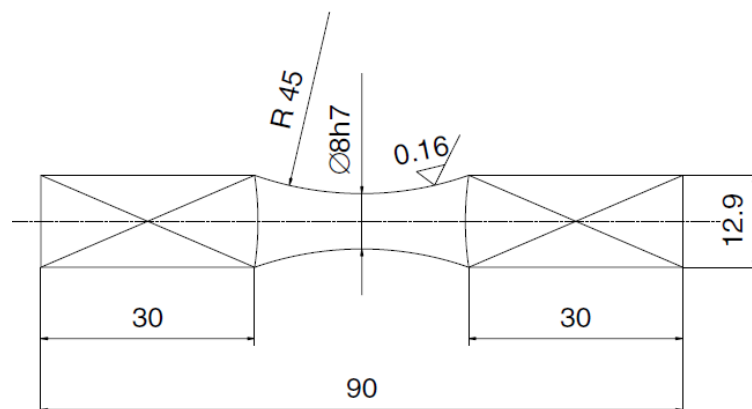


Figura 4.3 – Forma e dimensões do corpo de prova submetido aos testes de fadiga (Łagoda *et al.*, 2005).

O aço 18G2A, utilizado por Łagoda *et al.*, (2005), na confecção dos corpos de prova é um tipo de aço estrutural de baixa liga e alta resistência amplamente empregado na construção civil e na fabricação de componentes que requerem alta resistência mecânica e boa soldabilidade. Esse aço possui equivalentes em outras normas internacionais como o ASTM A572: Grau 50, EN 10025-2: S355JR e DIN 17100: St52-3. Cabe ressaltar que, embora esses aços sejam semelhantes, podem existir pequenas variações em suas composições químicas e propriedades mecânicas. A Tabela 4.2 apresenta uma comparação, em termos da composição química, do aço 18G2A em detrimento dos demais aços equivalentes mencionados.

Tabela 4.2 – Composição química do aço 18G2A e equivalentes em outras normas internacionais.

Elemento	18G2A	A572-Grau 50	S355JR	St52-3
Norma de Referência	PN-EN 10025	ASTM	EN 10025-2	DIN 17100
Carbono (C)	≤ 0,18%	≤ 0,23%	≤ 0,24%	≤ 0,22%
Manganês (Mn)	1,30–1,60%	≤ 1,35%	≤ 1,60%	1,30–1,60%
Silício (Si)	≤ 0,50%	≤ 0,40%	≤ 0,55%	≤ 0,55%
Fósforo (P)	≤ 0,035%	≤ 0,04%	≤ 0,035%	≤ 0,045%
Enxofre (S)	≤ 0,035%	≤ 0,05%	≤ 0,035%	≤ 0,045%

Em relação às propriedades mecânicas, a Tabela 4.3 apresenta uma comparação do aço PN-EN 10025: 18G2A com os aços equivalentes em outras normas internacionais: ASTM A572: Grau 50, EN 10025-2: S355JR e DIN 17100: St52-3.

Tabela 4.3 – Composição química do aço 18G2A e equivalentes em outras normas internacionais.

Propriedades Mecânicas	18G2A	A572-Grau 50	S355JR	St52-3
Tensão de Escoamento	355	345	355	355
Limite de Resistência à Tração	490–630	450–620	490–630	490–630

A Tabela 4.4 apresenta as principais constantes do material, obtidas por Łagoda *et al.*, (2005), por meio de ensaios básicos de fadiga estática e cíclica. Os autores informam ainda que foram utilizadas histórias com distribuições Gaussianas e faixas de frequência estreitas, com frequência dominante de 20 Hz e largura de banda de 1 Hz. Os testes foram realizados para diferentes coeficientes de correlação, $r_{\sigma,\tau}$, e diferentes razões entre os valores RMS dos componentes de tensão normal, RMS_{σ} , e de cisalhamento, RMS_{τ} (representados como $R_{\sigma,\tau}$).

As principais condições de testes experimentais utilizadas neste trabalho se encontram na Tabela 4.5. Tais condições foram calculadas com base nos dados

disponibilizados no trabalho de Łagoda *et al.*, (2005). Na tabela, i representa o fator de regularidade e $r_{\sigma,\tau}$ o Coeficiente de Correlação.

Tabela 4.4 – Propriedades de fadiga do aço 18G2A.

N_e	Inclinação inversa		Resistência à fadiga de referência [MPa^{k_*}]		Limites de resistência [MPa]	
	Flexão, k_{axi}	Torsão, k_{tor}	Flexão, C_{axi}	Torsão, C_{tor}	Flexão, A_{axi}	Torsão, A_{tor}
2.735E6	7.19	7.19	8.511E23	3.668E22	271	175

C_* e k_* são parâmetros da característica de fadiga $NS_a^{k_*} = C_*$

Fonte: Łagoda *et al.*, (2005)

Tabela 4.5 – Condições de teste descritas no trabalho de Łagoda *et al.*, (2005).

Símbolos	i	$K = \sqrt{\mu_\sigma/\mu_\tau}$	$r_{\sigma,\tau}$
N01	0,99	∞	-
N02	0,99	0	-
N03	0,99	1.79	≈ 0
N04	0,99	1.03	≈ 0
N05	0,99	2	1
N06	0,99	1	1
N07	0,99	1.03	0.5
N08	0,99	1.85	0.5

Conforme é possível observar na Tabela 4.5, os testes foram nomeados de N01 a N08. A Tabela 4.6 apresenta o tipo de teste de fadiga realizado, o tipo de equipamento utilizado, o ângulo entre o eixo do corpo de prova e a alavanca, α_M , e quantidade de espécimes ensaiados.

Tabela 4.6 – Características dos tipos de testes de fadiga realizados experimentalmente.

Símbolos	Tipo de teste de fadiga	Equipamento	α_M	Nº espécimes
N01	Flexão pura	MZGS100L	0°	11
N02	Torção pura	MZGS100L	90°	5
N03	Flexão não proporcional com torção	MZGS200L	–	6
N04	Flexão não proporcional com torção	MZGS200L	–	5
N05	Flexão proporcional com torção	MZGS100L	45°	8
N06	Flexão proporcional com torção	MZGS100L	63,5°	5
N07	Flexão não proporcional com torção	MZGS200L	–	4
N08	Flexão não proporcional com torção	MZGS200L	–	5

Fonte: Łagoda *et al.*, (2005)

Ambos os equipamentos especificados na Tabela 4.6 são dispositivos projetado para ensaios de fadiga em corpos de prova padrão fabricados com diversos materiais. No entanto, o MZGS200L é uma configuração de dispositivos projetada para ensaios de fadiga em corpos de prova submetidos a momentos de flexão e torção não proporcionais, com históricos arbitrários e independentes. Diferente da configuração MZGS100L, a MZGS200L possui dois atuadores eletromagnéticos controlados e alimentados de forma independente (Niesłony e Macha, 2007).

Os históricos de $\tau(t)$ e $x(t)$ foram gerados por técnica de simulação Gaussiana (Sarkani 1987; Yang 1973), considerando um tempo de amostragem, T_{samp} , de 600 s, a uma taxa de 656 amostras/s (393600 pontos por histórico). A pesquisa do plano crítico em todos os casos analisados foi realizada considerando um intervalo de busca variando entre $[0, 180^\circ)$ com incrementos de $\Delta\theta_m = \Delta\phi_n = 1^\circ$.

Para a produção das estimativas de vida realizou-se, inicialmente, a reconstrução dos históricos de tensões normais, $\sigma(t)$, e de cisalhamento, $\tau(t)$. A relação utilizada para essa finalidade é dada na Eq. (4.19).

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\mu_\tau}{\mu_\sigma}} [\tau(t) + r_{\sigma,\tau} x(t)] \quad (4.19)$$

onde $\tau(t)$ é um processo aleatório Gaussiano de média zero, $x(t)$ é outro processo Gaussiano de média zero e não correlacionado com os processos $\tau(t)$ e $\sigma(t)$, e $r_{\sigma,\tau}$ é o coeficiente de determinação de correlação entre $\sigma(t)$ e $\tau(t)$. A expressão utilizada para a reconstrução do sinal no tempo, $s(t_i)$, está expressa na Eq. (4.20).

$$s(t_i) = \sum_j (2 \cdot P(j) \cdot \Delta f)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(f(j) \cdot t_i + \varphi(j)) \quad (4.20)$$

onde j é o número de harmônicos que se toma do espectro de potências, Δf é o intervalo de frequência e $\varphi(j)$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme limitada ao intervalo $[0, 2\pi]$.

A expressão apresentada na Eq. (4.20) pode ser melhor visualizada através da Figura 4.4, que representa a reconstrução de sinais a partir da Densidade Espectral de Potência (PSD). Na figura, $(P_j \cdot \Delta f)$ representa a área da barra e define a energia disponível dentro dessa frequência. A Fig. 4.5, por sua vez, apresenta as etapas do processo de reconstrução de sinal. Na figura é possível visualizar, em (a) o sinal idealizado, realiza-se, então, o processo de reconstrução em si, aplicando a Eq. (4.20), conforme apresenta a Fig. 4.5(b), obtém-se, como resultado, o sinal apresentado em (c),

que é avaliado e, por fim, tem-se o espectro de potência reconstruído associado aos históricos de carregamento.

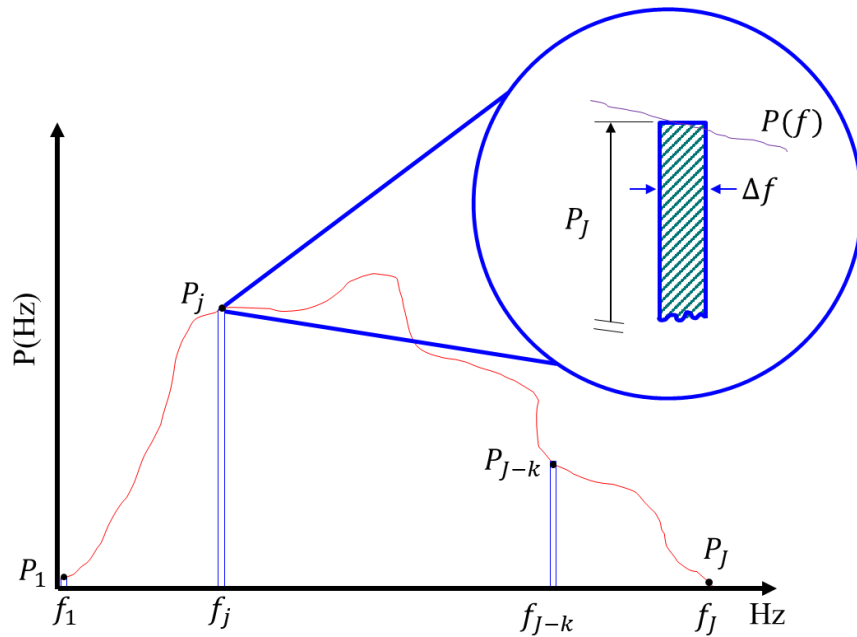


Figura 4.4 – Representação esquemática da reconstrução de sinais a partir da Densidade Espectral de Potência (PSD)

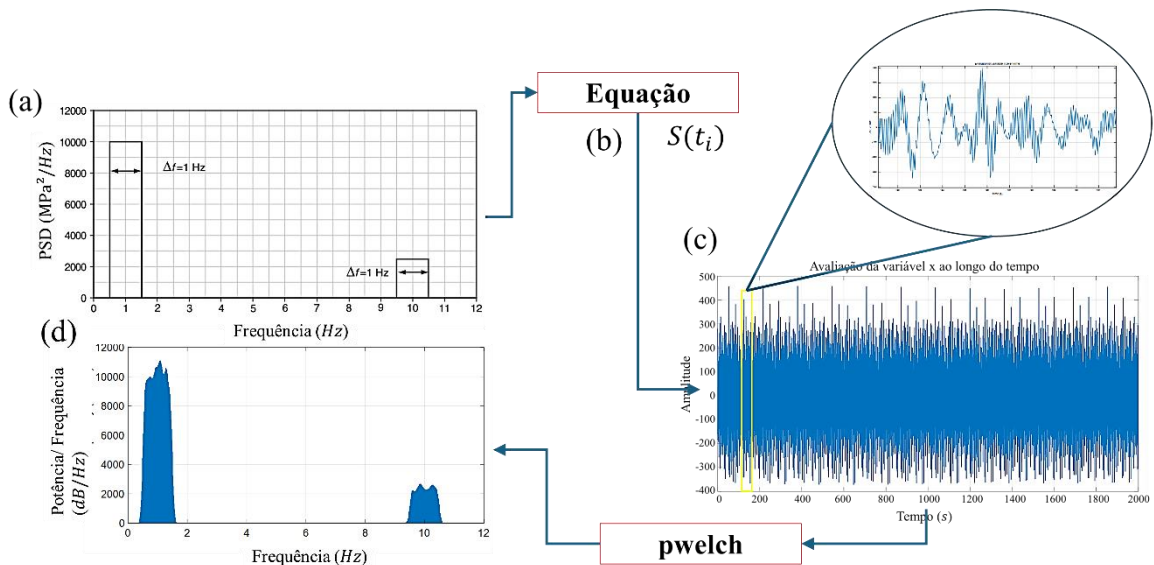


Figura 4.5 – Representação esquemática das etapas do processo de reconstrução de sinal

Neste trabalho, para fins de comparação, foi utilizado ainda o algoritmo de otimização multivariável proposto por Susmel (2010) com a finalidade de comparar o desempenho dos modelos em termos de custo computacional e precisão das estimativas (tanto em termos de vida útil quanto na identificação dos planos críticos).

4.2.2 Parâmetro de Dano por Fadiga – Método da Curva de Wöhler Modificada

Para a realização das estimativas de vida adotou-se o método de fadiga multiaxial proposto por Susmel e Lazzarin (Lazzarin, 2002), conhecido como Método da Curva de Wöhler modificado (MWCM), apresentado na seção 3.6.2 deste trabalho.

Conforme já apresentado, o método considera que o plano crítico (θ^*, ϕ^*) é aquele sob maior amplitude de tensão de cisalhamento, τ_a . A tensão normal máxima, $\sigma_{n,max}$, atuando neste plano também contribui para a formação de trincas. No modelo de Susmel e Lazzarin, a influência de $\sigma_{n,max}$ no dano por fadiga é incorporada usando o parâmetro ρ , que é calculado através da Eq. (3.42).

Com base na curva de Wöhler modificada para a razão ρ que caracteriza o histórico de tensões locais em análise, é possível estimar o número de ciclos até a falha, N_f , utilizando como base a Eq. (3.51). Considerando as constantes do material, apresentadas na Tabela 4.4, a $\left(\frac{1}{b_\rho}\right)$ e $A(\rho)$ para o aço 18G2A assumem as formas apresentadas nas Eqs. (4.21) e (4.22).

$$A(\rho) = -18.541 \cdot \rho + 175 \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{b_\rho} = 7.19 \quad (4.22)$$

Após a definição dos planos críticos por meio das metodologias descritas, a sequência básica para o cálculo de danos e a previsão de vida em cada plano candidato é realizada da seguinte forma:

- a) determinar o histórico de tensões de cisalhamento resolvidas no i -ésimo plano candidato utilizando a Eq. (3.13);
- b) aplicar o método Rainflow, conforme descrito em Susmel *et al.*, (2009), para identificar e contar os ciclos;
- c) calcular o dano com base no Método da Curva de Wöhler Modificada;
- d) determinar o dano acumulado, D , (aplicando a regra de Miner - Eq. (3.39)), e o número total de ciclos aplicados, N_{block} , utilizando a Eq. (4.23), durante o intervalo de amostragem (T_{samp}).

$$N_{block} = \sum n_i \quad (4.23)$$

onde n_i é o número de ciclos aplicados para o i -ésimo nível de tensão de amplitude constante τ_{a_i} . Tendo determinado N_{block} , o cálculo do número total de ciclos até a falha por fadiga é extrapolado usando a Eq. (4.24).

$$N_f = N_{block} \frac{D_c}{D} \quad (4.24)$$

onde D_c é o dano crítico.

A falha por fadiga é prevista quando o dano acumulado atinge o dano crítico, D_c , frequentemente assumido como 1. No entanto, dependendo das condições de carregamento, o valor médio de D_c pode variar entre 0,15 e 1,06 (Lee *et al.*, 2005).

Um exemplo é o estudo de Lee *et al.*, (1999), que analisou carregamentos de espectro aleatório e encontrou um valor médio de dano de 1,06, com desvio padrão de 0,47, evidenciando uma distribuição normal. Já Cristofori *et al.*, (2011), ao examinarem os dados experimentais de Niesłony & Macha (2007) para flexão e torção, recomendaram adotar o valor de D_c igual a 0,30.

4.2.3 Análise Computacional e Eficiência

Em estudos relacionados à análise de fadiga multiaxial e previsão de vida de materiais e componentes, o custo computacional representa um fator crucial a ser considerado. Métodos avançados de simulação e cálculo, como os que envolvem análise espectral, identificação de ciclos via algoritmos Rainflow e acumulação de danos, frequentemente exigem elevada capacidade de processamento devido à complexidade matemática e ao volume de dados analisados, o que leva a necessidade do desenvolvimento de técnicas e/ou métodos que otimizem esse processo.

Partindo do exposto, para o método desenvolvido neste trabalho, o FMVM, os tempos de processamento para a identificação do plano crítico foram medidos para cada teste de fadiga, apresentados na Tabela 4.5, utilizando as rotinas TIC e TOC do *software* MATLAB®. A análise dos dados foi realizada em computadores com a seguinte configuração: processador Intel Core I7 4770 (4 núcleos e 8 threads) rodando a 3,40 GHz e com 16 GB de RAM (frequência DRAM: 798,1 MHz).

De forma a avaliar a eficiência do FMVM no tempo de processamento dos dados, duas outras abordagens foram testadas para a estimativa do plano crítico com base no Método da Máxima Variância:

- algoritmo de busca para a máxima variância de $\tau_q(t)$ (Eq. (3.13)) nos ângulos θ , ϕ , e α , conhecido como método direto;
- técnica de otimização utilizando o Método Gradiente Ascendente descrito (Susmel, 2010), chamado de método do gradiente.

Nesta análise específica, as estimativas de vida foram realizadas sob as seguintes condições de processamento, considerando as abordagens mencionadas:

- a) as pesquisas de plano com base no método direto consideraram que os ângulos de Euler variaram entre 0 e 180 graus com incrementos de 3 graus ($\Delta\theta = \Delta\phi = \Delta\alpha = 3^\circ$) e,
- b) para o algoritmo que utiliza o método do gradiente, os valores adotados para as constantes do processo iterativo de convergência foram: incremento dos ângulos de Euler com solução inicial aproximada calculada no intervalo de 0 a 180 graus, com incrementos de 45 graus ($\Delta\theta = \Delta\phi = \Delta\alpha = 45^\circ$); taxa de convergência $\kappa, < 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$ e $\|\nabla\text{Var}(\tau_q(t))\| \leq 10^{-4} \text{ MPa}$ como critério de parada.

4.2.4 Análise dos Resultados Experimentais

Para avaliar o valor esperado da vida por fadiga e o nível de repetibilidade do processo de simulação e estimativa de vida para os 49 resultados experimentais reportados por Niesłony & Macha (2007), a rotina de previsão de vida foi executada sete vezes, gerando um conjunto de amostras representativo do processo de simulação e previsão de vida. Os resultados obtidos, valores médios das estimativas de vida por fadiga pelo algoritmo proposto, foram inseridos em um gráfico (eixo vertical) e comparados aos valores das vidas observadas experimentalmente (eixo horizontal), conforme observa-se na Fig. 4.6. Cabe ressaltar que a rotina de previsão de vida foi processada 7 vezes para gerar um conjunto de amostra representativo do processo de simulação e previsão de vida.

No gráfico apresentado na Fig. 4.6 a combinação perfeita dos dados é representada pela linha sólida inclinada a 45° . As linhas tracejadas representam faixas de vida e, conforme pode-se observar, há no gráfico faixa de fator três e de fator dois, ambas para valores superiores e inferiores a combinação perfeita dos resultados. A barra de erro indica uma variação de ± 1 desvio padrão.

Os testes de fadiga são apresentados no gráfico da Fig. 4.6, com seus respectivos símbolos representativos, e plotados versus a média dos dados estimados. Através da análise do gráfico em questão é possível observar que 100% das vidas estimadas e observadas estão dentro da faixa de fator três. Ao avaliar os resultados em relação a faixa de fator dois, observa-se que esse valor cai para 87%, ainda assim representando um resultado que permite a aplicação do método proposto para estimativas de vida.

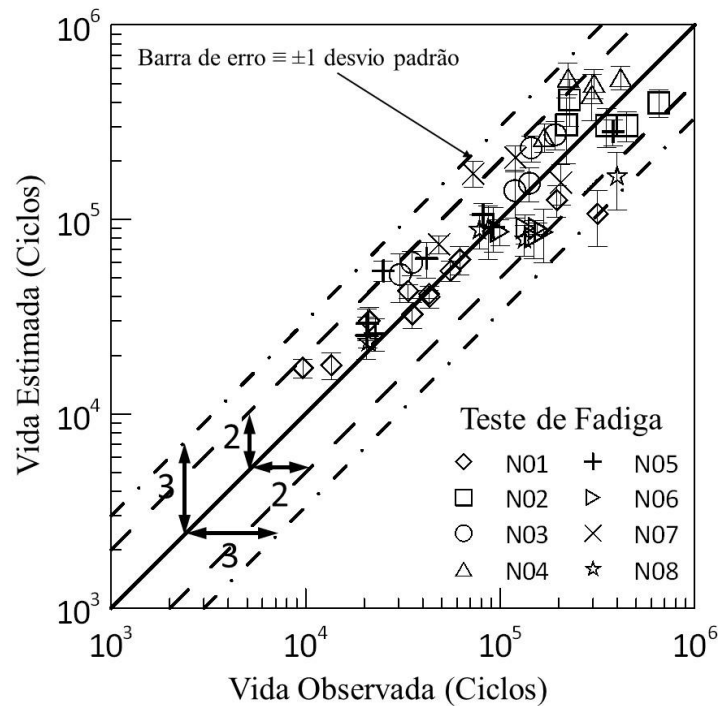


Figura 4.6 – Comparação entre a vida estimada por fadiga pelo método proposto e os dados de teste experimental para o aço 18G2A obtidos por (Łagoda *et al.*, 2003, 2005; Niesłony e Macha, 2007) (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

4.2.5 Comparação com Outras Abordagens

Conforme mencionado na seção 4.1.5 deste trabalho, utilizou-se duas outras abordagens de plano crítico de forma a realizar uma comparação com o método proposto: o Método direto e o Método do gradiente. As condições de análise utilizadas para avaliação segundo os métodos mencionados são especificadas nessa mesma seção.

De forma a avaliar o valor esperado da vida por fadiga em relação às abordagens propostas, a Fig. 4.7 apresenta diagramas, que possuem uma estrutura semelhante àquela apresentada para a Fig. 4.6, em que se realiza uma comparação das vidas observadas experimentalmente com as previsões de vida obtidas usando em (a) os algoritmos de busca com o método do gradiente e em (b) com o método direto. Uma particularidade da estrutura apresentada por esses diagramas está no fator de faixa para o intervalo entre as linhas tracejadas e pontilhadas, em que foi adotado um fator de duas vezes para as faixas de vida.

Considerando a variabilidade das estimativas de vida produzidas pelos diferentes históricos de carregamento simulados e pelas condições de pesquisa, a análise dos gráficos permite observar que há uma boa concordância entre os resultados observados experimentalmente em detrimento daqueles que foram estimados. Através da análise da

Fig. 4.7(a) nota-se que o método gradiente apresentou todos os resultados dentro da faixa de fator de três, enquanto 82% dos valores se encontram dentro da faixa de fator de duas vidas. Para o método direto, Fig. 4.7(b), o resultado foi bastante semelhante, estando todos os resultados dentro da faixa de fator de três, enquanto dentro da faixa de fator de duas vidas se encontram 85% dos resultados. O resultado apresentado mostra que, independentemente do método de busca do plano crítico adotado, entre os propostos, a maioria dos resultados apresentou padrões aceitáveis de estimativas de vida.

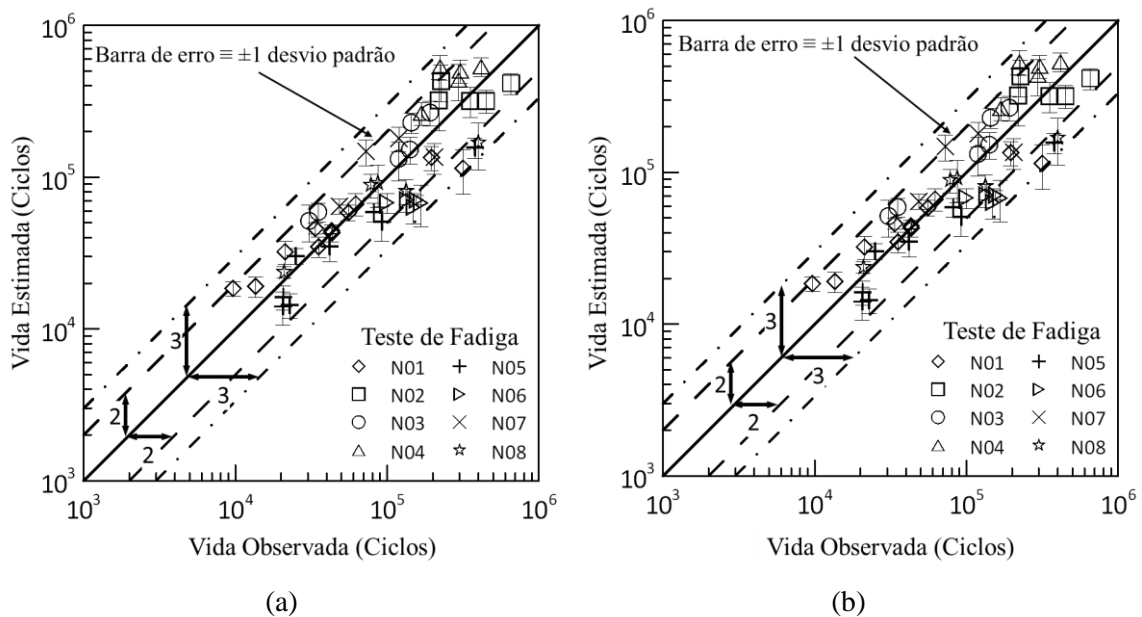


Figura 4.7 – Comparação entre as vidas observadas nos testes de fadiga realizados com aço 18G2A e as estimadas usando os métodos do gradiente (a) e direto (b) (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

As Figs. 4.6 e 4.7 permitem verificar, de forma qualitativa, que os níveis de repetibilidade das previsões de vida, que são apresentados na forma de barras de erro, são relativamente baixos. Um parâmetro de validação da qualidade dos resultados obtidos é que Dowling, (2013) indica que o coeficiente de variação dos ciclos até a falha em fadiga é da ordem de 50%. A Fig. 4.8, por sua vez, apresenta uma análise quantitativa do nível de repetibilidade das previsões de vida. Nessa figura, é ilustrado o coeficiente de variação, definido como a relação entre o desvio padrão e a média das previsões de vida, considerando os três métodos de busca de plano (proposto, gradiente e direto). Adicionalmente, são exibidos os resultados obtidos em testes experimentais realizados em situações em que as condições de teste foram replicadas, cujos valores estão detalhados na Tabela 6.2 do estudo de Niesłony & Macha (2007) e se encontram no Apêndice B deste trabalho.

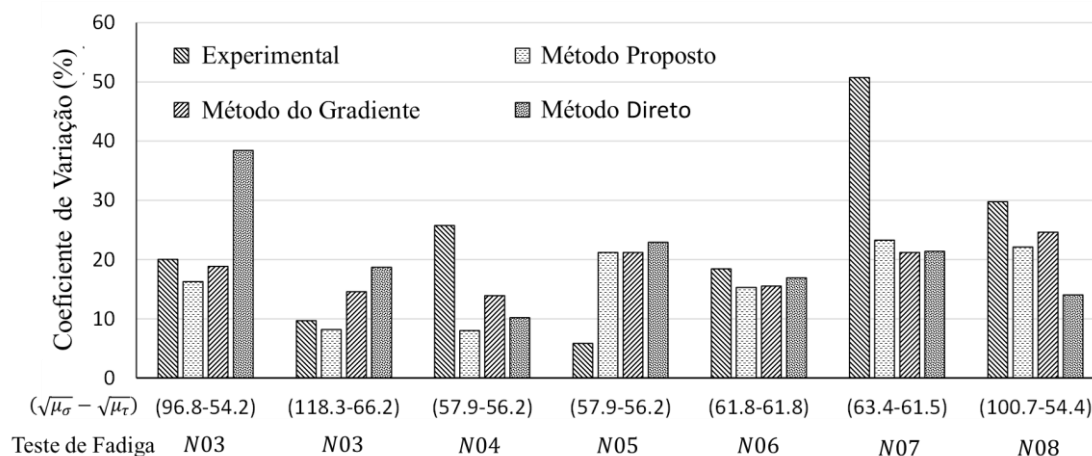


Figura 4.8 – Comparação entre os coeficientes de variação das estimativas de vida realizadas usando métodos de plano crítico e os observados experimentalmente (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

A análise dos dados mostra que os coeficientes de variação das previsões de vida obtidos com a metodologia proposta e com o método do gradiente são praticamente equivalentes. Em média, o coeficiente de variação estimado pelo método proposto é de 16,3%, enquanto o método do gradiente apresenta um valor de 18,6%. Por outro lado, o método direto apresenta uma maior dispersão média, de 20,4%, atribuída ao uso de incrementos de 3 graus nos ângulos de Euler. Esses resultados sugerem que, de forma geral, as três metodologias de busca de plano avaliadas possuem níveis de repetibilidade semelhantes, com coeficientes de variação entre 16% e 20%, sendo todos inferiores ao nível de dispersão observado nos testes experimentais, cujo coeficiente médio de variação é de aproximadamente 23%.

4.2.6 Custo Computacional

As condições de processamento para a obtenção do custo computacional considerando o método proposto (FMVM) estão descritas na seção 4.1.3 deste trabalho, enquanto para os métodos de busca de plano auxiliares (gradiente e direto) são apresentadas na seção 4.1.5 deste trabalho. Os tempos de processamento medidos para cada teste de fadiga realizado pode ser observada na Fig. 4.9. Cabe ressaltar que cada tempo de processamento é definido como o valor médio dos tempos medidos ao longo de 10 execuções.

Com base na análise do gráfico da Fig. 4.9 é possível observar que os “tempos médios” de processamento para a busca do plano crítico diferem significativamente entre os algoritmos estudados. Para os métodos proposto e direto esse tempo medido não

depende do histórico de carregamento, enquanto para o método do gradiente observa-se que o custo computacional depende fortemente das características dos históricos usados nos testes de fadiga. Considerando as condições impostas para cada método avaliado, obtiveram-se os seguintes resultados:

- para método proposto, onde a varredura nos ângulos de Euler se deu com incrementos de 1 grau ($\Delta\theta = \Delta\phi = 1^\circ$), o tempo médio de processamento foi da ordem de 2,3 segundos;
- para o método direto, utilizando ($\Delta\theta = \Delta\phi = \Delta\alpha = 3^\circ$), esse tempo foi da ordem de 50,8 segundos;
- para o método do gradiente, o resultado apresentou uma variação de 2,95 segundos para os testes de fadiga N01 (teste de fadiga sob tensão normal uniaxial) até 547 segundos para os testes de fadiga N03 (teste de fadiga sob tensões normais não proporcionais com cisalhamento, com um coeficiente de correlação $r_{\sigma,\tau} \approx 0$).

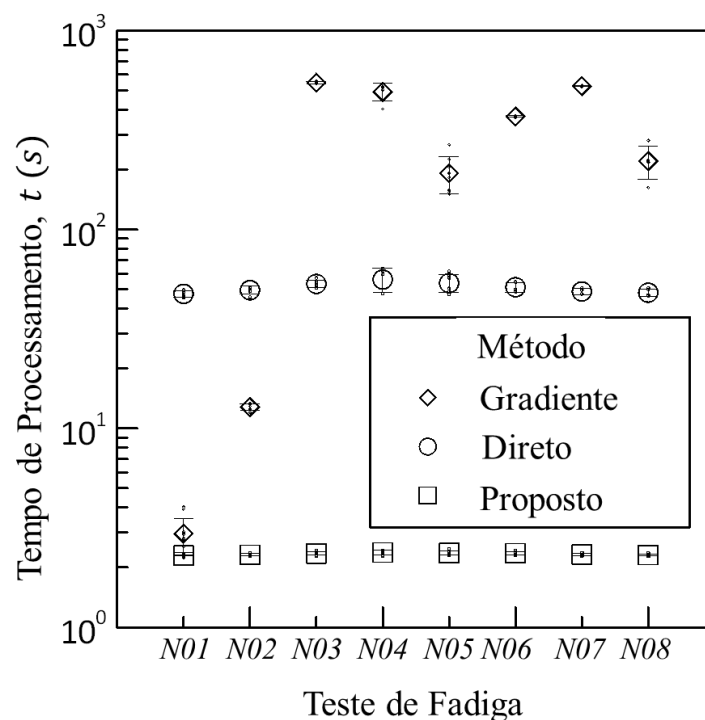


Figura 4.9 – Comparação entre o custo computacional do método proposto, método do gradiente e método direto (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

As diferenças no tempo médio de processamento observadas entre os métodos avaliados, e apresentados na Fig. 4.9, pode ser explicada pela maior lentidão apresentada pelos métodos de gradiente em situações em que a função analisada apresenta muitos mínimos locais ou é afetada por ruído numérico, o que frequentemente ocorre quando o

gradiente é calculado por diferenças finitas. De forma a simplificar a compreensão, a Fig. 4.10 apresenta três gráficos que correlacionam a variância máxima da tensão cisalhante resolvida, $\tau_q(t)$, com os ângulos de Euler (θ, ϕ). As condições de testes de fadiga apresentadas nessa ilustração são: em (a) flexão pura (N01), em (b) torção pura (N02) e em (c) flexão não proporcional com torção, apresentando um coeficiente de correlação $r_{\sigma,\tau} \approx 0$ (N03).

Com base na análise da Fig. 4.10, observa-se que na primeira situação a função que descreve essa relação não possui mínimos locais, e suas derivadas em relação ao ângulo θ estão claramente definidas (Fig. 4.10(a)). Por sua vez, para as situações apresentadas nas Figs. 4.10(b) e 4.10(c), as funções apresentam mínimos locais e derivadas que variam tanto com θ quanto com ϕ , o que leva o processo de solução a seguir um trajeto em ziguezague, com passos cada vez menores.

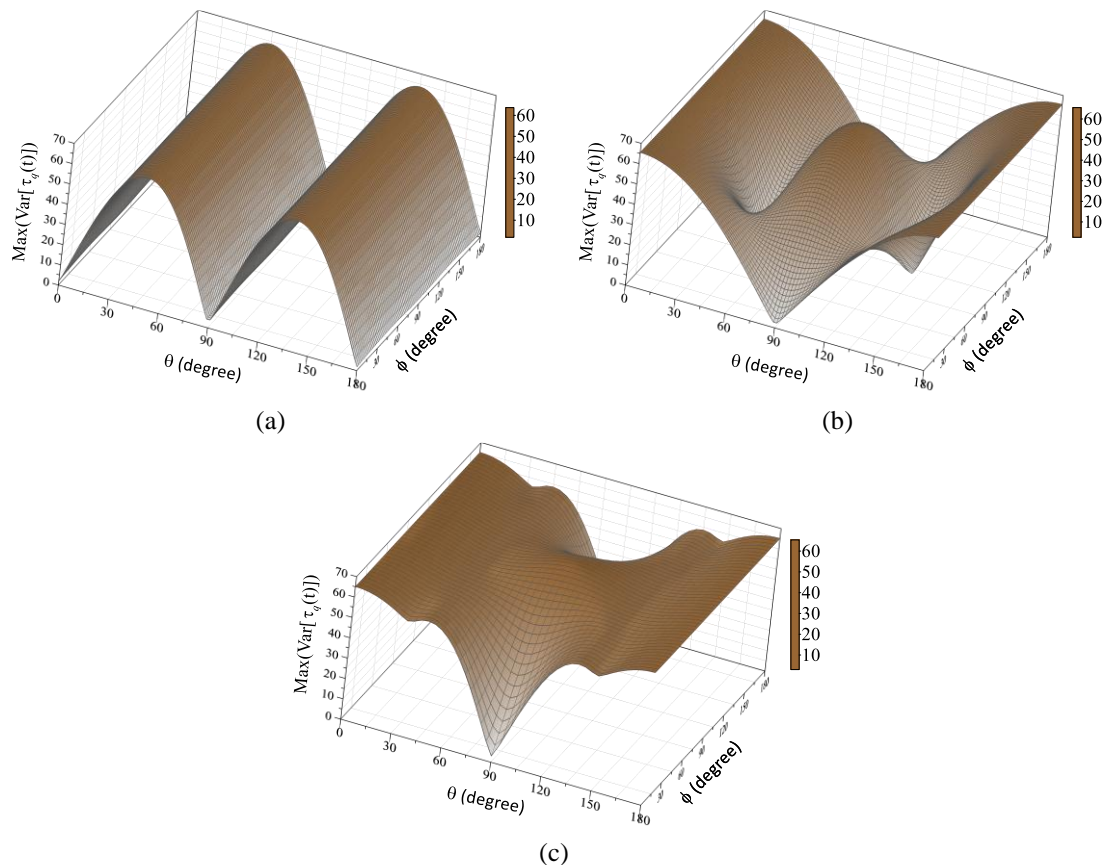


Figura 4.10 – Comportamento da "Máxima Variância" de $\tau_q(t)$ em uma série de planos materiais (θ, ϕ) para testes de fadiga sob (a) flexão pura (N01), (b) torção pura (N02) e (c) flexão não proporcional com torção, com um coeficiente de correlação $r_{\sigma,\tau} \approx 0$ (N03) (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

4.2.7 Influência da discretização dos ângulos de Euler no tempo de processamento e precisão das Estimativas de Vida

O método direto e a metodologia proposta neste trabalho baseiam-se na busca incremental de planos materiais definidos pelos ângulos de Euler (θ , ϕ , e α no caso do método direto, e θ e ϕ no caso da metodologia proposta). Assim, o tempo computacional necessário para processar esses métodos é influenciado pelos valores dos incrementos angulares estabelecidos no início das rotinas. A principal distinção entre as duas estratégias está no fato de que o método direto incorpora uma variável incremental adicional, α , para determinar a direção e o valor da variância máxima no plano $\theta - \phi$. Em contrapartida, a metodologia proposta utiliza apenas duas variáveis incrementais para definir a matriz de covariância (associada a um sistema de coordenadas local (a, b)) e, por meio do cálculo dos autovalores e autovetores dessa matriz, estima a direção e o valor da máxima variância no plano. Dessa forma, observa-se que o custo computacional de ambas as estratégias está diretamente relacionado ao intervalo e ao incremento definidos para as variáveis de pesquisa. A Fig. 4.11 apresenta os tempos de processamento dos algoritmos de busca para o caso N04 ($r_{\sigma, \tau} = -0.01$, $RMS_{\sigma} = 57.9 MPa$, $RMS_{\tau} = 56.2 MPa$), que foram definidos como o valor médio dos tempos registrados em sete execuções das rotinas.

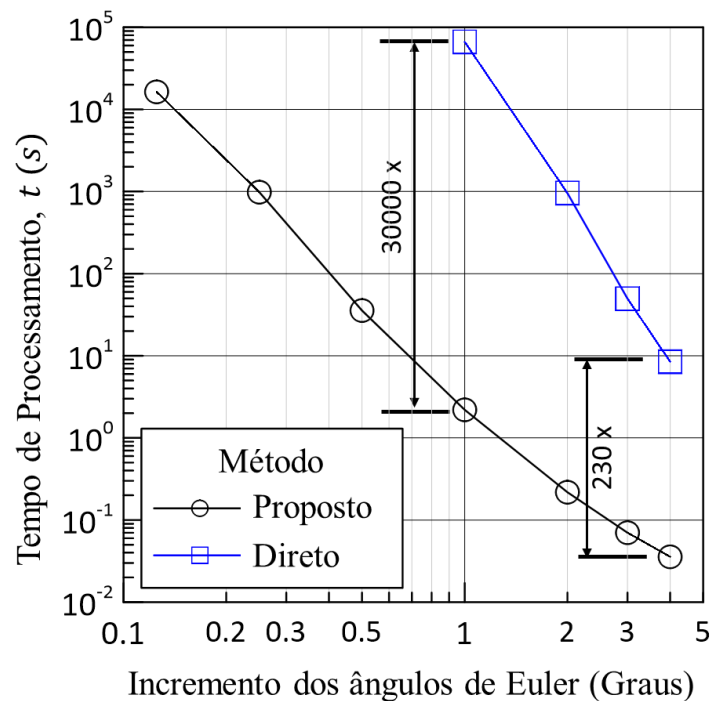


Figura 4.11 – Comparação entre o custo computacional dos algoritmos de busca de plano crítico utilizando o método direto e o método proposto (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

Conforme pode ser observado, através da análise da Fig. 4.11, os tempos de processamento dos algoritmos de busca estão diretamente relacionados ao tamanho do incremento angulares estabelecidos. As curvas apresentadas, cujo padrão de comportamento foi avaliado, seguem uma tendência potencial, de forma que o método direto apresenta um expoente igual a $-6,5$ e o método proposto igual a $-3,8$. O gráfico ainda permite visualizar que o método proposto é pelo menos 230 vezes mais rápido do que o método direto.

No que se refere ao impacto da discretização dos ângulos de Euler na precisão e na repetibilidade das previsões realizadas pelos algoritmos de busca direta e pelo método proposto. Para essa análise, utilizou-se também o teste de fadiga N04 como caso de estudo. Para esse teste, foram registrados resultados de ensaios em quatro corpos de prova, com uma vida média estimada de $3,1 \cdot 10^5$ ciclos e um desvio padrão de $8 \cdot 10^4$ (Niesłony e Macha 2007). A Fig. 4.12 ilustra um diagrama de dispersão que relaciona os incrementos dos ângulos de Euler ao comportamento das previsões de vida para ambos os algoritmos. Neste gráfico, os marcadores representam as médias das estimativas de vida previstas usando o método proposto (círculos) e o método direto (quadrados). As barras de erro estão associadas ao desvio padrão das estimativas de vida, permitindo uma comparação direta com o desvio padrão experimental da vida observada (que também é representado graficamente por uma barra de erro).

Com base na análise do diagrama apresentado na Fig. 4.12, observa-se que há um número maior de dados para o método proposto em detrimento do método direto, o que foi possível devido ao seu rápido processamento para determinação do plano crítico, que se dá em questão de segundos. Para o método proposto foi possível calcular a média e o desvio padrão da vida, para cada incremento dos ângulos de Euler, com base nos resultados de 7 simulações.

Avaliando o método direto, ainda na Fig. 4.12, observa-se que há dados disponíveis apenas para maiores valores de ângulos, o que aconteceu devido ao tempo processamento aumentar consideravelmente à medida que os incrementos angulares diminuía. Para esse método, foram realizadas 7 simulações, considerando os incrementos de 2, 3 e 5 graus; 4 simulações, para o incremento de 1 grau, com um tempo de 18 horas por simulação; e nenhuma simulação para passos angulares menores que 1 grau, uma vez que o custo computacional exigido foi considerado proibitivo.

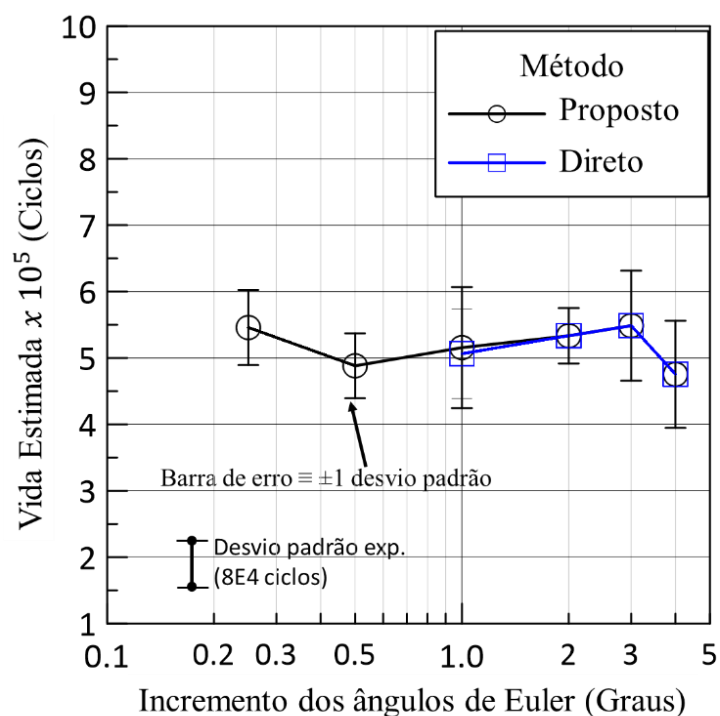


Figura 4.12 – Diagrama de dispersão comparando a influência do incremento dos ângulos de Euler no comportamento das previsões de vida considerando o método direto e o método proposto (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2022).

Apesar das dificuldades apontadas, associadas à geração de dados para análise, a Fig. 4.12 revela que as vidas por fadiga, e, conseqüentemente a amplitude da tensão cisalhante e a tensão normal máxima no plano crítico, exibem variações negligenciáveis em seus valores médios e na dispersão quando são realizadas buscas mais detalhadas com incrementos angulares inferiores a 3 graus.

CAPÍTULO 5 – Aplicação do Método Rápido de Máxima Variância em Condições de Amplitude Constante

Este capítulo avalia a aplicabilidade do Método Rápido de Máxima Variância (FMVM), inicialmente desenvolvido para a análise de fadiga multiaxial aleatória, em cenários de carregamento multiaxial de amplitude constante. Embora existam métodos consolidados para determinar a máxima amplitude da tensão cisalhante resolvida em condições de amplitude constante, este estudo investiga se o FMVM, projetado com foco em eficiência computacional, pode ser uma alternativa viável. A análise é conduzida comparando o FMVM com abordagens tradicionais, considerando critérios como precisão das estimativas de resistência à fadiga, custo computacional e comportamento em diferentes condições de carregamento. Este estudo explora a generalidade do FMVM e busca identificar os potenciais benefícios e limitações de sua aplicação em um domínio amplamente estudado, mas com desafios práticos relevantes.

5.1 Análise Comparativa

De forma a avaliar a eficiência do método proposto nesse trabalho, o FMVM, para condições de carregamento de amplitude constante, 179 conjuntos de dados de ensaios de fadiga realizados sob carregamento harmônico e 14 obtidos em condições de carregamento não harmônico foram examinados. Diversas fontes bibliográficas, disponíveis na literatura, foram consultadas para a obtenção desses dados que correspondem a diferentes materiais metálicos testados sob condições de carregamento controladas, representando situações de limite de fadiga. A seleção dos conjuntos considerou diferentes condições que influenciam os históricos de tensões, incluindo históricos com tensões de média nula e não nula, bem como configurações variadas, como carregamentos síncronos em fase, síncronos fora de fase e assíncronos em fase, entre outras. O Quadro 5.1 apresenta os materiais investigados e as referências consultadas para a análise. Nas Tabelas 5.1 e 5.2 é possível avaliar as condições de carregamento estudadas para os materiais investigados, apresentados no Quadro 5.1. Essas tabelas incluem dados como: as características básicas dos corpos de prova, os limites de resistência à fadiga, as condições de carregamento disponíveis nos testes e o número de ciclos associados à determinação da resistência à fadiga de longa duração. Informações adicionais sobre as condições de carregamento multiaxial, como amplitudes de tensão, tensões médias,

ângulos de fase, frequências, entre outros parâmetros, podem ser encontrados no Apêndice C.

Quadro 5.1 – Materiais investigados com suas respectivas referências bibliográficas

Material	Referência
34Cr4(a)	(Nadjitonon, 2010; Weber, 1999; Zenner, Heidenreich, e Richter, 1985)
34Cr4(b)	(Nadjitonon, 2010)
34Cr4(c)	(Liu, 1991)
St35(a)	(Liu, 1991)
St35(b)	(Nadjitonon, 2010; Weber, 1999)
St35(c)	(Liu 1991)
25CrMo4(a)	(Araújo <i>et al.</i> , 2011; Mamiya, Araújo, e Castro, 2009; Troost, Akin, e Klubberg, 1992; Weber, 1999)
25CrMo4(b)	(Liu, 1991)
42CrMo4V(a)	(Liu, 1991)
42CrMo4V(b)	(Liu, 1991)
GGG60	(Castro <i>et al.</i> , 2014; Liu, 1991; Zenner <i>et al.</i> , 1985)
30NCD16(a)	(Froustey e Lasserre, 1989; Mamiya <i>et al.</i> , 2009; Susmel, 2013)
30NCD16(b)	(Castro <i>et al.</i> , 2014; Dubar, 1992; Susmel, 2013; Weber, 1999)
30NCD16(c)	(Araújo <i>et al.</i> , 2011; Castro <i>et al.</i> , 2009, 2014; Mamiya <i>et al.</i> , 2009; Susmel, 2013)
Hard Steel	(Araújo <i>et al.</i> , 2011; Castro <i>et al.</i> , 2014; Mamiya <i>et al.</i> , 2009; Susmel, 2013; Weber, 1999)
39NiCrMo3	(Bernasconi, Foletti, e Papadopoulos, 2008)

Tabela 5.1 – Dados experimentais e propriedades de resistência à fadiga para Corpos de Prova Lisos sob Carregamentos Senoidais (Propriedades mecânicas em MPa).

Material	S_u	S_y	σ_{-1}	τ_{-1}	N_0	Caminho Carregamento			Corpo de Prova
						Long.	Cir.	Pres.	
34Cr4(a)	858	700	415	259	2,00E+06	PP	T	—	Cilindro Maciço
34Cr4(b)	710	550	343	204	1,00E+06	PP	T	Sim	Cilindro Vazado
34Cr4(c)	795	657	410	256	1.5E6	PP	T	—	Cilindro Maciço
St35(a)	392	294	206	123	1.5E6	PP	T	Sim	Cilindro Vazado
St35(b)	395	245	206	123	1.5E6	PP	T	Sim	Cilindro Vazado
St35(c)	543	340	230	130	1.5E6	PP	T	Sim	Cilindro Vazado
25CrMo4(a)	801	672,3	361	228	2,00E+06	PP	T	Sim	Cilindro Vazado
25CrMo4(b)	801	672,3	340	228	2,00E+06	PP	T	—	Cilindro Maciço
42CrMo4V(a)	1025	888	398	265	—	PP	T	—	Cilindro Maciço
42CrMo4V(b)	1142	1003	485	315	—	PP	T	—	Cilindro Maciço
GGG60	815	516	275	249	—	PP	T	—	Cilindro Maciço
30NCD16(a)	1160	1020	660	410	1,00E+06	RB	T	—	Cilindro Maciço
30NCD16(b)	1200	1080	690	428	1,00E+06	RB	T	—	Cilindro Maciço
30NCD16(c)	1020	1080	585	405	—	RB	T	—	Cilindro Maciço
Hard Steel	681	401,3	313,9	196,2	—	PB.	T	—	Cilindro Maciço
39NiCrMo3	856	625	367,5	265	3,00E+06	PP	T	—	Cilindro Maciço

Long. – Longitudinal, Circ. – Tangencial, Pres. – Pressão interna, PP – Tração-Compressão (Push-Pull), PB – Flexão Plana (Plane Bending), RB – Flexão Rotativa (Rotating Bending), T – Torção (Torsion)

Tabela 5.2 – Dados Experimentais e Propriedades de Resistência à Fadiga para Corpos de Prova Lisos sob Carregamentos Não-Senoidais, Frequências Variáveis ou Sequências de Tempo Complexas (Propriedades Mecânicas em MPa).

Material	S_u	S_y	σ_{-1}	τ_{-1}	N_0	Caminho Carregamento			Corpo de Prova
						Long.	Cir.	Pres.	
34Cr4(a)	858	700	415	259	2,00E+06	PP	T	—	Cilindro Maciço
St35(c)	543	340	230	130	1.5E6	PP	T	Sim	Cilindro Vazado
25CrMo4(b)	801	672,3	340	228	2,00E+06	PP	T	—	Cilindro Maciço

Long. – Longitudinal, Circ. – Tangencial, Pres. – Pressão interna, PP – Tração-Compressão (Push-Pull), PB – Flexão Plana (Plane Bending), RB – Flexão Rotativa (Rotating Bending), T – Torção (Torsion)

5.1.1 Análise considerando Carregamentos Harmônicos

Uma das análises realizadas neste trabalho foi o impacto das estratégias de previsão de resistência à fadiga sob condições de carregamento harmônico (abordado na seção 2.1.1.1). As estratégias avaliadas são apresentadas no Quadro 5.2, com suas respectivas siglas adotadas, de forma a simplificar a compreensão dos resultados apresentados neste trabalho.

Quadro 5.2 – Estratégias de previsão da resistência à fadiga adotadas.

Estratégia	Sigla Utilizada
Método Rápido da Máxima Variância – Projeção	FMVM-P
Método Rápido da Máxima Variância – Simplificado	FMVM-S
Método da Maior Envoltória Retangular	MRH
Método do Momento de Inércia	MOI
Método de Socie Modificado	SOCIE-M
Método de Socie	SOCIE

Para a realização da análise, foram gerados históricos de tensões com uma taxa de amostragem de 64 amostras por período. A busca pelo plano crítico foi conduzida no intervalo $[0, 180^\circ)$ tanto para θ quanto para ϕ , utilizando incrementos de 2° . Além disso, para o método MRH, o ângulo α sofreu variações no intervalo $[0, 180^\circ)$ em incrementos de 1° . Os critérios de fadiga multiaxial avaliados foram aqueles propostos por Susmel e Lazzarin (Susmel e Lazzarin, 2002; Susmel, Tovo, e Lazzarin, 2005) e Findley (Castro *et al.*, 2014; W. N. Findley 1959). Os dados para esta análise foram divididos com base nos níveis de tensão média em grupos de média zero e diferente de zero.

A classificação dos dados se deu, ainda, de acordo com as características dos históricos de carregamento em carregamentos síncronos em fase (proporcionais) e não proporcionais, que incluem categorias síncronas fora de fase, assíncronas em fase e

assíncronas fora de fase. Os testes de carregamento proporcional, numerados de 1 a 16 e de 50 a 90, conforme relatados na literatura, foram especificamente analisados.

Por fim, para medir a diferença entre os limites de fadiga estimados pelos critérios de falha de Susmel e Lazzarin ($S - L$) e Findley e aqueles observados experimentalmente, utilizou-se o Índice de Erro (IE), definido na Eq. (5.1) (Castro *et al.*, 2014).

$$IE = \frac{\max_{\theta, \phi} (\tau_a + \kappa \sigma_{n, max})^{-\lambda}}{\lambda} \quad (5.1)$$

onde τ_a e $\sigma_{n, max}$ são quantidades calculadas com base nas resistências à fadiga de longa duração observadas. Valores positivos e negativos do erro estão associados, respectivamente, a estimativas conservativas e não conservativas. Avaliou-se, ainda, influência das estratégias de cálculo de τ_a na precisão dessas estimativas de limite de fadiga.

5.1.2 Análise considerando Carregamentos Não Harmônicos

Após estabelecer a eficácia dos critérios de falha e das estratégias de estimativa de $\tau_{n, a}$ na previsão da resistência à fadiga sob carregamentos harmônicos, a complexidade introduzida pelos carregamentos não harmônicos foi examinada. Essa análise baseia-se em conjuntos de dados experimentais de ligas 25CrMo4, 34Cr4 e St35, detalhados em Liu (Liu, 1991). Os dados incluem testes realizados sob condições de carregamento não convencionais, conforme descrito no Apêndice D. Corpos de prova de 34Cr4 foram testados com um caminho de tensão retangular, enquanto para o aço 25CrMo4, os corpos de prova foram submetidos a quatro programas distintos de carregamento proporcional em etapas, apresentando ciclos harmônicos intermitentes. Já os corpos de prova de aço St35 foram avaliados sob condições de carregamento cíclico trapezoidal e triangular.

Os históricos de tensão foram gerados com uma taxa de amostragem de 720 amostras por período. A análise do plano crítico foi realizada dentro de um intervalo de $[0, 180^\circ)$ para os ângulos θ e ϕ , com incrementos de 3 graus. Além disso, o ângulo α , utilizado no método MRH, foi variado de $[0, 180^\circ)$ em incrementos de 1 grau.

5.1.3 Análise Quantitativa dos Fatores que Influenciam o Comportamento do IE

Nas Seções 5.1.1 e 5.1.2, foi realizado um estudo qualitativo que evidenciou a influência de diversos fatores sobre o índice de erro, como a tensão média, a relação de fase, o sincronismo entre os componentes de tensão, o critério de falha adotado e a

metodologia utilizada para calcular $\tau_{n,a}$. Para compreender e quantificar de forma sistemática o impacto conjunto desses fatores, torna-se essencial a aplicação de uma abordagem estatística robusta. Nesse contexto, foi realizada uma análise de variância (ANOVA) (Cao e Zhang, 2014; Gibbons e Chakraborti, 2014; Hochberg, 1987), para investigar a contribuição de cada fator para a variabilidade do índice de erro. Além disso, análises de comparação múltipla (Cao e Zhang, 2014; Hochberg, 1987) foram utilizadas para aprofundar a interpretação dos resultados, e pela apresentação de medidas resumidas. Essas ferramentas estatísticas permitem uma avaliação detalhada da distribuição e da relevância dos índices de erro em função dos diferentes fatores considerados.

No desenvolvimento desta investigação, foram considerados os seguintes fatores:

- a) Estratégia de Busca de $\tau_{n,a}$, com condições MRH, FMVM-P, FMVM-S, MOI, SOCIE e SOCIE-M;
- b) Critério de Falha: diferenciado entre Susmel-Lazzarin (S-L) e Findley;
- c) Tensão Média: indicando a presença (1) ou ausência (0) de tensão média nos históricos dos componentes de tensão;
- d) Presença de Fase: indicando a presença (1) ou ausência (0) de fase entre σ_{xx} e os componentes de tensão σ_{yy} ou τ_{xy} ;
- e) Sincronismo: indicando a presença (1) ou ausência (0) de sincronismo entre os componentes de tensão.

5.1.4 Análise da Influência dos Fatores no IE: Abordagem de Comparação Múltipla

Na Seção 5.1.3, realizou-se, por meio da análise de variância, a identificação da influência de fatores relacionados à análise computacional e às condições de carregamento nas previsões de resistência à fadiga, o que é de fundamental importância para compreender a robustez das estratégias preditivas e identificar os principais fatores que influenciam os resultados. De forma a aprimorar os resultados, observar mais claramente as diferenças sutis entre os níveis dos fatores e aprofundar o entendimento sobre seus respectivos papéis, foram empregadas técnicas de comparação múltipla para examinar e comparar os efeitos individuais de cada fator no Índice de Erro.

O objetivo dessa análise consiste em identificar as influências interconectadas e isolar o impacto específico de cada fator, permitindo uma análise abrangente de seus efeitos, tanto individuais quanto combinados. Esse procedimento analítico adicional torna-se fundamental para aprimorar as conclusões obtidas e impulsionar o

desenvolvimento de modelos de previsão de resistência à fadiga mais avançados e precisos. Dentre as avaliações realizadas, tem-se:

- Avaliação comparativa do impacto dos critérios de falha e da estratégia de pesquisa de $\tau_{n,a}$ no índice de erro; e
- Avaliação comparativa do impacto do sincronismo, fase, tensão média e critérios de falha no índice de erro.

5.1.5 Custo Computacional

Um dos fatores avaliados neste trabalho foi o tempo de processamento para identificação do plano crítico dos algoritmos propostos para cada teste de fadiga. O computador utilizado nas simulações contém processador Intel(R) Core (TM) i5-10505 (6 núcleos e 12 threads) com frequência de 3,19 GHz e 8 GB de RAM (DDR4, frequência: 1330 MHz). Os tempos foram registrados usando as funções TIC e TOC do MATLAB. As análises foram organizadas em subtópicos centrados em dois aspectos principais:

- a) A influência do número de pontos na convergência dos resultados e no tempo de processamento: onde adotou-se discretização dos ângulos de busca θ e ϕ em incrementos de 1 grau para toda a busca no plano crítico. Especificamente, no algoritmo MRH, o retângulo circunscrito foi rotacionado em passos de $\Delta\gamma = 10^\circ$, seguindo as diretrizes recomendadas em (Araújo *et al.*, 2011).
- b) O efeito da discretização dos ângulos de Euler na convergência dos resultados e no tempo de processamento: onde foram analisados vários incrementos angulares ($\Delta\theta$ e $\Delta\phi$) definidos em 9, 6, 3, 1,5, 0,75 e 0,375 graus, buscando o equilíbrio ideal entre eficiência computacional e precisão nas previsões de resistência à fadiga.

Essas investigações oferecem uma visão abrangente sobre a otimização da análise de fadiga, equilibrando eficiência computacional e precisão científica.

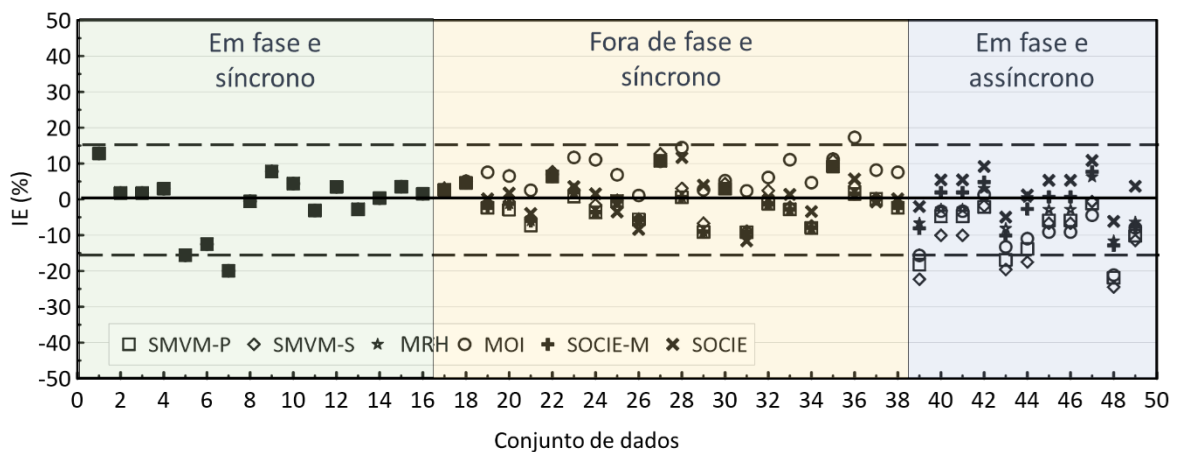
5.2 Resultados para Carregamento de Amplitude Constante

5.2.1 Para Análise considerando Carregamentos Harmônicos

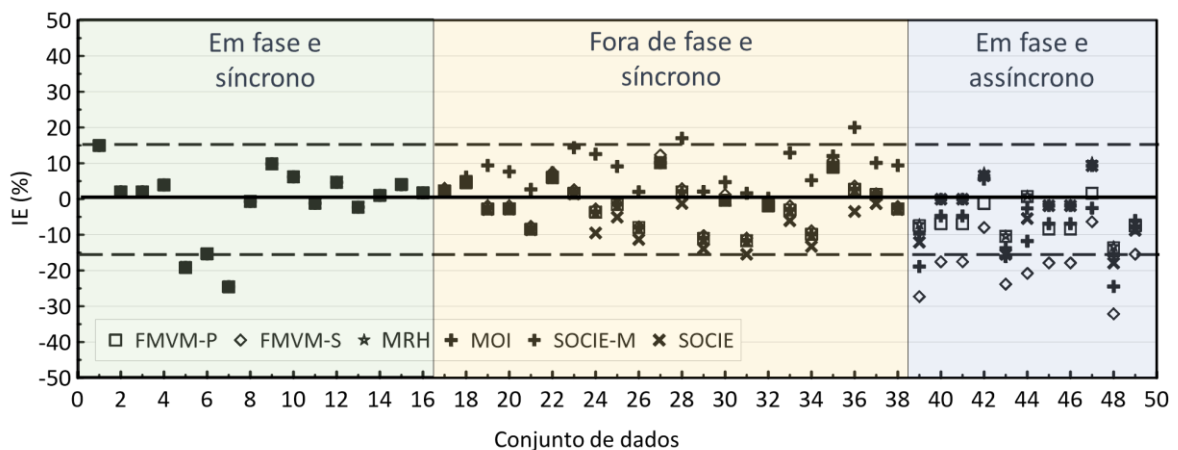
Tendo por base as estratégias apresentadas na seção 5.1.1 deste trabalho, avaliou-se o impacto das estratégias de previsão de resistência à fadiga sob condições de carregamento harmônico. Os resultados do índice de erro para o critério de Susmel e

Lazzarin são apresentados na Fig. 5.1(a) e Fig. 5.2(a), enquanto a Fig. 5.1(b) e Fig. 5.2(b) exibem os resultados para o critério de Findley.

Ao avaliar as Figs. 5.1(a) (Susmel e Lazzarin) e 5.1(b) (Findley), observa-se que ambos os critérios de falha apresentam dispersões de índices de erro semelhantes, centradas em torno de zero, o que indica a ausência de viés sistemático nas condições avaliadas. Apesar disso, a densidade e a dispersão dos pontos, que refletem a precisão das previsões, exigem uma investigação estatística mais aprofundada para uma compreensão mais clara.



(a)



(b)

Figura 5.1 – Índice de erro nas previsões de falha por fadiga considerando testes realizados sob condições de tensão média nula: (a) Critério de Susmel e Lazzarin e (b) Critério de Findley (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

Ainda tomando por base as Figs. 5.1(a) e 5.1 (b), é possível notar que, sob carregamentos síncronos em fase, ambos os critérios — Susmel e Lazzarin e Findley — apresentam índices de erro em torno de zero, com a maioria das previsões situando-se

dentro de uma faixa de $\pm 15\%$, o que demonstra uma boa concordância com os dados experimentais. Um aspecto importante a ressaltar é que os símbolos quadrados cheios, obtidos para esse tipo de carregamento, se devem a concordância entre os resultados obtidos para todas as estratégias avaliadas.

Para carregamentos síncronos fora de fase e assíncronos em fase, ambos os critérios mostram dificuldades em prever com precisão a resistência à fadiga. Isso é evidenciado por uma maior dispersão dos índices de erro e por vieses sistemáticos que deslocam as previsões para fora dos limites aceitáveis, sugerindo tendências de superestimação ou subestimação.

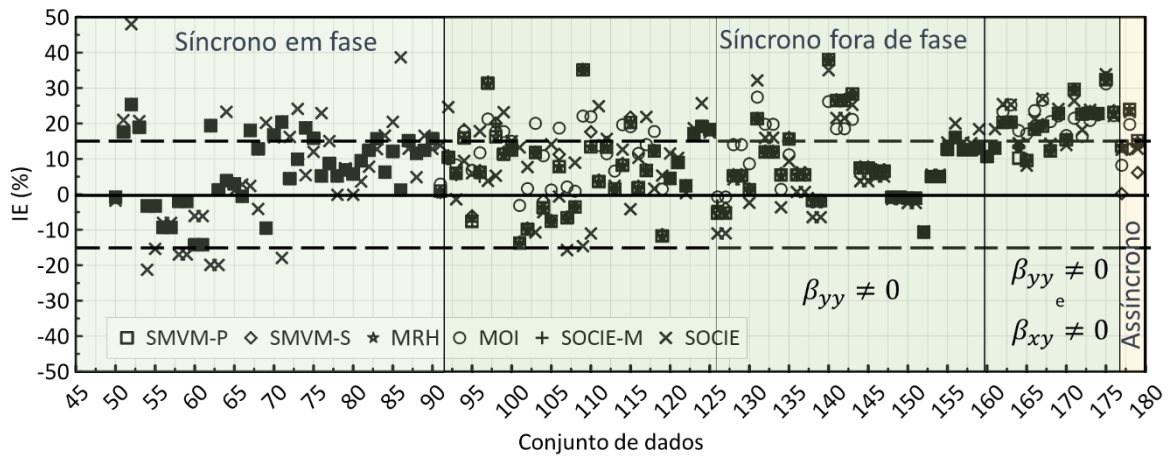
No que diz respeito ao impacto das estratégias de estimativa de $\tau_{n,a}$ no comportamento do índice de erro, abordagens como MRH, FMVM-P e SOCIE-M demonstram maior precisão, com índices de erro próximos de zero, refletindo previsões bem alinhadas com os dados experimentais. Essas estratégias mostram-se robustas ao capturar as nuances da fadiga, sem apresentar viés significativo, seja conservador ou não conservador.

Por outro lado, a estratégia MOI exhibe índices de erro predominantemente acima da linha zero em carregamentos fora de fase, indicando superestimações não conservadoras da resistência à fadiga. Esse comportamento evidencia limitações desse critério em lidar com interações complexas de tensões. De forma semelhante, índices de erro bem abaixo de zero apontam para subestimações conservadoras excessivas, comprometendo a precisão das previsões.

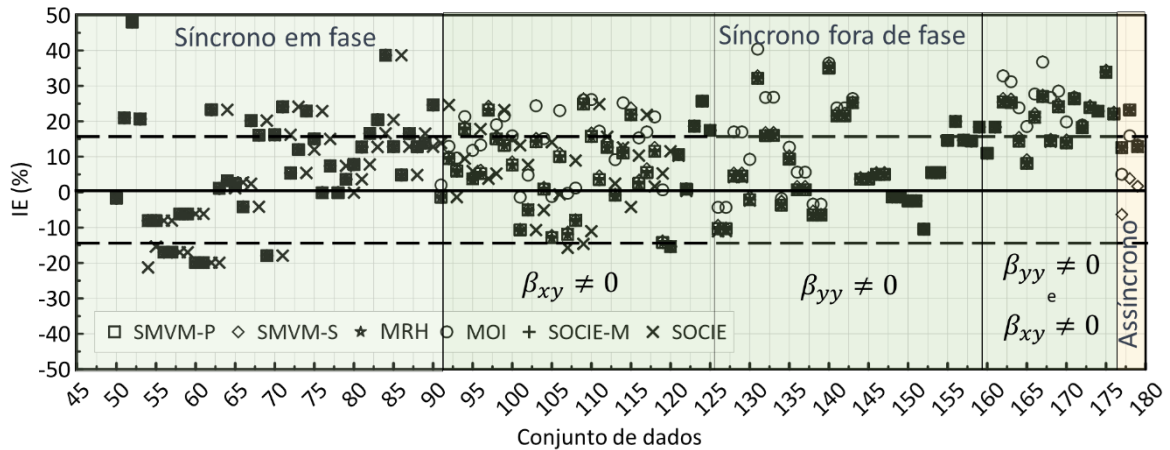
Entre as estratégias SOCIE e SOCIE-M, a SOCIE-M se destaca pela maior consistência dentro da faixa aceitável de erro de $\pm 15\%$ e por apresentar menor dispersão em previsões tanto conservadoras quanto não conservadoras. Essa característica ressalta a adequação da SOCIE-M para fornecer estimativas mais confiáveis e precisas em diferentes condições de carregamento, tornando-a uma opção mais robusta para previsão de resistência à fadiga em aplicações de engenharia.

A Fig. 5.2 apresenta a análise das previsões de falha por fadiga sob tensões médias não nulas, evidenciando diferenças no comportamento dos critérios avaliados. As estratégias de Susmel e Lazzarin, Fig. 5.2(a), e de Findley, Fig. 5.2(b), exibem desempenho semelhante em carregamentos síncronos em fase, com índices de erro moderadamente distribuídos em torno da linha zero, sugerindo previsões equilibradas. Entretanto, sob carregamentos síncronos fora de fase, os índices de erro inclinam-se

para valores acima de zero, indicando um viés não conservador nas estimativas de resistência à fadiga.



(a)



(b)

Figura 5.2 – Índice de erro nas previsões de falha por fadiga considerando testes realizados sob condições de tensão média não nula: (a) Critério de Susmel e Lazzarin e (b) Critério de Findley (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

A avaliação do desempenho das estratégias MRH, MOI, FMVM-P, FMVM-S, SOCIE e SOCIE-M na previsão da resistência à fadiga sob tensões médias não nulas revela variações significativas na eficácia, destacando discrepâncias importantes nas estimativas de resistência à fadiga. As estratégias MRH, FMVM-P e SOCIE-M se destacam, apresentando índices de erro em torno de zero, o que indica previsões equilibradas e alinhadas aos dados experimentais, especialmente em condições de carregamento síncrono em fase. Essas abordagens demonstram a maior precisão, com baixa dispersão e a maioria das estimativas dentro da faixa de erro aceitável de $\pm 15\%$.

Ao comparar diretamente as estratégias SOCIE e SOCIE-M, percebe-se que a SOCIE-M oferece maior consistência e precisão, evidenciando melhorias metodológicas que otimizam a interpretação de condições de carregamento complexas. Apesar de ser uma abordagem robusta, a estratégia SOCIE apresenta uma dispersão mais elevada nos índices de erro, o que pode comprometer a precisão geral das previsões.

A comparação entre os resultados apresentados nas Figs. 5.1 e 5.2 evidencia a influência marcante da tensão média nas previsões de resistência à fadiga. Na Fig. 5.1, que considera condições de tensão média nula, os índices de erro se distribuem de forma mais uniforme em torno da linha zero, com menor dispersão. Em contraste, a Fig. 5.2 revela uma tendência de desvio além da linha base, especialmente em carregamentos síncronos fora de fase. Esse comportamento sugere que, sob tensões médias não nulas, os modelos analisados tendem a superestimar a resistência à fadiga, indicando que a presença de tensão média adiciona complexidades que não são completamente capturadas pelos critérios avaliados.

5.2.2 Para Análise considerando Carregamentos Não Harmônicos

Considerando dados experimentais de ligas 25CrMo4, 34Cr4 e St35, conforme descrito na seção 5.1.2, avaliou-se ainda o impacto das estratégias de previsão de resistência à fadiga sob condições de carregamento não harmônico. As Figs. 5.3 e 5.4 apresentam o comportamento dos Índices de Erro (IE) estimados para os critérios de Susmel e Lazzarin e de Findley, respectivamente.

A análise dos resultados apresentados nas Figs. 5.3 e 5.4 demonstra que as características dos históricos de carregamento exercem um papel crucial na determinação do Índice de Erro (IE), independentemente das estratégias de busca no plano ou dos critérios de falha utilizados. Carregamentos harmônicos intermitentes e trapezoidais com tensão média nula (casos 1 a 5) geralmente resultam em estimativas conservadoras ou índices de erro próximos de zero, indicando que os modelos apresentam boa robustez sob essas condições específicas.

Por outro lado, carregamentos triangulares e trapezoidais com tensão média não nula (incluindo a presença de defasagem e/ou assincronia) frequentemente produzem índices de erro não conservadores, evidenciando as limitações dos modelos em representar adequadamente os efeitos combinados desses fatores nas previsões de

resistência à fadiga. Esse comportamento reforça um padrão já identificado em análises anteriores de índices de erro sob condições de carregamento harmônico.

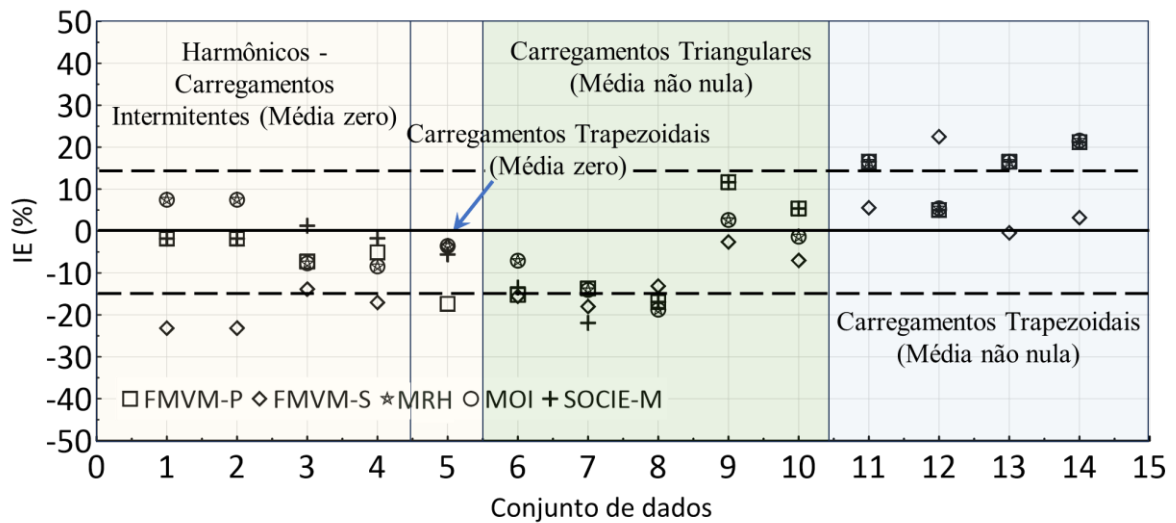


Figura 5.3 – Índice de Erro nas Previsões de Falha por Fadiga com Base no Critério de Susmel e Lazzarin sob Condições de Carregamento Não Harmônico e Representação Gráfica dos Caminhos de Tensão de Cisalhamento Resolvida nos Planos Críticos (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

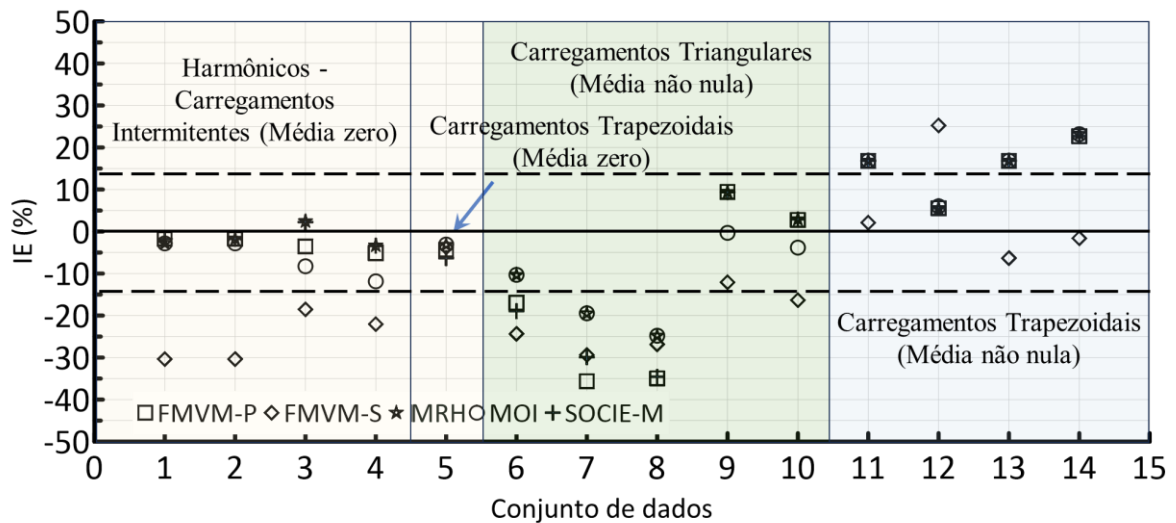


Figura 5.4 – Índice de Erro nas Previsões de Falha por Fadiga com Base no Critério de Findley sob Condições de Carregamento Não Harmônico e Representação Gráfica dos Caminhos de Tensão de Cisalhamento Resolvida nos Planos Críticos (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

As diferenças identificadas tornam-se evidentes nos resultados das estratégias de busca de $\tau_{n,a}$, com a estratégia FMVM-P apresentando uma leve superioridade em relação às estratégias MRH, SOCIE-M e MOI no que diz respeito à precisão das previsões. Contudo, a pequena magnitude dessas diferenças destaca a importância de fatores práticos, como facilidade de implementação e familiaridade metodológica, no

processo de escolha da estratégia mais adequada. O desempenho variável da estratégia FMVM-S sugere possíveis limitações de confiabilidade, possivelmente associadas às simplificações empregadas no cálculo de $\tau_{n,a}$, conforme descrito na Eq. (4.18).

Adicionalmente, ao avaliar a influência dos critérios de falha de Findley e de Susmel e Lazzarin na qualidade das previsões de resistência à fadiga, observa-se que o critério de Findley apresenta maior consistência sob condições de carregamentos harmônicos intermitentes, enquanto o critério de Susmel e Lazzarin se destaca em situações envolvendo carregamentos trapezoidais. Esses resultados sublinham a complexidade inerente à previsão de resistência à fadiga em cenários de carregamento variados e complexos.

5.2.3 Comportamento do Índice de Erro

Conforme descrito na seção 5.1.3, realizou-se uma análise de variância (ANOVA) para examinar a contribuição de fatores como a tensão média, fase e sincronismo entre os componentes de tensão, critério de falha e estratégia de cálculo de $\tau_{n,a}$, para a variabilidade do índice de erro. Os resultados da ANOVA são apresentados na Tabela 5.3 e fornecem importantes *insights* sobre os fatores que influenciam o Índice de Erro (IE) nas previsões de resistência à fadiga em condições multiaxiais.

Tabela 5.3 – Resultados da Análise de Variância para Avaliar o Impacto das Variáveis no Índice de Erro.

Fatores	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrad o Médio	F	Valor-p (%)
Estratégia de Pesquisa de $\tau_{n,a}$	2.64E+03	5	528,1	3,9	0,16
Critério de Falha	2.02E+02	1	202,4	1,5	22,09
Presença de Tensão Média	4.21E+04	1	42088,4	311,7	0
Presença de Fase	3.23E+03	1	3227,5	23,9	0
Sincronismo	3.65E+02	1	365,4	2,7	10,01
‘Erro’	3.11E+05	2306	135		
‘Total’	3.73E+05	2315			

A partir da Tabela 5.3, observa-se que o fator Estratégia de Pesquisa de $\tau_{n,a}$ apresenta um valor F de 3,9 e um valor-p de 0,16%, indicando um impacto significativo, embora moderado. Esses dados sugerem que mudanças nas abordagens computacionais podem influenciar de maneira substancial a precisão das estimativas de resistência à fadiga. Em contrapartida, o fator Critério de Falha demonstra um valor F de 1,5 e um valor-p de 22,1%, evidenciando uma influência menos expressiva sobre o IE. Isso indica

que as diferenças entre os critérios de falha utilizados neste estudo têm um impacto relativamente pequeno nas variações do índice de erro, não sendo um fator crítico para a precisão das previsões analisadas.

No que diz respeito aos fatores relacionados às condições de carregamento, a presença de tensão média e a presença de fase destacam-se como altamente significativas, apresentando valores F de 311,7 e 23,9, respectivamente, ambos com valores-p de 0%. Esses resultados indicam que esses fatores exercem uma influência marcante sobre o índice de erro.

Por outro lado, o fator Sincronismo, com um valor F de 2,7 e um valor-p de 10,01%, não demonstra significância estatística, sugerindo que não há evidências suficientes para confirmar um impacto relevante do sincronismo no comportamento do índice de erro no nível de confiança desejado. A ausência de significância estatística aponta para a incerteza dos possíveis efeitos do sincronismo, indicando que qualquer influência sobre o índice de erro permanece inconclusiva com os dados disponíveis.

5.2.4 Avaliação Comparativa do Impacto dos Critérios de Falha e da Estratégia de Pesquisa de $\tau_{n,a}$ no Índice de Erro

Dentre as análises conjuntas, empregando técnicas de comparação múltipla (abordadas na seção 5.1.4) para examinar e comparar os efeitos individuais de cada fator no índice de erro, foram avaliados a influência dos critérios de falha e das estratégias de pesquisa de $\tau_{n,a}$, cujos resultados podem ser observados na Fig. 5.5.

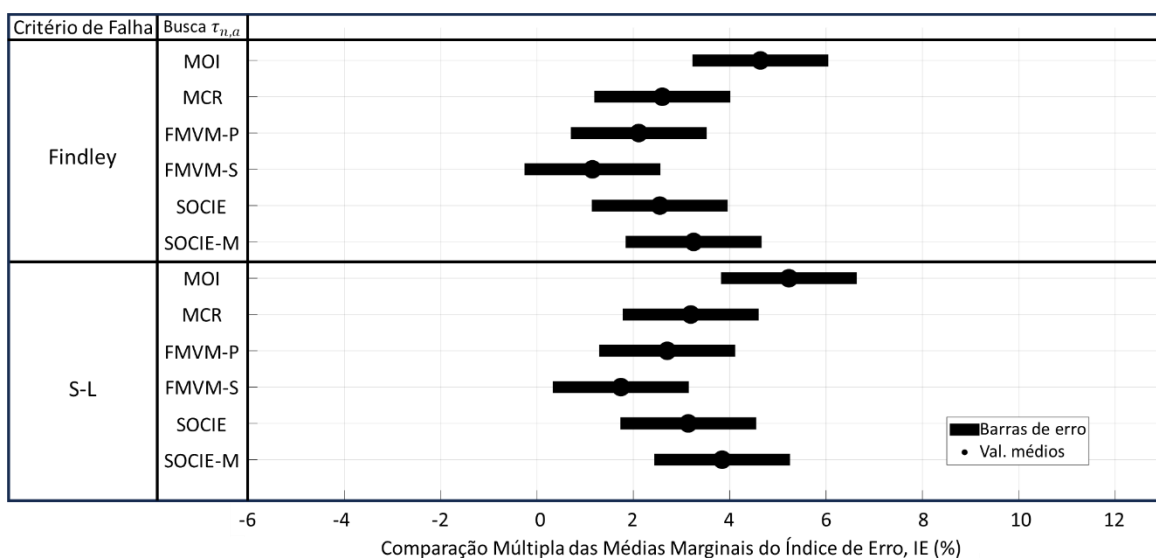


Figura 5.5 – Influência dos Critérios de Falha e da Estratégia de Pesquisa de $\tau_{n,a}$ no Índice de Erro (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

A análise apresentada na Fig. 5.5 facilita a compreensão de como as interações entre esses dois fatores influenciam a precisão e a confiabilidade das previsões de falha em materiais. Para investigar o impacto isolado do critério de falha ou da estratégia de busca de $\tau_{n,a}$ no comportamento do Índice de Erro (IE), um dos fatores é mantido constante enquanto as variações do IE são analisadas em função do outro.

No caso do critério de falha, a estratégia de cálculo é mantida fixa, permitindo a comparação das variações do IE entre os critérios de Findley e Susmel-Lazzarin (S-L). Essa abordagem possibilita avaliar exclusivamente o efeito do critério de falha. A análise dos dados revelou uma sobreposição considerável entre as barras de erro associadas aos critérios de Findley e Susmel-Lazzarin (S-L) para cada estratégia de cálculo de $\tau_{n,a}$. Esse resultado sugere que as diferenças nos índices de erro decorrentes do critério de falha não são estatisticamente significativas.

Uma análise complementar examinou o impacto das estratégias de cálculo mantendo o critério de falha fixo e comparando as barras de erro entre diferentes estratégias. Essa metodologia permite avaliar como cada estratégia de cálculo influencia o Índice de Erro (IE) sob um mesmo critério de falha.

Os resultados indicam que estratégias de busca de $\tau_{n,a}$, como MRH, SOCIE, FMVM-P e SOCIE-M, apresentam barras de erro sobrepostas, sugerindo uma eficácia similar na redução do IE. Essa consistência evidencia que não há diferenças significativas na precisão preditiva entre essas abordagens. Embora a estratégia MOI tenda a apresentar valores de IE ligeiramente mais elevados, a diferença não é suficientemente acentuada para ser considerada substancial. Isso sugere que, apesar de sua menor eficácia relativa, o MOI ainda exibe um desempenho comparável às demais estratégias.

5.2.5 Avaliação Comparativa do Impacto do Sincronismo, Fase, Tensão Média e Critérios de Falha no Índice de Erro

Dando continuidade à análise sobre os fatores que influenciam os históricos de carregamento e as condições de estimativa para prever a resistência à fadiga em situações multiaxiais, a Fig. 5.6 apresenta o Índice de Erro (IE) sob diferentes condições de carregamento e critérios de falha. Esse gráfico, desenvolvido como parte de uma análise ad hoc subsequente à análise de variância, foi projetado para investigar detalhadamente a influência de variáveis como sincronismo, fase, tensão média e critérios de falha no comportamento do IE.

No gráfico apresentado na Fig. 5.6, os grupos identificados de A a H representam combinações específicas desses fatores, analisados sistematicamente para entender seus impactos nas previsões de resistência à fadiga. Ao explorar os padrões e as discrepâncias observadas neste gráfico, busca-se identificar os impactos práticos de cada fator e refinar o entendimento de seus papéis nas metodologias de previsão de fadiga, o que é realizado nos subtópicos a seguir.

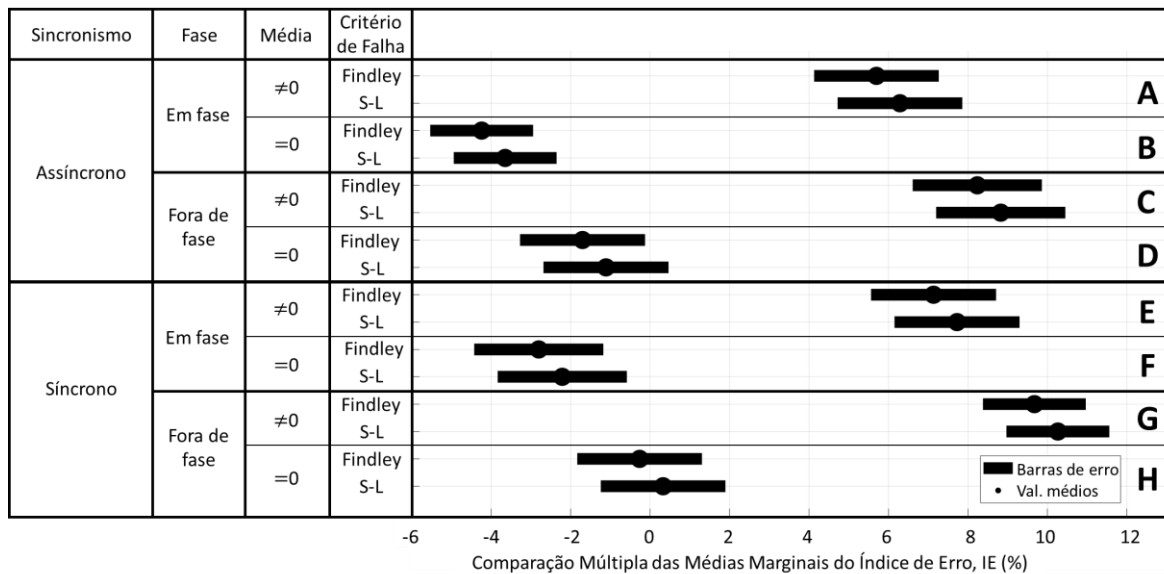


Figura 5.6 – Influência do Sincronismo, Fase, Tensão Média e Critérios de Falha no Índice de Erro (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

5.2.5.1 Impacto do Sincronismo

Através da análise da Fig. 5.6 observa-se variações sutis nos Índices de Erro (IE) entre diferentes configurações de sincronismo, especialmente nas comparações entre os pares de grupos (A vs. E, B vs. F, C vs. G, D vs. H). Embora as condições assíncronas apresentem uma leve tendência de aumento no IE, a significativa sobreposição das barras de erro indica que essas diferenças não possuem significância estatística.

Esses resultados sugerem que, apesar de o sincronismo poder exercer uma influência marginal sobre o IE, esse efeito não é suficientemente robusto para ser considerado determinante (valor $F = 2,7$; valor- $p = 10\%$). Assim, tanto a análise de variância quanto os testes ad hoc confirmam que o sincronismo, embora relevante em contextos específicos, não afeta de forma significativa o comportamento geral do IE.

5.2.5.2 Impacto da Presença de Tensão Média

No que se refere à tensão média, a análise mostrou um padrão consistente ao comparar grupos que diferem quanto à sua presença, considerando os critérios de falha de Findley e Susmel-Lazzarin (S-L) (pares A vs. B, C vs. D, E vs. F, G vs. H). Os grupos com tensão média apresentam índices de erro consistentemente mais elevados, indicando que a presença de tensão média exerce uma influência significativa nas previsões de resistência à fadiga, resultando em estimativas menos conservadoras sob condições de tensão média não nula. Esse efeito marcante da tensão média no comportamento do Índice de Erro (IE) foi previamente evidenciado na análise de variância, que apontou a tensão média como um dos fatores mais influentes (valor $F = 311,7$; valor- $p = 0\%$). Esses resultados reforçam que a tensão média é um elemento crucial para entender as variações no IE, destacando uma tendência sistemática de superestimação da resistência à fadiga na presença desse fator.

5.2.5.3 Impacto da Presença de Fase

Ao examinar o impacto da presença de fase no Índice de Erro (IE), através da análise dos pares (A vs. C, B vs. D, E vs. G, F vs. H), na Fig. 5.6, observa-se que estas diferem principalmente pela condição de fase durante o carregamento. Para a condição assíncrona, os carregamentos fora de fase resultaram em IE mais altos para o par A vs. C. Ao comparar B com D é possível notar que o IE do fora de fase é menor. No entanto, o erro em B é conservativo. O mesmo acontece para os casos em que o carregamento é síncrono, ao avaliar E vs. G, tem-se um IE mais elevado considerando a condição fora de fase. Para o par F vs. H, o IE é menor nessa condição, sendo o erro em F conservativo. Esse comportamento evidencia a influência significativa da fase nas previsões de resistência à fadiga, sugerindo que condições fora de fase introduzem variabilidades não capturadas adequadamente pelos critérios de falha empregados. Isso pode comprometer a confiabilidade das estimativas de segurança em aplicações estruturais.

Os resultados da análise de variância corroboram essa observação, destacando a “Presença de Fase” como um fator estatisticamente significativo, com valores $F = 23,9$ e valor- $p = 0\%$. Esses dados confirmam o impacto substancial da fase no comportamento do índice de erro.

5.2.5.4 Impacto dos Critérios de Falha

A comparação dentro de cada par de grupos que refletem condições de carregamento idênticas (A a H) revela diferenças perceptíveis entre os critérios de Findley e Susmel-Lazzarin (S-L), embora essas diferenças não sejam estatisticamente significativas. Esse resultado é corroborado pela análise de variância (ANOVA), que apresenta um valor F de 1,5 e um valor-p de 22,09%. Isso indica que, apesar das distinções visuais nos valores do IE, essas variações não exercem impacto relevante no comportamento geral do índice.

Portanto, a escolha entre os critérios de Findley e S-L pode ser guiada mais por questões de preferência ou praticidade do que por uma vantagem estatística, já que ambos demonstram desempenho comparável nas condições analisadas.

5.2.6 Fatores Críticos que Influenciam as Previsões de Fadiga

Ao comparar e avaliar de forma concisa os resultados apresentados nas Figs. 5.5 e 5.6 observa-se a complexidade envolvida na avaliação da resistência à fadiga sob condições multiaxiais, evidenciando interações significativas entre diversos fatores que afetam os históricos de carregamento. Embora as metodologias de estimativa de $\tau_{n,a}$ mostrem consistência na determinação dos parâmetros utilizados pelos critérios de falha ($\tau_{n,a}$ e $\sigma_{n,max}$), fica evidente que a precisão das previsões é fortemente condicionada às características específicas do carregamento. Além disso, os critérios de falha mais comumente aplicados frequentemente apresentam limitações para capturar de forma adequada as interações complexas entre os componentes de tensão, especialmente em cenários de carregamento mais complexos.

Por exemplo, as análises indicam que, apesar de as diferenças entre os critérios de falha não serem estatisticamente significativas, fatores como a presença de tensão média, fase e sincronismo entre os componentes de tensão exercem influência substancial nas previsões de resistência à fadiga. A presença de tensão média, combinada com a interação de fase entre os componentes de tensão, destaca-se como particularmente crítica, amplificando os erros nas estimativas e resultando em um viés não conservador.

Por sua vez, embora o impacto do sincronismo seja relativamente limitado, ele ainda influencia o IE em situações específicas, indicando que seu efeito, embora sutil, requer uma análise cuidadosa para compreender plenamente sua contribuição às previsões de fadiga. A interação complexa entre tensão média, fase e sincronismo expõe claramente

as limitações dos modelos tradicionais de falha, que podem não ser suficientemente flexíveis para lidar com as variações interdependentes e complexas presentes nesses cenários.

5.2.7 Custo Computacional

A análise do custo computacional, cujos critérios de avaliação adotados foram apresentados na seção 5.1.5 deste trabalho, foi centrada na avaliação de dois critérios principais, que são: a influência do número de pontos na convergência dos resultados e no tempo de processamento; e o efeito da discretização dos ângulos de Euler na convergência dos resultados e no tempo de processamento, que são apresentados a seguir.

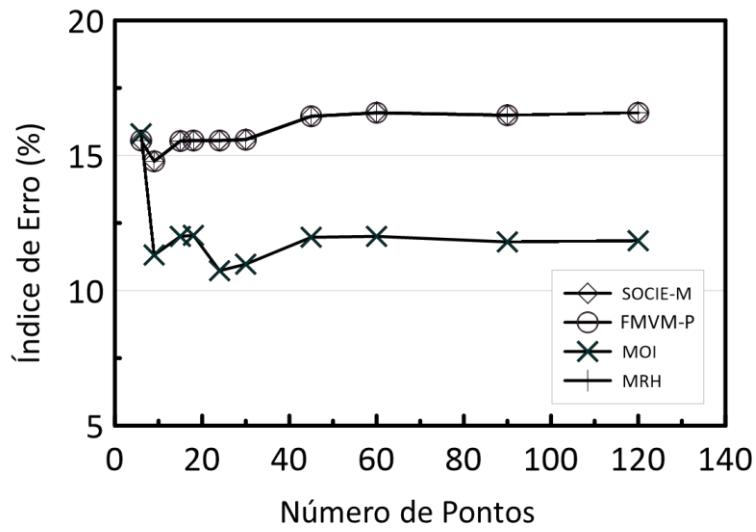
5.2.7.1 Influência da Discretização do Histórico de Carregamento na Convergência dos Resultados e no Tempo de Processamento

A influência do número de pontos de discretização na convergência dos resultados e no tempo de processamento entre algumas das várias estratégias de busca no plano crítico propostas neste trabalho, mais especificamente MRH, FMVM-P, SOCIE-M e MOI, é apresentada nas Figs. 5.7(a) e 5.7(b). Os carregamentos avaliados são aqueles apresentados na Tabela D.1(Apêndice D), para o Teste 3.

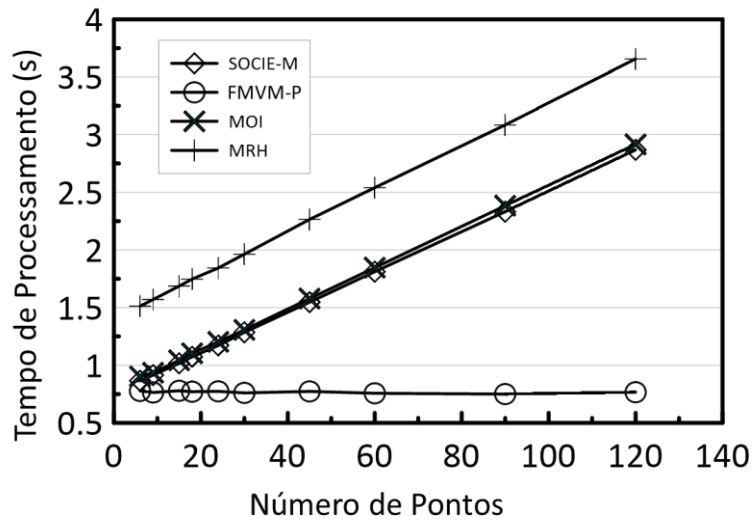
Ao avaliar a Fig. 5.7(a) é possível notar que uma convergência significativa do Índice de Erro é alcançada ao utilizar 45 pontos no processo de discretização. Esse ponto de inflexão indica que aumentos adicionais no número de pontos resultam apenas em melhorias marginais, tornando-se pouco vantajosos do ponto de vista econômico e analítico. Em particular, a estratégia MOI apresenta uma tendência de convergência mais gradual, sugerindo benefício limitado em aumentar o número de pontos além de 45, conforme evidenciado pelos dados da Fig. 5.7(a).

A Fig. 5.7(b) destaca diferenças marcantes na eficiência computacional entre as metodologias avaliadas. A estratégia FMVM-P se sobressai, demonstrando um desempenho excepcional, mantendo tempos de processamento consistentemente baixos, independentemente do número de pontos, o que ressalta sua escalabilidade e eficiência. Em contrapartida, as estratégias MRH e MOI exibem um aumento gradual nos tempos de processamento à medida que o número de pontos cresce, sendo que o MRH demonstra uma eficiência particularmente inferior. Por outro lado, o SOCIE-M emerge como uma

opção equilibrada, oferecendo um compromisso eficaz entre rapidez no processamento e eficiência, conforme mostrado na análise comparativa da Fig. 5.7(b).



(a)



(b)

Figura 5.7 – Análise Comparativa da Influência da Discretização dos Ângulos de Euler na (a) Convergência do Índice de Erro e (b) Tempo de Processamento, considerando cada uma das estratégias de busca de τ_a (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

5.2.7.2 Influência da Discretização dos Ângulos de Euler na Convergência dos Resultados e no Tempo de Processamento

Adicionalmente, também foi realizada uma análise comparativa da influência da discretização dos ângulos de Euler na convergência do Índice de erro, o que pode ser observado na Fig. 5.8(a), e no tempo de processamento, Fig. 5.8(b). A análise foi realizada

considerando as mesmas estratégias de busca de τ_a apresentadas anteriormente: MRH, FMVM-P, SOCIE-M e MOI.

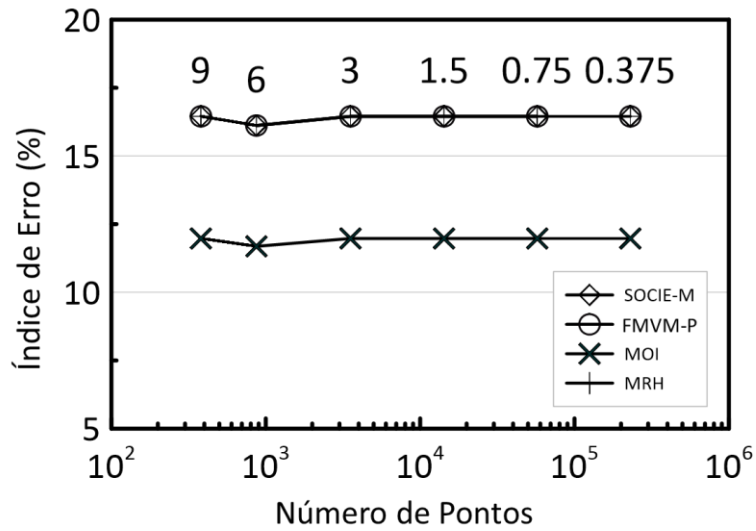
Com base na análise da Fig. 5.8(a), é possível notar que as previsões do Índice de Erro para as estratégias MRH, FMVM-P, SOCIE-M e MOI permanecem estáveis em diferentes níveis de discretização angular. Isso sugere que discretizações muito finas, abaixo de 3 graus, não resultam em melhorias significativas na precisão das previsões. Conseqüentemente, níveis mais elevados de detalhamento não são necessários para garantir a precisão dos resultados, mas acabam aumentando desnecessariamente o tempo de processamento.

Por sua vez, a Fig. 5.8(b) destaca a relação entre a discretização angular e o tempo de processamento nas diversas estratégias de busca no plano crítico. O critério FMVM-P demonstra um desempenho excepcional, superando significativamente os métodos MRH, MOI e SOCIE-M em eficiência computacional, mesmo com o aumento da resolução angular. Para incrementos angulares de 1,5 graus, o FMVM-P apresenta tempos de processamento até 8 vezes menores em comparação ao MRH e mais de 3 vezes inferiores ao SOCIE-M.

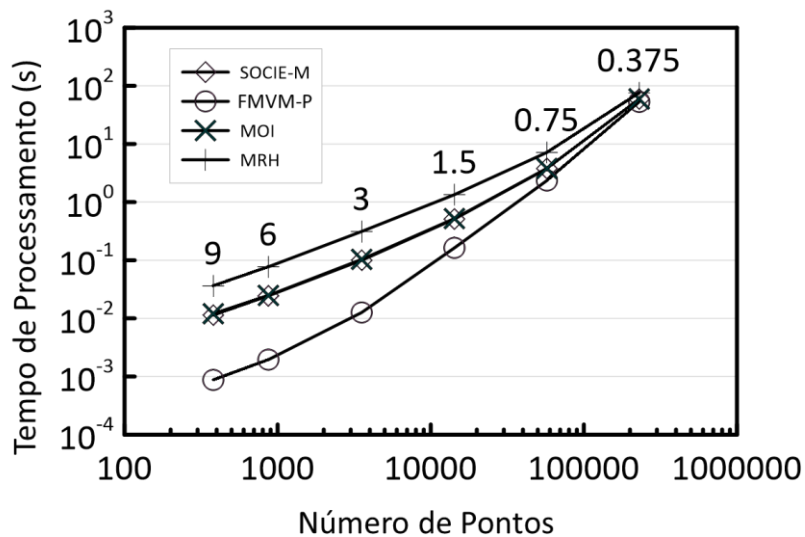
A análise mostra que discretizações angulares extremamente finas, como 0,375 graus, resultam em tempos computacionais significativamente mais longos. Por exemplo, utilizando a estratégia FMVM-P, a redução do incremento angular de 3 graus para 0,375 graus gera um grande aumento no número de planos discretizados, passando de 3.540 para 229.920, e no tempo de processamento, que salta de 0,013 s para 78,373 s. Esses resultados evidenciam o claro compromisso entre o custo computacional e o nível de precisão na discretização.

A análise de convergência demonstrou que o Índice de Erro se estabiliza com incrementos angulares em torno de 3 graus, indicando que refinamentos adicionais na discretização não trazem melhorias significativas na precisão, mas acarretam um aumento considerável no tempo de processamento.

Embora o maior tempo computacional registrado tenha sido de cerca de 78 segundos para uma discretização de 0,375 graus, os resultados confirmam que esse nível de detalhamento é desnecessário. Incrementos angulares de 3 graus ou até mesmo de 1,5 graus são suficientes para garantir previsões precisas, ao mesmo tempo em que otimizam os recursos computacionais e reduzem substancialmente o tempo de processamento.



(a)



(b)

Figura 5.8 – Análise Comparativa da Influência da Discretização dos Ângulos de Euler na (a) Convergência do Índice de Erro e (b) Tempo de Processamento, considerando cada uma das estratégias de busca de τ_a (Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024).

Para aplicações práticas em engenharia, uma discretização angular de aproximadamente 3 graus ou 1,5 graus oferece um equilíbrio ideal entre precisão e eficiência computacional. Esses níveis são suficientes para fornecer previsões confiáveis de resistência à fadiga, evitando custos computacionais desnecessários. A otimização do nível de discretização reduz de forma significativa o tempo total de processamento, tornando a estratégia FMVM-P mais escalável e adequada para cenários que envolvem grandes volumes de dados ou múltiplas análises simultâneas.

Além disso, ao evitar discretizações excessivamente detalhadas, é possível economizar recursos computacionais, um aspecto essencial em ambientes com recursos limitados ou tarefas simultâneas. Para aplicações em tempo real, como o monitoramento de integridade estrutural, a escolha de um nível de discretização otimizado garante a obtenção de resultados de maneira eficiente e sem perda de precisão, aumentando a viabilidade do método para suporte a decisões rápidas e confiáveis.

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusões Gerais

Neste trabalho, propôs-se um algoritmo direto baseado no MVM para determinar de forma eficiente e rápida a orientação do plano material sujeito à máxima variância da tensão cisalhante resolvida, denominado Método Rápido da Máxima Variância (FMVM). Especificamente, duas condições distintas de carregamento foram avaliadas: sob amplitude variável e constante. Considerando o primeiro caso, para condições de amplitude variável, cujos resultados foram apresentados no Capítulo 4 deste trabalho, as seguintes conclusões foram obtidas:

- Para o conjunto de resultados experimentais avaliados, todas as estimativas de vida baseadas no Método da Curva de Wöhler Modificada ficaram dentro de uma margem de ± 3 faixas de vida, independentemente da estratégia adotada para a busca do plano crítico;
- O tempo de processamento do algoritmo proposto neste estudo para identificar o plano crítico é independente das condições de análise, como V_{RMS} e $r_{\sigma,\tau}$;
- Em média, o algoritmo proposto é 150 vezes mais rápido do que a estratégia de busca baseada no Método do Gradiente Ascendente e, no mínimo, 230 vezes mais rápido do que o Método de Busca Direta para planos críticos;
- Além de sua eficiência, a estratégia proposta para a busca do plano crítico mostrou-se significativamente mais simples de implementar, dispensando o uso de esquemas numéricos complexos para acelerar o processo de busca.

De forma geral observa-se que o estudo demonstrou a eficácia do FMVM para análise de fadiga multiaxial em alto ciclo, sob carregamentos de amplitude constante e variável. Algumas das principais conclusões para carregamento constante, cujos resultados estão expressos no Capítulo 5, seguem abaixo:

- A estratégia FMVM-P demonstrou capacidade de previsão de resistência à fadiga comparável a métodos tradicionais como MRH, MOI e SOCIE-M. Apesar de o SOCIE-M apresentar uma leve vantagem em termos de menor variação no Índice de Erro, as diferenças entre as estratégias não foram estatisticamente significativas, indicando a ausência de evidências para sugerir distinções relevantes nas previsões. Já a variante simplificada FMVM-S teve bom

desempenho em condições de carregamento senoidais, mas mostrou menor adaptabilidade em cenários com carregamentos não senoidais;

- A estratégia FMVM-P destacou-se por reduzir substancialmente os tempos de processamento, mantendo a precisão nas previsões de resistência à fadiga. Isso a torna uma alternativa prática e eficiente para análises preliminares rápidas, sem comprometer a confiabilidade dos resultados;
- A análise também evidenciou o impacto significativo da presença de tensão média e fase nos Índices de Erro, especialmente em condições de carregamento não harmônicas. Esses fatores se mostraram críticos para definir o comportamento de fadiga, exigindo sua inclusão em modelos preditivos para garantir maior precisão;
- Alterações no sincronismo e na fase entre os componentes de tensão influenciaram de forma expressiva as previsões de fadiga, principalmente em cenários não harmônicos em comparação aos harmônicos. Esses resultados reforçam a necessidade de critérios de falha mais refinados, capazes de lidar com as complexidades associadas às condições reais de tensão em aplicações de engenharia.

6.2 Recomendações para Trabalhos Futuros

Embora o FMVM tenha demonstrado eficiência e aplicabilidade em diferentes condições de carregamento multiaxial, algumas áreas ainda apresentam desafios que demandam investigações mais aprofundadas. Para ampliar o alcance e a robustez do FMVM, bem como de outros conceitos discutidos nesta tese, são recomendadas as seguintes direções para estudos futuros:

- Realizar estudos experimentais em condições proporcionais e não-proporcionais, abrangendo uma ampla variedade de materiais e trajetórias. Comparar os resultados obtidos com as previsões teóricas do FMVM, identificando potenciais melhorias que consolidem a robustez e a aplicabilidade do método em diferentes aplicações.
- Explorar a capacidade dos modelos de plano crítico em descrever trajetórias proporcionais e não-proporcionais, com foco no impacto de valores de tensão média, níveis de sincronismo e variações simultâneas em todos os eixos principais. Essas análises devem considerar cenários de carregamento aleatório, frequentemente caracterizados por mudanças não lineares na direção

e magnitude das tensões ao longo do tempo, que muitas vezes apresentam natureza não gaussiana. Desenvolver e adaptar modelos de plano crítico capazes de lidar com essas condições, integrando características como assimetria e curtose aos critérios de análise para maior precisão nas previsões.

- Estudar e modelar o comportamento em fadiga de materiais submetidos a condições de carregamento aleatório com distribuições não gaussianas. Características como assimetria e curtose devem ser analisadas em profundidade, considerando seu impacto nos critérios de falha em fadiga. Essa abordagem inclui a validação teórica e experimental para consolidar critérios específicos capazes de descrever adequadamente os efeitos desses carregamentos complexos.

REFERÊNCIAS

- Araújo, J. A., A. P. Dantas, F. C. Castro, E. N. Mamiya, e J. L. A. Ferreira. 2011. “On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue”. *International Journal of Fatigue* 33(8):1092–1100. doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2011.01.002.
- ASTM E1049. 2017. “Standard practices for cycle counting in fatigue analysis”. *ASTM Standard* 85(Reapproved 2017):1–10.
- Bandara, Chaminda S., Sudath C. Siriwardane, Udaya I. Dissanayake, e Ranjith Dissanayake. 2015. “Developing a full range S-N curve and estimating cumulative fatigue damage of steel elements”. *Computational Materials Science* 96(PA):96–101. doi: 10.1016/j.commatsci.2014.09.009.
- Bathias, C. 1999. “There is no infinite fatigue life in metallic materials”. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 22(7):559–65. doi: 10.1046/j.1460-2695.1999.00183.x.
- Bedkowski, W., C. Lachowicz, e E. Macha. 1988. “Predicted fatigue fracture planes according to variance of shear stress under random triaxial stress state”. P. 281–83 em *Proceedings of the 9th Biennial European Conference on Fracture, E. Czoboly (Edit), I*.
- Będkowski, W., e E. Macha. 1985. “Fatigue criterion of the maximum strain in direction perpendicular to a fracture plane”. *VDI-Z* 5:94.
- Bedkowski, W., e E. Macha. 1987. “Maximum normal stress fatigue criterion applied to random triaxial stress state”. *Theoretical and applied fracture mechanics* 7(2):89–107.
- Będkowski, W., e E. Macha. 1992. “Fatigue fracture plane under multiaxial random loadings—prediction by variance of equivalent stress based on the maximum shear and normal stresses”. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 23(3):82–94.
- Bedkowski, W|odzimierz, Bastien Weber, Ewald Macha, e Jean-Louis Robert. 1999. “Comparison of variance and damage indicator methods for prediction of the fracture plane orientation in multiaxial fatigue”. *European Structural Integrity Society* 25:147–65. doi: 0.1016/S1566-1369(99)80013-2.
- Bel Knani, Kamel, Denis Benasciutti, Alberto Signorini, Roberto Tovo, e Bel Knani. 2007. “Fatigue damage assessment of a car body-in-white using a frequency-domain

- approach”. *International Journal of Materials and Product Technology*, 30(1-3), 172-198.
- Bendat, Julius S., e Allan G. Piersol. 2010. *Random data: analysis and measurement procedures*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- De Berg, Mark. 2000. *Computational geometry: algorithms and applications*. Springer Science & Business Media.
- Bernasconi, A., S. Foletti, e I. V. Papadopoulos. 2008. “A study on combined torsion and axial load fatigue limit tests with stresses of different frequencies”. *International Journal of Fatigue* 30(8):1430–40. doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2007.10.003.
- Bernasconi, A., e I. V. Papadopoulos. 2005. “Efficiency of algorithms for shear stress amplitude calculation in critical plane class fatigue criteria”. *Computational Materials Science* 34(4):355–68. doi: 10.1016/j.commatsci.2005.01.005.
- Bishop, Joseph E. 2003. “Characterizing the non-proportional and out-of-phase extent of stress and strain histories”. *SAE Technical Papers* (August):1019–32. doi: 10.4271/2003-01-0917.
- Brito Oliveira, Giorgio André, Raimundo Carlos Silverio Freire Júnior, Luís Augusto Conte Mendes Veloso, e José Alexander Araújo. 2022. “A hybrid ANN-multiaxial fatigue nonlocal model to estimate fretting fatigue life for aeronautical Al alloys”. *International Journal of Fatigue* 162. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2022.107011.
- Cao, Jing, e Song Zhang. 2014. “Multiple Comparison Procedures”. *JAMA* 312(5):543–44. doi: 10.1001/jama.2014.9440.
- Castro, Carlos Alberto Carvalho. 2007. “Estudo do comportamento à fadiga de metais dentro e fora da água na presença da pressão hidrostática”.
- Castro, F. C., J. A. Araújo, E. N. Mamiya, e P. A. Pinheiro. 2014. “Combined resolved shear stresses as an alternative to enclosing geometrical objects as a measure of shear stress amplitude in critical plane approaches”. *International Journal of Fatigue* 66:161–67. doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2014.03.025.
- Castro, F. C., J. A. Araújo, E. N. Mamiya, e N. Zouain. 2009. “Remarks on multiaxial fatigue limit criteria based on prismatic hulls and ellipsoids”. *International Journal of Fatigue* 31(11–12):1875–81. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2009.01.004.
- Chu, C. C., F. A. Conle, e A. Hübner. 1996. “An Integrated Uniaxial and Multiaxial Fatigue Life Prediction Method”. P. 337–48 em *VDI Berichte*.

- Correia, J. A. F. O., P. Raposo, M. Muniz-Calvente, S. Blasón, G. Lesiuk, A. M. P. De Jesus, P. M. G. P. Moreira, R. A. B. Calçada, e A. F. Canteli. 2017. “A generalization of the fatigue Kohout-Věchet model for several fatigue damage parameters”. *Engineering Fracture Mechanics* 185:284–300.
- Corten, H. T., e T. J. Dolan. 1956. “Cumulative fatigue damage”. P. 235–42 em *Proceedings of the international conference on fatigue of metals*. Vol. 1. Institution of Mechanical Engineering and American Society of Mechanical.
- Cristofori, A., D. Benasciutti, e R. Tovo. 2011. “A stress invariant based spectral method to estimate fatigue life under multiaxial random loading”. *International Journal of Fatigue* 33(7):887–99. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.01.013.
- Dang-Van, K. 1973. “Sur la résistance à la fatigue des métaux”. *Sciences et Techniques de l'Armement* 47:641–772.
- Dang-Van, K. 1993. “Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue”.
- Deng, Qing Yun, Shun Peng Zhu, Jin Chao He, Xue Kang Li, e Andrea Carpinteri. 2022. “Multiaxial fatigue under variable amplitude loadings: review and solutions”. *International Journal of Structural Integrity* 13(3):349–93. doi: 10.1108/IJSI-03-2022-0025.
- Deville, Jean-Claude, e Carl-Erik Sarndal. 1992. *Calibration Estimators in Survey Sampling*. Vol. 87.
- Dowling, N. E. 2013. *Mechanical Behaviour of Materials. Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. Fourth*. Pearson Education Limited, Harlow, Essex, England.
- Dubar, Laurent. 1992. “Fatigue multiaxiale des aciers. Passage de l’endurance a l’endurance limitee. Prise en compte des accidents geometriques”.
- Erickson, Matthew, Alan R. Kallmeyer, Robert H. Van Stone, e Peter Kurath. 2008. “Development of a multiaxial fatigue damage model for high strength alloys using a critical plane methodology”. *Journal of Engineering Materials and Technology* 130(4):0410081–89. doi: 10.1115/1.2969255.
- Fatemi, Ali, e Darrell F. Socie. 1988. “A Critical Plane Approach to Multiaxial Fatigue Damage including Out-of-Phase Loading”. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct* 1(3):149–65. doi: 10.1111/j.1460-2695.1988.tb01169.x.
- Ferreira, J. L. A., J. N. Dias, E. U. Cardoso, J. A. Araújo, e C. R. M. da Silva. 2022. “A contribution to the identification of the critical plane using the maximum variance

- method”. *International Journal of Fatigue* 165:107228. doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2022.107228.
- Ferreira, J. L. A., J. N. Dias, F. M. Lima, J. A. Araújo, e C. R. M. da Silva. 2024. “Evaluation of the accuracy and efficiency of the modified maximum variance method for multiaxial fatigue analysis under constant amplitude loading”. *International Journal of Fatigue* 188:108537. doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2024.108537.
- Ferreira, Jorge Luiz de A., Felipe M. de Lima, e Emanuely U. Cardoso. 2022. *Random Fatigue Under Uniaxial and Multiaxial Loading Conditions* Ferreira, J. L. de A., Lima, F. M. de, & Cardoso, E. U. (2022). *Random Fatigue Under Uniaxial and Multiaxial Loading Conditions. In Uncertainty Modeling: Fundamental Concepts and Models: Vol. Vol. III.*
- Findley, William Nichols. 1959. “A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending”. *Journal of Engineering for Industry* 81(4):301–5. doi: 10.1115/1.4008327.
- Fitzgerald, R. 1968. “Graphical transformations of 2×2 covariance matrices”. *IEEE Transactions on Automatic Control* 13(6). doi: 10.1109/TAC.1968.1099073.
- De Freitas, M., B. Li, e J. L. T. Santos. 2000. “A numerical approach for high-cycle fatigue life prediction with multiaxial loading”. *ASTM Special Technical Publication* 1387:139–56.
- Froustey, C., e S. Lasserre. 1989. “Multiaxial fatigue endurance of 30NCD16 steel”. *International Journal of Fatigue* 11(3):169–75. doi: 10.1016/0142-1123(89)90436-2.
- Gaier, C., A. Lukacs, e K. Hofwimmer. 2004. “Investigations on a statistical measure of the non-proportionality of stresses”. *International Journal of Fatigue* 26(4):331–37. doi: 10.1016/J.IJFATIGUE.2003.08.023.
- Gao, Jianxiong, Fei Heng, Yiping Yuan, e Yuanyuan Liu. 2024. “A novel machine learning method for multiaxial fatigue life prediction: Improved adaptive neuro-fuzzy inference system”. *International Journal of Fatigue* 178. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2023.108007.
- Gibbons, Jean Dickinson, e Subhabrata Chakraborti. 2014. *Nonparametric statistical inference: revised and expanded*. CRC press.

- Glinka, G., G. Wang, e A. Plumtree. 1995. *Mean Stress Effects in Multiaxial Fatigue*. Vol. 18.
- Grubisic, V., e A. Simbürger. 1976. “Fatigue under combined out-of-phase multiaxial stresses”. P. 21–27 em *Fatigue Testing and Design 2, Proceedings of SEE International Conference*. Vol. 5.
- He, Gao Yuan, Yong Xiang Zhao, e Chu Liang Yan. 2023. “MFLP-PINN: A physics-informed neural network for multiaxial fatigue life prediction”. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 98. doi: 10.1016/j.euromechsol.2022.104889.
- Hochberg, Y. 1987. *Multiple comparison procedures*. Wiley.
- J. Kohout, e S. Vechet. 2001. “A new function for fatigue curves characterization and its multiple merits”. *International Journal of Fatigue* 23(2):175–83. doi: 10.1016/S0142-1123(00)00082-7.
- Julie A. Bannantine, James L. Handrock, e Jess J. Comer. 1990. *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Vol. 1. 1st ed. Prentice Hall.
- Härdle, W., & Simar, L. (2019). *Applied multivariate statistical analysis*.
- Łagoda, T., e E. Macha. 1994. “Estimated and Experimental Fatigue Lives of 30CRNIMO8 Steel under in-and out-of-phase Combined Bending and Torsion with Variable Amplitudes”. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 17(11):1307–18. doi: 10.1111/j.1460-2695.1994.tb00218.x.
- Łagoda, T., E. Macha, e A. Niesłony. 2003. “Fatigue life estimation under multiaxial loading based on the spectral analysis of stochastic processes”. *WIT Transactions on Engineering Sciences* 40.
- Łagoda, Tadeusz, Ewald Macha, e A. Niesłony. 2005. “Fatigue life calculation by means of the cycle counting and spectral methods under multiaxial random loading”. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 28(4):409–20.
- Lazzarin, P. 2002. *A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment*.
- Lee, Yung-Li, Ming-Wei Lu, Raymond C. Segar, Charles D. Welch, e Richard J. Rudy. 1999. “Reliability-based cumulative fatigue damage assessment in crack initiation”. *International Journal of Materials and Product Technology* 14(1):1–16. doi: 10.1504/IJMPT.1999.036257.
- Lee, Yung-Li, J. W. O. Pan, Richard B. Hathaway, e Mark E. Barkey. 2005. *Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice*. 1st ed.

- Lemaitre, Jean, e Jean-Louis Chaboche. 1994. *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press.
- Li, B., L. Reis, e M. de Freitas. 2009. “Comparative study of multiaxial fatigue damage models for ductile structural steels and brittle materials”. *International Journal of Fatigue* 31(11–12):1895–1906. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2009.01.006.
- Li, Bin, J. L. T. Santos, e M. De Freitas. 2000. “Unified numerical approach for multiaxial fatigue limit evaluation”. *Mechanics of Structures and Machines* 28(1):85–103. doi: 10.1081/SME-100100613.
- Liu, J. 1991. “Beitrag zur Verbesserung der Dauerfestigkeitsberechnung bei mehrachsiger Beanspruchung (Contribution to the Improvement of Fatigue Life Assessment under Multi-Axial Stresses) Technische Universität Clausthal”. *Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Maschinenwesen, Dissertation*.
- Luo, Peng, Weixing Yao, e Luca Susmel. 2020. “An improved critical plane and cycle counting method to assess damage under variable amplitude multiaxial fatigue loading”. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 43(9):2024–39. doi: 10.1111/ffe.13281.
- Macha, E. 1989a. “Generalization of fatigue fracture criteria for multiaxial sinusoidal loadings in the range of random loadings”. *Biaxial and multiaxial fatigue, EGF* 3:425–36.
- Macha, E. 1989b. “Simulation investigations of the position of Fatigue Fracture Plane in materials with biaxial loads_A”. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 20:132–36. doi: 10.1002/mawe.19890200405.
- Macha, E. 1991. “Generalized fatigue criterion of maximum shear and normal strains on the fracture plane for materials under multiaxial random loadings”. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 22(6):203–10.
- Machado, Pedro Vinícius Sousa, Lucas Carneiro Araújo, Marcos Venicius Soares, Luis Reis, e José Alexander Araújo. 2020. “Multiaxial fatigue assessment of steels with non-metallic inclusions by means of adapted critical plane criteria”. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 108:102585. doi: 10.1016/j.tafmec.2020.102585.
- Mamiya, E. N., J. A. Araújo, e F. C. Castro. 2009. “Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue”. *International Journal of Fatigue* 31(7):1144–53. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2008.12.010.

- Mamiya, E. N., F. C. Castro, e J. A. Araújo. 2014. “Recent developments on multiaxial fatigue: The contribution of the University of Brasília”. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 73:48–59. doi: 10.1016/j.tafmec.2014.06.007.
- Manson, S. S., e G. R. Halford. 1981. “Practical implementation of the double linear damage rule and damage curve approach for treating cumulative fatigue damage”. *International Journal of Fracture* 17(2):169–92. doi: 10.1007/BF00053519.
- Mansur, Tanius Rodrigues, Ernani Sales Palma; Álvaro Alvarenga Júnior, João Mário Andrade Pinto, e Wellington Antonio Soares. 2005. “Proposal of a methodology for computing damages from flexo-rotative fatigue considering the theory of the acting average stresses”. P. 4775–85 em *18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*. Beijing.
- Mardia, Kanti, J. Kent, e J. Bibby. 1979. *Multivariate Analysis*. Vol. 1. 1st ed. San Diego: ACADEMIC PRESS. INC.
- Matsuishi, M. and Endo, T. 1968. “Fatigue of metals subjected to varying stress-fatigue lives under random loading”. P. 37–40 em *Proc. Kyushu District Meeting*. Fukuoka: JSEM.
- McDiarmid, D. L. 1991. “A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure”. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 14(4):429–53.
- Meggiolaro, Marco Antonio, e Jaime Tupiassú Pinho De Castro. 2012. “An improved multiaxial rainflow algorithm for non-proportional stress or strain histories - Part I: Enclosing surface methods”. *International Journal of Fatigue* 42:151–59. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.10.014.
- Meggiolaro, Marco Antonio, e Jaime Tupiassú Pinho De Castro. 2014. “Prediction of non-proportionality factors of multiaxial histories using the Moment of Inertia method”. *International Journal of Fatigue* 61:151–59. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2013.11.016.
- Meggiolaro, Marco Antonio, e Jaime Tupiassú Pinho De Castro. 2015. “The moment of inertia method to calculate equivalent ranges in non-proportional tension-torsion histories”. *Journal of Materials Research and Technology* 4(3):229–34. doi: 10.1016/j.jmrt.2015.01.004.
- Miner, Milton A. 1945. “Cumulative Damage in Fatigue”. P. A159–64 em *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. Vol. 12.

- Nadjitonon, Ngarmaïm. 2010. “Contribution à la modélisation de l’endommagement par fatigue”.
- Niesłony, Adam., e Ewald. Macha. 2007. *Spectral method in multiaxial random fatigue*. Springer.
- Nobuo Mamiya, Edgar, e José Alexander Araujo. 2002. “Fatigue limit under multiaxial loadings: on the definition of the equivalent shear stress”. *Mechanics Research Communications* 29(2–3):141–51. doi: 10.1016/S0093-6413(02)00239-2.
- Norman E. Dowling. 2012. *Mechanical Behavior of Materials*. 4th ed. organizado por Holly Stark. Angshuman Chakraborty.
- Oliveira, Giorgio André Brito, Raphael Araújo Cardoso, Raimundo Carlos Silverio Freire Júnior, Thiago Doca, e José Alexander Araújo. 2024. “On the generalization capability of artificial neural networks used to estimate fretting fatigue life”. *Tribology International* 192. doi: 10.1016/j.triboint.2023.109222.
- Papadopoulos, I. V. 1995. “A High-Cycle Fatigue Criterion Applied in Biaxial and Triaxial Out-of-Phase Stress Conditions”. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 18(1):79–91. doi: 10.1111/j.1460-2695.1995.tb00143.x.
- Papadopoulos, I. V. 1998. “Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane”. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 21:269–85.
- Pyttel, B., D. Schwerdt, e C. Berger. 2011. “Very high cycle fatigue - Is there a fatigue limit?” *International Journal of Fatigue* 33(1):49–58. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2010.05.009.
- Reddy, Satish C., e Ali Fatemi. 1992. “Small Crack Growth in Multiaxial Fatigue”. P. 276–98 em. American Society for Testing and Materials.
- Rencher, Alvin C., e William F. Christensen. 2012. *Methods of multivariate analysis*. Vol. 3rd. 3rd ed.
- Rice, S. O. 1939. The Distribution of the Maxima of a Random Curve. *American Journal of Mathematics*, 61(2), 409-416.
- Rice, S. O. 1944. Mathematical Analysis of Random Noise. *The Bell System Technical Journal*, 23(3), 282-332.
- Richardson, Mark. 2009. *Principal Component Analysis*.
- Sarkani, Shahram. 1987. “Experimental and analytical stochastic fatigue of welded steel joints”. Rice University, Houston.

- Sartorti, Roman, Torsten Möcker, Benedikt Kriegesmann, e Claus B. W. Pedersen. 2023. “On non-parametric fatigue optimization”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 124(5):1168–92. doi: 10.1002/nme.7158.
- Scalet, Giulia. 2018. “An efficient algorithm for the solution of min-max problems in multiaxial fatigue”. *International Journal of Fatigue* 112:117–29. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2018.02.028.
- Smith, R. N., P. Watson, e T. H. Topper. 1970. “A stress-strain parameter for the fatigue of metals”. *Journal of Materials* 5(4):767–78.
- Socie, D. F. 2023. “Multiaxial Stress-Life Technical Background”. Recuperado 17 de janeiro de 2024 (<https://efatigue.com/multiaxial/background/stresslife.html>).
- Socie, D. F., e G. Marquis. 1999. *Multiaxial fatigue*. first. SAE International Publisher, New York.
- Stephens, Ralph I., Ali Fatemi, Robert R. Stephens, e Henry O. Fuchs. 2000. *Metal fatigue in engineering*. John Wiley & Sons.
- Susmel, L. 2013. “On the estimation of the material fatigue properties required to perform the multiaxial fatigue assessment”. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 36(7):565–85. doi: 10.1111/FFE.12035.
- Susmel, L., e P. Lazzarin. 2002. “A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment”. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 25(1):63–78. doi: 10.1046/j.1460-2695.2002.00462.x.
- Susmel, L., R. Tovo, e P. Lazzarin. 2005. “The mean stress effect on the high-cycle fatigue strength from a multiaxial fatigue point of view”. *International Journal of Fatigue* 27(8):928–43. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2004.11.012.
- Susmel, Luca. 2010. “A simple and efficient numerical algorithm to determine the orientation of the critical plane in multiaxial fatigue problems”. *International Journal of Fatigue* 32(11):1875–83. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2010.05.004.
- Susmel, Luca, R. Tovo, e D. Benasciutti. 2009. “A novel engineering method based on the critical plane concept to estimate the lifetime of weldments subjected to variable amplitude multiaxial fatigue loading”. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 32(5):441–59. doi: 10.1111/j.1460-2695.2009.01349.x.
- Tang, Jianxiong, Jie Zhou, e Zheng chao Tan. 2023. “A novel multiaxial fatigue life prediction model based on the critical plane theory and machine-learning method”.

- The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 59(2):139–49. doi: 10.1177/03093247231196946.
- Tovo, Roberto, Denis Benasciutti, e Alessandro Cristofori. 2005. “LE VERIFICHE DI RESISTENZA A FATICA IN SOLLECITAZIONI MULTIASSIALI AD AMPIEZZA VARIABILE”. em *Workshop on Fatigue Design with Multiaxial Stress States*.
- Troost, A., O. Akin, e F. Klubberg. 1992. “Versuchs-und Rechenaten zur Dauerschwingfestigkeit von metallischen Werkstoffen unter mehrachsiger Beanspruchung”. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 23(1):1–12.
- Turan DIRLIK. 1985. “Applicaton of Computers in Fatigue Analysis”. University of Warwick.
- Walker, Kevin. 1970. “The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum”. *Effects of environment and complex load history on fatigue life* 1–14.
- Weber, B., B. Kenmeugne, J. C. Clement, e J. L. Robert. 1999. “Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration”. *Computational Materials Science* 15(4):381–99. doi: 10.1016/s0927-0256(98)00129-3.
- Weber, Bastien. 1999. “Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque”.
- Wirsching, P. H. 1980. “Fatigue reliability in w. Jkled joints of offsh mre structures”.
- Wirsching, P. H., e Haugen E. B. 1974. “A General Statistical Model for Random Fatigue”. doi: 10.1115/1.3443182.
- Wirsching, Paul H. 1984. “Reliability-Based Progressive Fatigue Collapse”. *J. Struct. Eng.* 109(8):1792–1811.
- Wirsching, Paul H. 1985. “Fatigue Reliability for Offshore Structures”. *J. Struct. Eng.* 110(10):2340–56.
- Wirsching, Paul H., e Y. N. Chen. 1988. “Considerations of probability-based fatigue design for marine structures”. *Marine Structures* 1(1):23–45. doi: 10.1016/0951-8339(88)90009-3.
- Wirsching, Paul H., e Y. N. Chen. 2008. “Fatigue Design Criteria for TLP Tendons”. *Journal of Structural Engineering* 113(7):1398–1414. doi: 10.1061/(asce)0733-9445(1987)113:7(1398).

- Wirsching, Paul H., e A. Mohsen Shehata. 2010. “Fatigue Under Wide Band Random Stresses Using the Rain-Flow Method”. *Journal of Engineering Materials and Technology* 99(3):205. doi: 10.1115/1.3443520.
- Wolter K. M. 2007. *Introduction to Variance Estimation*. New York.
- Yang, J. N. 1973. “ON THE NORMALITY AND ACCURACY OF SIMULATED RANDOM PROCESSES”. *Journal of Smmd and Vibration* 26(3):417–28.
- Zenner, H., R. Heidenreich, e I. Richter. 1985. “Dauerschwingfestigkeit bei nichtsynchrone mehrachsiger Beanspruchung”. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 16(3):101–12.
- Zhao, Wangwen, e Michael J. Baker. 1992. “On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes”. *International Journal of Fatigue* 14(2):121–35. doi: 10.1016/0142-1123(92)90088-T.
- Zouain, Nestor, Edgar Nobuo Mamiya, e Fábio Comes. 2006. “Using enclosing ellipsoids in multiaxial fatigue strength criteria”. *European Journal of Mechanics, A/Solids* 25(1):51–71. doi: 10.1016/j.euromechsol.2005.07.006.

APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DA TÉCNICA DE LINEARIZAÇÃO DE TAYLOR

Expressão Geral Unidimensional

A expansão de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de um ponto $x = a$ até a ordem n é dada, de forma simplificada, pela Eq. (A.1).

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k \quad (\text{A.1})$$

Considerando os dois primeiros termos, tem-se a Eq. (A.2).

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{A.2})$$

Valor Esperado

A definição do valor esperado de ordem n centrado em a é dada pela Eq. (A.3).

$$E[(x - a)^n] = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - a)^n \cdot dt = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K (x_k - a)^n \quad (\text{A.3})$$

Aplicando o operador expectância, a função $f(x)$ em torno da média de x (μ) pode ser expressa através da Eq. (A.4).

$$E[f(x)] \approx E[f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu)] \quad (\text{A.4})$$

Aplicação do Conceito para o Cálculo da Média

O estimador da média é dado pela Eq. (A.5), onde μ é o vetor das médias de x , conforme expressa a Eq. (A.6).

$$E[f(x)] \approx E[f(\mu)] + [f'(\mu)(x - \mu)] = f(\mu) \quad (\text{A.5})$$

$$E[f(x)] = f(\boldsymbol{\mu}) \text{ (em que } \boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \cdots \ \mu_N]^T \text{)} \quad (\text{A.6})$$

Calculando a variância de x , $Var(x)$, obtém-se a expressão geral em termos de $f(x)$ em torno da média de x (μ), conforme as Eq. (A.7).

$$Var(x) \approx E \left[\left((f(\mu) + f'(\mu)(x - \mu)) - f(\mu) \right)^2 \right] \approx E \left[\left((f'(\mu)(x - \mu)) \right)^2 \right] \quad (\text{A.7})$$

A partir desse processo é possível aplicar o conceito de linearização para o cálculo da variância e obter e obter uma expressão em função da derivada parcial de f calculada em μ , conforme apresentado pelas Eqs. (A.8) e (A.9).

$$Var(x) = E \left[\left((f'(\mu)(x - \mu)) \right)^2 \right] = E[f'(\mu)^2 (x - \mu)^2] \quad (\text{A.8})$$

$$Var(x) = f'(\mu)^2 E[(x - \mu)^2] = \left(\frac{\partial f(\mu)}{\partial x}\right)^2 Var(x) \quad (A.9)$$

Função Multivariável

O processo apresentado anteriormente foi para um processo unidimensional, para uma função multidimensional, basta generalizar esse processo considerando uma função do tipo $Z = g(x)$, conforme expresso na Eq. (A.10).

$$Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (A.10)$$

onde \mathbf{X} é a função de variáveis aleatórias usadas para calcular Z , $g(\mathbf{X})$, conforme a Eq. (A.11).

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (A.11)$$

Dessa forma, a expressão apresentada em (A.12), é muito semelhante à (A.5), que expressa o estimador da média em termos unidimensionais.

$$E[g(\mathbf{X})] = g(\mathbf{X}^0) \text{ (em que } \mathbf{X}^0 = [x_1^0 \ \dots \ x_n^0]^T \text{)} \quad (A.12)$$

Assim, a definição da variância da função Z , $Var(Z)$, em termos dos vetores de média de x , expressos por \mathbf{X} , é dada pela Eq. (A.13).

$$Var(Z) \cong \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g(\mathbf{X}^0)\right)^2 Var(x_i) + \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g(\mathbf{X}^0)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g(\mathbf{X}^0)\right) cov[x_i^0, x_j^0] \quad (A.13)$$

Por sua vez, a covariância entre duas funções, a função Z e uma função W qualquer, pode ser expressa através da Eq. (A.14).

$$Cov(Z, W) \cong E \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_Z(\mathbf{X}^0)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_W(\mathbf{X}^0)\right) (\Delta x_i^0)^2 + \sum_{i \neq j} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_Z(\mathbf{X}^0)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_W(\mathbf{X}^0)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_W(\mathbf{X}^0)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_Z(\mathbf{X}^0)\right) \right] \Delta x_i \Delta x_j \right] \quad (A.14)$$

APÊNDICE B – RESULTADOS OBTIDOS EM TESTES EXPERIMENTAIS (Tabela 6.2 de Niesłony & Macha (2007))

Tabela B.1 – Resultados dos ensaios de fadiga sob a combinação de flexão com torção e vida em fadiga calculada

(continua)

Símbolo e Número		I	$r_{\sigma,\tau}$	$\sqrt{\mu_\sigma}$ MPa	$\sqrt{\mu_\tau}$ MPa	$\sqrt{\frac{\mu_\sigma}{\mu_\tau}}$	T_{exp} s	T_{ZC} s	T_{SP} s	l_η
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
N01	2	0.99	–	127.3	–	–	55500	54882	48154	0
	3	0.99	–	149.4	–	–	9660	17520	15583	0
	4	0.99	–	113.4	–	–	195720	125910	109170	0
	5	0.99	–	133.2	–	–	43260	39591	34879	0
	6	0.99	–	134.4	–	–	43080	37275	32857	0
	7	0.99	–	134.4	–	–	35340	37275	32857	0
	8	0.99	–	139.8	–	–	21240	28140	24911	0
	9	0.99	–	111.1	–	–	316200	145560	126042	0
	10	0.99	–	133.0	–	–	33660	40215	35407	0
	11	0.99	–	128.1	–	–	62100	52367	45942	0
	N02	1	0.99	–	–	66.0	–	448020	267681	230396
2		0.99	–	–	63.0	–	653760	369358	316066	0.707
3		0.99	–	–	63.0	–	226800	369358	316066	0.707
4		0.99	–	–	64.0	–	352200	324421	277995	0.707
5		0.99	–	–	65.0	–	219360	285198	245131	0.707
N03	1	0.99	-0.01	96.8	54.2	1.79	191880	193105	194656	0.883
	2	0.99	-0.01	96.8	54.2	1.79	144240	193105	194656	0.883
	3	0.99	-0.01	118.3	66.2	1.79	30600	46724	46797	0.883
	4	0.99	-0.01	118.3	66.3	1.78	35100	46724	46797	0.883
	5	0.99	-0.01	106.5	59.6	1.79	118980	98309	99046	0.883
	6	0.99	-0.01	104.0	58.2	1.79	141300	116763	117660	0.883

(continua)

Símbolo e Número		I	$r_{\sigma,\tau}$	$\sqrt{\mu_\sigma}$ MPa	$\sqrt{\mu_\tau}$ MPa	$\sqrt{\frac{\mu_\sigma}{\mu_\tau}}$	T_{exp} s	T_{ZC} s	T_{SP} s	l_η
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
N04	1	0.99	-0.01	57.9	56.2	1.03	223320	470001	435709	0.766
	2	0.99	-0.01	57.9	56.2	1.03	416400	470001	435709	0.766
	3	0.99	-0.01	57.9	56.2	1.03	295740	470001	435709	0.766
	4	0.99	-0.01	63.7	61.8	1.03	168360	237306	219352	0.766
	5	0.99	-0.01	57.9	56.2	1.03	303660	470001	435709	0.766
N05	1	0.99	1	108.8	54.4	2	20700	13739	11906	0.866
	2	0.99	1	108.0	54.0	2	22800	14517	12581	0.866
	3	0.99	1	107.4	53.7	2	20580	15073	13056	0.866
	4	0.99	1	96.3	48.1	2	41820	32628	28040	0.866
	5	0.99	1	100.0	50.0	2	25020	24965	21526	0.866
	6	0.99	1	89.2	44.6	2	81720	56314	48072	0.866
	7	0.99	1	92.0	46.0	2	92280	45113	38549	0.866
	8	0.99	1	79.8	39.9	2	380220	124908	105339	0.866
N06	1	0.99	1	61.8	61.8	1	134700	41552	35563	0.788
	2	0.99	1	61.8	61.8	1	155520	41552	35563	0.788
	3	0.99	1	61.8	61.8	1	99600	41552	35563	0.788
	4	0.99	1	61.8	61.8	1	148740	41552	35563	0.788
	5	0.99	1	61.8	61.8	1	167040	41552	35563	0.788
N07	1	0.99	0.5	71.7	69.6	1.03	48540	32955	30944	0.766
	2	0.99	0.5	64.3	62.4	1.03	205140	70376	66190	0.766
	3	0.99	0.5	63.4	61.5	1.03	72600	77879	73365	0.766
	4	0.99	0.5	63.4	61.5	1.03	119700	77879	73365	0.766
N08	1	0.99	0.5	118.5	64.0	1.85	20940	12817	13073	0.848
	2	0.99	0.5	100.7	54.4	1.85	86820	37959	38935	0.848
	3	0.99	0.5	92.3	49.8	1.85	399000	69310	71383	0.848
	4	0.99	0.5	101.3	54.7	1.85	133200	35816	36708	0.848
	5	0.99	0.5	100.8	54.4	1.85	78180	37959	38935	0.848

(continua)

Símbolo e Número		I	$r_{\sigma,\tau}$	$\sqrt{\mu_\sigma}$ MPa	$\sqrt{\mu_\tau}$ MPa	$\sqrt{\frac{\mu_\sigma}{\mu_\tau}}$	T_{exp} s	T_{ZC} s	T_{SP} s	l_η
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A01	1	0.78	–	240.9	–	–	5700	5312	3335	0
	2	0.78	–	240.9	–	–	4920	5312	3335	0
	3	0.78	–	240.9	–	–	6480	5312	3335	0
	4	0.78	–	189.6	–	–	17880	12856	9803	0
	5	0.78	–	189.6	–	–	17160	12856	9803	0
	6	0.78	–	189.6	–	–	14520	12856	9803	0
	7	0.78	–	142.2	–	–	19860	44097	34716	0
	8	0.78	–	142.2	–	–	19560	44097	34716	0
	9	0.78	–	142.2	–	–	27960	44097	34716	0
	10	0.78	–	93.1	–	–	98520	267684	256509	0
	11	0.78	–	93.1	–	–	114360	267684	256509	0
	12	0.78	–	93.1	–	–	173820	267684	256509	0
	13	0.78	–	93.1	–	–	218940	267684	256509	0
	14	0.78	–	69.1	–	–	330000	1476985	1339508	0
	15	0.78	–	69.1	–	–	330000	1476985	1339508	0
	16	0.78	–	69.1	–	–	330000	1476985	1339508	0
A02	1	0.78	1	170.4	85.2	2	3060	2132	1151	0.875
	2	0.78	1	170.4	85.2	2	1920	2132	1151	0.875
	3	0.78	1	170.4	85.2	2	3900	2132	1151	0.875
	4	0.78	1	134.0	67.0	2	6600	6557	4710	0.875
	5	0.78	1	134.0	67.0	2	10560	6557	4710	0.875
	6	0.78	1	117.6	58.8	2	13980	14381	10072	0.875
	7	0.78	1	117.6	58.8	2	15480	14381	10072	0.875
	8	0.78	1	117.6	58.8	2	18900	14381	10072	0.875
	9	0.78	1	100.6	50.3	2	39360	31716	24860	0.875
	10	0.78	1	100.6	50.3	2	26040	31716	24860	0.875

(conclusão)

Símbolo e Número	I	$r_{\sigma,\tau}$	$\sqrt{\mu_\sigma}$ MPa	$\sqrt{\mu_\tau}$ MPa	$\sqrt{\frac{\mu_\sigma}{\mu_\tau}}$	T_{exp} s	T_{ZC} s	T_{SP} s	l_η	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	11	0.78	1	100.6	50.3	2	29880	31716	24860	0.875
	12	0.78	1	100.6	50.3	2	22320	31716	24860	0.875
	13	0.78	1	83.4	41.7	2	108300	96521	73569	0.875
	14	0.78	1	83.4	41.7	2	143700	96521	73569	0.875
	15	0.78	1	65.8	32.9	2	330000	309305	291157	0.875
	16	0.78	1	65.8	32.9	2	300000	309305	291157	0.875
A03	1	0.78	–	–	97.9	–	5100	21498	9250	1
	2	0.78	–	–	97.9	–	6000	21498	9250	1
	3	0.78	–	–	86.2	–	10920	43686	22064	1
	4	0.78	–	–	86.2	–	15960	43686	22064	1
	5	0.78	–	–	86.2	–	18600	43686	22064	1
	6	0.78	–	–	77.1	–	43740	83505	51868	1
	7	0.78	–	–	77.1	–	35160	83505	51868	1
	8	0.78	–	–	77.1	–	41100	83505	51868	1
	9	0.78	–	–	67.6	–	103200	222159	132326	1
	10	0.78	–	–	67.6	–	159000	222159	132326	1
	11	0.78	–	–	67.6	–	62400	222159	132326	1
	12	0.78	–	–	62.8	–	117300	317010	226201	1
	13	0.78	–	–	62.8	–	276180	317010	226201	1
	14	0.78	–	–	62.8	–	205320	317010	226201	1
	15	0.78	–	–	62.8	–	300000	317010	226201	1
	16	0.78	–	–	57.8	–	330000	596652	401620	1

Fonte: Adaptado de Niesłony & Macha (2007)

onde:

I – Coeficiente de irregularidade;

$r_{\sigma,\tau}$ – Coeficiente de correlação;

$\sqrt{\mu_{\sigma}}$ – Desvio padrão da tensão resultante da flexão;

$\sqrt{\mu_{\tau}}$ – Desvio padrão da tensão resultante da torção;

T_{exp} – Vida em fadiga experimental;

T_{ZC} e T_{SP} – Vida em fadiga calculada pelo método de contagem de ciclos e pelo método espectral, respectivamente;

l_{η} – Cossenos diretores do vetor normal ao plano crítico em relação ao eixo x do corpo de prova.

APÊNDICE C – DADOS COLETADOS, CONDIÇÕES DE TESTE

Tabela C.1 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e em fase com média zero.

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
1	0	0	0	0	0	259	0	0	1	1	34Cr4
2	0	354	0	0	0	177	0	0	1	1	34Cr4 (c)
3	0	314	0	0	0	157	0	0	1	1	34Cr4 (c)
4	0	314	0	0	0	157	0	0	1	1	34Cr4(b)
5	0	270	0	0	0	135	0	0	1	1	25CrMo4 (b)
6	0	210	0	0	0	105	0	0	1	1	25CrMo4 (b)
7	0	220	0	0	0	110	0	0	1	1	25CrMo4 (b)
8	0	196	0	0	0	98	0	0	1	1	25CrMo4 (b)
9	0	270	0	0	0	135	0	0	1	1	25CrMo4 (a)
10	0	233	0	0	0	224	0	0	1	1	42CrMo4V(a)
11	0	328	0	0	0	157	0	0	1	1	42CrMo4V(a)
12	0	275	0	0	0	0	0	0	1	1	GGG60
13	0	275	0	0	0	0	0	0	1	1	GGG60
14	0	0	0	0	0	249	0	0	1	1	GGG60
15	0	221	0	0	0	111	0	0	1	1	GGG60
16	0	485	0	0	0	280	0	0	1	1	30NCD16(a)
17	0	482	0	0	0	268	0	0	1	1	30NCD16(b)
18	0	138	0	0	0	167	0	0	1	1	Hard Steel
19	0	245	0	0	0	123	0	0	1	1	Hard Steel
20	0	299	0	0	0	63	0	0	1	1	Hard Steel

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela C.2 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase com média zero.

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
17	0	140	0	0	0	170	0	30	1	1	Hard Steel
18	0	250	0	0	0	125	0	30	1	1	Hard Steel
19	0	315	0	0	0	158	0	60	1	1	34Cr4 (c)
20	0	261	0	0	0	131	0	60	1	1	25CrMo4 (b)
21	0	261	0	0	0	131	0	60	1	1	25CrMo4 (a)
22	0	146	0	0	0	176	0	60	1	1	Hard Steel
23	0	252	0	0	0	126	0	60	1	1	Hard Steel
24	0	316	0	0	0	158	0	90	1	1	34Cr4 (c)
25	0	380	0	0	0	95	0	90	1	1	34Cr4 (c)
26	0	355	0	0	0	89	0	90	1	1	34Cr4 (c)
27	0	129	0	0	0	258	0	90	1	1	34Cr4 (c)
28	0	277	0	0	0	139	0	90	1	1	25CrMo4 (b)
29	0	242	0	0	0	121	0	90	1	1	25CrMo4 (b)
30	0	213	0	0	0	205	0	90	1	1	42CrMo4V(a)
31	0	286	0	0	0	137	0	90	1	1	42CrMo4V(a)
32	0	221	0	0	0	111	0	90	1	1	GGG60
33	0	480	0	0	0	277	0	90	1	1	30NCD16(a)
34	0	474	0	0	0	265	0	90	1	1	30NCD16(b)
35	0	150	0	0	0	182	0	90	1	1	Hard Steel
36	0	258	0	0	0	129	0	90	1	1	Hard Steel
37	0	305	0	0	0	64	0	90	1	1	Hard Steel
38	0	315	0	0	0	158	0	120	1	1	34Cr4 (c)

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela C.3 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento assíncrono e em fase com média zero.

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
39	0	210	0	0	0	105	0	0	1	0,25	25CrMo4 (b)
40	0	186	0	0	0	93	0	0	1	0,25	GGG60
41	0	186	0	0	0	93	0	0	1	0,25	GGG60
42	0	285	0	0	0	285	0	0	1	0,25	30NCD16(c)
43	0	220	0	0	0	110	0	0	1	2	25CrMo4 (b)
44	0	263	0	0	0	132	0	0	1	4	34Cr4
45	0	185	0	0	0	93	0	0	1	4	GGG60
46	0	185	0	0	0	93	0	0	1	4	GGG60
47	0	290	0	0	0	290	0	0	1	4	30NCD16(c)
48	0	196	0	0	0	98	0	0	1	8	25CrMo4 (b)
49	0	242	0	0	0	121	0	90	1	2	25CrMo4 (b)

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela C.4 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e em fase com média diferente de zero.

(continua)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
50	-160	320	0	0	0	157	0	0	1	1	34Cr4
51	-115	230	0	0	115	115	0	0	1	1	GGG60
52	-165	230	0	0	165	165	0	0	1	1	GGG60
53	-350	350	0	0	0	224	0	0	1	1	34Cr4
54	92	77	169	154	0	0	0	0	1	1	St35(a)
55	169	154	92	77	0	0	0	0	1	1	St35(b)
56	153	139	153	139	0	0	0	0	1	1	St35(a)
57	153	139	153	139	0	0	0	0	1	1	St35(b)
58	0	79	173	157	0	0	0	0	1	1	St35(a)
59	173	157	0	79	0	0	0	0	1	1	St35(b)

Tabela C.4 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e em fase com média diferente de zero.

(continua)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
60	176	160	176	160	0	0	0	0	1	1	St35(c)
61	176	160	176	160	0	0	0	0	1	1	St35(c)
62	212	212	0	0	0	212	0	0	1	1	34Cr4 (c)
63	0	266	0	0	128	128	0	0	1	1	42CrMo4V(a)
64	255	219	211	164	0	109	0	0	1	1	25CrMo4V(a)
65	250	205	250	205	0	96	0	0	1	1	34Cr4(b)
66	221	181	221	181	85	85	0	0	1	1	34Cr4(b)
67	271	271	0	0	0	130	0	0	1	1	42CrMo4V(a)
68	0	316	0	0	158	158	0	0	1	1	34Cr4 (c)
69	274	225	274	225	0	0	0	0	1	1	34Cr4(b)
70	279	279	0	0	0	140	0	0	1	1	34Cr4 (c)
71	280	280	0	0	0	134	0	0	1	1	42CrMo4V(a)
72	281	584	0	0	0	142	0	0	1	1	30NCD16(b)
73	294	474	0	0	0	265	0	0	1	1	30NCD16(b)
74	170	146	340	289	0	0	0	0	1	1	25CrMo4 (b)
75	170	261	340	261	0	0	0	0	1	1	25CrMo4 (b)
76	170	261	340	261	0	0	0	0	1	1	25CrMo4 (a)
77	340	289	170	145	0	0	0	0	1	1	25CrMo4 (a)
78	340	261	170	261	0	0	0	0	1	1	25CrMo4 (a)
79	340	275	170	196	0	0	0	0	1	1	25CrMo4 (a)
80	299	207	0	0	0	350	0	0	1	1	30NCD16(b)
81	300	590	0	0	0	148	0	0	1	1	30NCD16(a)
82	300	211	0	0	0	365	0	0	1	1	30NCD16(a)
83	300	480	0	0	0	277	0	0	1	1	30NCD16(a)
84	0	180	0	0	180	90	0	0	1	1	GGG60
85	442	402	221	201	0	0	0	0	1	1	42CrMo4V(b)

Tabela C.4 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e em fase com média diferente de zero.

(conclusão)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
86	294	451	0	0	191	250	0	0	1	1	30NCD16(b)
87	473	447	0	0	0	252	0	0	1	1	30NCD16(b)
88	0	280	0	0	280	140	0	0	1	1	34Cr4
89	0	280	0	0	280	140	0	0	1	1	34Cr4
90	0	309	0	0	309	155	0	0	1	1	34Cr4

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela C.5 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_{xy} \neq 0$) com média diferente de zero.

(continua)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
91	287	554	0	0	0	135	0	45	1	1	30NCD16(b)
92	294	474	0	0	0	265	0	45	1	1	30NCD16(b)
93	300	565	0	0	0	141	0	45	1	1	30NCD16(a)
94	300	480	0	0	0	277	0	45	1	1	30NCD16(a)
95	0	314	0	0	157	157	0	60	1	1	34Cr4 (c)
96	294	464	0	0	0	259	0	60	1	1	30NCD16(b)
97	340	155	170	0	0	155	0	60	1	1	25CrMo4 (a)
98	340	220	170	0	0	110	0	60	1	1	25CrMo4 (a)
99	300	470	0	0	0	270	0	60	1	1	30NCD16(a)
100	225	208	210	156	0	104	0	90	1	1	25CrMo4 (b)
101	0	266	0	0	128	128	0	90	1	1	42CrMo4V(a)
102	0	283	0	0	136	136	0	90	1	1	42CrMo4V(a)
103	271	271	0	0	0	130	0	90	1	1	42CrMo4V(a)
104	0	315	0	0	158	158	0	90	1	1	34Cr4 (c)
105	226	195	226	195	92	92	0	90	1	1	34Cr4(b)

Tabela C.5 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_{xy} \neq 0$) com média diferente de zero.

(conclusão)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
106	284	284	0	0	0	142	0	90	1	1	34Cr4 (c)
107	238	195	238	195	92	92	0	90	1	1	34Cr4(b)
108	287	527	0	0	0	129	0	90	1	1	30NCD16(b)
109	340	159	170	0	0	159	0	90	1	1	25CrMo4 (a)
110	340	233	170	0	0	117	0	90	1	1	25CrMo4 (a)
111	299	470	0	0	0	261	0	90	1	1	30NCD16(b)
112	299	220	0	0	0	368	0	90	1	1	30NCD16(b)
113	300	540	0	0	0	135	0	90	1	1	30NCD16(a)
114	300	473	0	0	0	273	0	90	1	1	30NCD16(a)
115	300	220	0	0	0	385	0	90	1	1	30NCD16(a)
116	294	462	0	0	191	250	0	90	1	1	30NCD16(b)
117	472	433	0	0	0	240	0	90	1	1	30NCD16(b)
118	622	418	0	0	0	234	0	90	1	1	30NCD16(b)
119	-175	350	0	0	0	137	0	90	1	1	34Cr4
120	-136	271	0	0	136	136	0	180	1	1	GGG60
121	225	212	210	159	0	106	0	180	1	1	25CrMo4 (b)
122	255	212	211	159	0	106	0	180	1	1	25CrMo4 (a)
123	0	333	0	0	160	160	0	180	1	1	42CrMo4V(a)
124	0	225	0	0	225	113	0	180	1	1	GGG60
125	0	309	0	0	309	155	0	180	1	1	34Cr4

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela C.6 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_y \neq 0$) com média diferente de zero.

(continua)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
126	89	75	164	149	0	0	60	0	1	1	St35(a)
127	164	149	89	75	0	0	60	0	1	1	St35(b)
128	162	147	162	147	0	0	60	0	1	1	St35(a)
129	162	147	162	147	0	0	60	0	1	1	St35(b)
130	274	225	274	225	0	0	60	0	1	1	34Cr4(b)
131	170	275	340	275	0	0	60	0	1	1	25CrMo4 (b)
132	170	275	340	275	0	0	60	0	1	1	25CrMo4 (a)
133	340	275	170	275	0	0	60	0	1	1	25CrMo4 (a)
134	85	71	156	142	0	0	90	0	1	1	St35(a)
135	142	129	142	129	0	0	90	0	1	1	St35(a)
136	154	140	154	140	0	0	90	0	1	1	St35(c)
137	154	140	154	140	0	0	90	0	1	1	St35(c)
138	0	73	160	145	0	0	90	0	1	1	St35(a)
139	160	145	0	73	0	0	90	0	1	1	St35(b)
140	170	240	340	240	0	0	90	0	1	1	25CrMo4 (b)
141	170	240	340	240	0	0	90	0	1	1	25CrMo4 (a)
142	340	240	170	240	0	0	90	0	1	1	25CrMo4 (a)
143	442	402	221	201	0	0	90	0	1	1	42CrMo4V(b)
144	121	110	121	110	0	0	120	0	1	1	St35(a)
145	121	110	121	110	0	0	120	0	1	1	St35(b)
146	141	128	141	128	0	0	120	0	1	1	St35(c)
147	141	128	141	128	0	0	120	0	1	1	St35(c)
148	110	100	110	100	0	0	180	0	1	1	St35(a)
149	110	100	110	100	0	0	180	0	1	1	St35(b)
150	74	62	135	123	0	0	180	0	1	1	St35(a)

Tabela C.6 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_y \neq 0$) com média diferente de zero.

(conclusão)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
151	135	123	74	62	0	0	180	0	1	1	St35(b)
152	0	59	130	118	0	0	180	0	1	1	St35(a)
153	132	120	132	120	0	0	180	0	1	1	St35(c)
154	132	120	132	120	0	0	180	0	1	1	St35(c)
155	214	175	214	175	0	82	180	0	1	1	34Cr4(b)
156	225	188	210	141	0	94	180	0	1	1	25CrMo4 (b)
157	232	190	232	190	0	0	180	0	1	1	34Cr4(b)
158	255	188	211	141	0	94	180	0	1	1	25CrMo4 (a)
159	170	196	340	196	0	0	180	0	1	1	25CrMo4 (a)
160	340	169	170	196	0	0	180	0	1	1	25CrMo4 (a)
161	340	196	170	196	0	0	180	0	1	1	25CrMo4 (a)

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela C.7 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_y \neq 0$) com média diferente de zero.

(continua)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
162	225	225	210	169	0	113	60	90	1	1	25CrMo4 (b)
163	240	205	220	205	0	103	60	90	1	1	25CrMo4 (b)
164	255	225	211	169	0	113	60	90	1	1	25CrMo4 (a)
165	234	192	234	192	90	90	60	90	1	1	34Cr4(b)
166	340	205	221	205	0	103	60	90	1	1	25CrMo4 (a)
167	225	222	210	167	0	111	90	45	1	1	25CrMo4 (b)
168	255	222	211	167	0	111	90	45	1	1	25CrMo4 (a)
169	225	205	210	154	0	103	90	90	1	1	25CrMo4 (b)
170	255	205	211	154	0	103	90	90	1	1	25CrMo4 (a)

Tabela C.7 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento síncrono e fora de fase ($\beta_y \neq 0$) com média diferente de zero.

(conclusão)

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
171	225	215	210	161	0	108	90	135	1	1	25CrMo4 (b)
172	255	215	211	161	0	108	90	135	1	1	25CrMo4 (a)
173	255	224	211	168	0	112	180	90	1	1	25CrMo4 (a)
174	220	180	220	180	85	85	180	90	1	1	34Cr4(b)
175	340	185	220	185	0	93	180	90	1	1	25CrMo4 (b)
176	340	185	221	185	0	93	180	90	1	1	25CrMo4 (a)

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

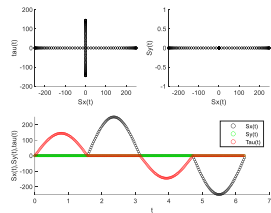
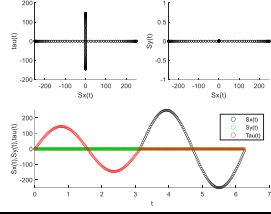
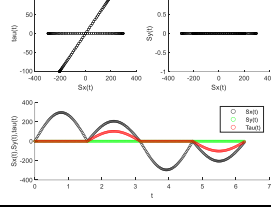
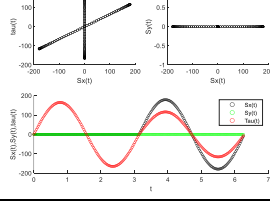
Tabela C.8 – Resultados dos ensaios sob condições de carregamento assíncrono com média diferente de zero.

Teste	$\sigma_{xx.m}$	$\sigma_{xx.a}$	$\sigma_{yy.m}$	$\sigma_{yy.a}$	$\tau_{xy.m}$	$\tau_{xy.a}$	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Material
177	143	130	143	130	0	0	0	0	2	1	St35(c)
178	244	200	244	200	0	0	0	0	2	1	34Cr4(b)
179	154	140	154	140	0	0	90	0	2	1	St35(c)

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

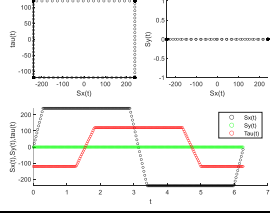
APÊNDICE D – IDENTIFICAÇÃO DOS ENSAIOS REALIZADOS SOB CONDIÇÕES NÃO HARMÔNICAS

Tabela D.1 – Descrição dos Históricos de Carregamento para Ensaios de Fadiga Não Harmônica no Aço 25CrMo4(b)

Teste	σ_{xxm}	σ_{xxa}	σ_{yy_m}	σ_{ya}	τ_{xy_m}	τ_{xy_a}	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Forma
1	0	250	-	-	0	145	-	0	-	1	
2	0	250	-	-	0	145	-	0	-	1	
3	0	296/206	-	-	0	102	-	0	-	1	
4	0	179	-	-	0	165/116	-	0	-	1	

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela D.2 – Descrição dos Históricos de Carregamento para Ensaios de Fadiga Não Harmônica no Aço 34Cr4(a)

Teste	σ_{xxm}	σ_{xxa}	σ_{yy_m}	σ_{ya}	τ_{xy_m}	τ_{xy_a}	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Forma
5	0	250	-	-	0	145	-	0	-	1	

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela D.3 – Descrição dos Históricos de Carregamento para Ensaios de Fadiga Não Harmônica Triangular no Aço St35(c)

Teste	σ_{xxm}	σ_{xxa}	σ_{yy_m}	σ_{ya}	τ_{xy_m}	τ_{xy_a}	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Forma
6	178	162	178	162	-	-	90	-	1	-	
7	154	140	154	140	-	-	120	-	1	-	
8	132	120	132	120	-	-	180	-	1	-	
9	155	145	155	145	-	-	0	-	2	-	
10	132	141	132	141	-	-	90	-	2	-	

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024

Tabela D.4 – Descrição dos Históricos de Carga para Ensaios de Fadiga Não Harmônica Trapezoidal no Aço St35(c)

Teste	σ_{xxm}	σ_{xxa}	σ_{yy_m}	σ_{ya}	τ_{xy_m}	τ_{xy_a}	β_y	β_{xy}	λ_y	λ_{xy}	Forma
11	132	120	132	120	-	-	90	-	1	-	
12	132	120	132	120	-	-	180	-	1	-	
13	132	120	132	120	-	-	0	-	2	-	
14	139	126	139	126	-	-	90	90	2	-	

Fonte: Adaptado de Ferreira *et al.*, 2024