

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

MIGUEL CITELI DE FREITAS

**COMPRESSÃO E NÃO-GAUSSIANIDADE DE  
ESTADOS COERENTES DE FASE**

BRASÍLIA  
18 DE SETEMBRO DE 2023



Miguel Citeli de Freitas

# **Compressão e não-Gaussianidade de Estados Coerentes de Fase**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Viktor Dodonov

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

18 de Setembro de 2023

---

Miguel Citeli de Freitas

Compressão e não-Gaussianidade de Estados Coerentes de Fase/ Miguel Citeli de Freitas. – Brasília, 18 de Setembro de 2023-

50 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Viktor Dodonov

Dissertação de Mestrado –Universidade de Brasília, 18 de Setembro de 2023.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física. IV. Compressão e não-Gaussianidade de Estados Coerentes de Fases

CDU 02:141:005.7

---

Miguel Citeli de Freitas

## **Compressão e não-Gaussianidade de Estados Coerentes de Fase**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 18 de Setembro de 2023:

---

**Viktor Dodonov**  
Orientador

---

**Sérgio Costa Ulhoa**  
Convidado 1

---

**Matheus Horovits**  
Convidado 2

Brasília  
18 de Setembro de 2023



# Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

Agradeço também ao professor Dodonov pela orientação dos últimos 4 anos e pela parceria científica que espero manter por muito mais.

Por fim, agradeço aos meus pais, irmão, tia e familiares e aos meus amigos Danielle, Patrick, Raissa, Ana Clara e Leandro pelo apoio emocional ao longo destes dois anos.



# Resumo

Uma das principais tentativas de descrever a fase de sistemas quânticos foi proposta por Lerner, Huang e Walters em 1970 com a introdução dos estados coerentes de fase  $|\varepsilon\rangle = \sqrt{1 - |\varepsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n |n\rangle$ , onde  $|n\rangle$  são os estados de Fock e  $\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\varphi}$ , com  $|\varepsilon| < 1$  e  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Os estados  $|\varepsilon\rangle$  foram chamados desta forma por Shapiro, Shepard e Wong em 1990 devido à sua semelhança com os estados coerentes de Glauber-Sudarshan, se diferenciando apenas pela ausência do fator  $1/\sqrt{n!}$  em sua definição,  $|\alpha\rangle = \exp\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ .

Como a maioria dos trabalhos sobre fase se dedica a estudar propriedades dos operadores número e fase  $(\hat{n}, \hat{\varphi})$ , optamos por focar nossa pesquisa nas características associadas aos operadores de posição e momento  $(\hat{x}, \hat{p})$ , calculando inicialmente valores médios e variâncias. Observamos que há uma forte compressão da posição (momento) quando a fase é igual a  $\pi/2$  (0), embora esta ainda seja menor que a compressão sofrida pelo estado comprimido de vácuo.

Notamos que o análogo misto do estado puro  $|\varepsilon\rangle$ , descrito por meio do operador estatístico  $\hat{\rho} = (1 - |\varepsilon|^2) \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon|^{2n} |n\rangle\langle n|$ , possui uma matriz densidade  $\langle x|\hat{\rho}|x\rangle$  Gaussiana, mesmo que a densidade de probabilidade  $|\psi_\varepsilon(x)|^2$  não seja. Por esta razão, investigamos detalhadamente diferentes medidas de não-Gaussianidade dos estados coerentes de fase. Finalmente, calculamos a função de Wigner de  $|\varepsilon\rangle$  e vimos como a Gaussianidade é facilmente perdida com pequenas variações de  $\varphi$  quando  $\varepsilon$  é próximo de 1.

**Palavras-chaves:** estado coerente de fase. compressão. Gaussianidade. função de Wigner.



# Abstract

One of the main attempts to describe the phase of quantum systems was proposed by Lerner, Huang and Walters in 1970 with the introduction of coherent phase states  $|\varepsilon\rangle = \sqrt{1 - |\varepsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n |n\rangle$ , where  $|n\rangle$  are the Fock states and  $\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\varphi}$ , with  $|\varepsilon| < 1$  and  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . The states  $|\varepsilon\rangle$  were named by Shapiro, Shepard and Wong in 1990 due to their similarity with the Glauber-Sudarshan coherent state, differing only in the absence of the factor  $1/\sqrt{n!}$  in its definition,  $|\alpha\rangle = \exp\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ .

Since most works on phase are dedicated to studying properties of the number and phase operators  $(\hat{n}, \hat{\varphi})$ , we chose to focus our research on the characteristics associated with the position and moment operators  $(\hat{x}, \hat{p})$ , initially calculating mean values and variances. We observe that there is a strong squeezing of the position (momentum) when the phase is equal to  $\pi/2$  (0), although this is still smaller than the squeezing suffered by the squeezed vacuum state.

We noticed that the mixed analogue of the pure state  $|\varepsilon\rangle$ , described by the statistical operator  $\hat{\rho} = (1 - |\varepsilon|^2) \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon|^{2n} |n\rangle\langle n|$ , has a Gaussian density matrix  $\langle x|\hat{\rho}|x\rangle$ , even though the probability density  $|\psi_\varepsilon(x)|^2$  is not. For this reason, we investigated in detail different measures of non-Gaussianity of coherent phase states. Finally, we calculated the Wigner function of  $|\varepsilon\rangle$  and saw how Gaussianity is easily lost with small variations of  $\varphi$  when  $\varepsilon$  is close to 1.

**Palavras-chaves:** coherent phase state. squeezing. Gaussianity. Wigner function.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Função de Wigner $W(x, 0)$ numérica (esquerda) e analítica (direita) dos estados coerentes com $\langle \hat{n} \rangle = 30$ e para diferentes valores de $\varphi$ . O eixo vertical de ambos os gráficos está em uma escala de $10^{-7}$ . . . . .	28
Figura 2 – Comportamento assintótico das funções $f_1(N)$ e $f_2(N)$ . . . . .	32
Figura 3 – Esquerda: Comparativo da expressão exata da variância $\sigma_x^{\varphi=\pi/2}$ com a aproximação (3.1.5), ambas como funções de $ \varepsilon ^2$ . Os cálculos numéricos foram feitos com 1.000 termos na equação (3.1.4). Direita: Dependência da expressão exata da variância $\sigma_x^{\varphi=\pi/2}$ com $\langle \hat{n} \rangle$ comparada com a variância do estado comprimido de vácuo (3.1.6). . . . .	37
Figura 4 – A quantidade $D$ como função de $\langle \hat{n} \rangle$ para os estados coerentes de fase (2.14). Esquerda: Expressão exata de $D$ como para pequenos valores de $\langle \hat{n} \rangle$ . Direita: Comparativo da expressão exata (3.1.7) com a aproximação (3.1.8). O melhor ajuste ocorreu com o parâmetro $\eta = 1.59$ . As séries $S_1$ e $S_2$ foram calculadas para 640.000 termos. . . . .	38
Figura 5 – Esquerda: Valores exatos da variância $\sigma_x^{\varphi=0}$ como função de $\langle \hat{n} \rangle$ . Direita: Comparação do valor médio $\langle \hat{x} \rangle^{\varphi=0}$ como função de $\langle \hat{n} \rangle$ para estados coerentes de fase e estados coerentes. Os resultados foram obtidos usando 10.000 termos nas séries $S_1$ e $S_2$ . . . . .	38
Figura 6 – Esquerda: Comparativo da parte real da função de onda $\psi_\varepsilon(x)$ com $\varphi = 0$ e $\langle \hat{n} \rangle = 25$ com a função de onda do estado coerente $\psi_\alpha(x)$ com $\alpha = 5$ . Direita: Densidade de probabilidade $ \psi_\varepsilon(x) ^2$ para $\varphi = 0$ e $\langle \hat{n} \rangle = 25$ comparada com a densidade de probabilidade de um estado Gaussiano (3.2.3) com $\langle x \rangle = 6.3$ e $\sigma_x = 10$ . As séries (3.2.2) foram calculadas com 10.000 termos. . . . .	40
Figura 7 – Esquerda: Comparativo da parte real da função de onda $\psi_\varepsilon(x)$ para $\varphi = \pi/2$ e $\langle \hat{n} \rangle = 25$ , com a parte real da função de onda do estado coerente $\psi_\alpha(x)$ para $\alpha = 5i$ , ou seja, $\psi_\alpha(x) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2) \cos(5\sqrt{2}x)$ . Direita: Densidade de probabilidade $ \psi_\varepsilon(x) ^2$ no caso de $\varphi = \pi/2$ e $\langle \hat{n} \rangle = 25$ , comparada com a densidade de probabilidade $\rho_G(x, x)$ para um estado Gaussiano com o mesmo valor médio $\langle x \rangle = 0$ e variância $\sigma_x = 0.035$ . As séries (3.2.2) foram calculadas usando 10.000 termos. . . . .	41
Figura 8 – Curtose como função de $\varepsilon$ , calculada para $\varphi = 0, \pi/4$ e $\pi/2$ . . . . .	41
Figura 9 – O parâmetro $G$ (3.2.5) como função de $\langle \hat{n} \rangle$ . Os resultados foram obtidos somando 10.000 termos em (3.2.2). . . . .	42
Figura 10 – Função de Wigner $W(x, 0)$ para diferentes valores de $\varphi$ com $\langle \hat{n} \rangle = 1$ (esquerda) e $\langle \hat{n} \rangle = 30$ (direita). . . . .	43

Figura 11 – Função de Wigner $W(x, 0)$ para valores pequenos da fase $\varphi$ com $\langle \hat{n} \rangle = 4$ (esquerda) e $\langle \hat{n} \rangle = 30$ (direita). . . . .	43
Figura 12 – Comparação da variância do estado simples (2.14) com uma superposição par (normalizada) $ \varepsilon\rangle +  -\varepsilon\rangle$ para momentos de segunda ordem (esquerda) e quarta ordem (direita). Os cálculos foram feitos usando 1.000 termos nas séries. . . . .	45

# Lista de símbolos

$\sigma_A$	Variância de $A$
$\sigma_{AB}$	Covariância de $A$ e $B$
$ n\rangle$	Estado de Fock
$ \alpha\rangle$	Estado Coerente
$ \varepsilon\rangle$	Estado Coerente de Fase
$\psi(x)$	Função de Onda
$W(x, p)$	Função de Wigner



# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>NOÇÕES PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>Estados Quânticos</b> . . . . .	<b>21</b>
1.1.1	Estado de Fock (ou Estado de Número) . . . . .	21
1.1.2	Estado Coerente . . . . .	22
<b>1.2</b>	<b>Matriz Densidade</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>1.3</b>	<b>Função de Wigner</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>O PROBLEMA DE FASE NA MECÂNICA QUÂNTICA</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>3</b>	<b>COMPRESSÃO E NÃO-GAUSSIANIDADE DE ESTADOS COE- RENTES DE FASE</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Valores médios e Variâncias</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>Função de Onda, Densidade de Probabilidade e Gaussianidade</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>3.3</b>	<b>Função de Wigner</b> . . . . .	<b>40</b>
	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>47</b>



# Introdução

O problema de descrever a fase de sistemas quânticos surgiu ainda nos primeiros anos da Mecânica Quântica, quando Dirac definiu o operador de aniquilação como dependente de uma fase em seu artigo sobre a quantização do campo eletromagnético (DIRAC, 1927). Entretanto, as dificuldades desta definição foram apontadas por Louisell em (LOUISELL, 1963), propondo o que seria posteriormente chamado por Susskind e Glogower como “operador exponencial” (SUSSKIND; GLOGOWER, 1964).

Poucos anos depois, Carruthers e Nieto (CARRUTHERS; NIETO, 1968) mostraram que um autoestado de fase não poderia ser normalizável (assim como um autoestado da posição no espaço das configurações). Uma solução para este problema foi apresentada por Pegg e Barnett, considerando um espaço de dimensão finita  $s$  onde a função de onda poderia ser normalizada e onde poderíamos definir um operador de fase Hermitiano (PEGG; BARNETT, 1989), nos permitindo obter uma expressão para a densidade de probabilidade e para valores médios. Este formalismo, porém, enfrenta algumas críticas (MA; RHODES, 1991), (POPOV; YARUNIN, 1992), (VORONTSOV; REMBOVSKY, 1999), embora nos conduza a resultados corretos quando o limite  $s \rightarrow \infty$  é aplicado a valores médios de qualquer função da fase. Ainda assim, o formalismo de Pegg e Barnett figura entre as principais soluções para o problema de fase, e diversos trabalhos se dedicam às suas aplicações, como por exemplo (FAGHIHI; TAVASSOLY, 2013), (VAMEGH; TAVASSOLY, 2015) e (MALPANI et al., 2019).

Um método alternativo foi proposto em (LERNER; HUANG; WALTERS, 1970) com a introdução dos autoestados do operador exponencial de Susskind e Glogower, chamados de “estados coerentes de fase” por (SHAPIRO J. H.; SHEPARD; WONG, 1990). Apesar destes estados serem definidos no espaço de Hilbert, a mesma expressão para a densidade de probabilidade de Pegg e Barnett pode ser obtida, como demonstrado por (HALL, 1991) e (SHAPIRO, 1991).

Muito progresso tem sido feito quanto à interpretação física dos estados coerentes de fase. M. Hall mostrou em (HALL, 1993) que estes estados eram quase “ideais” para medidas de intervalos de confiança e entropia de uma distribuição de fase, enquanto (D’ARIANO G. M.; MACCHIAVELLO; YUEN, 1996) propuseram que a fase poderia ser determinada usando dispositivos PNA (*Photon Number Amplifier*) e PND (*Photon Number Duplicator*), e que “os estados coerentes de fase eram os únicos estados a manter a coerência após uma amplificação de fase”. Além disso, um método foi apresentado por (BASEIA B.; DANTAS; MOUSSA, 1998) para a criação dos estados coerentes de fase em laboratório, que consistia em fazer átomos em uma superposição do estado fundamental

com um estado excitado atravessarem uma cavidade e serem medidos por um detector.

Embora outras tentativas de resolver o problema de fase tenham sido feitas ao longo do tempo, como em (GARRISON; WONG, 1970), (PAUL, 1974) e (LÉVY-LEBLOND, 1976), os estados coerentes de fase são de particular interesse por possuírem uma expressão semelhante à dos estados coerentes de Glauber-Sudarshan (GLAUBER, 1963), (SUDARSHAN, 1963), se diferenciando “apenas” pela ausência do fator  $1/\sqrt{n!}$  em sua definição. Revisões históricas (ainda que um pouco antigas) sobre o problema de fase podem ser encontradas em (NIETO, 1993) e (LYNCH, 1995).

Este trabalho está dividido da seguinte forma. No Capítulo 1, relembramos alguns conceitos físicos e ferramentas matemáticas que auxiliarão cálculos futuros, como a definição de estados coerentes, relações de incerteza e da função de Wigner, enquanto no Capítulo 2, discutimos em mais detalhes os principais pontos apresentados nesta introdução. Por fim, o Capítulo 3, baseado em nosso recente artigo (FREITAS; DODONOV, 2022), se dedica a estudar características dos operadores de posição e momento  $(\hat{x}, \hat{p})$ , como valores médios e variâncias, uma vez que todos os trabalhos citados anteriormente estiveram interessados apenas em propriedades dos operadores de número e fase  $(\hat{n}, \hat{\varphi})$ .

Um resultado interessante obtido ainda no começo do terceiro capítulo foi a *compressão* dos estados coerentes de fase. A compressão de estados foi originalmente introduzida em (STOLER, 1970) por meio de um “operador de compressão”, embora este termo tenha surgido apenas anos depois em (HOLLENHORST, 1979). Uma das principais aplicações de estados comprimidos é no aprimoramento da sensibilidade de antenas gravitacionais, como observado por (HOLLENHORST, 1979), (CAVES, 1981) e (WALLS, 1983). Detalhes sobre os primeiros experimentos com estados comprimidos podem ser encontrados em (YUEN; SHAPIRO, 1979), enquanto métodos mais atuais estão presentes em (MA et al., 2020). Para uma revisão histórica sobre os estados comprimidos, ver (DODONOV et al., 2007).

Investigamos ao fim do capítulo como a *não-Gaussianidade* se aplica à estados coerentes de fase. Este conceito tem sido amplamente estudado em diferentes contextos: foi mostrado em (FIURÁSEK, 2002) que estados não-Gaussianos são necessários para a “destilação de emaranhamento” (BENNETT et al., 1996). Em (NISET; FIURÁSEK; CERF, 2009) provou-se que estados Gaussianos não são capazes de corrigir erros Gaussianos<sup>1</sup>. Além disso, é de fácil verificação que, para o estado de vácuo,

$$\langle \hat{x}^4 \rangle = 3 \langle \hat{x}^2 \rangle^2, \quad \langle \hat{p}^4 \rangle = 3 \langle \hat{p}^2 \rangle^2.$$

A busca, portanto, de estados não-Gaussianos oferece também uma possibilidade de investigar estados minimizantes de relações de incertezas (KENNARD, 1927), (SCHRÖDINGER, 1930), (ROBERTSON, 1930). Formas de quantificar a não-Gaussianidade

<sup>1</sup> Erros Gaussianos podem ocorrer, por exemplo, devido a ruídos térmicos (WEEDBROOK et al., 2012).

foram propostas em (MANDILARA; CERF, 2012) e (GENONI; PARIS; BANASZEK, 2007), e bons resultados foram obtidos em (LYNCH; MAVROMATIS, 1990) e (FREITAS; DODONOV, 2021). Neste trabalho analisamos a não-Gaussianidade através da representação dos estados coerentes de fase no espaço das configurações, de Wigner e por meio de alguns parâmetros.



# 1 Noções Preliminares

## 1.1 Estados Quânticos

### 1.1.1 Estado de Fock (ou Estado de Número)

Sabemos que a Hamiltoniana de um oscilador harmônico quântico pode ser escrita em unidades adimensionais como

$$\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}, \quad (1.1.1)$$

onde

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p}), \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

Equivalentemente, temos que

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (1.1.2)$$

Neste caso, a função de onda que resolve a equação de Schrödinger para a Hamiltoniana (1.1.1) será dada por (SCHWABL, 2007)

$$\psi_n(x) = \left( \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \exp\{-x^2/2\} H_n(x), \quad (1.1.3)$$

sendo  $H_n(x)$  os *polinômios de Hermite*, definidos como (NIKIFOROV; UVAROV, 1988)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Podemos reescrever (1.1.3) em notação de *bracket* simplesmente como  $|n\rangle$ , chamado de *estado de Fock* (ou *estado de número*), onde  $n$  representa o número de fótons que há no sistema: se  $|n=0\rangle$ , então o estado terá 0 fóton, e por isso recebe o nome de estado de vácuo. Para os estados  $|1\rangle, |2\rangle, \dots$  o sistema terá 1, 2, ... fótons. Da ortonormalidade dos estados de Fock, podemos mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad (1.1.4)$$

conhecida como *relação de completeza*.

A partir do comutador  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , vemos que os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  atuarão nos estados de Fock da seguinte maneira

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.1.5)$$

Desta forma, definindo o *operador número*  $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , vemos que  $|n\rangle$  aparece como autoestado de  $\hat{n}$ , uma vez que  $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ . Como a atuação de  $\hat{a}$  em  $|n\rangle$  diminui um fóton do sistema ao passo que  $\hat{a}^\dagger$  atuando em  $|n\rangle$  gera um fóton, estes operadores recebem o nome de *operadores de aniquilação e criação*, respectivamente.

Calculando a *variância*  $\sigma_A$  e a *covariância*  $\sigma_{AB}$ , definidas como

$$\sigma_A = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2, \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle, \quad (1.1.6)$$

vemos que

$$\sigma_x = \sigma_p = \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad \sigma_{xp} = 0. \quad (1.1.7)$$

Podemos também calcular a quantidade  $D$ ,

$$D \equiv \sigma_A \sigma_B - \sigma_{AB}^2, \quad (1.1.8)$$

introduzida por (ROBERTSON, 1930) e (SCHRÖDINGER, 1930) como uma generalização da incerteza de Heisenberg,

$$\sigma_x \sigma_p \geq 1/4, \quad (1.1.9)$$

para quaisquer operadores Hermitianos. Neste caso, temos

$$D \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2$$

Perceba que para (1.1.7),  $D = (n + 1/2)^2$ , sendo mínima apenas quando  $n = 0$ . A igualdade de (1.1.9) é obtida não somente para  $\sigma_x = \sigma_p = 1/2$ , mas também quando  $\sigma_x(\sigma_p) < 1/2$ , implicando em  $\sigma_p(\sigma_x) > 1/2$ . Neste caso, dizemos que o estado sofre uma *compressão*. A variância desempenha um papel fundamental no cálculo da minimização da incerteza (KENNARD, 1927), (ARAGONE et al., 1974), (TRIFONOV, 1994), (CITELI; DANTAS; DODONOV, 2020) e será abordada novamente na Seção 1.1.2 e ao longo do Capítulo 3.

### 1.1.2 Estado Coerente

Consideremos o estado  $|\alpha\rangle$  tal que

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.1.10)$$

Como  $\hat{a}$  não é um operador Hermitiano,  $\alpha$  será complexo. Conjugando (1.1.10) obtemos  $\langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha | \alpha^*$ . Desta maneira, para calcularmos valores médios de qualquer potência dos operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , precisaremos escrevê-los no ordenamento normal, com  $\hat{a}^\dagger$  sempre à esquerda de  $\hat{a}$ . Os estados (1.1.10) foram inicialmente estudados por Schrödinger em (SCHRÖDINGER, 1926) e cerca de 40 anos depois por (SUDARSHAN, 1963), mas foi

apenas em (GLAUBER, 1963) que o termo “estado coerente” foi empregado pela primeira vez. Por esta razão, os estados (1.1.10) também são conhecidos como estados de Glauber-Sudarshan.

De (1.1.10) podemos ver que

$$\begin{aligned}\langle \hat{x} \rangle &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(\alpha), & \langle \hat{p} \rangle &= \sqrt{2} \operatorname{Im}(\alpha), \\ \langle \hat{x}^2 \rangle &= \operatorname{Re}(\alpha^2) + |\alpha|^2 + \frac{1}{2}, & \langle \hat{p}^2 \rangle &= -\operatorname{Re}(\alpha^2) + |\alpha|^2 + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Escrevendo  $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$  obtemos  $\sigma_x = \sigma_p = 1/2$ , ou seja, os estados coerentes minimizam a relação de incerteza de Heisenberg para qualquer valor de  $\alpha$ . Como os estados de Fock formam um conjunto completo, podemos expandir  $|\alpha\rangle$  da seguinte maneira

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (1.1.11)$$

cujos coeficientes da expansão podem ser obtidos com a atuação de  $\hat{a}$  em (1.1.11),

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} c_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0.$$

Pela condição de normalização  $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$ , vemos que  $c_0 = \exp\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\}$ , e, desta forma, a expansão dos estados coerentes em termos dos estados de Fock pode ser escrita como

$$|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.1.12)$$

A partir de (1.1.12), observamos que os estados coerentes não são ortogonais, uma vez que

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \exp\left\{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \beta^* \alpha\right\}.$$

Além disso, podemos substituir

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle,$$

em (1.1.12) para obter

$$|\alpha\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right\} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^{\dagger})^n}{n!} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = e^{\alpha \hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle,$$

e, tendo em vista que  $[\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}]] = [\hat{a}^{\dagger}, [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}]] = 0$ , podemos usar a relação

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]},$$

concluindo finalmente que

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle, \quad D(\alpha) \equiv \exp\{\alpha \hat{a}^{\dagger} - \alpha^* \hat{a}\}. \quad (1.1.13)$$

Perceba que  $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$  e  $D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = 1$ , ou seja,  $D(\alpha)$  é um operador unitário. Usando a relação

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}[\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!}[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \dots,$$

conhecida como *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff*, é possível mostrar que

$$D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad D^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*.$$

Por esta razão,  $D(\alpha)$  recebe o nome de *operador de deslocamento*. Em vez de introduzir os estados coerentes como autovetores do operador de aniquilação, poderíamos ter partido inicialmente de (1.1.13) para obter (1.1.10), assim como feito em (LEWENSTEIN; SANPERA; POSPIECH, 2004).

A representação dos estados coerentes no espaço das configurações é dada por

$$\langle x|\alpha\rangle \equiv \psi_\alpha(x) = \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}\right\}. \quad (1.1.14)$$

Além disso, calculando a probabilidade de encontrar  $n$  fótons em um estado coerente, obtemos uma distribuição de Poisson,

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (1.1.15)$$

Por fim, vale acrescentar que a relação de completeza para estados coerentes é dada por

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \mathbf{1},$$

onde  $d^2\alpha = dx dy$  e  $\alpha = x + iy$ . Esta relação pode ser facilmente provada utilizando a expressão (1.1.12).

## 1.2 Matriz Densidade

Na Mecânica Quântica usualmente descrevemos problemas a partir dos vetores de estados, ou funções de onda,  $|\psi\rangle$ . Estes vetores contêm diversas informações relevantes, como os possíveis valores a serem obtidos na medida de uma grandeza física, suas probabilidades e como o sistema evolui no tempo. Todavia, vetores de estado não fornecem informações sobre a interação deste sistema com o meio externo. Sabemos pelo princípio de Heisenberg que o próprio processo de medição interfere no estado em que o sistema se encontra, e, portanto, se essa interação não puder ser negligenciada, o formalismo de vetores de estado se mostra ineficiente. Essa questão pode ser solucionada com a introdução de um operador  $\hat{\rho}$  definido como

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.2.1)$$

onde  $p_i$  representa a probabilidade de encontrar o sistema no estado  $|\psi_i\rangle$ . Chamamos  $\hat{\rho}$  de *matriz densidade* (ou operador densidade). Como a soma total das probabilidades é igual a 1, temos

$$\sum_i p_i = 1. \quad (1.2.2)$$

Se a probabilidade de encontrar o sistema em um determinado estado  $|\psi\rangle$  for máxima então  $\hat{\rho}$  será dado por

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|. \quad (1.2.3)$$

Neste caso dizemos que o estado  $|\psi\rangle$  é um estado *puro*. Quando não é possível descrever o sistema na forma (1.2.3), dizemos se tratar de um estado *misto*.

A equação (1.2.2) pode ser equivalentemente escrita como

$$Tr(\hat{\rho}) = 1, \quad (1.2.4)$$

uma vez que o traço de um operador é definido por

$$Tr(\hat{A}) = \sum_n \langle n | \hat{A} | n \rangle. \quad (1.2.5)$$

Em geral, podemos escrever o valor médio de qualquer operador na forma

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (1.2.6)$$

Para provar esta equação, basta substituir (1.2.1) e (1.2.5) em (1.2.6) e usar a relação de completudeza (1.1.4). Escolhendo  $\hat{A} = \hat{\rho}$  em (1.2.6) obtemos

$$Tr(\hat{\rho}^2) = \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (1.2.7)$$

Como as probabilidades são sempre menores ou iguais a 1, concluímos que a igualdade em (1.2.7) será obtida apenas quando  $p_i^2 = p_i$ , isto é, para estados puros. Por essa razão, vemos que o traço de  $\hat{\rho}^2$  é um bom indicativo da pureza do sistema. Definimos, portanto, a pureza quântica como

$$\mu = Tr(\hat{\rho}^2) \leq 1. \quad (1.2.8)$$

## 1.3 Função de Wigner

Definimos a função de função de Wigner (WIGNER, 1932) como

$$W(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(x - \frac{v}{2}, x + \frac{v}{2}\right) e^{-ipv} dv. \quad (1.3.1)$$

Outras definições (equivalentes) podem ser encontradas em (HAROCHE; RAIMOND, 2006). Antes de prosseguirmos, observamos que, em coordenadas adimensionais,  $[p] = 1/[x]$ , e, assim,  $[v] = [x]$ , de forma que o argumento da exponencial em (1.3.1) é adimensional. Caso não estivéssemos usando coordenadas adimensionais, seria necessário incluir a constante de Planck  $\hbar$  na exponencial de (1.3.1).

Para garantir a normalização da função de Wigner, temos que  $W(x, p)$  deve cumprir a condição

$$\frac{1}{2\pi} \int \int W(x, p) dx dp = 1.$$

Além disso, a integração da função de Wigner em relação a cada uma de suas variáveis nos leva a

$$\frac{1}{2\pi} \int W(x, p) dp = \langle x | \hat{\rho} | x \rangle, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int W(x, p) dx = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle, \quad (1.3.3)$$

Vemos de (1.3.1) que a matriz densidade pode ser obtida a partir de uma transformada de Fourier da função de Wigner. Por essa razão, como anteriormente a matriz densidade nos permitia calcular valores médios de operadores, o mesmo poderá ser feito com  $W(x, p)$ . No caso dos operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , temos

$$\langle \hat{x}^n \rangle_W = \frac{1}{2\pi} \int \int W(x, p) x^n dx dp, \quad (1.3.4)$$

$$\langle \hat{p}^n \rangle_W = \frac{1}{2\pi} \int \int W(x, p) p^n dx dp. \quad (1.3.5)$$

Entretanto, o valor médio da multiplicação destes operadores será equivalente ao valor médio “normal” considerando todas as possíveis combinações de  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}\hat{p} \rangle_W &= \frac{1}{2} \langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle \\ \langle \hat{x}^2\hat{p} \rangle_W &= \frac{1}{3} \langle \hat{x}^2\hat{p} + \hat{p}\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}\hat{x} \rangle \\ \langle \hat{x}^2\hat{p}^2 \rangle_W &= \frac{1}{6} \langle \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}\hat{p}^2\hat{x} + \hat{p}\hat{x}^2\hat{p} + \hat{x}\hat{p}\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\hat{p}\hat{x} \rangle \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

Escrevendo os valores médios desta forma, vemos a correspondência clássica fornecida pelo formalismo da função de Wigner: tendo em vista que classicamente não há diferença na ordem em que as grandezas se apresentam, todas as equações seriam equivalentes. Esta representação foi chamada de *representação de Wigner-Weyl*.

Algumas propriedades importantes da função de Wigner podem ser obtidas a partir da definição (1.3.1). Primeiro, vemos que  $W(x, p)$  é real,

$$W^*(x, p) = W(x, p),$$

o que se espera de toda função de probabilidade. Além disso, a função de Wigner é limitada inferior e superiormente,

$$-2 \leq W(x, p) \leq 2. \quad (1.3.6)$$

A equação (1.3.6) mostra que a função de Wigner pode (e deve!) assumir valores negativos. Este resultado é essencial para a compreensão da função de Wigner como uma função de probabilidade na Mecânica Quântica. Sabemos que no oscilador harmônico quântico,  $\langle n | \hat{x} | n \rangle = \langle n | \hat{p} | n \rangle = 0$ , e, neste caso, as equações (1.3.2) e (1.3.3) devem também ser iguais a zero, o que seria impossível se  $W(x, p)$  fosse definida apenas para valores positivos. Como uma função de probabilidade não pode assumir valores negativos, a função de Wigner é dita uma função de *quasi-probabilidade*. Foi mostrado em (HUDSON, 1974) que, para estados puros,  $W(x, p)$  é não-negativa apenas para estados Gaussianos. Neste caso, dizemos que o estado é *quasi-clássico*. Por outro lado, se ela for negativa, temos um estado *não-clássico*.

Para estados Gaussianos, a função de Wigner será descrita por (SERAFINI, 2017)

$$W(x, p) = \frac{1}{\sqrt{\det \sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{r}^T \sigma^{-1} \mathbf{r}\right\}, \quad (1.3.7)$$

onde

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x - \langle \hat{x} \rangle \\ p - \langle \hat{p} \rangle \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xp} \\ \sigma_{xp} & \sigma_p \end{pmatrix}. \quad (1.3.8)$$

Quando  $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$ ,  $\sigma_x = \sigma_p = \langle \hat{x}^2 \rangle$  e  $\sigma_{xp} = 0$ , temos

$$W(x, p) = \frac{1}{\langle \hat{x}^2 \rangle} \exp\left\{-\frac{x^2 + p^2}{2 \langle \hat{x}^2 \rangle}\right\}. \quad (1.3.9)$$

Por fim, definimos de forma geral uma função de quasi-probabilidade no espaço de fase como

$$W_{ij}(x, p) = \int \psi_i(x + v/2) \psi_j^*(x - v/2) e^{-ipv} dv, \quad (1.3.10)$$

onde a função de Wigner é o caso especial quando  $i = j$ . Esta definição pode ser usada da seguinte maneira. Suponhamos que os estados coerentes sejam descritos unicamente por (1.1.12) e que desconhecemos (1.1.14). A função de Wigner será, portanto,

$$W = e^{-|\alpha|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{m+n}}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} e^{i(m-n)\varphi} W_{mn}. \quad (1.3.11)$$

Foi mostrado em (GROENEWOLD, 1946), (BARTLETT; MOYAL, 1949), (TAKABAYASI, 1954), (KRUGER; POFFIN, 1977) e (DODONOV; MAN'KO, 1986) que, se  $\psi_n(x)$  é a função de onda do estado de Fock do oscilador harmônico, o termo  $W_{nm}$  será dado por

$$W_{mn}(x, p) = 2^{1+\lambda/2} (-1)^\mu \sqrt{\frac{\mu!}{\nu!}} b^\lambda e^{-b^2 - i\chi(m-n)} L_\mu^\lambda(2b^2), \quad (1.3.12)$$

$$x + ip = be^{i\chi}, \quad b \geq 0, \quad \mu = \min(m, n), \quad \nu = \max(m, n), \quad \lambda = |m - n|,$$

onde  $L_n^\alpha(z)$  denotam os *polinômios associados de Laguerre*, definidos como (NIKIFOROV; UVAROV, 1988)

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{n!} z^\alpha e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}).$$

A Figura 1 mostra um comparativo de (1.3.11) com a expressão analítica

$$W(x, p) = 2 \exp\left\{-\left(x^2 + p^2\right) + 2\sqrt{2}\left(\operatorname{Re}(\alpha)x + \operatorname{Im}(\alpha)p\right) - 2|\alpha|^2\right\}.$$

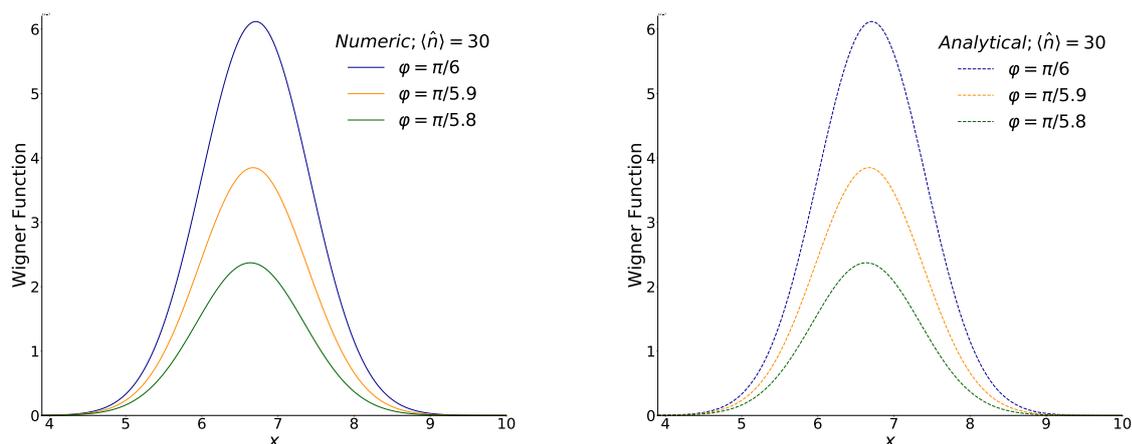


Figura 1 – Função de Wigner  $W(x, 0)$  numérica (esquerda) e analítica (direita) dos estados coerentes com  $\langle \hat{n} \rangle = 30$  e para diferentes valores de  $\varphi$ . O eixo vertical de ambos os gráficos está em uma escala de  $10^{-7}$ .

Podemos ver que, somando 210 termos nas séries (1.3.11), os gráficos em 1 se tornam indistinguíveis. Este método será importante no Capítulo 3 para estudarmos a não-Gaussianidade dos *estados coerentes de fase*, introduzidos no próximo capítulo, uma vez que sua expressão analítica é desconhecida.

## 2 O Problema de Fase na Mecânica Quântica

Consideremos um relógio marcando 12h. À medida que o ponteiro maior avança, um ângulo  $\varphi$  é formado com o ponteiro menor. Se o tempo total de uma volta for  $T$ , este ângulo pode ser determinado para um tempo qualquer  $t$  notando que  $\varphi = 2\pi t/T$ . Chamamos o ângulo  $\varphi$  de *fase*. Perceba que a fase determina quanto de um ciclo está completo, e, por isso, está associada apenas a sistemas periódicos.

Embora classicamente não haja dificuldade em obter informações sobre a fase de um dado sistema, o mesmo não ocorre na Mecânica Quântica. Diversas tentativas foram feitas desde a introdução de um operador de fase proposta em (DIRAC, 1927). Entretanto, conforme veremos a seguir, esta definição nos leva a alguns resultados incorretos.

A forma mais intuitiva de introduzir um operador de fase  $\hat{\varphi}$  é definindo

$$\hat{U} = e^{i\hat{\varphi}}. \quad (2.1)$$

Escrevendo o operador de aniquilação como  $\hat{a} = \hat{n}^{1/2}e^{i\hat{\varphi}}$ , temos que  $\hat{U} = \hat{a}\hat{n}^{-1/2}$ . Contudo, embora  $\hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$ , vemos que  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1 + \hat{n}^{-1}$ , ou seja,  $\hat{U}$  não é um operador unitário (LONDON, 1926) e (LONDON, 1927)<sup>1</sup>. Este resultado está em desacordo com o esperado, pois usualmente os termos de fase se anulam quando multiplicados por seus conjugados. Além disso, expandindo  $\hat{U}$  em potências de  $\hat{\varphi}$ , podemos mostrar que (SUSSKIND; GLO-GOWER, 1964)

$$[\hat{n}, \hat{\varphi}] = -i \Rightarrow (n_1 - n_2) \langle n_1 | \hat{\varphi} | n_2 \rangle = -i\delta_{n_1, n_2}, \quad (2.2)$$

e, conseqüentemente,

$$\sigma_n \sigma_\varphi \geq 1/4. \quad (2.3)$$

Perceba que tanto (2.2) como (2.3) são absurdas: a equação (2.2) implica em  $0 \cdot \langle n | \hat{\varphi} | n \rangle = -i$  quando  $n_1 = n_2 = n$ , enquanto que, segundo (2.3), devemos ter  $\sigma_\varphi \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow 0$ . Portanto, não é possível construir um operador de fase na forma (2.1).

Podemos também tentar definir uma função de onda que descreva as propriedades da fase de um sistema. Redefinindo a Hamiltoniana em (1.1.1) como<sup>2</sup>  $\hat{H} = \omega\hat{n}$ , temos que o operador de evolução temporal atuará como um “operador de deslocamento de fase”,

$$\hat{u}(t) \equiv \exp\{-i\hat{H}\Delta t\} = \exp\{-in\Delta\varphi\}, \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> Como os artigos mencionados aparentemente não possuem tradução do alemão, os mesmos resultados podem ser verificados em (NIETO, 1993).

<sup>2</sup> Neste ponto recuperamos a frequência  $\omega$  para facilitar a compreensão. Além disso, descartamos o fator  $\omega/2$  por apenas acrescentar um termo multiplicativo  $\exp\{-i\omega t/2\}$  em  $\hat{u}(t)$  que não interfere no andamento dos cálculos.

de forma que  $\Psi(\varphi + \Delta\varphi) = \hat{u}(\Delta\varphi)\Psi(\varphi)$ . Expandindo  $\Psi$  em torno de  $\Delta\varphi$ , obtemos

$$\begin{aligned}\Psi(\varphi + \Delta\varphi) &= \Psi(\varphi) + \Delta\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi(\varphi) + \frac{1}{2!}(\Delta\varphi)^2 \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Psi(\varphi) + \dots, \\ &= \exp\left\{\Delta\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}\Psi(\varphi).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Comparando (2.5) com (2.4) concluímos que  $\hat{n} = i\frac{\partial}{\partial\varphi}$ . Introduzindo a função (CAR-RUTHERS; NIETO, 1968)

$$\Psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-in\varphi\}, \quad (2.6)$$

vemos que (2.6) satisfaz (2.5) e que  $\hat{n}\Psi_n(\varphi) = n\Psi_n(\varphi)$ . Além disso,

$$\int_0^{2\pi} \Psi_n^*(\varphi) \Psi_n(\varphi) d\varphi = 1.$$

Para calcular a densidade de probabilidade de fase  $P(\varphi)$  para uma superposição  $\sum_n c_n |n\rangle$  e o valor médio de um operador qualquer  $F(\varphi)$ , basta fazermos

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\{-in\Delta\varphi\} \right|^2, \quad (2.7)$$

$$\langle F(\varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} F(\varphi) P(\varphi) d\varphi. \quad (2.8)$$

Note finalmente que

$$\underbrace{\hat{n}^{1/2} e^{i\varphi}}_{\hat{a}^\dagger} \Psi_n(\varphi) = \sqrt{n+1} \Psi_{n+1}(\varphi),$$

o que coincide com a definição introduzida por Dirac.

As equações (2.6), (2.7) e (2.8) parecem ter resolvido o problema, pois (PEGG; BARNETT, 1997) “são tudo o que precisamos para calcular as propriedades de fase da luz”. Entretanto, embora esta afirmação esteja correta, a função de onda (2.6) não representa um estado quântico “verdadeiro”. Suponhamos que  $\Psi_n(\varphi)$  forme um conjunto completo e ortogonal, de forma que possamos escrever qualquer função  $\Phi$  como

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(\varphi),$$

onde  $c_n = \langle \Psi_n | \Phi \rangle$ . Se  $\Phi$  for autoestado de um operador de fase, ou seja,  $\Phi = \delta(\varphi - \varphi')$ , então

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{in\varphi'\},$$

e, assim,

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{in(\varphi' - \varphi)\}. \quad (2.9)$$

Contudo, para que (2.9) seja uma função delta, precisamos ter  $-\infty < n < \infty$ , o que carece de qualquer significado físico, pois, conforme já discutido,  $n$  representa o número de fótons de um sistema, admitindo apenas valores não-negativos<sup>3</sup>.

Para conseguir definir um estado quântico que descreva apropriadamente a fase do sistema, consideremos inicialmente um oscilador harmônico clássico. Rotacionando o sistema em um ângulo  $\theta$ , obtemos as novas variáveis

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\theta) + p_0 \sin(\theta), \\ p = p_0 \cos(\theta) - x_0 \sin(\theta), \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} C \equiv \cos(\theta) = (xx_0 + pp_0) / x_0^2 - p_0^2, \\ S \equiv \sin(\theta) = -(xp_0 + px_0) / x_0^2 - p_0^2. \end{cases}$$

Calculando os parênteses de Poisson  $\{C, H\}$  e  $\{S, H\}$ , temos que

$$\{C, H\} \equiv \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial C}{\partial x} = S, \quad \{S, H\} = -C, \quad (2.10)$$

e, assim, a transição para a Mecânica Quântica pode ser feita observando que  $(C, S) \rightarrow (\hat{C}, \hat{S})$  e  $\{A, B\} \rightarrow [A, B]/i$ . Analogamente à ideia de um operador na forma  $e^{i\hat{\varphi}}$ , introduzimos o *operador exponencial*, (SUSSKIND; GLOGOWER, 1964)

$$\hat{E}_{\pm} = \hat{C} \mp i\hat{S}, \quad [\hat{E}_{\pm}, \hat{H}] = \mp \hat{E}_{\pm}. \quad (2.11)$$

Usando o resultado do comutador em (2.11), verificamos que

$$\hat{E}_+ |n\rangle = |n+1\rangle, \quad \hat{E}_- |n\rangle = (1 - \delta_{n0}) |n-1\rangle. \quad (2.12)$$

Antes de continuarmos, vale apontar um resultado interessante. Atuando  $\hat{E}_{\pm}$  no estado coerente, obtemos

$$\hat{E}_+ |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n+1\rangle, \quad \hat{E}_- |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n+1!}} |n\rangle. \quad (2.13)$$

Desta forma, escrevendo  $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$  e  $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 = N$ ,

$$\langle \hat{C} \rangle = f_1(N) \cos(\theta), \quad \langle \hat{S} \rangle = f_1(N) \sin(\theta),$$

<sup>3</sup> Foi proposto em (PEGG; BARNETT, 1989) que, considerando um espaço finito de  $s+1$  fótons, é possível definir um operador de fase e aplicar o limite  $s \rightarrow \infty$  a seus valores médios.

$$\langle \hat{C}^2 \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-N} + f_2(N) \cos^2(\theta), \quad \langle \hat{S}^2 \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-N} + f_2(N) \sin^2(\theta),$$

onde  $f_1(N)$  e  $f_2(N)$  são dadas por

$$f_1(N) = e^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^{n+1/2}}{n!} (n+1)^{-1/2}, \quad f_2(N) = \frac{e^{-N}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^{n+1}}{n!} [(n+1)(n+2)]^{-1/2}.$$

Podemos ver na Figura 2 que para  $N \gg 1$ , temos  $f_1(N) \approx 1$  e  $f_2(N) \approx 1/2$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \hat{C} \rangle &\approx \cos(\theta), & \langle \hat{S} \rangle &\approx \sin(\theta), \\ \langle \hat{C}^2 \rangle &\approx \cos^2(\theta), & \langle \hat{S}^2 \rangle &\approx \sin^2(\theta), \end{aligned}$$

que condiz exatamente com o comportamento clássico.

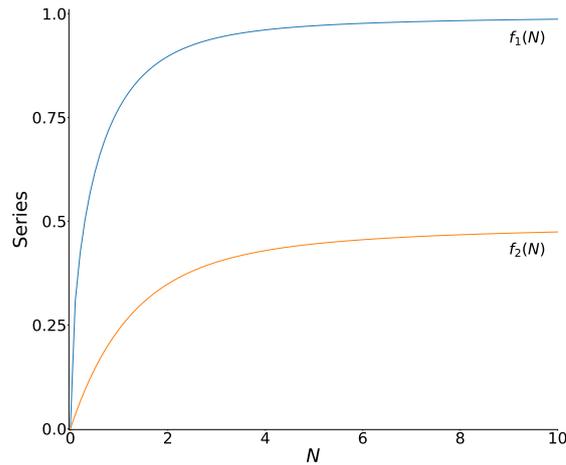


Figura 2 – Comportamento assintótico das funções  $f_1(N)$  e  $f_2(N)$ .

Os autoestados de  $\hat{E}_-$  podem ser construídos como (LERNER; HUANG; WALTERS, 1970)

$$|\varepsilon\rangle = \sqrt{1 - |\varepsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n |n\rangle, \quad \varepsilon = |\varepsilon|e^{i\varphi}, \quad \hat{E}_- |\varepsilon\rangle = \varepsilon |\varepsilon\rangle, \quad (2.14)$$

chamados de *estados coerentes de fase* em (SHAPIRO J. H.; SHEPARD; WONG, 1990). Muitas semelhanças com os estados coerentes podem ser verificadas. Por exemplo, enquanto  $|\alpha\rangle$  é definido como autoestado do operador de aniquilação, os estados coerentes de fase são autoestados de  $\hat{E}_-$ , que, como pode ser visto em (2.13), atua nos estados de número da mesma forma que  $\hat{a}$ . Além disso, os estados coerentes de fase diferem matematicamente dos estados coerentes apenas pelo fator  $1/\sqrt{n!}$  na série (2.14).

Podemos ainda definir (2.14) em termos do estado de vácuo, assim como feito em (1.1.13). Escrevendo  $|n\rangle = \hat{E}_+^n |0\rangle$  e observando que

$$|0\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\varepsilon^* \hat{E}_-\right)^m |0\rangle,$$

temos

$$|\varepsilon\rangle = \sqrt{1 - |\varepsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varepsilon \hat{E}_+\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\varepsilon^* \hat{E}_-\right)^m |0\rangle = F(\varepsilon) |0\rangle,$$

onde

$$F(\varepsilon) \equiv \sqrt{1 - |\varepsilon|^2} \left[ (1 - \varepsilon \hat{E}_+) (1 + \varepsilon^* \hat{E}_-) \right]^{-1}, \quad F^\dagger(\varepsilon) = F(-\varepsilon). \quad (2.15)$$

Perceba que

$$\begin{aligned} \hat{E}_- |\varepsilon\rangle &= \sqrt{1 - |\varepsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{E}_- \left(\varepsilon \hat{E}_+\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\varepsilon^* \hat{E}_-\right)^m |0\rangle, \\ &= \varepsilon \sqrt{1 - |\varepsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varepsilon \hat{E}_+\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\varepsilon^* \hat{E}_-\right)^m |0\rangle, \\ &= \varepsilon |\varepsilon\rangle, \end{aligned}$$

onde usamos que  $\hat{E}_- \hat{E}_+ = 1$ . Não encontramos menção ao operador (2.15) na literatura, e, portanto, pretendemos explorar melhorar suas características no futuro.



### 3 Compressão e não-Gaussianidade de Estados Coerentes de Fase

No capítulo anterior tivemos como objetivo revisar as diversas tentativas de descrever sistemas físicos a partir de sua fase, tanto introduzindo novos operadores como também novos estados. Conforme veremos a seguir, a ausência do fator  $1/\sqrt{n!}$  em (2.14) apresenta dificuldades tanto analíticas como numéricas em diversos cálculos. A lenta convergência de algumas séries deste capítulo nos obrigou a calcular aproximações de quantidades como a variância e a incerteza de Robertson-Schrödinger. Os resultados e gráficos que apresentaremos a seguir foram feitos em *Python*. Para compreender melhor o comportamento destas séries infinitas, aumentamos o número de termos somados no programa até conseguirmos um resultado “estável”. Muitos destes resultados foram revisados em outros programas.

#### 3.1 Valores médios e Variâncias

Para o estado coerente de fase, temos

$$\begin{aligned}\hat{a}|\varepsilon\rangle &= \sqrt{1-|\varepsilon|^2}\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\sqrt{n+1}|n\rangle, \\ \Rightarrow\langle\hat{a}\rangle &= (1-|\varepsilon|^2)\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}|\varepsilon|^{2n}\sqrt{n+1},\end{aligned}$$

e, assim,

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{2}\cos(\varphi)S_1, \quad \langle\hat{p}\rangle = \sqrt{2}\sin(\varphi)S_1, \quad (3.1.1)$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \cos(2\varphi)S_2 + \frac{|\varepsilon|^2}{1-|\varepsilon|^2} + \frac{1}{2}, \quad \langle\hat{p}^2\rangle = -\cos(2\varphi)S_2 + \frac{|\varepsilon|^2}{1-|\varepsilon|^2} + \frac{1}{2}, \quad (3.1.2)$$

onde

$$S_1 = (1-|\varepsilon|^2)\sum_{n=0}^{\infty}|\varepsilon|^{2n+1}\sqrt{n+1}, \quad S_2 = (1-|\varepsilon|^2)\sum_{n=0}^{\infty}|\varepsilon|^{2n+2}\sqrt{(n+1)(n+2)}.$$

Além disso,

$$\langle\hat{x}\hat{p}\rangle = \sin(2\varphi)S_2 - \frac{1}{2i},$$

Desta forma, definindo

$$N \equiv \langle\hat{n}\rangle + \frac{1}{2} = \frac{|\varepsilon|^2}{1-|\varepsilon|^2} + \frac{1}{2},$$

obtemos para a variância e a covariância (1.1.6),

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_p \end{array} \right\} = N - S_1^2 \pm (S_2 - S_1^2)\cos(2\varphi), \quad \sigma_{xp} = \sin(2\varphi)(S_2 - S_1^2). \quad (3.1.3)$$

Perceba que  $\sigma_x^{\varphi=\pi/2} = \sigma_p^{\varphi=0} = N - S_2$ . Escrevendo o valor médio  $\langle \hat{n} \rangle$  como

$$\langle \hat{n} \rangle = (1 - |\varepsilon|^2) \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon|^{2n} n = (1 - |\varepsilon|^2) \sum_{m=0}^{\infty} |\varepsilon|^{2m+2} (m+1),$$

e observando que

$$\begin{aligned} (n+1) - \sqrt{(n+1)(n+2)} &= \frac{(n+1)\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} - \frac{(n+1)\sqrt{n+2} - (n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= -\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}, \end{aligned}$$

obtemos a nova expressão

$$\sigma_x^{\varphi=\pi/2} = \frac{1}{2} - (1 - |\varepsilon|^2) |\varepsilon|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^{2n} \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}. \quad (3.1.4)$$

Podemos ver em (3.1.4) que há compressão de  $\sigma_x^{\varphi=\pi/2}$  (e, conseqüentemente, de  $\sigma_p^{\varphi=0}$ ) para qualquer valor de  $\varepsilon > 0$ , uma vez que  $\sigma_x^{\varphi=\pi/2} \leq 1/2$ . Considerando a aproximação para  $n$  pequeno

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \left(1 + \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{-1} \approx \left(2 + \frac{1}{2(n+1)}\right)^{-1} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4(n+1)}\right),$$

e os resultados exatos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x dy \sum_{n=0}^{\infty} y^n = -\ln(1-x),$$

podemos reescrever a variância como

$$\sigma_x^{\varphi=\pi/2} \approx \frac{1}{2} (1 - |\varepsilon|^2) \left[1 - \frac{1}{4} \ln(1 - |\varepsilon|^2)\right] = \frac{1}{2(1 + \langle \hat{n} \rangle)} \left[1 + \frac{1}{4} \ln(1 + \langle \hat{n} \rangle)\right]. \quad (3.1.5)$$

Vemos na Figura 3 (esquerda) que (3.1.5) aproxima bem o comportamento da expressão exata (3.1.4), embora possua uma curvatura ligeiramente maior. Comparando  $\sigma_x^{\varphi=\pi/2}$  com a variância do estado comprimido de vácuo<sup>1</sup>

$$\sigma_x^{sqz} = \left\{2 \left[2\langle \hat{n} \rangle + 1 + 2\sqrt{\langle \hat{n} \rangle (\langle \hat{n} \rangle + 1)}\right]\right\}^{-1}, \quad (3.1.6)$$

notamos que a compressão de (3.1.6) é consideravelmente mais forte que a de (3.1.4), conforme ilustrado pela Figura 3 (direita).

Uma quantidade interessante de analisar é  $R \equiv \langle \hat{x} \rangle^2 + \langle \hat{p} \rangle^2$ , que para os estados coerentes se torna  $R = 2|\alpha|^2 = 2\langle \hat{n} \rangle$ , enquanto que para os estados coerentes de fase,

<sup>1</sup> A função de onda do estado comprimido de vácuo é dada por  $\psi(x) = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \exp\{-\frac{a}{2}x^2\}$ . Fazemos  $a = e^{2r}$  para obter (3.1.6) mais facilmente.

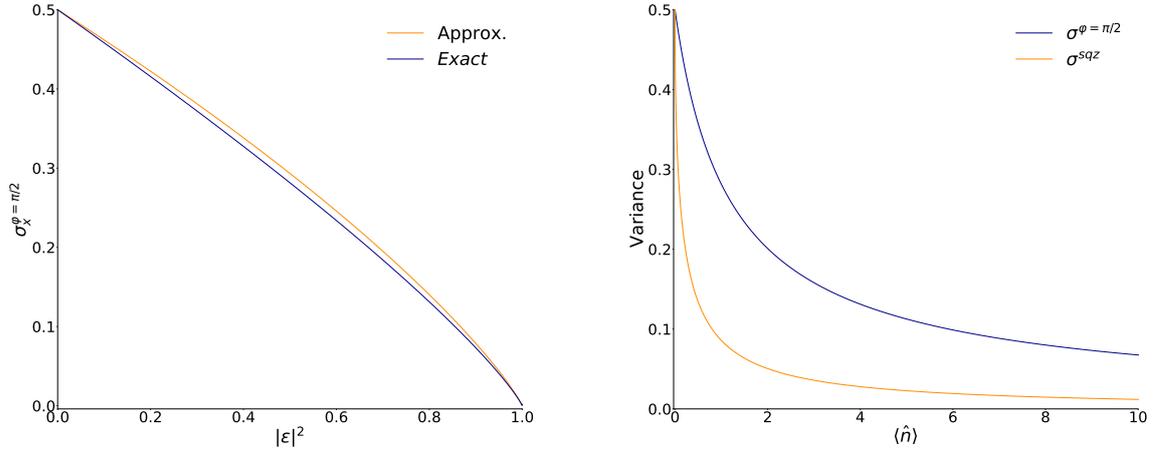


Figura 3 – Esquerda: Comparativo da expressão exata da variância  $\sigma_x^{\varphi=\pi/2}$  com a aproximação (3.1.5), ambas como funções de  $|\varepsilon|^2$ . Os cálculos numéricos foram feitos com 1.000 termos na equação (3.1.4). Direita: Dependência da expressão exata da variância  $\sigma_x^{\varphi=\pi/2}$  com  $\langle \hat{n} \rangle$  comparada com a variância do estado comprimido de vácuo (3.1.6).

$R = 2S_1^2$ . Note que, assim, obtemos  $\langle \hat{n} \rangle \approx S_1^2$ . Contudo, uma aproximação numérica no caso de  $\langle \hat{n} \rangle \gg 1$  mostra que  $R$  se comporta como  $R \approx \eta \langle \hat{n} \rangle$ , onde  $\eta = 1.59$ .

A partir de (3.1.3), podemos calcular a quantidade  $D$  definida em (1.1.8) a fim de avaliar se os estados coerentes de fase são estados minimizantes da incerteza. Observe que

$$D = (N - S_1^2)^2 - (S_2 - S_1^2)^2 = (N - S_2) (N + S_2 - 2S_1^2). \quad (3.1.7)$$

não depende da fase  $\varphi$ . Este resultado é esperado, uma vez que, conforme argumentado no início do Capítulo 2,  $\varphi$  irá variar com o tempo, enquanto que  $D$  é um *invariante quântico universal*, se mantendo constante sob qualquer evolução temporal de uma Hamiltoniana quadrática (DODONOV, 2000).

Podemos reescrever (3.1.7) aproximadamente como

$$D \approx \frac{1 + (1/4) \ln(1 + \langle \hat{n} \rangle)}{4(1 + \langle \hat{n} \rangle)^2} \left[ 2(2 - \eta) \langle \hat{n} \rangle^2 + 1 + 2\langle \hat{n} \rangle - (1/4) \ln(1 + \langle \hat{n} \rangle) \right], \quad (3.1.8)$$

onde usamos o parâmetro  $\eta$  obtido a partir da quantidade  $R$ . Perceba que  $D^{\min} = 1/4$  unicamente para  $\langle \hat{n} \rangle = 0$ . No limite assintótico  $\langle \hat{n} \rangle \gg 1$ ,

$$D \approx \frac{2 - \eta}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \ln(1 + \langle \hat{n} \rangle) \right] = \frac{2 - \eta}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \ln(1 - |\varepsilon|^2) \right]. \quad (3.1.9)$$

Quando  $1 + \langle \hat{n} \rangle = 10^4$  e  $\eta = 1.59$ , temos  $D \approx 0.677$ . A dependência de  $D$  com relação a  $\langle \hat{n} \rangle$  está ilustrada na Figura 4.

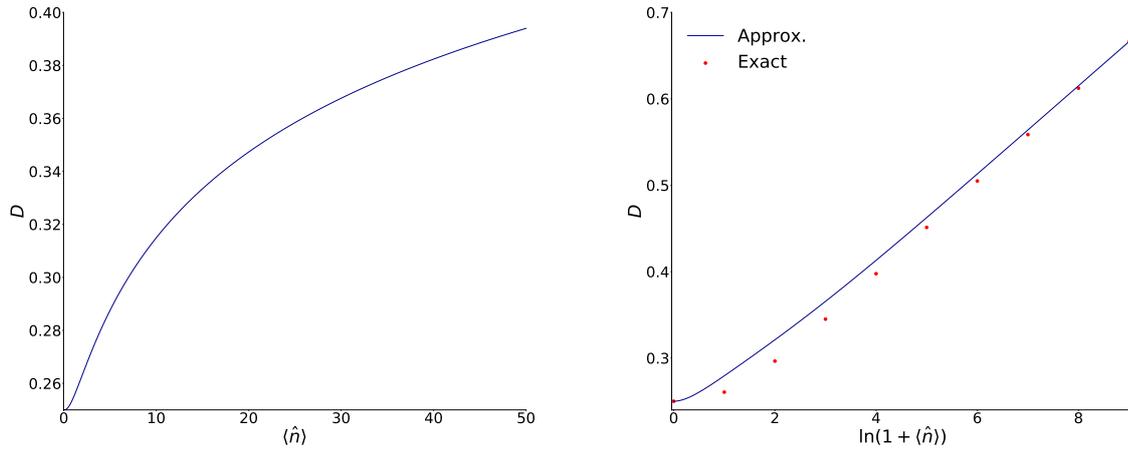


Figura 4 – A quantidade  $D$  como função de  $\langle \hat{n} \rangle$  para os estados coerentes de fase (2.14). Esquerda: Expressão exata de  $D$  como para pequenos valores de  $\langle \hat{n} \rangle$ . Direita: Comparativo da expressão exata (3.1.7) com a aproximação (3.1.8). O melhor ajuste ocorreu com o parâmetro  $\eta = 1.59$ . As séries  $S_1$  e  $S_2$  foram calculadas para 640.000 termos.

Por fim, podemos calcular aproximadamente  $\sigma_x^{\varphi=0}$  usando (3.1.3), (3.1.5), (3.1.7) e (3.1.8), obtendo

$$\sigma_x^{\varphi=0} \approx \frac{2(2 - \eta)\langle \hat{n} \rangle^2 + 1 + 2\langle \hat{n} \rangle - (1/4) \ln(1 + \langle \hat{n} \rangle)}{2(1 + \langle \hat{n} \rangle)}. \quad (3.1.10)$$

Se  $\langle \hat{n} \rangle \gg 1$  então  $\sigma_x^{\varphi=0} \approx (2 - \eta)\langle \hat{n} \rangle \approx 0.4\langle \hat{n} \rangle$ . Os valores exatos de  $\sigma_x^{\varphi=0}$  e  $\langle \hat{x} \rangle^{\varphi=0}$  estão representados na Figura 5.

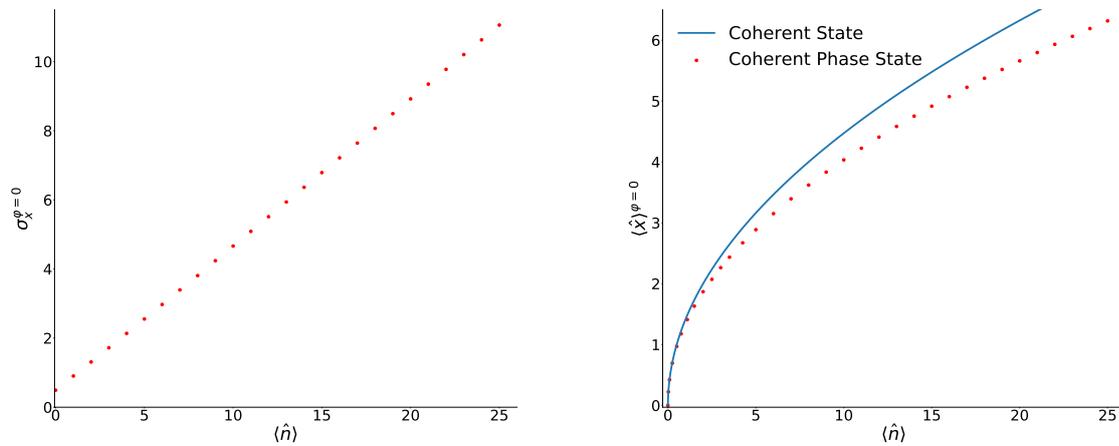


Figura 5 – Esquerda: Valores exatos da variância  $\sigma_x^{\varphi=0}$  como função de  $\langle \hat{n} \rangle$ . Direita: Comparação do valor médio  $\langle \hat{x} \rangle^{\varphi=0}$  como função de  $\langle \hat{n} \rangle$  para estados coerentes de fase e estados coerentes. Os resultados foram obtidos usando 10.000 termos nas séries  $S_1$  e  $S_2$ .

Diferente dos estados coerentes, onde a variância é constante (Seção 1.1.2), vemos que para os estados coerentes de fase,  $\sigma_x^{\varphi=0}$  e  $\sigma_x^{\varphi=\pi/2}$  variam à medida que  $\langle \hat{n} \rangle$  cresce. Além disso, não há compressão quando  $\varphi = 0$ , uma vez que  $\sigma_x^{\varphi=0} < 1/2$  nunca acontece.

## 3.2 Função de Onda, Densidade de Probabilidade e Gaussianidade

A função de onda dos estados coerentes de fase pode ser obtida fazendo

$$\langle x|\varepsilon\rangle \equiv \psi_\varepsilon(x) = \sqrt{1-|\varepsilon|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(x), \quad (3.2.1)$$

onde  $\psi_n(x)$  é função de onda do oscilador harmônico, definida em (1.1.3). Como a série (3.2.1) não converge para alguma função conhecida, precisamos usar alguns “truques” para entender melhor seu comportamento. Lembrando que  $\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\varphi} = |\varepsilon|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , podemos reescrever explicitamente as partes real e imaginária de (3.2.1) da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \text{Re}\psi_\varepsilon(x) \\ \text{Im}\psi_\varepsilon(x) \end{pmatrix} = \pi^{-1/4} \sqrt{1-|\varepsilon|^2} \exp(-x^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^n H_n(x)}{\sqrt{2^n n!}} \times \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Vemos nas Figuras 6 (esquerda) e 7 (esquerda) o caráter não-Gaussiano de  $\text{Re}\psi_\varepsilon(x)$  tanto para  $\varphi = 0$  quanto para  $\varphi = \pi/2$ . Por outro lado, a densidade de probabilidade  $|\psi_\varepsilon(x)|^2$  no caso de  $\varphi = 0$  possui apenas uma pequena inclinação para a esquerda quando comparada com a densidade de probabilidade de um estado Gaussiano

$$\rho_G(x, x) = (2\pi\sigma_x)^{-1/2} \exp\left[-(x - \langle x \rangle)^2 / (2\sigma_x)\right], \quad (3.2.3)$$

enquanto que para  $\varphi = \pi/2$  as diferenças são quase imperceptíveis (Figuras 6 (direita) e 7 (direita)).

A não-Gaussianidade de um sistema pode ser medida de diferentes maneiras. A forma mais intuitiva é através da *Curtose*<sup>2</sup>,

$$\mathcal{K} = \frac{\langle \hat{x}^4 \rangle}{3 \langle \hat{x}^2 \rangle^2} - 1, \quad (3.2.4)$$

onde  $\mathcal{K} = 0$  representa os estados Gaussianos. A Figura 8 mostra a Curtose para diferentes fases. Perceba que (2.14) se comporta como um estado Gaussiano para pequenos valores de  $|\varepsilon|$ , independente de  $\varphi$ . Quando  $\varphi = \pi/2$  a “perda” da Gaussianidade ocorre apenas a partir de  $|\varepsilon| \approx 0.8$ , enquanto que para  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi/4$  o estado passa a ser não-Gaussiano mais rapidamente ( $|\varepsilon| \approx 0.2$ ).

Outra forma de analisar a não-Gaussianidade é introduzindo a quantidade

$$G = \sqrt{2\pi\sigma_x} |\psi(\langle \hat{x} \rangle)|^2. \quad (3.2.5)$$

<sup>2</sup> Conforme dito na Introdução,  $\langle \hat{x}^4 \rangle = 3 \langle \hat{x}^2 \rangle^2$  para estados Gaussianos, justificando a forma de (3.2.4)

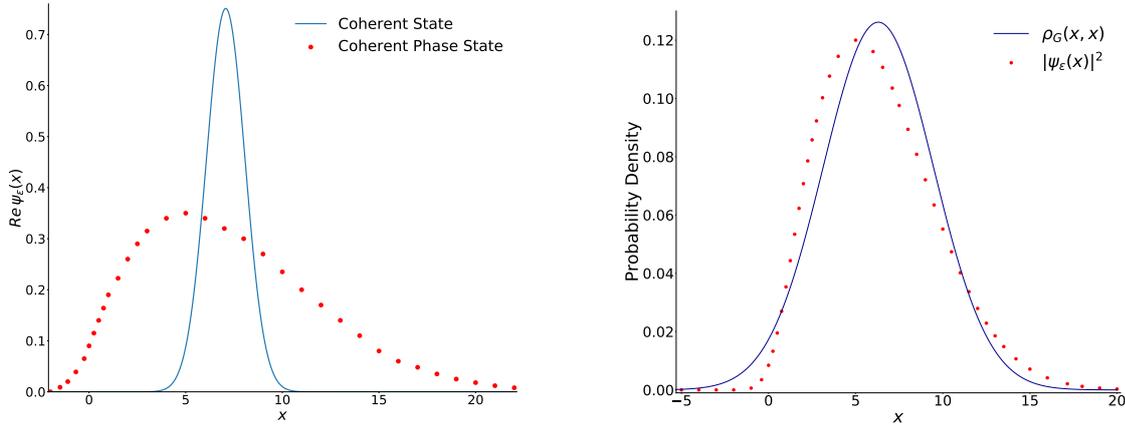


Figura 6 – Esquerda: Comparativo da parte real da função de onda  $\psi_\varepsilon(x)$  com  $\varphi = 0$  e  $\langle \hat{n} \rangle = 25$  com a função de onda do estado coerente  $\psi_\alpha(x)$  com  $\alpha = 5$ . Direita: Densidade de probabilidade  $|\psi_\varepsilon(x)|^2$  para  $\varphi = 0$  e  $\langle \hat{n} \rangle = 25$  comparada com a densidade de probabilidade de um estado Gaussiano (3.2.3) com  $\langle x \rangle = 6.3$  e  $\sigma_x = 10$ . As séries (3.2.2) foram calculadas com 10.000 termos.

Note que no caso de  $|\psi(\langle \hat{x} \rangle)|^2$  ser dada por (3.2.3), temos  $G = 1$ , ou seja, o estado é Gaussiano. Portanto, se  $G > 1$  dizemos que o estado é “super-Gaussiano”, enquanto que para  $G < 1$  ele será “sub-Gaussiano”. Podemos obter uma expressão aproximada para  $G(\varepsilon)$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  usando que  $\langle \hat{x} \rangle \approx \sqrt{2}|\varepsilon| \cos \varphi$ . Assim,

$$|\psi(\langle x \rangle)|^2 \approx \pi^{-1/2} \left[ 1 + |\varepsilon|^2 \cos(2\varphi)(1 - \sqrt{2}) \right], \quad \sqrt{2\pi\sigma_x} \approx \pi^{1/2} \left[ 1 + |\varepsilon|^2 \cos(2\varphi)(\sqrt{2} - 1) \right].$$

Desta forma,

$$G^{\varphi=\pi/2}(\varepsilon) = G^{\varphi=0}(\varepsilon) \approx 1 + |\varepsilon|^4 \left( 3\sqrt{2} - 3 - \sqrt{3/2} \right) + \mathcal{O}(|\varepsilon|^6) \approx 1 + 0.018|\varepsilon|^4, \quad (3.2.6)$$

ou seja, quando  $|\varepsilon| \rightarrow 0$  temos  $G \approx 1$ . Este resultado era esperado, uma vez que coincide exatamente com o que foi mostrado pela Curtose (3.2.4). Contudo, embora ambos os casos ( $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi/2$ ) sejam super-Gaussianos para pequenos valores de  $\langle \hat{n} \rangle$ , vemos na Figura 9 que  $G^{\varphi=0}$  passa a ser sub-Gaussiano a partir de  $\langle \hat{n} \rangle \approx 0.75$ . O comportamento de  $G(\varepsilon)$  quando  $|\varepsilon| \rightarrow 1$  ainda é desconhecido, pois não foi possível obter uma boa aproximação para  $G(\varepsilon)$  e a expressão exata apresentou muitas dificuldades computacionais. Portanto, não sabemos se  $G^{\varphi=0}$  tende a zero, se  $G^{\varphi=\pi/2}$  cresce indefinidamente ou se as duas funções se tornam constantes.

### 3.3 Função de Wigner

O último método que usaremos para medir a não-Gaussianidade dos estados coerentes de fase é por meio da “negatividade” da função de Wigner, pois, como sabemos do

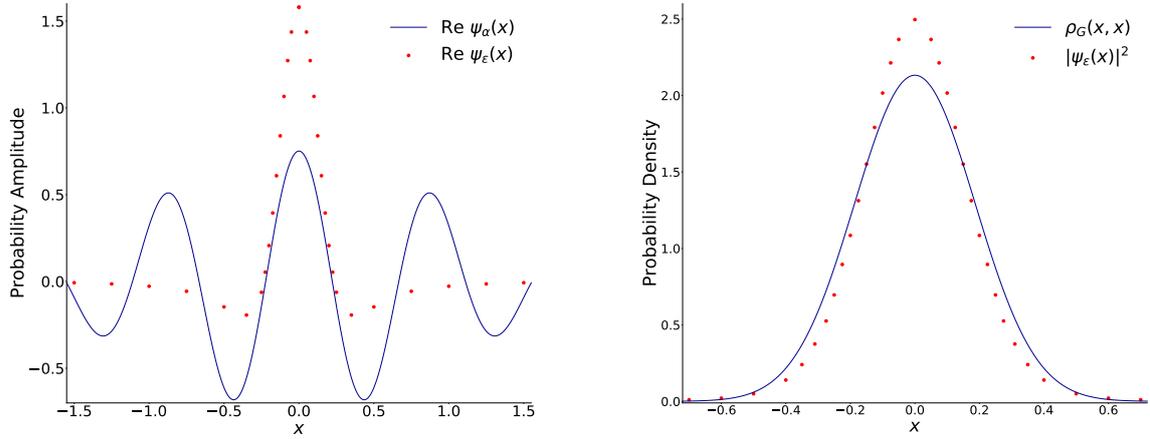


Figura 7 – Esquerda: Comparativo da parte real da função de onda  $\psi_\varepsilon(x)$  para  $\varphi = \pi/2$  e  $\langle \hat{n} \rangle = 25$ , com a parte real da função de onda do estado coerente  $\psi_\alpha(x)$  para  $\alpha = 5i$ , ou seja,  $\psi_\alpha(x) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2) \cos(5\sqrt{2}x)$ . Direita: Densidade de probabilidade  $|\psi_\varepsilon(x)|^2$  no caso de  $\varphi = \pi/2$  e  $\langle \hat{n} \rangle = 25$ , comparada com a densidade de probabilidade  $\rho_G(x, x)$  para um estado Gaussiano com o mesmo valor médio  $\langle x \rangle = 0$  e variância  $\sigma_x = 0.035$ . As séries (3.2.2) foram calculadas usando 10.000 termos.

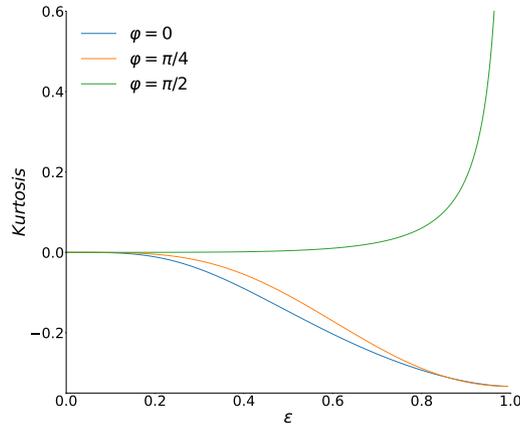


Figura 8 – Curtose como função de  $\varepsilon$ , calculada para  $\varphi = 0, \pi/4$  e  $\pi/2$ .

teorema de Hudson (Seção 1.3), apenas estados Gaussianos possuem  $W(x, p)$  não-negativa em todo o espaço de fase. Para os estados (2.14), temos que

$$W = (1 - |\varepsilon|^2) \sum_{m,n=0}^{\infty} |\varepsilon|^{m+n} e^{i(m-n)\varphi} W_{mn}, \quad (3.3.1)$$

Podemos separar a série (3.3.1) em duas novas séries,  $\sum_{n,m} \rightarrow \sum_{n=m} + \sum_{n \neq m}$ , reescre-

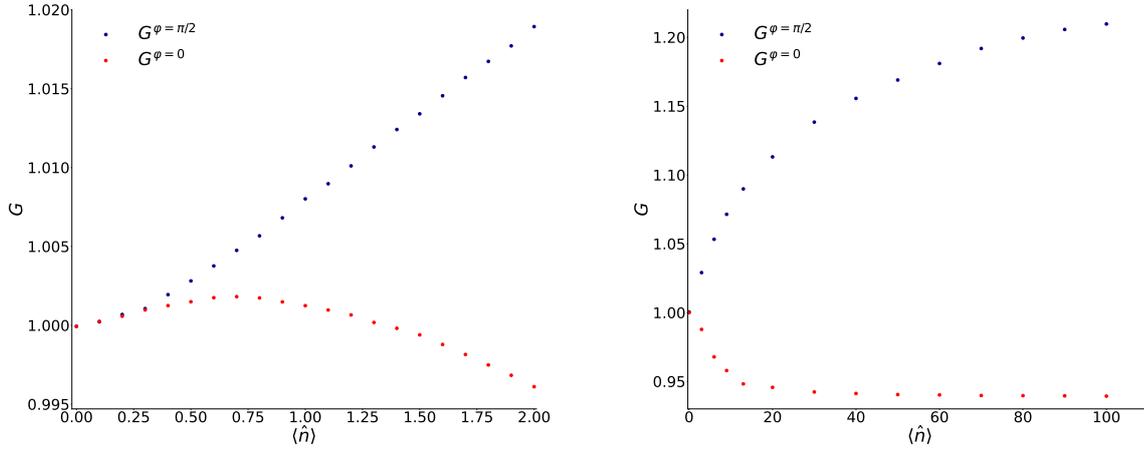


Figura 9 – O parâmetro  $G$  (3.2.5) como função de  $\langle \hat{n} \rangle$ . Os resultados foram obtidos somando 10.000 termos em (3.2.2).

vendo a função de Wigner como  $W = W_1 + W_2$ . Perceba que para o primeiro caso, temos

$$W_1 = 2 \left(1 - |\varepsilon|^2\right) e^{-b^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |\varepsilon|^{2n} L_n(2b^2). \quad (3.3.2)$$

Contudo, lembramos que a função geradora dos polinômios de Laguerre é dada por (NIKIFOROV; UVAROV, 1988)

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = (1 - z)^{-1} \exp\left(\frac{xz}{z - 1}\right).$$

Desta forma, (3.3.2) se torna

$$W_1 = \frac{2}{1 + 2\langle \hat{n} \rangle} \exp\left(-\frac{x^2 + p^2}{1 + 2\langle \hat{n} \rangle}\right), \quad (3.3.3)$$

que condiz exatamente com a função de Wigner de um estado Gaussiano. Para a série com  $n \neq m$ , obtemos

$$W_2 = 4 \left(1 - |\varepsilon|^2\right) e^{-b^2} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \lambda=1}}^{\infty} \left(-|\varepsilon|^2\right)^{\mu} (\sqrt{2}|\varepsilon|b)^{\lambda} \cos[\lambda(\varphi - \chi)] \sqrt{\frac{\mu!}{(\mu + \lambda)!}} L_{\mu}^{\lambda}(2b^2). \quad (3.3.4)$$

Escrevendo explicitamente  $W_2(x, 0)$ , temos

$$W_2(x, 0) = 4 \left(1 - |\varepsilon|^2\right) e^{-x^2} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \lambda=1}}^{\infty} \left(-|\varepsilon|^2\right)^{\mu} (\sqrt{2}|\varepsilon|x)^{\lambda} \cos(\lambda\varphi) \sqrt{\frac{\mu!}{(\mu + \lambda)!}} L_{\mu}^{\lambda}(2x^2). \quad (3.3.5)$$

Note que  $b$  em (3.3.1) não pode ser negativo, um vez que representa o raio de uma decomposição polar. Assim, devemos ter  $\chi = 0$  quando  $x > 0$  e  $\chi = \pi$  quando  $x < 0$ .

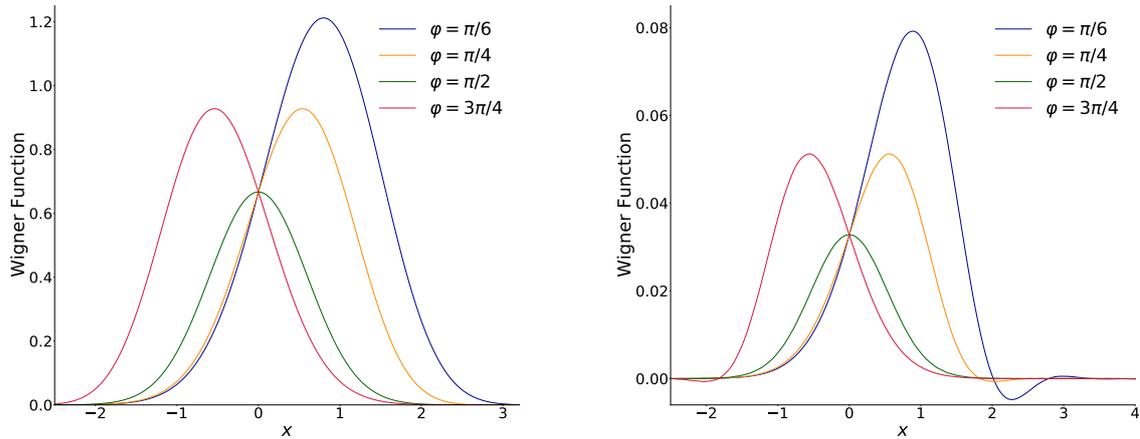


Figura 10 – Função de Wigner  $W(x, 0)$  para diferentes valores de  $\varphi$  com  $\langle \hat{n} \rangle = 1$  (esquerda) e  $\langle \hat{n} \rangle = 30$  (direita).

As expressões para a função de Wigner nos dois casos coincidem e podem ser escritas simplesmente como (3.3.5).

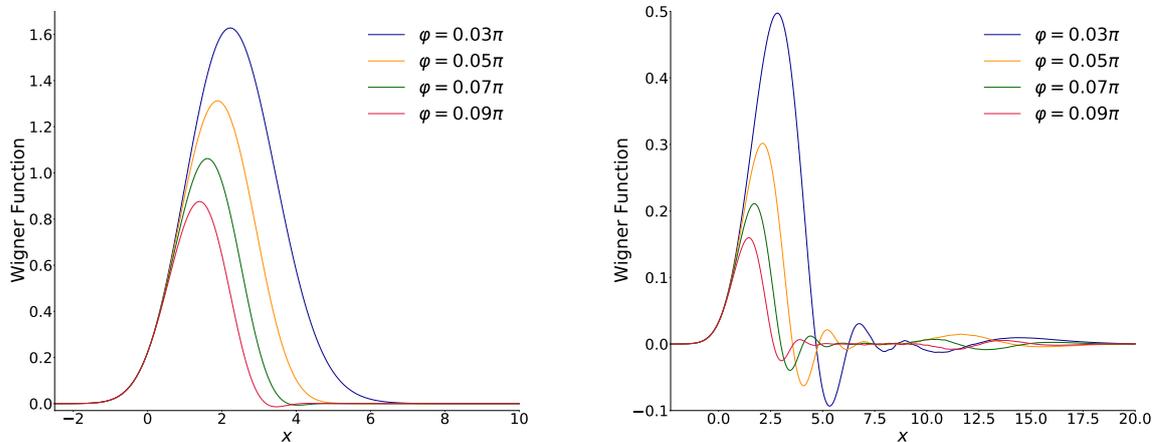


Figura 11 – Função de Wigner  $W(x, 0)$  para valores pequenos da fase  $\varphi$  com  $\langle \hat{n} \rangle = 4$  (esquerda) e  $\langle \hat{n} \rangle = 30$  (direita).

Observamos na Figura 10 que algumas regiões negativas, ou não-Gaussianas, começam a surgir quando  $\langle \hat{n} \rangle = 30$ , ainda que “modestamente”. Entretanto, para valores menores de  $\varphi$  (Figura 11), a negatividade se mostra mais evidente conforme  $\langle \hat{n} \rangle$  cresce. Este é o mesmo resultado obtido na Seção 3.2, onde observamos a partir de  $\mathcal{K}$  e  $G$  que os estados coerentes de fase se tornavam mais não-Gaussianos (ou menos Gaussianos!) para

valores maiores de  $|\varepsilon|$ .

Foram somados 110 termos nas séries de (3.3.5) para fazer os gráficos à esquerda em 10 e 11, enquanto para os gráficos à direita de 10 e 11 foram necessários 210 termos. A quantidade exigida de termos somados aumenta conforme  $\langle \hat{n} \rangle$  também aumenta, resultando em compilações cada vez mais demoradas. Por esta razão, não conseguimos verificar a função de Wigner para valores de  $\langle \hat{n} \rangle$  ainda maiores.

## Conclusão

Conforme vimos no Capítulo 2, muito tem sido feito para compreender melhor o problema de fase na Mecânica Quântica. Dentre as diversas tentativas apresentadas ao longo dos anos, estivemos interessados nos estados coerentes de fase por sua semelhança aos estados coerentes. Dedicamos nosso trabalho a investigar características associadas aos operadores de posição e momento, calculando valores médios e variâncias para diferentes valores de  $\varepsilon$  e  $\varphi$ . Obtivemos resultados interessantes como a compressão de  $\sigma_x$  ( $\sigma_p$ ) quando  $\varphi = \pi/2$  (0), e, além disso, vimos que a incerteza de Robertson-Schrödinger  $D$  cresce indefinidamente à medida que  $\varepsilon$  também cresce.

A não-Gaussianidade de (2.14) foi medida inicialmente a partir das quantidades  $\mathcal{K}$  e  $G$ . Observamos no caso de  $\mathcal{K}$  que a Gaussianidade era perdida mais facilmente quando  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi/4$ . Para o parâmetro  $G$ , mostramos que, apesar de  $G^{\varphi=0}$  apresentar um comportamento super-Gaussiano para  $\langle \hat{n} \rangle$  pequeno, este se tornava sub-Gaussiano quando  $\langle \hat{n} \rangle \approx 0.75$ . Investigamos, por fim, a não-Gaussianidade através da função de onda e de Wigner de (2.14), obtendo que, embora  $\psi_\varepsilon(x)$  seja consideravelmente diferente de  $\psi_\alpha(x)$ , a densidade de probabilidade  $|\psi_\varepsilon(x)|^2$  e a função de Wigner apresentaram apenas pequenas divergências de um comportamento Gaussiano quando  $|\varepsilon|$  é distante de 1.

Ainda há muitas características dos estados coerentes de fase a serem estudadas. Descobrimos recentemente que superposições pares dos estados (2.14) apresentam compressões mais fortes que para  $|\varepsilon\rangle$ , tanto de momentos de segunda ordem como de quarta

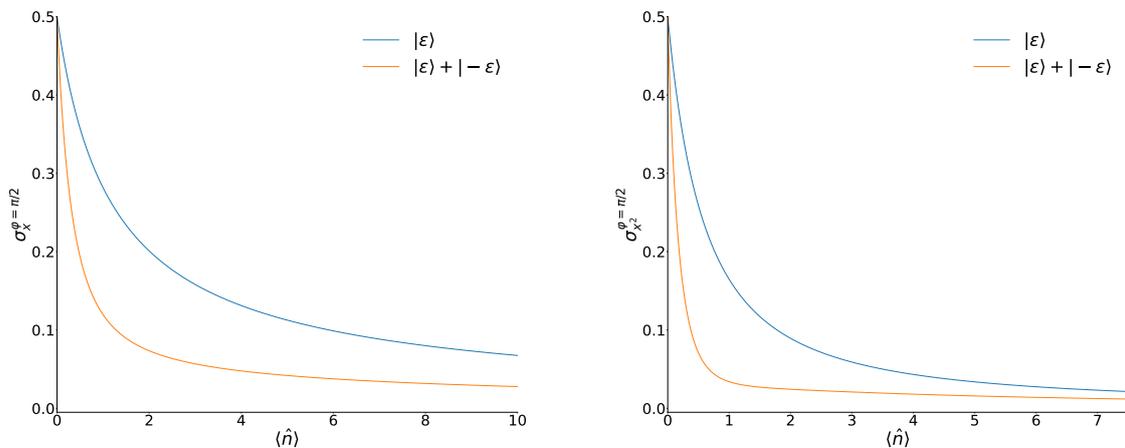


Figura 12 – Comparação da variância do estado simples (2.14) com uma superposição par (normalizada)  $|\varepsilon\rangle + |-\varepsilon\rangle$  para momentos de segunda ordem (esquerda) e quarta ordem (direita). Os cálculos foram feitos usando 1.000 termos nas séries.

ordem (Figura 12), e, portanto, pretendemos direcionar nossa pesquisa nesta linha. Contudo, o maior problema deste trabalho se mostra na dificuldade computacional de obter resultados precisos para as diversas séries que aparecem ao longo dos cálculos.

# Referências

- ARAGONE, C. et al. Intelligent spin states. *Phys. A: Math. Nucl. Gen.*, v. 7, p. L149–L151, 1974. Citado na página [22](#).
- BARTLETT, M.; MOYAL, J. The exact transition probabilities of quantum-mechanical oscillators calculated by the phase-space method. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, v. 45, p. 545, 1949. Citado na página [28](#).
- BASEIA B.; DANTAS, C. M. A.; MOUSSA, M. H. Y. Pure states having thermal photon distribution revisited: generation and phase-optimization. *Physica A*, v. 258, p. 203–210, 1998. Citado na página [17](#).
- BENNETT, C. H. et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, v. 54, p. 3824, 1996. Citado na página [18](#).
- CARRUTHERS, P.; NIETO, M. M. Phase and angle variables in quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 40, n. 2, p. 411–440, 1968. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [30](#).
- CAVES, C. M. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. D*, v. 23, p. 1693, 1981. Citado na página [18](#).
- CITELI, M. F.; DANTAS, V. M.; DODONOV, V. Minimal products of coordinate and momentum uncertainties of high orders: Significant and weak high-order squeezing. *Entropy*, v. 22, p. 980, 2020. Citado na página [22](#).
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 114, n. 767, p. 243–265, 1927. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [29](#).
- DODONOV, V. V. Universal integrals of motion and universal invariants of quantum systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 33, p. 7721–7738, 2000. Citado na página [37](#).
- DODONOV, V. V. et al. Squeezed states and uncertainty relations since 1991. *Journal of Russian Laser Research*, v. 28, p. 404–428, 2007. Citado na página [18](#).
- DODONOV, V. V.; MAN’KO, V. I. Phase space eigenfunctions of multidimensional quadratic hamiltonians. *Physica A*, v. 137, p. 306–316, 1986. Citado na página [28](#).
- D’ARIANO G. M.; MACCHIAVELLO, C. S. N.; YUEN, H. P. Quantum phase amplification. *Physical Review A*, v. 54, n. 6, p. 7, 1996. Citado na página [17](#).
- FAGHIHI, M. J.; TAVASSOLY, M. K. Number-phase entropic squeezing and nonclassical properties of a three-level atom interacting with a two-mode field: intensity-dependent coupling, deformed kerr medium, and detuning effects. *J. Opt. Soc. Am. B*, v. 30, n. 11, 2013. Citado na página [17](#).
- FIURÁSEK, J. Gaussian transformations and distillation of entangled gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, v. 89, p. 137904, 2002. Citado na página [18](#).

- FREITAS, M. C. de; DODONOV, V. V. Non-gaussianity of four-photon superpositions of fock states. *Quantum Reports*, v. 3, n. 3, p. 350–365, 2021. Citado na página 19.
- FREITAS, M. C. de; DODONOV, V. V. Coherent phase states in the coordinate and wigner representations. *Quantum Reports*, v. 4, n. 4, p. 509–522, 2022. Citado na página 18.
- GARRISON, J. C.; WONG, J. Canonically conjugate pairs, uncertainty relations, and phase operators. *J. Math. Phys.*, v. 11, p. 2242, 1970. Citado na página 18.
- GENONI, M. G.; PARIS, M. G. A.; BANASZEK, K. Measure of the non-gaussian character of a quantum state. *Phys. Rev. A*, v. 76, 2007. Citado na página 19.
- GLAUBER, R. J. Photon correlations. *Phys. Rev. Lett.*, v. 10, p. 84–6, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.
- GROENEWOLD, H. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, v. 12, p. 405, 1946. Citado na página 28.
- HALL, M. J. W. The quantum description of optical phase. *Quantum Opt.*, v. 3, p. 7–12, 1991. Citado na página 17.
- HALL, M. J. W. Phase resolution and coherent phase states. *Journal of Modern Optics*, v. 40, n. 5, p. 809–824, 1993. Citado na página 17.
- HAROCHE, S.; RAIMOND, J. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*. [S.l.]: Oxford Graduate Texts, 2006. Citado na página 26.
- HOLLENHORST, J. N. Quantum limits on resonant-mass gravitational-radiation detectors. *Phys. Rev. D*, v. 19, p. 1669, 1979. Citado na página 18.
- HUDSON, R. L. When is the wigner function quasi-probability density non-negative? *Reports of Mathematical Physics*, v. 6, p. 2, 1974. Citado na página 27.
- KENNARD, E. Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen. *Z. Phys.*, v. 44, p. 326–352, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.
- KRUGER, J.; POFFIN, A. The formulation of quantum mechanics in terms of ensemble in phase space. *Physica*, v. 87A, p. 132, 1977. Citado na página 28.
- LERNER, E. C.; HUANG, H. W.; WALTERS, G. E. Some mathematical properties of oscillator phase operators. *Journal of Mathematical Physics*, II, p. 1679, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 32.
- LEWENSTEIN, M.; SANPERA, A.; POSPIECH, M. *Quantum optics: and introductionn*. [S.l.]: University of Hannover, Germany, 2004. Citado na página 24.
- LONDON, F. Ueber die jacobischen transformationen der quantenmechanik. *Z. Phys.*, v. 37, p. 915, 1926. Citado na página 29.
- LONDON, F. Winkelvariable und kanonische transformationen in der undulationsmechanik. *Z. Phys.*, v. 40, p. 193, 1927. Citado na página 29.
- LOUISELL, W. H. Amplitude and phase uncertainty relations. *Physics Letters*, v. 7, n. 1, p. 2, 1963. Citado na página 17.

LYNCH, R. The quantum phase problem: a critical review. *Physics Reports*, v. 256, n. 7, p. 367–436, 1995. Citado na página 18.

LYNCH, R.; MAVROMATIS, H. Nth (even)-order minimum uncertainty products. *Math. Phys.*, v. 31, p. 1947–1951, 1990. Citado na página 19.

LÉVY-LEBLOND, J.-M. Who is afraid of nonhermitian operators? a quantum description of angle and phase. *Annals of Physics*, v. 101, n. 1, p. 319–341, 1976. Citado na página 18.

MA, L. et al. Generation of the squeezed state with an arbitrary complex amplitude distribution. *Photonics Research*, v. 8, p. 1422–1427, 2020. Citado na página 18.

MA, X.; RHODES, W. Comment on “phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field”. *Phys. Rev. A*, v. 43, p. 2576, 1991. Citado na página 17.

MALPANI, . P. et al. Quantum phase properties of photon added and subtracted displaced fock states. *Annalen der Physik*, v. 531, n. 11, 2019. Citado na página 17.

MANDILARA, A.; CERF, N. J. Quantum uncertainty relation saturated by the eigenstates of the harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 86, p. 030102(R), 2012. Citado na página 19.

NIETO, M. M. Quantum phase and quantum phase operators: Some physics and some history. *Physica Scripta*, T48, p. 5–12, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

NIKIFOROV, A. F.; UVAROV, V. B. *Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction with Applications*. 1st. ed. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 21, 28 e 42.

NISSET, J.; FIURÁSEK, J.; CERF, N. J. No-go theorem for gaussian quantum error correction. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, p. 120501, 2009. Citado na página 18.

PAUL, H. Phase of a microscopic electromagnetic field and its measurement. *Fortschritte der Physik*, v. 39, p. 657–689, 1974. Citado na página 18.

PEGG, D.; BARNETT, S. Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. A*, v. 39, n. 4, p. 11, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.

PEGG, D.; BARNETT, S. Tutorial review: Quantum optical phase. *Journal of Modern Optics*, v. 44:2, p. 225–264, 1997. Citado na página 30.

POPOV, V. N.; YARUNIN, V. S. Quantum and quasi-classical states of the photon phase operator. *Journal of Modern Optics*, v. 39, n. 7, p. 1525–1531, 1992. Citado na página 17.

ROBERTSON, H. A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation. *Phys. Rev.*, v. 31, p. 667, 1930. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.

SCHRÖDINGER, E. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, v. 14, p. 664–6, 1926. Citado na página 22.

SCHRÖDINGER, E. Zum heisenbergschen unschärfepinzip. *sitzungsberichte der preussischen. Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, p. 296–303, 1930. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.

- SCHWABL, F. *Quantum Mechanics*. 4th. ed. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 21.
- SERAFINI, A. *Quantum Continuous Variables*. 2nd. ed. [S.l.]: CRC Press, Taylor Francis Group, 2017. Citado na página 27.
- SHAPIRO, J. H. Quantum phase measurement: A system-theory perspective. *Physical Review A*, v. 43, n. 7, 1991. Citado na página 17.
- SHAPIRO J. H.; SHEPARD, S. R.; WONG, N. C. *Coherence and Quantum Optics VI*. [S.l.]: Plenum Press, New York, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 32.
- STOLER, D. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys. Rev. D*, v. 1, p. 3217–3219, 1970. Citado na página 18.
- SUDARSHAN, E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. *Phys. Rev. Lett.*, v. 10, p. 277–9, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.
- SUSSKIND, L.; GLOGOWER, J. Quantum mechanical phase and time operator. *Physics*, v. 1, p. 49–61, 1964. Citado 3 vezes nas páginas 17, 29 e 31.
- TAKABAYASI, T. The formulation of quantum mechanics in terms of ensemble in phase space. *Progr. Theor. Phys.*, v. 11, p. 341, 1954. Citado na página 28.
- TRIFONOV, D. Generalized intelligent states and squeezing. *Math. Phys.*, v. 35, p. 2297–2308, 1994. Citado na página 22.
- VAMEGH, S. M.; TAVASSOLY, M. Nonclassicality of new class of states produced by superposition of two nonlinear squeezed states with respective phase  $\varphi$ . *Reports on Mathematical Physics*, v. 75, n. 2, 2015. Citado na página 17.
- VORONTSOV, Y. I.; REMBOVSKY, Y. A. The problem of the pegg-barnett phase operator. *Physics Letters A*, v. 254, p. 7–10, 1999. Citado na página 17.
- WALLS, D. F. Squeezed states of light. *Nature*, v. 306, p. 141–146, 1983. Citado na página 18.
- WEEDBROOK, C. et al. Gaussian quantum information. *Rev. Mod. Phys.*, v. 84, n. 621, 2012. Citado na página 18.
- WIGNER, E. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, v. 49, p. 11, 1932. Citado na página 25.
- YUEN, H. P.; SHAPIRO, J. H. Generation and detection of two-photon coherent states in degenerate four-wave mixing. *Optics Letters*, v. 4, p. 334–336, 1979. Citado na página 18.