



**DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MEFG/S GLOBAL-LOCAL DE ALTA ORDEM COM  
FUNÇÕES FLAT-TOP PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM PROCESSO DE DANIFICAÇÃO.**

**GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MEFG/S  
GLOBAL-LOCAL DE ALTA ORDEM COM FUNÇÕES  
FLAT-TOP PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM  
PROCESSO DE DANIFICAÇÃO**

**GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA**

**ORIENTADOR: FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR**

**TESE DE DOUTORADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**BRASÍLIA/DF: ABRIL - 2023.**



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MEFG/S GLOBAL-LOCAL  
DE ALTA ORDEM COM FUNÇÕES FLAT-TOP PARA ANÁLISE DE  
ESTRUTURAS EM PROCESSO DE DANIFICAÇÃO**

**GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA**

**TESE SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E  
AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE  
DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA  
A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADO POR:**

---

**Prof. Francisco Evangelista Junior, PhD. (ENC-UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof. Edgar Nobuo Mamiya, DSc. (ENM-UnB)  
(Examinador Interno)**

---

**Prof. Felício Bruzzi Barros, DSc. (EE-UFGM)  
(Examinador Externo)**

---

**Prof. Sergio Persival Baroncini Proenca, DSc. (EESC-USP)  
(Examinador Externo)**

**BRASÍLIA/DF, ABRIL DE 2023**

## FICHA CATALOGRÁFICA

PP149d

PAIVA, GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE

Desenvolvimento e aplicação do MEFG/S Global-Local de alta ordem com funções *flat-top* para análise de estruturas em processo de danificação. [Distrito Federal] 2023.

xxix, 215p., 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Doutor, Estruturas e Construção Civil, 2023). Tese de Doutorado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. MEFG/S

2. Mecânica da Fratura

3. Mecânica do Dano Contínuo

I.ENC/FT/UnB

4. Enriquecimento Polinomial

5. Global-Local

6. Propagação de trinca

II.Título (Doutor)

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

PAIVA, G. O. F. de (2023). Desenvolvimento e aplicação do MEFG/S Global-Local de alta ordem com funções *flat-top* para análise de estruturas em processo de danificação. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília, DF, 215p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva.

TÍTULO: Desenvolvimento e aplicação do MEFG/S Global-Local de alta ordem com funções *flat-top* para análise de estruturas em processo de danificação.

GRAU: Doutor

ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta tese de doutorado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa tese de doutorado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva  
Rua Henrique Dias, 1429, Vermelha.  
64.019-330 Teresina – PI – Brasil.

## AGRADECIMENTOS

Para honra e glória de Nosso Senhor Jesus Cristo e de Nossa Senhora Maria Santíssima por terem me cumulado de perseverança, coragem e força.

Aos meus queridos pais Francisco e Carminda, que dedicaram suas vidas à educação dos filhos, pela doação e apoio incondicionais. A minha irmã Amanda, por se fazer sempre presente em todos os momentos.

A Ingrid Aguiar pelo carinho, companheirismo, paciência e, também, compreensão diante das minhas ausências nesse tempo. Sobretudo pela oração que me sustentou e impulsionou.

Aos amigos Gelson Alves e José Fabiano, pela amizade, pelo incentivo e pela ajuda imprescindível concedida na construção deste trabalho. Ao amigo Álvaro Martins companheiro de estudo de todas as horas.

A meus padrinhos de batismo e crisma e a todos os meus familiares.

Aos meus irmãos da Comunidade Católica Shalom, em especial meus irmãos de célula, por toda a intercessão ao longo dessa trajetória.

Ao meu orientador Francisco Evangelista Junior, pela orientação objetiva, segura e competente. A professora Maria de Lourdes Teixeira Moreira por continuamente incentivar-me na busca do conhecimento. A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil que de alguma forma contribuíram com a minha formação e com esta pesquisa.

Ao frei Edmilson por toda a ajuda. Aos freis Alexandre, Aloísio e Silvio e a todos os outros irmãos por terem me acolhido em suas casas quando eu era viajante.

Aos amigos da Paróquia Santa Luzia – em especial D. Silvana, Cida e Pe. Decílio – e aos amigos do EJO do Santuário Nossa Senhora do Perpétuo Socorro pelo acolhimento, pela amizade, por compartilharem da missão comigo, enfim, por terem sido presença de Deus.

Aos amigos conquistados neste período de doutorado: Carlos Valbison, Eduardo Martins, Fabiano Campos, Iago Almeida, Jéssica Borges, Nathaly Sarasty e Nelson Afanador.

A CNPq, pelo apoio financeiro.

*Aos meus pais Francisco Ferreira de Oliveira Filho e Carminda Ferraz de Paiva Oliveira, a minha irmã Amanda Oliveira Ferraz de Paiva e a Ingrid Rodrigues de Aguiar pelo incentivo, apoio e compreensão. A vocês que são a minha maior riqueza eu dedico.*

*"Ansiar, pois, pelas minhas palavras, reclamai-as ardentemente e sereis instruídos. Resplandecente é a sabedoria, e sua beleza é inalterável: os que a amam, descobrem-na facilmente. Os que a procuram encontram-na. Ela antecipa-se aos que a desejam."  
(Sabedoria 6, 11-13.)*

## RESUMO

### DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO MEFG/S GLOBAL-LOCAL DE ALTA ORDEM COM FUNÇÕES FLAT-TOP PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM PROCESSO DE DANIFICAÇÃO

Autor: Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva

Orientador: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, Abril de 2023

Esta tese teve como objetivo analisar e implementar uma abordagem global-local combinada com funções de enriquecimento polinomiais e descontínua, conforme a estratégia do Método dos Elementos Finitos Generalizados e Estabilizado (MEFG/S), com Partição da Unidade (PU) padrão ou *flat-top*, para aplicação em simulações de problemas de falhas em estruturas utilizando o modelo de dano bilinear (contínuo e contínuo-descontínuo com transição para fratura) proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2020). A mais importante contribuição desta pesquisa foi o estudo do dano em membros estruturais sob falhas utilizando malhas grosseiras (2D e 3D), com aplicação de funções de enriquecimento para melhorar a aproximação da distribuição do dano e obter eficiência computacional no processo reduzindo o número de iterações realizadas por passo de carga e, conseqüentemente, reduzir o número de graus de liberdade processados. Os resultados foram validados por meio da comparação com o caminho da trinca e com curvas experimentais retiradas de diversos tipos de ensaios encontrados na literatura, com diferentes tipos de materiais e modos de falha. Os ensaios simulados foram: flexão em três pontos em vigas com entalhe central, cisalhamento em quatro pontos em viga com entalhe central, chapa quadrada com duplo entalhe, chapa em L, viga sem entalhe sob flexão em quatro pontos e fêmur humano. Comprovou-se, a eficiência computacional e acurácia do MEFG e do MEFG/S em melhorar a previsão do comportamento de ruptura tendo em vista a obtenção de resultados com qualidade, objetividade de malha e eficiência computacional. As simulações 2D e 3D com malhas grosseiras realçam a qualidade do MEFG e do MEFG/S. O MEFG/S combinado com a abordagem global-local (com PU padrão ou *flat-top*) apresentou boa capacidade em melhorar a qualidade da aproximação final, com a utilização racional de funções de enriquecimento, em malhas grosseiras, aliando características como modelagem flexível, convergência e eficiência computacional. A aplicação da estratégia descontínua garantiu versatilidade aos ensaios, devido eliminar a necessidade da utilização de elementos especiais ou de remalhamento. Foi possível obter bons resultados utilizando apenas refinamento- $p$ .

**Palavras chave:** MEFG/S, PU-*flat-top*, Mecânica da Fratura, Mecânica do Dano Contínuo, Enriquecimento Polinomial, Heaviside, Propagação de trinca, Global-Local.

## ABSTRACT

### DEVELOPMENT AND APPLICATION OF HIGH-ORDER GLOBAL-LOCAL S/GFEM WITH FLAT-TOP FUNCTIONS FOR ANALYSIS OF STRUCTURES IN DAMAGE PROCESS

Author: Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva

Supervisor: Francisco Evangelista Junior

Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil

Brasília, April 2023

*This thesis aimed to analyze and implement a global-local approach combined with polynomial and discontinuous enrichment functions, according to the Stabilized Generalized Finite Element Method (S/GFEM) strategy, with standard Partition of Unit (PUFEM) or flat-top, for application in simulations of failure problems in structures using the bilinear damage model (continuous and continuous-discontinuous with transition to fracture) proposed by Evangelista Jr. e Moreira (2020). The most important contribution of this research was the study of damage in structural members under failures using coarse meshes (2D and 3D), with application of enrichment functions to improve the approximation of the damage distribution and obtain computational efficiency in the process by reducing the number of iterations performed per load step and, consequently, reducing the number of degrees of freedom processed. The results were validated by comparing them with the crack path and with experimental curves taken from different types of tests found in the literature, with different types of materials and failure modes. The simulated tests were: Three Point Bending Test, Four Point Shear Bending, Double Edge Notch, L-Shaped Plate, Four Point Bending and a Human Femur. The computational efficiency and accuracy of the GFEM and the S/GFEM in improving the prediction of the failure behavior was proved, in order to obtain results with quality, mesh objectivity and computational efficiency. Simulations 2D and 3D with coarse meshes enhance the quality of GFEM and S/GFEM. The S/GFEM combined with the global-local approach (with PUFEM or flat-top) showed good ability to improve the quality of the final approximation, with the rational use of enrichment functions, in coarse meshes, combining features such as flexible modeling, convergence and computational efficiency. The application of the discontinuous strategy ensured the versatility of the tests, as it eliminated the need to use special elements or remeshing. It was possible to get good results using just refinement-p..*

**Keywords:** *SGFEM, Flat-top, Fracture Mechanics, Continuum Damage Mechanics, Polynomial enrichment, Heaviside, Crack propagation, Global-Local.*

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>xiii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>xxv</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURAS</b>	<b>xxvi</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS . . . . .	4
1.1.1 Objetivo Geral . . . . .	4
1.1.2 Objetivo Específicos . . . . .	4
1.2 CONTRIBUIÇÕES . . . . .	5
1.3 ESTRUTURA DA TESE . . . . .	6
<b>2 MEFG/eStabilizado (MEFG/S) - 2D</b>	<b>7</b>
2.1 INTRODUÇÃO . . . . .	7
2.2 REVISÃO DA LITERATURA . . . . .	7
2.2.1 Definição do problema do modelo . . . . .	8
2.2.2 Sobre o MEFG . . . . .	9
2.2.3 Sobre o MEFG/S . . . . .	11
2.2.4 Funções de enriquecimento do MEFG/S 2D . . . . .	12
2.3 MODELO DE DANO E ASPECTOS COMPUTACIONAIS . . . . .	13
2.3.1 Modelo de dano Contínuo (C) . . . . .	13
2.3.2 Modelo de dano Contínuo-Descontínuo (C-D) . . . . .	16
2.4 METODOLOGIA . . . . .	17
2.4.1 Revisão da literatura . . . . .	17
2.4.2 Implementação computacional, verificação e validação . . . . .	18
2.5 VERIFICAÇÃO MEFG/S . . . . .	18
2.6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I . . . . .	21
2.6.1 <i>TPB</i> com modelo de dano contínuo (2D) . . . . .	22
2.6.2 <i>TPB</i> com modelo de dano contínuo-descontínuo (2D) . . . . .	30
2.7 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO . . . . .	37
2.7.1 Viga <i>FPS-SEN</i> com modelo de dano contínuo - 2D . . . . .	37
2.7.2 Viga <i>FPS-SEN</i> com modelo de dano contínuo-descontínuo - 2D . . . . .	41
2.8 CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	46
<b>3 MEFG/S DE ALTA ORDEM E DANO - FUNÇÕES <i>FLAT-TOP</i></b>	<b>47</b>
3.1 INTRODUÇÃO . . . . .	47



3.2	REVISÃO DA LITERATURA . . . . .	47
3.3	METODOLOGIA . . . . .	48
3.3.1	Implementação da PU <i>flat-top</i> . . . . .	49
3.3.2	Integração numérica . . . . .	50
3.3.3	Implementação computacional, verificação e validação . . . . .	52
3.4	VERIFICAÇÃO DA ESTRATÉGIA . . . . .	53
3.5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I . . . . .	57
3.5.1	MEFG/S <sup>FT</sup> com modelo de dano contínuo . . . . .	58
3.5.2	MEFG/S <sup>FT</sup> com modelo de dano contínuo-descontínuo . . . . .	65
3.6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO . . . . .	68
3.6.1	Simulações com <i>FPS-SEN</i> . . . . .	69
3.6.2	Simulações com chapa em L . . . . .	79
3.6.3	Simulação de fêmur humano . . . . .	88
3.6.4	Simulações com $\sigma$ modificado . . . . .	96
3.7	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	98
<b>4</b>	<b>MEFG/S E ADAPTATIVIDADE</b> . . . . .	<b>99</b>
4.1	INTRODUÇÃO . . . . .	99
4.2	REVISÃO DA LITERATURA-ESTIMADORES DE ERRO E ADAPTABILIDADE . . . . .	99
4.2.1	Conceitos e definições gerais relacionados ao erro . . . . .	100
4.2.2	Técnicas de adaptatividade . . . . .	102
4.2.3	Categorias de estimadores de erro . . . . .	102
4.2.4	Estimativas de erro <i>a posteriori</i> . . . . .	103
4.2.5	Estimador de erro <i>ZZ-SPR</i> . . . . .	103
4.2.6	Estimador de erro no contexto do <i>MEFG/S</i> com modelos de dano . . . . .	105
4.3	METODOLOGIA . . . . .	106
4.3.1	Revisão da literatura . . . . .	106
4.3.2	Implementação computacional e validação . . . . .	106
4.4	Verificação do método <i>ZZ-SPR</i> . . . . .	111
4.5	Verificação do <i>MEFG/S</i> adaptativo . . . . .	113
4.6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS . . . . .	119
4.6.1	Simulações com Módulo <i>Pré Adaptativo</i> . . . . .	119
4.6.2	Simulações com Módulo <i>Pós Adaptativo</i> . . . . .	128
4.6.3	Simulações com Módulo <i>Pré-Pós Adaptativo</i> . . . . .	132
4.7	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	140
<b>5</b>	<b>O MEFG/S - 3D</b> . . . . .	<b>142</b>
5.1	INTRODUÇÃO . . . . .	142
5.1.1	Sobre o <i>MEFG/S</i> . . . . .	142

5.1.2	Funções de enriquecimento do MEFG/S - 3D . . . . .	143
5.2	METODOLOGIA . . . . .	143
5.2.1	Implementação computacional, verificação e validação . . . . .	144
5.3	VERIFICAÇÃO DO MEFG 3D . . . . .	144
5.3.1	Viga engastada-livre . . . . .	144
5.3.2	Viga bi-engastada . . . . .	147
5.4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I . . . . .	150
5.4.1	TPB com modelo de dano contínuo 3D . . . . .	150
5.4.2	Simulações com MEFG . . . . .	151
5.4.3	Simulações com MEFG/S . . . . .	156
5.5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO . . . . .	158
5.5.1	Estrutura com duplo entalhe - <i>Double Edge Notch (DEN)</i> . . . . .	158
5.5.2	Chapa L . . . . .	167
5.6	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	172
<b>6</b>	<b>MEFG/S Global-Local</b>	<b>173</b>
6.1	INTRODUÇÃO . . . . .	173
6.2	Formulação do problema . . . . .	174
6.3	REVISÃO DA LITERATURA . . . . .	175
6.4	METODOLOGIA . . . . .	176
6.4.1	Sobre o Problema Global Inicial Linear - $P_G^{IL}$ . . . . .	176
6.4.2	Sobre o Problema Local Não Linear - $P_L^{NL}$ . . . . .	177
6.4.3	Sobre o Problema Global Enriquecido Linear $P_G^{EL}$ . . . . .	178
6.5	VERIFICAÇÃO . . . . .	182
6.5.1	Verificação do MEFG/S <sup>g-l</sup> com <i>PU flat-top</i> . . . . .	183
6.6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I . . . . .	186
6.7	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO . . . . .	188
6.8	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM MODELO DE DANO (C-D) . . . . .	191
6.8.1	Simulações com <i>TPB</i> . . . . .	192
6.8.2	Simulações com fêmur humano . . . . .	194
6.9	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	196
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>198</b>
7.1	CONCLUSÕES . . . . .	198
7.2	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	199
	<b>REFERÊNCIAS DA LITERATURA</b>	<b>215</b>

## LISTA DE TABELAS

2.1	Viga engastada livre - dados gerais do modelo. . . . .	18
2.2	Resultados de $u_y = (10, \frac{h}{2})$ obtidos utilizando software comercial. . . . .	19
2.3	Resultados de $u_y = (10, \frac{h}{2})$ e $e_r$ - estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	20
2.4	Resultados de $u_y = (10, \frac{h}{2})$ e $e_r$ - estratégia Pol <sup>c</sup> . . . . .	20
2.5	Características geométricas do ensaio de flexão em três pontos - (TPB). . . . .	22
2.6	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos	22
2.7	Valores de $d_r$ (kN). . . . .	37
2.8	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio FPS-SEN . . . . .	38
2.9	Valores de $d_r$ (kN) . . . . .	45
3.1	Viga engastada livre - dados gerais do modelo. . . . .	53
3.2	Chapa sob cisalhamento - dados gerais do modelo. . . . .	56
3.3	Parâmetros de fratura e de material do ensaio TPB . . . . .	58
3.4	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - TPB com 25 elementos e estratégia Pol <sup>c</sup> . . . . .	64
3.5	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - TPB com 25 elementos e estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	64
3.6	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio FPS-SEN . . . . .	69
3.7	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>c</sup> . . . . .	73
3.8	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	74
3.9	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>c</sup> . . . . .	78
3.10	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	78
3.11	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio da Chapa em L . . . . .	79
3.12	Valores de $d_r$ (kN) - estratégia Pol <sup>c</sup> . . . . .	83
3.13	Valores de $d_r$ (kN) - estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	83
3.14	Valores de $d_r$ (kN) com estratégia Pol <sup>c</sup> . . . . .	88
3.15	Valores de $d_r$ (kN) com estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	88
3.16	Parâmetros de fratura e relativos ao material para ensaio do fêmur . . . . .	89
3.17	Valores de $P_{max}$ (kN) e $GDL^{proc}$ com estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	92
3.18	Valores de $P_{max}$ (kN) e $GDL^{proc}$ com estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	96
3.19	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>c</sup> - modelo de dano (C). 96	
3.20	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>i</sup> - modelo de dano (C). 97	
3.21	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>c</sup> - modelo de dano (C-D). 97	
3.22	Valores de $P_{max}$ e $GDL^{proc}$ - FPS-SEN e estratégia Pol <sup>i</sup> - modelo de dano (C-D). 97	
4.1	Bases polinomiais de aproximação . . . . .	104
4.2	Bases polinomiais de aproximação . . . . .	107
4.3	Parâmetros geométricos e relativos ao material da chapa em L . . . . .	112

4.4	Comparação entre $\ e_{\sigma}^*\ ^2$ e $\mathcal{E}$ . . . . .	113
4.5	Viga engastada livre - dados gerais do modelo. . . . .	113
4.6	Resultados de $u_y = (10, \frac{h}{2})$ e $e_r$ para $\mathcal{E}^{adm} = 3\%$ . . . . .	114
4.7	Resultados de $u_y = (10, \frac{h}{2})$ e $e_r$ para $\mathcal{E}^{adm} = 5\%$ . . . . .	116
4.8	Resultados de $u_y = (10, \frac{h}{2})$ e $e_r$ para $\mathcal{E}^{adm} = 10\%$ . . . . .	117
4.9	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio da Chapa em L . . . . .	119
4.10	Valores de $d_r$ (kN) com estratégia $Pol^i$ . . . . .	124
4.11	Valores de $d_r$ (kN) com estratégia $Pol^i$ . . . . .	128
4.12	Valores de $d_r$ (kN) com estratégia $Pol^i$ . . . . .	132
4.13	Valores de $d_r$ (kN) com estratégia $Pol^i$ . . . . .	136
4.14	Valores de $d_r$ (kN) com estratégia $Pol^i$ . . . . .	140
5.1	Dados geométricos e condições de contorno do modelo . . . . .	144
5.2	Resultados de $u_y(10, \frac{h}{2})$ obtidos via Abaqus CAE. . . . .	145
5.3	Dados do modelo bi-engastado (em unidades consistentes) . . . . .	148
5.4	Deflexão da viga - MEFG $Pol^c$ . . . . .	148
5.5	Deflexão da viga - MEFG $Pol^i$ . . . . .	148
5.6	Deflexão da viga - MEFG/S $Pol^c$ . . . . .	148
5.7	Deflexão da viga - MEFG/S $Pol^i$ . . . . .	149
5.8	Parâmetros de fratura e relativos ao material para DEN . . . . .	158
6.1	Combinações da aplicação do MEFG/S $^{g-l}$ com <i>PU flat-top</i> . . . . .	183
6.2	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio <i>FPB</i> . . . . .	187
6.3	Parâmetros de fratura e relativos ao material para DEN . . . . .	189
6.4	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos . . . . .	192
6.5	Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos . . . . .	194

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Domínio $\bar{V}$ cortado pela descontinuidade $\Gamma_d$ . . . . .	8
2.2	Funções de forma do MEEG: (a) enriquecimento de alta ordem contínuo; (b) enriquecimento de alta ordem descontínuo. . . . .	10
2.3	Cálculo da função de enriquecimento do MEEG/S. . . . .	12
2.4	Lei de dano. . . . .	15
2.5	Sistema de propagação de trincas do <i>LACHESIS</i> : (a) Determinação da direção de propagação da trinca no método (C-D); (b) Enriquecimento polinomial e Heaviside para propagação de trincas. . . . .	16
2.6	Fluxograma do Programa de Elementos Finitos <i>LACHESIS</i> . . . . .	17
2.7	Viga engastada livre - geometria e condições de contorno. . . . .	18
2.8	Viga engastada livre - discretização do modelo. . . . .	19
2.9	Erro Relativo ( $e_r$ ) para cada ordem polinomial de enriquecimento: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	21
2.10	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo. . . . .	22
2.11	Malhas para ensaio <i>TPB</i> : (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos. . . . .	23
2.12	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas $Pol^i$ – malhas com: (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos – entalhe em formato “V”. . . . .	23
2.13	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas $Pol^c$ – malhas com: (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos – entalhe em formato “V”. . . . .	24
2.14	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - $Pol^i$ : (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos. . . . .	25
2.15	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - $Pol^c$ : (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos. . . . .	26
2.16	Avaliação da convergência para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação $P3 - MEEG$ e $P3 - MEEG/S$ : (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	27
2.17	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEEG/S Pol^c$ . . . . .	27
2.18	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEEG/S Pol^i$ . . . . .	28
2.19	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEEG/S Pol^c$ . . . . .	29
2.20	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEEG/S Pol^i$ . . . . .	29

2.21	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência, $P3$ - MEFG e $P3$ - MEFG/S: com polinômios de enriquecimento completos. . . . .	30
2.22	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência, $P3$ - MEFG e $P3$ - MEFG/S: com polinômios de enriquecimento incompletos. . . . .	30
2.23	Malhas de elementos finitos para $TPB$ - 27 elementos. . . . .	31
2.24	Curvas $P$ – $CMOD$ experimentais e numéricas: $Pol^i$ – (a) Malha com 27 elementos; (b) malha com 107. . . . .	31
2.25	Curvas $P$ – $CMOD$ experimentais e numéricas: $Pol^c$ – (a) Malha com 27 elementos; (b) malha com 107. . . . .	32
2.26	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - $Pol^i$ : (a) 27 elementos; (b) 107 elementos. . . . .	32
2.27	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - $Pol^c$ : (a) 27 elementos; (b) 107 elementos. . . . .	33
2.28	Ponto de iniciação de trinca - $TPB$ . . . . .	33
2.29	Curvas $P$ – $CMOD$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	34
2.30	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S $Pol^c$ . . . . .	34
2.31	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S $Pol^i$ . . . . .	35
2.32	Propagação da fratura em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	35
2.33	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEFG/S: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	36
2.34	Points to evaluate $d_i$ . . . . .	36
2.35	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 100 mm (todas as dimensões em mm). . . . .	38
2.36	Malha de elementos finitos para FPS-SEN - 106 elementos. . . . .	38
2.37	Curvas $P$ – $CMSD$ experimentais e numéricas - malha com 106 elementos: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	39
2.38	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	39
2.39	(a) Propagação de trinca experimental (adaptado de Schlangen, 1993); (b) sobreposição experimental - $P5$ - $Pol^i$ ; (c) sobreposição experimental - $P4$ - $Pol^c$ . . . . .	40
2.40	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S com estratégia $Pol^c$ . . . . .	40
2.41	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S com estratégia $Pol^i$ . . . . .	41

2.42	Ponto de iniciação de trinca - <i>FPS-SEN</i> . . . . .	41
2.43	Malha de referência - 3447 elementos. . . . .	42
2.44	Resultados experimentais e numéricas para malha de referência com 3447 elementos e modelo de dano contínuo-descontínuo: (a) Curvas <i>P – CMSD</i> ; (b) Sobreposição entre padrão de trincamento experimental e numérico. . . . .	42
2.45	Curvas <i>P – CMSD</i> experimentais e numéricas - malha com 106 elementos e modelo de dano (C-D): (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	43
2.46	Propagação da fratura em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	43
2.47	Sobreposição entre padrão de trincamento experimental e numérico: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	44
2.48	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S com $Pol^c$ . . . . .	44
2.49	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S com estratégia $Pol^i$ . . . . .	45
3.1	Representação da <i>PU</i> $\varphi_i^{FT}$ para elementos triangulares: $\sigma = 0.30$ e $k = 1$ . (a) função $\varphi_1^{FT}$ ; (b) função $\varphi_2^{FT}$ ; (c) função $\varphi_3^{FT}$ ; (d) Domínio do elemento finito. . . . .	48
3.2	Divisão do domínio triangular em nove subdomínios. . . . .	50
3.3	Mapeamento entre três sistemas de coordenadas. . . . .	51
3.4	Viga engastada livre - geometria e condições de contorno. . . . .	53
3.5	Discretização do modelo da viga. . . . .	54
3.6	Análise do NCS: $\sigma = 0.01$ , $k = 1.0$ e <i>P2</i> (a) <i>PU</i> padrão; (b) <i>PU flat-top</i> . . . . .	54
3.7	Erro relativo: $\sigma = 0.01$ , $k = 1.0$ e <i>P2</i> (a) <i>PU</i> padrão; (b) <i>PU flat-top</i> . . . . .	55
3.8	Modelo da viga: $\sigma = 0.01$ , $k = 1.0$ e <i>P4</i> (a) Erro relativo; (b) NCS. . . . .	55
3.9	Chapa sob cisalhamento - geometria e condições de contorno. . . . .	56
3.10	Discretização do modelo da chapa quadrada em cisalhamento. . . . .	56
3.11	Análise do NCS: $\sigma = 0.01$ , $k = 1.0$ e <i>P2</i> (a) <i>PU</i> padrão; (b) <i>PU flat-top</i> . . . . .	57
3.12	Erro relativo: $\sigma = 0.01$ , $k = 1.0$ e <i>P2</i> (a) <i>PU</i> padrão; (b) <i>PU flat-top</i> . . . . .	57
3.13	Modelo e discretização em elementos finitos para <i>TPB</i> : (a) Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - $a_0 = 50\text{mm}$ , $h = 150\text{mm}$ , $L = 700\text{mm}$ , $S = 600\text{mm}$ , $e = 80\text{mm}$ ; (b) Malha com 25 elementos. . . . .	58
3.14	Curvas <i>P – CMOD</i> experimentais e numéricas (MEFG <sup>FT</sup> ): (a) estratégia $Pol^c$ ; (b) estratégia $Pol^i$ . . . . .	59
3.15	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG <sup>FT</sup> $Pol^c$ . . . . .	59
3.16	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG <sup>FT</sup> $Pol^i$ . . . . .	60

3.17	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas (MEFG/S <sup>FT</sup> ): (a) estratégia Pol <sup>c</sup> ; (b) estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	60
3.18	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> Pol <sup>c</sup> . . . . .	61
3.19	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> Pol <sup>i</sup> . . . . .	62
3.20	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia Pol <sup>c</sup> das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	62
3.21	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia Pol <sup>c</sup> das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	63
3.22	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia Pol <sup>i</sup> das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	63
3.23	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia Pol <sup>i</sup> das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	64
3.24	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas (MEFG <sup>FT</sup> ): (a) estratégia Pol <sup>c</sup> ; (b) estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	65
3.25	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG <sup>FT</sup> Pol <sup>c</sup> . . . . .	65
3.26	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG <sup>FT</sup> Pol <sup>i</sup> . . . . .	66
3.27	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEFG <sup>FT</sup> : (a) Pol <sup>i</sup> ; (b) Pol <sup>c</sup> . . . . .	66
3.28	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas (MEFG/S <sup>FT</sup> ): (a) Pol <sup>c</sup> ; (b) Pol <sup>i</sup> . . . . .	67
3.29	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> Pol <sup>c</sup> . . . . .	67
3.30	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> Pol <sup>i</sup> . . . . .	68
3.31	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEFG/S <sup>FT</sup> : (a) Pol <sup>i</sup> ; (b) Pol <sup>c</sup> . . . . .	68
3.32	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 100 mm (todas as dimensões em mm). . . . .	69
3.33	Curvas $P - CMSD$ experimentais e numéricas (MEFG <sup>FT</sup> ): (a) Pol <sup>i</sup> ; (b) Pol <sup>c</sup> . . . . .	70
3.34	Curvas $P - CMSD$ experimentais e numéricas (MEFG/S <sup>FT</sup> ): (a) Pol <sup>i</sup> ; (b) Pol <sup>c</sup> . . . . .	70
3.35	Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> Pol <sup>c</sup> . . . . .	71
3.36	Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> Pol <sup>i</sup> . . . . .	71
3.37	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia Pol <sup>c</sup> para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	72



3.38	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia $Pol^c$ para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	72
3.39	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia $Pol^i$ para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	73
3.40	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia $Pol^i$ para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	73
3.41	Curvas $P$ - $CMSD$ experimentais e numéricas - malha com 106 elementos e modelo de dano contínuo-descontínuo: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	74
3.42	Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> $Pol^c$ . . . . .	75
3.43	Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> $Pol^i$ . . . . .	75
3.44	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEFG/S <sup>FT</sup> para o modelo FPS-SEN: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	76
3.45	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia $Pol^c$ para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	76
3.46	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia $Pol^c$ para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	77
3.47	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia $Pol^i$ para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	77
3.48	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia $Pol^i$ para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S <sup>FT</sup> . . . . .	78
3.49	Modelo e discretização em elementos finitos para <i>Chapa em L</i> : (a) Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo; (b) Malha com 125 elementos e estratégia de enriquecimento. . . . .	79
3.50	Curvas $P$ - $d$ experimentais e numéricas (MEFG <sup>FT</sup> ): (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	80
3.51	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG <sup>FT</sup> $Pol^c$ . . . . .	80
3.52	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG <sup>FT</sup> $Pol^i$ . . . . .	81
3.53	Curvas $P$ - $d$ experimentais e numéricas (MEFG/S <sup>FT</sup> ): (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	81
3.54	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> $Pol^c$ . . . . .	82
3.55	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S <sup>FT</sup> $Pol^i$ . . . . .	82
3.56	Curvas $P$ - $d$ experimentais e numéricas (MEFG <sup>FT</sup> ): (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	84
3.57	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG <sup>FT</sup> $Pol^c$ . . . . .	84

3.58	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$ Pol $^i$ . . . . .	85
3.59	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEF $G/S^{FT}$ para chapa em L: (a) Pol $^c$ ; (b) Pol $^i$ . . . . .	85
3.60	Curvas $P - d$ experimentais e numéricas (MEF $G/S^{FT}$ ): (a) Pol $^c$ ; (b) Pol $^i$ . . . . .	86
3.61	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$ Pol $^c$ . . . . .	86
3.62	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$ com estratégia Pol $^i$ . . . . .	87
3.63	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEF $G/S^{FT}$ para chapa em L: (a) Pol $^c$ ; (b) Pol $^i$ . . . . .	87
3.64	Modelagem de Fêmur: (a) Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo; (b) Malha com 12437 elementos; (c) Malha com 265 elementos. . . . .	89
3.65	Modelo e discretização em elementos finitos para fêmur: (a) Curvas $P - d$ experimentais e numéricas; (b) Distribuição do dano (C); (c) Propagação da trinca (C-D). . . . .	89
3.66	Curvas $P-d$ experimentais e numéricas (MEF $G/S^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia Pol $^i$ . . . . .	90
3.67	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$ Pol $^i$ . . . . .	91
3.68	Curvas $P - d$ experimentais e numéricas (MEF $G/S^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia Pol $^i$ . . . . .	91
3.69	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$ Pol $^i$ . . . . .	92
3.70	Curvas $P - d$ experimentais e numéricas (MEF $G/S^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia Pol $^i$ . . . . .	93
3.71	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$ Pol $^i$ . . . . .	93
3.72	Curvas $P - d$ experimentais e numéricas (MEF $G/S^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia Pol $^i$ . . . . .	94
3.73	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$ Pol $^i$ . . . . .	95
3.74	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e casos com enriquecimento e estratégia Pol $^i$ para fêmur: (a) MEF $G/S^{FT}$ ; (b) MEF $G/S^{FT}$ . . . . .	95
4.1	Fluxograma do processo de recuperação do campo de tensão. . . . .	105
4.2	Algoritmo 01: módulo <i>Pré Adaptativo</i> - estratégia em elementos. . . . .	107
4.3	Adaptatividade: camadas de elementos para módulo pré adaptativo. . . . .	108
4.4	Algoritmo 02: módulo <i>Pré Adaptativo</i> - estratégia em camadas. . . . .	109

4.5	Adaptatividade: camadas de elementos para módulo pós adaptativo. . . . .	110
4.6	Algoritmo 03: módulo <i>Pós Adaptativo</i> - estratégia em camadas. . . . .	111
4.7	Chapa em <i>L</i> : Geometria e as condições de contorno. . . . .	112
4.8	Tensão de Von Mises: (a) autoral; (b) adaptado de Passos (2012). . . . .	112
4.9	Viga engastada livre - geometria e condições de contorno. . . . .	113
4.10	Viga engastada livre - discretizações do modelo. . . . .	114
4.11	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^c$ utilizando MEFG - malha I. . . . .	114
4.12	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^c$ MEFG - malha II. . . . .	115
4.13	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^i$ utilizando MEFG - malha I. . . . .	115
4.14	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^i$ utilizando MEFG - malha II. . . . .	115
4.15	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^c$ utilizando MEFG/S - malha I. . . . .	116
4.16	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^c$ utilizando MEFG/S - malha II. . . . .	116
4.17	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^i$ utilizando MEFG/S - malha I. . . . .	117
4.18	Resultado final do refinamento <i>p</i> -adaptativo com estratégia $Pol^i$ utilizando MEFG/S - malha II. . . . .	117
4.19	Erro Relativo ( $e_r$ ) para diferentes $p_n^{max}$ com MEFG: (a, b, c) $Pol^c$ ; (d, e, f) $Pol^i$ . . . . .	118
4.20	Erro Relativo ( $e_r$ ) para diferentes $p_n^{max}$ com MEFG/S: (a, b, c) $Pol^c$ ; (d, e, f) $Pol^i$ . . . . .	118
4.21	Chapa <i>L</i> : (a) geometria e condições de contorno; (b) malha com 125 elementos. . . . .	119
4.22	(a) Curvas <i>P-d</i> experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	120
4.23	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG $_{pre}^{adapt}$ $Pol^i$ . . . . .	121
4.24	Resultado do refinamento <i>p</i> -adaptativo com MEFG $_{pre}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	121
4.25	(a) Curvas <i>P-d</i> experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	122
4.26	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S $_{pre}^{adapt}$ $Pol^i$ . . . . .	122
4.27	Resultado do refinamento <i>p</i> -adaptativo com MEFG/S $_{pre}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	123

4.28	Pontos para avaliação de $d_i$ . . . . .	124
4.29	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	125
4.30	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG_{pre}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	125
4.31	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG_{pre}^{adapt}$ e estratégia de camadas em diferentes etapas da simulação. . . . .	126
4.32	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	126
4.33	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG/S_{pre}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	127
4.34	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG/S_{pre}^{adapt}$ e estratégia de camadas em diferentes etapas da simulação. . . . .	127
4.35	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	129
4.36	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG/S_{pos}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	129
4.37	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG_{pos}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	130
4.38	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	130
4.39	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG/S_{pos}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	131
4.40	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG/S_{pos}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	131
4.41	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	133
4.42	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG_{pre-pos}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	133
4.43	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG_{pre-pos}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	134
4.44	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	134

4.45	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	135
4.46	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	136
4.47	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	137
4.48	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG_{pre-pos}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	137
4.49	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG_{pre-pos}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	138
4.50	(a) Curvas $P-d$ experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento. . . . .	138
4.51	Resultado do refinamento $p$ -adaptativo com $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt}$ em diferentes etapas da simulação. . . . .	139
4.52	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt} Pol^i$ . . . . .	140
5.1	Viga engastada-livre com carregamento cisalhante. . . . .	145
5.2	Erro Relativo ( $e_r$ ) para cada ordem polinomial de enriquecimento: (a) MEFG $Pol^c$ ; (b) MEFG $Pol^i$ ; (c) MEFG/S $Pol^c$ ; (d) MEFG/S $Pol^i$ . . . . .	146
5.3	Comparação entre resultados do Abaqus e de simulações com enriquecimento $P5$ . . . . .	147
5.4	Características geométricas da viga bi-engastada (adaptado de Proença e Torres, 2008). . . . .	147
5.5	Erro Relativo ( $e_r$ ) para cada ordem polinomial de enriquecimento: (a) MEFG $Pol^c$ ; (b) MEFG $Pol^i$ ; (c) MEFG/S $Pol^c$ ; (d) MEFG/S $Pol^i$ . . . . .	149
5.6	Análise preliminar: (a) Malha com 37583 elementos tetraédricos; (b) curvas $P-CMOD$ experimental e numérica. . . . .	150
5.7	Malha de 266 elementos finitos para $TPB - 3D$ : (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento. . . . .	151
5.8	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	151
5.9	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas com MEFG: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	152
5.10	Detalhamento da malha de 266 elementos. . . . .	153
5.11	Malha de 439 elementos finitos para $TPB - 3D$ : (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento. . . . .	153
5.12	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	154
5.13	Comparação do $N^{it}$ normalizado para TPB: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	154

5.14	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado para $TPB$ : (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	155
5.15	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 439 elementos. . . . .	155
5.16	Curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	156
5.17	Comparação do $N^{it}$ normalizado para $TPB$ : (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	156
5.18	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado para $TPB$ : (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	157
5.19	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 439 elementos. . . . .	157
5.20	DEN - geometria e condições de contorno. . . . .	158
5.21	Análise preliminar: (a) Malha com 41234 elementos tetraédricos; (b) curvas $P_n - CTOD$ experimental e numérica. . . . .	159
5.22	Análise preliminar: curvas $P_s - \delta_s$ experimental e numérica. . . . .	159
5.23	Malha de 497 elementos finitos para DEN - 3D: (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento. . . . .	160
5.24	Curvas $P_n - CTOD$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	160
5.25	Curvas $P_s - \delta_s$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	161
5.26	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia para DEN: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	161
5.27	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia para DEN: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	162
5.28	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 497 elementos. . . . .	162
5.29	Curvas $P_n - CTOD$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	163
5.30	Curvas $P_s - \delta_s$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	163
5.31	Análise do MEFG/ $S^{mod}$ com $P2$ : (a) NCS; (b) $e_r$ . . . . .	164
5.32	Curvas $P_n - CTOD$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	164
5.33	Curvas $P_s - \delta_s$ experimentais e numéricas: (a) $Pol^i$ ; (b) $Pol^c$ . . . . .	165
5.34	Comparação do $N^{it}$ normalizado com estratégia MEFG/ $S^{mod}$ para DEN: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	165
5.35	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado com estratégia para DEN: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	166
5.36	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 497 elementos. . . . .	166
5.37	Análise preliminar: (a) Malha com 48042 elementos tetraédricos; (b) curvas $P-d$ experimental e numérica. . . . .	167
5.38	Malha de 445 elementos finitos para chapa L - 3D: (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento. . . . .	168
5.39	Curvas $P - d$ experimentais e numéricas com MEFG: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	168
5.40	Comparação do $N^{it}$ normalizado para chapa L: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	169
5.41	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado para chapa L: (a) $Pol^c$ ; (b) $Pol^i$ . . . . .	169

5.42	Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 445 elementos. . . . .	170
5.43	Curvas $P - d$ experimentais e numéricas com MEFG/S <sup>mod</sup> : (a) Pol <sup>c</sup> ; (b) Pol <sup>i</sup> . . . . .	170
5.44	Comparação do $N^{it}$ normalizado para chapa L: (a) Pol <sup>c</sup> ; (b) Pol <sup>i</sup> . . . . .	171
5.45	Comparação do $GDL^{proc}$ normalizado para chapa L: (a) Pol <sup>c</sup> ; (b) Pol <sup>i</sup> . . . . .	171
5.46	Distribuição de dano em função do enriquecimento - malha de 445 elementos. . . . .	172
6.1	Etapas do procedimento MEFG/S <sup>g-l</sup> para análise não linear. . . . .	176
6.2	Estratégia de integração e transferência da variável $D_{GL}^k$ em locais com enriquecimento global local. . . . .	179
6.3	Fluxograma geral do MEFG/S <sup>g-l</sup> . . . . .	180
6.4	Fluxograma do LACHESIS para o MEFG/S <sup>g-l</sup> : (a) visão geral e $P_G^{EL}$ ; (b) $P_G^{IL}$ ; (c) $P_L^{NL}$ ; (d) detalhe do processo de enriquecimento polinomial. . . . .	180
6.5	Fluxograma geral do MEFG/S <sup>g-l</sup> com modelo de dano C-D. . . . .	181
6.6	Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo: (a) $P_G^{IL}$ com 101 elementos; (b) $P_L^{NL}$ com 67 elementos - os nós com triângulos pretos apontam onde foi aplicado enriquecimento polinomial; $P_G^{EL}$ com 101 elementos - os nós com círculos pretos apontam onde foi aplicado enriquecimento polinomial e global-local, os brancos indicam nós sem enriquecimento. . . . .	182
6.7	Verificação - comparação com resultados de referência: (a) curvas $P - CMOD$ experimentais e numéricas com abordagem MEFG <sup>g-l</sup> e enriquecimento $PI$ ; (b) Distribuição do dano na região do entalhe em função dos graus de enriquecimento polinomial. . . . .	183
6.8	Chapa L - malhas utilizadas: (a) geometria e condições de contorno; (b) $P_G^{IL}$ e $P_G^{EL}$ com 34 elementos, $P_L^{NL}$ com 11 elementos; (c) $P_G^{IL}$ e $P_G^{EL}$ com 65 elementos, $P_L^{NL}$ com 23 elementos; (d) $P_G^{IL}$ e $P_G^{EL}$ com 99 elementos, $P_L^{NL}$ com 43 elementos. . . . .	184
6.9	Análise do MEFG/S <sup>g-l</sup> com $P2$ - combinações 1 e 5: (a) NCS; (b) $e_r$ . . . . .	184
6.10	Análise do MEFG/S <sup>g-l</sup> com $P2$ - combinações 2 e 6: (a) NCS; (b) $e_r$ . . . . .	185
6.11	Análise do MEFG/S <sup>g-l</sup> com $P2$ - combinações 3 e 7: (a) NCS; (b) $e_r$ . . . . .	185
6.12	Análise do MEFG/S <sup>g-l</sup> com $P2$ - combinações 4 e 8: (a) NCS; (b) $e_r$ . . . . .	185
6.13	Modelo do ensaio $FPB$ e estratégia de enriquecimento: (a) geometria e condições de contorno; (b) $P_G^{IL}$ e $P_G^{EL}$ com 180 elementos, $P_L^{NL}$ com 106 elementos. . . . .	186
6.14	Ensaio $FPB$ com MEFG/S <sub>ft</sub> <sup>g-l</sup> , enriquecimento $P2$ e estratégia $Pol^c$ : (a) Curvas $P-\delta$ experimentais e numéricas. (b) Distribuição do dano da referência com 780 elementos. . . . .	187
6.15	Distribuição de dano em função do enriquecimento do ensaio $FPB$ - malha global com 180 elementos e modelo de dano contínuo. . . . .	188

6.16	Avaliação da eficiência computacional do ensaio FPB - comparação entre simulação de Referência, MCFG/S e MCFG/S <sub>ft</sub> <sup>g-l</sup> e enriquecimento P2-Pol <sup>c</sup> . . .	188
6.17	DEN - malhas utilizadas: (a) geometria e condições de contorno; (b) P <sub>G</sub> <sup>IL</sup> e P <sub>G</sub> <sup>EL</sup> com 130 elementos, P <sub>L</sub> <sup>NL</sup> com 66 elementos. . . . .	189
6.18	Ensaio DEN de referência: (a) Curvas P <sub>n</sub> - CTOD experimental e numérica. (b) Distribuição do dano de referência com 1388 elementos. . . . .	189
6.19	Resultados experimentais e numéricos do ensaio DEN com MCFG/S <sub>ft</sub> <sup>g-l</sup> , enriquecimento P2-Pol <sup>c</sup> : (a) curvas P <sub>n</sub> - CTOD; (b) curvas P <sub>s</sub> - δ <sub>s</sub> . . . . .	190
6.20	Distribuição de dano do ensaio DEN - malha global com 130 elementos e modelo de dano contínuo: (a) Resultado experimental (Nooru-Mohamed,1992); (b) respostas numéricas em função do enriquecimento. . . . .	190
6.21	Avaliação da eficiência computacional do ensaio DEN - comparação entre simulação de Referência, MCFG/S e MCFG/S <sub>ft</sub> <sup>g-l</sup> e enriquecimento P2-Pol <sup>c</sup> . . .	191
6.22	Modelo do ensaio TPB e estratégia de enriquecimento: (a) geometria e condições de contorno; (b) P <sub>G</sub> <sup>IL</sup> e P <sub>G</sub> <sup>EL</sup> com 23 elementos, P <sub>L</sub> <sup>NL</sup> com 17 elementos. . . . .	192
6.23	Resultados experimentais e numéricos do ensaio TPB com MCFG/S <sup>g-l</sup> , enriquecimento P2-Pol <sup>i</sup> : (a) curvas P - CMOD; (b) mapa de trincamento. . .	193
6.24	Avaliação da eficiência computacional do ensaio TPB e modelo de dano (C-D) - comparação entre simulação de Referência, MCFG/S e MCFG/S <sup>g-l</sup> e enriquecimento P2-Pol <sup>i</sup> . . . . .	193
6.25	Modelagem de Fêmur: (a) geometria e condições de contorno; (b) P <sub>G</sub> <sup>IL</sup> e P <sub>G</sub> <sup>EL</sup> com 265 elementos, P <sub>L</sub> <sup>NL</sup> com 52 elementos. . . . .	194
6.26	Curvas P - d experimentais e numéricas (MCFG/S <sup>g-l</sup> ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia P2-Pol <sup>i</sup> . . . . .	195
6.27	Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MCFG/S <sup>g-l</sup> Pol <sup>i</sup> . . . . .	195
6.28	Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MCFG/S <sup>g-l</sup> com estratégia Pol <sup>i</sup> . . . . .	196



# LISTA DE SÍMBOLOS E NOMENCLATURAS

## Símbolos do Alfabeto Grego

$\nu_{G,0}^{k-1}$  Deslocamentos Virtuais

$X_{G,0}^{k-1}$  Discretização do espaço de Hilbert

$\kappa$  Fator de correção para Estimador de Erro

$\mathcal{E}$  Erro relativo global

$\mathcal{E}^{adm}$  Erro relativo global admissível

$\mathcal{E}_{(\Omega_e)}$  Erro relativo do elemento

$\tilde{\mathfrak{J}}_{gl}$  Conjunto dos nós enriquecidos por  $u_L^k$

$\otimes$  Produto de Kronecker

$\phi_{\alpha i}$  Funções de forma do MEEG

$\Pi$  Funcional distância quadrática

$\rho$  Parâmetro de rigidez de mola

$H^1(V_G)$  Espaço de Hilbert

$\Gamma_d$  Descontinuidade que corta o corpo  $V$

$\Gamma_t$  Região de aplicação das condições de contorno de força distribuída

$\Gamma_u$  Região de aplicação das condições de contorno de deslocamento

## Símbolos do Alfabeto Latino

Função contínua no domínio  $V$

$\bar{t}$  Vetor de forças aplicadas

$\mathbf{a}$  Vetor com graus de liberdade padrão

$B^H$  Matriz com as derivadas da função de enriquecimento Heaviside

$B^p$  Matriz com as derivadas das funções de enriquecimento polinomiais

$B^{g-l}$  Matriz com as derivadas da função de enriquecimento global-local

$B_\gamma$	$L(NN_\gamma)$
$B$	Matriz com as derivadas das funções de forma
$b$	Vetor com graus de liberdade adicionais
$C_0$	Tensor constitutivo não danificado
$T$	Matriz que contém os operadores diferenciais
$u_{G,0}^{k-1}$	Graus de liberdade do $P_G^{IL}$
$u_{G,0}^k$	Graus de liberdade do $P_G^{EL}$
$u_L^k$	Graus de liberdade do $P_L^{NL}$
$[[\tilde{u}]]$	Salto de deslocamento na descontinuidade $\Gamma_d$
$S_E$	Espaço de enriquecimento global
$S_F$	Espaço de teste do MEF
$a_\alpha$	Graus de liberdade padrão
$b_{\alpha i}$	Graus de liberdade adicionais
$D_{crit}$	Dano crítico
$E$	Módulo de elasticidade
$e_r$	Erro relativo
$GDL^{tot}$	Número total de graus de liberdade
$h_{eq}$	Tamanho equivalente do elemento
$n_{\%}^{ele}$	Porcentagem de elementos analisados no módulo <i>Pré Adaptativo</i>
$N^{it}$	Número iterações acumuladas por passo
$N_p^{norm}$	Numero do passo normalizado
$P_G^{EL}$	Problema Global Enriquecido Linear
$P_G^{IL}$	Problema Global Inicial Linear
$P_L^{NL}$	Problema Local Não Linear
$s_{ref}$	Solução de referência

$V$	Domínio de um determinado corpo
$V^+$	Parte corpo $V$ onde a função Heaviside vale 1
$V^-$	Parte corpo $V$ onde a função Heaviside vale 0
$P_{max}$	Carga máxima resistida
$e\%$	Erro relativo em porcentagem
$N_\alpha$	Funções de forma padrão do MEF
$P$	Força aplicada
GDL	Número de Graus de Liberdade
PG	Ponto de Gauss

### **Nomenclatura**

<i>CMOD</i>	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
<i>CMSD</i>	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>
<i>MC</i>	Mecânica do Contínuo
<i>MDC-D</i>	Modelo de Dano Contínuo-Descontínuo
<i>MDC</i>	Mecânica do Dano Contínuo
<i>MDFM</i>	Modelo de Dano por Fadiga Multiaxial
<i>MEFG</i>	Método dos Elementos Finitos Generalizados
<i>MEFX</i>	Método dos Elementos Finitos Estendidos
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>MF</i>	Mecânica da Fratura
<i>MPC</i>	Modelo de Plasticidade Cíclica
<i>MPTFM</i>	Modelo de Propagação de Trinca por Fadiga Multiaxial
<i>MP</i>	Modelo Plástico
<i>MZC</i>	Modelos de Zona Coesiva
<i>PU-MEF</i>	Método de Partição da Unidade de Elementos Finitos

*PVC* Problema de Valor de Contorno

*ZPF* Zona de Processo de Fratura

CC Condições de Contorno

FPS-SEN *Four Point Shear - Single Edge Nocth*

MEF Método dos Elementos Finitos

MEFG Método dos Elementos Finitos Generalizados

MEFG/S método dos Elementos Finitos Generalisados/eStabilizado

MEFG/S<sup>ft</sup> MEFG/S com PU *flat-top*

MEFG/S<sup>g-l</sup> Método dos Elementos Finitos Generalizados eStabilizados Global Local

MEFX Método dos Elementos Finitos Estendidos

MFLE Mecânica da Fratura Linear Elástica

PU-MEF Partição da Unidade de Elementos Finitos

TPB *Three Point Bending*

ZZ-SPR *Zienkiewicz and Zhu Superconvergent Patch Recovery*

# 1 - INTRODUÇÃO

A engenharia estrutural tem especial interesse nos fenômenos de fratura e dano. Quando uma estrutura é submetida ao carregamento, podem surgir tensões no corpo que, então, entra em processo de falha devido a presença de trincas e fissuras. Este processo de falha pode ser descrito segundo vários modelos, como por exemplo, as Zonas de Processo de Fratura (*ZPF*) (Hillerborg *et al.*, 1976; Bazant *et al.*, 1984; Vavrik e Jandjsek, 2014; Ha *et al.*, 2015; Wei *et al.*, 2016; Xie *et al.*, 2016). Diante disso, tem crescido o interesse da mecânica computacional no desenvolvimento de técnicas que consigam descrever com qualidade tais modelos (Cuvilliez *et al.*, 2012).

A Mecânica da Fratura (*MF*) lida com a abordagem descontínua dos processos de falha. Dentre as várias estratégias utilizadas para idealizar o comportamento da zona fraturada, destacam-se os Modelos de Zona Coesiva (*MZC*), que utiliza uma interface definida de elementos para descrever a trinca (Barenblatt, 1959; Dugdale, 1960; Smith, 1974; Li e Liang, 1992; Lin *et al.*, 1999; Elices *et al.*, 2002; Evangelista Jr *et al.*, 2013b; Park e Paulino, 2013; Tejchman e Bobinski, 2013; Cerrone *et al.*, 2014). Proposto inicialmente por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960), estes modelos caracterizam-se por considerar que todas as não linearidades da *ZPF* ocorrem em uma zona coesiva à frente da ponta da trinca.

A Mecânica do Dano Contínuo (*MDC*), lida com o fenômeno do desenvolvimento, crescimento, coalescência e propagação de trincas distribuídas utilizando conceitos da Mecânica do Contínuo (*MC*). É utilizada para descrever processos irreversíveis tais como o estado de danificação, endurecimento e amolecimento (Kachanov, 1958; Lemaitre e Chaboche, 1994). Sua principal característica reside no fato de dispensar discretizações especiais para modelagem da trinca, além de não ser necessário o emprego de elementos especiais na interface da descontinuidade. Isto se deve ao fato de a representação da trinca seguir a evolução do dano na região.

A *MC* e a *MDC* apresentam conceitos oriundos de anos de pesquisa e desenvolvimento, como pode ser observado, respectivamente, em Truesdell (1966), Truesdell (1991) e Ogden (1997), Kachanov (1958), Kachanov (1986) e Lemaitre e Chaboche (1994). Esse modelos continuam figurando em diversas pesquisas atuais, como é possível notar, respectivamente, em Yagawa (2011), Meyer Jr e Brannon (2012), Golmakani e Rezatalab (2014) e Cho *et al.* (2015), e em Simone *et al.* (2003), Comi *et al.* (2007), Lé *et al.* (2017) e McGregor *et al.* (2017).

O Método dos Elementos Finitos (*MEF*) é um método computacional amplamente utilizado para a modelagem e simulação de problemas complexos da mecânica. No entanto, ele apresenta limitações diante de alguns tipos de problemas (propagação de trincas por exemplo).

A tentativa de superar o baixo desempenho do MEF em certos tipos de análises embasou muitas pesquisas nas últimas três décadas (Duarte e Oden, 1995; Belytschko e Black, 1999; Moës *et al.*, 1999). Esses trabalhos contribuíram para o desenvolvimento de métodos numéricos alternativos, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Strouboulis *et al.*, 2000a; Strouboulis *et al.*, 2000b; Duarte *et al.*, 2001; Pereira *et al.*, 2009b) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFX) (Belytschko e Black, 1999; Dolbow, 1999; Moës *et al.*, 1999; Daux *et al.*, 2000; Moës e Belytschko, 2002; Huang *et al.*, 2003; Belytschko *et al.*, 2009; Gupta e Duarte, 2016), cuja principal vantagem é permitir a ocorrência de trincas arbitrárias no interior do elemento finito (Tejchman e Bobinski, 2013; Kim e Duarte, 2015; Friderikos *et al.*, 2016; Kim *et al.*, 2016).

Estes métodos, baseados na Partição da Unidade de Elementos Finitos (*PU-MEF*), buscam reduzir (ou eliminar) a dependência entre as equações que governam o problema e a respectiva malha, princípio semelhante ao dos Métodos sem Malha que, segundo Duarte e Oden (1995), buscam minimizar a influência da malha na qualidade do resultado. Seguindo esta linha de pesquisa, Babuška e Banerjee (2011) e Babuška e Banerjee (2012) apresentaram uma nova abordagem para domínios unidimensionais, o Método dos Elementos Finitos Generalizados e Estabilizado (MEFG/S). Gupta *et al.* (2013a), Gupta (2014) e Gupta *et al.* (2015) estenderam o *MEFG/S 1D* para os espaços *2D* e *3D* analisando problemas da mecânica de fratura. Trata-se de uma modificação nas funções do MEFG para criar um espaço de enriquecimento que seja quase ortogonal ao espaço de aproximação do elemento finito, preservando todas as características atrativas do MEFG. O MEFG/S tem como objetivo melhorar o condicionamento da matriz de rigidez do MEFG.

Pesquisas modernas tem buscado combinar as abordagens contínua e descontínua para modelar dano e propagação de trincas em domínios bidimensionais para o concreto, ou seja, aplicando o chamado Modelo de Dano Contínuo-Descontínuo (*MDC-D*). Alguns trabalhos demonstram que é possível aliar com sucesso as características de ambos os modelos (MDC e MF), como pode ser observado em Simone *et al.* (2003), Borst R.; Remmers *et al.* (2004), Cuvilliez *et al.*, 2012, Tejchman e Bobinski (2013). Outros ainda fazem uso das vantagens dos Métodos PU, tais como MEFG e MEFX, alcançando resultados excelentes (Vandoren *et al.*, 2013; Rodrigues, 2015; Roth *et al.*, 2015; Friderikos *et al.*, 2016; Huang e Zhang, 2016). Neste caso, uma das alternativas de enriquecimento é utilizar a função Heaviside, devido à sua capacidade de reproduzir abertura de trincas.

Em Evangelista Jr. e Moreira (2020), por exemplo, a principal contribuição foi a implementação de uma técnica eficiente de simulação numérica que, atuando em conjunto com uma lei de evolução de dano baseada unicamente em parâmetros físicos obtidos em ensaios de resistência, mostrou-se capaz de prever o comportamento de estruturas em processo de danificação de maneira eficiente e com objetividade de malha tanto para modo I como para modo misto de

fratura. Na literatura, porém, há certa escassez de trabalhos que associem o estudo e aplicação do *MEFG/S* polinomial para a avaliação de estruturas em processo de danificação, com conceitos de *MDC* ou da *MF*. Aplicações do enriquecimento polinomial associado à *MDC-D* são ainda mais raras.

É possível combinar a característica da *MDC* de descrever, com eficiência, o comportamento do material em regime físico não-linear, com a flexibilidade de aplicação do *MEFG/S*, de modo que seja possível refinar a resposta apenas nas regiões em que haja real necessidade. As funções de forma polinomiais são capazes de reproduzir com boa qualidade o campo de deslocamentos para diversos níveis de dano, mostrando-se capazes de capturar elevados gradientes de deformação sem um aumento substancial do custo computacional. As funções enriquecedoras (polinomiais ou não) multiplicadas pelas funções PU, aumentam a base de aproximação do elemento finito existente, expandindo o espaço da solução (Strouboulis *et al.*, 2000a).

Apesar dos vários aspectos positivos mencionados anteriormente, a estratégia *MEFG/S* tende a perder efetividade conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta. Uma solução apontada na literatura para essa limitação é a dita PU *flat-top* (Silva *et al.*, 2022), inicialmente estudada por Griebel e Schweitzer (2002) e Griebel e Schweitzer (2007) e recentemente estendida para o espaço bidimensional por Sato, 2017.

Outra limitação está no uso da função Heaviside nas simulações onde há descontinuidade forte, posto que uso dessa função pode tornar-se ineficiente quando a malha é muito grosseira (Duarte e Kim, 2008). Com a finalidade de contornar esta limitação, foi desenvolvido o Método dos Elementos Finitos Generalizados com funções de enriquecimento Global Local (*MEFG<sup>g-l</sup>*), abordagem que permite a opção de criar enriquecimentos personalizados mediante a utilização de um espaço do problema (subdomínio de interesse retirado do modelo global) que é resolvido separadamente (Duarte *et al.*, 2005; Duarte e Kim, 2008; Malekan *et al.*, 2018; Evangelista Jr. *et al.*, 2020; Li *et al.*, 2022).

Todo esse processo de enriquecimento pode ser otimizado e automatizado, tornando-o adaptativo. O estudo do MEF adaptativo teve início por volta de 1980 (Li e Bettess, 1997). Muitas pesquisas começaram a ser desenvolvidas em vista de obter uma solução dita ótima, utilizando as estimativas de erro ao longo da malha como indicadores para refinamento de malha (Babuška e Rheinboldt, 1979; Babuška e Miller, 1981; Basu e Peano, 1983; De *et al.*, 1983; Demkowicz *et al.*, 1984; Demkowicz e Oden, 1986; Zienkiewicz e Zhu, 1987; Zienkiewicz e Zhu, 1992a; Zienkiewicz e Zhu, 1992b; Zienkiewicz e Zhu, 1992c; Zienkiewicz *et al.*, 1993). As primeiras tentativas de associar o *MEFG/X* com estimadores de erro podem ser encontradas em Babuška *et al.* (1998a) e Strouboulis *et al.* (2001). Desde então outros trabalhos na mesma linha foram publicados tanto empregando a metodologia *MEFX* (Bordas *et al.*, 2008; Gerasimov *et al.*, 2012; Prange *et al.*, 2012; Ródenas *et al.*, 2013; Wang *et al.*,

2016), Mefg (Barros *et al.*, 2004b; Strouboulis *et al.*, 2006; Lins *et al.*, 2015) ou Mefg/S (Lins *et al.*, 2019).

## 1.1 - OBJETIVOS

### 1.1.1 - Objetivo Geral

O objetivo geral da pesquisa é implementar o Mefg/S (com adaptatividade quanto ao refinamento  $p$  baseada num estimador de erro *a posteriori*) e uma estratégia global-local para atuar associadamente a um modelo de dano contínuo e contínuo-descontínuo com transição para o modelo de zona coesiva, com plasticidade ou não, para a análise de estruturas em processo de danificação devido carregamento convencional.

### 1.1.2 - Objetivo Específicos

- Implementar o Mefg para simulações 3D;
- Implementar o Mefg/S para simulações 2D e 3D;
- Verificar o desempenho do Mefg/S quando comparado ao Mef em análises de dano contínuo e propagação de trincas com  $MDC-D$  (com transição para fratura);
- Verificar a capacidade da estratégia em reproduzir o comportamento e a carga máxima estrutural dos ensaios simulados numericamente;
- Usar funções de enriquecimento polinomiais e estudar os efeitos na predição do dano com malhas grosseiras nas situações acima mencionadas;
- Implementar Mefg/S adaptativo para dano e verificar a eficiência numérica da estratégia;
- Implementar o recuperador de tensões proposto por Zienkiewicz e Zhu (1992a) e Zienkiewicz e Zhu (1992b);
- Implementar o estimador de erro *a posteriori* *Superconvergent Patch Recovery (SPR)*, também conhecida na literatura como método  $ZZ-SPR$  proposto por Zienkiewicz e Zhu (1992a) e Zienkiewicz e Zhu (1992b);
- Automatizar o processo de enriquecimento polinomial com base na evolução do dano no elemento ou com base na estimativa de erro *a posteriori*;
- Verificar a influência da adaptatividade do enriquecimento polinomial na velocidade de convergência dos domínios globais e locais e na eficiência numérica da estratégia.



- Implementar a Partições da Unidade *flat-top* 2D e avaliar se irá contribuir para melhorar a velocidade de convergência das iterações;
- Desenvolver e implementar a estratégia global-local (MEFG/S<sup>g-l</sup>);
- Verificar a influência do refinamento  $p$  na convergência dos domínios globais e locais;
- Verificar a influência da utilização da PU *flat-top* na velocidade de convergência dos domínios globais e locais e na eficiência numérica da estratégia.

## 1.2 - CONTRIBUIÇÕES

- Análise e aplicação do MEF/S na simulação de estruturas em processo de danificação utilizando o modelo de dano contínuo-descontínuo com transição para a fratura proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2020) (em casos 2D) e contínuo (em simulações 3D);
- Análise e aplicação do MEF/S em conjunto com as PU *flat-top* na simulação de estruturas em processo de danificação utilizando o modelo de dano contínuo e contínuo-descontínuo com transição para a fratura proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2020) (em casos 2D);
- Tornar os enriquecimentos polinomial e descontínuo do MEF/S adaptativos em relação à evolução do dano e da trinca, utilizando o modelo de dano contínuo-descontínuo proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2020) em simulações 2D;
- Tornar o refinamento  $p$  adaptativo utilizando o estimador de erro a *posteriori* ZZ-SPR proposto por Zienkiewicz e Zhu (1992a) e Zienkiewicz e Zhu (1992b) levando em conta a evolução do dano e da trinca, utilizando o modelo de dano contínuo-descontínuo proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2020);
- Apresentar uma nova abordagem do MEF/S<sup>g-l</sup>, que incorpora um modelo de dano contínuo-descontínuo proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2020) para simular propagação de trinca sob condições de modo I e misto de fratura vinculando a variável de estado de dano (obtida em uma escala local) à escala global utilizando funções de enriquecimento construídas a partir da solução do problema local.
- Apresentar uma abordagem eficiente dos métodos generalizados capaz de simular propagação de trincas em estruturas danificadas sem a necessidade de remalhamentos ou inserção de elementos especiais na malha que onerem computacionalmente o processo.

### 1.3 - ESTRUTURA DA TESE

Esta pesquisa está dividida em sete capítulos, sendo o Capítulo 1 dedicado à introdução ao assunto estudado e aos objetivos geral e específicos da pesquisa. Os capítulos 2, 3, 4, 5 e 6 foram escritos em formato de artigos científicos. O capítulo 2 apresenta as análises envolvendo o desenvolvimento do MEFG/S  $2D$ . O capítulo 3 traz as avaliações do MEFG/S de alta ordem com a utilização da PU *flat-top*. O capítulo 4 dedica-se à verificação da adaptatividade e refinamento polinomial  $p$  do MEFG/S. O capítulo 5 apresenta as análises envolvendo o desenvolvimento do MEFG/S  $3D$ . O capítulo 6 apresenta os resultados do desenvolvimento, verificação e aplicação do MEFG/S $^{g-l}$ . Por fim, o capítulo 7 traz as principais considerações deste trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

## 2 - MEFG/ESTABILIZADO (MEFG/S) - 2D

### 2.1 - INTRODUÇÃO

Recentemente, Babuška e Banerjee (2011) e Babuška e Banerjee (2012) apresentaram uma nova abordagem para domínios unidimensionais, o chamado Método dos Elementos Finitos Generalizados e Estabilizado (MEFG/S). Trata-se de uma modificação nas funções do MEFG para criar um espaço de enriquecimento que seja quase ortogonal ao espaço de aproximação do elemento finito, preservando todas as características atrativas do MEFG. O MEFG/S tem como objetivo melhorar o condicionamento da matriz de rigidez do MEFG.

Babuška e Banerjee (2011) e Babuška e Banerjee (2012) mostram que o MEFG/S tem como características a ótima convergência e o fato de não ter problemas com os elementos de transição (*blends*) entre regiões com diferentes tipos de funções enriquecedoras, como proposto por Fries (2008). Gupta *et al.* (2013a), Gupta (2014) e Gupta *et al.* (2015) estenderam o MEFG/S 1D para os espaços 2D e 3D analisando problemas da mecânica de fratura. O método está em evidência no momento, como é possível observar nos trabalhos de Agathos *et al.* (2016), Kergrene *et al.* (2016), Malekan e Barros (2016), Zhang *et al.* (2016), Babuška *et al.* (2017), Oliveira *et al.* (2019), Lins *et al.* (2019), Novelli *et al.* (2020), Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2021), Attanayake *et al.* (2022), Cui *et al.* (2022), Jiang *et al.* (2022) e Li *et al.* (2022), entre outros.

### 2.2 - REVISÃO DA LITERATURA

O MEF baseia-se nas propriedades de aproximação local de polinômios (Melenk e Babuška, 1996). Estes, no entanto, em problemas onde ocorrem saltos, torções ou singularidades, apresentam certa dificuldade. A precisão da solução é, conseqüentemente, prejudicada. Vários métodos têm sido desenvolvidos buscando suprir tais deficiências, como o Método de Partição da Unidade de Elementos Finitos (PU-MEF) proposto por Babuška e Melenk (1997).

Uma outra alternativa para contornar os problemas elencados acima é a utilização de funções ditas "especiais". Estas formulações numéricas não-convencionais empregadas na construção de aproximações enriquecidas variam do emprego de campos de "deformações aumentados" (Simo e Rifai, 1990; Korelc e Wriggers, 1996), aos métodos de partição da unidade (Strouboulis *et al.*, 2000a; Strouboulis *et al.*, 2000b; Duarte *et al.*, 2001). Entre os métodos PU, se destacam o Método dos Elementos Finitos Estendidos (Belytschko e Black, 1999; Moës *et al.*, 1999) - e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Inicialmente proposto por Babuška *et al.* (1994a) sob a denominação de Método dos Elementos Finitos Especiais. Em 1995, aparece como uma proposta de método sem malha sob a denominação de Método das Nuvens *hp* (Duarte e Oden, 1995). Nesse mesmo ano, Melenk (1995) desenvolveu o método matematicamente, destacando-se como um dos primeiros a abordar o tema utilizando a atual denominação. Em

Strouboulis *et al.* (2001) os autores descreveram como o MEF pode ser generalizado.

### 2.2.1 - Definição do problema do modelo

A incorporação de uma descontinuidade num campo de deslocamento exige a prévia caracterização das propriedades cinemáticas do sólido cortado pela mesma. Considerando-se um corpo  $\bar{V}$  com contorno  $\Gamma$  e cortado por uma descontinuidade  $\Gamma_d$  que divide o corpo nos domínios  $V^+$  e  $V^-$ , tal que  $\bar{V} = V^+ \cup V^-$ , conforme Fig. 2.1, em que  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  são as regiões de aplicação das condições de contorno de deslocamento e de tractions  $\bar{t}$ , respectivamente. O contorno é decomposto em  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  com  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ .

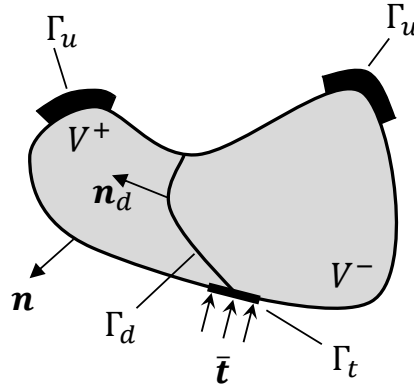


Figura 2.1 – Domínio  $\bar{V}$  cortado pela descontinuidade  $\Gamma_d$ .

Então, as equações de equilíbrio e constitutiva são conforme segue:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad \text{em } \bar{V} \quad (2.1a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{em } \bar{V} \quad (2.1b)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensão de Cauchy;  $\bar{\mathbf{b}}$  são as forças do corpo;  $\mathbf{C}$  é o tensor de Hooke;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de pequenas deformações. As condições de limite prescritas em  $\Gamma$  são:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.2b)$$

sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário externo a  $\Gamma$ ;  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  são os deslocamentos e as trações prescritas em  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$ , respectivamente. As Eqs. (2.1a) e (2.1b) fornecem a forma forte das equações governantes e as Eqs. (2.2a) e (2.2b) as condições de contorno se  $\Gamma_d$  for assumido como livre de tração. Em seguida, o Princípio do Trabalho Virtual fornece a formulação fraca do problema usando o espaço de energia  $\mathcal{E}(\Gamma)$ . Encontre  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , de modo que,  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_0$ :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad (2.3)$$

onde:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\bar{V}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\bar{V} \quad (2.4a)$$

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\partial\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} ds \quad (2.4b)$$

sendo  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}_0$  os espaços teste para o campo de deslocamento e o espaço de deslocamentos virtuais, respectivamente. A norma de  $\mathcal{E}(\Gamma)$  é:

$$\|\cdot\|_{\mathcal{E}(\Gamma)} = \sqrt{B(\cdot, \cdot)} \quad (2.5)$$

Observa-se que as Eqs. (2.3), (2.4a) e (2.4b) não consideram a presença de descontinuidade  $\Gamma_d$ . Sua consideração será realizada através da formulação do MDC, modificando a Eq. (2.4a) conforme detalhado nas próximas seções.

### 2.2.2 - Sobre o MEFG

O MEFG baseia-se na utilização de funções de forma não convencionais cuja escolha deve pautar-se na garantia da manutenção das condições iniciais de estabilidade do problema bem como na dificuldade de implementação (Babuška *et al.*, 1994a). A construção das funções de forma do MEFG ( $\phi_{\alpha i}$ ) pode ser definida, matematicamente, como uma combinação, em cada nó  $x_\alpha$  do domínio, entre as funções de forma padrão do MEF ( $N_\alpha$ ) e funções linearmente independentes  $L_{\alpha i}$  chamadas funções de enriquecimento. Sendo  $L_{\alpha i} = \{1, L_{\alpha 1}, L_{\alpha 2}, \dots, L_{\alpha q}\}$  uma base geradora para um espaço de funções  $\chi_\alpha(\omega_\alpha)$  definido sobre  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{J}_p^e$  o índice de um nó enriquecido pertence à malha de elementos finitos e  $i \in \mathcal{Z}(\alpha)$  é o índice de uma função de enriquecimento no nó. As funções de forma do MEFG  $\phi_{\alpha i}$  associadas ao nó  $x_\alpha$  são, portanto, conforme ilustrado na Fig. 2.2(a), definidas da seguinte maneira:

$$\phi_{\alpha i} = N_\alpha L_{\alpha i}, \quad \alpha \in \mathcal{J}_p^e, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

As funções  $\phi_\alpha$  herdam das funções de forma padrão do MEF o suporte compacto da Partição da Unidade (PU), ou seja, valem zero fora dos elementos que contêm o seu nó associado. Isso garante a não penalização da continuidade entre os elementos da malha inicialmente adotada. Além disso, o somatório de todas as funções de forma pertencentes à nuvem  $x_\alpha$  é igual à unidade, propriedade também herdada da formulação clássica da PU.

O espaço teste/tentativa do MEFG,  $\mathbb{S}$ , é dado conforme segue:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_F + \mathbb{S}_E \quad (2.7)$$

onde

$$\mathbb{S}_F = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_p} a_\alpha N_\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R} \quad (2.8a)$$

$$\mathbb{S}_E = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_p^e \subset \mathcal{J}_p} N_\alpha \chi_\alpha, \quad \chi_\alpha = \text{span}\{L_{\alpha i}\}_{i=1}^{q_\alpha} \quad (2.8b)$$

onde  $\mathbb{S}_E$  é um espaço de enriquecimento global;  $\mathbb{S}_F$  é o espaço de teste do MEF;  $a_\alpha$  são os Graus de Liberdade (GDL) da estrutura associados ao nó  $x_\alpha$  da nuvem  $\omega_\alpha$ ;  $\chi_\alpha$ , são os GDL adicionais correspondentes a cada função de enriquecimento; a nuvem  $\omega_\alpha$  são os elementos de malha conectados pelo nó  $x_\alpha$  conforme ilustrado na parte inferior de Fig. 2.2(b). Devido o espaço  $\mathbb{S}$  ser definido pelo conceito de partição da unidade gera-se um sistema linear de equações a ser resolvido para os graus de liberdade desconhecidos.

O campo de deslocamento  $\mathbf{u}$  pode ser decomposto em uma parte contínua e outra descontínua, conforme segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \hat{\mathbf{u}}(x) + H_{\Gamma_d}[[\tilde{\mathbf{u}}(x)]] \quad (2.9)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}$  é uma função contínua no domínio  $\bar{V}$ ;  $[[\tilde{\mathbf{u}}]]$  é uma função descontínua no domínio  $\bar{V}$  e  $H_{\Gamma_d}$  é a função *Heaviside* centrada na superfície descontínua  $\Gamma_d$  ( $H_{\Gamma_d} = 1$  se  $x \in V^+$ ,  $H_{\Gamma_d} = 0$  se  $x \in V^-$ ). A Fig. 2.2 apresenta os enriquecimentos de alta ordem contínuo e descontínuo em uma representação gráfica do produto apresentado na Eq. (2.6).

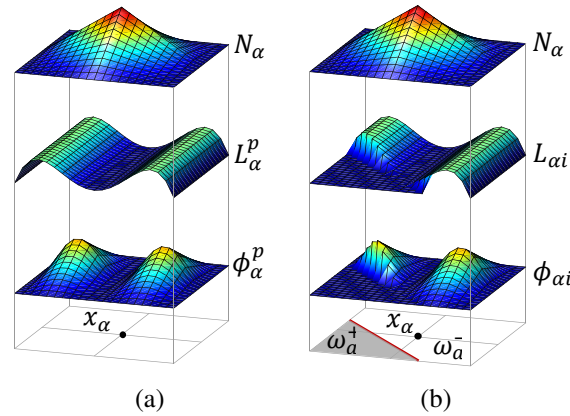


Figura 2.2 – Funções de forma do MEFG: (a) enriquecimento de alta ordem contínuo; (b) enriquecimento de alta ordem descontínuo.

O MEFGS/X incorpora na aproximação a descontinuidade do campo de deslocamento através de uma combinação da função de Heaviside com as funções padrão do MEF, garantindo, por exemplo, que modelos com trincas ou furos possam ser discretizados com menor quantidade de elementos. O custo computacional de frequentes atualizações de malha também é evitado, além de permitir propagação de trincas dentro dos elementos.

Em análises com descontinuidades devido a presença de trincas, deve-se levar em consideração a ocorrência de uma descontinuidade local do corpo e, conseqüentemente, do campo de deslocamentos ali desenvolvidos. Neste ponto, surge a aplicação das funções descontínuas, devido sua capacidade de descrever o "salto de deslocamento" que ocorre na região de abertura da trinca. Uma estratégia de aproximação possível (Fig. 2.2(b)) pode ser

formulada da seguinte maneira:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i \in N} N_i(x) \left[ u_i + \underbrace{H(x)a_i}_{i \in N_\Gamma} \right] \quad (2.10)$$

onde  $u_i$  são os deslocamentos nodais associados ao MEF;  $H(x)$  é a função Heaviside;  $a_i$  são os graus de liberdade enriquecidos associados à função Heaviside. A função *Heaviside* introduz a descontinuidade em  $\Gamma_d$  e o valor do salto de deslocamento é dado por  $[[\tilde{u}]]$ . O campo de deformações pode ser obtido a partir do gradiente do campo de deslocamentos  $\tilde{u}$ , da seguinte maneira:

$$\varepsilon = \nabla^S \hat{u} + H_{\Gamma_d}(\nabla^S [[\tilde{u}]]) + (\nabla H_{\Gamma_d} \otimes [[\tilde{u}]])^S \quad (2.11)$$

em que o operador  $\otimes$  é o produto de Kronecker. A simbologia  $(.)^S$  indica que somente a parte simétrica dos tensores é considerada, supondo que as deformações sejam infinitesimais.

### 2.2.3 - Sobre o MEFG/S

É reconhecido que tanto o MEFG quanto o MEFX possuem excelentes propriedades de convergência, porém, a matriz de rigidez associada a esses métodos pode ser (e em geral é) mal-condicionada. Abordado pela primeira vez em Babuška e Banerjee (2011), o MEFG/S surgiu a partir da proposição de uma simples modificação na estrutura existente do MEFG/X que garante a eliminação do problema de mal-condicionamento.

A eficiência do MEFG e do MEFX reside no fato de que é necessário apenas modificar um código MEF existente para incorporar funções de forma especiais com suporte compacto ao sistema. Isto, combinado à escolha adequada das funções de forma especiais, conduz a excelentes propriedades de convergência. No entanto, disto resultam funções de forma quase linearmente dependentes. Consequentemente a matriz de rigidez pode ser severamente mal-condicionada ou mesmo singular (dependendo da situação o condicionamento ruim pode ser pior que do próprio MEF). Isso resulta na perda de precisão na solução do sistema linear associado (Babuška e Banerjee, 2011; Gupta *et al.*, 2013a; Gupta *et al.*, 2015; Malekan e Barros, 2016).

Em síntese, o MEFG/S tem como objetivo melhorar a propriedade de condicionamento do MEFX e do MEFG. Babuška e Banerjee (2011) mostraram que o MEFG/S apresentam ótimo nível de convergência. Outra vantagem é que o MEFG/S não necessita das chamadas funções rampa nos elementos de transição em regiões onde forem aplicados diferentes tipos de funções de enriquecimento, conforme proposto por Fries (2008).

O espaço de aproximação do MEFG/S pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \sum_{i \in I} \varphi_i \bar{L}_i b_i = \mathcal{S}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2, \quad \bar{\mathcal{S}}_2 = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i \bar{\psi}_j^{(i)} b_j^{(i)} \right\} \quad (2.12)$$

onde:  $\mathcal{S}_1$  é o espaço de aproximação local do MEF;  $\mathcal{S}_2$  é o espaço de aproximação local do MEFG/S;  $\bar{\psi}_j^{(i)}$  é a função de enriquecimento modificada;  $\varphi_i$  representa a PU *hat-function*

padrão do MEF;  $b_j^{(i)}$  refere-se aos graus de liberdade atrelados aos nós da malha.

No MEFG/S uma modificação local simples dos enriquecimentos empregados no MEFG, é utilizada para construir os espaços de aproximação  $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha$ , onde  $\alpha \in I_h^e$ , conforme a Eq. (2.13).

$$\tilde{L}_{\alpha i}(\mathbf{x}) = L_{\alpha i}(\mathbf{x}) - I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})(\mathbf{x}); \quad \tilde{\mathcal{X}}_\alpha = \text{span}\{\tilde{L}_{\alpha i}\}_{i=1}^{m_\alpha} \quad (2.13)$$

onde  $I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})$  é a parcela de interpolação linear ou bilinear da função de enriquecimento  $L_{\alpha i}$  aplicada ao nó  $\omega_\alpha$  e  $\tilde{L}_{\alpha i}$  a função de enriquecimento modificada do MEFG/S. A Fig. 2.3 ilustra o cálculo de uma função de enriquecimento e da função de forma ( $\tilde{\phi}_{\alpha i}$ ) correspondente do MEFG/S no espaço de enriquecimento global associado à  $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha$ .

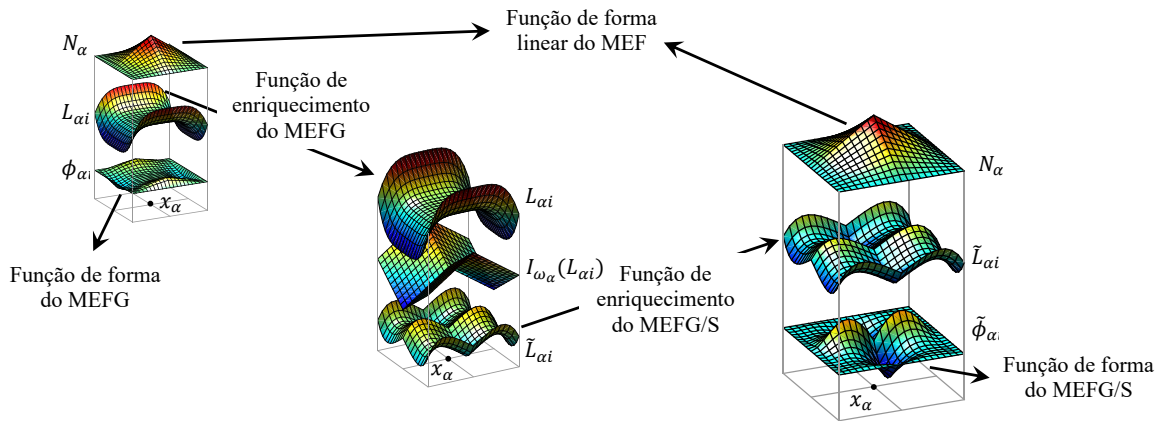


Figura 2.3 – Cálculo da função de enriquecimento do MEFG/S.

## 2.2.4 - Funções de enriquecimento do MEFG/S 2D

As funções de base polinomial podem ser construídas de forma hierárquica tendo como regra o Triângulo de Pascal. Optou-se pela chamada "função deslocada" definida de modo geral conforme a Eq. (2.14) a seguir:

$$L(p,q) = \frac{(X - X_\alpha)^p (Y - Y_\alpha)^q}{h^{(p+q)}} \quad (2.14)$$

em que  $X_\alpha, Y_\alpha$  e são as coordenadas do nó  $\alpha$  no espaço 2D onde o enriquecimento é aplicado;  $X, Y$  são as coordenadas dos pontos de Gauss em cada elemento; e  $h$  atua como normalizador de forma a excluir do enriquecimento informações associadas à geometria do elemento ou à sua posição na malha, minimizando, desta forma, erros de arredondamento. Neste trabalho os conjuntos de funções de enriquecimento foram construídos de duas maneiras: uma utilizando todos os termos do Triângulo de Pascal (conjunto de polinômios completo - Eq. (2.15a)) e outra utilizando apenas os termos extremos (conjunto de polinômios incompleto - Eq. (2.15b)). De forma geral, no espaço 2D, tem-se:

$$L_{P2C} = \left\{ 1, \frac{(x - x_\alpha)^2}{h_\alpha^2}, \frac{(x - x_\alpha)(y - y_\alpha)}{h_\alpha^2}, \frac{(y - y_\alpha)^2}{h_\alpha^2} \right\} \quad (2.15a)$$



$$L_{P2I} = \left\{ 1, \frac{(x - x_\alpha)^2}{h_\alpha^2}, \frac{(y - y_\alpha)^2}{h_\alpha^2} \right\} \quad (2.15b)$$

onde  $P2C$  indica conjunto completo e  $P2I$  conjunto incompleto, ambas de segundo grau. Adiante, estas estratégias serão denominadas  $Pol^c$  e  $Pol^i$ , respectivamente, para melhor compreensão. A construção de conjuntos de ordem mais elevada que as demonstradas anteriormente seguiu a mesma lógica. Nota-se que diferentemente do MEEG, no caso do MEEG/S, não existe a função de enriquecimento linear.

Os modelos mais modernos incorporam na aproximação a descontinuidade do campo de deslocamentos por meio de uma combinação entre a função Heaviside e as funções de forma padrão do MEF, garantindo, por exemplo que modelos com trincas ou furos possam ser discretizados com uma quantidade menor de elementos. Evita-se ainda o custo computacional da atualização frequente de malha, além de permitir a propagação da trinca dentro dos elementos (Oliver, 1995; Simone *et al.*, 2003).

## 2.3 - MODELO DE DANO E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Esta seção apresenta o modelo de dano utilizado neste trabalho para simular a falha em estruturas com materiais quasi-frágeis. Nesta pesquisa duas estratégias foram utilizadas: uma estratégia Contínua (C) (Sec. 2.3.1) e uma estratégia Contínua-Descontínua (C-D) (mutuamente usando a abordagem mostrada na Sec. 2.3.1 com aquela descrita na Sec. 2.3.2).

### 2.3.1 - Modelo de dano Contínuo (C)

O modelo de dano empregado foi formulado e implementado por Evangelista Jr. e Moreira (2020) onde os autores realizaram simulações com modelos  $2D$  e  $3D$  sob Modo I e Misto (I + II) de propagação de trincas. Os autores mostraram que o modelo simulou com sucesso a propagação de trincas e ruptura em todos os casos analisados, mostrando boa concordância com os resultados experimentais de carga máxima, trajetória de trinca e curvas de amolecimento.

Em Evangelista Jr. *et al.* (2020) os autores apresentaram uma estratégia global-local usando este modelo de dano para simular falha estrutural. Em seu trabalho, a solução do problema local não linear convergido foi utilizada como funções de enriquecimento do problema global que é considerado linear, portanto, sem a necessidade de um procedimento iterativo para resolvê-lo. A estratégia global-local demonstrou a capacidade de prever com qualidade os caminhos experimentais de trincamento bem como as curvas de amolecimento.

Este modelo é aplicado a materiais quase frágeis sob condições de carregamento que produzem o Modo I ou Misto de propagação de trincas. Os limites do modelo são: o material é considerado um meio elástico quando em processo evolutivo de dano e, portanto, não são consideradas deformações plásticas; o dano é representado por uma variável escalar  $D$  ( $0 \leq D \leq 1$ ), o que significa assumir uma condição de dano isotrópico para o material. Portanto, a equação

constitutiva assume o seguinte formato:

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - D(\varepsilon_{eq})] \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$

em que  $D(\varepsilon_{eq})$  é uma variável de dano isotrópica que mapeia o estado danificado do corpo através de uma deformação equivalente  $\varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon})$  e  $\mathbf{D}_0$  é o tensor constitutivo do estado não danificado definido para o caso elástico linear como:

$$\mathbf{D}_0 = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu \mathbf{II} \quad (2.17)$$

em que  $\lambda$  e  $\mu$  são os parâmetros de Lamé;  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{II}$  são tensores Identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente.

A variável de controle empregada refere-se ao tensor de deformação equivalente ( $\varepsilon_{eq}$ ), que é responsável por traduzir o estado tensão-deformação em uma grandeza escalar. Uma medida simples e eficiente, nos casos em que as tensões de cisalhamento são desprezíveis, é a deformação equivalente proposta por Mazars (1984) ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ), amplamente utilizada na literatura (Mazars e Pijaudier-Cabot, 1989; Proença e Torres, 2008; Pereira *et al.*, 2016; Evangelista Jr. *et al.*, 2020; Evangelista Jr. e Moreira, 2020) e definida como:

$$\varepsilon_{eq}^{MA} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2} \quad (2.18)$$

em que  $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = (\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)/2$ , onde  $\varepsilon_i$  representa a deformação principal na direção  $i$  e  $|\varepsilon_i|$  o módulo do mesmo.

Para os casos em que as tensões de cisalhamento são significativas e determinantes para a definição do estado de deformação,  $\varepsilon_{eq}^{MA}$  é substituída pela deformação equivalente modificada de Von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ) conforme apresentado na literatura (Vree *et al.*, 1995; Geers, 1997; Simone *et al.*, 2003; Jirásek e Grassl, 2008; Evangelista Jr. *et al.*, 2020; Evangelista Jr. e Moreira, 2020).

$$\varepsilon_{eq}^{VM} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_{\varepsilon_1} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_{\varepsilon_1}^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_{\varepsilon_2}} \quad (2.19)$$

em que  $I_{\varepsilon_1} = tr(\boldsymbol{\varepsilon})$  é o primeiro invariante do tensor de deformação e,  $J_{\varepsilon_2} = tr(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - 1/3 (tr^2(\boldsymbol{\varepsilon}))$ , o segundo invariante do tensor de deformação, em que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de deformação;  $k$  é a razão entre as resistências à compressão ( $f_c$ ) e à tração ( $f_t$ );  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

O critério para início do dano está diretamente relacionado à deformação equivalente e ocorre quando  $\varepsilon_{eq}$  atinge uma deformação crítica  $\varepsilon_{d0}$  que pode ser determinada em função da resistência à tração ( $f_t$ ) do material. Em geral, o critério de dano é dado pela seguinte equação:

$$f(\varepsilon_{eq}) = \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0} \leq 0 \quad (2.20)$$

A evolução da lei de dano é representada através de uma variável escalar ( $D$ ) que segue os

princípios da termodinâmica de processos irreversíveis como:

$$\dot{D} = \begin{cases} F(\varepsilon_{eq}), & \text{se } f(\varepsilon_{eq}) = 0 \text{ ou } \dot{f}(\varepsilon_{eq}) > 0 \\ 0, & \text{se } f(\varepsilon_{eq}) = 0 \text{ e } \dot{f}(\varepsilon_{eq}) < 0 \text{ ou } f(\varepsilon_{eq}) < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

onde  $F(\varepsilon_{eq})$  é uma função contínua e positiva de  $\varepsilon_{eq}$  que descreve a evolução do dano. Considerando um carregamento monotônico crescente até uma deformação equivalente máxima ( $\varepsilon_{eq}^{max}$ ), o valor de  $D$  pode ser obtido como segue:

$$D(\varepsilon_{eq}) = \int_0^{\varepsilon_{eq}^{max}} F(\varepsilon_{eq}) d\varepsilon_{eq} \quad (2.22)$$

Esta equação permite que cada função  $D(\varepsilon_{eq})$  possa descrever um fenômeno diferente dentro do processo de amolecimento.

A lei do dano é descrita por meio de uma curva bilinear (Roesler *et al.*, 2007a), representada pela relação tensão-deformação de amolecimento ( $\sigma - \varepsilon$ ). A relação ( $\sigma - \varepsilon$ ) para a curva de amolecimento está associada a uma região de largura finita expressa pelo tamanho equivalente dos elementos  $l_c$ . Assim, o cálculo da variável escalar de dano ( $D(\sigma - w)$ ) para materiais sob tração é baseado em uma lei coesiva de fratura, onde  $D(\sigma - w) = D(\sigma - \varepsilon_{eq} l_c)$ .

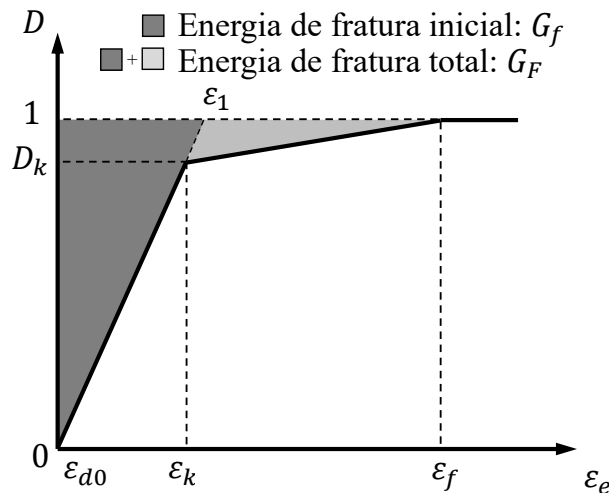


Figura 2.4 – Lei de dano.

Para a implementação em uma estrutura de elementos finitos, é necessário que a evolução do dano seja ajustada à largura de banda determinada pela malha de elementos finitos, definida por  $l_c$ . Desta forma, a dissipação de energia será adaptada para cada tamanho de elemento finito nas regiões danificadas da malha. O termo  $l_c$  é estimado projetando o elemento em direção ao eixo de deformação principal a partir de um centro conforme detalhado por Jirásek e Bauer (2012). Sendo  $l_c = h_e$  (onde  $h_e$  é igual ao tamanho típico do elemento da malha de elementos finitos), tem-se que

$$h_e = \begin{cases} L^e, & \text{se } 1D \\ \sqrt[2]{A^e}, & \text{se } 2D \\ \sqrt[3]{V^e}, & \text{se } 3D \end{cases} \quad (2.23)$$

em que  $L^e$ ,  $A^e$  e  $V^e$  são, respectivamente, o comprimento, a área e o volume do elemento finito.

A lei de dano para materiais cimentícios quasi-frágeis convencionais utilizada neste trabalho é definida por meio de uma equação bilinear (Fig. 2.4), de acordo com o trabalho de Evangelista Jr. e Moreira (2020), onde  $D_k = 1 - \psi$ . Os parâmetros geométricos que caracterizam a lei do dano ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\psi$ ) resultam das propriedades do material ( $G_f$ ,  $G_F$ ,  $CTOD_c$  e  $f_t$ ) obtidos em experimentos laboratoriais de fratura e resistência, segundo Roesler *et al.* (2007a), Roesler *et al.* (2007b), Park *et al.* (2009) e Evangelista Jr *et al.* (2013a). Detalhes sobre a lei de danos podem ser encontrados em Evangelista Jr. e Moreira (2020).

### 2.3.2 - Modelo de dano Contínuo-Descontínuo (C-D)

O critério de propagação é baseado no valor do dano nos pontos de integração de Gauss (PG) do elemento à frente da ponta da trinca, de forma que após cada incremento de deslocamento uma descontinuidade é inserida quando o valor do dano no PG se aproxima de  $D(\varepsilon_{eq}) \rightarrow 1$ . A descontinuidade é inserida como uma linha reta dentro do elemento, de forma que o vetor normal  $n_d$  permaneça constante em todo o elemento. A trinca pode se propagar por mais de um elemento dentro do mesmo passo convergido.

A direção de propagação da fissura é então calculada como ilustrado na Fig. 2.5(a) onde o conjunto de pontos de integração  $i$  pertence dentro de uma área virtual semicircular  $V$  de varredura da janela, com  $\theta = 90^\circ$  e, pertencentes aos elementos cuja face contém a ponta da trinca, ou compartilham, pelo menos uma conectividade com o elemento tocado pela ponta da trinca (Simone *et al.*, 2003). O termo  $r_i$  é o vetor de direção que liga a ponta da trinca a  $i$ .

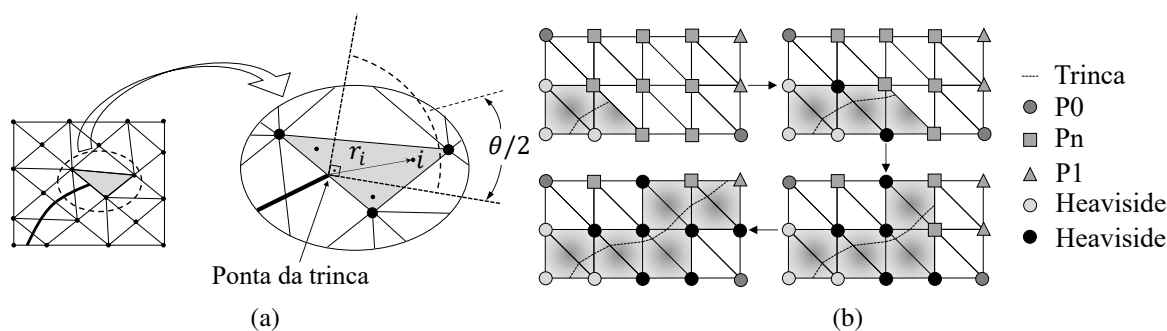


Figura 2.5 – Sistema de propagação de trincas do *LACHESIS*: (a) Determinação da direção de propagação da trinca no método (C-D); (b) Enriquecimento polinomial e Heaviside para propagação de trincas.

Finalmente, o elemento cortado pela trinca terá seus nós enriquecidos conforme a Eq. (2.6) com enriquecimento descontínuo (ver Eq. (2.10)). Destaca-se que os nós pertencentes à aresta do elemento frontal tocado pela ponta da trinca não são enriquecidos com função Heaviside, estratégia adotada com sucesso em Wells e Sluys (2001) e Evangelista Jr. e Moreira (2020).

## 2.4 - METODOLOGIA

A metodologia geral que embasou este trabalho seguiu o seguinte ordenamento:

- Revisão da Literatura;
- Implementação;
- Verificação e validação dos resultados;

A implementação dos códigos computacionais do programa de análise numérica foi feito utilizando a linguagem de programação C++, dando continuidade ao programa *LACHESIS* que foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa NEXUM na Universidade de Brasília - UnB. Em cada capítulo será detalhada a metodologia específica pertinente ao subtema em discussão.

### 2.4.1 - Revisão da literatura

Esta é a etapa inicial da pesquisa, em que foi aprofundado o estudo dos conceitos básicos e características do MEF/S, bem como dos modelos de propagação de dano encontrados na literatura. Nesta etapa foram revisados os principais trabalhos acadêmicos que servem de base teórica para este trabalho bem como os artigos científicos mais atuais, objetivando inserir esta pesquisa em um contexto atualizado. Também foram estudados conceitos de linguagem de programação como subsídio para a escrita de códigos computacionais mais otimizados inseridos dentro no *LACHESIS* (Fig. 2.6).

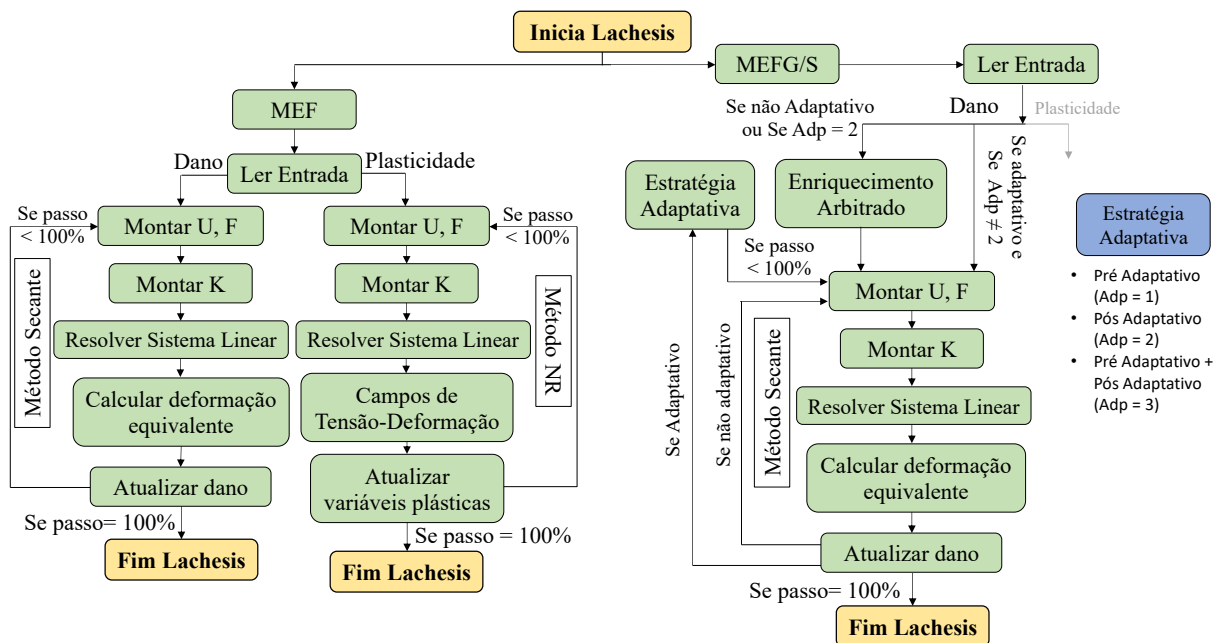


Figura 2.6 – Fluxograma do Programa de Elementos Finitos *LACHESIS*.

## 2.4.2 - Implementação computacional, verificação e validação

Foram estudados conceitos de linguagem de programação como subsídio para a escrita dos códigos computacionais mais otimizados. Estes serão inseridos dentro do programa de análise numérica *Lachesis* desenvolvido pelo grupo de pesquisa em C++. A estrutura atual do *Lachesis* é apresentada a seguir na Fig. 2.6.

Quanto a estratégia de enriquecimento, os nós enriquecidos polinomialmente são pré determinados no início da simulação (adiante será abordada estratégia que automatiza esse processo). Se um elemento à frente da ponta da trinca atingir o dano crítico ( $D_{crit}$ ) ocorre a propagação e a trinca corta o elemento. Logo, os seus nós serão enriquecidos com função Heaviside. É intuitivo notar que, havendo propagação, poderão surgir nós enriquecidos tanto com enriquecimento polinomial quanto descontínuo, conforme detalha a Fig. 2.5(b).

A verificação desta implementação do MEF/S 2D foi feita através de simulações utilizando um problema elástico-linear simples cujo resultado analítico é de fácil obtenção. Depois, foi validada a utilização dessa estratégia numérica combinada com um modelo de dano bilinear ( $C$  e  $C-D$ ) em simulações 2D. As respostas numéricas foram comparadas com resultados experimentais consagrados na literatura tanto para o modo I quanto misto (I+II) de abertura de trincas em estruturas de materiais quasi-frágeis.

## 2.5 - VERIFICAÇÃO MEF/S

Para a verificação da implementação, analisou-se uma viga engastada e livre, submetido à flexão simples, com carregamento distribuído na face livre conforme Condições de Contorno (CC) e geometria apresentadas pela Fig. 2.7. Na Tab. 2.1 encontra-se as dimensões, o carregamento, as CC e as propriedades do material (em unidades consistentes). Em todas as simulações desta tese (neste capítulo e nos demais), as CC de Dirichlet foram impostas pelo Método da Penalidade, escolhido devido sua simplicidade de implementação e generalidade.

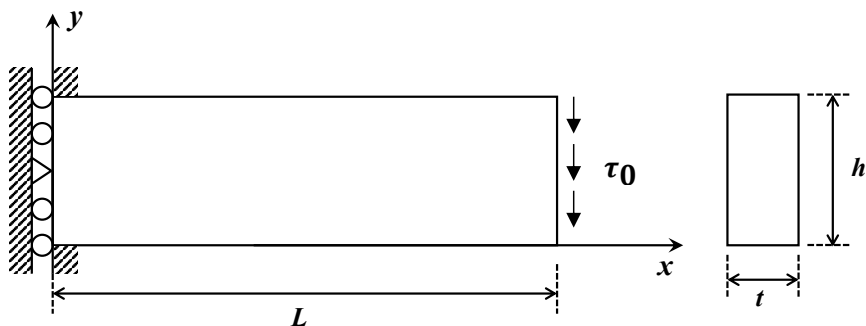


Figura 2.7 – Viga engastada livre - geometria e condições de contorno.

Tabela 2.1 – Viga engastada livre - dados gerais do modelo.

h	t	L	E	$\nu$	$\tau_0$	CC
2	1	10	30 E+06	0,25	150	$u_x(0, y) = u_y(0, h) = 0$

Para avaliar a convergência foi avaliado o deslocamento no ponto de coordenadas  $(10, h/2)$ . Os resultados das simulações foram comparadas com a solução analítica calculada conforme a Eq. 2.24 segundo a teoria de Euler-Bernoulli.

$$u_y(10, \frac{h}{2}) = -\frac{f_y L^3}{3EI} \left[ 1 + \frac{3(1 + \nu)}{L^2} \right] \quad (2.24)$$

onde  $I$  é a inércia da seção transversal. Efetuando-se os cálculos, têm-se que o valor de referência para o deslocamento no ponto determinado é  $u_y(10, 1) = 5,188 \text{ E-03}$ . Foram realizadas cinco simulações utilizando o software comercial Abaqus CAE (empregando malhas regulares com elementos triangulares e diferentes níveis de refinamento) a fim de conferir a confiabilidade da equação bem como para observar o nível de refinamento necessário para alcançar um resultado próximo do analítico. A Tab. 2.2 mostra os resultados dessas análises.

Tabela 2.2 – Resultados de  $u_y = (10, \frac{h}{2})$  obtidos utilizando software comercial.

Malha	nº de elementos	NGL	$u_y(10, \frac{h}{2})$
01	6250	6552	5,133 E-03
02	11022	11424	5,148 E-03
03	250000	25602	5,162 E-03
04	400000	402402	5,181 E-03
05	1600000	1604802	5,189 E-03

O modelo foi discretizado em elementos triangulares todos com espessura constante e constituídos de material homogêneo isotrópico. Foram elaboradas seis malhas (como observado na Fig. 2.8). A análise da convergência foi feita, portanto, com relação ao refinamento de malha. Pra respeitar-se as condições de contorno de Dirichlet, os nós das arestas engastadas não foram enriquecidos em nenhum caso. As integrações numéricas do domínio (em toda a tese) foram realizadas pela regra de Gauss-Legendre mínima.

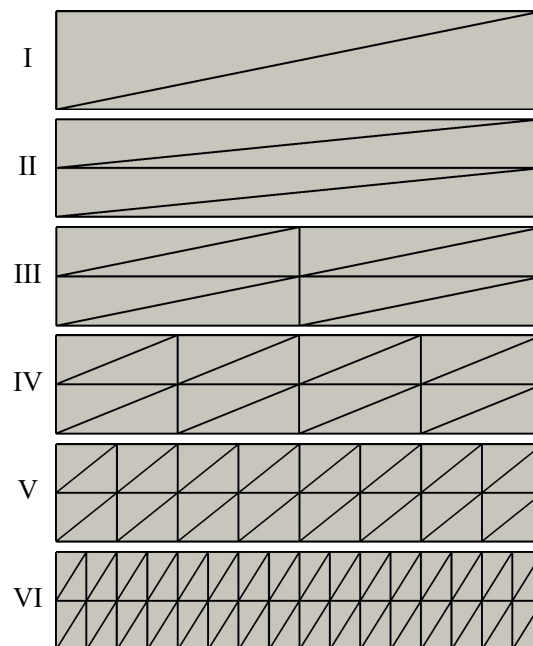


Figura 2.8 – Viga engastada livre - discretização do modelo.

Tabela 2.3 – Resultados de  $u_y = (10, \frac{h}{2})$  e  $e_r$  - estratégia Pol<sup>i</sup>.

		Malha					
		I	II	III	IV	V	VI
n° de Elementos		2	4	8	16	32	64
<i>P0</i>	NGL	8	12	18	30	54	102
	$u_y$	0,0248	0,024	0,0655	0,1611	0,2662	0,3166
	$e_r$ (%)	95,23	95,27	87,37	68,94	48,68	38,98
<i>P2</i>	NGL	16	24	38	78	150	294
	$u_y$	0,0430	0,0393	0,0975	0,2445	0,3541	0,3940
	$e_r$ (%)	91,71	92,42	81,21	52,88	31,74	24,06
<i>P3</i>	NGL	24	36	58	126	246	486
	$u_y$	0,0828	0,0676	0,1921	0,3303	0,4131	0,4393
	$e_r$	84,04	86,96	62,97	36,33	20,37	15,33
<i>P4</i>	NGL	32	48	78	174	342	678
	$u_y$	0,1109	0,0818	0,2084	0,3496	0,4282	0,4520
	$e_r$ (%)	78,63	84,24	59,83	32,61	17,46	12,89
<i>P5</i>	NGL	40	60	98	222	438	870
	$u_y$	0,1485	0,1270	0,2632	0,4265	0,4815	0,4949
	$e_r$ (%)	71,38	75,52	49,26	17,80	7,20	4,61

Foram realizadas simulações sem enriquecimento (aproximação de ordem *P0*) para todas as malhas. Da mesma forma, utilizando o mesmo refinamento de malha, foram feitas simulações com aplicação de enriquecimento polinomial para aproximação local de graus um, dois, três, quatro e cinco (aproximações *P1*, *P2*, *P3*, *P4* e *P5*, respectivamente). A Tab. 2.3 e a Tab. 2.4 apresenta um resumo dos resultados do deslocamento e Erro Relativo ( $e_r$ ) que foram obtidos para as estratégias Pol<sup>i</sup> e Pol<sup>c</sup>, respectivamente.

Tabela 2.4 – Resultados de  $u_y = (10, \frac{h}{2})$  e  $e_r$  - estratégia Pol<sup>c</sup>.

		Malha					
		I	II	III	IV	V	VI
n° de Elementos		2	4	8	16	32	64
<i>P0</i>	NGL	8	12	18	30	54	102
	$u_y$	0,0248	0,024	0,0655	0,1611	0,2662	0,3166
	$e_r$ (%)	95,23	95,27	87,37	68,94	48,68	38,98
<i>P2</i>	NGL	20	30	48	102	198	390
	$u_y$	0,0604	0,0606	0,1766	0,3981	0,48000	0,5024
	$e_r$ (%)	88,36	88,33	65,97	23,26	7,47	3,16
<i>P3</i>	NGL	36	54	88	198	390	774
	$u_y$	0,1322	0,1319	0,2581	0,4311	0,4945	0,5106
	$e_r$	74,52	74,58	50,25	16,91	4,67	1,58
<i>P4</i>	NGL	56	84	138	318	630	1254
	$u_y$	0,1930	0,1864	0,3245	0,4730	0,5082	0,5149
	$e_r$ (%)	62,80	64,07	37,45	8,83	2,05	0,75
<i>P5</i>	NGL	80	120	198	462	918	1830
	$u_y$	0,2524	0,2373	0,3754	0,4909	0,5127	0,5162
	$e_r$ (%)	51,35	54,26	27,63	5,37	1,17	0,50



Os gráficos correspondentes ao  $e_r$  em função do tamanho equivalente do elemento ( $h_{eq}$ ), segundo diferentes refinamentos de malha para cada ordem de enriquecimento. O  $e_r$  foi calculado com relação ao valor do deslocamento na extremidade livre, sendo  $h_{eq} = [(L \text{ da viga}) / (n^\circ \text{ de elementos})]$ .

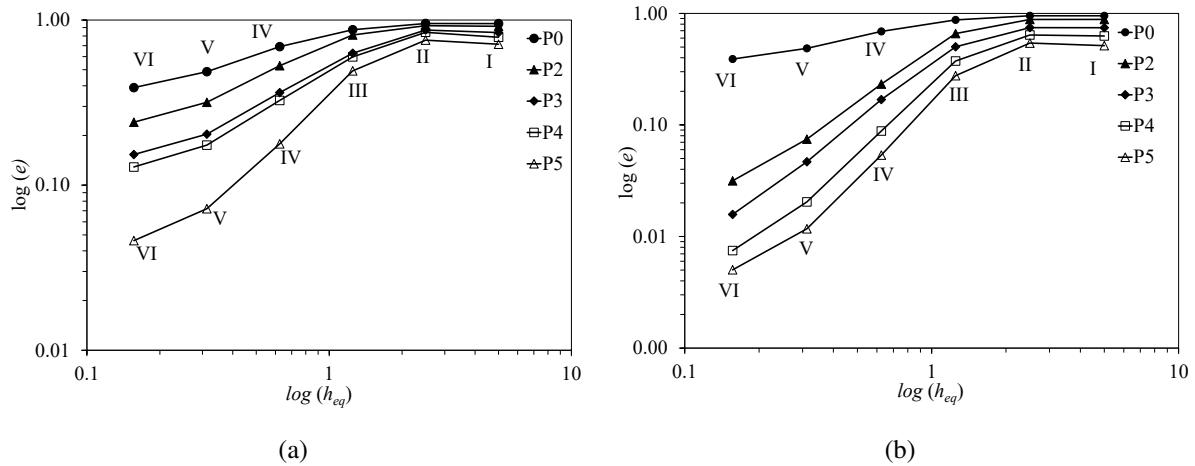


Figura 2.9 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para cada ordem polinomial de enriquecimento: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Observa-se uma redução do  $e_r$ , contudo, com uma convergência mais lenta se comparado aos resultados obtidos por Paiva (2017) utilizando o MEF $G$ . Isso se deve ao fato da ausência do polinômio de primeiro grau no conjunto de funções que compõem o MEF $G$ /S independente do grau polinomial.

Nota-se, ainda, que o  $e_r$  alcança valores menores quando a estratégia  $Pol^c$  é utilizada devido a presença de um maior número de polinômios compondo o conjunto e, portanto, gerando um espaço de refinamento maior. Destaca-se também que a simulação com enriquecimento  $P5$  (com a estratégia  $Pol^c$ ) alcançou o mesmo resultado de  $u_y$  semelhante ao da simulação com a malha 03 utilizando o Abaqus CAE, porém, com quase quinze vezes menos Graus de Liberdade ( $GDL$ ).

## 2.6 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I

Este capítulo dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEF $G$ /S, com modelo de dano bilinear contínuo ( $C$ ) e contínuo-descontínuo ( $C-D$ ) em simulações  $2D$  e ( $C$ ) no caso do  $3D$ . No espaço bidimensional, inicialmente, foram simulados modelos com entalhe geométrico. As respostas encontradas foram comparadas com resultados experimentais ou simulações de modelos semelhantes da literatura. Em seguida foram realizados testes com trinca implícita (não geométrica). Por fim foi analisado o problema utilizando a estratégia ( $C-D$ ). As simulações foram realizadas aplicando o MEF $G$ /S com enriquecimento polinomial (com ambas as estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ ). O modelo experimentado neste caso foi a viga sob flexão em três pontos, ou *Three Point Bending (TPB)*

### 2.6.1 - TPB com modelo de dano contínuo (2D)

Os resultados das simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram comparadas com resultados experimentais de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke e Roesler (2010). A Fig. 2.10 ilustra a geometria utilizada para o esse ensaio.

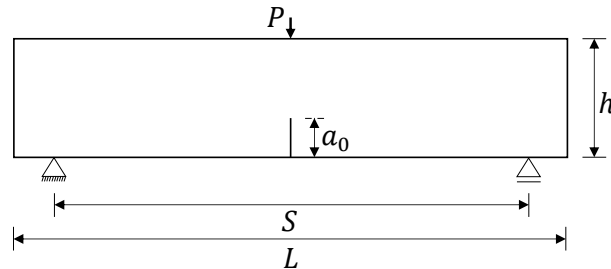


Figura 2.10 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo.

A Tab. 2.5 e a Tab.2.6 apresentam os dados geométricos, os parâmetros de fratura e os relativos ao material, respectivamente. Foi utilizada a deformação equivalente de Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ). O entalhe possui largura igual a 2,0 mm (dois milímetros). As simulações foram feitas com controle de deslocamento.

Tabela 2.5 – Características geométricas do ensaio de flexão em três pontos - (TPB).

$a_0$ (mm)	h (mm)	L (mm)	S (mm)	e (mm)
50	150	700	600	80

Tabela 2.6 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
164,0	56,7	0,25	32000	58,3	4,15	0,20

Foram utilizadas três malhas de elementos finitos (todas com elementos triangulares lineares de três nós), duas com entalhe retangular de dois milímetros (Fig. 2.11(a) e 2.11(b)) e uma com entalhe em formato “V”, ambos com abertura da boca de dois milímetros (Fig. 2.11(c)). Para efeitos comparativos, buscou-se manter a correspondência quanto à quantidade de elementos (quantidade total e sobretudo na região do ligamento – região entre a ponta do entalhe e o ponto de aplicação do deslocamento) entre as duas últimas.

Os nós  $P_n$  indicam onde o grau do enriquecimento polinomial variou, mantendo-se os demais nós constantemente com enriquecimento  $P_1$  (onde  $P_1$  designa enriquecimento polinomial de primeiro grau e assim por diante analogamente) e  $P_0$  indica que o nó não sofreu nenhum tipo de enriquecimento, correspondendo, portanto, ao MEF convencional. Nas malhas da Fig. 2.11(a) e da Fig. 2.11(b) existe um elemento quase acicular cuja aresta da base medindo 2 mm descreve a extremidade do entalhe. Isto não ocorre na malha da Fig. 2.11(c) devido a diferença de geometria do entalhe. A Fig. 2.12 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas

relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento de abertura de boca de trinca, *Crack Mouth Opening Displacement (CMOD)*, quando utilizados  $Pol^i$ .

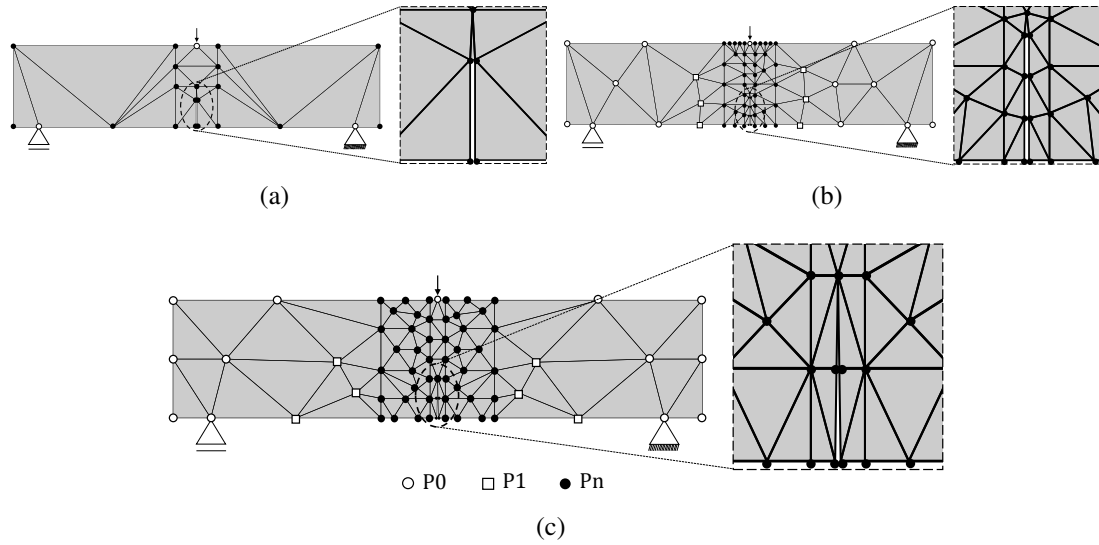


Figura 2.11 – Malhas para ensaio *TPB*: (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos.

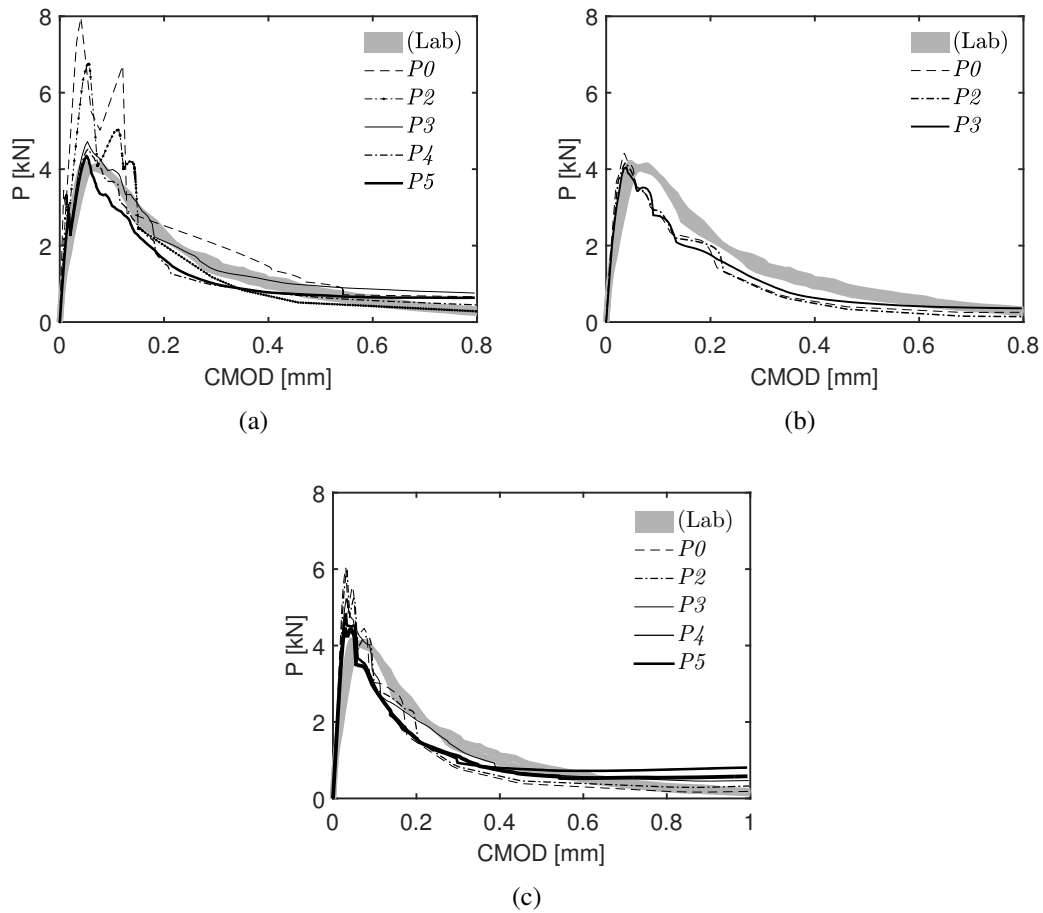


Figura 2.12 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas  $Pol^i$  – malhas com: (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos – entalhe em formato “V”.

Percebe-se que não há qualidade nos resultados sem enriquecimento ( $P0$ ). Em contrapartida, é visível que o enriquecimento contribui para melhorar a qualidade dos resultados. Esse potencial do MEEG/S polinomial se destaca nas simulações com as malhas mais grosseiras, haja vista a boa estimativa da carga máxima resistida ( $P_{max}$ ) pela viga mesmo utilizando pouquíssimos elementos finitos no ensaio. Já a Fig. 2.13 apresenta as curvas  $P$ - $CMOD$  quando utilizados polinômios completos de enriquecimento. Nota-se boa correspondência entre os resultados de ambas as estratégias. É fato que as simulações com polinômios incompletos tendem a ser mais rápidas e com menor custo computacional que suas correspondentes devido o menor número de funções enriquecedoras e graus de liberdade.

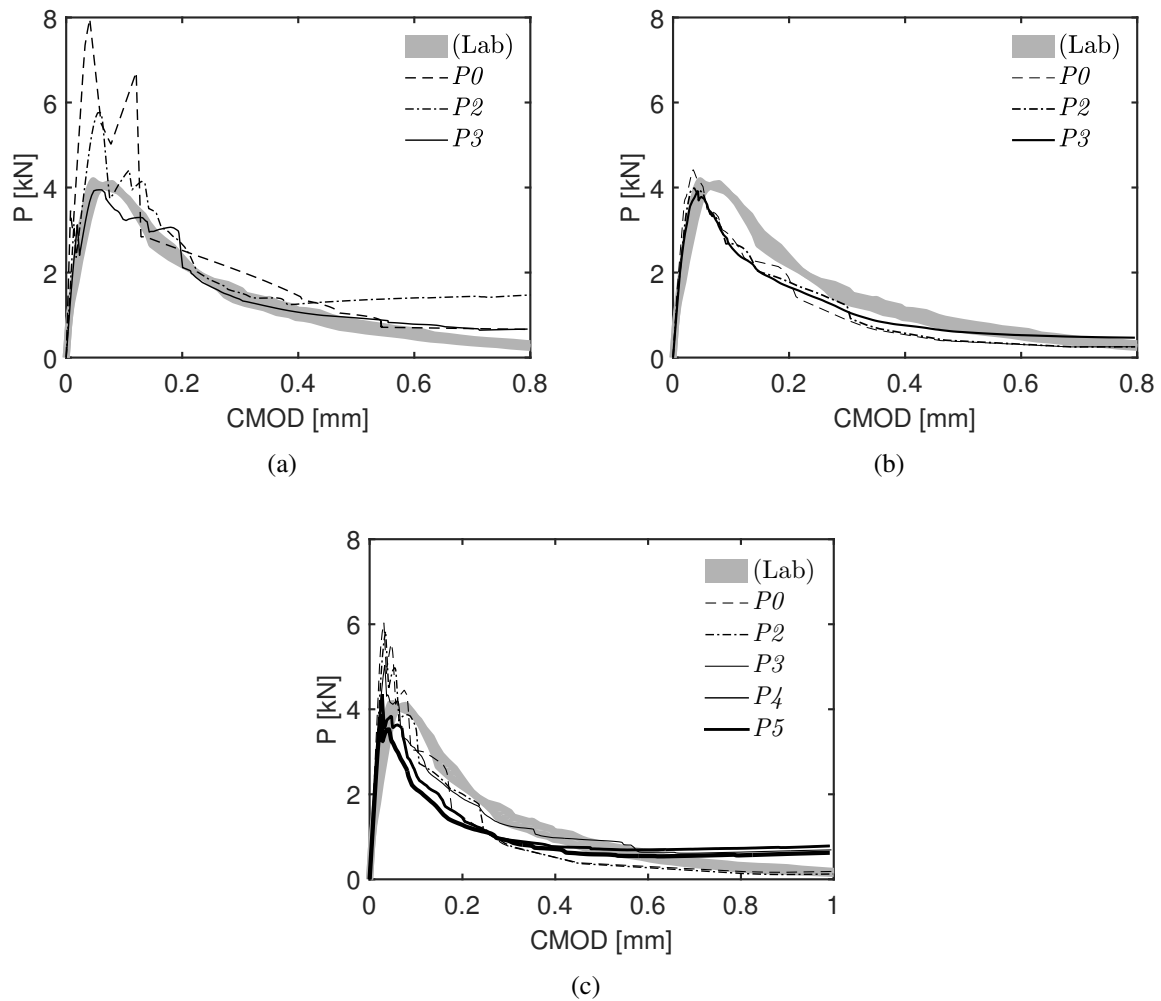


Figura 2.13 – Curvas  $P$  –  $CMOD$  experimentais e numéricas Pol<sup>c</sup> – malhas com: (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos – entalhe em formato “V”.

Observa-se que tanto o ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P$  -  $CMOD$  são melhor representadas conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta em uma mesma malha. Naturalmente, quanto mais refinado o modelo, menor será o grau do polinômio requerido. Para a malha de 25 elementos, por exemplo, foi necessário grau de enriquecimento  $P3$  e para a malha de 106 elementos apenas  $P1$  foi suficiente para a obtenção de resultados próximos do experimental.

Quando é utilizado entalhe em “V” nota-se que as cargas máximas tendem a ser maiores que às apresentadas pelas respectivas simulações com entalhe retangular. Devido à simetria do problema, o nó à frente do provável "caminho do dano" sofre momentânea indefinição quanto ao lado para qual irá se deslocar. Isso contribui para que os valores de  $P_{max}$ , neste caso, sejam relativamente maiores tendo em vista que o modelo de dano depende da deformação equivalente do elemento. Nota-se, ainda, que há objetividade de malha em todos os casos, ou seja, tanto  $P_{max}$  como a região de *softening* atingem convergência (não permanecem diminuindo indefinidamente).

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 2.14 e Fig. 2.15) mostra que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Roesler *et al.* (2007a). Observa-se ainda que ocorre uma melhor descrição nas simulações com enriquecimento de maior grau para uma mesma malha (o dano tende a concentrar-se na linha de fratura).

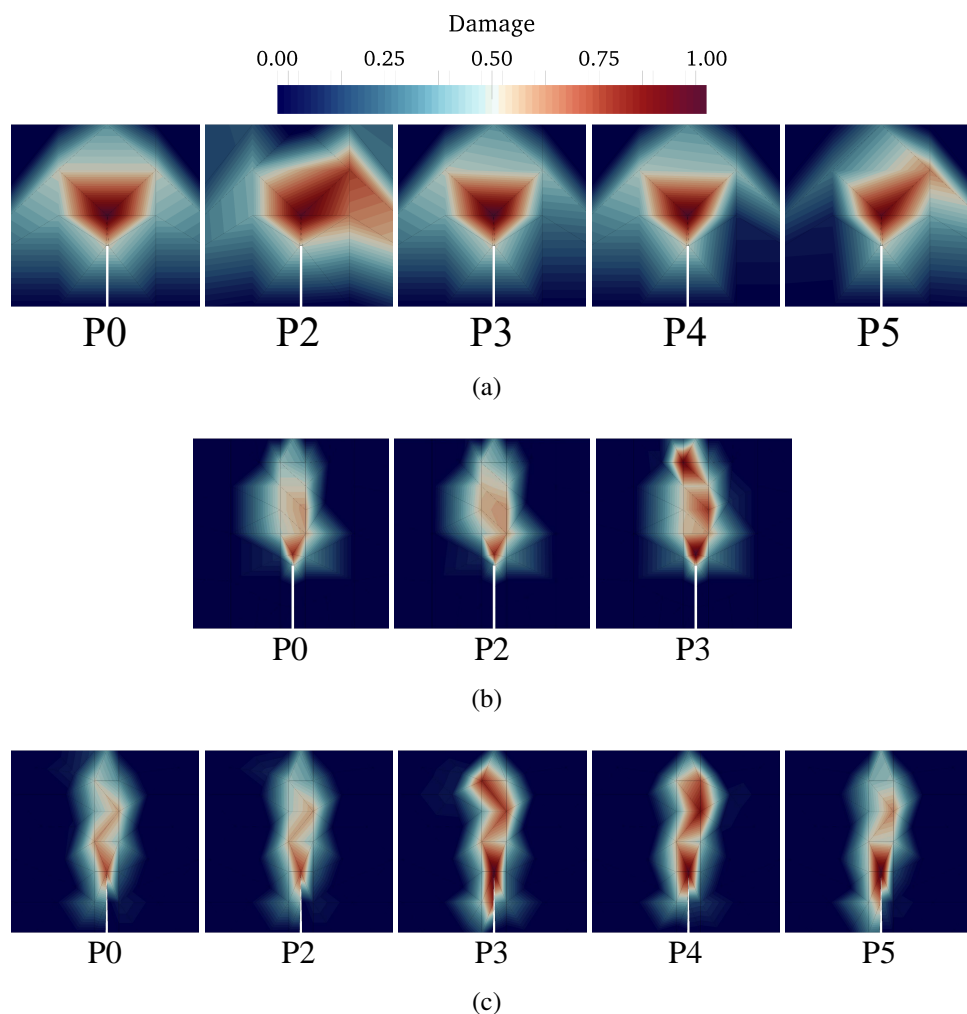


Figura 2.14 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento -  $Pol^i$ : (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos.

Assim como nas curvas  $P - CMOD$  o MEF $G/S$  conseguiu representar bem o problema de fratura em questão tanto nos casos com polinômios incompletos (Fig. 2.14) quanto naqueles com polinômios completos (Fig. 2.15). Neste último caso o mapa de dano apresentou resultado

melhor que o primeiro. Porém pode-se dizer que utilizar a estratégia com polinômios incompletos é um excelente alternativa (menor tempo de processamento e menor custo computacional relativos) haja vista os excelentes resultados apresentados pelas curvas  $P - CMOD$  da Fig. 2.12.

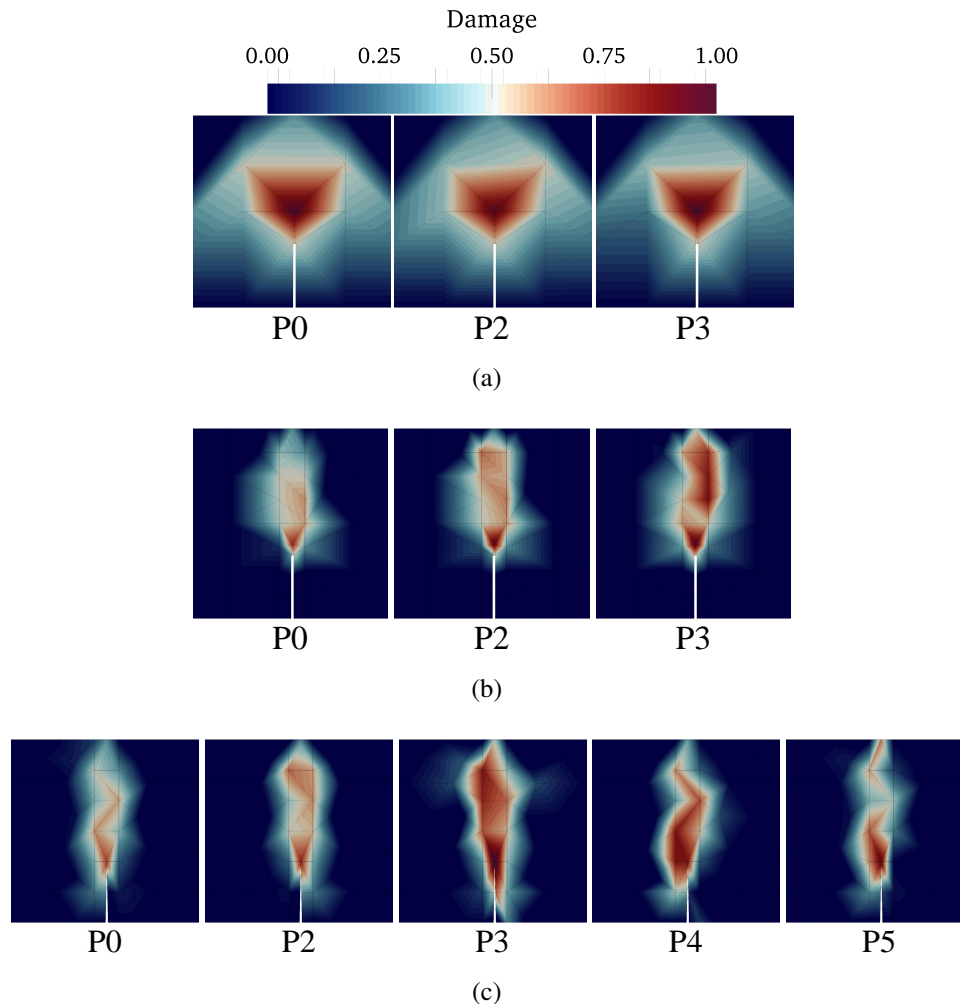


Figura 2.15 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento -  $Pol^c$ : (a) 25 elementos; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos.

A Fig. 2.16 mostra o estudo de convergência para a malha com 25 elementos, comparando-se as simulações P3, com utilização da estratégia MEFG e P3, com MEFG/S (com a utilização dos polinômios completos). Percebe-se que a simulação com enriquecimento MEFG/S, comporta-se de maneira mais instável, apresentando uma quantidade maior de iterações por passo de deslocamento até alcançar a convergência. Isto ocorrer porque o condicionamento da matriz de rigidez do MEFG/S tende a piorar a medida que o grau polinomial do enriquecimento aumenta (como observado em Sato *et al.* (2017) e Ramos (2019)), chegando por vezes a ser pior que o da estratégia MEFG. Isso diminui a velocidade da convergência no passo e pode diminuir a eficiência computacional global do MEFG/S frente ao MEFG.

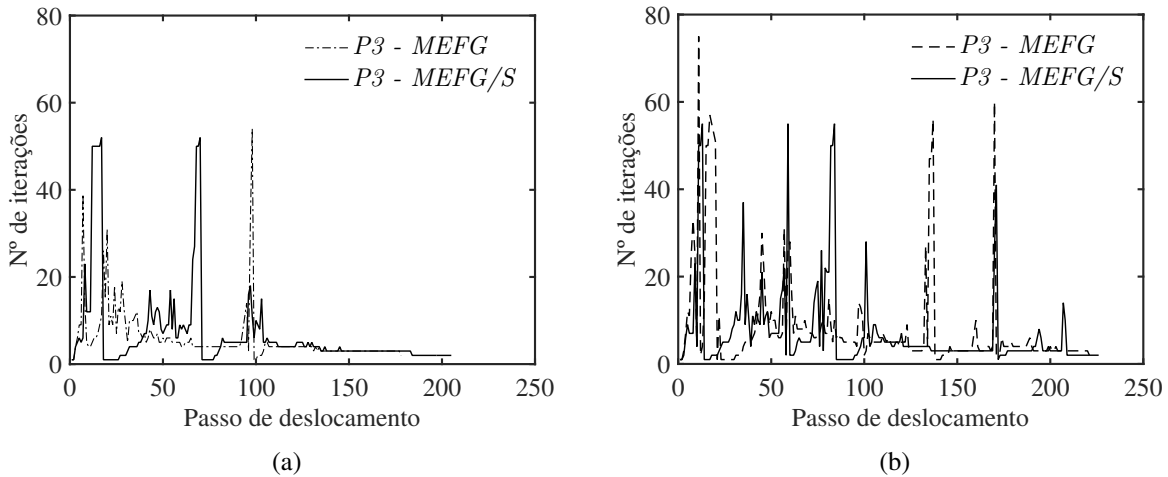


Figura 2.16 – Avaliação da convergência para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação  $P3 - MEFG$  e  $P3 - MEFG/S$ : (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

A Fig. 2.17 e a Fig. 2.18 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações envolvendo a malha de 25 elementos, tanto para a estratégia com polinômios completos como incompletos, sendo  $N^{it}$  o número iterações acumuladas por passo,  $N_p^{norm}$  o número do passo normalizado pelo número total de passos da simulação e  $GDL^{proc}$  o número de graus de liberdade processados na simulação completa. A parte das barras em coloração azul indica a parcela dos  $GDL$ 's associada ao MEF, enquanto a outra em coloração laranja indica a quantidade de  $GDL$ 's associada ao MEFG (ou MEFG/S).

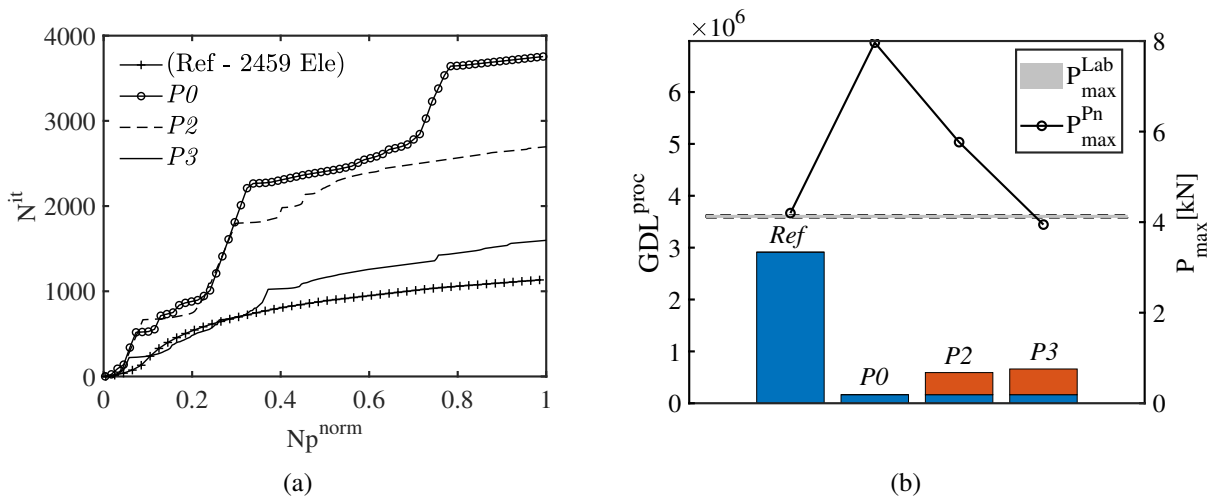


Figura 2.17 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S  $Pol^c$ .

É possível notar na Fig. 2.17(b) e na Fig. 2.18(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  seja maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto (cada função representa um grau de liberdade a mais no nó em cada dimensão do espaço, logo, no  $2D$ , dois graus a mais por nó e no  $3D$ , três).

Pelo mesmo motivo as simulações que utilizam a estratégia *Com-Pol* apresentam um  $GDL^{proc}$  superior (ainda que de maneira sutil) àquelas que utilizam *Inc-Pol*. Contudo, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência com a malha refinada posto que todas apresentaram menor  $GDL^{proc}$ .

Na Fig. 2.17(a) e na Fig. 2.18(a) observa-se que  $N^{it}$  é menor na simulação de referência haja vista ser uma malha refinada e, portanto, apresenta resultados mais fidedignos de campos de tensão e deformação. Logo, a convergência é mais rápida nesse caso. Em contrapartida, a simulação *P0* precisa, de maneira geral, de mais iterações por passo para a convergência. O enriquecimento polinomial mostra sua grande capacidade de melhorar isso. É possível notar que, claramente, as simulações com enriquecimento precisam de menos iterações por passo para convergir (as curvas de *P3* e *P5* por exemplo estão próximas da referência). Isso confirma o potencial do MEF/S de conferir melhor acurácia aos resultados de tensão e deformação apresentados em situações com malhas grosseiras.

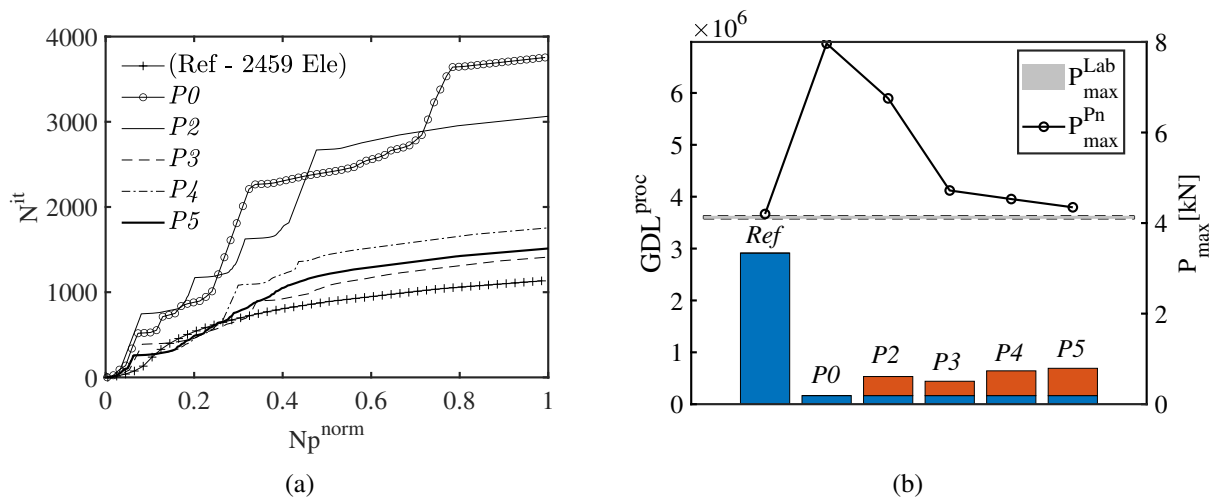


Figura 2.18 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF/S  $Pol^i$ .

A Fig. 2.19(a) e a Fig. 2.20(a) mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações envolvendo a malha de 101 elementos, tanto para a estratégia com polinômios completos como incompletos. Observa-se o mesmo comportamento visto na malha de 25 elementos. Porém, nota-se que as simulações apresentam um  $GDL^{tot}$  bem superior ao apresentado pelas suas respectivas com conjunto incompleto.

Na Fig. 2.19(a) e na Fig. 2.20(a) observa-se que  $N^{it}$  é menor na simulação *P0*, sendo inferior mesmo frente à referência haja vista ser uma malha com mais elementos na região da fratura em comparação com a malha do experimento anterior.



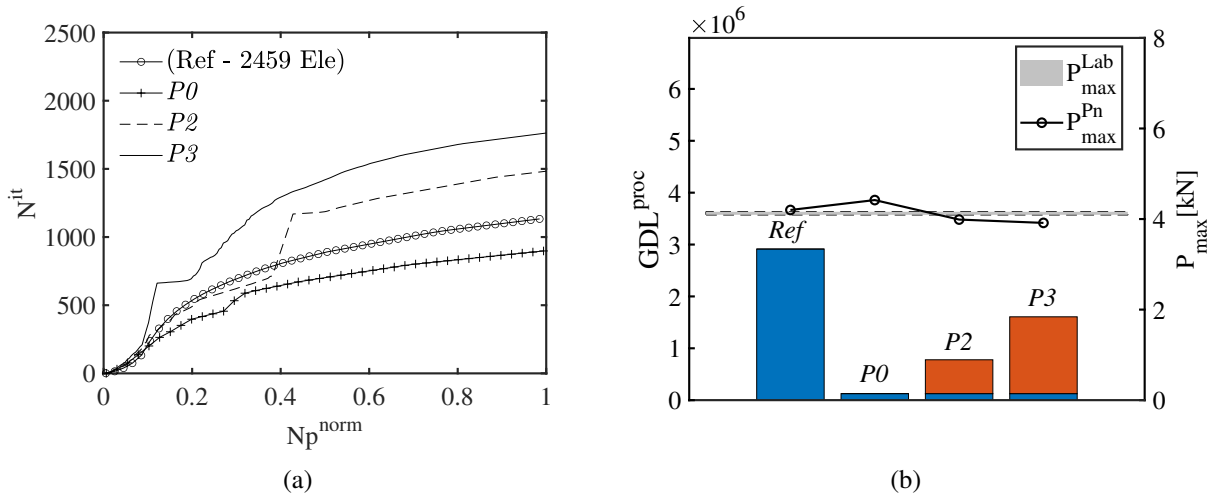


Figura 2.19 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S Pol<sup>c</sup>.

Portanto, apresenta resultados mais fidedignos de campos de tensão e deformação. Logo, a convergência é mais rápida nesse caso. Nota-se que, de modo geral, as simulações utilizando a estratégia com polinômios incompletos apresentam  $N^{it}$  maior em comparação com os respectivos nos casos com conjunto completo. Isso pode ter relação com instabilidades geradas nas matriz de rigidez devido a inexistência dos termos cruzados no conjunto de funções polinomiais. Mais estudos sobre isso precisam ser realizados.

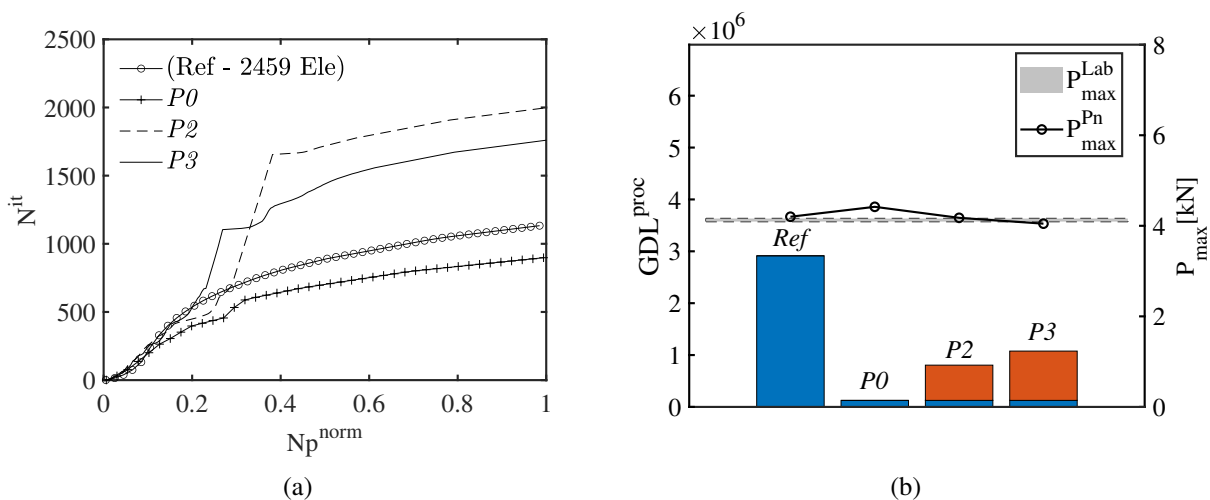


Figura 2.20 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S Pol<sup>i</sup>.

As Figs. 2.21 e 2.22 avalia a eficiência computacional, comparando-se uma simulação de referência com 2459 elementos e as simulações P3 para a malha com 25 elementos, utilizando a estratégia MEFG e MEFG/S, com Pol<sup>c</sup> (Fig. 2.22) e Pol<sup>i</sup> (Fig. 2.22).

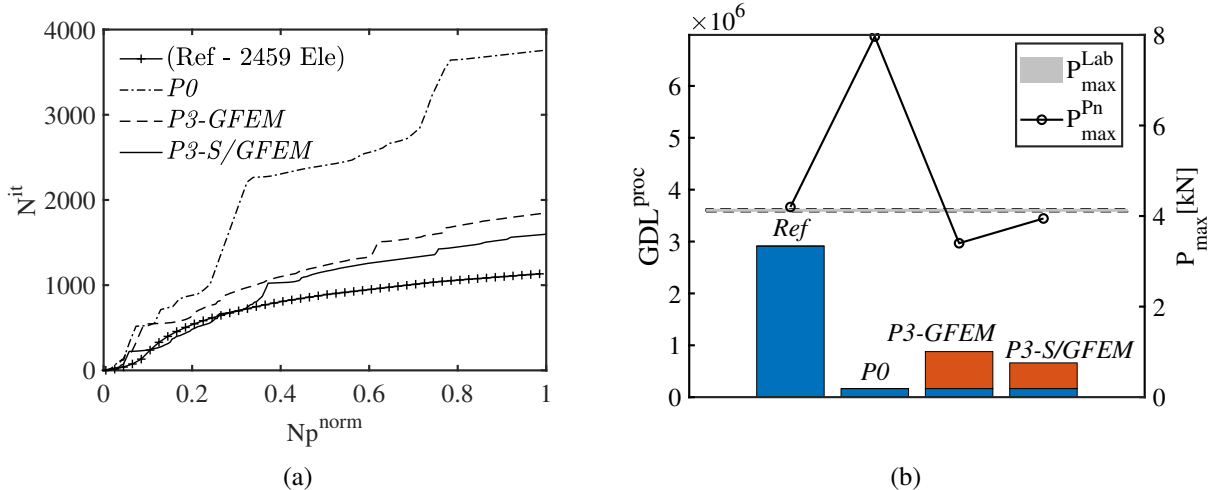


Figura 2.21 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência,  $P_3$  - MEFG e  $P_3$  - MEFG/S: com polinômios de enriquecimento completos.

Observa-se que a simulação de referência, portanto, está completamente azul haja vista ter sido realizada utilizando somente MEF convencional. Percebe-se que o MEFG/S foi mais eficiente que todas as estratégias, incluindo a referência com malha mais refinada.

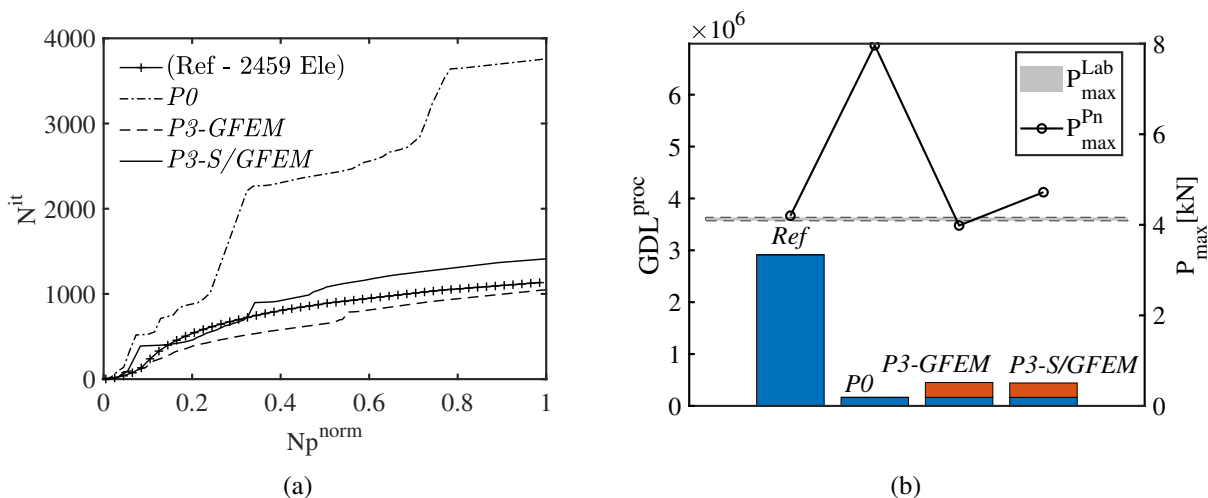


Figura 2.22 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência,  $P_3$  - MEFG e  $P_3$  - MEFG/S: com polinômios de enriquecimento incompletos.

## 2.6.2 - TPB com modelo de dano contínuo-descontínuo (2D)

### 2.6.2.1 - Simulação com entalhe implícito - sem propagação

Nesta subseção serão apresentados os resultados referente às simulações com entalhe implícito em substituição ao geométrico. A trinca é, portanto, inserida no modelo a partir de suas

coordenadas. Para tanto, elaborou-se uma malha com 27 elementos conforme a Fig. 2.23 que apresenta, além disso, a estratégia de enriquecimento adotada. Destaca-se que os elementos cortados pela trinca são aqueles escurecidos, cujos nós são enriquecidos com função descontínua. O  $CMOD$  foi medido com base nos dois nós inferiores dos elementos escurecidos.

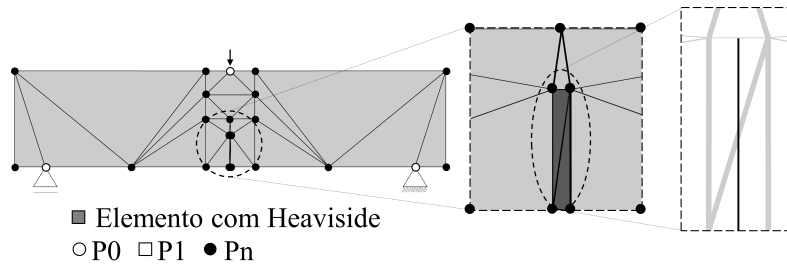


Figura 2.23 – Malhas de elementos finitos para  $TPB$  - 27 elementos.

A Fig. 2.24 e a Fig. 2.25 apresentam, respectivamente, as curvas  $P-CMOD$  para as situações em que foram utilizados os polinômios de enriquecimento incompletos e completos, respectivamente. Observa-se que o MEF/S apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental. Nota-se, ainda, boa correspondência entre os resultados apresentados na Fig. 2.24 e na Fig. 2.25 com as curvas apresentadas por Paiva *et al.* (2016) e Paiva (2017) onde fora adotado estratégia similar de inclusão da descontinuidade.

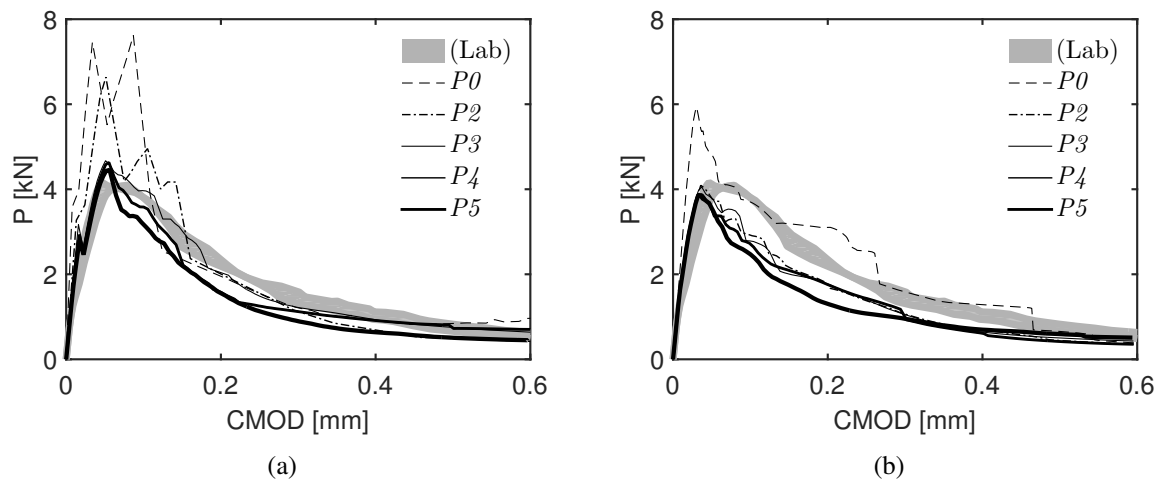


Figura 2.24 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas:  $Pol^i$  – (a) Malha com 27 elementos; (b) malha com 107.

Nestes casos, percebe-se que nos nós enriquecidos atuam simultaneamente o enriquecimento de base polinomial (conforme Eq. (5.2)) e o de natureza descontínua. O bom comportamento das curvas indica que o acoplamento desses dois tipos de funções atua muito bem. Tanto a utilização dos polinômios incompletos quanto completos mostrou-se eficiente, diante da boa aproximação entre o  $P_{max}$  experimental e os numéricos em ambos os casos. Nos primeiros,  $P_{max}$  tende a ser levemente maior, haja vista o menor número de funções de enriquecimento, porém, o *softening*

apresenta maior suavidade. Uma explicação plausível é o menor número de termos espúrios gerados na matriz de rigidez devido a quantidade de polinômios de enriquecimento ser reduzida.

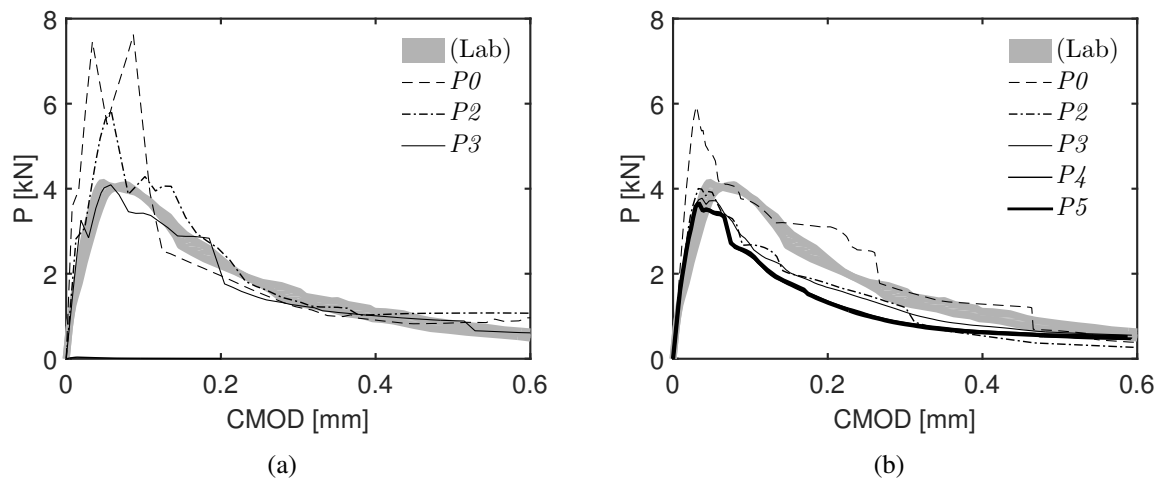


Figura 2.25 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas:  $Pol^c$  – (a) Malha com 27 elementos; (b) malha com 107.

Outra observação importante diz respeito à distribuição de dano na zona de fratura. Para ambas as situações, com polinômios de enriquecimento incompletos (Fig. 2.26) ou completos (Fig. 2.27), os resultados foram satisfatórios.

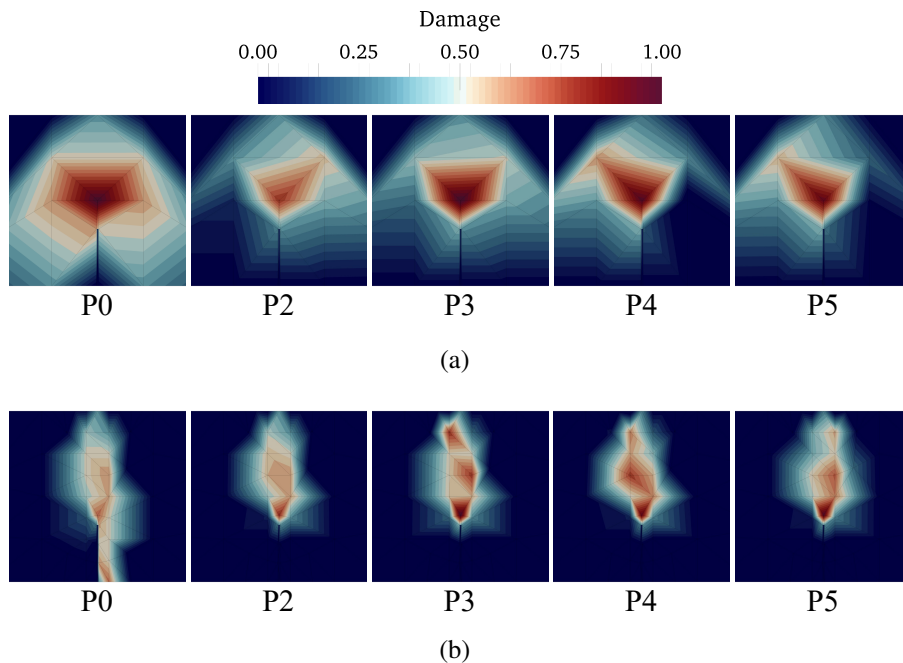


Figura 2.26 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento -  $Pol^i$ : (a) 27 elementos; (b) 107 elementos.

Observa-se a tendência da concentração do dano próximo à região da trinca. É nítido que o dano é muito disperso nas simulações  $P0$ , especialmente na simulação com malha mais grosseira. A

medida que o grau do enriquecimento aplicado aumenta, a evolução da danificação apresenta panorama mais adequado.

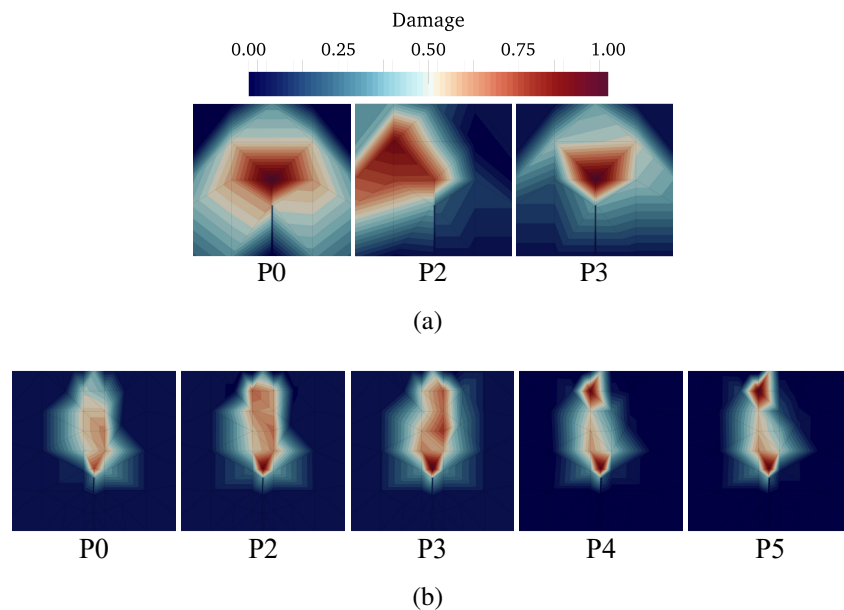


Figura 2.27 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - Pol<sup>c</sup>: (a) 27 elementos; (b) 107 elementos.

É importante ressaltar que, nesta sessão, a propagação da trinca não foi ativada, posto que objetivo desta sessão foi somente avaliar se a utilização das duas estratégias (polinomial e Heaviside) acopladas seria capaz de proporcionar correta abertura na zona da trinca, bem como apresentar curvas *P-CMOD* e distribuição de dano compatíveis com o comportamento observado em laboratório.

#### 2.6.2.2 - Simulação com entalhe explícito - com propagação

Nesta subseção serão apresentados os resultados referente às simulações com propagação de trinca. Foi empregada a malha com 101 elementos da Fig. 2.11(b). A diferença deste caso para o das simulações da Sec. 2.6.1 é a introdução do ponto de iniciação de falha conforme a Fig. 2.28 abaixo:

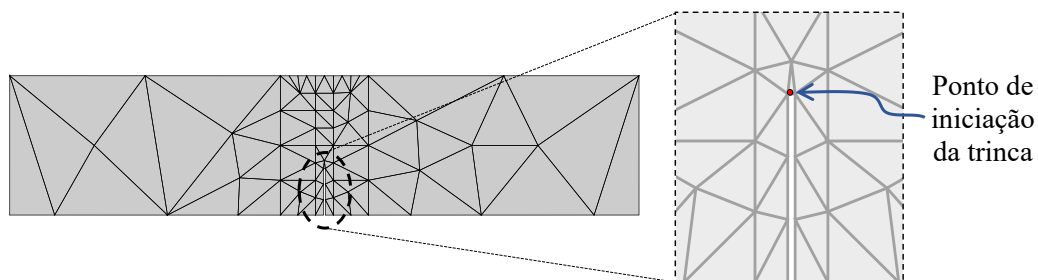


Figura 2.28 – Ponto de iniciação de trinca - *TPB*.

A Fig. 2.29 mostra as curvas *P-CMOD* para esta situação. Observa-se que a simulação sem

enriquecimento apresenta um resultado com enrijecimento que não corresponde à realidade. Esse problema é suavizado quando utilizado o enriquecimento polinomial. Nota-se ainda mudanças bruscas no *softening* do gráfico. Isso ocorre devido à propagação da trinca em elementos muito grandes, deste modo, uma grande quantidade de energia é dissipada de uma única vez. Contudo, observa-se que o  $P_{max}$  numérico apresenta boa correspondência com o experimental.

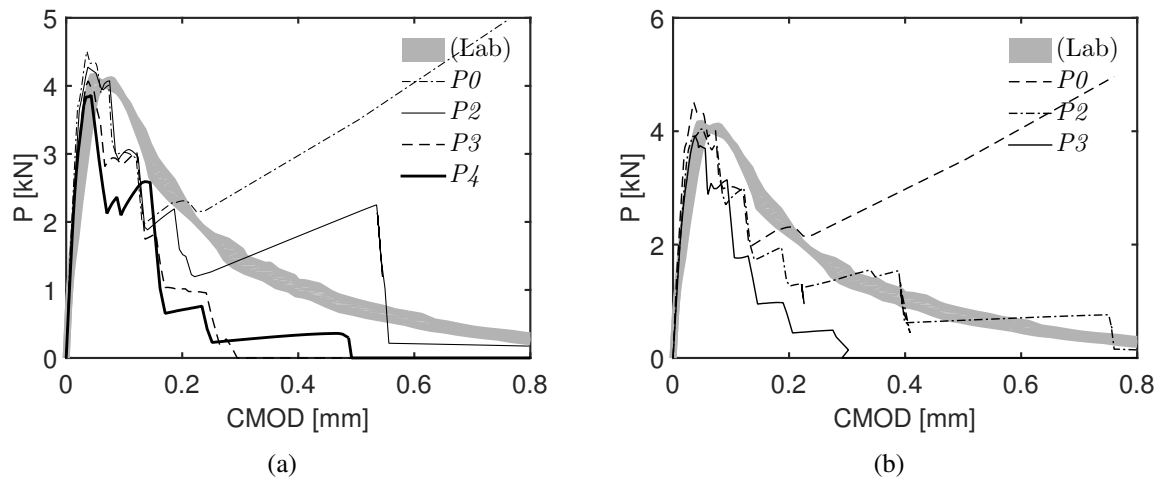


Figura 2.29 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

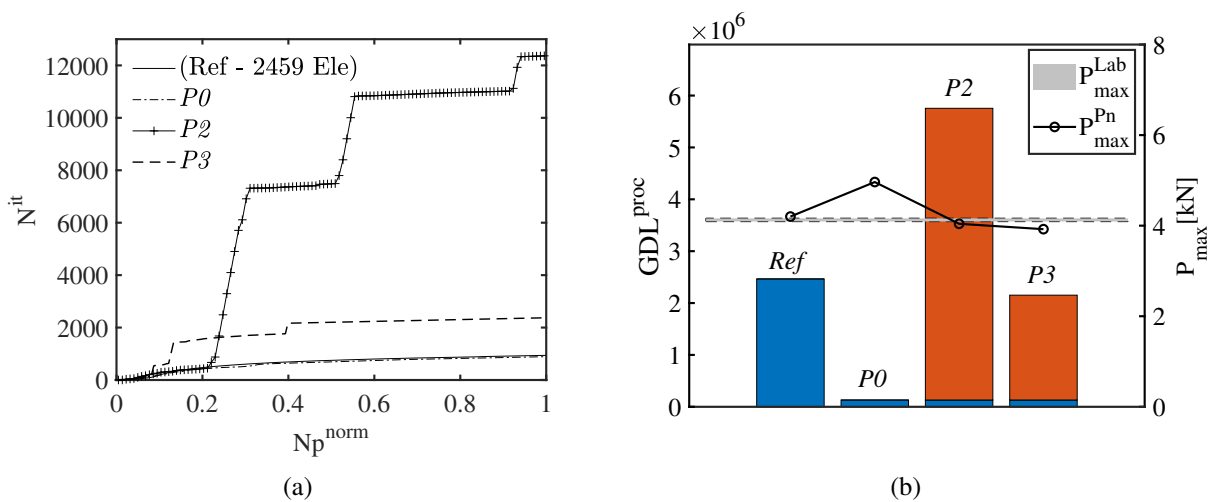


Figura 2.30 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S  $Pol^c$ .

A Fig. 2.30 e a Fig. 2.31 apresentam a avaliação da eficiência computacional quanto ao  $N^{it}$  normalizado. Não foi observado comportamento semelhante aos dos gráficos das Figs. 2.17, 2.18, 2.19 e 2.20. Esse efeito ocorre devido a propagação da trinca que, quando segue uma direção em desacordo com o resultado físico esperado, gera um sistema de equações cuja convergência se torna mais difícil (ver Fig. 2.33). Desta forma, mais iterações são necessárias para o sistema alcançar convergência.

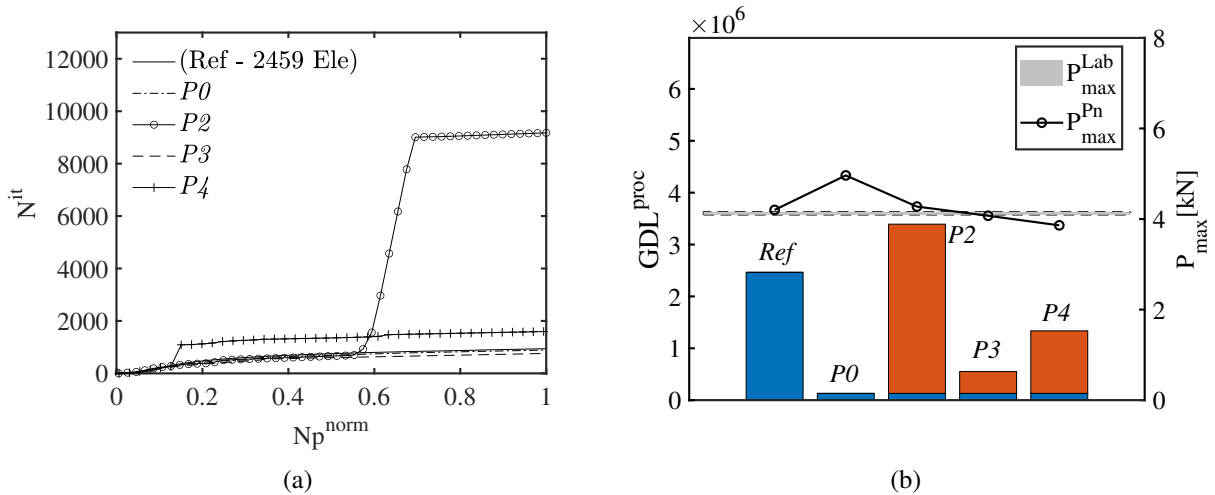


Figura 2.31 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S Pol<sup>i</sup>.

A Fig. 2.32 apresenta a fratura (quando ocorre) em função dos graus de enriquecimento polinomial aplicados. Observa-se que na simulação  $P_0$  a propagação não condiz com o experimental. Isso se deve ao fato de que o  $D_{crit}$  é alcançado em uma banda incorreta devido os campos de tensão e deformação serem imprecisos tendo em vista a malha ser grosseira. Nos demais casos, porém, nota-se que a propagação seguiu uma direção mais coerente, fato que ocorre devido à melhor descrição do campo de tensão-deformação nas áreas enriquecidas.

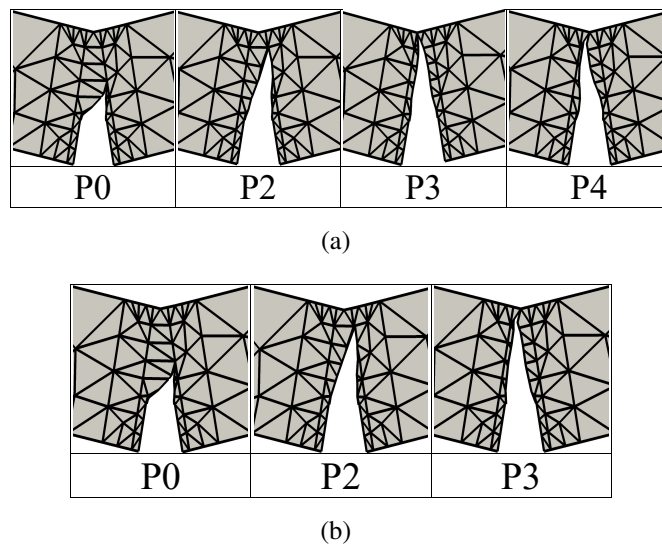


Figura 2.32 – Propagação da fratura em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a) Pol<sup>i</sup>; (b) Pol<sup>c</sup>.

Na Fig. 2.33 nota-se boa correspondência entre o resultados desta pesquisa com os dados da referência (uma malha refinada com 2459 elementos). Observa-se que, de maneira geral, quanto maior o grau polinomial, mais os resultados de propagação se aproximam da referência.

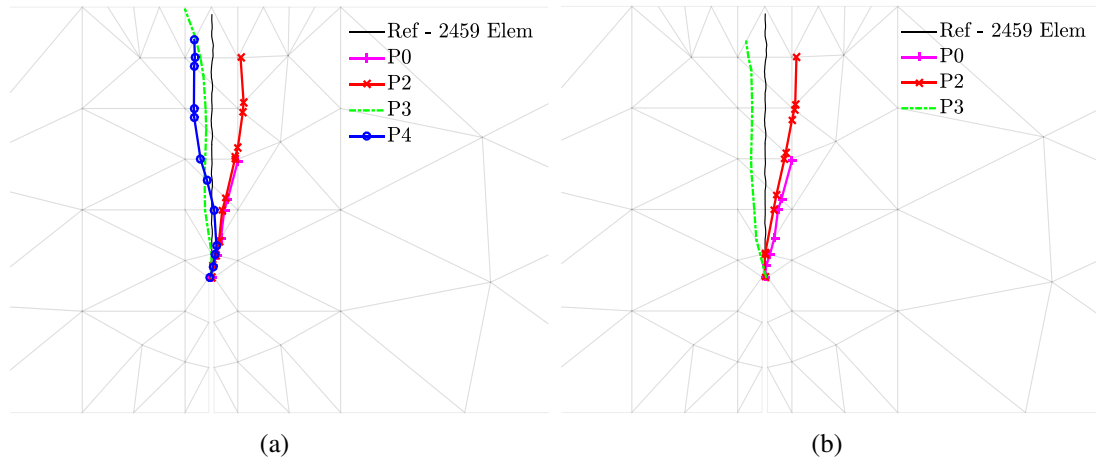


Figura 2.33 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEF/S: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

A fim de avaliar a qualidade dos resultados  $P-CMOD$  de cada curva, foi estabelecida a medida  $d_r$  para representar a relação entre as medidas  $d_i$  calculadas em seis regiões diferente da curva, sendo  $d_i$  a diferença entre o valor da carga  $P$  da curva analisada e o valor de  $P$  da curva experimental, calculado conforme a seguinte equação:

$$d_r = \left[ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 d_i^2 \right]^{1/2} \quad (2.25)$$

onde  $d_i = P_i^{Lab} - P_i^{Pn}$ , sendo  $P_i^{Lab}$  a carga experimental (medida em seu limite inferior) e  $P_i^{Pn}$  a carga numérica observadas para um mesmo valor no eixo das abscissa. Como referência, calculou-se  $d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf}$ , sendo  $P_i^{Lab,Sup}$  e  $P_i^{Lab,Inf}$  os valores de  $P_i^{Lab}$  medidos no limite superior e inferior, respectivamente. Os menores valores de  $d_r$  indicam as curvas com maior concordância e proximidade em relação aos dados laboratoriais. Logo, menor  $d_r$  significa resultado com maior acurácia. A Fig. 2.34 mostra onde cada valor de  $d_i$  é medido, sendo  $a = 0.15L$ .

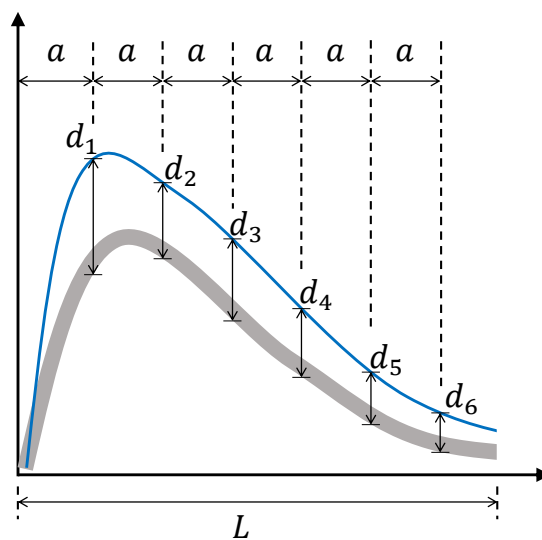


Figura 2.34 – Points to evaluate  $d_i$ .



Tab. 2.7 apresenta os valores calculados de  $d_r$ . É possível notar que conforme o grau do polinômio aumenta, as curvas tendem a ficar mais de acordo com o experimental e o valor de  $d_r$  tende a convergir para a referência. Porém, quando a ordem do enriquecimento ultrapassa  $P3$ , observa-se uma piora e o valor de  $d_r$  passa a divergir da referência (embora o valor de  $P_{max}$  torne-se mais adequado). Isso ocorre devido à concentração excessiva de tensões em uma região muito grande (levando à concentração de danos nessas áreas). Na estratégia C-D o número de pontos de Gauss utilizados para que a simulação possa convergir (quanto maior o grau polinomial, maior o número de pontos) influencia tanto a direção da trinca como o processo de propagação. É necessária mais análise sobre esses aspectos. Ainda assim, fica destacada a qualidade da técnica, tendo em vista que todos os resultados de  $d_r$  das simulações com MEF/S foram melhores que suas respectivas  $P0$ .

Tabela 2.7 – Valores de  $d_r$  (kN).

Degree	25 elements		101 elements			
	(C) strategy		(C) strategy		(C-D) strategy	
	Pol <sup>i</sup>	Pol <sup>c</sup>	Pol <sup>i</sup>	Pol <sup>c</sup>	Pol <sup>i</sup>	Pol <sup>c</sup>
$P0$	1.314	1.314	0.534	0.534	2.667	2.667
$P2$	0.431	0.704	0.522	0.424	0.696	0.391
$P3$	0.283	0.227	0.405	0.490	0.680	1.025
$P4$	0.333	-	-	-	0.779	-
$P5$	0.373	-	-	-	-	-

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 0.146$$

## 2.7 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO

Esta seção dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEF/S no tocante à melhora da previsão do comportamento de ruptura em modo misto de fratura. O ensaio realizado foi a viga sob cisalhamento em quatro pontos com entalhe central, ou *Four Point Shear - Single Edge Notch (FPS-SEN)*. Os ensaios numéricos foram realizados através do controle de deslocamento.

### 2.7.1 - Viga FPS-SEN com modelo de dano contínuo - 2D

Os resultados das simulações numéricas da FPS-SEN para materiais cimentícios convencionais foram comparadas com resultados experimentais extraídos do trabalho de Schlangen (1993). A Fig. 2.35 ilustra a geometria utilizada para este ensaio de cisalhamento. Os dados geométricos, os parâmetros de fratura e os relativos ao material são especificados pela Tab. 2.8. As condições de contorno são constituídas por um apoio de segundo gênero na parte direita inferior da viga e por outra de primeiro gênero na parte inferior central restringindo o movimento vertical. As placas de carga apresentam largura igual a 20 mm e centros localizados conforme a Fig. 2.35.

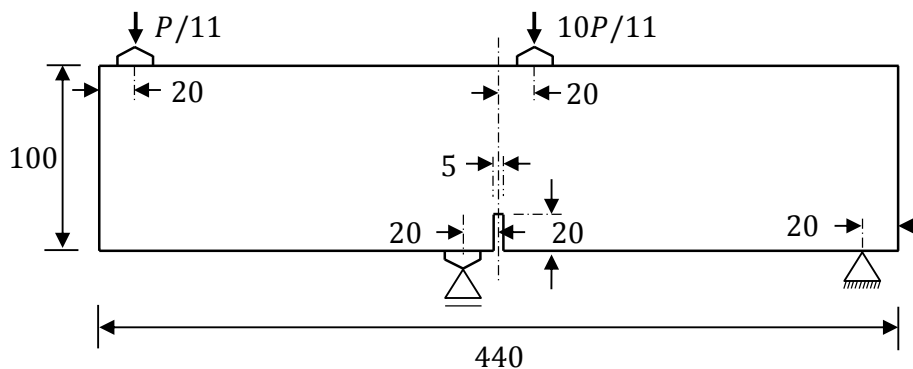


Figura 2.35 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 100 mm (todas as dimensões em mm).

Os parâmetros de material foram obtidos de Schlangen (1993) e os de fratura de Wells e Sluys (2001). Devido se tratar de uma situação de modo misto de fratura foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ). As simulações foram feitas com controle de deslocamento.

Tabela 2.8 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio *FPS-SEN*

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material		
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
100,0	34,0	0,25	35000	3,0	0,20

Para as simulações numéricas utilizou-se uma malha de elementos finitos exposta em detalhes pela Fig. 2.36. Os nós  $P_n$  indicam onde houve aplicação e, naturalmente, variação do grau do enriquecimento em cada simulação.

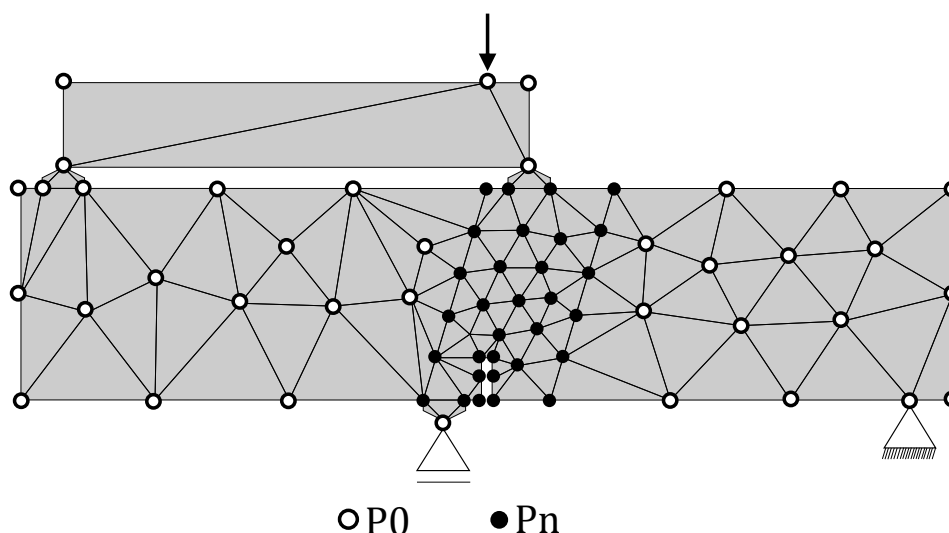


Figura 2.36 – Malha de elementos finitos para FPS-SEN - 106 elementos.

A Fig. 2.37 apresenta os resultados das curvas que relacionam força ( $P$ ) e deslocamento deslizando da boca da trinca, *Crack Mouth Sliding Displacement (CMSD)*.

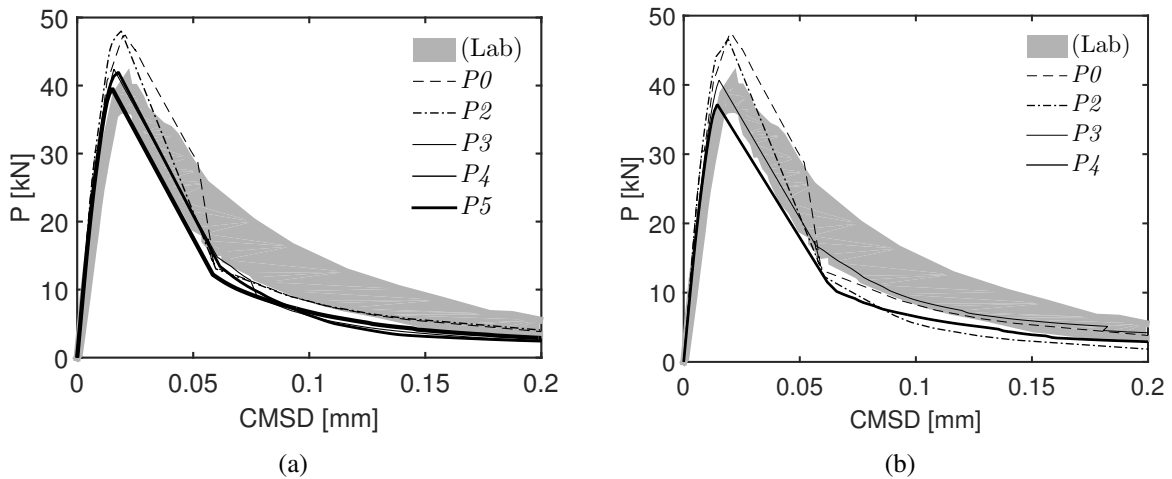


Figura 2.37 – Curvas  $P$ - $CMOD$  experimentais e numéricas - malha com 106 elementos: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

O MEF/S com enriquecimento polinomial mostrou capacidade de conferir maior qualidade aos resultados que, inicialmente, apresentaram-se ruins devido à combinação de dois fatores: a dificuldade natural de simular situações de modo misto e a utilização de uma malha extremamente grosseira para tal.

Observa-se que tanto o  $P_{max}$  quanto a região de *softening* da curva  $P$ - $CMOD$  aproximam-se mais do resultado experimental à medida que o grau de enriquecimento aumenta, basta comparar a simulação com  $P2$  e aquela com  $P5$ , por exemplo.

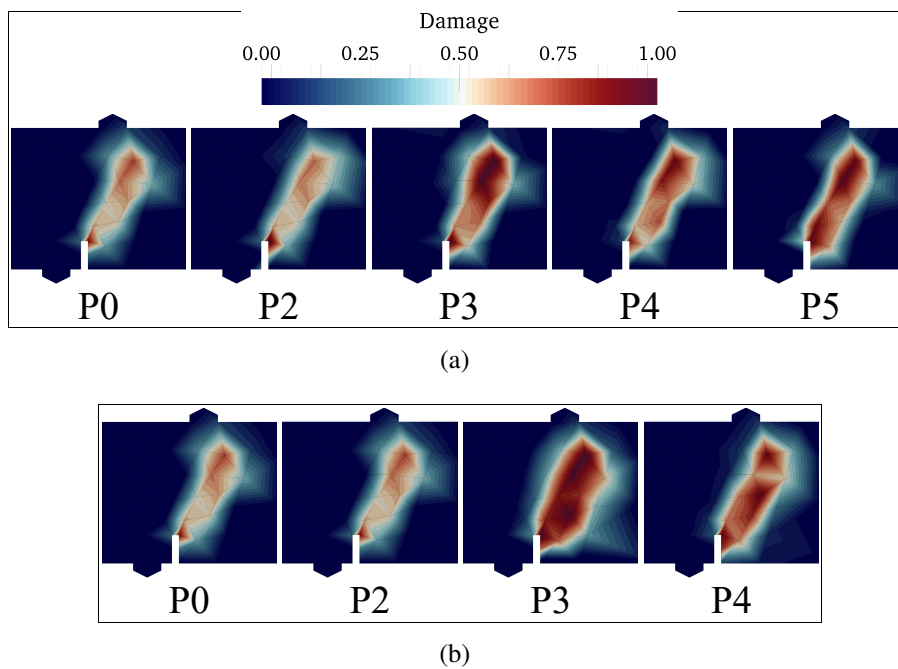


Figura 2.38 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 2.38) observa-se que a danificação apresentou comportamento compatível com o resultado experimental apresentado por Schlangen (1993), demonstrando uma melhor conformidade a medida que o grau do enriquecimento fora aumentado, tornando-se menos disperso. Além disso, nota-se que tanto com a utilização de  $Pol^i$  (Fig. 2.38(a)) quanto  $Pol^c$  (Fig. 2.38(b)) o mapeamento do dano foi satisfatório.

Quando se sobrepõem o resultado da simulação numérica com enriquecimento  $P5-Pol^i$  bem como enriquecimento  $P4-Pol^c$ , com o mapa de propagação de trinca das vigas ensaiadas por Schlangen (1993) nota-se que há uma boa concordância entre o mapa de dano e o resultado real.

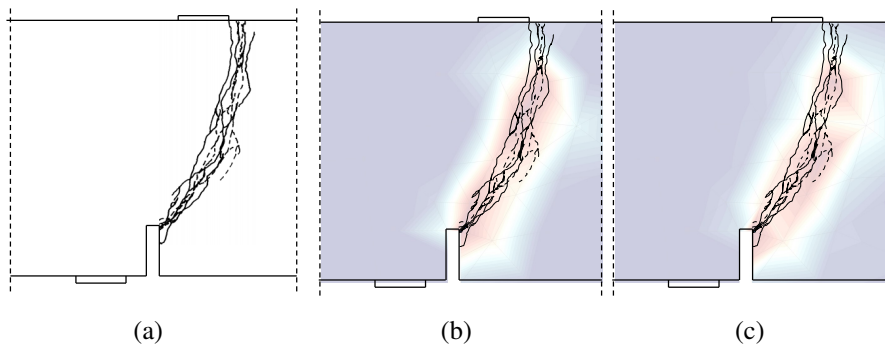


Figura 2.39 – (a) Propagação de trinca experimental (adaptado de Schlangen, 1993); (b) sobreposição experimental -  $P5-Pol^i$ ; (c) sobreposição experimental -  $P4-Pol^c$ .

Na Fig. 2.40 e na Fig. 2.41 observa-se que  $N^{it}$  é menor na simulação  $P0$ . Logo, a convergência é mais rápida nesse caso. Contudo, como fora mostrado anteriormente, a simulação  $P0$  não apresenta resultados satisfatórios nos campos de tensão-deformação, o que prejudica também a boa representação do dano e conseqüentemente da propagação da trinca. Portanto, é preciso equilíbrio para buscar resultados de qualidade com eficiência computacional.

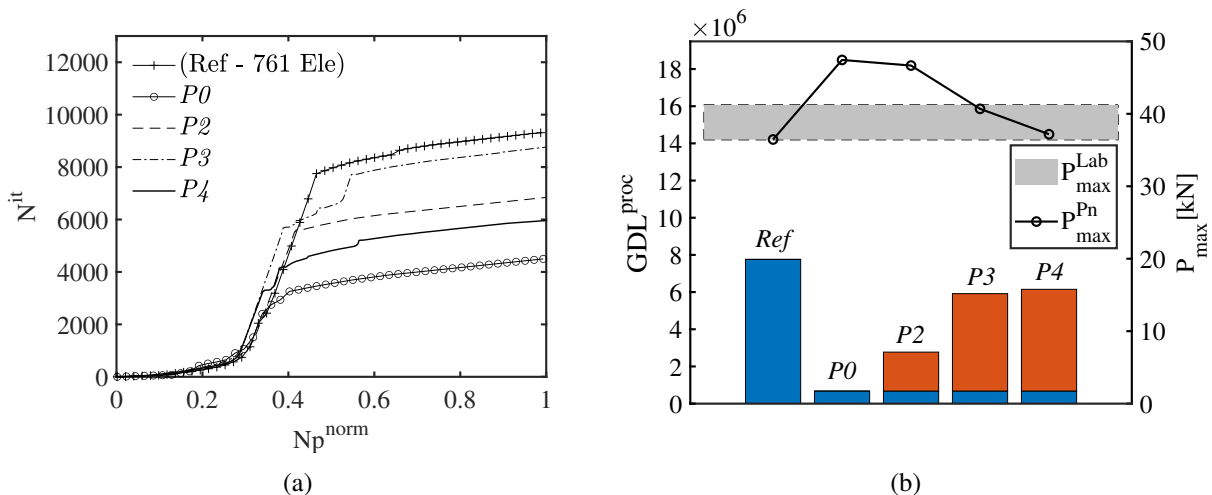


Figura 2.40 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S com estratégia  $Pol^c$ .

Nota-se que, de modo geral, as simulações utilizando a estratégia  $Pol^i$  apresentam  $N^{it}$  maior em comparação com os respectivos nos casos com  $Pol^c$ . Isso pode ter relação com instabilidades geradas na matriz de rigidez devido a inexistência dos termos cruzados no conjunto de funções polinomiais, conforme observado anteriormente.

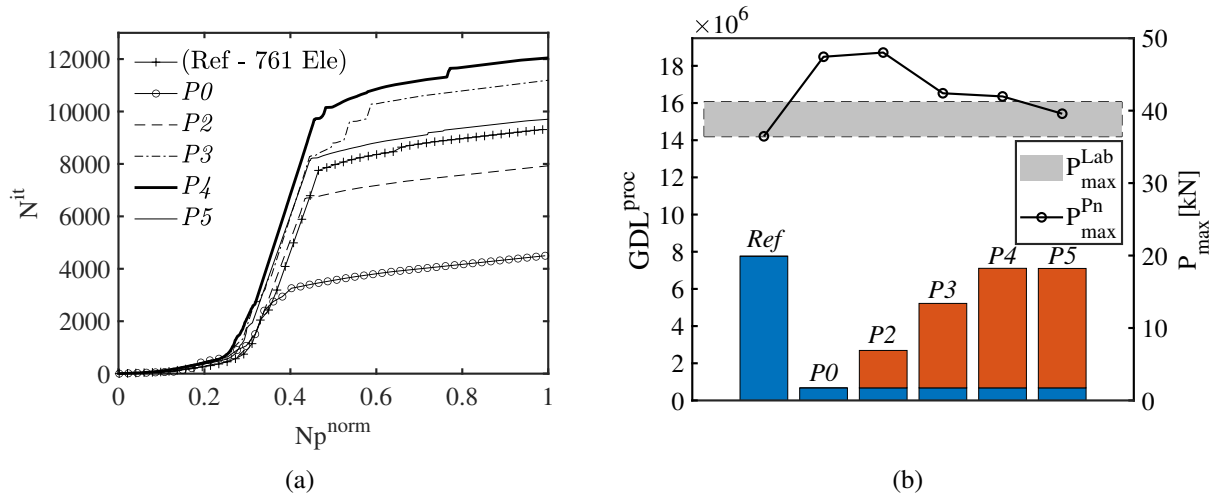


Figura 2.41 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S com estratégia  $Pol^i$ .

Na Fig. 2.41 nota-se que as simulações apresentam um  $GDL^{tot}$  superior ao apresentado pelas suas respectivas com conjunto completo. Relevante observar que em todas as situações, independente do grau polinomial do enriquecimento, o  $GDL^{tot}$  foi menor que a referência.

### 2.7.2 - Viga FPS-SEN com modelo de dano contínuo-descontínuo - 2D

Nesta sessão serão apresentados os resultados referentes às simulações do modelo FPS-SEN da Fig. 2.36 utilizando o MEFG/S descontínuo. Para tanto foi introduzido um ponto de iniciação de trinca, conforme a Fig. 2.42, considerando os resultados apresentados por Schlangen (1993). A finalidade desta sessão é a análise da atuação dos enriquecimentos acoplados (polinomial + descontínuo), bem como das vantagens e desvantagens da estratégia.

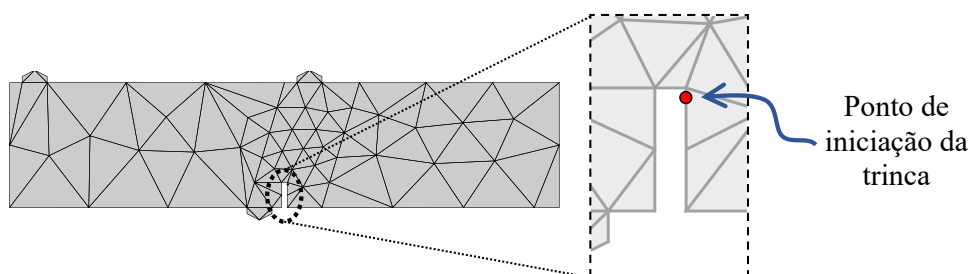


Figura 2.42 – Ponto de iniciação de trinca - FPS-SEN.

Primeiramente foi realizada uma simulação com uma malha mais refinada de referência,

conforme a Fig. 2.43 com 3447 elementos triangulares. A Fig. 2.44 mostra a curva  $P - CMSD$  bem como o mapa de propagação de trinca referentes a esse modelo.

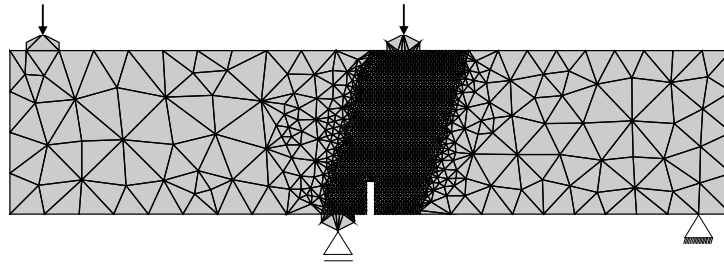


Figura 2.43 – Malha de referência - 3447 elementos.

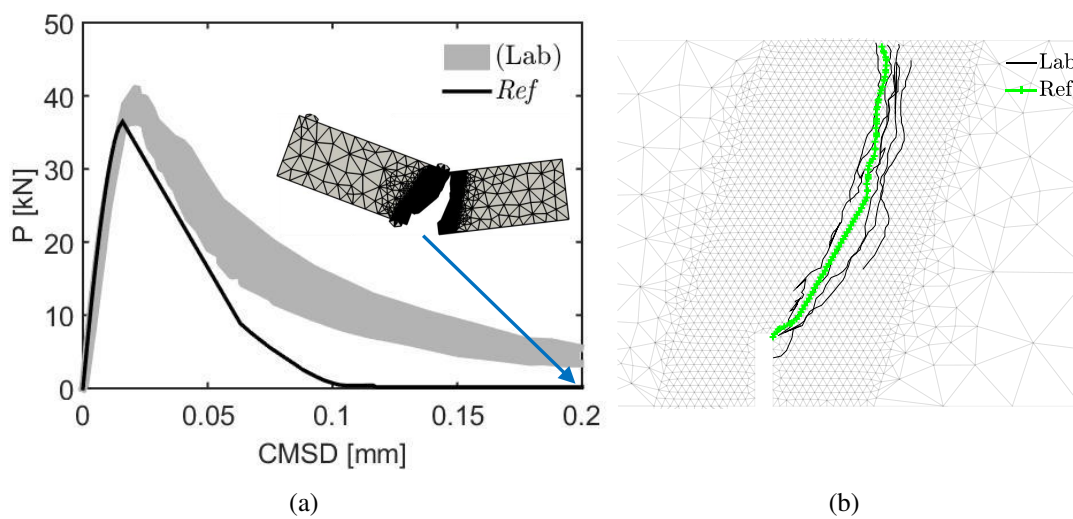


Figura 2.44 – Resultados experimentais e numéricos para malha de referência com 3447 elementos e modelo de dano contínuo-descontínuo: (a) Curvas  $P - CMSD$ ; (b) Sobreposição entre padrão de trincamento experimental e numérico.

A Fig. 2.45 mostra as curvas  $P-CMSD$  para ambas as situações (com estratégia  $Pol^i$  e  $Pol^c$ ). Observa-se que os resultados apresentam boa concordância com os dados experimentais, bem como correspondência com as curvas da Fig. 2.37.

Nota-se ainda que as mudanças de derivada das curvas são mais abruptas que aquelas apresentadas pelas curvas da Fig. 2.37. Isto se deve ao fato dos elementos cortados serem muito grandes. Esta fato é confirmado pela curva referente à  $P2$  na Fig. 2.45(a) que apresenta amolecimento mais conformado ao dado experimental justamente pelo fato de não ter ocorrido propagação da trinca neste caso. A utilização do enriquecimento singular na ponta da trinca pode ser utilizada como alternativa para suavizar o *softening*, devido esta estratégia utilizar funções próprias dos problemas de fratura e singularidade.

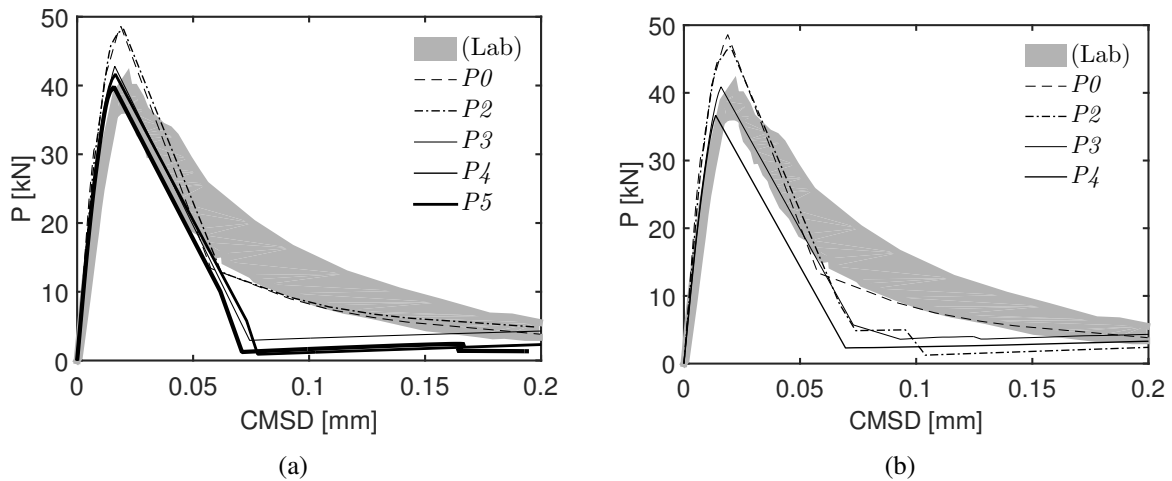


Figura 2.45 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas - malha com 106 elementos e modelo de dano (C-D): (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Na Fig. 2.46 apresenta a fratura (quando ocorre) em função dos graus de enriquecimento polinomial aplicados. Observa-se que na simulação  $P0$  não ocorre propagação. Isso se deve ao fato de não ser atingido o  $D_{crit}$  necessário. O mesmo ocorre na simulação  $P2$  com  $Pol^i$ . Nos demais casos, porém, nota-se que houve propagação, fato que ocorre devido à melhor descrição do campo de tensão-deformação nas áreas enriquecidas. Portanto, a representação do dano torna-se mais apropriada.

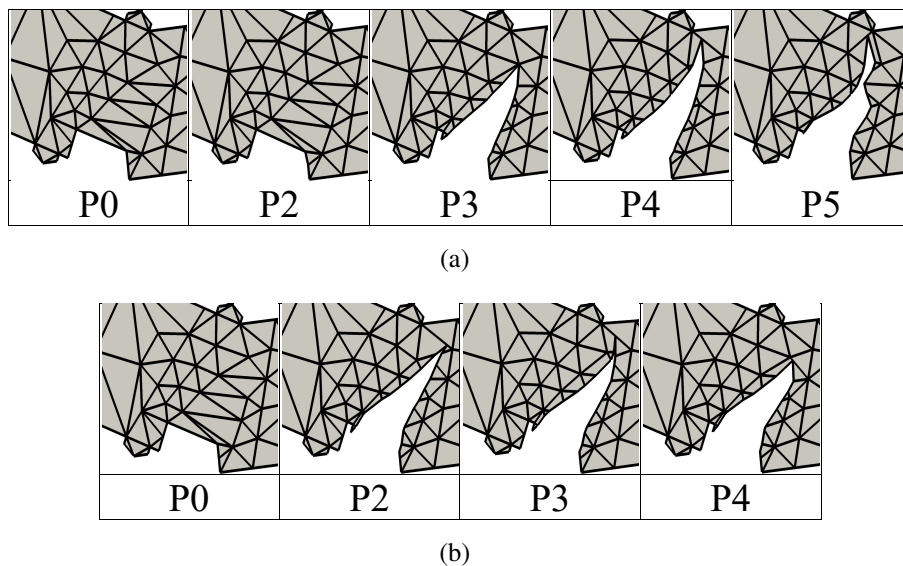


Figura 2.46 – Propagação da fratura em função dos graus de enriquecimento polinomial - (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Quando se compara o caminho da trinca dos diversos casos mostrados na Fig. 2.47 com os padrões experimentais apresentados por Schlangen (1993), nota-se boa correspondência entre o resultados desta pesquisa com os dados dos referidos autores.

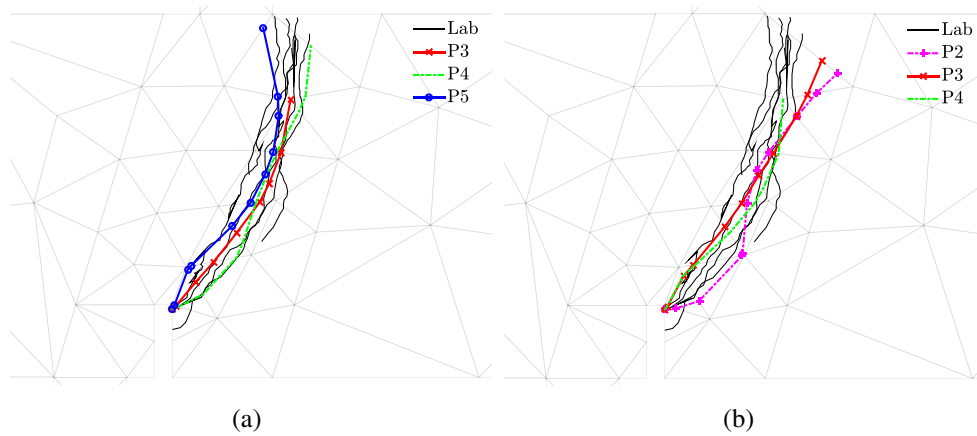


Figura 2.47 – Sobreposição entre padrão de trincamento experimental e numérico: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

É patente que o MEF/S atuou de maneira efetiva na obtenção de resultados conformados aos dados experimentais, tanto com relação ao  $P_{max}$ , quanto no tocante ao caminho da trinca, ambos melhor representados a medida que o grau do enriquecimento polinomial foi aumentado. Constata-se ainda que as funções polinomiais e descontínuas do MEF/S podem perfeitamente atuar acopladas.

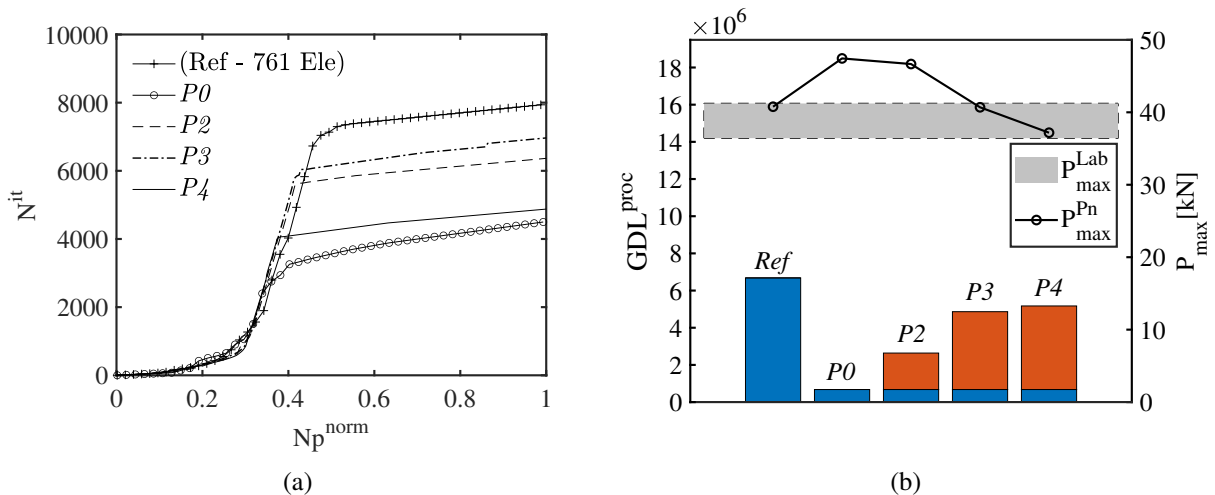


Figura 2.48 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF/S com  $Pol^c$ .

Na Fig. 2.48 e na Fig. 2.49 observa-se que  $N^{it}$  é menor na simulação  $P0$ , contudo, ela não apresenta resultados adequados de tensão-deformação, dano e propagação da trinca. Portanto, conforme dito anteriormente, é preciso equilíbrio para buscar resultados de qualidade com eficiência computacional. Nota-se que, de modo geral, as simulações utilizando a estratégia  $Pol^i$  apresentam  $N^{it}$  maior em comparação com os respectivos nos casos com  $Pol^c$ . Isso pode ter relação com instabilidades geradas nas matriz de rigidez devido a inexistência dos termos cruzados no conjunto de funções polinomiais conforme observado anteriormente.



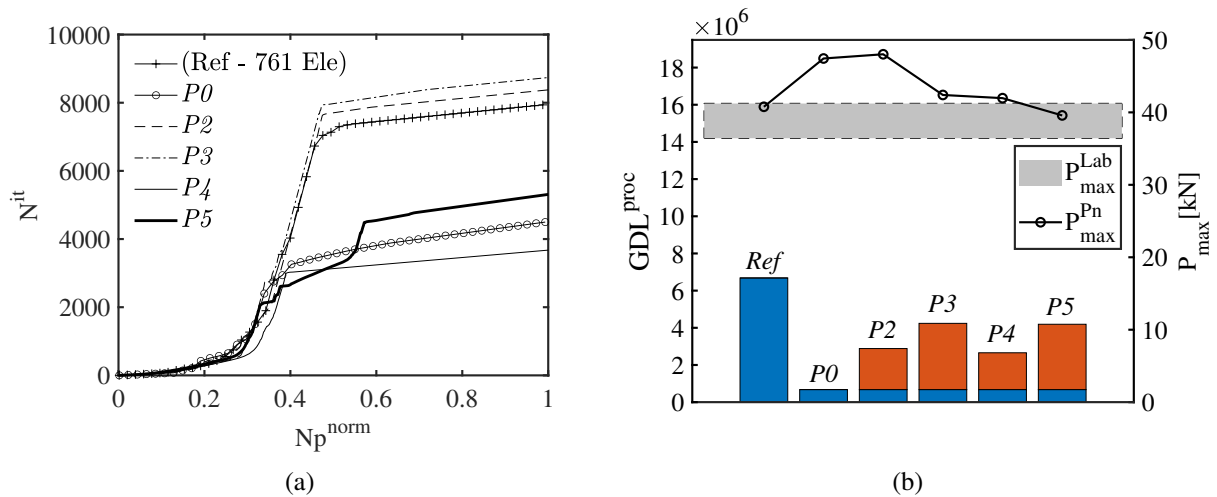


Figura 2.49 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 106 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S com estratégia  $Pol^i$ .

Observa-se, ainda, que as simulações com  $P4$  apresentaram a menor  $N^{it}$ , chegando mesmo a ser mais eficiente nesse aspecto que a simulação sem enriquecimento, na situação com  $Pol^i$  (Fig. 2.49(a)). Esse resultado, somado ao fato de proporcionar uma boa resposta  $P$ - $CMSD$  coloca a estratégia utilizando  $P4$  em destaque. O fato de proporcionar um bom caminho de propagação da trinca (concordante com o resultado físico real) contribui para melhorar a convergência nos processos iterativos que resolvem o problema não linear. Destaca-se, de forma geral, a eficiência do MEFG/S que, em todos os casos, proporcionou simulações com menor  $GDL^{tot}$  que a referência.

A Tab. 2.9 apresenta os valores calculados de  $d_r$  para as curvas  $P$ - $CMSD$ . É possível notar que conforme o grau do polinômio aumenta, as curvas tendem a ficar mais de acordo com o experimental e o valor de  $d_r$  tende a convergir para valores cada vez menores. Porém, quando a ordem do enriquecimento ultrapassa  $P3$ , observa-se uma inflexão e o valor de  $d_r$  passa a aumentar (embora o valor de  $P_{max}$  torne-se mais adequado). Isso provavelmente se deve à concentração excessiva de tensões em uma região muito grande. Isso se torna mais evidente na estratégia (C-D), onde o número de pontos de Gauss usados influencia a direção da trinca e o processo de propagação. Ainda assim, o fato de todos os valores de  $d_r$  das simulações com MEFG/S serem menores que a própria referência evidencia a qualidade da abordagem.

Tabela 2.9 – Valores de  $d_r$  (kN)

Degree	(C) strategy		(C-D) strategy	
	$Pol^i$	$Pol^c$	$Pol^i$	$Pol^c$
$P0$	4.385	4.385	4.398	4.398
$P2$	3.189	3.401	3.600	4.494
$P3$	1.941	0.958	3.419	3.075
$P4$	1.947	2.065	4.605	4.912
$P5$	1.946	-	4.549	-

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 5.794$$

## 2.8 - CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados os resultados de simulações utilizando o MEFG/S como metodologia de resolução do sistema. Toda a implementação foi realizada no programa *LACHESIS* desenvolvido pelo grupo de pesquisa *NEXUM* em C++. É possível afirmar, frente ao exposto, que a implementação foi feita de maneira eficiente e correta. Além disso, notou-se, o grande potencial do MEFG/S para resolver PVC diversos, garantindo amplo espaço para crescimento e desenvolvimento desta linha de pesquisa.

Foram apresentadas situações de modo I e misto de fratura, com modelo de dano contínuo bem como contínuo-descontínuo e, em todas elas, o MEFG/S cumpriu satisfatoriamente o objetivo de garantir boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento, mesmo utilizando malhas grosseiras nas simulações.

O MEFG/S apresentou enorme capacidade em melhorar a qualidade da aproximação final, com a utilização racional de funções de enriquecimento, em malhas grosseiras, aliando características como modelagem flexível, convergência e eficiência computacional. A aplicação da estratégia descontínua garantiu enorme versatilidade aos ensaios, devido eliminar a necessidade da utilização de elementos especiais ou mesmo de remalhamento (como ocorre em outras estratégias). A combinação das estratégias do MEFG/S polinomial e/ou descontínuo, combinadas ao modelo de dano, mostrou-se bastante eficiente para prever a distribuição do dano e a evolução da trinca em estruturas sob processo de falha.

Observou-se que houve redução na velocidade da convergência das iterações, dentro de cada passo de carga, conforme fora aumentado o grau da função polinomial de enriquecimento. Para tentar solucionar este problema, foram implementadas as ditas funções *flat-top*. Isso será tratado no capítulo 3.

Como sugestão para trabalhos futuros propõe-se realizar simulações com enriquecimento polinomial do MEFG/S utilizando leis coesivas para controlar o processo de propagação de trincas. Propõe-se também a implementação de uma estrutura de dados que permita a simulação de multi trincamentos e de coalescência.

### 3 - MEFG/S DE ALTA ORDEM E DANO - FUNÇÕES *FLAT-TOP*

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

O MEFG apresenta excelentes propriedades de aproximação mas seu condicionamento pode ser pior mesmo que ao do MEF Aragón *et al.* (2008). Isso afeta negativamente a velocidade de convergência dos métodos iterativos ou pode causar perda significativa de dígitos significativos nos métodos empregados para resolver o sistema linear associado Zhang *et al.* (2014).

A estratégia MEFG/S tende a perder efetividade conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta. Uma solução apontada para este problema é a dita *PU flat-top*, inicialmente estudada por Griebel e Schweitzer (2002) e Griebel e Schweitzer (2007) e recentemente estendida para o espaço bidimensional por Sato, 2017. Desta forma, foram implementadas as funções correspondentes a *PU flat-top* para simulações das estruturas sob processo de dano. O objetivo foi melhorar o condicionamento da matriz de rigidez obtida nos sistemas enriquecidos e, conseqüentemente, aprimorar a eficiência computacional do método. Trabalhos recentemente publicados apresentam resultados interessantes analisando problemas de naturezas diversas e utilizando o MEFG/S com *PU flat-top* (MEFG/S<sup>ft</sup>) como estratégia (Ramos e Proença, 2018; Silva *et al.*, 2022).

A questão do condicionamento da matriz de rigidez do MEFG foi abordada em outros trabalhos, como Béchet *et al.* (2005b), Laborde *et al.* (2005), Chahine *et al.* (2011) e Chen *et al.* (2012). Nenhum destes autores, porém, aplicou o método à problemas não lineares. É intuitivo pensar que não houve aplicação a problemas da mecânica do dano contínuo e contínuo-descontínuo. Esta pesquisa buscou inserir-se neste espaço, sobretudo, devido a necessidade de resolver os problemas de condicionamento e velocidade até então experimentados neste trabalho.

#### 3.2 - REVISÃO DA LITERATURA

O MEFG é um dos vários métodos baseados no método de Galerkin, onde o espaço de teste do MEF é aumentado por meio de funções especiais (polinomiais ou não), chamadas de enriquecimento, que procuram reproduzir o comportamento local da solução desconhecida de um problema variacional subjacente. O MEFG tem boas propriedades de aproximação, contudo, seu condicionamento pode ser pior que o apresentado pelo MEF.

Dado um sistema linear  $\mathcal{A}x = \mathcal{B}$ , este será dito bem condicionado caso pequenas modificações, na matriz  $\mathcal{A}$  ou no vetor  $\mathcal{B}$ , resultem em uma modificação mínima no vetor solução  $x$ . De outro modo, em um sistema mal condicionado, pequenas alterações em  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{B}$  geram grandes modificações em  $x$ .

Uma forma simples de medir este condicionamento é o número de condição, uma medida escalar que indica a perda de precisão da solução. Em se tratando de processos não lineares,

essa redução na acurácia das soluções provoca diminuição da eficiência computacional. Assim sendo, um número de condição pequeno indica um sistema bem condicionado, o oposto, aponta mau condicionamento.

Babuška e Banerjee (2012) apontam o Número de Condição eScalonado (NCS)  $\mathfrak{K}(\mathcal{A})$  como um indicador confiável da perda de precisão da solução por ser praticamente independente de fatores que influenciam a medida do erro relativo (como arredondamento, algoritmo de eliminação, implementação, compilador, processador, entre outros). Sendo  $\hat{\mathcal{A}}$  a matriz obtida a partir do escalonamento de  $\mathcal{A}$ , tem-se

$$\mathfrak{K}(\mathcal{A}) := \kappa_2(\hat{\mathcal{A}}) = \kappa_2(\mathcal{D}\mathcal{A}\mathcal{D}) = \|\hat{\mathcal{A}}\|_2 \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\|_2 \quad (3.1)$$

onde  $\|\cdot\|_2$  é a norma euclidiana e  $\mathcal{D}$  é uma matriz diagonal sendo  $\mathcal{D}_{ii} = \mathcal{A}_{ii}^{-1/2}$ . Segundo Babuška e Banerjee (2012) o condicionamento do MEEG/S é da mesma ordem do MEF para problemas de segunda ordem, ou seja,  $\mathfrak{K}(\mathcal{A}_{MEEG/S}) \approx \mathcal{O}(h^{-2})$ . Isso, segundo os autores, deve-se sobretudo ao fato de  $\mathcal{S}_1$  e  $\bar{\mathcal{S}}_2$  serem ortogonais no produto interno  $B(\cdot, \cdot)$  (Eq. (2.3)), logo:

$$B(v_1, v_2) = 0, \quad \forall v_1 \in \mathcal{S}_1, v_2 \in \bar{\mathcal{S}}_2 \quad (3.2)$$

### 3.3 - METODOLOGIA

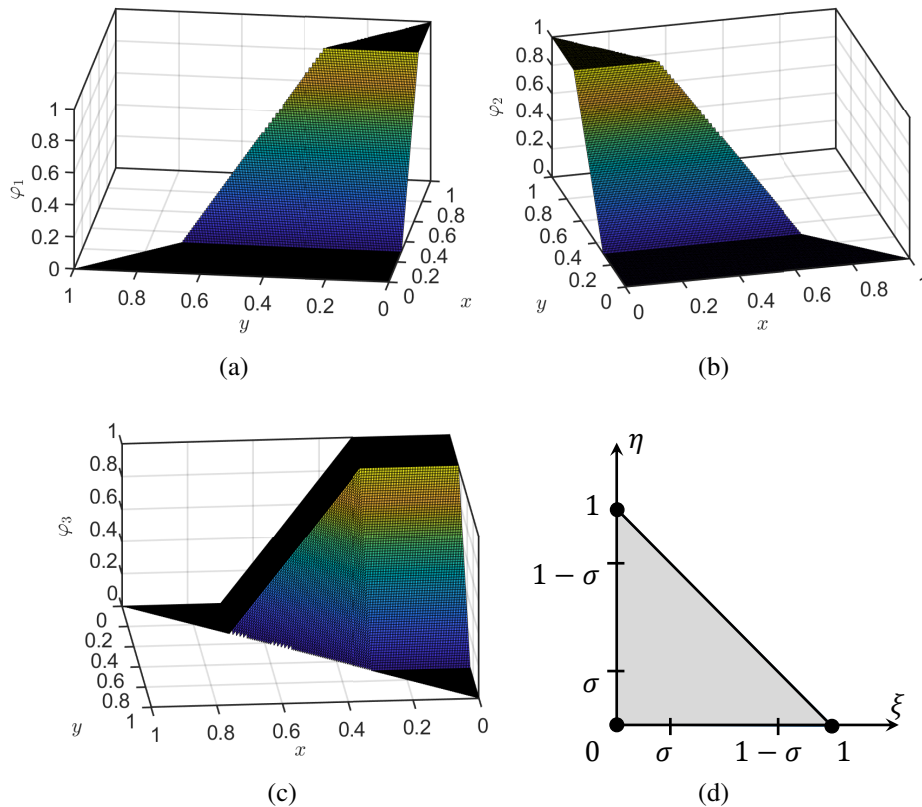


Figura 3.1 – Representação da PU  $\varphi_i^{FT}$  para elementos triangulares:  $\sigma = 0.30$  e  $k = 1$ . (a) função  $\varphi_1^{FT}$ ; (b) função  $\varphi_2^{FT}$ ; (c) função  $\varphi_3^{FT}$ ; (d) Domínio do elemento finito.

### 3.3.1 - Implementação da PU *flat-top*

Para fazer a implementação da metodologia *flat-top* no *LACHESIS*, foi realizada uma mudança no espaço de aproximação original do MEFG/S apresentado pela Eq. (2.12). Para modificar o MEFG/S para a versão de alta ordem (*High Order*) promove-se a seguinte modificação na Eq. (2.12)

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2^{mod}, \quad \bar{\mathcal{S}}_2^{mod} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i^{FT} \bar{\psi}_j^{(i)} b_j^{(i)} \right\} \quad (3.3)$$

sendo  $\varphi_i^{FT}$  a PU *flat-top* e  $\bar{\mathcal{S}}_2^{mod}$  o espaço de aproximação do MEFG/S de alta ordem (MEFG/S<sup>HO</sup>).

Foi implementada a formulação da PU  $\varphi_i^{FT}$  proposta por Ramos e Proença (2018). Segundo os autores, o condicionamento da matriz de rigidez associada ao sistema mostrou-se próxima (em alguns casos até melhor) do condicionamento apresentado pelo MEF. As funções propostas pelos autores para elementos finitos triangulares são as seguintes:

$$\varphi_1(\xi, \eta)^{FT} = \begin{cases} 0 & \text{se } \xi \in [0, \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \\ \left( \frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \text{se } \xi \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \\ 1 & \text{se } \xi \in [1 - \sigma, 1], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi. \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta)^{FT} = \begin{cases} 0 & \text{se } \eta \in [0, \sigma], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \\ \left( \frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \text{se } \eta \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \\ 1 & \text{se } \eta \in [1 - \sigma, 1], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta. \end{cases} \quad (3.4b)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta)^{FT} = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 1 - \left( \frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \text{se } \xi \in [\sigma, 1 - \sigma] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 0 & \text{se } \xi \in [0, 1 - \eta] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 1 - \left( \frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \text{se } \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [\sigma, 1 - \sigma], \\ 0 & \text{se } \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [0, 1 - \xi], \\ 1 - \left( \frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k - \left( \frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \text{se } \xi \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi. \end{cases} \quad (3.4c)$$

onde  $0 \leq \sigma < 0.5$  e  $k \in \mathbb{N}^*$ . A Fig. 3.1 apresenta a representação gráfica das superfícies geradas pelas Eqs. (3.4a), (3.4b) e (3.4c), respectivamente. Observa-se que o elemento apresenta características distintas dentro do domínio em função do controle exercido pelo parâmetro  $\sigma$ .

### 3.3.2 - Integração numérica

Nesta pesquisa foi utilizada a quadratura de Gauss-Legendre mínima para realizar a integração numérica da matriz de rigidez dos elementos finitos. O MEF/S quando utilizado, por si só exige uma quantidade de pontos de Gauss superior ao convencional (quantidade esta que se torna maior a medida que o grau polinomial do enriquecimento aumenta) para obter convergência. Soma-se a isso o fato de a PU *flat-top* apresentar características diferentes dentro do domínio (como ilustra a Fig. 3.1).

Considerando a distribuição usual dos pontos dentro do domínio, pode ocorrer a concentração de pontos em regiões específicas, omitindo a contribuição dos demais locais, levando à imprecisão nos resultados. Deste modo, a estratégia *flat-top* exige a utilização de um grande número de pontos de integração para obter convergência. A utilização de uma quantidade grande de pontos de Gauss, contudo, pode aumentar em demasia o tempo gasto para processar a matriz de rigidez.

Como alternativa para essa questão foi adotado o método desenvolvido por Woo e Whitcomb (1993) onde o elemento macro ( $\Omega$ ) é dividido em subdomínios (Fig. 3.2). Supondo a existência de heterogeneidades dentro do domínio de integração  $\Omega$ , espera-se que em cada subdomínio as propriedades variem suavemente. Convencionalmente, a matriz de rigidez  $K_e$  do elemento é calculada da seguinte forma

$$[K_e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3.5)$$

onde  $D$  é o tensor constitutivo;  $B = TN$  e  $T$  a matriz que contém os operadores diferenciais. Considerando um elemento dividido em  $n$  subdomínios  $\Omega_i$  (onde  $\sum_{i=1}^n \Omega_i = \Omega$ ), a matriz de rigidez do elemento torna-se (neste trabalho  $n = 9$ ):

$$[K_e] = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} [B]^T [D]_i [B] dx dy \quad (3.6)$$

A Fig. 3.2 ilustra como é feita a divisão do domínio macro em nove subdomínios  $\Omega_i$ . Primeiro constrói-se os triângulos  $(1b_12)$ ,  $(2b_13)$  e  $(3b_11)$  a partir do baricentro  $b_1$ . Em seguida, esses triângulos são divididos em outros três cada, a partir dos respectivos baricentros  $b_2, b_3$  e  $b_4$ .

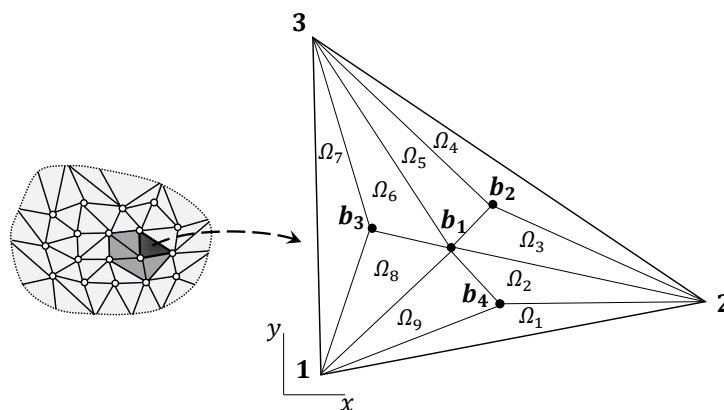


Figura 3.2 – Divisão do domínio triangular em nove subdomínios.

É necessário, portanto, um método para avaliar a contribuição de cada subdomínio  $\Omega_i$  para o cálculo de  $\mathbf{K}_e$ , conforme a Eq. 3.7:

$$[\mathbf{K}_e]_i = \int_{\Omega_i} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]_i [\mathbf{B}] dx dy \quad (3.7)$$

Esse procedimento envolve o uso de três sistemas de coordenadas, diferente do padronizado no MEF, que utiliza apenas um sistema de coordenadas global  $(x, y)$  e um local  $(\xi, \eta)$ . O mapeamento convencional do MEF permite a integração sobre uma região simples, mesmo que o elemento finito real seja muito distorcido. Caso as propriedades do material variem descontinuamente dentro do domínio de um elemento, é necessário estabelecer subdomínios onde as propriedades do material variem continuamente (Fig. 3.3).

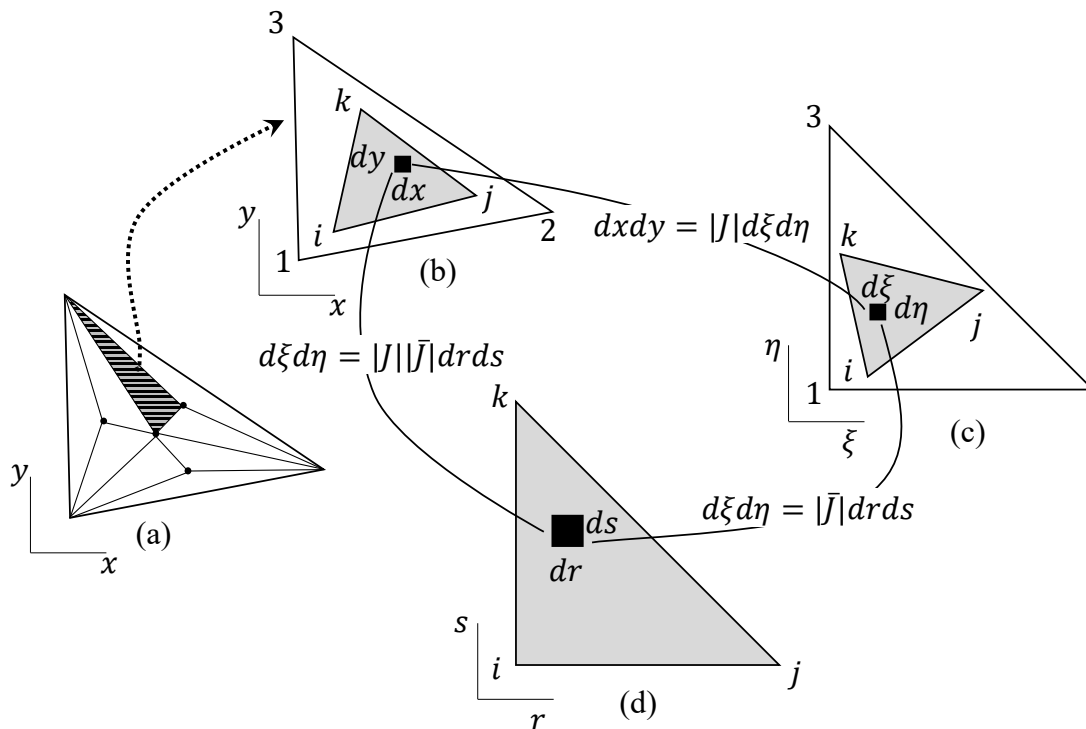


Figura 3.3 – Mapeamento entre três sistemas de coordenadas.

De modo geral, o domínio global é distorcido (Fig.3.3(a)) e, de maneira análoga, os subdomínios também, como indicado pela região sombreada  $(ijk)$  na Fig. 3.3(b). Quando este subdomínio distorcido é mapeado no sistema de  $(\xi, \eta)$ , ele ainda permanece distorcido (região sombreada da Fig. 3.3(c)) e, logo, as integrações não são simples. Contudo, caso este subdomínio seja mapeado novamente em um terceiro sistema de coordenadas  $(r, s)$ , as integrações podem ser simplificadas (Fig. 3.3(d)). A questão é, portanto, desenvolver as integrações em  $(r, s)$ .

O primeiro passo, é definir o elemento diferencial  $dx dy$  em termos de  $dr ds$ . Sendo  $\mathbf{J}$  a matriz Jacobiana, a Fig. 3.3 mostra que:

$$dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.8)$$

onde

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \quad (3.9)$$

A matriz Jacobiana  $\bar{\mathbf{J}}$  é definida da seguinte maneira

$$d\xi d\eta = |\bar{\mathbf{J}}| dr ds \quad (3.10)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, s)} \quad (3.11)$$

Deste modo, o resultado final deste desenvolvimento é

$$dx dy = |\mathbf{J}| |\bar{\mathbf{J}}| dr ds \quad (3.12)$$

O segundo passo é definir o integrando em termos das coordenadas  $(r, s)$ . Nota-se que  $[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]_i [\mathbf{B}]$  envolve as derivadas das funções de interpolação. Essas funções são definidas em termos de  $(\xi, \eta)$ , não de  $(r, s)$ . Logo, no espaço  $2D$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x, y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi, \eta} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

O cálculo das derivadas na Eq. (3.13) envolve  $\mathbf{J}$  e não  $\bar{\mathbf{J}}$  porque as funções  $N_i$  são definidas apenas em termos de  $\xi$  e  $\eta$ . Já o integrando  $[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]_i [\mathbf{B}]$  é avaliado em valores particulares de  $(r, s)$ . Ao realizar a integração numérica nos sistemas de coordenadas  $(r, s)$ ,  $\xi$  e  $\eta$  são determinados utilizando a Eq. (3.14). Esses valores são, então, usados para avaliar a integral. Através do mapeamento entre os sistemas de coordenadas  $(\xi, \eta)$  e  $(r, s)$ ,  $\xi$  e  $\eta$  podem ser aproximados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{N}_i(r, s) \xi_i \\ \eta &= \bar{N}_i(r, s) \eta_i \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por fim, unindo as Eqs. (3.6) e (3.12), a contribuição da matriz de rigidez de cada subdomínio *ith* torna-se:

$$[\mathbf{K}_e]_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]_i [\mathbf{B}] |\mathbf{J}| |\bar{\mathbf{J}}| dr ds \quad (3.15)$$

### 3.3.3 - Implementação computacional, verificação e validação

A implementação dos códigos computacionais do programa de análise numérica foi feito utilizando a linguagem de programação C++, dando continuidade ao desenvolvimento do programa *LACHESIS* pertencente ao grupo de pesquisa.

A verificação desta implementação do MEF/S  $2D$  foi feita através de simulações utilizando um problema elástico-linear simples cujo resultado analítico é de fácil obtenção. Depois, foi validada a utilização dessa estratégia numérica combinada com modelo de dano bilinear (C e



C-D) em simulações 2D. As validações dessa etapa foram feitas através da comparação com resultados experimentais consagrados na literatura tanto para o modo I quanto misto (I+II) de abertura de trincas em estruturas quasi-frágeis.

A estratégia do enriquecimento utilizada nas simulações a seguir está descrita na Subsec. 2.4.2. A única diferença aqui é a alteração da função de forma dos elementos que, em alguns casos, será a PU *flat-top* conforme detalhado na Subsec.3.3.1.

### 3.4 - VERIFICAÇÃO DA ESTRATÉGIA

Para a verificação da implementação, foram feitas duas análises: primeiro a de uma viga engastada e livre, submetido à flexão simples, com carregamento distribuído na face livre e, a segunda, uma chapa sob cisalhamento conforme a proposição de Babuska e Szabo (1982). Para os diferentes graus de enriquecimento polinomial foram avaliados o comportamento do NCS (Eq. (3.1)) bem como a qualidade da solução, através do cálculo da norma energia do erro relativo  $e_r$ , calculada como:

$$e_r = ||e|| = \sqrt{\frac{U(\tilde{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u})}{U(\mathbf{u})}} \quad (3.16)$$

onde  $U(\mathbf{u})$  é a energia de deformação adotada como referência e  $U(\tilde{\mathbf{u}})$  é a energia de deformação calculada a partir da solução  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

O primeiro problema avaliado foi a viga engastada e livre sob estado plano de tensão. As condições de contorno (CC) e geometria da viga são apresentadas pela Fig. 3.4 e na Tab. 3.1 encontram-se as dimensões, o carregamento, as CC e as propriedades do material (em unidades consistentes).

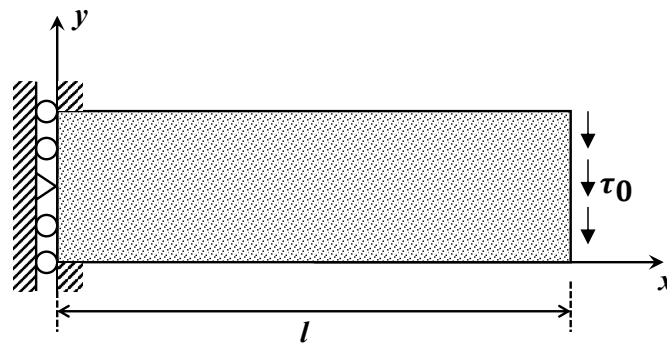


Figura 3.4 – Viga engastada livre - geometria e condições de contorno.

Tabela 3.1 – Viga engastada livre - dados gerais do modelo.

h	t	L	E	$\nu$	$\tau_0$	CC
2	1	10	30 E+06	0,25	150	$u_x(0, y) = u_y(0, h) = 0$

A solução analítica, segundo a teoria de Euler-Bernoulli, para a energia de deformação ( $U$ ) é a

seguinte:

$$U = \left( \frac{f_y^2 L^3}{6EI} \right) \left[ 1 + \frac{3(1 + \nu)}{L^2} \right] \quad (3.17)$$

Efetuada-se o cálculo, o valor de referência para a energia de deformação da viga é  $U = 7,781E-01$ . Foram, então, realizadas seis discretizações do modelo utilizando elementos triangulares de três nós (Fig. 3.5).

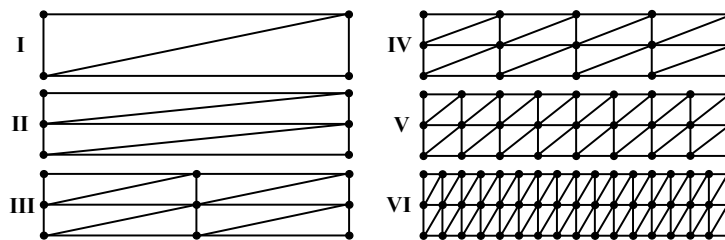


Figura 3.5 – Discretização do modelo da viga.

Os elementos possuem espessura constante e são constituídos de material homogêneo isotrópico. Foram realizadas simulações  $P0$  e com enriquecimento polinomial utilizando todos os modelos. Os nós das arestas engastadas não foram enriquecidos em respeito às condições de contorno de Dirichlet. A integração numérica do domínio foi realizada conforme a estratégia detalhada na Sec. 3.3.2. A Fig. 3.6 mostra o comportamento do NCS quando é utilizada a PU padrão e a PU *flat-top* nas simulações, tanto com enriquecimento  $P2\text{-Pol}^c$  e  $P2\text{-Pol}^i$ . É possível notar que o NCS das simulações com MEFG e PU padrão é inúmeras vezes superior ao das simulações (Fig. 3.6(a)). Contudo, quando é utilizada a PU *flat-top* o condicionamento matricial do MEFG alcança um patamar semelhante ao das demais estratégias (Fig. 3.6(b)).

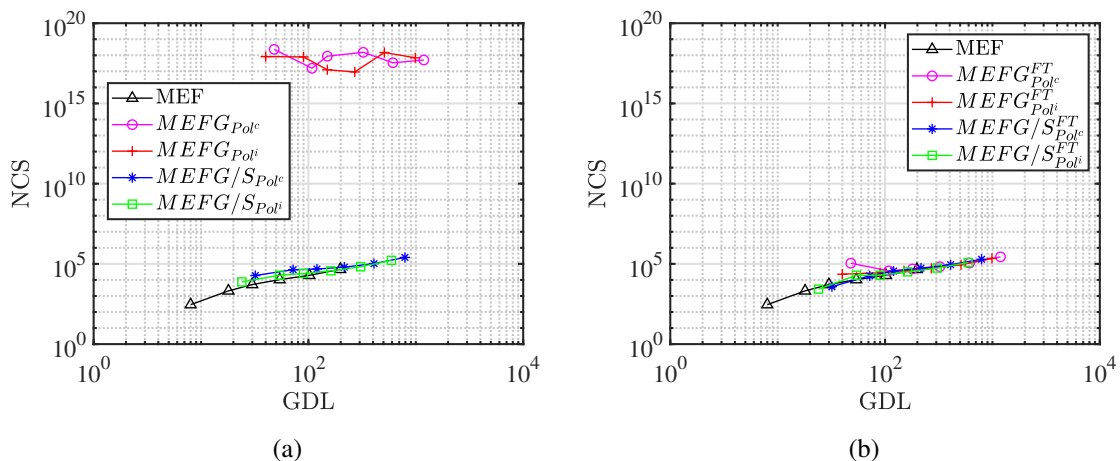


Figura 3.6 – Análise do NCS:  $\sigma = 0.01$ ,  $k = 1.0$  e  $P2$  (a) PU padrão; (b) PU *flat-top*.

A Fig. 3.7 apresenta o comportamento do  $e_r$  ao utilizar a PU padrão e a PU *flat-top* com enriquecimento  $P2\text{-Pol}^c$  ou  $P2\text{-Pol}^i$ . Observa-se que, em ambos os casos, o MEFG aproximou melhor a solução, devido, sobretudo, ao maior número de polinômios de enriquecimento em

relação ao MEFG/S. Nota-se ainda que as simulações utilizando a PU padrão (Fig. 3.7(a)) apresentaram melhor acurácia que as respectivas com PU *flat-top* (Fig. 3.7(b)).

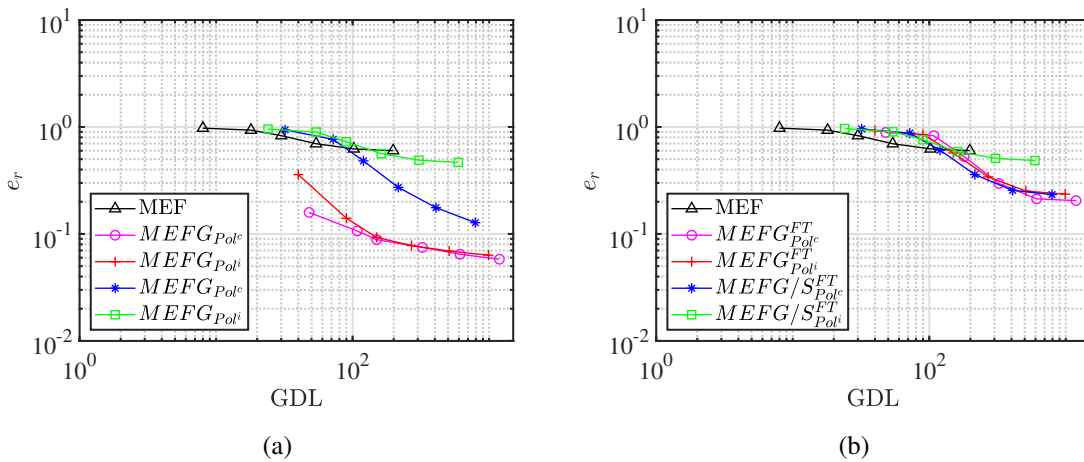


Figura 3.7 – Erro relativo:  $\sigma = 0.01$ ,  $k = 1.0$  e  $P2$  (a) PU padrão; (b) PU *flat-top*.

Embora o MEFG/S tenha apresentado resultados de NCS próximos ao do MEF nos casos anteriores, a Fig. 3.8 (apresentando simulações com enriquecimento  $P4$ - $Pol^c$ ) indica uma perda de condicionamento quando enriquecimento de grau superior a  $P3$  é utilizado. Situação semelhante pôde ser observada em Oliveira (2018). Porém, nota-se na Fig. 3.8(b) que a PU *flat-top* também mostrou eficiência no tratamento do NCS ainda que sejam utilizados enriquecimentos de ordens mais altas, embora haja uma certa penalização na qualidade da resposta.

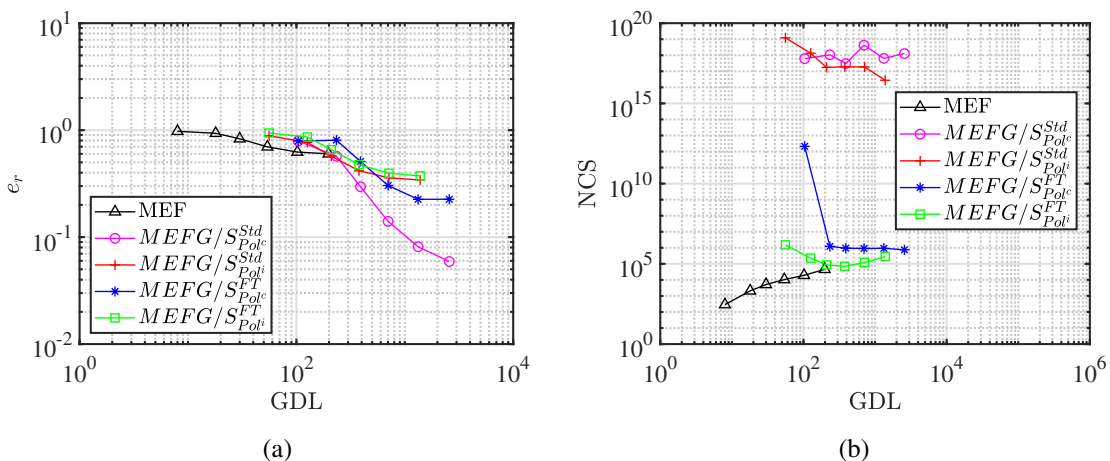


Figura 3.8 – Modelo da viga:  $\sigma = 0.01$ ,  $k = 1.0$  e  $P4$  (a) Erro relativo; (b) NCS.

O segundo problema avaliado foi a chapa sob cisalhamento em estado plano de deformação. As  $CC$  e geometria da chapa são apresentadas pela Fig. 3.9. Devido à antimetria do problema é possível avaliar apenas o quadrante destacado na Fig. 3.9. Na Tab. 3.2 encontram-se as dimensões, o carregamento, as  $CC$  e as propriedades do material (em unidades consistentes).

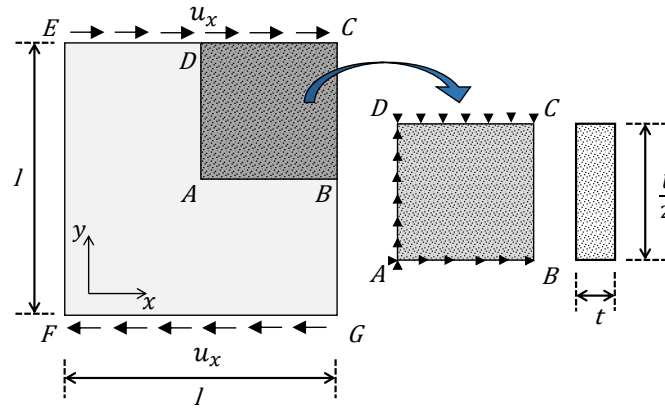


Figura 3.9 – Chapa sob cisalhamento - geometria e condições de contorno.

Tabela 3.2 – Chapa sob cisalhamento - dados gerais do modelo.

t	l	E	$\nu$	$u_x$	CC
1	2000	1	0,30	1	$u_y(FG) = u_y(EC) = 0$

Foram feitas, então, três discretizações do modelo utilizando elementos triangulares de três nós (Fig. 3.10) que possuem espessura constante e são constituídos de material homogêneo isotrópico. Foram realizadas simulações  $P0$  e com enriquecimento polinomial utilizando todos os modelos. Os nós onde foram aplicadas as  $CC$  não foram enriquecidos. A integração numérica do domínio foi realizada conforme a estratégia detalhada na Sec. 3.3.2.

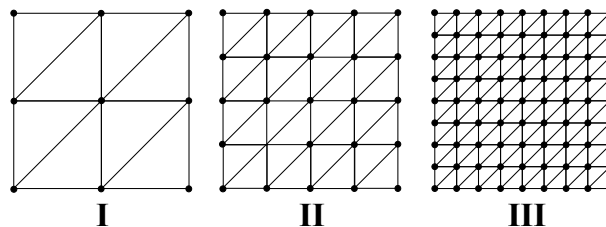


Figura 3.10 – Discretização do modelo da chapa quadrada em cisalhamento.

A Fig. 3.11 mostra as taxas de crescimento do NCS quando é utilizada a PU padrão e a PU *flat-top* nas simulações utilizando enriquecimento  $P2$ , tanto com estratégia  $Pol^c$  quanto  $Pol^i$ . É possível notar que o NCS das simulações com MEFG e PU padrão é muito superior ao das simulações (Fig. 3.11(a)). Contudo, quando é utilizada a PU *flat-top* o condicionamento matricial do MEFG alcança um patamar semelhante ao das demais estratégias (Fig. 3.11(b)). Destaca-se que, em ambos os casos, o NCS do MEFG/S apresentou a mesma ordem e magnitude do MEF.

A Fig. 3.12 apresenta o comportamento do  $e_r$  quando é utilizada a PU padrão e a PU *flat-top* com enriquecimento  $P2$ , com estratégia  $Pol^c$  quanto  $Pol^i$ . Observa-se que, em ambos os casos, o MEFG aproximou um pouco melhor a solução. Nota-se ainda que as simulações utilizando a PU padrão (Fig. 3.7(a)) apresentaram acurácia levemente superior a das respectivas com PU *flat-top* (Fig. 3.7(b)).

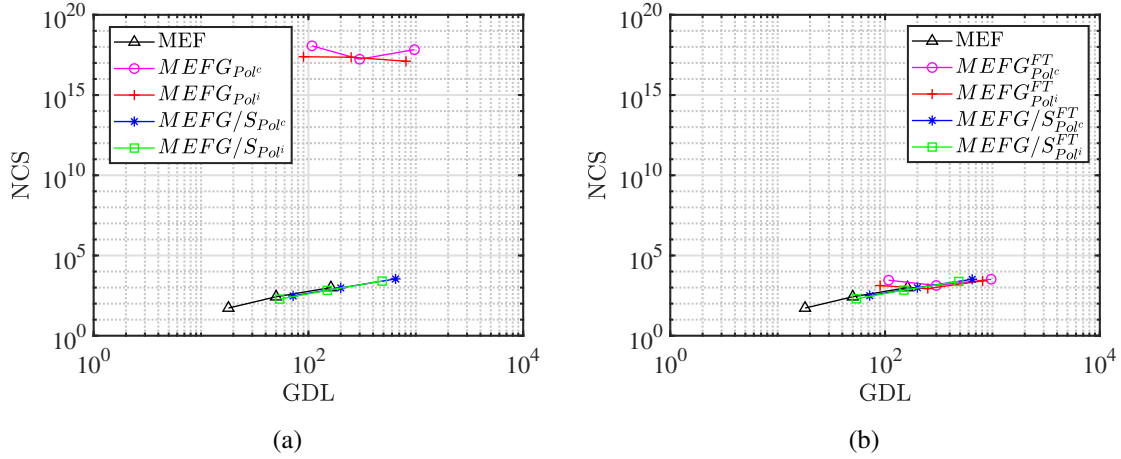


Figura 3.11 – Análise do NCS:  $\sigma = 0.01$ ,  $k = 1.0$  e  $P2$  (a) PU padrão; (b) PU *flat-top*.

Destaca-se que, em ambos os casos (tanto na viga quanto na chapa), o NCS do MEFG/S apresenta a mesma ordem do MEF, ou seja,  $\mathfrak{K}(\mathcal{K}_{MEFG/S^{FT}}) = \mathcal{O}(h^{-2})$ , confirmando o que fora dito por Babuška e Banerjee (2012). Contudo, como demonstrado no Cap. 2, a quantidade de  $GDL^{proc}$  torna-se maior a medida que o grau polinomial do enriquecimento aumenta (isso ocorre tanto devido ao aumento da base polinomial, ou seja, mais graus de liberdade, como devido ao aumento de iterações para convergência). Isso influencia a velocidade de processamento do modelo. Somando-se isso às informações extraídas dos resultados obtidos nesta sessão, tem-se um indicativo que até mesmo no MEFG/S ocorre uma piora no condicionamento da matriz de rigidez quando funções de mais alta ordem são utilizadas.

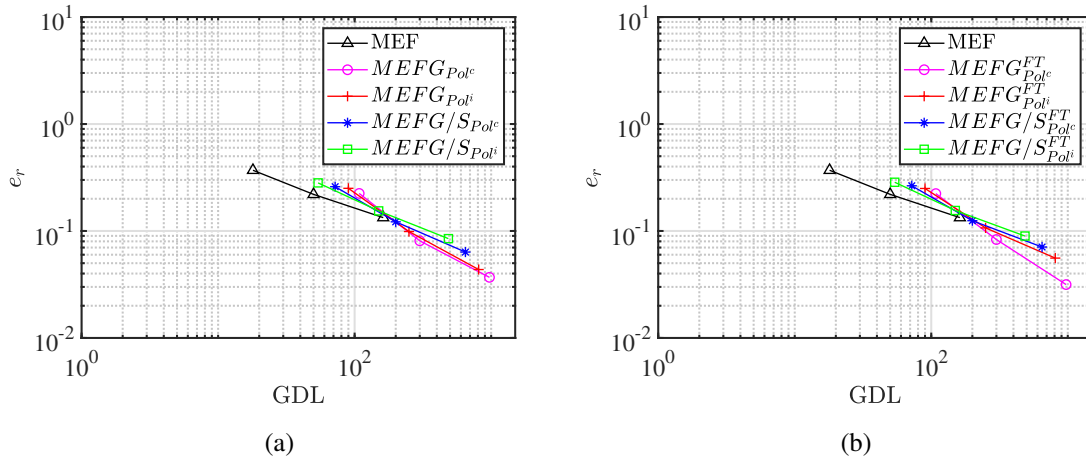


Figura 3.12 – Erro relativo:  $\sigma = 0.01$ ,  $k = 1.0$  e  $P2$  (a) PU padrão; (b) PU *flat-top*.

### 3.5 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I

Esta seção dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEFG/S<sup>FT</sup>, com modelo de dano bilinear contínuo (C) e contínuo-descontínuo (C-D) em simulações 2D. As respostas obtidas

foram comparadas com resultados experimentais ou simulações de modelos semelhantes da literatura. Os ensaios foram realizados aplicando o MEFG/S<sup>FT</sup> com enriquecimento polinomial (com as estratégias Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>). O modelo experimentado neste caso foi a viga sob flexão em três pontos, ou *Three Point Bending (TPB)*. As simulações foram feitas com controle de deslocamento.

Os resultados das simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram comparados com as respostas experimentais de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke e Roesler (2010). A Fig. 3.13(a) ilustra a geometria utilizada nesse ensaio.

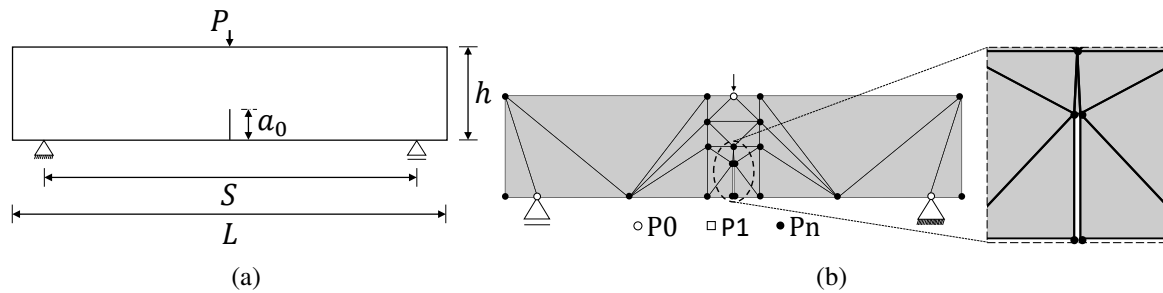


Figura 3.13 – Modelo e discretização em elementos finitos para *TPB*: (a) Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo -  $a_0 = 50\text{mm}$ ,  $h = 150\text{mm}$ ,  $L = 700\text{mm}$ ,  $S = 600\text{mm}$ ,  $e = 80\text{mm}$ ; (b) Malha com 25 elementos.

A Tab.3.3 apresenta os parâmetros de fratura e os relativos ao material. Foi utilizada a deformação equivalente de Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ). O entalhe possui largura igual a 2,0mm (dois milímetros) e abertura da boca com igual dimensão (Fig. 3.13(b)). Foi utilizada uma malha com 25 elementos finitos triangulares lineares de três nós.

Tabela 3.3 – Parâmetros de fratura e de material do ensaio *TPB*

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
164,0	56,7	0,25	32000	58,3	4,15	0,20

Os nós  $Pn$  indicam onde o grau do enriquecimento polinomial variou, mantendo-se os demais nós constantemente com enriquecimento  $P1$  (onde  $P1$  designa enriquecimento polinomial de primeiro grau e assim por diante analogamente) e  $P0$  indica que o nó não sofreu nenhum tipo de enriquecimento, correspondendo, portanto, ao MEF convencional. Em todas as simulações adotou-se  $\sigma = 0.01$  e  $k = 1.0$  como parâmetros para a PU *flat-top*.

### 3.5.1 - MEFG/S<sup>FT</sup> com modelo de dano contínuo

Serão apresentados resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento de abertura de boca de trinca, *Crack Mouth Opening Displacement (CMOD)*, tanto quando é utilizada a estratégia Pol<sup>c</sup> como Pol<sup>i</sup>, segundo a metodologia MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup>. Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao MEFG<sup>FT</sup> (Fig. 3.14 e seguintes).

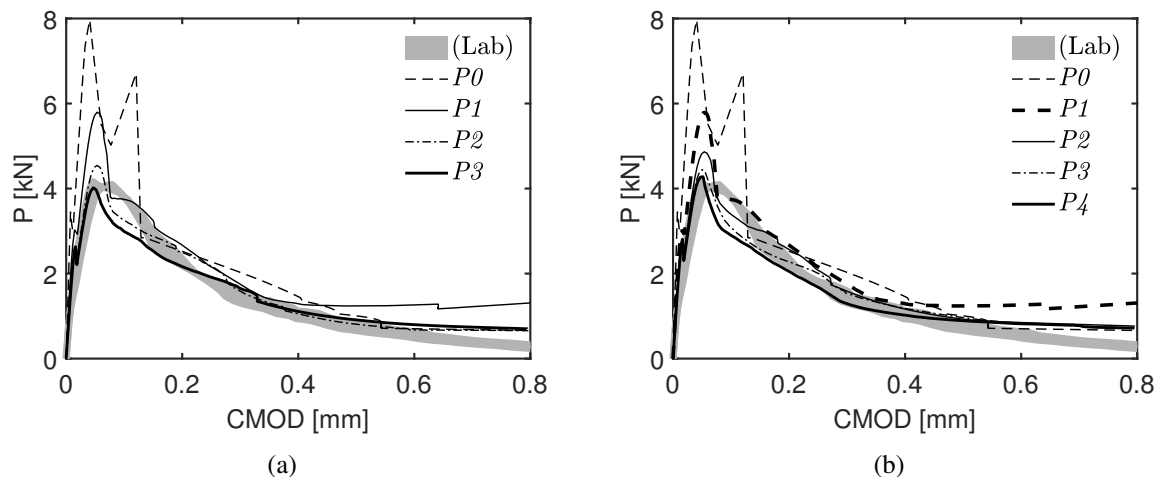


Figura 3.14 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas (MEFG<sup>FT</sup>): (a) estratégia Pol<sup>c</sup>; (b) estratégia Pol<sup>i</sup>.

A Fig.3.14 apresenta as curvas  $P-CMOD$  para as situações em que foram utilizadas a estratégia Pol<sup>c</sup> (Fig. 3.14(a)) bem como a Pol<sup>i</sup> (Fig. 3.14(b)). Observa-se que o MEFG<sup>FT</sup> apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental. Nota-se, ainda, boa correspondência entre esses resultados e as curvas apresentadas por Paiva *et al.* (2016) e Paiva (2017) onde fora utilizado o MEFG.

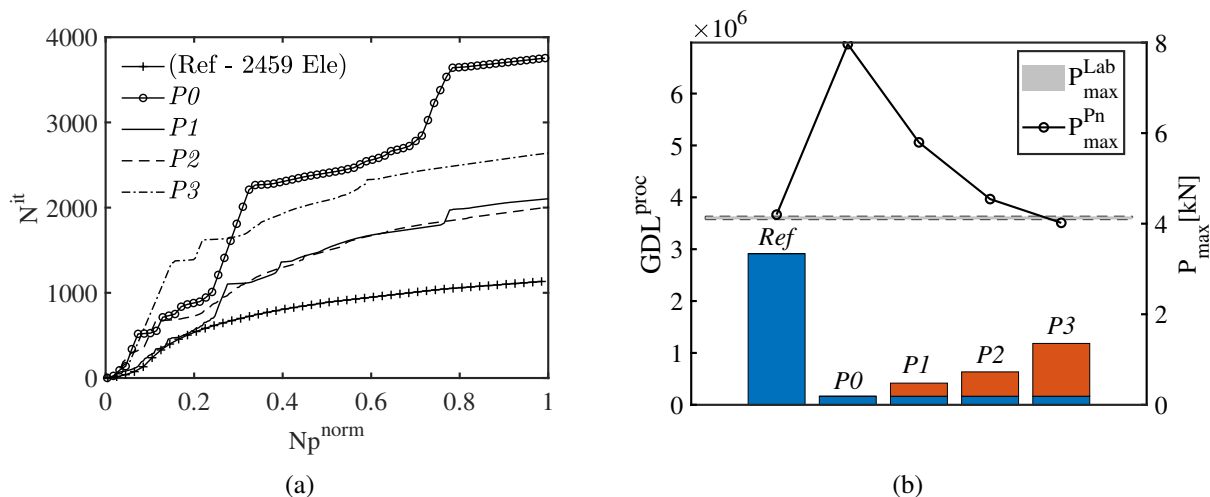


Figura 3.15 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG<sup>FT</sup> Pol<sup>c</sup>.

A Fig. 3.15 e a Fig. 3.16 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações mencionadas anteriormente, tanto quando é utilizada a estratégia Pol<sup>c</sup> como Pol<sup>i</sup>, sendo  $N^{it}$  o número de iterações acumuladas por passo,  $N_p^{norm}$  o número do passo normalizado pelo número total de passos da simulação e  $GDL^{proc}$  o número de Graus De Liberdade processados na simulação completa. A parte das barras em coloração azul indica a parcela dos  $GDL$ 's associada

ao MEF, enquanto a outra em coloração laranja indica a quantidade de  $GDL$ 's associada ao  $MEFG^{FT}$  (ou  $MEFG/S^{FT}$ , como será visto mais adiante).

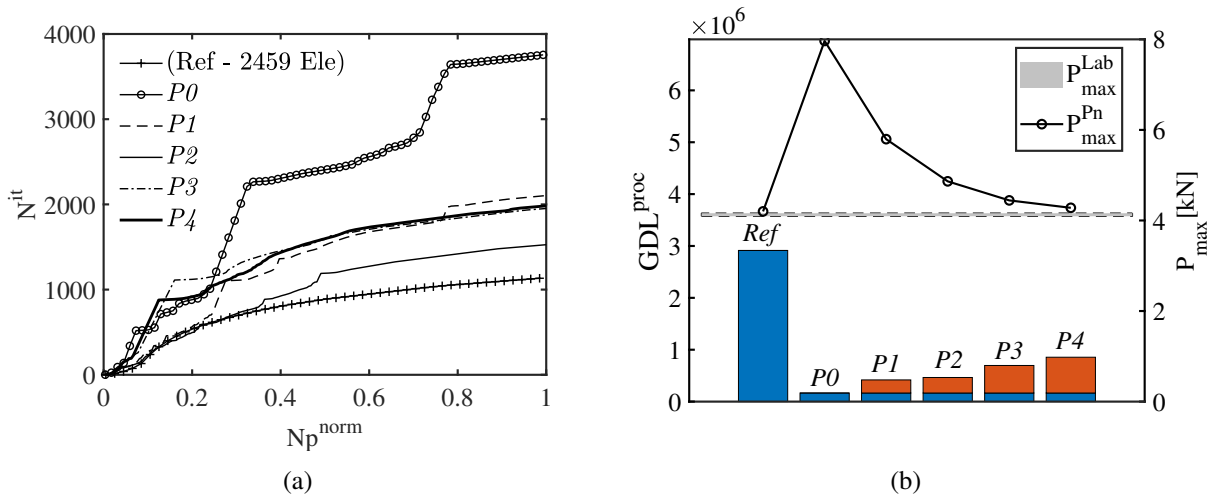


Figura 3.16 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG^{FT}$   $Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 3.15(b) e na Fig. 3.16(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto (cada função representa um grau de liberdade a mais no nó em cada dimensão do espaço, logo, no 2D, dois graus a mais por nó). Pelo mesmo motivo as simulações que utilizam a estratégia  $Pol^c$  apresentam um  $GDL^{proc}$  superior (ainda que de maneira sutil) àquelas que utilizam a estratégia  $Pol^i$ . Contudo, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência (com a malha mais refinada), visto que apresentaram menor  $GDL^{proc}$  que aquela.

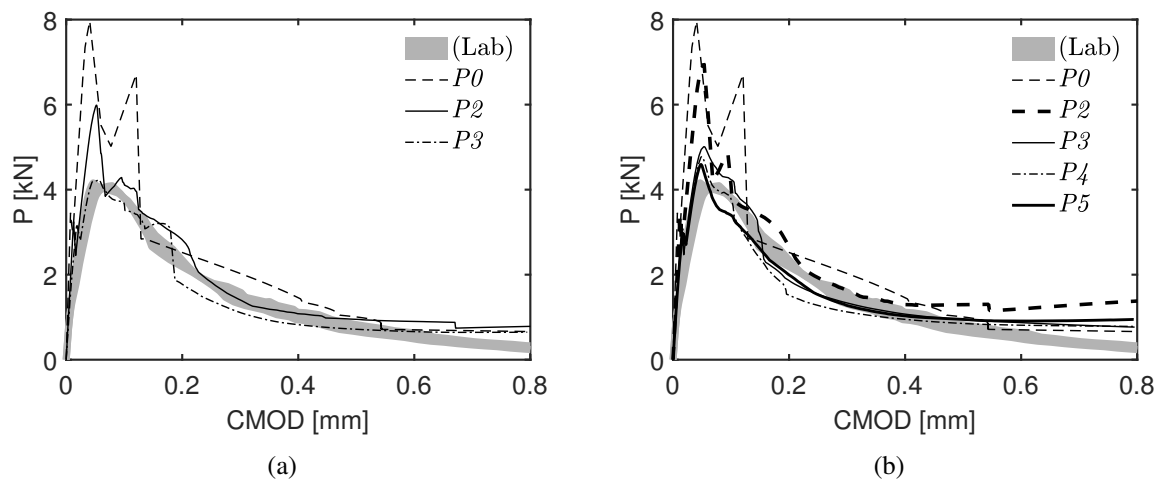


Figura 3.17 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas ( $MEFG/S^{FT}$ ): (a) estratégia  $Pol^c$ ; (b) estratégia  $Pol^i$ .

A simulação  $P_0$  precisa, de maneira geral, de mais iterações por passo para a convergência



embora o  $GDL^{proc}$  nesse caso seja o menor de todas as análises realizadas. Contudo, isso não reflete na qualidade do resultado, como pode ser observado nas curvas que mostram o  $P_{max}$  para cada simulação. O resultado do caso  $P0$  mostra-se muito distante do experimental. Eficiência computacional e qualidade de resposta precisam ser perseguidas de maneira equilibrada.

Os resultados adiante referem-se ao MEFG/S<sup>FT</sup> com PU *flat-top*. A Fig.3.17 apresenta as curvas  $P$ -CMOD para as situações em que foram utilizadas a estratégia Pol<sup>c</sup> (Fig. 3.17(a)) bem como Pol<sup>i</sup> (Fig. 3.17(b)). Observa-se que o MEFG/S<sup>FT</sup> apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas e a experimental. Nota-se também boa correspondência entre esses resultados e as curvas apresentadas por Paiva *et al.* (2016) e Paiva (2017).

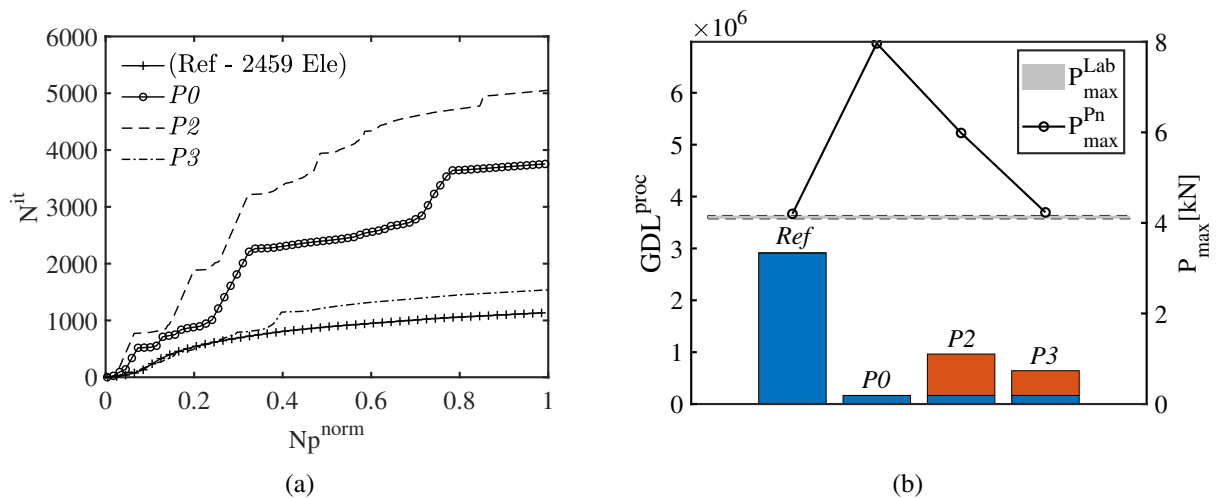


Figura 3.18 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>c</sup>.

A Fig. 3.18 e a Fig. 3.19 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações com MEFG/S<sup>FT</sup>, tanto quando é utilizada a estratégia Pol<sup>c</sup> como Pol<sup>i</sup>. Observa-se que o  $N^{it}$  normalizado tanto na Fig. 3.18(a) como na Fig. 3.19(a) tende a melhorar quanto maior for o grau do enriquecimento polinomial aplicado, logo, aprimora a eficiência. Isso se torna mais evidente na Fig. 3.19(a) onde a simulação  $P5$  apresenta resultado melhor, inclusive, que o apresentado pela referência. Essa tendência não é observada quando o MEFG<sup>FT</sup> é utilizado (como pode ser visto nas Figs. 3.15 e 3.16). Portanto, o MEFG/S mostrou-se mais eficiente do ponto de vista computacional que o MEFG (ver Cap. 2) independente da PU utilizada, seja a padrão ou a *flat-top*.

É possível notar ainda na Fig. 3.18(b) e na Fig. 3.19(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Pelo mesmo motivo as simulações que utilizam a estratégia Pol<sup>c</sup> apresentam um  $GDL^{proc}$  em geral superior àquelas que utilizam a estratégia Pol<sup>i</sup>. Observa-se ainda que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência visto que apresentaram menor  $GDL^{proc}$  que àquela. A melhor eficiência computacional relativa do MEFG/S (e do seu derivado MEFG/S<sup>FT</sup>) se deve, sobretudo, à subtração da parcela linear das funções de enriquecimento. Isso reduz o problema da dependência linear na matriz de rigidez (conforme o próprio método preconiza), situação

comumente observada quando utilizam-se funções de enriquecimento do tipo polinomiais.

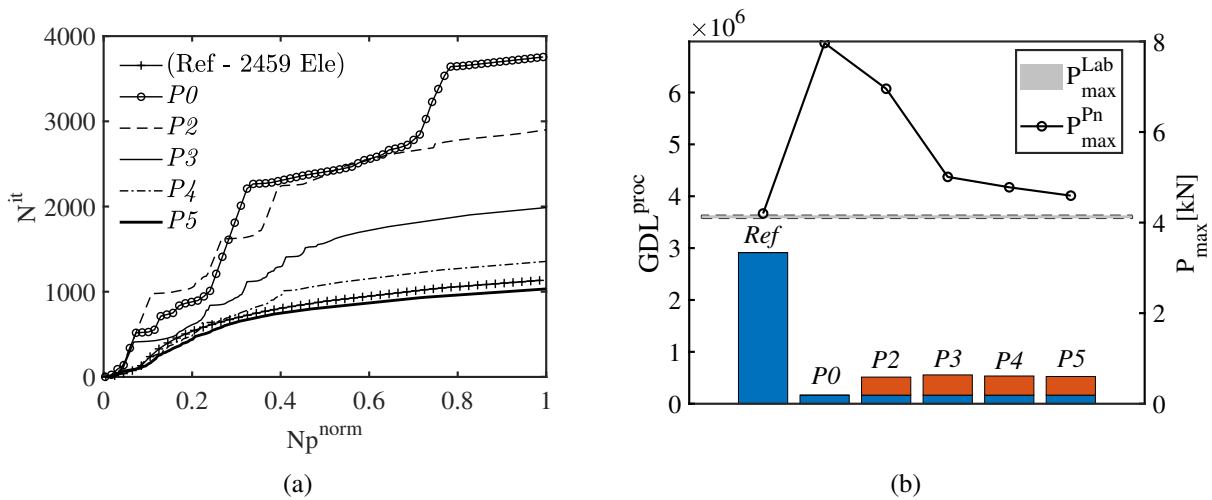


Figura 3.19 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 25 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>i</sup>.

A simulação  $P0$  precisa, de maneira geral, de mais iterações por passo para a convergência embora o  $GDL^{proc}$  nesse caso seja o menor de todas as análises realizadas (porque tem poucos graus de liberdade para processar em cada iteração). Contudo, isso não reflete na qualidade do resultado como pode ser observado nas curvas que mostram o  $P_{max}$  para cada simulação. O resultado do caso  $P0$  mostra-se muito distante do experimental. Como dito anteriormente, eficiência computacional e qualidade de resposta precisam ser perseguidas de maneira equilibrada.

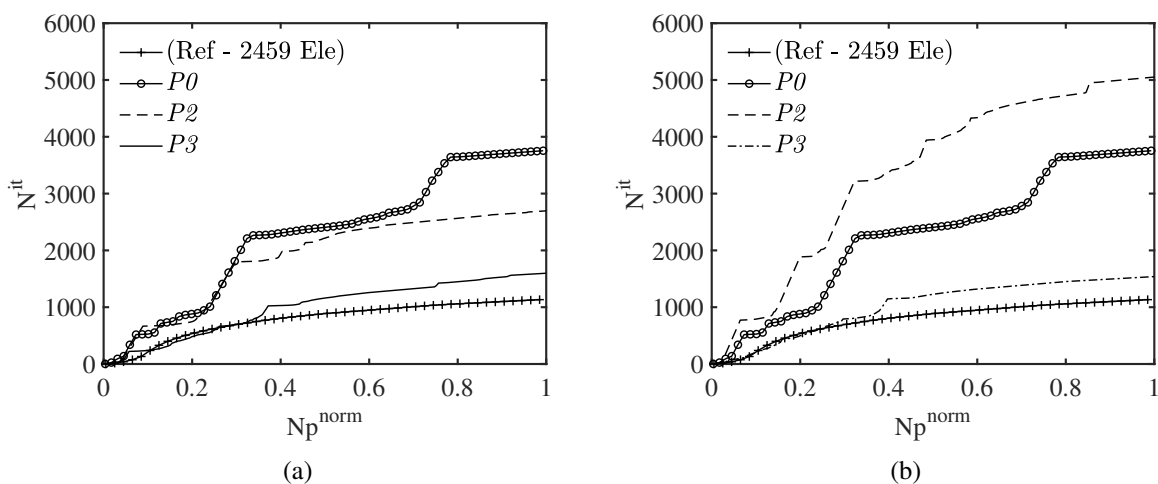


Figura 3.20 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia Pol<sup>c</sup> das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

As Figs. 3.20 e 3.21 mostram (paralelamente para facilitar a comparação) as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/S como do MEFG/S<sup>FT</sup> com estratégia Pol<sup>c</sup>. Observa-se que, a exceção de  $P2$ , tanto o valor do  $N^{it}$  normalizado como o de  $GDL^{proc}$  são bem

próximos (seja utilizando a PU padrão seja utilizando a PU *flat-top*). O  $P_{max}$  apresentado pelas simulações com ambos os métodos (MEFG/S ou MEFG/S<sup>FT</sup>) também mostrou-se similar.

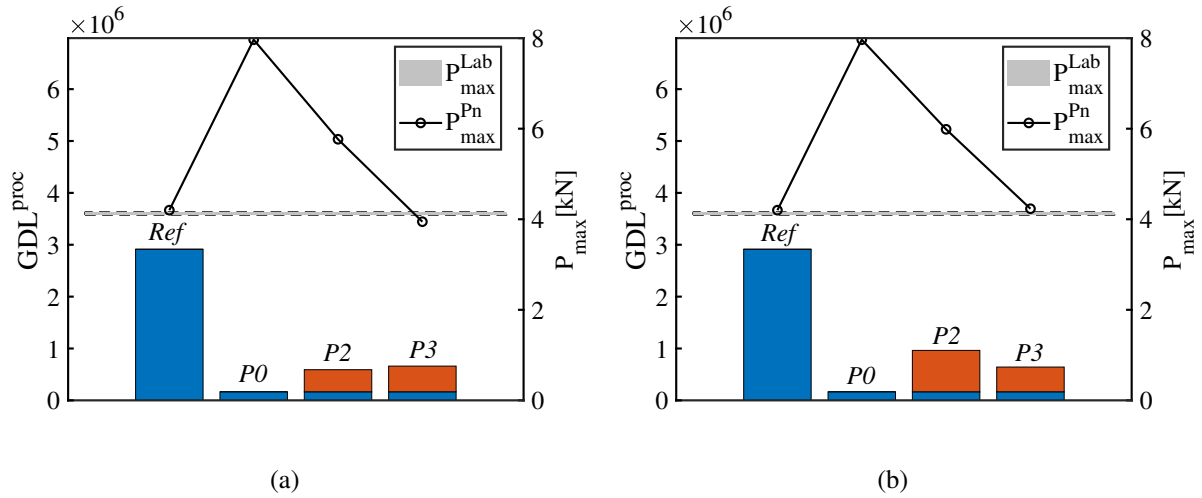


Figura 3.21 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia Pol<sup>c</sup> das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

Já as Figs. 3.22 e 3.23 mostram (paralelamente para facilitar a comparação) as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/S como do MEFG/S<sup>FT</sup>, com estratégia Pol<sup>i</sup>. Diferente do observado nas simulações que utilizaram a estratégia Pol<sup>c</sup> (nas Figs. 3.20 e 3.21 onde os resultados mostraram uma certa equivalência), observa-se que tanto o  $N^{it}$  normalizado como o  $GDL^{proc}$  são melhores no MEFG/S<sup>FT</sup> (ou seja, utilizando a PU *flat-top*). Nota-se ainda que o  $P_{max}$  apresentado pelas simulações com ambos os métodos (MEFG/S ou MEFG/S<sup>FT</sup>) mostrou-se similar.

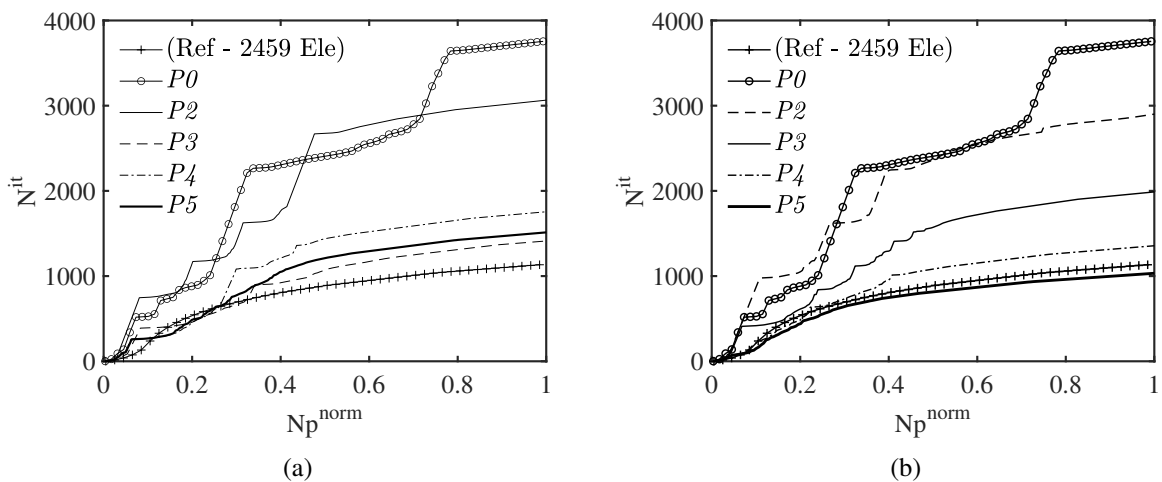


Figura 3.22 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia Pol<sup>i</sup> das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

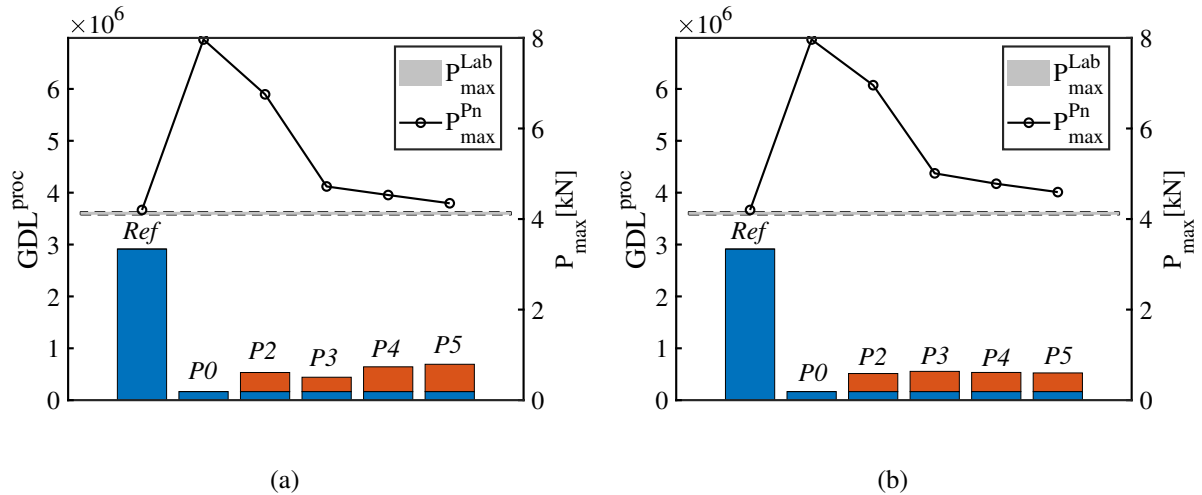


Figura 3.23 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia  $Pol^i$  das simulações com malha de 25 elementos: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

Tabela 3.4 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - TPB com 25 elementos e estratégia  $Pol^c$ .

Grau	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$
Ref	4.2009	2913560	4.2009	2913560	4.2009	2913560	4.2009	2913560
P0	7.96477	165396	7.96477	165396	7.96477	165396	7.96477	165396
P1	5.4503	453276	5.79582	417876	*	*	*	*
P2	3.98563	1034470	4.54354	634566	5.76652	591364	5.98632	963612
P3	*	*	4.01829	1183280	3.94605	660776	4.23229	642486

A Tab. 3.4 e a Tab. 3.5 apresentam um sumário dos resultados de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  para os métodos generalizados analisados nesta pesquisa (MEFG, MEFG/S, MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup>) utilizando as estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ , respectivamente. Nota-se que, de modo geral, as simulações com PU *flat-top* apresentam  $GDL^{proc}$  menor que suas correlatas com PU padrão. Observa-se ainda que as simulações com a estratégia  $Pol^i$  apresentaram  $GDL^{proc}$  menor que suas respectivas com a estratégia  $Pol^c$ , embora demonstre resultados de  $P_{max}$  com menor qualidade. Características esperadas devido ao menor número de polinômios enriquecedores utilizados na estratégia  $Pol^i$ .

Tabela 3.5 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - TPB com 25 elementos e estratégia  $Pol^i$ .

Grau	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$
Ref	4.2009	2913560	4.2009	2913560	4.2009	2913560	4.2009	2913560
P0	7.96477	165396	7.96477	165396	7.96477	165396	7.96477	165396
P1	5.4503	453276	5.79582	417876	*	*	*	*
P2	4.48799	417648	4.86407	464688	6.7539	533196	6.95613	513396
P3	3.98455	450724	4.44342	696340	4.71946	442148	5.00951	555044
P4	*	*	4.27944	855480	4.53042	642756	4.77981	534228
P5	*	*	*	*	4.34814	691920	4.59498	524880

### 3.5.2 - MEF $G/S^{FT}$ com modelo de dano contínuo-descontínuo

Nesta subseção serão apresentados os resultados referente às simulações com MEF $G/S^{FT}$  e modelo de dano C-D. Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao MEF $G/S^{FT}$ . A Fig. 3.24 mostra as curvas  $P$ - $CMOD$  para esta situação. Observa-se que a simulação sem enriquecimento apresenta um enrijecimento incompatível com o resultado de laboratório. Esse problema é suavizado quando o enriquecimento polinomial é utilizado.

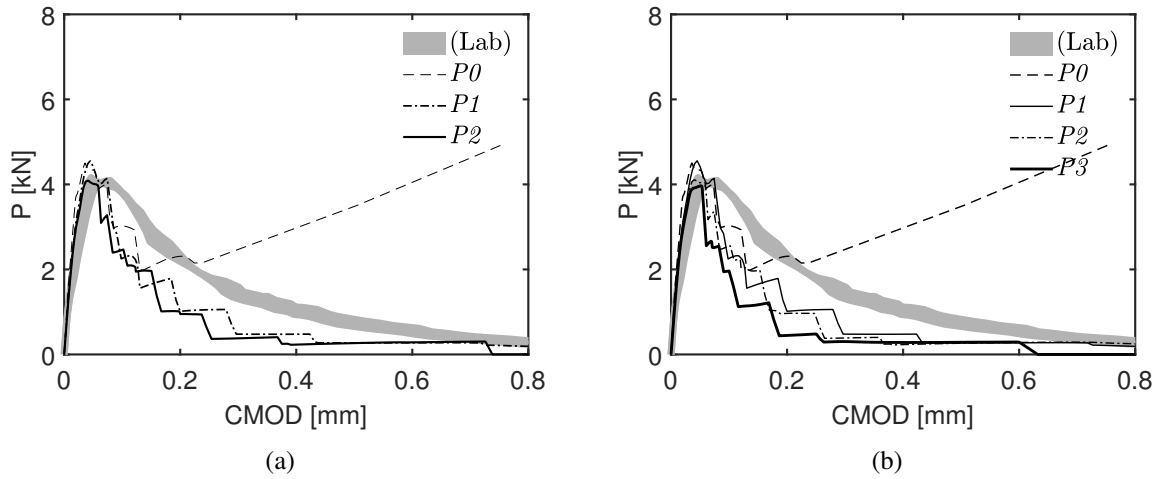


Figura 3.24 – Curvas  $P$  –  $CMOD$  experimentais e numéricas (MEF $G/S^{FT}$ ): (a) estratégia Pol $^c$ ; (b) estratégia Pol $^i$ .

Nota-se ainda mudanças (não observadas nas simulações com modelo de dano C) bruscas no *softening* do gráfico. Isso ocorre devido à propagação da trinca em elementos grandes, deste modo, uma grande quantidade de energia é dissipada de uma única vez. Contudo, observa-se que o  $P_{max}$  numérico apresenta boa correspondência com o experimental em todos os casos.

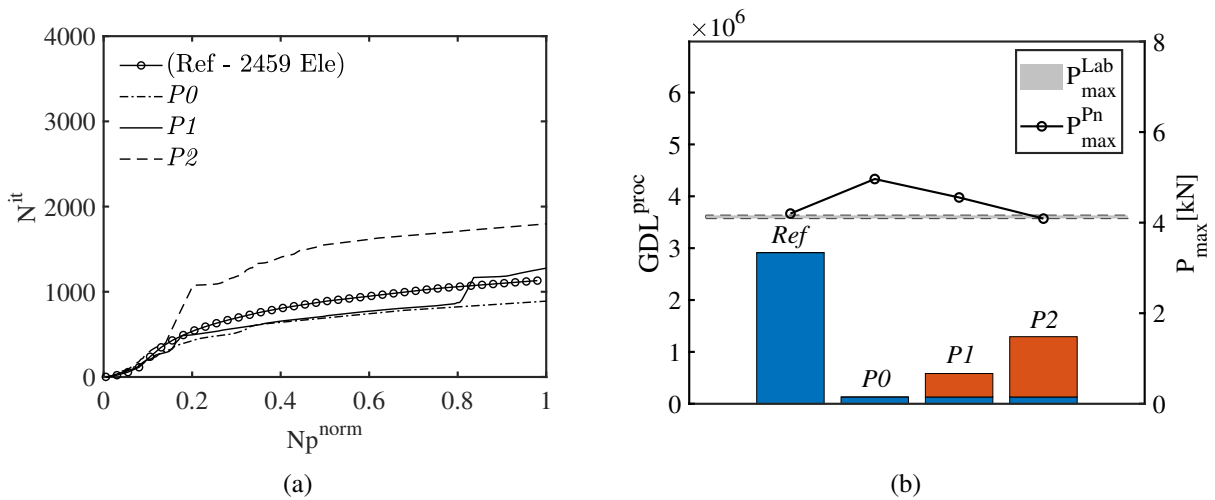


Figura 3.25 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$  Pol $^c$ .

A Fig. 3.25 e a Fig. 3.26 apresentam a avaliação da eficiência computacional. Foi observado comportamento semelhante aos dos gráficos apresentados na seção anterior onde o  $GDL^{proc}$  segue a tendência de aumentar a medida que o grau polinomial do enriquecimento aumenta, sobretudo, em função do aumento da quantidade de polinômios compondo o conjunto enriquecedor.

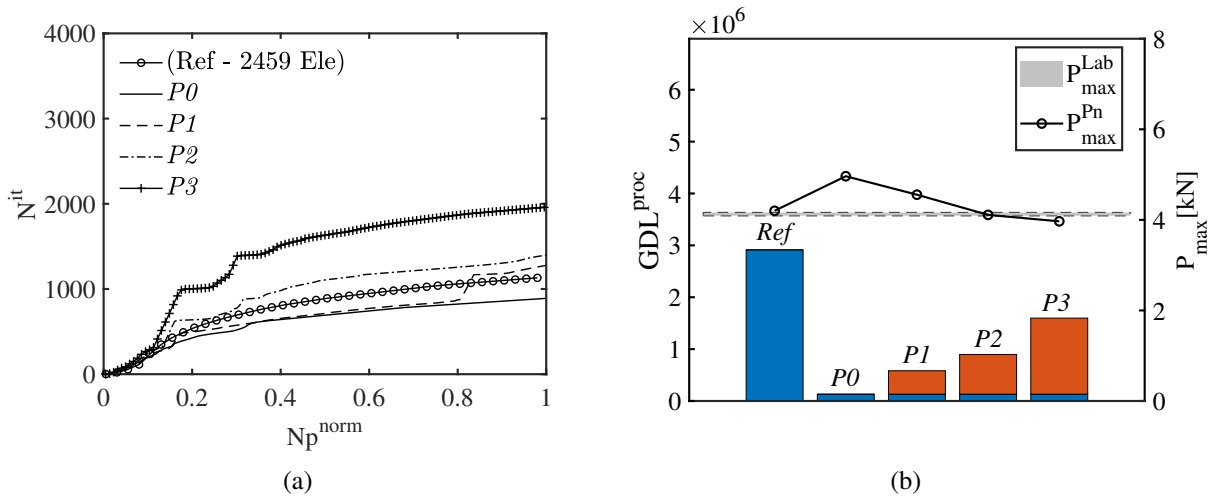


Figura 3.26 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG^{FT} Pol^i$ .

No caso do  $N_{it}^{norm}$  normalizado, tanto na Fig. 3.25(a) como na Fig. 3.26(a) não foi observado comportamento semelhante aos dos gráficos apresentados na seção anterior, onde os resultados indicaram melhor eficiência computacional a medida que o grau polinomial aumentava. Ocorre justamente a situação inversa. Esse efeito acontece devido à propagação da trinca que naturalmente gera uma instabilidade no sistema de equações. Com a aplicação do enriquecimento polinomial, surgem situações em que nós são enriquecidos com ambas as funções (polinomial e descontínua) tornando mais difícil a convergência. Esses resultados apontam que, quanto maior o grau do polinômio associado à função Heaviside, maior a instabilidade gerada no sistema. Desta forma, mais iterações são necessárias para o resultado convergir.

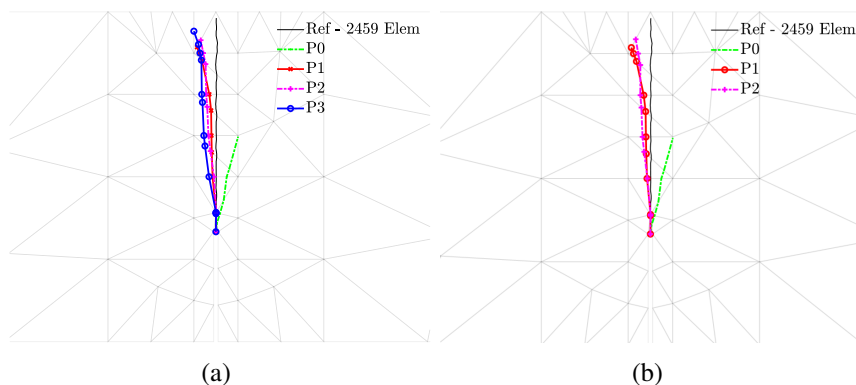


Figura 3.27 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e  $MEFG^{FT} Pol^i$ : (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Na Fig. 3.27 nota-se boa correspondência entre o resultados desta pesquisa com os dados da referência (uma malha refinada com 2459 elementos). Observa-se a tendência dos resultados de propagação se aproximarem mais da referência a medida que o grau polinomial aumenta.

Os resultados adiante referem-se ao MEF $G/S^{FT}$ . A Fig.3.28 apresenta as curvas  $P$ - $CMOD$  para as situações em que foram utilizadas a estratégia  $Pol^c$  (Fig. 3.28(a)) bem como a  $Pol^i$  (Fig. 3.28(b)).

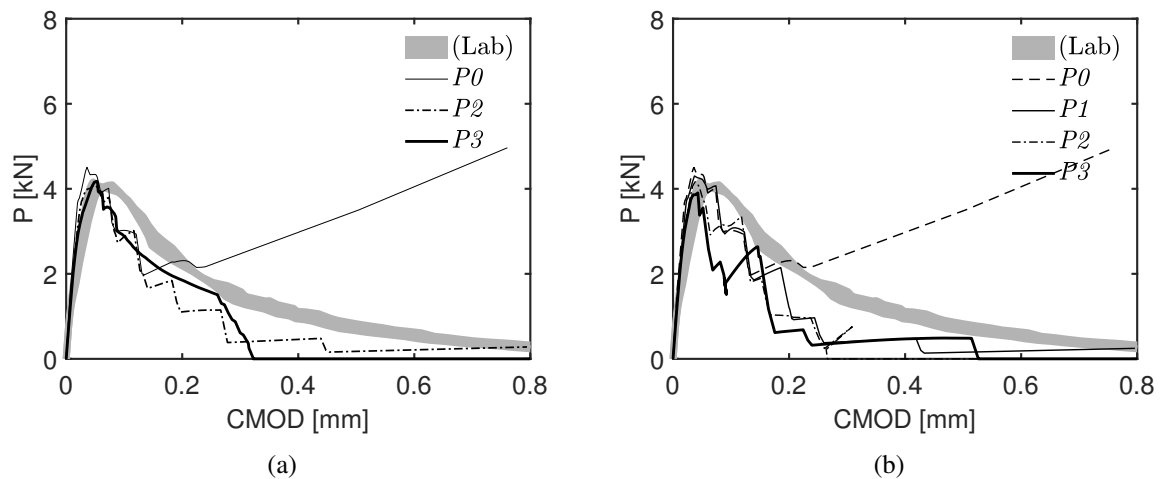


Figura 3.28 – Curvas  $P$  –  $CMOD$  experimentais e numéricas (MEFG/ $S^{FT}$ ): (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Observa-se que o MEF $G/S^{FT}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas e a experimental. A Fig. 3.29 e a Fig. 3.30 apresentam a avaliação da eficiência computacional. Foi observado comportamento semelhante aos dos gráficos apresentados na seção anterior onde o  $GDL^{proc}$  demonstrou uma tendência de aumentar a medida que o grau polinomial aumentava.

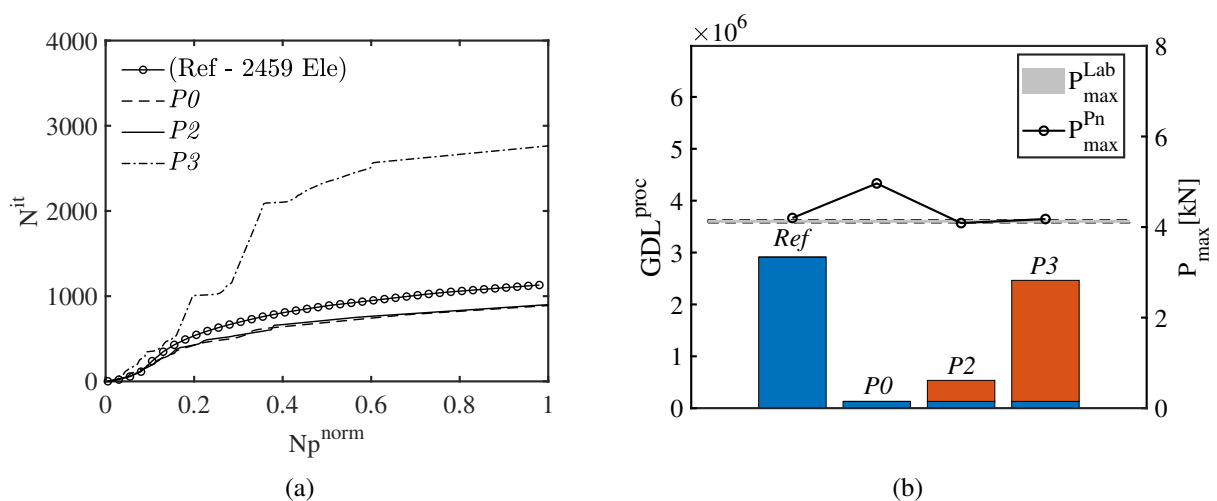


Figura 3.29 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{FT}$   $Pol^c$ .

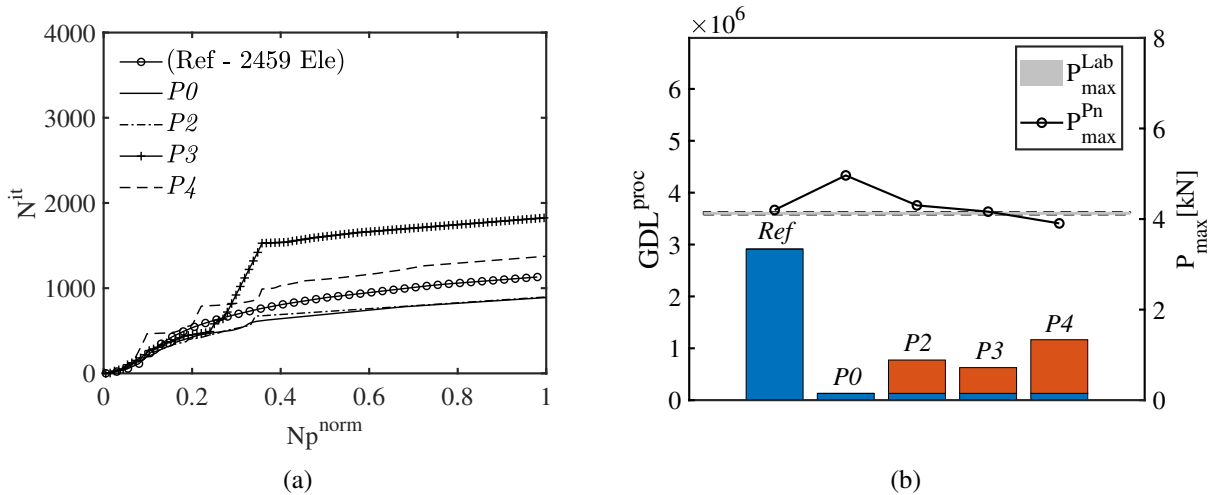


Figura 3.30 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 101 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/ $S^{FT}$  Pol<sup>i</sup>.

No caso do  $N^{it}$  normalizado tanto na Fig. 3.29(a) como na Fig. 3.30(a) não foi observado comportamento semelhante aos dos gráficos apresentados na seção com modelo de dano contínuo. Ocorre um comportamento inverso. Esse efeito acontece devido à propagação da trinca que naturalmente gera uma instabilidade no sistema de equações, exigindo mais iterações para o resultado convergir, conforme explicado anteriormente.

Na Fig. 3.31 nota-se boa correspondência entre os resultados desta pesquisa com os dados da referência (uma malha refinada com 2459 elementos). Observa-se a tendência dos resultados de propagação se aproximarem mais da referência a medida que o grau polinomial aumenta.

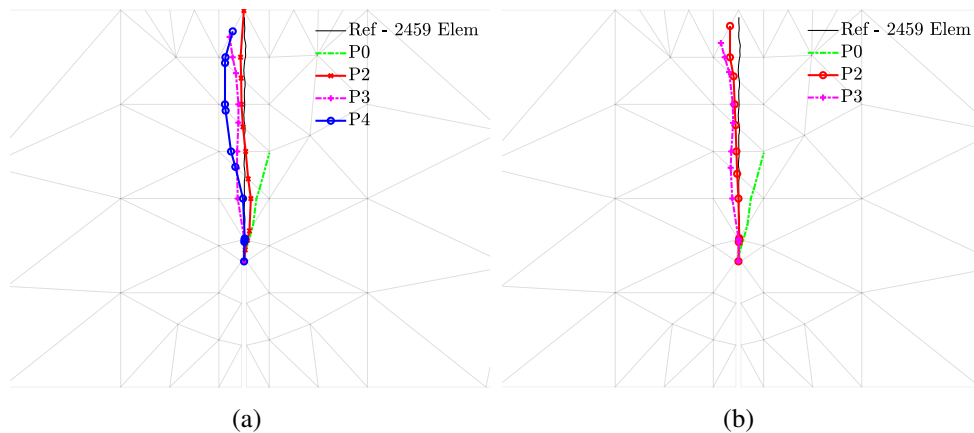


Figura 3.31 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEFG/ $S^{FT}$ : (a) Pol<sup>i</sup>; (b) Pol<sup>c</sup>.

### 3.6 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO

Este capítulo dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEFG/ $S^{FT}$ , com modelo de dano bilinear contínuo (C) e contínuo-descontínuo (C-D) em simulações 2D sob modo misto



de fratura. O primeiro modelo analisado foi a viga sob cisalhamento em quatro pontos com entalhe central, ou *Four Point Shear - Single Edge Notch (FPS-SEN)*, o segundo a Chapa em L e o terceiro um fêmur humano. Os ensaios numéricos foram realizados através do controle de deslocamento.

### 3.6.1 - Simulações com *FPS-SEN*

Os resultados das simulações numéricas da *FPS-SEN* para materiais cimentícios convencionais foram comparados com resultados experimentais extraídos do trabalho de Schlangen (1993). A Fig. 3.32 ilustra a geometria utilizada para este ensaio de cisalhamento. Os dados geométricos, os parâmetros de fratura e os relativos ao material são especificados pela Tab. 3.6. As condições de contorno são constituídas por um apoio de segundo gênero na parte inferior direita da viga e por outro de primeiro gênero na parte inferior central restringindo o movimento vertical. As placas de carga apresentam largura igual a 20 mm e centros localizados conforme a Fig. 3.32.

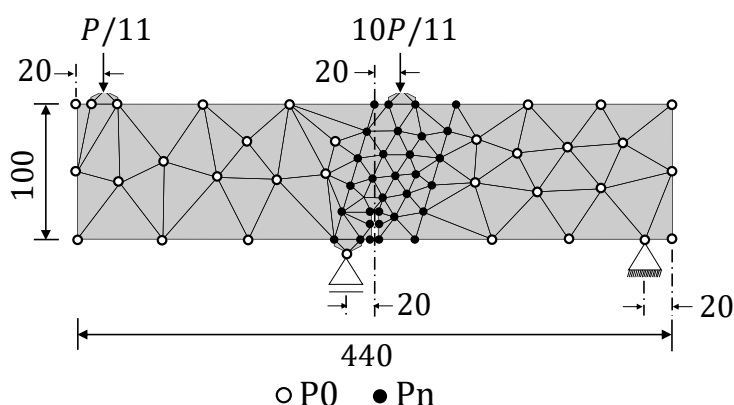


Figura 3.32 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo - espessura = 100 mm (todas as dimensões em mm).

Para as simulações numéricas utilizou-se uma malha de elementos finitos conforme a Fig. 3.32. Os nós  $P_n$  indicam onde houve aplicação do enriquecimento em cada simulação. Os parâmetros de material foram obtidos de Schlangen (1993) e os de fratura de Wells e Sluys (2001). Devido se tratar de uma situação de modo misto de fratura foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ). Em todas as simulações adotou-se  $\sigma = 0.01$  e  $k = 1.0$  como parâmetros para a PU *flat-top*.

Tabela 3.6 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio *FPS-SEN*

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material		
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
100,0	34,0	0,25	35000	3,0	0,20

#### 3.6.1.1 - *FPS-SEN* e $MEFG/S^{FT}$ com modelo de dano contínuo

Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao  $MEFG/S^{FT}$ . A Fig. 3.33 mostra as curvas  $P-CMSD$  para ambas as situações (tanto com a estratégia  $Pol^c$  como  $Pol^i$ ). Observa-se

que os resultados apresentam boa concordância com os dados experimentais.

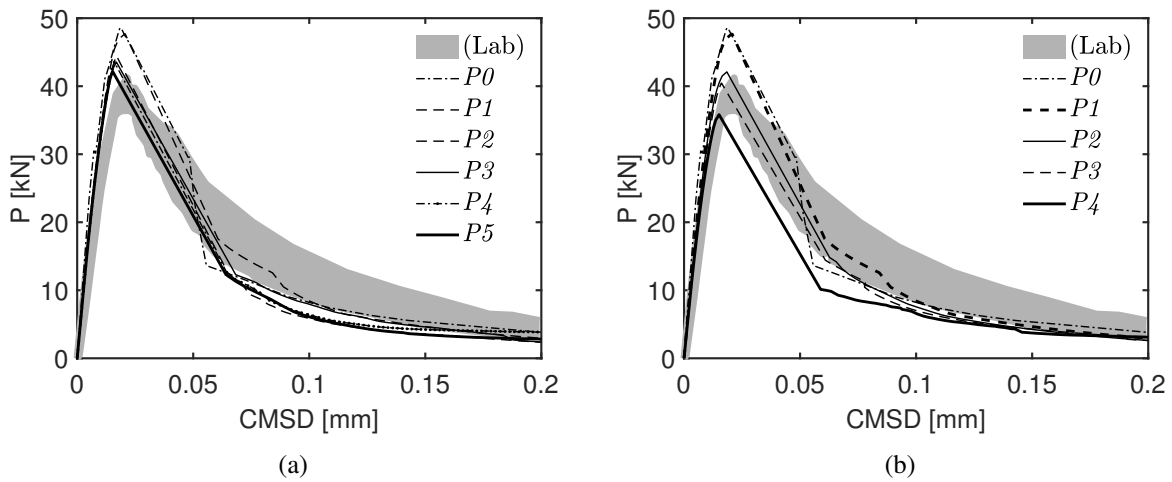


Figura 3.33 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas (MEFG<sup>FT</sup>): (a) Pol<sup>i</sup>; (b) Pol<sup>c</sup>.

Os resultados adiante referem-se ao MEFG/S<sup>FT</sup>. A Fig.3.34 apresenta as curvas  $P-CMOD$  para as situações em que foram utilizadas a estratégia Pol<sup>c</sup> (Fig. 3.34(b)) bem como a Pol<sup>i</sup> (Fig. 3.34(a)).

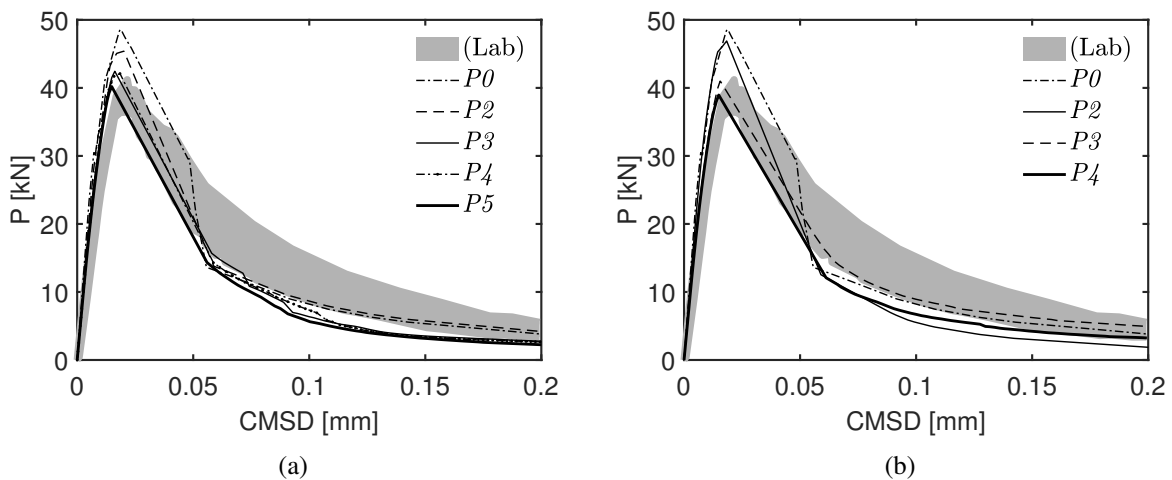


Figura 3.34 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas (MEFG/S<sup>FT</sup>): (a) Pol<sup>i</sup>; (b) Pol<sup>c</sup>.

O MEFG/S<sup>FT</sup> com enriquecimento polinomial mostrou capacidade de conferir maior qualidade aos resultados. Inicialmente as respostas apresentaram-se ruins devido à dificuldade natural de simular situações de modo misto de fratura além da utilização de uma malha grosseira nas simulações. Observa-se que tanto o  $P_{max}$  quanto a região de *softening* da curva  $P-CMOD$  aproximam-se mais do resultado experimental à medida que o grau polinomial do enriquecimento aumenta.

Na Fig. 3.35 e na Fig. 3.36 observa-se que  $N^{it}$  é menor na simulação P0. Logo, a convergência é mais rápida nesse caso. Contudo, a simulação P0 não apresenta resultados satisfatórios nos

campos de tensão-deformação, o que prejudica também a boa representação do dano. Isso fica claro quando observa-se o  $P_{max}$  bem distante da faixa experimental. Portanto, é preciso equilíbrio para buscar eficiência computacional com resultados de qualidade.

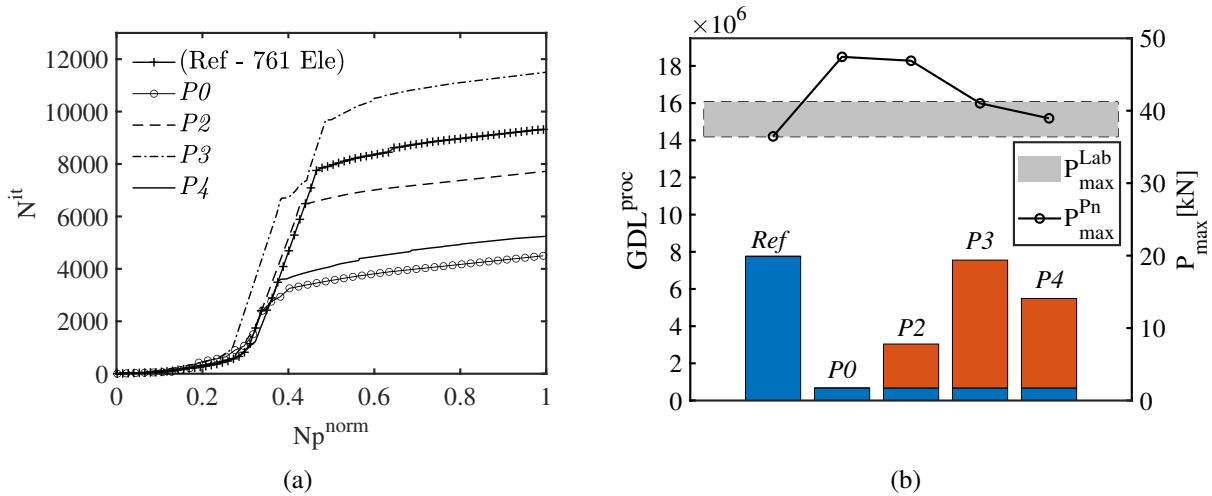


Figura 3.35 – Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>c</sup>.

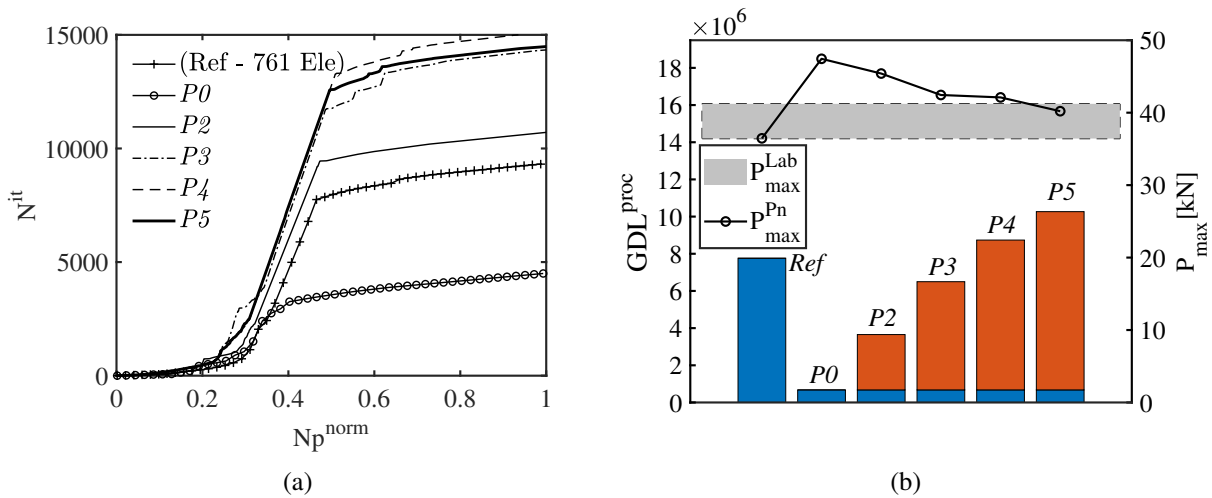


Figura 3.36 – Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>i</sup>.

Nota-se que, de modo geral, as simulações utilizando a estratégia Pol<sup>c</sup> apresentam  $N^{it}$  e  $GDL^{proc}$  menor em comparação com os respectivos casos com estratégia Pol<sup>i</sup>. A inexistência dos termos cruzados dos polinômios no conjunto de funções polinomiais provavelmente gere instabilidades na matriz de rigidez, provocando esse efeito. Outra possibilidade é que esses termos sejam importantes para melhor representar o modo misto de fratura. Mais estudos sobre isso precisam ser realizados.

As Figs. 3.37 e 3.38 mostram as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/S como do MEFG/S<sup>FT</sup>, com estratégia Pol<sup>c</sup>, para comparação. Observa-se que, a exceção de

$P4$ , tanto o  $N^{it}$  normalizado como o  $GDL^{proc}$  foram melhores quando utilizou-se o MEFG/S. O  $P_{max}$  apresentado pelas simulações com ambos os métodos também mostrou-se similar. Portanto, neste caso a metodologia com PU padrão apresentou-se, de maneira geral, com melhor eficiência.

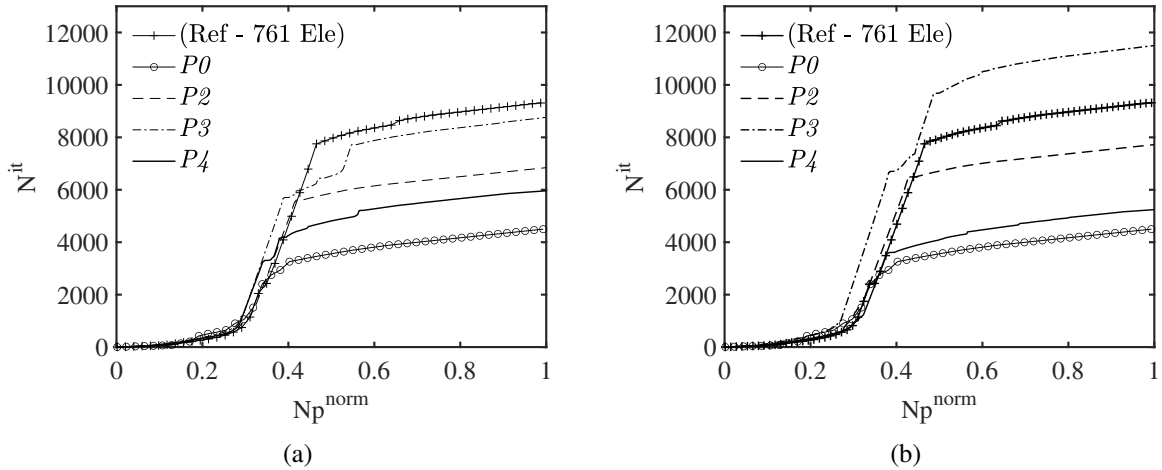


Figura 3.37 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia  $Pol^c$  para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

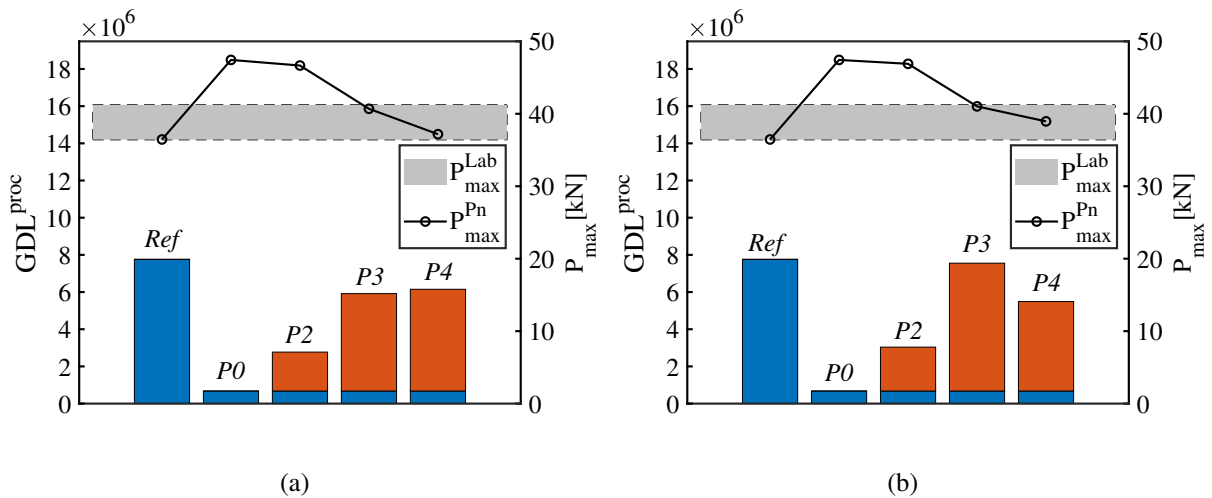


Figura 3.38 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia  $Pol^c$  para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

Já as Figs. 3.39 e 3.40 mostram as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/S como do MEFG/S<sup>FT</sup>, com estratégia  $Pol^i$ . Semelhantemente ao observado nas simulações com a estratégia  $Pol^c$ , observa-se que tanto o  $N^{it}$  normalizado como o  $GDL^{proc}$  são melhores no MEFG/S. Nota-se ainda que o  $P_{max}$  apresentado pelas simulações com ambos os métodos mostrou-se similar. Deste modo, conclui-se que, neste caso, a metodologia com PU padrão apresentou melhor eficiência computacional.

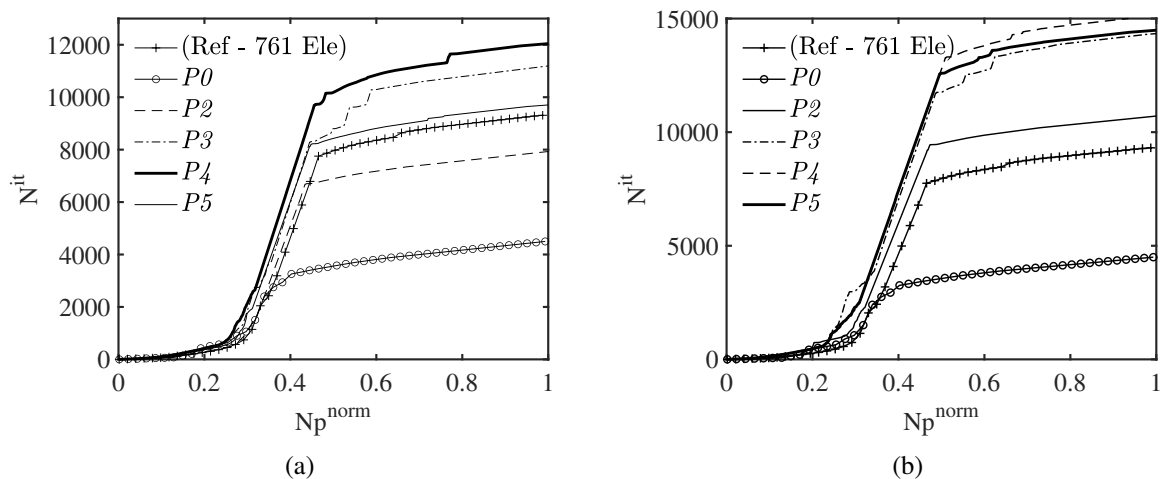


Figura 3.39 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia  $Pol^i$  para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

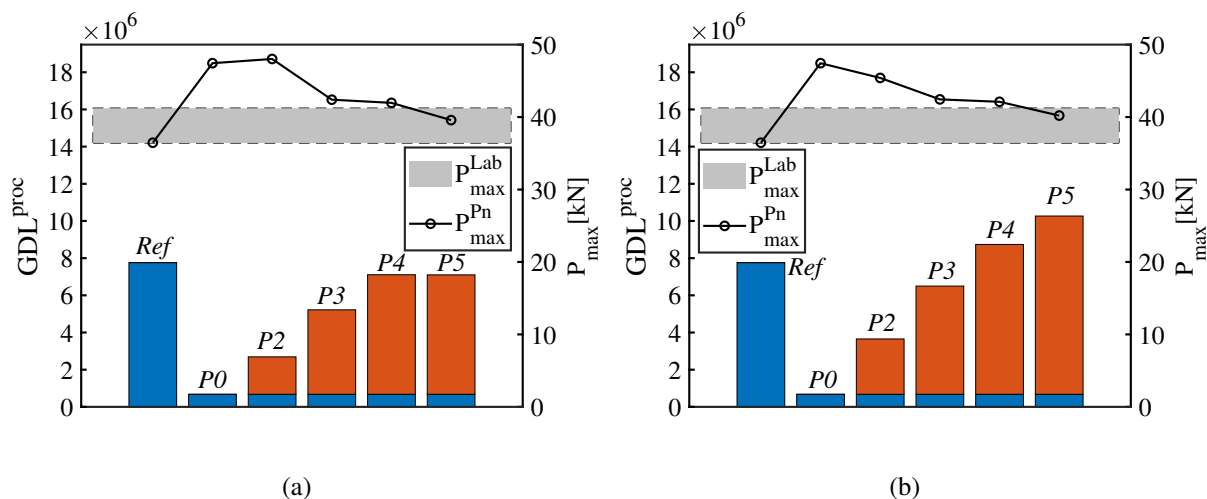


Figura 3.40 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia  $Pol^i$  para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

Tabela 3.7 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia  $Pol^c$ .

Grau	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$
Ref	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060
P0	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500
P1	48.2457	39644530	47.7270	3552410	*	*	*	*
P2	40.7374	3426780	42.1039	5977630	46.6634	2770460	46.8988	3038510
P3	36.1098	5877590	40.4870	5216900	40.6915	5916180	41.0240	7554100
P4	36.4619	9399740	38.3242	18704500	37.1833	6148700	38.9546	5490490

A Tab. 3.7 e a Tab. 3.8 apresentam um sumário dos resultados de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  para os métodos generalizados abordados neste trabalho (MEFG, MEFG/S, MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup>)

utilizando as estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ , respectivamente. Nota-se que, diferente do observado nas análises em Modo I, as simulações com PU *flat-top* não apresentaram  $GDL^{proc}$  menor que suas correlatas com PU padrão na maioria dos casos. Desta forma, para o Modo Misto, a utilização da PU *flat-top* com os parâmetros  $\sigma=0.01$  e  $k=1.0$  não garantiu melhor eficiência computacional que os ensaios com PU padrão.

Tabela 3.8 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia  $Pol^i$ .

Grau	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$
Ref	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060
P0	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500
P1	47.2083	3768190	47.7270	3552410	*	*	*	*
P2	43.4137	4240030	44.4759	5617930	48.0198	2690210	45.4030	3653600
P3	41.5142	4661710	43.5453	6861290	42.4012	5220450	42.4417	6497730
P4	40.2475	6492150	43.5353	8333850	41.9633	7108000	42.1087	8737230
P5	41.3589	16659400	42.1951	8973080	39.5779	7101210	40.2043	10266200

### 3.6.1.2 - FPS-SEN e MEFG/S<sup>FT</sup> com modelo de dano contínuo-descontínuo

Os resultados adiante referem-se ao MEFG/S<sup>FT</sup>. A Fig. 3.41 mostra as curvas  $P$ - $CMSD$  para ambas as situações (com estratégia  $Pol^i$  e  $Pol^c$ ). Observa-se que os resultados apresentam boa concordância com os dados experimentais, bem como correspondência com as curvas da Fig. 3.34.

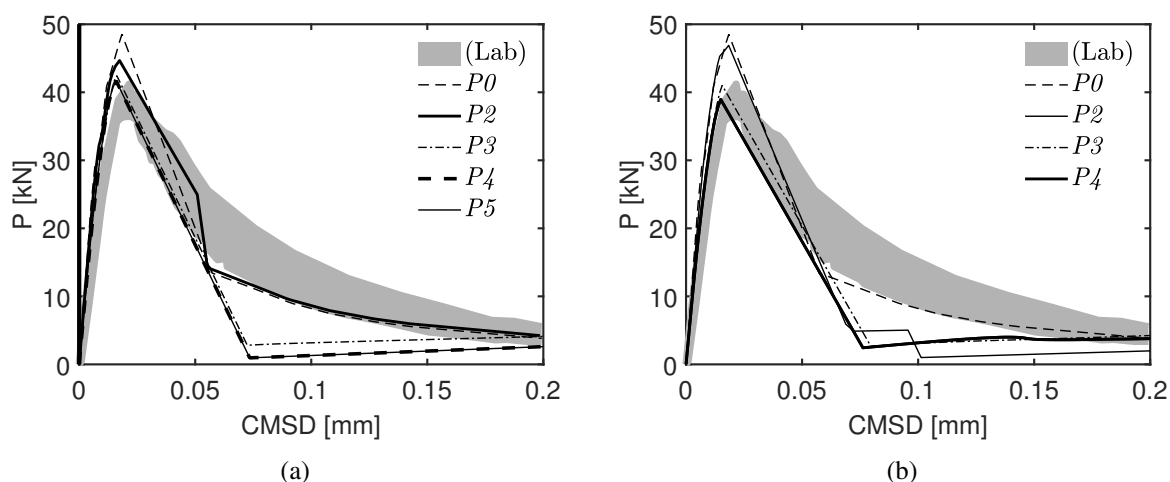


Figura 3.41 – Curvas  $P$ - $CMSD$  experimentais e numéricas - malha com 106 elementos e modelo de dano contínuo-descontínuo: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Nota-se ainda que as mudanças de derivada das curvas são mais abruptas que aquelas apresentadas pelas curvas da Fig. 3.34. Isto se deve ao fato dos elementos cortados serem muito grandes. Este fato é confirmado pelas curvas referentes a  $P0$  e  $P2$  (na Fig. 3.41(a)), em ambas, o amolecimento não apresentou as mudanças bruscas de derivada justamente pelo fato de não ter ocorrido propagação da trinca nestes casos.

A Fig. 3.42 e a Fig. 3.43 apresentam a avaliação da eficiência computacional. Observou-se comportamento diferente dos gráficos apresentados na seção anterior (onde o  $GDL^{proc}$  seguiu a tendência de aumentar a medida que o grau polinomial do enriquecimento aumenta). Nota-se que, mesmo conjuntos com maior número de polinômios apresentaram resultados que outros de menor ordem ( $P4 \times P3$  na Fig. 3.42 e  $P5 \times P2$  na Fig. 3.43, por exemplo). Isso é consequência do número de iterações para convergência que cada situação exigiu para solucionar o problema, conforme será discutido a seguir.

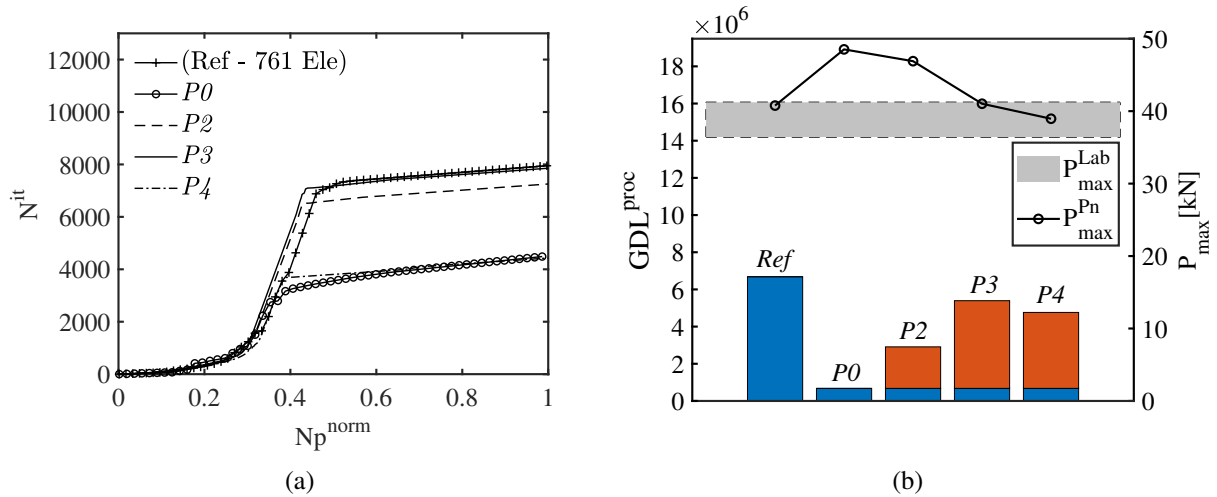


Figura 3.42 – Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>c</sup>.

No caso do  $N_{it}^{norm}$  normalizado tanto na Fig. 3.42(a) como na Fig. 3.43(a) observou-se que, de maneira geral, os resultados indicaram melhor eficiência computacional a medida que o grau polinomial do enriquecimento tornou-se maior.

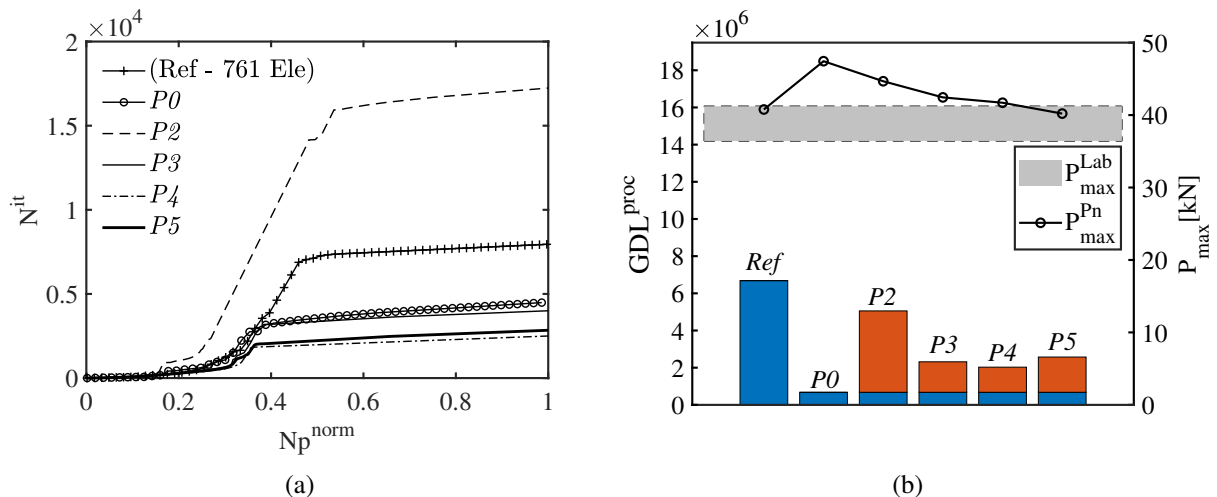


Figura 3.43 – Avaliação da eficiência computacional para FPS-SEN - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>i</sup>.

Mesmo com a instabilidade gerada pelo surgimento de situações em que nós são enriquecidos

com diferentes tipos de funções (polinomial e Heaviside), diferente do que ocorre nas simulações em Modo I (TPB - onde a trinca se propaga quase que descrevendo uma reta), o enriquecimento polinomial contribui para um melhor mapeamento das mudanças de direção da trinca (quando houve propagação), próprias deste modelo. Desta forma, o processo de convergência é favorecido.

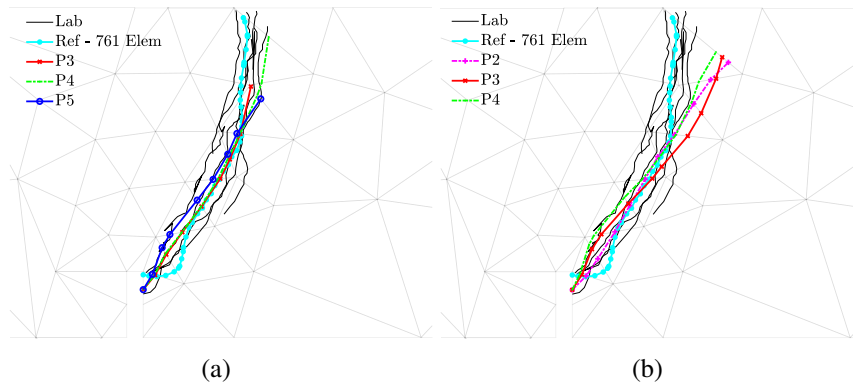


Figura 3.44 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEFG/S<sup>FT</sup> para o modelo FPS-SEN: (a) Pol<sup>i</sup>; (b) Pol<sup>c</sup>.

A Fig. 3.44 mostra a boa correspondência entre os resultados de propagação da trinca desta pesquisa com os dados da referência (uma malha refinada com 761 elementos) e com o trincamento experimental. Fazendo uma correlação entre as Figs. 3.42 e 3.43 e a Fig. 3.44, entende-se a influência do processo de propagação da trinca na velocidade de convergência e, portanto, na eficiência computacional. Percebe-se que quando a trinca segue uma direção incompatível com o comportamento físico, gera-se um sistema cuja convergência torna-se mais difícil, visto que começa a haver uma incorreta danificação em regiões impróprias. Quando o dano é incoerente com o comportamento físico do ensaio a convergência é prejudicada, logo, maior número de iterações para o resultado convergir é exigido.

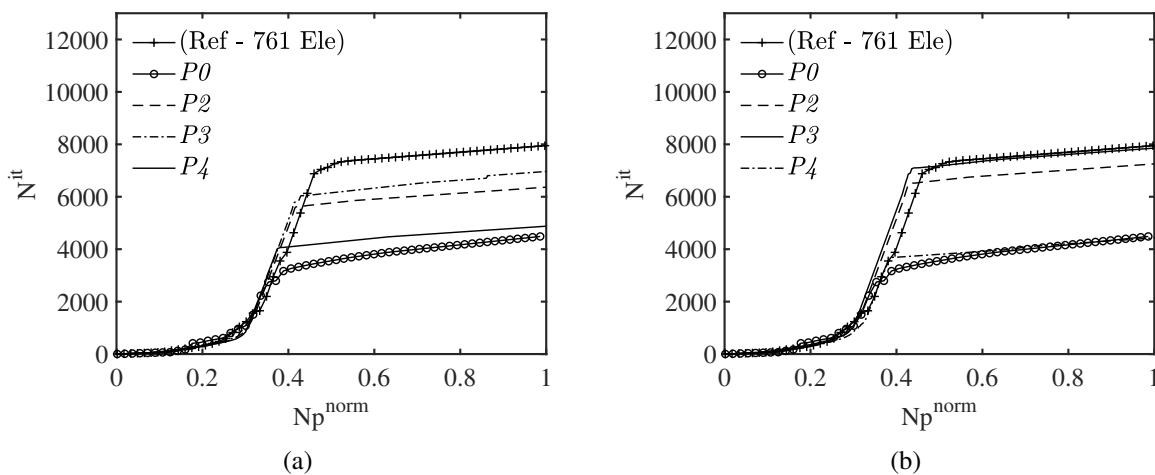


Figura 3.45 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia Pol<sup>c</sup> para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.



As Figs. 3.45 e 3.46 mostram as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/S como do MEFG/S<sup>FT</sup>, com estratégia Pol<sup>c</sup>, para comparação. Observa-se que, a exceção de P4, tanto o  $N^{it}$  normalizado como de  $GDL^{proc}$  foram melhores quando utilizou-se o MEFG/S (ou seja, com PU padrão). O  $P_{max}$  apresentado pelas simulações com ambos os métodos mostrou-se similar.

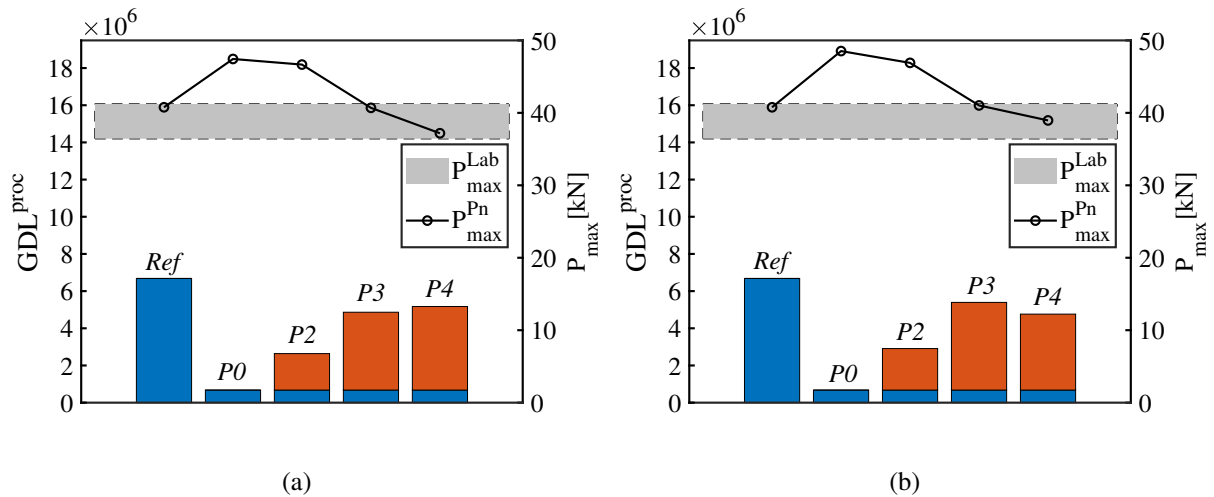


Figura 3.46 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia Pol<sup>c</sup> para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

Já as Figs. 3.47 e 3.48 mostram as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/S como do MEFG/S<sup>FT</sup>, com estratégia Pol<sup>i</sup>. Observa-se que tanto o  $N^{it}$  normalizado como o  $GDL^{proc}$  são melhores no MEFG/S<sup>FT</sup>. O fato do  $N^{it}$  normalizado, no caso MEFG/S<sup>FT</sup>, apresentar comportamento melhor que na simulação P0 (corroborando a afirmação anterior, sendo P2 a exceção) indica aspecto positivo da abordagem MEFG/S<sup>FT</sup>. Consequentemente o  $GDL^{proc}$  tende a ser melhor também na simulações com PU *flat-top*, como de fato ocorre. Nota-se ainda que o  $P_{max}$  apresentado pelas simulações com ambos os métodos mostrou-se similar.

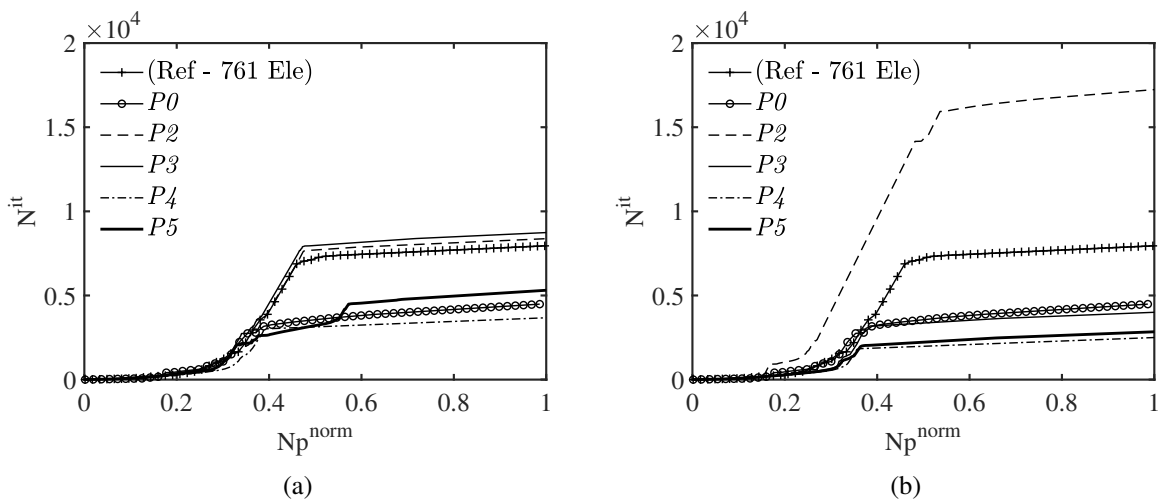


Figura 3.47 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia Pol<sup>i</sup> para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

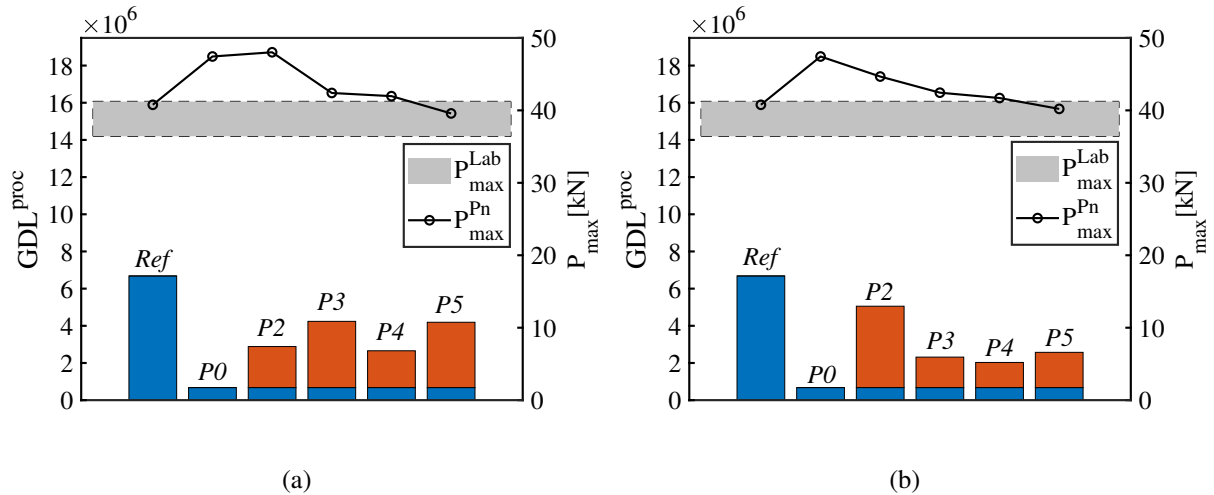


Figura 3.48 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia  $Pol^i$  para FPS-SEN: (a) MEFG/S; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

A Tab. 3.9 e a Tab. 3.10 apresentam um sumário dos resultados de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  para os métodos generalizados abordados neste trabalho (MEFG, MEFG/S, MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup>) utilizando as estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ , respectivamente. Nota-se que, diferente do observado nas análises em Modo I, as simulações com PU *flat-top* somente apresentaram  $GDL^{proc}$  menor que suas correlatas com PU padrão quando enriquecimentos de mais alto grau foram utilizados (em geral  $P3$  e  $P4$  no caso  $Pol^c$ ;  $P4$  e  $P5$  no caso  $Pol^i$ ). De modo geral, as simulações com a estratégia  $Pol^i$  apresentaram  $GDL^{proc}$  menor que suas respectivas com  $Pol^c$ , embora demonstre resultados de  $P_{max}$  com qualidade levemente menor. Características esperadas devido ao menor quantidade de polinômios compondo o conjunto  $Pol^i$ .

Tabela 3.9 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia  $Pol^c$ .

Grau	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$
Ref	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130
P0	47.4635	676500	47.4635	676500	47.4635	676500	48.5277	676500
P1	48.3416	3331150	46.6063	5329910	*	*	*	*
P2	40.4459	4712880	40.4017	5150330	46.6634	2638130	46.8988	2909780
P3	40.3889	4622340	39.5453	2216430	40.6915	4863700	41.0240	5393190
P4	35.5471	6330270	34.9918	4765550	37.1833	5171990	38.9546	4762630

Tabela 3.10 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia  $Pol^i$ .

Grau	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$	$P_{max}$ [kN]	$GDL^{proc}$
Ref	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130
P0	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500
P1	48.3416	3331150	46.6063	5329910	*	*	*	*
P2	43.4137	3637470	44.1229	4400260	48.0198	2884460	44.6692	5054440
P3	43.8519	4302200	43.5453	6721870	42.4012	4239780	42.4417	2316040
P4	43.5939	5579210	43.5353	2871130	41.9613	2656660	41.7033	2028870
P5	*	*	*	*	39.5779	4191060	40.2043	2572840

### 3.6.2 - Simulações com chapa em L

Os parâmetros de fratura e os relativos ao material foram retirados de Winkler *et al.* (2001) e são apontados pela Tab. 3.11. Os resultados das simulações numéricas foram comparados com os dados extraídos dos trabalhos de Winkler *et al.* (2001,2004). A Fig. 3.49 ilustra a geometria deste ensaio, sendo  $L = 250\text{mm}$  e a espessura  $t = 100\text{mm}$ . A condição de contorno é constituída pelo engaste na parte inferior. As simulações numéricas foram realizadas com controle de deslocamento, sendo aplicados na região indicada por  $q$  incrementos de  $u = 0.002\text{mm}$ .

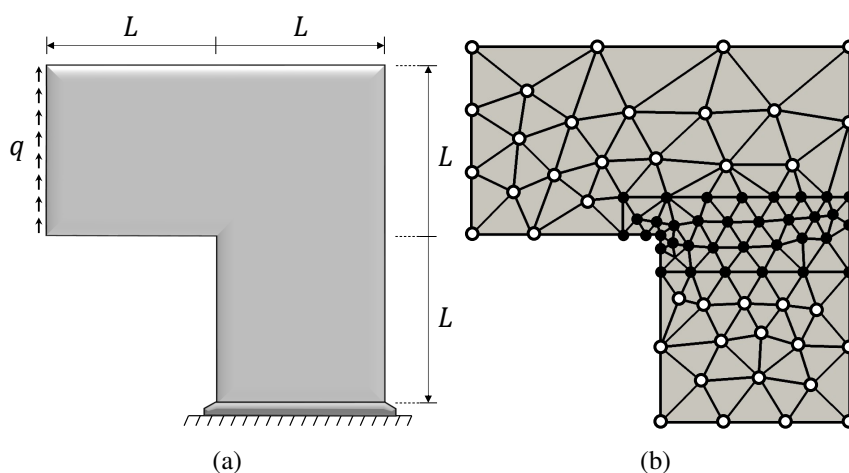


Figura 3.49 – Modelo e discretização em elementos finitos para *Chapa em L*: (a) Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo; (b) Malha com 125 elementos e estratégia de enriquecimento.

A Fig. 3.49(b) indica também a estratégia de enriquecimento utilizada nas simulações com o modelo da chapa em L, onde os nós pretos indicam onde foi aplicado enriquecimento polinomial. Foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

Tabela 3.11 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio da Chapa em L

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/mm)	$G_f$ (N/mm)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\nu$
0,13	0,09	0,25	25850	2,70	31,00	0,18

#### 3.6.2.1 - Chapa em L e MEFG/S<sup>FT</sup> com modelo de dano contínuo

Serão apresentados a seguir os resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento ( $d$ ) na face onde o carregamento é aplicado, utilizando tanto a estratégia Pol<sup>c</sup> como Pol<sup>i</sup>, aplicando as metodologias MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup>. Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao MEFG<sup>FT</sup> (Fig. 3.50 e seguintes).

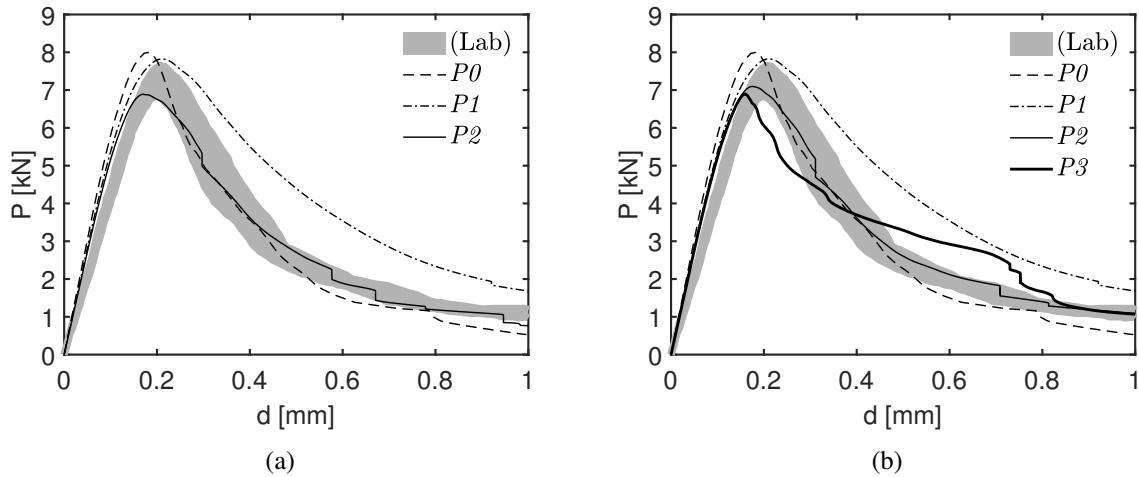


Figura 3.50 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas (MEFG<sup>FT</sup>): (a) Pol<sup>c</sup>; (b) Pol<sup>i</sup>.

Observa-se que tanto o ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P-d$  são melhor representadas conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta. Naturalmente, quanto maior o refinamento  $p$ , menor será o grau do enriquecimento requerido. Por este motivo, para a estratégia Pol<sup>i</sup> foi necessário grau de enriquecimento P3 enquanto para a estratégia Pol<sup>c</sup> apenas P2 foi suficiente para a obtenção de resultados satisfatórios.

A Fig. 3.51 e a Fig. 3.52 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações com a malha de 125 elementos, com estratégia Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>. É possível notar na Fig. 3.51(b) e na Fig. 3.52(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto de funções. Ainda assim, observa-se que ambas as estratégias (Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>) mostraram-se mais eficientes que a simulação de referência (com a malha mais refinada), haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ .

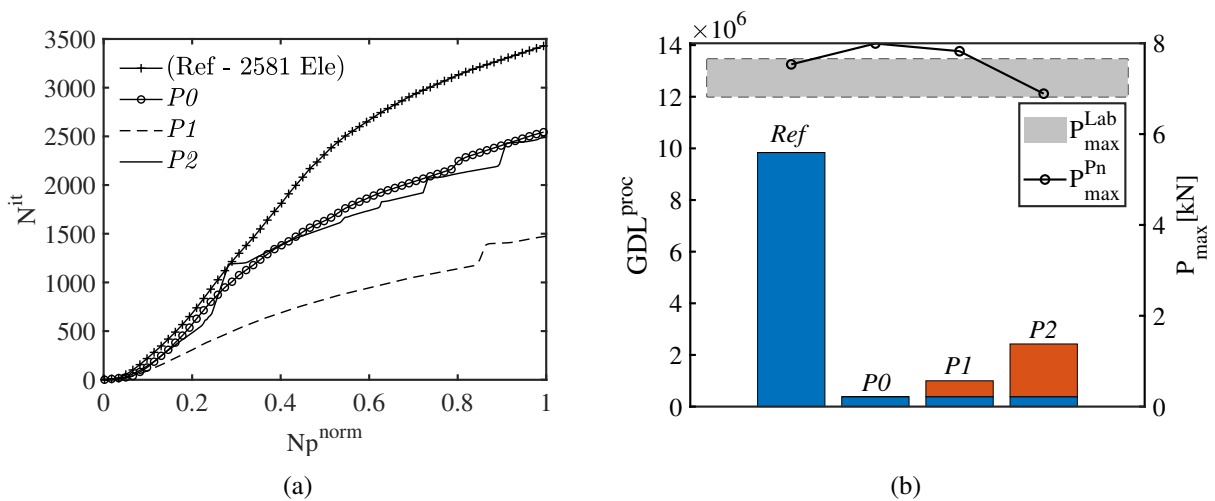


Figura 3.51 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG<sup>FT</sup> Pol<sup>c</sup>.

Observa-se ainda que o  $N^{it}$  normalizado tanto na Fig. 3.51(a) como na Fig. 3.52(a) apresentou-se melhor nas simulações com enriquecimento, apresentando resultados melhores que a referência inclusive. Portanto, o MEF $G^{FT}$  (com malha grosseira) mostrou-se mais eficiente do ponto de vista computacional que o MEF (no ensaio de referência com malha refinada).

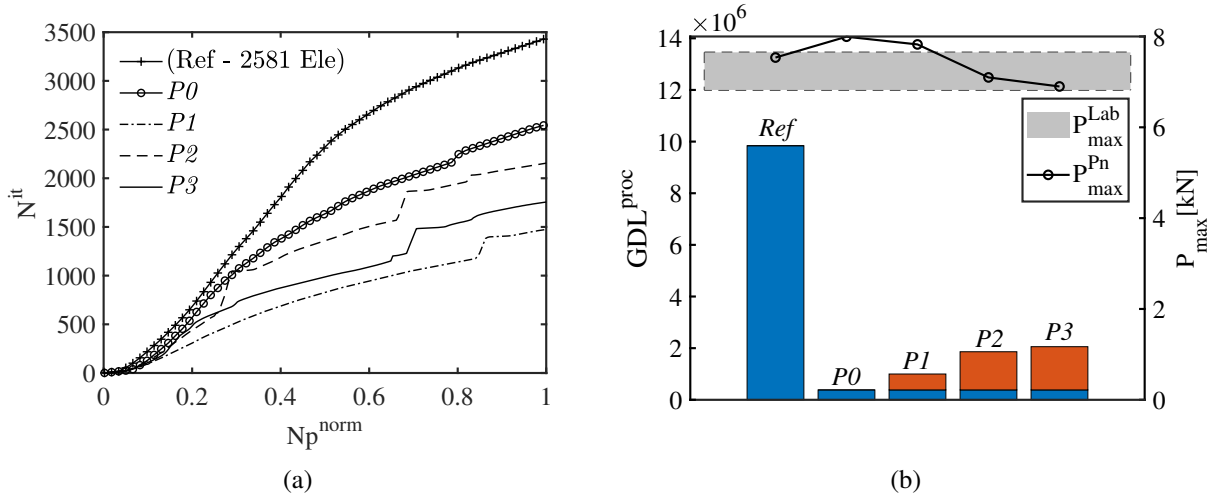


Figura 3.52 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G^{FT}$  Pol $^i$ .

Os resultados adiante referem-se ao MEF $G/S^{FT}$ . A Fig.3.53 apresenta as curvas  $P-d$  para as situações em que foram utilizadas a estratégia Pol $^c$  (Fig. 3.53(a)) bem como a Pol $^i$  (Fig. 3.53(b)). Observa-se que o MEF $G/S^{FT}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas e a experimental.

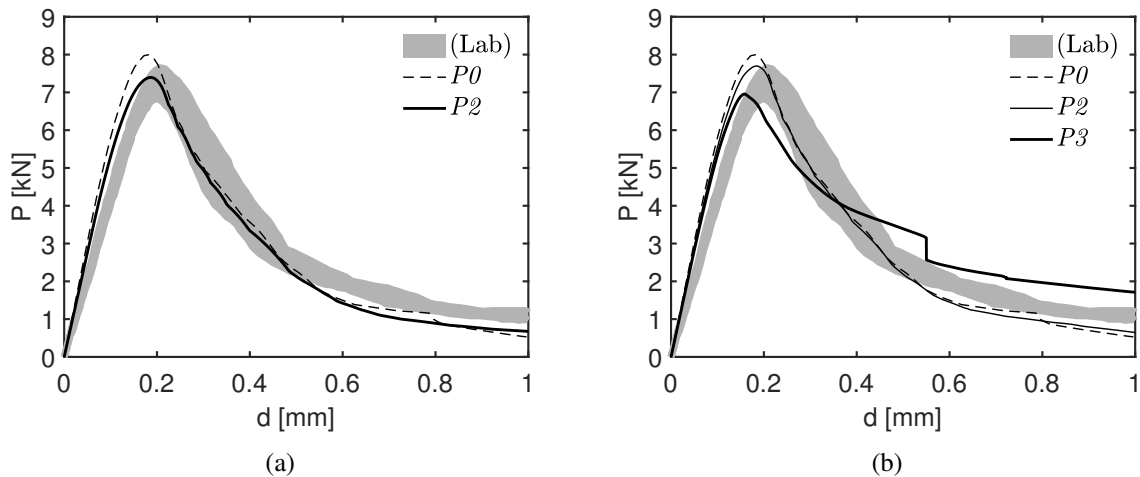


Figura 3.53 – Curvas  $P-d$  experimentais e numéricas (MEFG/ $S^{FT}$ ): (a) Pol $^c$ ; (b) Pol $^i$ .

Observa-se que tanto o ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P-d$  são melhor representadas conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta.

Naturalmente, quanto maior o refinamento  $p$ , menor será o grau do enriquecimento requerido. Por este motivo, para a estratégia  $Pol^i$  foi necessário grau de enriquecimento  $P3$  enquanto para a estratégia  $Pol^c$  apenas  $P2$  foi suficiente para a obtenção de bons resultados.

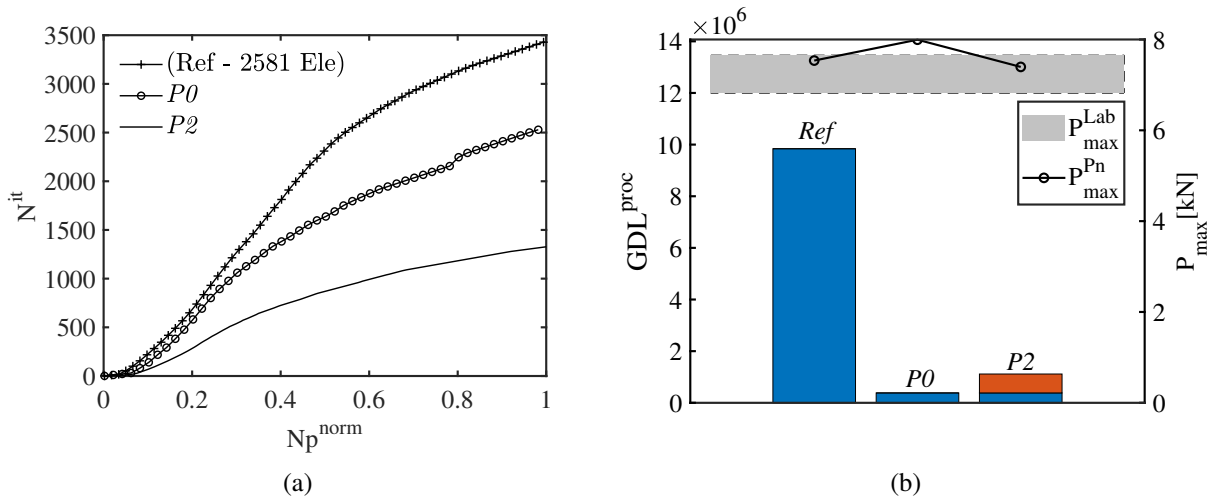


Figura 3.54 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup>  $Pol^c$ .

A Fig. 3.54 e a Fig. 3.55 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações envolvendo a malha de 125 elementos, com estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ . É possível notar na Fig. 3.54(b) e na Fig. 3.55(b) que, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto de funções. Percebe-se ainda que ambas as estratégias ( $Pol^c$  e  $Pol^i$ ) mostraram-se mais eficientes que a simulação de referência (com a malha mais refinada), haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ .

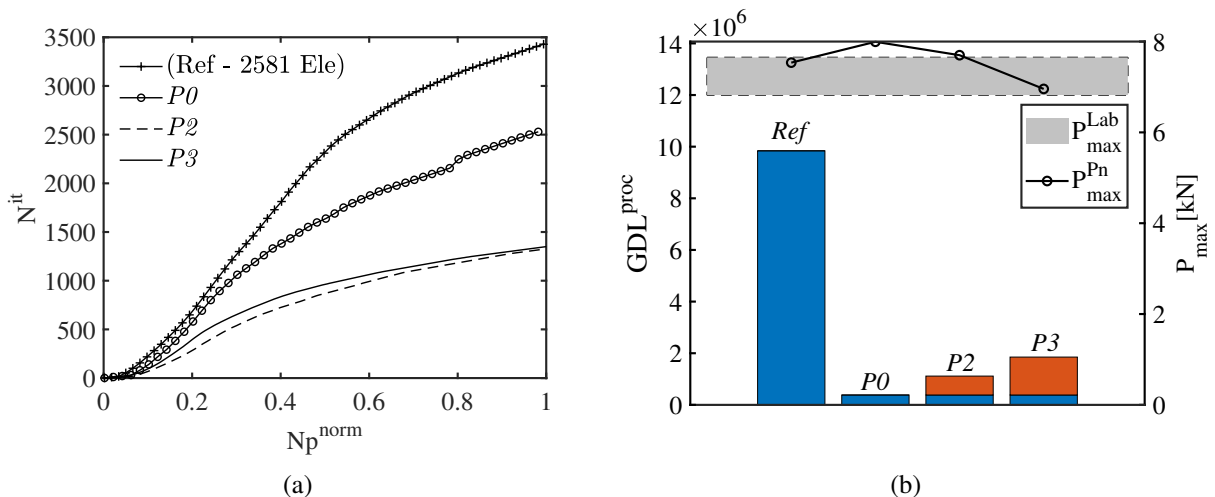


Figura 3.55 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup>  $Pol^i$ .

Observa-se ainda que o  $N^{it}$  normalizado tanto na Fig. 3.54(a) como na Fig. 3.55(a)

apresentou-se melhor nas simulações com enriquecimento, apresentando resultados melhores que a referência inclusive. Portanto, o MEFG/S<sup>FT</sup> (nas simulações com malha grosseira) mostrou-se mais eficiente do ponto de vista computacional que o MEF (no ensaio com malha refinada).

Tabela 3.12 – Valores de  $d_r$  (kN) - estratégia Pol<sup>c</sup>.

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
P0	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
P1	1.314	1432370	1.753	998482	-	-	-	-
P2	0.278	2397090	0.415	2424970	0.350	1688930	0.523	1114850
P3	-	-	-	-	-	-	-	-

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

A Tab. 3.12 e a Tab. 3.13 apresentam um sumário dos resultados de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  para as estratégias Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>, respectivamente. Nota-se que as simulações com PU *flat-top* apresentam, em geral,  $GDL^{proc}$  menor que suas correlatas com PU padrão nas situações em que o enriquecimento polinomial foi utilizado. Observa-se que a qualidade das curvas (representada por  $d_r$ ) é levemente menor nos casos com PU *flat-top* (exceção para a simulação com P3 e MEFG/S<sup>FT</sup>). Ainda assim, todos os casos com enriquecimento apresentaram resultados melhores que os da referência.

Tabela 3.13 – Valores de  $d_r$  (kN) - estratégia Pol<sup>i</sup>.

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
P0	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
P1	1.314	1432370	1.753	998482	-	-	-	-
P2	0.407	4535390	0.587	1860680	0.608	1414810	0.650	1114850
P3	0.687	2762580	0.776	2056620	0.837	3836360	0.765	1851150

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

### 3.6.2.2 - Chapa em L e MEFG/S<sup>FT</sup> com modelo de dano contínuo-descontínuo

Serão apresentados resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento ( $d$ ) na face onde o carregamento é aplicado, utilizando tanto a estratégia Pol<sup>c</sup> como Pol<sup>i</sup>, segundo a metodologia MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup>. Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao MEFG<sup>FT</sup> (Fig. 3.56 e seguintes).

Observa-se que tanto o ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P-d$  foram melhor representados a medida que o grau polinomial do enriquecimento foi se tornando maior. Em geral, quanto maior o refinamento polinomial, menor será o grau do enriquecimento requerido. Por este motivo, para a estratégia Pol<sup>i</sup> foi necessário grau de enriquecimento P3 enquanto para a estratégia Pol<sup>c</sup> apenas P2 foi suficiente para atingir resultados satisfatórios.

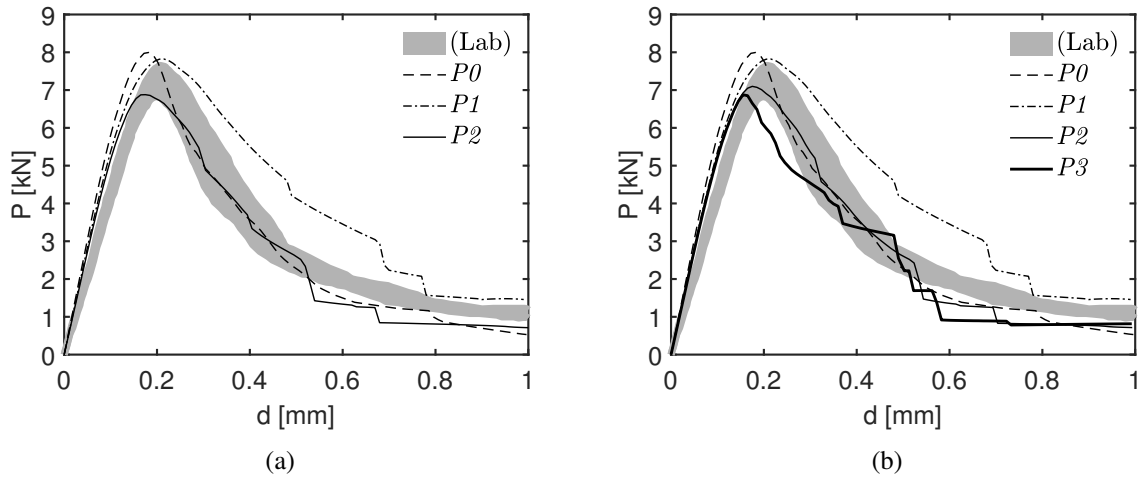


Figura 3.56 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas (MEFG<sup>FT</sup>): (a) Pol<sup>c</sup>; (b) Pol<sup>i</sup>.

Nota-se que as mudanças de derivada das curvas são mais abruptas que aquelas apresentadas pela Fig. 3.50. Isto se deve ao fato dos elementos cortados serem muito grandes (assim, muita energia é dissipada de uma única vez). Esta fato é confirmado pela curva referente a  $P0$  que não apresenta variações bruscas de direção na curva justamente pelo fato de não ter ocorrido propagação da trinca.

A Fig. 3.57 e a Fig. 3.58 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações envolvendo a malha de 125 elementos, com estratégias Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>. É possível notar na Fig. 3.57(b) e na Fig. 3.58(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto de funções. Contudo, observa-se que ambas as estratégias (Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>) mostraram-se mais eficientes que a simulação de referência (com a malha mais refinada), haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ .

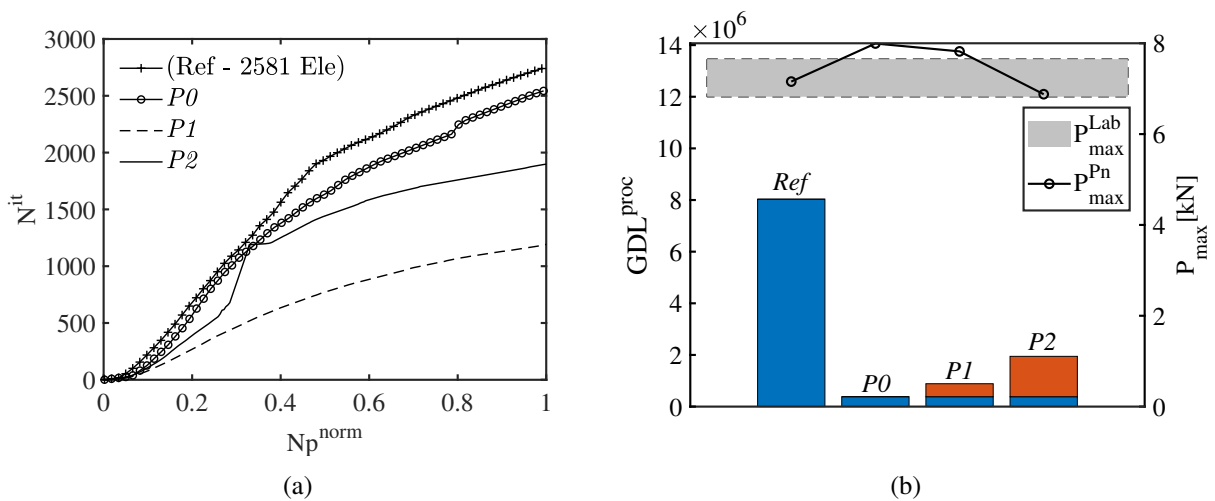


Figura 3.57 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG<sup>FT</sup> Pol<sup>c</sup>.



Observa-se ainda que o  $N^{it}$  normalizado tanto na Fig. 3.51(a) como na Fig. 3.58(a) apresentou-se melhor nas simulações com enriquecimento, apresentando resultados melhores que a referência inclusive. Portanto, o MEF $G^{FT}$  (com malha grosseira) mostrou-se mais eficiente do ponto de vista computacional que o MEF (com malha refinada e PU padrão).

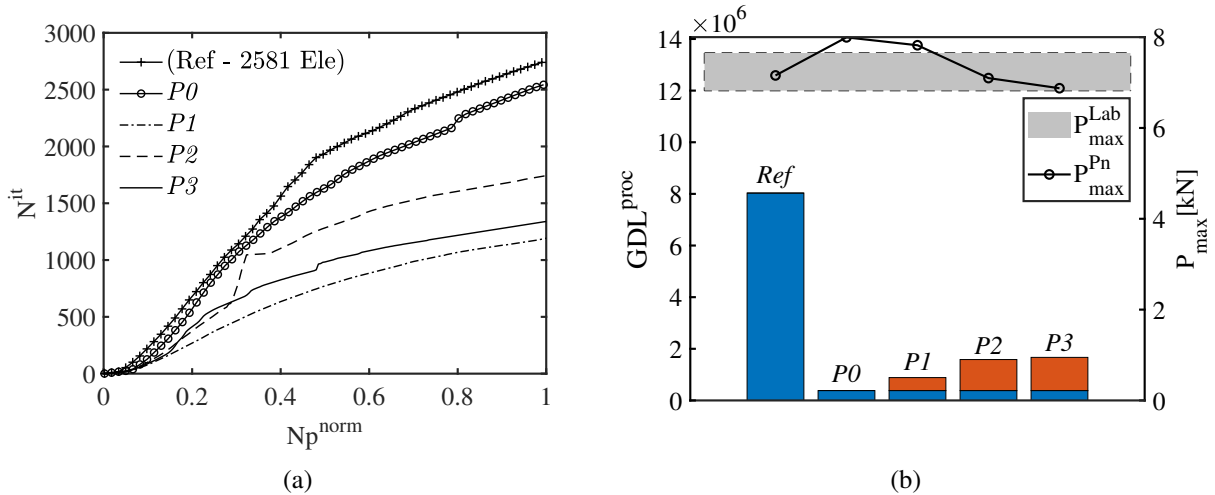


Figura 3.58 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G^{FT}$  Pol $^i$ .

É possível notar na Fig. 3.59 boa correspondência entre os resultados da propagação nas análises com malhas grosseiras e enriquecimento polinomial e o resultado de referência (obtido utilizando uma malha refinada com 2581 elementos finitos triangulares) bem como com o experimental (conforme Winkler *et al.* (2001)).

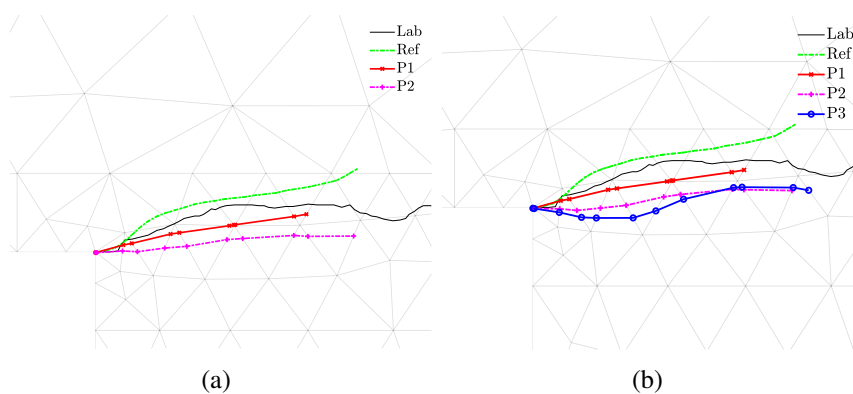


Figura 3.59 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEF $G^{FT}$  para chapa em L: (a) Pol $^c$ ; (b) Pol $^i$ .

Os resultados adiante referem-se ao MEF $G/S^{FT}$ . A Fig.3.60 apresenta as curvas  $P-d$  das simulações com as estratégias Pol $^c$  (Fig. 3.60(a)) e Pol $^i$  (Fig. 3.60(b)). Observa-se que o MEF $G/S^{FT}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, tendo em vista a proximidade entre as curvas numéricas e a experimental.

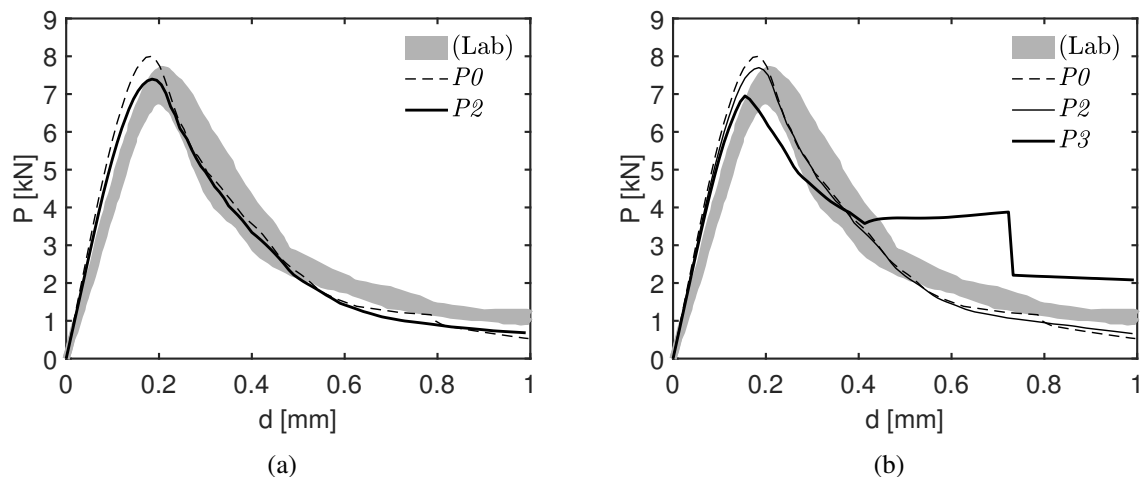


Figura 3.60 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas (MEFG/S<sup>FT</sup>): (a) Pol<sup>c</sup>; (b) Pol<sup>i</sup>.

Observa-se que tanto o ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P-d$  são melhor representadas a medida que o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta. Para um maior refinamento  $p$ , espera-se que seja menor o grau do enriquecimento requerido. Por este motivo, para a estratégia Pol<sup>i</sup> foi necessário grau de enriquecimento  $P3$  enquanto para a estratégia Pol<sup>c</sup> apenas  $P2$  foi suficiente para a obtenção de bons resultados.

Nota-se novamente que as mudanças de derivada das curvas são mais abruptas nos ensaios onde há propagação da trinca. O ensaio  $P0$  não apresenta esse comportamento justamente pelo fato de não ter ocorrido propagação da trinca. Os critérios de propagação no MEFG/S<sup>FT</sup> foram ativados mais adequadamente nas simulações com maior grau polinomial, diferente do MEFG<sup>FT</sup>. Assim sendo, é possível dizer que MEFG<sup>FT</sup> conseguiu descrever melhor os campos de tensão e deformação.

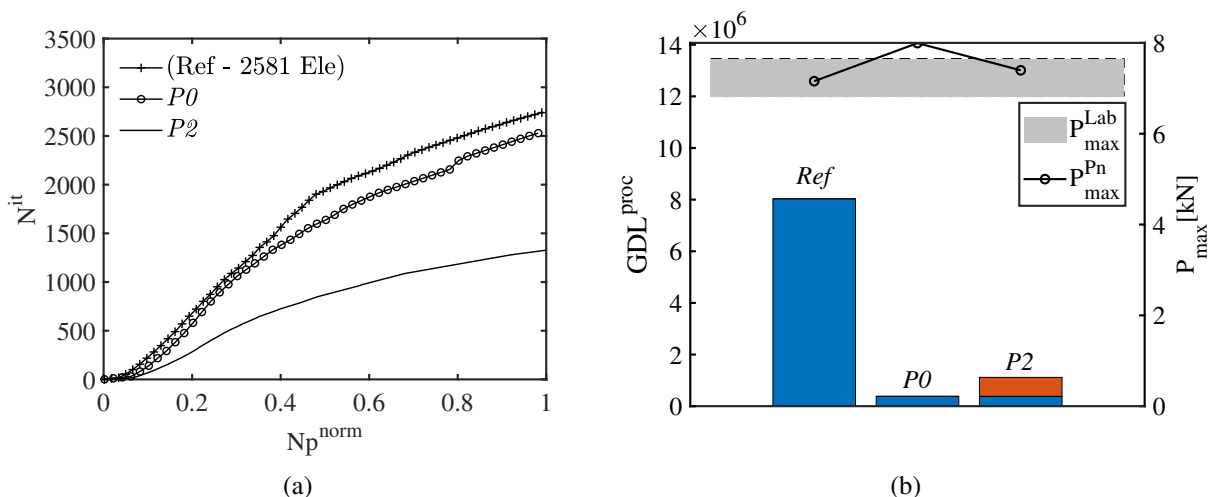


Figura 3.61 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>c</sup>.

A Fig. 3.61 e a Fig. 3.62 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações com

a malha de 125 elementos e estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ . É possível notar na Fig. 3.54(b) e na Fig. 3.55(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto de funções. Observa-se ainda que ambas as estratégias ( $Pol^c$  e  $Pol^i$ ) mostraram-se mais eficientes que a simulação de referência (com a malha mais refinada e MEF convencional), haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ .

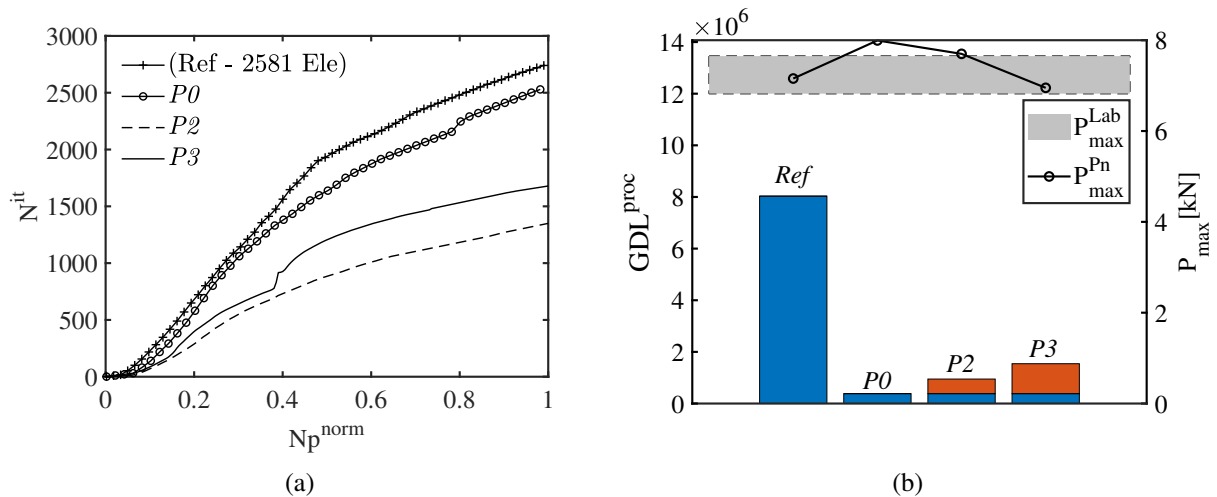


Figura 3.62 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> com estratégia  $Pol^i$ .

Observa-se ainda que o  $N^{it}$  normalizado tanto na Fig. 3.61(a) como na Fig. 3.62(a) apresentou-se melhor nas simulações com enriquecimento, com resultados melhores que a referência inclusive. Portanto, o MEFG/S<sup>FT</sup> (com malha grosseira) mostrou-se mais eficiente do ponto de vista computacional que o MEF (com malha refinada).

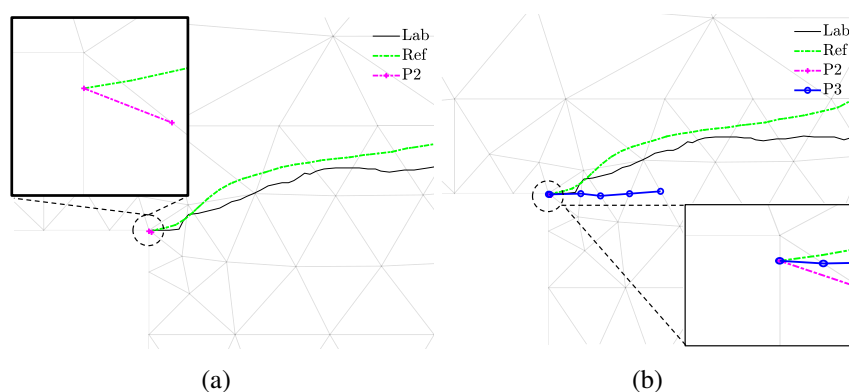


Figura 3.63 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e MEFG/S<sup>FT</sup> para chapa em L: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 3.63 boa correspondência entre os resultados da propagação nas análises com malhas grosseiras e enriquecimento polinomial e o resultado de referência (obtido utilizando uma malha refinada com 2581 elementos finitos triangulares) bem como

com o experimental (conforme Winkler *et al.* (2001)). Percebe-se que nas simulações com *P2* a trinca segue uma direção inicial inadequada e, portanto, não consegue propagar mais.

Tabela 3.14 – Valores de  $d_r$  (kN) com estratégia Pol<sup>c</sup>.

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
<i>P0</i>	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
<i>P1</i>	1.294	1422730	1.658	885330	-	-	-	-
<i>P2</i>	0.455	2281280	0.511	1945950	0.509	1709360	0.523	1115810
<i>P3</i>	-	-	-	-	-	-	-	-

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

A Tab. 3.14 e a Tab. 3.15 apresentam um sumário dos resultados de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  para as estratégias Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>, respectivamente. Nota-se que as simulações com PU *flat-top* e enriquecimento polinomial apresentam, em geral,  $GDL^{proc}$  menor que suas correlatas com PU padrão. Observa-se que a qualidade das curvas é levemente menor nos casos com PU *flat-top*. Contudo, todos os casos com enriquecimento apresentaram resultados melhores que os da referência.

Tabela 3.15 – Valores de  $d_r$  (kN) com estratégia Pol<sup>i</sup>.

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
<i>P0</i>	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
<i>P1</i>	1.294	1422730	1.658	885330	-	-	-	-
<i>P2</i>	0.454	2025740	0.622	1584270	0.750	1266960	0.638	947634
<i>P3</i>	0.557	10809200	0.634	1668070	0.638	26857900	1.150	1541890

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

### 3.6.3 - Simulação de fêmur humano

Serão apresentados a seguir os resultados das simulações de um fêmur humano, realizadas com controle de deslocamentos ( $\delta_v$ ). Esse osso é composto de duas partes: o osso trabecular (esponjoso ou poroso com módulo de elasticidade  $E_t$ ) e o cortical (mais compacto e resistente, com módulo de elasticidade  $E_c$ ). O ensaio numérico foi realizado conforme o experimento promovido por Miura *et al.* (2017). Deste modo, o modelo 2D do fêmur (cortado a 120 mm da ponta do trocânter maior e inclinado 20° no plano coronal ao eixo da diáfise) foi elaborado com elementos triangulares. Foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\epsilon_{eq}^{VM}$ ). Foi considerado estado plano de tensão.

O objetivo dos ensaios foi analisar a força reativa vertical ( $P$ ), o deslocamento vertical ( $d$ ) da região de maior altura (a 120 mm da base), bem como a danificação e fratura decorrentes das condições de carregamento já mencionadas. A Fig. 3.64(a) mostra o modelo utilizado nos ensaios numéricos bem como e as condições de contorno adotadas. Inicialmente a simulação foi feita com uma malha de referência refinada (12437 elementos triangulares), com a finalidade de

avaliar se as condições de contorno (bem como as propriedades dos materiais) foram aplicadas corretamente (Fig. 3.64(b)). As propriedades do material foram retiradas de Özkaya e Nordin (1999) e, as de fratura (da região trabecular), podem ser encontradas em Barth *et al.* (2010) (Tab. 3.16). Foi adotada a espessura  $e = 20$  mm, conforme Alves (2019).

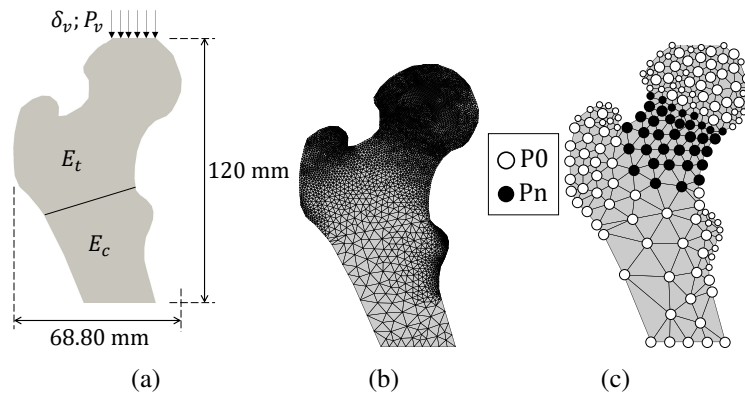


Figura 3.64 – Modelagem de Fêmur: (a) Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo; (b) Malha com 12437 elementos; (c) Malha com 265 elementos.

Tabela 3.16 – Parâmetros de fratura e relativos ao material para ensaio do fêmur

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material							
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	Região trabecular				Região cortical			
			$E$ (GPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$	$E$ (GPa)	$f_c$ (GPa)	$f_t$ (GPa)	$\nu$
8.8445	0.1566	0,25	10	133	50	0,30	20	193	133	0,12

A Fig. 3.65 mostra os resultados das simulações com a malha de referência, modelo de dano contínuo (C) (Fig. 3.65(b)) e contínuo-descontínuo (C-D) (Fig. 3.65(c)). Na Fig. 3.65(a) são apresentadas as curvas numéricas  $P - d$  e também, para comparação, a curva obtida experimentalmente por Miura *et al.* (2017) (Lab) e as curvas numéricas de Carter e Hayes (1977), Minamisawa (1981), Keller (1994) e Keyak e Skinner (1992), obtidas a partir de modelagem computacional em MEF.

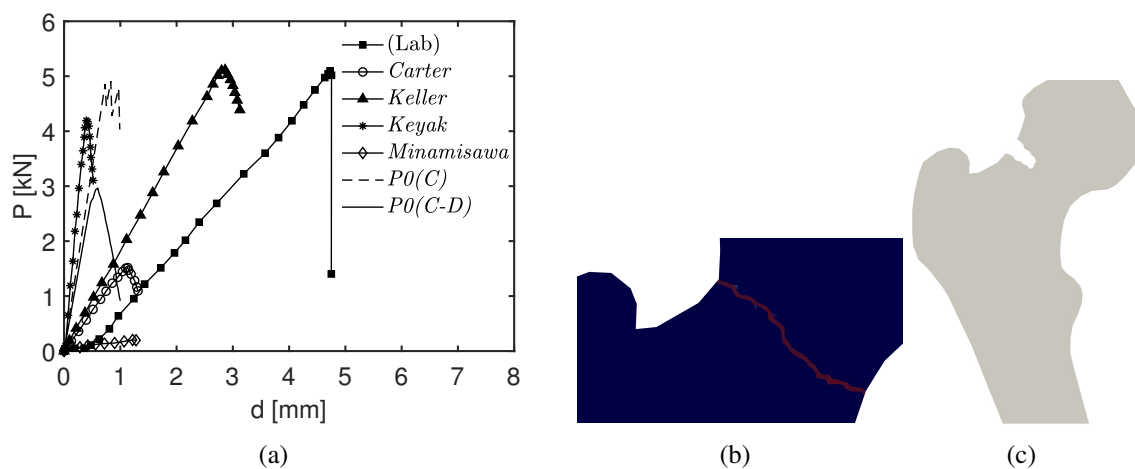


Figura 3.65 – Modelo e discretização em elementos finitos para fêmur: (a) Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas; (b) Distribuição do dano (C); (c) Propagação da trinca (C-D).

Este é um ensaio bem complexo de ser realizado (tanto em laboratório quanto a modelagem numérica) devido às inúmeras variáveis que precisam ser controladas, desde as propriedades do material (que podem variar bastante de um osso para outro) até a forma de apoio e aplicação de carregamento. Isso é evidenciado pelas diferenças entre as curvas referentes aos ensaios obtidos na literatura. Nota-se que os resultados numéricos tem comportamento compatível com os apresentados por outros autores.

A partir dessa análise conclui-se que as condições de contorno foram imposta de maneira adequada bem como as propriedades de fratura e material foram corretamente selecionadas. Observa-se também que a região danificada foi compatível com o problema físico em análise. A partir disso, foram realizados os ensaios numéricos utilizando tanto o MEF $G^{FT}$  quanto o MEF $G/S^{FT}$ , com estratégia de enriquecimento  $Pol^i$ .

### 3.6.3.1 - Fêmur e MEF $G/S^{FT}$ com modelo de dano contínuo

Serão apresentados resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento ( $d$ ) na zona onde o carregamento é aplicado, em simulações que utilizaram a estratégia  $Pol^i$ , segundo a metodologia MEF $G^{FT}$  e MEF $G/S^{FT}$  com modelo de dano contínuo (C). Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao MEF $G^{FT}$  (Fig. 3.66 e seguintes). A Fig. 3.64(c) mostra qual foi a estratégia de enriquecimento adotada.

Na Fig. 3.66(a) é possível observar que as curvas  $P-d$  das simulações estão dentro de uma faixa coerente de resultados quando comparadas ao que é encontrado na literatura. A Fig. 3.66(b) destaca que com a utilização do MEF $G^{FT}$  ocorre uma maior proximidade com a resposta da referência.

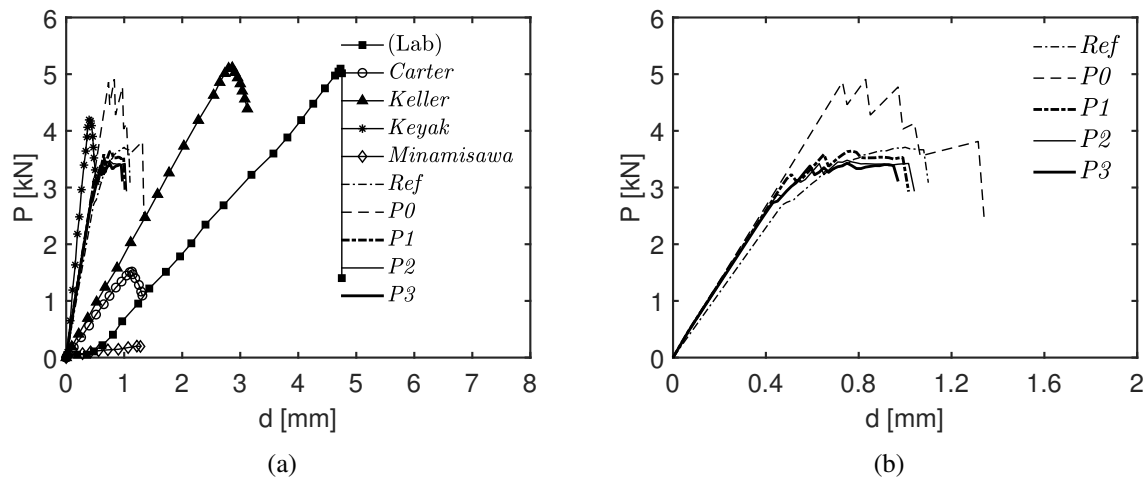


Figura 3.66 – Curvas  $P-d$  experimentais e numéricas (MEF $G^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia  $Pol^i$ .

A Fig. 3.67 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações envolvendo a malha de 265 elementos, utilizando a estratégia  $Pol^i$ . É possível notar na Fig. 3.67(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto de funções. Contudo,

observa-se que todas as situações são mais eficientes que a simulação de referência (com a malha mais refinada), haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ .

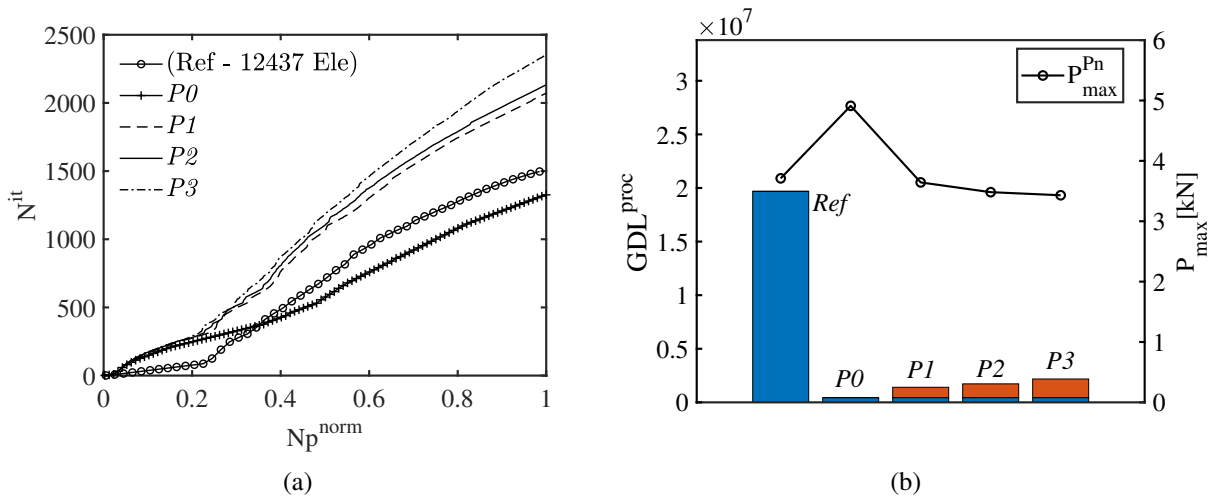


Figura 3.67 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG^{FT} Pol^i$ .

Observa-se ainda que o  $N^{it}$  normalizado na Fig. 3.67(a) não apresentou-se melhor nas simulações com enriquecimento. Contudo, destaca-se o fato dos resultados com  $MEFG^{FT}$  (com malha grosseira) mostrarem-se próximos ao da referência. Por fim, é possível dizer que  $MEFG^{FT}$  foi mais eficiente que o MEF do ponto de vista computacional neste caso (mesmo possuindo cerca de sessenta vezes menos elementos finitos na malha).

Os resultados adiante referem-se ao  $MEFG/S^{FT}$ . Na Fig. 3.68(a) é possível observar que as curvas  $P-d$  das simulações estão dentro de uma faixa coerente de resultados quando comparado ao que é encontrado na literatura. A Fig. 3.68(b) destaca que com a utilização do  $MEFG/S^{FT}$  de maior ordem ocorre uma maior proximidade com a resposta da referência.

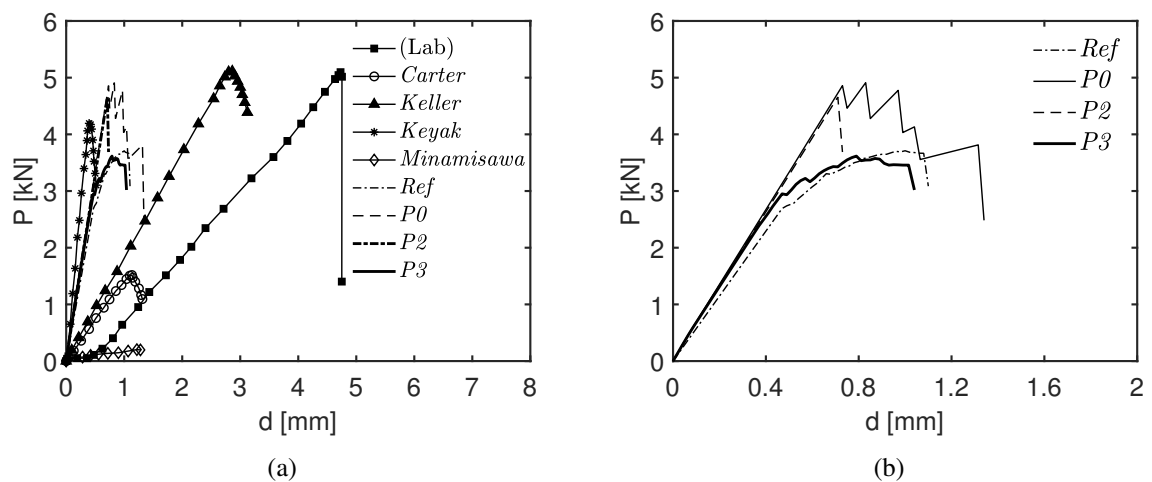


Figura 3.68 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas ( $MEFG/S^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia  $Pol^i$ .

A Fig. 3.69 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações envolvendo a malha de 265 elementos, utilizando a estratégia  $Pol^i$ . É possível notar na Fig. 3.69(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento. Ainda assim, observa-se que todas as simulações com enriquecimento mostraram-se mais eficientes que a simulação de referência (haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ ). Nota-se que o  $N^{it}$  normalizado nas simulações com enriquecimento (Fig. 3.69(a)) não apresentaram qualidade melhor que a da simulação da referência. Contudo, destaca-se o fato dos resultados com MEFG/S<sup>FT</sup> (com malha grosseira) mostrarem-se próximos ao da referência. Deste modo, é possível dizer que MEFG/S<sup>FT</sup> foi mais eficiente que o MEF do ponto de vista computacional neste caso.

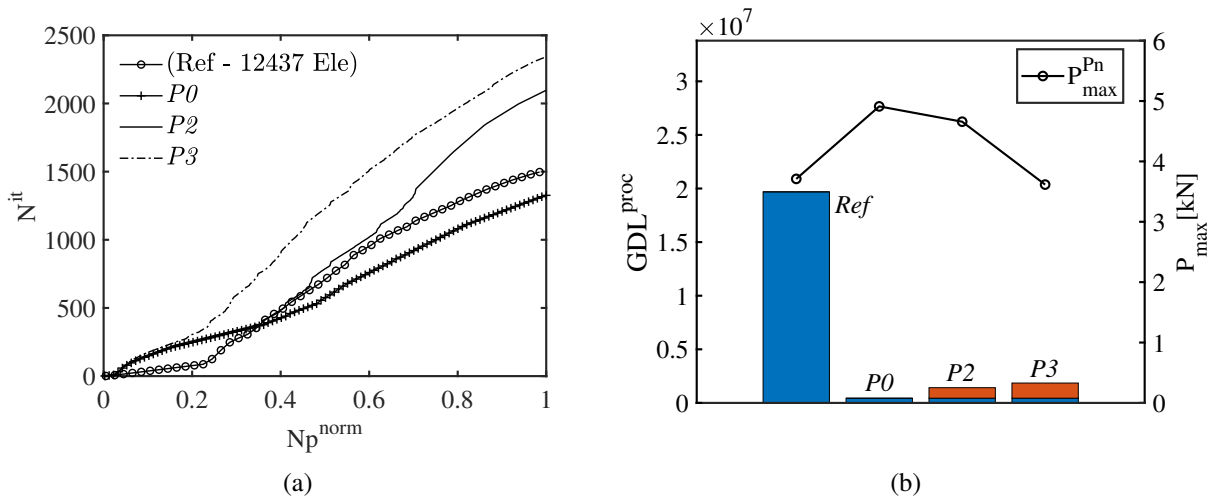


Figura 3.69 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup>  $Pol^i$ .

A Tab. 3.17 apresenta um sumário dos resultados de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  para a estratégia  $Pol^i$ . Nota-se que as simulações com PU *flat-top* apresentaram vantagem frente às suas correlatas com PU padrão e enriquecimento polinomial (exceção para  $P1$ ). Ainda assim, todos os casos enriquecidos apresentaram resultados melhores que os da referência.

Tabela 3.17 – Valores de  $P_{max}$  (kN) e  $GDL^{proc}$  com estratégia  $Pol^i$ .

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$	$GDL^{proc}$	$P_{max}$	$GDL^{proc}$	$P_{max}$	$GDL^{proc}$	$P_{max}$	$GDL^{proc}$
$P0$	4.911	440232	4.911	440232	4.911	440232	4.911	440232
$P1$	3.613	1416010	3.643	1408520	-	-	-	-
$P2$	3.449	1716480	3.482	1726750	4.523	1414140	4.658	1420220
$P3$	3.376	2098570	3.431	2180710	3.588	1817350	3.616	1853590

onde  $P_{max} = 3.710$  kN;  $GDL_{Ref}^{proc} = 19689900$ .

### 3.6.3.2 - Fêmur e MEFG/S<sup>FT</sup> com modelo de dano contínuo-descontínuo

Serão apresentados resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força ( $P$ ) em função do deslocamento ( $d$ ) na zona onde o carregamento é aplicado, em simulações que



utilizaram a estratégia  $Pol^i$ , segundo a metodologia  $MEFG^{FT}$  e  $MEFG/S^{FT}$  com modelo de dano contínuo-descontínuo (C-D). Primeiramente serão apresentados os resultados referentes ao  $MEFG^{FT}$  (Fig. 3.70 e seguintes).

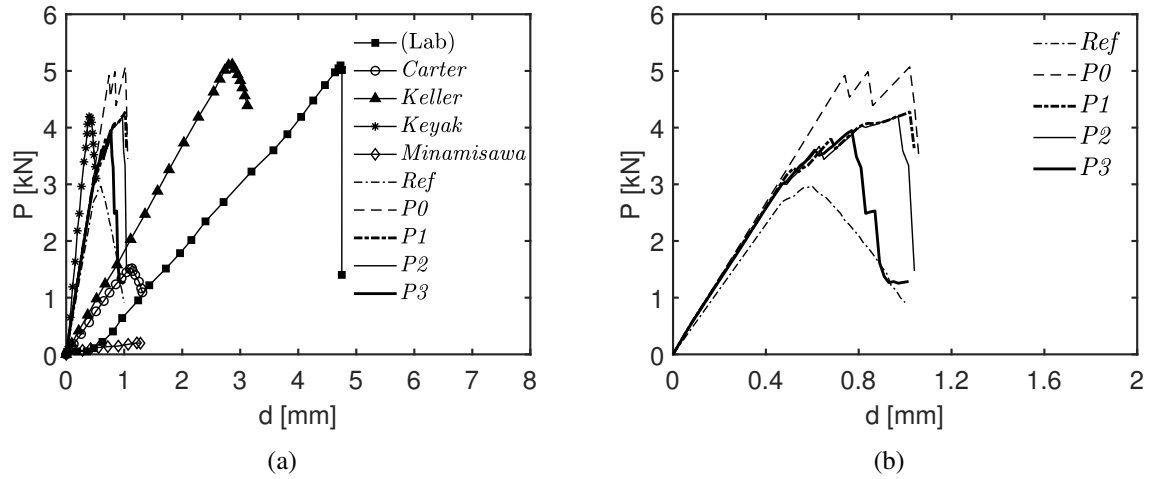


Figura 3.70 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas ( $MEFG^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia  $Pol^i$ .

Na Fig. 3.70(a) é possível observar que as curvas  $P-d$  das simulações estão dentro de uma faixa coerente de resultados quando comparadas ao que é encontrado na literatura. A Fig. 3.70(b) destaca que com a utilização do  $MEFG^{FT}$  ocorre uma maior proximidade com a resposta da referência. A queda brusca nas curvas (comportamento levemente diferente daquele apresentado na Fig. 3.66 com modelo de dano (C)) é devido à propagação da trinca.

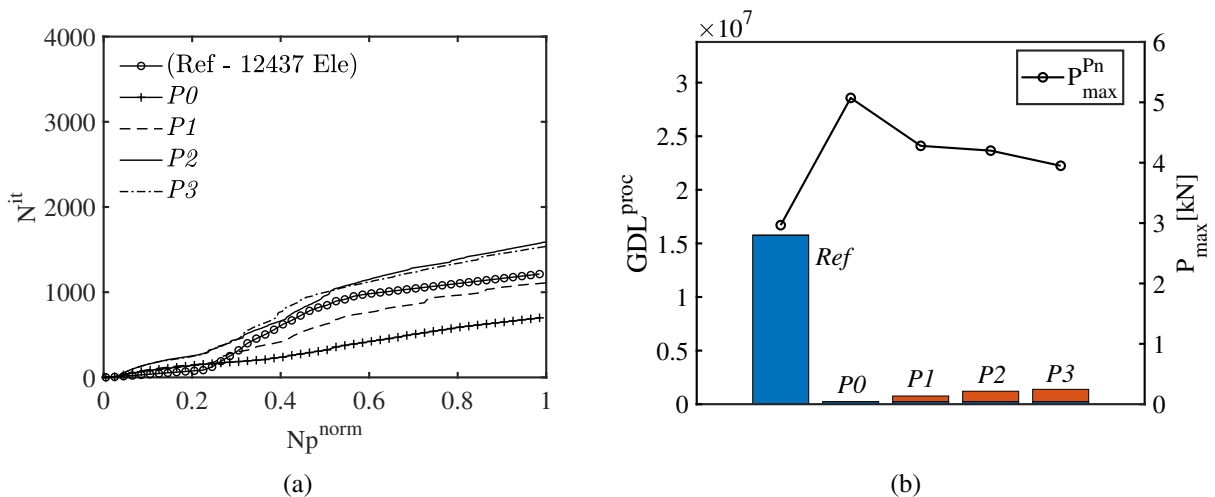


Figura 3.71 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG^{FT}$   $Pol^i$ .

A Fig. 3.71 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com a malha de 265 elementos, utilizando a estratégia  $Pol^i$  e modelo de dano (C-D). É possível notar na Fig. 3.71(b)

que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto de funções. Observa-se, ainda assim, que todas são mais eficientes que a simulação de referência.

Observa-se que o  $N^{it}$  normalizado na Fig. 3.71(a) não apresentou-se, de modo geral, melhor nas simulações com enriquecimento (exceção para a simulação  $P1$  que encontra-se abaixo da referência). Contudo, destaca-se o fato dos resultados com  $MEFG^{FT}$  (com malha grosseira) mostrarem-se ainda mais próximos ao da referência (com a malha mais refinada) nestes casos utilizando o modelo de dano (C-D). Por fim, é possível dizer que  $MEFG^{FT}$  foi mais eficiente que o MEF do ponto de vista computacional neste caso.

Importa ressaltar que, em função da propagação da trinca, surgem nós que apresentam ambos os tipos de enriquecimento (polinomial e Heaviside). O fato de permitir acoplar enriquecimentos de naturezas distintas e ainda assim apresentar bom nível de eficiência computacional (neste caso melhor até que os casos com modelo (C) apresentados na Fig. 3.67) realça ainda mais as potencialidades do  $MEFG^{FT}$ .

Os resultados adiante referem-se ao  $MEFG/S^{FT}$ . Na Fig. 3.72(a) é possível observar que as curvas  $P-d$  das simulações estão dentro de uma faixa coerente de resultados quando comparadas ao que é encontrado na literatura. A Fig. 3.72(b) destaca que com a utilização do  $MEFG/S^{FT}$  de maior ordem ocorre uma maior proximidade com a resposta da referência.

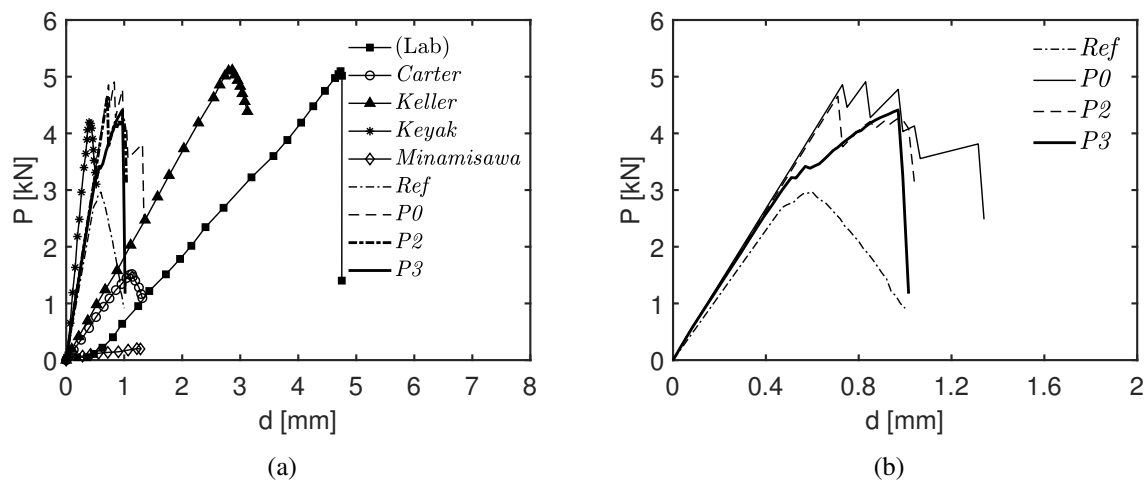


Figura 3.72 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas ( $MEFG/S^{FT}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia  $Pol^i$ .

A Fig. 3.73 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações envolvendo a malha de 265 elementos, utilizando a estratégia  $Pol^i$ . É possível notar na Fig. 3.73(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento. Mesmo assim, observa-se serem todas mais eficientes que a simulação de referência haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ .

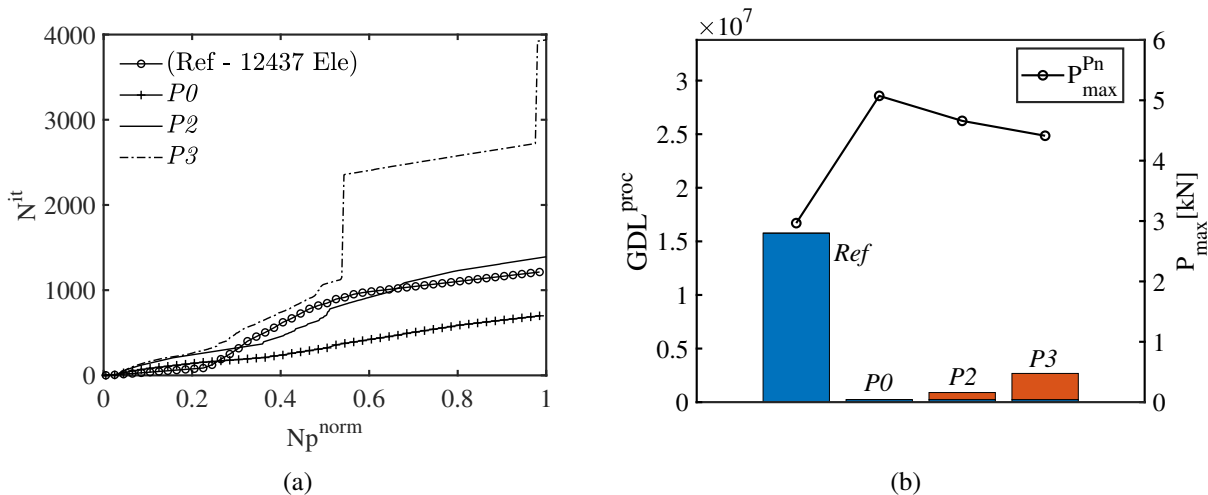


Figura 3.73 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>FT</sup> Pol<sup>i</sup>.

Observa-se ainda que o  $N^{it}$  normalizado na Fig. 3.73(a) não se apresentou melhor nas simulações com enriquecimento. Contudo, é necessário levar em conta que os resultados com MEFG/S<sup>FT</sup> (com malha grosseira) mostraram-se próximos ao da referência. Desta maneira, é possível dizer que MEFG/S<sup>FT</sup> foi mais eficiente que o MEF do ponto de vista computacional neste caso.

É possível notar na Fig. 3.74 boa correspondência entre o resultados de propagação da trinca desta pesquisa com os dados da referência (malha refinada com 12437 elementos finitos triangulares). Observa-se também que a propagação foi melhor descrita a medida que o grau polinomial de enriquecimento foi aumentando, devido garantir uma melhor descrição dos campos de tensão e deformação.

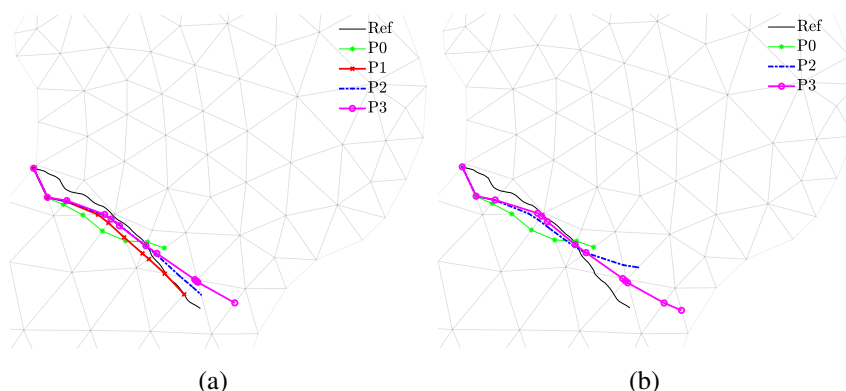


Figura 3.74 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e casos com enriquecimento e estratégia Pol<sup>i</sup> para fêmur: (a) MEFG<sup>FT</sup>; (b) MEFG/S<sup>FT</sup>.

A Tab. 3.18 apresenta um sumário dos resultados de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  para a estratégia Pol<sup>i</sup>. Nota-se que as simulações com PU *flat-top* apresentam, em geral,  $GDL^{proc}$  menor que suas correlatas com PU padrão quando enriquecimento foi utilizado. Esse comportamento é

diferente ao do observado nos casos com modelo de dano (C) (3.17). Todos os casos enriquecidos apresentaram resultados melhores que os da referência.

Tabela 3.18 – Valores de  $P_{max}$  (kN) e  $GDL^{proc}$  com estratégia Pol<sup>i</sup>.

$P_n^{max}$	MEFG		MEFG <sup>FT</sup>		MEFG/S		MEFG/S <sup>FT</sup>	
	$P_{max}$	$GDL^{proc}$	$P_{max}$	$GDL^{proc}$	$P_{max}$	$GDL^{proc}$	$P_{max}$	$GDL^{proc}$
P0	5.073	238464	5.073	238464	5.073	238464	5.073	238464
P1	4.244	1513990	4.279	764004	-	-	-	-
P2	4.165	1917590	4.200	1210010	4.525	1190290	4.659	897758
P3	3.786	1979710	3.949	1388990	4.298	2176190	4.413	2680780

onde  $P_{max}^{Ref} = 2.966$  kN;  $GDL_{Ref}^{proc} = 15768900$ .

### 3.6.4 - Simulações com $\sigma$ modificado

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações referentes ao ensaio FPS-SEN com  $\sigma$  modificado (adotando-se  $\sigma = 0.001$ ). O objetivo dessa subseção é investigar um pouco mais o quanto variável de controle  $\sigma$  influencia na resposta. Optou-se especificamente pelo modelo FPS-SEN porque, em geral, as simulações com a PU *flat-top* envolvendo este ensaio apresentaram  $GDL^{proc}$  maior que aquelas com PU padrão.

Todos os resultados foram sumarizados nas Tabs. 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22 afim de simplificar a exposição dos mesmos e facilitar comparações diretas. As Tabs. 3.19 e 3.20 mostram as respostas das simulações com modelo de dano contínuo com as abordagens MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup> utilizando as estratégias Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>. Nota-se que os ensaios com  $\sigma = 0.001$  apresentaram  $GDL^{proc}$  menor na maioria das situações, embora haja certa variação no valor de  $P_{max}[kN]$  (considerado aceitável devido a proximidade com a faixa experimental). É possível dizer que a eficiência computacional tornou-se melhor ao utilizar  $\sigma = 0.001$ .

Tabela 3.19 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia Pol<sup>c</sup> - modelo de dano (C).

Grau	MEFG <sup>FT</sup>				MEFG/S <sup>FT</sup>			
	$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$		$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$	
	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$
Ref	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060
P0	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500
P1	47.7270	3552410	47.2195	4160620	*	*	*	*
P2	42.1039	5977630	40.5123	4835130	46.8988	3038510	46.2055	2892250
P3	40.4870	5216900	40.6254	5080420	41.0240	7554100	40.917	7049980
P4	38.3242	18704500	35.6893	9849920	38.9546	5490490	36.8499	6080770

Tabela 3.20 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia Pol<sup>i</sup> - modelo de dano (C).

Grau	MEFG <sup>FT</sup>				MEFG/S <sup>FT</sup>			
	$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$		$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$	
	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$
Ref	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060	36.4583	7760060
P0	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500
P1	47.7270	3552410	47.2195	4160620	*	*	*	*
P2	44.4759	5617930	43.5861	5406750	45.4030	3653600	48.1806	2948280
P3	43.5453	6861290	43.0061	7720490	42.4417	6497730	41.7897	9602080
P4	43.5353	8333850	43.6607	6870170	42.1087	8737230	41.6542	7998710
P5	42.1951	8973080	42.2172	7123690	40.2043	10266200	39.8332	8592030

As Tabs. 3.21 e 3.22 mostram as respostas das simulações com modelo de dano (C-D) com as abordagens MEFG<sup>FT</sup> e MEFG/S<sup>FT</sup> utilizando as estratégias Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>. Nota-se que os ensaios com  $\sigma = 0.001$  apresentaram  $GDL^{proc}$  menor quando é utilizado enriquecimento polinomial até grau P2. Com enriquecimentos de grau P3 em diante, as simulações com  $\sigma = 0.01$  apresentaram melhor desempenho computacional. Observa-se novamente certa variação no valor de  $P_{max}[kN]$  (considerado novamente aceitável devido a proximidade com o experimental).

Tabela 3.21 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia Pol<sup>c</sup> - modelo de dano (C-D).

Grau	MEFG <sup>FT</sup>				MEFG/S <sup>FT</sup>			
	$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$		$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$	
	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$
Ref	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130
P0	47.4635	676500	47.4635	676500	47.4635	676500	48.5277	676500
P1	46.6063	5329910	47.2195	4012920	*	*	*	*
P2	40.4017	5150330	40.5123	4551020	46.8988	2909780	46.2055	3541770
P3	39.5453	2216430	40.6254	3977890	41.0240	5393190	40.9170	4546790
P4	34.9918	4765550	35.6893	4668310	38.9546	4762630	36.8499	5427790

Tabela 3.22 – Valores de  $P_{max}$  e  $GDL^{proc}$  - FPS-SEN e estratégia Pol<sup>i</sup> - modelo de dano (C-D).

Grau	MEFG <sup>FT</sup>				MEFG/S <sup>FT</sup>			
	$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$		$\sigma = 0.01$		$\sigma = 0.001$	
	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$	$P_{max}[kN]$	$GDL^{proc}$
Ref	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130	40.7712	6682130
P0	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500	47.4365	676500
P1	46.6063	5329910	47.2195	4012920	*	*	*	*
P2	44.1229	4400260	43.5861	4845260	44.6692	5054440	48.1806	2901280
P3	43.5453	6721870	43.0061	8812560	42.4417	2316040	41.7897	7599070
P4	43.5353	2871130	43.6607	5374530	41.7033	2028870	41.6542	2343600
P5	*	*	*	*	40.2043	2572840	39.8332	2604410

### 3.7 - CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados os resultados de simulações utilizando o *MEFG/S* como metodologia de resolução do sistema com a substituição da PU padrão pela PU *flat-top*. É possível afirmar, frente ao exposto na verificação, que a implementação foi feita de maneira eficiente e correta. Além disso, notou-se, o grande potencial do  $MEFG^{FT}$  e do  $MEFG/S^{FT}$  para resolver PVC diversos, garantindo amplo espaço para crescimento e desenvolvimento desta linha de pesquisa.

Foram apresentadas situações de modo I e misto de fratura, com modelo de dano contínuo bem como contínuo-descontínuo e, em todas elas, o  $MEFG/S^{FT}$  garantiu boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento. A combinação das estratégias do  $MEFG/S^{FT}$  polinomial e/ou descontínuo, combinadas ao modelo de dano, mostrou-se bastante eficiente para prever a distribuição do dano e a evolução da trinca em estruturas sob processo de falha.

Tanto o  $MEFG^{FT}$  como o  $MEFG/S^{FT}$  permitiram atingir resultados de propagação de trinca compatíveis com o comportamento físico e com a propagação obtida na simulação de referência. Isso utilizando uma malha bem grosseira e sem a necessidade de remalhamentos ao longo do processo, nem de inserção de elementos de junta na malha. Proporcionando praticidade quanto à construção da malha e, em ultimo caso, eficiência computacional.

Ao analisar a eficiência computacional do método, o  $MEFG/S^{FT}$  mostrou-se mais eficiente que o  $MEFG/S$  com PU padrão nas simulações em modo I de fratura (utilizando  $\sigma = 0.01$  e  $k = 1.0$  como parâmetros para a PU *flat-top*). Contudo, no modo misto não foi observado mesmo comportamento, onde o  $MEFG/S$  com PU padrão apresentou resultados com melhor eficiência. Nesse sentido foram realizadas simulações com  $\sigma = 0.001$  onde foi possível notar, de modo geral, melhora da eficiência computacional da PU *flat-top*.

Assim sendo, em vista dessa variação provocada por alterações nos parâmetros de controle da PU *flat-top*, como sugestão para trabalhos futuros, indica-se estudos sobre a influência dos parâmetros  $\sigma$  e  $k$  nas análises não lineares envolvendo dano estrutural, buscando obter valores ótimos que mais se adequem a cada modo de fratura (caso seja possível estabelecer essa diferenciação) ou um que satisfaça de maneira ótima ambos os modos de fratura. Sugere-se ainda para futuros trabalhos o desenvolvimento da PU *flat-top* para elementos tetraédricos, ampliando as análises para o  $MEFG/S$  3D (que será abordado no Cap. 5 desta tese).

A definição das nuvens de enriquecimento no Cap. 2 e neste capítulo foram todas feitas manualmente. Existem técnicas capazes de automatizar esse procedimento. Elas, além de garantir praticidade, podem proporcionar mais eficiência computacional às simulações a partir do momento que buscam estabelecer uma estratégia ótima de enriquecimento. Esse tema será abordado no Cap.4.

## **4 - MEEG/S E ADAPTATIVIDADE**

### **4.1 - INTRODUÇÃO**

Geralmente uma análise utilizando o método convencional do MEF é feita duas ou mais vezes na busca de uma solução ótima. Por se tratar de um método baseado na aproximação de um problema global mediante a subdivisão do todo em partes (e, posteriormente, resolução desses problemas locais), erros são sempre introduzidos no resultado final (Ainsworth e Oden, 2000).

Os estimadores de erro, portanto, surgiram com o objetivo de quantificar tais erros de aproximação objetivando avaliar qualitativamente os modelos discretos adotados nas resoluções. A medida que as pesquisas nesta área avançavam começaram a surgir as primeiras técnicas adaptativas para o MEF, ainda na década de 1980 (Kela *et al.*, 1987; Kuan-Jung e Wilson, 1988; Palmerio, 1988; Giannakopoulos, 1989).

Segundo Ródenas *et al.* (2010), o MEFX (e de modo análogo o MEEG/S) são afetados pelos erros de discretização. Isso ocorre devido aos erros intrínsecos de todo método discreto e também, no caso específico de MEFX e MEEG/S, dos diversos fatores de aproximação utilizados. Trabalhos envolvendo técnicas adaptativas associadas ao MEFX, MEEG e MEEG/S (sobretudo este último por ser um método mais recente) são ainda escassos.

### **4.2 - REVISÃO DA LITERATURA-ESTIMADORES DE ERRO E ADAPTABILIDADE**

O erro pode ocorrer devido, principalmente, aos seguintes motivos: aproximação de domínio, aritmética finita e quadratura, aproximação ou discretização. Os erros de aproximação de domínio estão associados à determinação dos dados do problema tendo em vista a análise (tentativa de modelagem) de um evento físico mediante a utilização de equações diferenciais (Reddy, 2006).

Os erros de aritmética finita e quadratura estão relacionados à etapa operacional de cálculo, sobretudo: arredondamentos, precisão de variáveis, avaliação numérica de integrais (o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento finito da malha, por exemplo), adoção de uma quadratura coerente, estabelecimento da quantidade adequada de pontos de integração. Por fim, os erros de aproximação ou discretização são aqueles relacionados com a substituição da solução exata (a analítica obtida através da resolução de um problema diferencial) por um resposta aproximada numericamente (Reddy, 2006).

A seguir serão definidos alguns conceitos e aspectos gerais relacionados ao erro para melhor compreensão dos procedimentos adotados nesta pesquisa. Primeiro será definido o que é erro, depois serão abordadas as técnicas de adaptatividade disponíveis e as categorias de estimadores de erro decorrentes delas. Por fim, o texto abordará as técnicas de estimativa de erro *a posteriori* e o estimador de erro *ZZ-SPR* devido terem sido escolhidos para aplicação neste trabalho.

#### 4.2.1 - Conceitos e definições gerais relacionados ao erro

O erro de aproximação pode ser definido basicamente como a diferença entre a solução exata do problema e a resposta aproximada do mesmo (ver Eq. (4.1a)). Este conceito pode ser extrapolada para a análise de inúmeras grandezas de interesse. Deste modo, como pode ser observado em Zienkiewicz e Zhu (1987), por exemplo, tem-se o conceito aplicado aos campos de deslocamentos (Eq. (4.1b)) e tensões (Eq. (4.1c)).

$$e = u - \hat{u} \quad (4.1a)$$

$$e_u = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (4.1b)$$

$$e_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.1c)$$

onde  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  são, respectivamente, os campos exatos de deslocamento e tensão, bem como  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  são os campos aproximados das respectivas medidas, no caso do MEF, obtidos a partir da solução do sistema linear do problema. Haja vista que a Eq. (4.1b) e a Eq. (4.1c) apresentam resultado variável ao longo do domínio, não é usual a utilização das mesmas isoladamente para computar o erro. Deste modo, é necessário determinar uma medida de erro médio ao longo do domínio que seja representativa. Isto pode ser feito mediante a utilização de alguma norma. Assim sendo, como em Zienkiewicz e Zhu (1987), nesta pesquisa adotou-se para os problemas a norma de energia do erro que, para um elemento finito de área  $\Omega_e$ , é definida como:

$$\|e_\sigma\|_{(\Omega_e)} = \left[ \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbb{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{1/2} \quad (4.2)$$

onde  $\mathbb{C}$  é o tensor constitutivo elástico. Uma vez que, em casos práticos, a solução exata é desconhecida, torna-se necessário adotar alguma alternativa para contornar essa questão. A literatura apresenta algumas opções que vão desde o estabelecimento de uma solução de referência (no caso do MEF), obtida a partir de uma malha muito refinada, procedimento chamado de "overkill" (Babuška *et al.*, 1994b; Babuška *et al.*, 1998b; Strouboulis *et al.*, 1999; Kyza, 2011; Allier *et al.*, 2017) até a substituição da resposta exata na Eq. (4.1b) e na Eq. (4.1c) por uma solução dita recuperada (Ainsworth *et al.*, 1989; Zienkiewicz e Zhu, 1992a; Zienkiewicz e Zhu, 1992b; Zienkiewicz e Zhu, 1992c; Zienkiewicz *et al.*, 1993; Babuška e Rodriguez, 1993; Lins *et al.*, 2015; Lins *et al.*, 2019). Logo, para um estimador de erro baseado em recuperação (adotado nesta tese), a Eq. (4.2) pode ser escrita substituindo o campo exato de tensão pelo respectivo campo recuperado ( $\boldsymbol{\sigma}^*$ ). Deste modo, tem-se:

$$\|e_\sigma^*\|_{(\Omega_e)} = \left[ \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbb{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{1/2} \quad (4.3)$$



A equação anterior calcula a norma de erro para cada elemento. Isso pode também ser feito utilizando a seguinte expressão:

$$\|e_\sigma^*\|_{(\Omega_e)} = \left[ \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T (\boldsymbol{\varepsilon}^* - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  e  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  os campos recuperado e aproximado de deformações, respectivamente. A obtenção da medida global correspondente é realizada utilizando a Eq. (4.5), conforme segue:

$$\|e_\sigma^*\| = \left( \sum_{m=1}^n \|e_\sigma^*\|_{\Omega_{e,m}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

onde o índice  $m$  refere-se ao elemento e  $n$  ao número total de elementos. A partir da Eq. (4.1a), para que os termos simbolizem as correspondentes normas de energia e, adaptando-a para o campo recuperado de tensões, tem-se

$$\|\boldsymbol{\sigma}^*\|^2 = \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|^2 + \|e_\sigma^*\|^2 \quad (4.6)$$

Deste modo, a norma de energia com base no campo de tensões obtidas pelo MEF pode ser calculada da seguinte maneira

$$\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|^2 = \sum_{m=1}^n \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|_{\Omega_{e,m}}^2 \quad (4.7)$$

onde

$$\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|_{(\Omega_e)}^2 = \int_{\Omega_e} (\hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbb{C}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (4.8)$$

A partir da Eq. (4.3) é possível obter a norma de energia do campo de tensões suavizadas. Na prática, não é usual utilizar diretamente essa quantidade nas análises de adaptatividade devido a dificuldade de interpretação. Desse modo, seguindo a mesma estratégia de Zienkiewicz e Zhu (1987), será utilizado nesta tese o erro relativo. Deste modo tem-se:

$$\mathcal{E} = \frac{\|e_\sigma^*\|}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|} \quad (4.9)$$

onde  $\mathcal{E}$  designa o erro relativo global. Substituindo-se a Eq. (4.6) na Eq. (4.9) obtêm-se o Indicador de Erro que será utilizado para a avaliação da adaptatividade, logo:

$$\mathcal{E} = \frac{\|e_\sigma^*\|}{(\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|^2 + \|e_\sigma^*\|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.10)$$

Assim, o cálculo do erro relativo para cada elemento pode ser feito utilizando a Eq. (4.11):

$$\mathcal{E}_{(\Omega_e)} = \frac{\|e_\sigma^*\|_{(\Omega_e)}}{(\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|_{(\Omega_e)}^2 + \|e_\sigma^*\|_{(\Omega_e)}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.11)$$

Ainda em Zienkiewicz e Zhu (1987), os autores propõem um fator de correção empírico ( $\kappa$ ) que deve multiplicar o Indicador de Erro que depende do elemento utilizado sendo: 1.1 para

elemento bilinear, 1.3 para elemento triangular linear e 1.4 para elemento triangular quadrático. Deste modo, é possível fazer a seguinte relação para a adaptatividade

$$\mathcal{E}^c = \kappa \mathcal{E} < \mathcal{E}_{adm} \quad (4.12)$$

sendo  $\mathcal{E}^c$  e  $\mathcal{E}_{adm}$  os valores corrigido e admissível do erro relativo, respectivamente.

Nesta tese, seguindo uma estratégia semelhante à adotada em Lins (2011), os elementos com erro relativo acima de 0.5 (50%) tiveram o respectivo valor de  $\|e_\sigma^*\|_{(\Omega_e)}$  (Eq. (4.3)) desprezados no cálculo de  $\|e_\sigma^*\|$  (Eq. (4.5)). Isso foi necessário para diminuir o efeito das perturbações de contorno no cálculo de  $\mathcal{E}^c$ , tendo em vista a perda de representatividade numérica da resposta nesses locais em específico. A quantidade máxima de elementos desconsiderados, porém, foi limitada a 25% do total de elementos da malha.

#### 4.2.2 - Técnicas de adaptatividade

Várias estratégias adaptativas foram criadas ao longo dos anos com o objetivo de alcançar melhores condições para o espaço de aproximação de um problema discreto. No âmbito do MEF, entende-se por adaptativo qualquer estratégia que busque aprimorar a resposta numérica até um nível ótimo, utilizando para isso resultados intermediários gerados no próprio processo como elementos de medição para otimização do modelo (seja por modificação da malha, seja por alteração do grau polinomial da aproximação). Segundo Zienkiewicz *et al.* (2005) as várias estratégias adaptativas utilizadas no MEF são baseadas em três métodos básicos: *refinamento h*, *refinamento p* e *refinamento r*.

No método de *refinamento h* é mantido o grau polinomial da aproximação, porém, modifica-se a densidade de malha (tamanho e quantidade de elementos) levando a um refinamento maior nas regiões que apresentarem erro acima da tolerância estabelecida. No caso do *refinamento p* é realizado um aumento no grau polinomial da aproximação sem que haja mudanças na malha. O *MEFG/S* pode atuar muito bem neste caso porque permite alterar o grau polinomial de maneira local. Já no *refinamento r* nem o grau da aproximação nem a densidade de malha são alterados, ocorre apenas um rearranjo nodal de modo a garantir uma discretização ótima.

Todos estes métodos buscam a uniformização da distribuição do erro ao longo do modelo discreto mediante a obtenção de uma solução ótima. Esta resposta deve resultar em uma medida de erro global que seja compatível com uma tolerância pré estabelecida. Tal medida pode ser calculada de diversas maneiras que podem ser divididas em duas categorias de estimadores: os que são ditos *a priori* e os que são nomeados *a posteriori*.

#### 4.2.3 - Categorias de estimadores de erro

O estudo do MEF adaptativo teve início por volta de 1980 (Li e Bettess, 1997). Muitas pesquisas começaram a ser desenvolvidas em vista de obter uma solução dita ótima, utilizando as estimativas de erro ao longo da malha como indicadores para refinamento de malha (Babuška e Rheinboldt, 1979; Babuška e Miller, 1981; Basu e Peano, 1983; De *et al.*, 1983; Demkowicz *et al.*, 1984; Demkowicz e Oden, 1986; Zienkiewicz e Zhu, 1987; Zienkiewicz e

Zhu, 1992a; Zienkiewicz e Zhu, 1992b; Zienkiewicz e Zhu, 1992c; Zienkiewicz *et al.*, 1993).

Segundo Ainsworth e Oden (2000), as estimativas de erro de aproximação no MEF se dividem em dois grupos principais: estimativas de erro *a priori* onde a avaliação é feita baseada no prévio conhecimento da solução exata (Falk, 1973; Scott, 1976; Rannacher e Scott, 1982; Casas, 1985; Rivière *et al.*, 2001; Arada *et al.*, 2002; Woo e Whitcomb, 1993; Abdulle e Vilmart, 2011; Gong *et al.*, 2014; Shakya e Sinha, 2019) e estimativas de erro *a posteriori* onde faz-se uso da própria solução numérica obtida (através de uma resposta dita recuperada) para efetuar a avaliação (Babuška e Rheinboldt, 1978; Babuška e Miller, 1981; Babuška *et al.*, 1986; Zienkiewicz e Zhu, 1987; Zienkiewicz e Zhu, 1992a; Zienkiewicz e Zhu, 1992b; Zienkiewicz e Zhu, 1992c; Zienkiewicz *et al.*, 1993; Zienkiewicz *et al.*, 1999; Babuška *et al.*, 1994c; Ainsworth e Oden, 1997a; Durán *et al.*, 2003; Grätsch e Bathe, 2005; Zhang e Zhao, 2015; Bao *et al.*, 2020; González e Strugaru, 2020).

Levando em consideração que a resposta exata dos problemas analisados nesta pesquisa é geralmente desconhecida, optou-se por uma abordagem adaptativa do *MEFG/S* utilizando um estimador de erro *a posteriori* para nortear as medidas de erro de aproximação. Antes de detalhar a estratégia, porém, é necessário estabelecer alguns conceitos. Isto será feito logo a seguir.

#### **4.2.4 - Estimativas de erro *a posteriori***

Os estimadores de erro *a posteriori* podem ser divididos em dois grupos principais: o dos estimadores baseados em recuperação (também chamados de técnicas de pós processamento) e os baseados em resíduo. Estes últimos ainda podem ser separados em dois grupos distintos: os explícitos (Kelly, 1984; Ainsworth e Oden, 1997b) - que utilizam dados conhecidos sobre o problema analisado - e os implícitos (Eriksson e Johnson, 1987; Stewart e Hughes, 1997) - que utilizam a solução algébrica de sistemas de equações envolvendo os elementos de modo a encontrar uma estimativa de erro ideal (Stewart e Hughes, 1998).

A recuperação do gradiente de tensão é uma maneira simples de avaliar o erro *a posteriori*. Tem como fundamento a eliminação dos saltos de tensão que naturalmente ocorrem na interface dos elementos substituindo-os por um campo (dito recuperado) equivalente de tensões, porém, contínuo (Zienkiewicz e Zhu, 1987). A solução recuperada apresenta precisão e taxa de convergência maiores que a resposta obtida através do MEF convencional ou *MEFG/S*.

Por fim, a estimativa de erro pode ser calculada mediante a comparação entre os campo de tensão recuperado e o interpolado via MEF (ou *MEFG/S*). Os estimadores *ZZ* e *ZZ-SPR* são metodologias que utilizam esse tipo de procedimento.

#### **4.2.5 - Estimador de erro *ZZ-SPR***

Conhecido como Estimador *ZZ*, a metodologia proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987) é similar àquela adotada pelo Método das Médias Nodais Simples, diferindo apenas na forma de recuperar os valores nodais. Levando em consideração que como característica o MEF produz uma distribuição de tensões sem continuidade nas fronteiras entre os elementos, os autores

propuseram uma metodologia que estima o erro a partir de um campo de tensões suavizado ao longo de todo domínio. Este novo campo é calculado utilizando as mesmas funções de forma que definem o domínio, logo, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{N}$  são as funções de forma utilizadas para interpolar o campo de deslocamentos e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$  é o vetor de valores nodais recuperados. Zienkiewicz e Zhu (1987) estabelecem que esses valores podem ser obtidos a partir da minimização do seguinte funcional com relação à  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ :

$$\Pi = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (4.14)$$

No MEF, em se tratando da avaliação de tensões, os valores nodais não são exatos. Contudo, há pontos no interior do domínio que apresentam melhor resultado. A propriedade demonstrada por esses pontos ficou conhecida como superconvergência (Barlow, 1976). No MEF esses locais coincidem com os pontos de integração. Explorando essa característica, Zienkiewicz e Zhu (1992a) e Zienkiewicz e Zhu (1992b) desenvolveram uma evolução para o Estimador ZZ. Os autores propuseram uma nova metodologia que apresentou efetividade para elementos de ordens polinomiais elevadas, chamada *Superconvergent Patch Recovery (SPR)*, também conhecida na literatura como método *ZZ-SPR*.

A técnica *ZZ-SPR* baseia-se na utilização de um polinômio de mesmo grau ao daquele utilizado para aproximar o campo de deslocamentos. Estes parâmetros polinomiais são obtidos a partir de um ajuste por mínimos quadrados dos gradientes das soluções do campo de tensões obtidas nos pontos de superconvergência. Os polinômios são utilizados para aproximar as tensões dentro de cada nuvem da malha (ou seja, o conjunto de elementos que compartilham um nó). De maneira geral, o polinômio aproximador em cada nuvem, para cada componente de tensão, pode ser descrito como:

$$\sigma_{p,i}^* = \mathbf{P}(x, y)\mathbf{a}_i \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{P}(x, y)$  é um vetor ( $1 \times r$ ) que reúne a base polinomial de aproximação;  $\mathbf{a}_i$  ( $r \times 1$ ) é o conjunto de coeficientes incógnitas a determinar para cada componente de tensão  $i$ ;  $r$  indica o número de termos que compõem a base polinomial de ordem  $p$ . A Tab. 4.1 mostra algumas possibilidades de bases polinomiais encontradas na literatura (Lancaster e Salkauskas, 1981; Belytschko *et al.*, 1994; Bordas *et al.*, 2007; Bordas e Duflot, 2007; Zienkiewicz e Zhu, 1992a; Ródenas *et al.*, 2013).

Tabela 4.1 – Bases polinomiais de aproximação

	1D	2D	3D
Constante	[1]	[1]	[1]
Linear	[1, x]	[1, x, y]	[1, x, y, z]
Quadrático	[1, x, x <sup>2</sup> ]	[1, x, y, x <sup>2</sup> , y <sup>2</sup> , xy]	[1, x, y, z, x <sup>2</sup> , y <sup>2</sup> , z <sup>2</sup> , xy, xz, yz]

A Fig. 4.1 resume o processo de recuperação. Nela é possível observar como e quando cada etapa do processo atua.

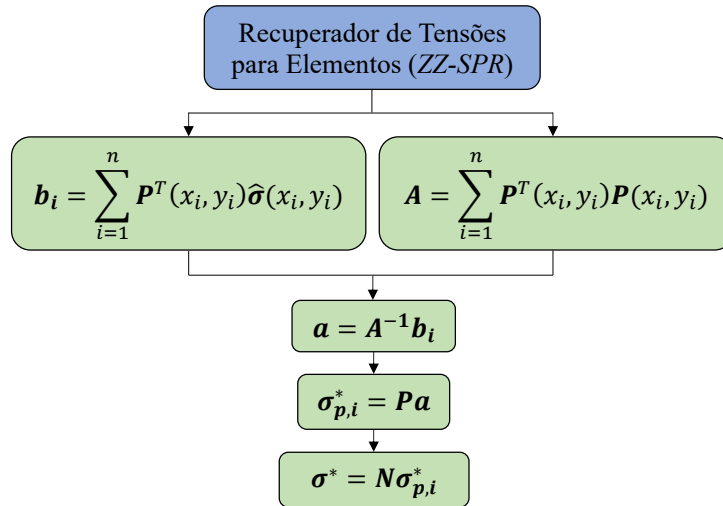


Figura 4.1 – Fluxograma do processo de recuperação do campo de tensão.

O cálculo das incógnitas  $\mathbf{a}_i$  é realizado através da minimização do funcional da Eq. (4.14) com relação a  $\mathbf{a}_i$ . Isto resulta em um funcional que representa a distância entre a tensão recuperada ( $\sigma^*$ ) e àquela aproximada numericamente ( $\hat{\sigma}$ ). Esse processo resulta no seguinte sistema linear:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_i \quad (4.16)$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{b}_i$  são determinados conforme a Eq. (4.17a) e a Eq. (4.17b), sendo elas:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \mathbf{P}(x_i, y_i) \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_i, y_i) \hat{\sigma}_i(x_i, y_i) \quad (4.17b)$$

sendo  $n$  o número de pontos super convergentes e  $(x_i, y_i)$  as suas coordenadas. Após determinados os valores do vetor incógnitas  $\mathbf{a}_i$  basta substituir as coordenadas do nó central da nuvem na Eq. (4.15) para obter os componentes do vetor de tensões recuperadas  $\bar{\sigma}^*$ . Substituindo, então,  $\bar{\sigma}^*$  na Eq. (4.13) obtém-se a distribuição das tensões no interior de cada elemento.

#### 4.2.6 - Estimador de erro no contexto do MEFG/S com modelos de dano

As pesquisas envolvendo a aplicação do MEFG/X associado com estimadores de erro não eram tão numerosas até os últimos dez anos. As primeiras contribuições para o tema podem ser encontradas em Babuška *et al.* (1998a) e Strouboulis *et al.* (2001) onde (de maneiras distintas) um problema de Laplace em  $\mathbb{R}^2$  tem seu erro estimado. Desde então outros trabalhos na mesma linha foram publicados tanto utilizando a metodologia MEFX (Bordas *et al.*, 2008; Gerasimov *et al.*, 2012; Prange *et al.*, 2012; Ródenas *et al.*, 2013; Wang *et al.*, 2016), quanto a MEFG

(Barros *et al.*, 2004b; Strouboulis *et al.*, 2006; Lins *et al.*, 2015) ou a MEFG/S (Lins *et al.*, 2019).

Essa linha de pesquisa tem ganhado corpo, embora ainda de maneira tímida, devido a percepção de que, segundo Ródenas *et al.* (2010), os métodos numéricos derivados do MEF são fortemente afetados pelo erro de discretização. Particularmente isso pode se acentuar no MEFG/S por conta da utilização de malhas de elementos finitos muito grosseiras. Trabalhos com análises de não linearidades e adaptabilidade, como o de Barros *et al.* (2004a) não são tão numerosos na literatura. É nesse contexto que esta pesquisa se insere.

## 4.3 - METODOLOGIA

### 4.3.1 - Revisão da literatura

Nesta etapa foram aprofundados os estudos de conceitos básicos e características dos estimadores de erro e sua aplicação em processos adaptativos. Nesta etapa foram revisados os principais trabalhos acadêmicos que servem de base teórica para este trabalho bem como os artigos científicos mais atuais. Também foram estudadas aplicações da estratégia adaptativa combinada com o MEGF/S. Todas as estratégias foram implementadas no *Lachesis* (Fig. 2.6).

### 4.3.2 - Implementação computacional e validação

Devido a escassez de trabalhos na literatura voltados para aplicação do MEFG/S adaptativo em análises de dano estrutural, foi desenvolvida uma metodologia própria e dividida em três módulos distintos, a saber: o primeiro nomeado *Pré Adaptativo (Pre-Adap)*, o segundo chamado de *Pós Adaptativo (Pos-Adap)* e o terceiro a junção dos dois primeiros (*Pre/Pos-Adap*).

#### 4.3.2.1 - Módulo *Pré Adaptativo*

Considerando que o modelo de dano utilizado nesta tese se baseia na solução de um problema com presença de dano (não linear) resolvido mediante aplicação de passos de carga/deslocamento (solucionados iterativamente de maneira linear), o módulo *Pre-Adap* foi pensado para aproveitar essa característica. Ele atua como aquele que aplica as funções de enriquecimento no modelo (quando necessário) utilizando todo o arcabouço funcional apresentado nas Sec. 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.5. A Fig. 4.2 apresenta o fluxograma do procedimento executado por esse módulo, cujo nome referencia o fato do mesmo atuar antes da montagem do sistema de equações do problema e não tem relação direta com o nível de danificação dos elementos em cada passo de carga. O procedimento indicado na Fig. 4.2 é, assim, executado sempre no início de cada passo de carga.

Através da solução obtida a partir de uma análise linear elástica realizada logo no início de cada passo, é feita uma estimativa de erro "a posteriori" utilizando a técnica *ZZ-SPR* (Sec. 4.2.5) para recuperar o campo de tensões nos elementos. Em seguida o erro relativo para cada elemento ( $\mathcal{E}_{(\Omega_e)}$ ) é calculado, bem como o erro relativo global  $\mathcal{E}$  (caso a análise seja não linear utiliza-se a

Eq. 4.4 para o cálculo da norma de energia, caso não, a Eq. (4.3)). O primeiro determina se um elemento será ou não enriquecido (caso  $\mathcal{E}_{(\Omega_e)}$  seja maior que a tolerância -  $\mathcal{E}^{adm}$  - o elemento é enriquecido com a função polinomial determinada) e o segundo controla a finalização do processo de enriquecimento (que não é paralisado até que  $\mathcal{E}$  atinja a tolerância -  $\mathcal{E}^{adm}$  - ou o grau polinomial alcance o limite estabelecido  $p_n^{max}$ ).

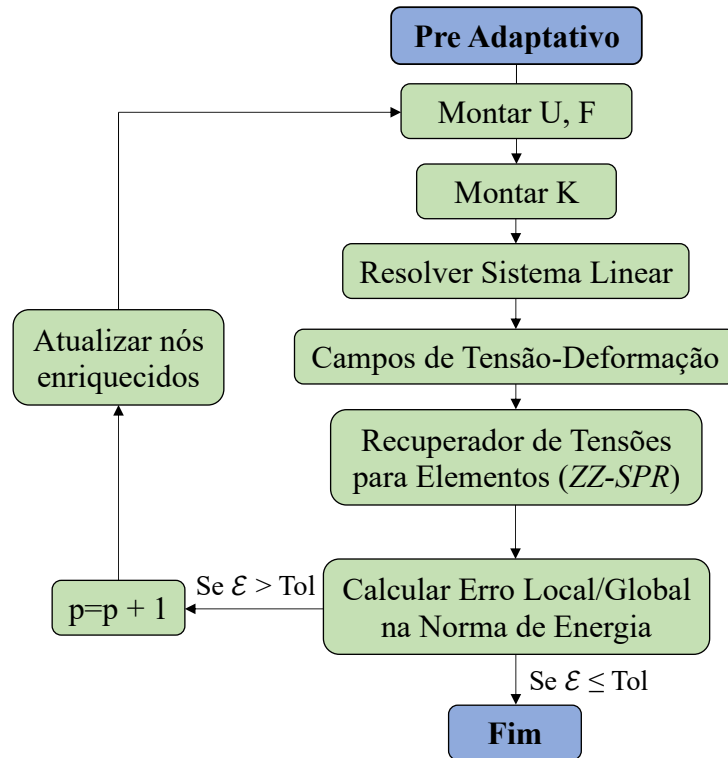


Figura 4.2 – Algoritmo 01: módulo *Pré Adaptativo* - estratégia em elementos.

Outro ponto importante da metodologia diz respeito à escolha da função de base  $P(x, y)$ . Ela é determinada em função do grau de enriquecimento dos nós do elemento (conforme Tab. 4.2). Caso um elemento tenha nós com enriquecimentos de diferentes graus, a base é determinada considerando a função de maior grau polinomial detectada dentre os nós do elemento.

Tabela 4.2 – Bases polinomiais de aproximação

	<i>ID</i>	<i>2D</i>	<i>3D</i>
Linear + enriquecimento	<i>P1</i>	$[1, x, y]$	-
	<i>P2</i>	$[1, x, y, x^2, y^2]$	-
	<i>P3</i>	$[1, x, y, x^2, y^2, x^3, y^3]$	-
	<i>P4</i>	$[1, x, y, x^2, y^2, x^3, y^3, x^4, y^4]$	-
	<i>P5</i>	$[1, x, y, x^2, y^2, x^3, y^3, x^4, y^4, x^5, y^5]$	-
	<i>P6</i>	$[1, x, y, x^2, y^2, x^3, y^3, x^4, y^4, x^5, y^5, x^6, y^6]$	-

Foram definidos dois instrumentos de parada do processo de refinamento  $p$  para impedi-lo de continuar indefinidamente: o Erro relativo global admissível  $\mathcal{E}^{adm}$  (caso  $\mathcal{E}$  atinja a tolerância desejada - $\mathcal{E}^{adm}$ - o processo é finalizado, caso não, é apontada não convergência e o processo é abortado); e  $p_n^{max}$  que determina o máximo grau polinomial do enriquecimento que os nós

podem alcançar (enquanto  $\mathcal{E}$  não atingir a tolerância os nós serão enriquecidos até o grau  $p_n^{max}$  estabelecido).

Outro aspecto importante da metodologia diz respeito ao controle da velocidade do enriquecimento. Isso é feito através da quantidade (em porcentagem) de elementos analisados ( $n_{\%}^{ele}$ ) e da quantidade de nós de cada elemento que são enriquecidos em cada iteração (ver Fig. 4.2). Independente do valor de  $n_{\%}^{ele}$  foi estabelecido que um único nó de cada elemento seja enriquecido dentro de uma mesma iteração. Isso foi feito em função da instabilidade observada nos resultados quando dois ou mais nós de um mesmo elemento eram enriquecidos numa mesma iteração.

Deste modo, considerando que o processo tem início com o modelo sem enriquecimentos, os nós são enriquecidos progressivamente, conforme a velocidade estabelecida, até  $\mathcal{E}$  atingir a tolerância. O método só permite que o valor  $p_n$  assuma o valor  $p_{n+1}$  caso seja identificado que todos os nós da malha ou da camada (com exceção para os nós onde são aplicadas  $CC$  de Dirichlet e Neuman) tenham atingido o mesmo valor  $p_n$ . Isso foi feito para evitar que um único elemento (e sucessivamente um após o outro) atinja o valor  $p_n^{max}$  enquanto os demais permaneçam com  $P0$  (sem ao menos serem analisados). Também é possível arbitrar a quantidade limite de iterações para o procedimento. Claramente, caso  $\mathcal{E}$  não alcance a tolerância desejada nesse intervalo, será acusada a não convergência.

Foi estudada também uma estratégia buscando tornar o processo mais rápido. Basicamente a malha é dividida em duas camadas. São definidas duas medidas ( $d^1$  e  $d^2$ ) a partir de um determinado ponto de referência. Caso o baricentro do elemento esteja dentro do intervalo ( $d^1 + d^2$ ) o mesmo é considerado como pertencente ao nível 1. Caso contrário, fará parte da camada 2, delimitada nas extremidades por  $d^3$  e  $d^4$  (ver Fig. 4.3).

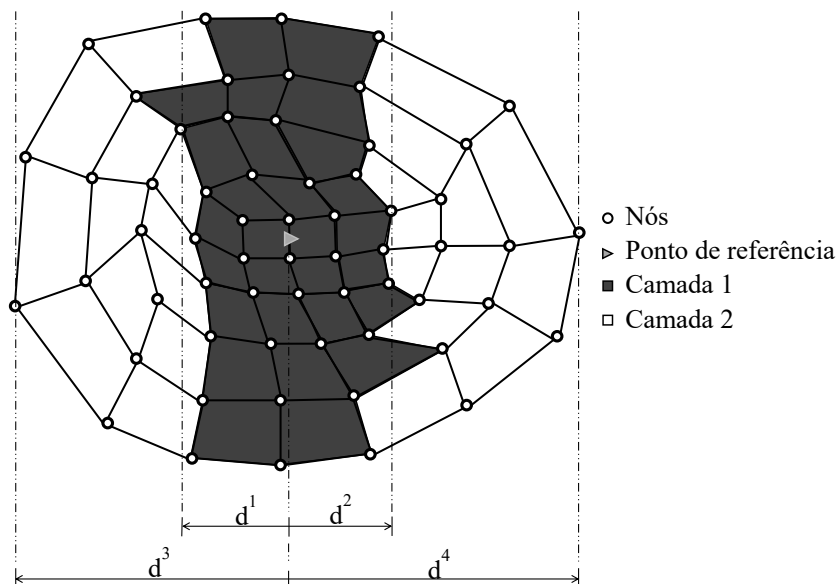


Figura 4.3 – Adaptatividade: camadas de elementos para módulo pré adaptativo.

Feito isto, o procedimento de refinamento adaptativo  $p$ , bem como o cálculo do erro global só são realizados levando em conta os elementos pertencentes à camada 1 (elementos escurecidos). Para os nós dos elementos da camada 2 estabelece-se enriquecimento fixo  $P1$ . A Fig. 4.4



apresenta o fluxograma do processo com a utilização da estratégia em camadas onde a única diferença em relação ao anterior é o processo de identificação das camadas 1 e 2.

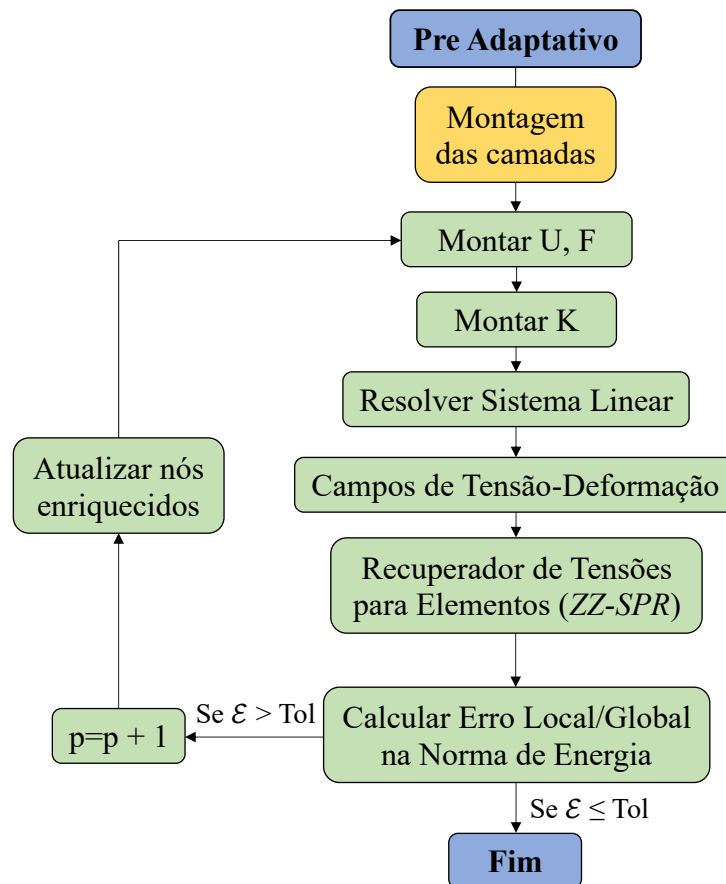


Figura 4.4 – Algoritmo 02: módulo *Pré Adaptativo* - estratégia em camadas.

#### 4.3.2.2 - Módulo *Pós Adaptativo*

O módulo pós adaptativo (*Pos-Adap*) trabalha reduzindo o grau polinomial dos polinômios enriquecedores. Ele é responsável por retirar enriquecimentos de regiões da malha onde não forem mais relevantes para aumentar a qualidade da resposta final (a saber, elementos completamente danificados ou cortados por uma trinca). Isso confere uma eficiência computacional maior à simulação haja vista que o refinamento  $p$  não permanece fixo até o fim da simulação, e vai sendo adaptado (reduzido o grau polinomial ou mesmo retirando por completo o enriquecimento de alguns nós) a medida que determinados estágios vão sendo atingidos.

Para isso, da mesma forma como na estratégia abordada na seção anterior, os elementos são divididos em camadas, neste caso três (Fig. 4.5), delimitadas por  $d^1$ ,  $d^2$ ,  $d^3$  e  $d^4$  medidas a partir de um ponto referencial escolhido. Para cada camada foi estabelecido um critério diferente de análise para ativar (ou não) alterações no grau polinomial do enriquecimento, levando em consideração sempre o nível de dano dos elementos e a porcentagem de evolução do ensaio numérico.

A camada 1 (externa em relação à  $d^3$  e  $d^4$ ) é definida como sendo aquela mais distante da

zona de processo do experimento. Deste modo, é uma região onde poucas mudanças do ponto de vista constitutivo ocorrem e, em geral, espera-se que os elementos desta zona não atinjam danificação. Portanto, para esse caso, após vários ensaios, estabeleceu-se o limite de 10% da simulação como parâmetro para iniciar a retirada dos enriquecimentos dos nós que compõem essa zona, pois notou-se que caso um elemento não alcance um valor qualquer de dano até essa etapa da simulação é improvável que ocorra adiante. Deste modo, não há necessidade em manter um elevado refinamento polinomial nesse local. Portanto, atingido esse marco, o grau polinomial de enriquecimento da região é reduzido passo a passo e atinge  $P0$  quando a simulação ultrapassar 50% de evolução.

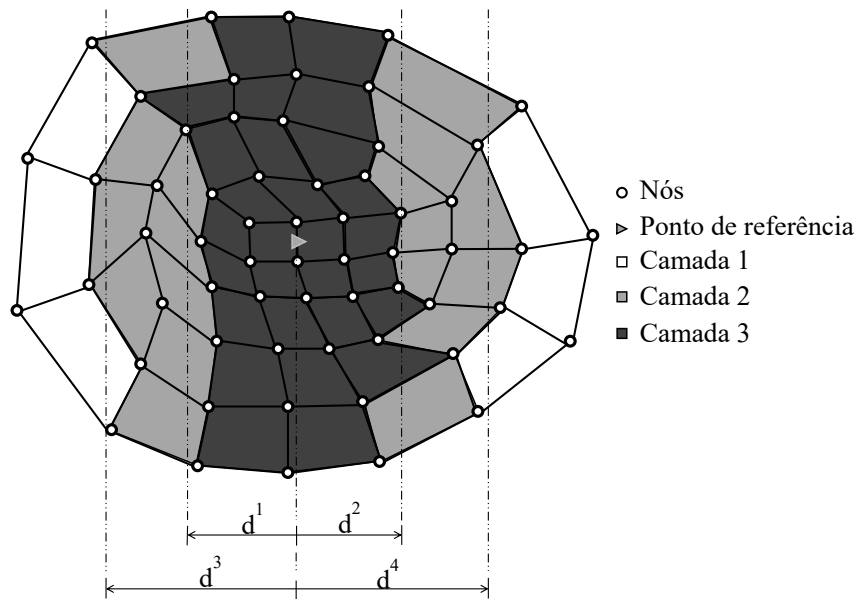


Figura 4.5 – Adaptatividade: camadas de elementos para módulo pós adaptativo.

A camada 2 (entre  $d^3 - d^1$  e  $d^4 - d^2$ ) refere-se à região próxima da zona de processo onde os elementos podem atingir algum nível de dano ou não. Com base nessa característica estabeleceu-se o limite de 50% da simulação como parâmetro para a adaptatividade atuar. Este patamar foi assim estabelecido haja vista ter sido observado que a partir desse ponto a maior parte dos elementos da zona de processo já atingem um certo nível de dano, tornando mais fácil mapeá-los.

Attingido o marco de 50% da simulação, a vizinhança de cada elemento é verificada antes da alteração do enriquecimento e, caso seja identificado algum elemento que tenha alcançado um valor próximo ao dano crítico ( $D_{crit}$ ), nenhuma modificação é realizada no grau polinomial. Isso foi feito para garantir que não seja alterado o grau de enriquecimentos dos nós compartilhados por elementos da camada 3 que fazem fronteira com os da camada 2.

Por fim, tem-se a camada 3 (entre  $d^1 + d^2$ ) definida como sendo a provável zona de processo, ou seja, região onde espera-se forte danificação, onde provavelmente alguns elementos alcancem o  $D_{crit}$  e, portanto, local de muita importância para definir o resultado ótimo. Assim sendo, é importante garantir o mínimo de refinamento  $p$  nesse espaço. Com base nisso, estabeleceu-se que a redução do grau do enriquecimento só ocorre quando o dano no elemento atingir  $D_{crit}$ .

A vizinhança de cada elemento é verificada antes de alterar o enriquecimento e, só é realizada

qualquer modificação, quando for identificado pelo menos um elemento que tenha atingido  $D_{crit}$  na vizinhança. Isso foi feito para garantir que o elemento "à frente" da evolução do dano esteja sempre refinado polinomialmente com o maior grau que for estabelecido na análise. Destaca-se, ainda, que nessa camada determinou-se que o grau seja diminuído somente até  $P1$  (permanecendo assim até 99% da simulação quando então atinge  $P0$  caso seja esse o caso). A Fig. 4.6 apresenta o procedimento executado por esse módulo.

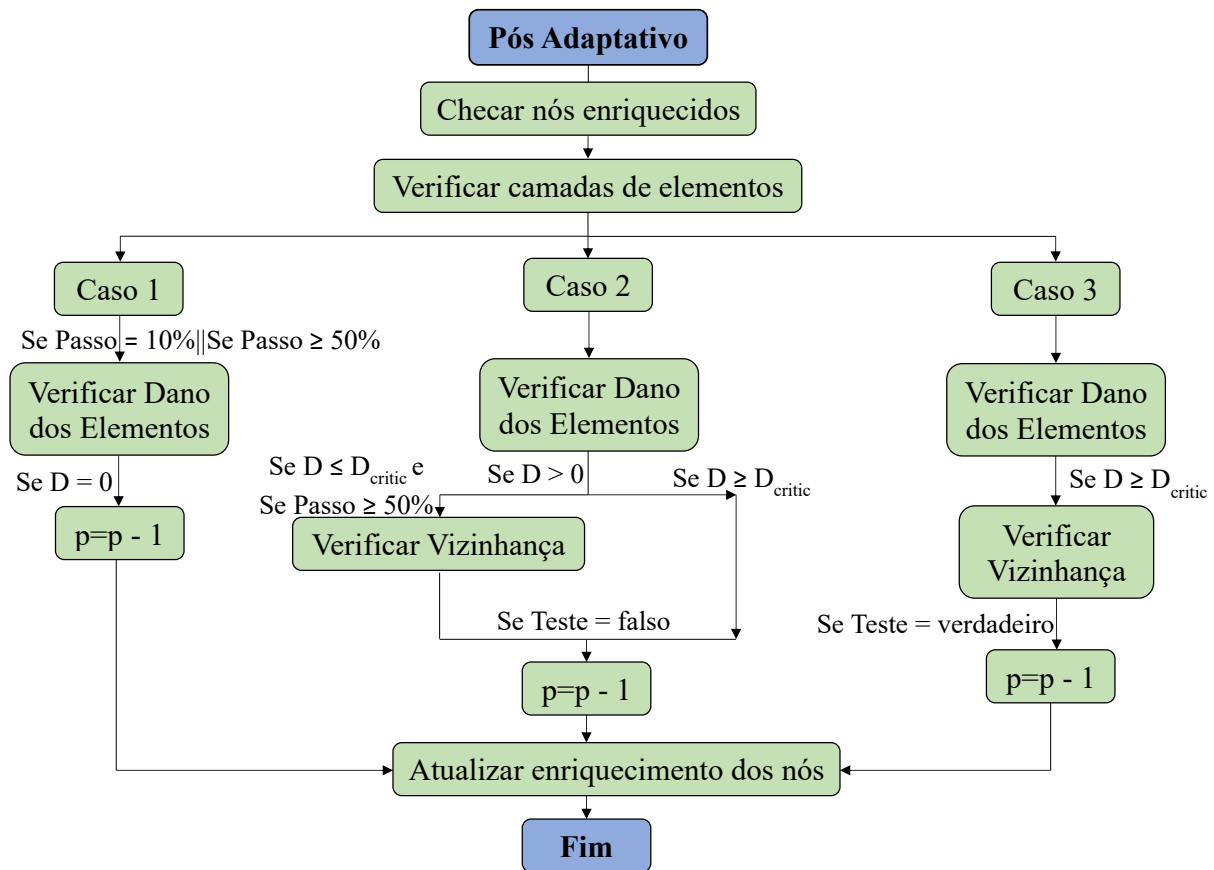


Figura 4.6 – Algoritmo 03: módulo *Pós Adaptativo* - estratégia em camadas.

#### 4.3.2.3 - Módulo *Pré-Pós Adaptativo*

Por fim tem-se o módulo (*Pre/Pos-Adap*) que é uma junção dos dois anteriores. Ou seja, enquanto (*Pre-Adap*) aplica o refinamento  $p$  no modelo, o (*Pos-Adap*) trabalha na redução do grau polinomial de enriquecimento visando melhorar a eficiência computacional a medida que os critérios (estabelecidos com base na danificação do elemento) vão sendo atingidos. Foi estabelecido que caso todos os nós alcancem o nível de enriquecimento  $p_n^{max}$  em algum momento da simulação, o módulo (*Pos-Adap*) passa a atuar sozinho.

## 4.4 - VERIFICAÇÃO DO MÉTODO *ZZ-SPR*

Para fazer a verificação da implementação do estimador de erro *ZZ-SPR* foi utilizado o modelo da chapa em  $L$  simulado sob regime linear elástico. A geometria e as condições de contorno

são apresentadas pela Fig. 4.7. Os resultados foram comparados com os obtidos por Passos (2012) em seu trabalho. A Tab. 4.3 apresenta os dados geométricos e os parâmetros de material adotados. A carga aplicada corresponde a  $P = 10N$ .

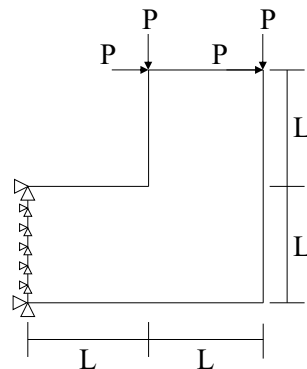


Figura 4.7 – Chapa em L: Geometria e as condições de contorno.

Foram feitas simulações utilizando quatro malhas diferentes, construídas almejando densidades de malha semelhantes às encontradas na referência. A Fig. 4.8 mostra os resultados da tensão de Von Mises para todos os casos simulados. Comparando-se os resultados com a referência foi possível observar boa correspondência entre os obtidos nesta pesquisa (Fig. 4.8(a)) e os alcançados por Passos (2012) (Fig. 4.8(b)).

Tabela 4.3 – Parâmetros geométricos e relativos ao material da chapa em L

Geometria		Material	
$L$ (mm)	$e$ (mm)	$E$ (GPa)	$\nu$
10	1	200	0,3

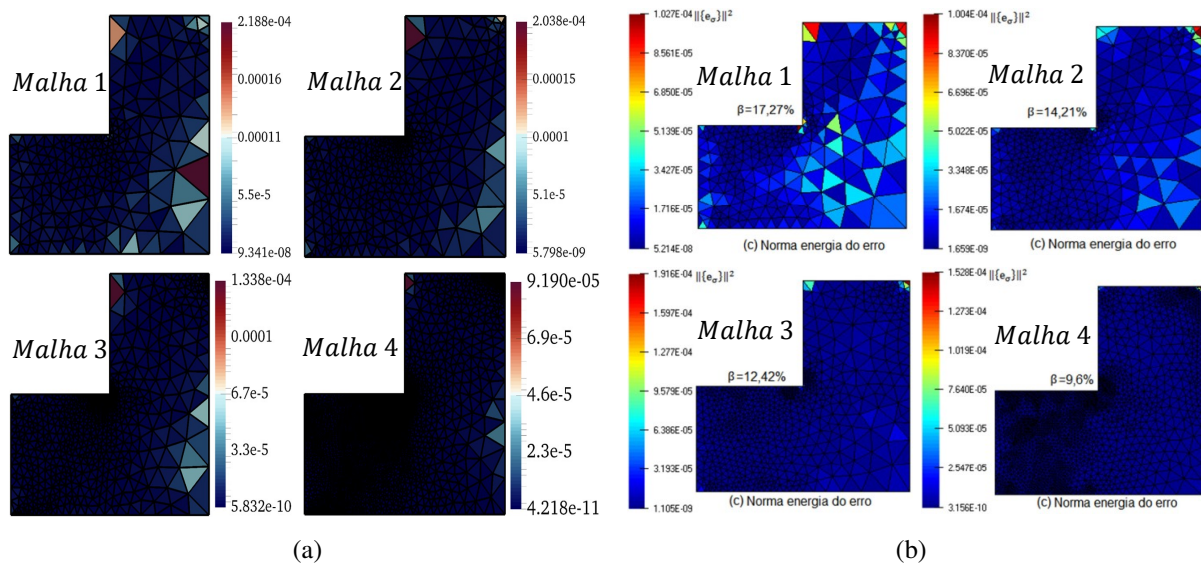


Figura 4.8 – Tensão de Von Mises: (a) autoral; (b) adaptado de Passos (2012).

A Tab. 4.4 apresenta um comparativo entre os resultados de norma de energia ( $\|e_{\sigma}^*\|^2$  - Eq. (4.5))

e de erro relativo global ( $\mathcal{E}$  - Eq. (4.10)). Nota-se também boa correspondência entre os valores encontradas nas simulações desta pesquisa e aqueles alcançados pela referência.

Tabela 4.4 – Comparação entre  $\|e_{\sigma}^*\|^2$  e  $\mathcal{E}$

Malha	Autorial			Passos (2012)		
	n° de Elementos	$\ e_{\sigma}^*\ ^2$	$\mathcal{E}$	n° de Elementos	$\ e_{\sigma}^*\ ^2$	$\mathcal{E}$ (%)
1	386	3.24E-3	20.57	392	3,25E-3	17,27
2	642	2.11E-3	17.14	634	2,37E-3	14,21
3	1267	1.53E-3	14.67	1264	1,72E-3	12,42
4	4025	8.59E-4	10.64	4025	1,66E-3	9,6

#### 4.5 - VERIFICAÇÃO DO MEEG/S ADAPTATIVO

Para a verificação da implementação, analisou-se uma viga engastada e livre, submetido à flexão simples, com carregamento distribuído na face livre conforme condições de contorno ( $CC$ ) e geometria apresentadas pela Fig. 4.9, modelo analisado por Zienkiewicz e Zhu (1987). Na Tab. 4.5 encontram-se as dimensões, o carregamento, as  $CC$  e as propriedades do material (em unidades consistentes).

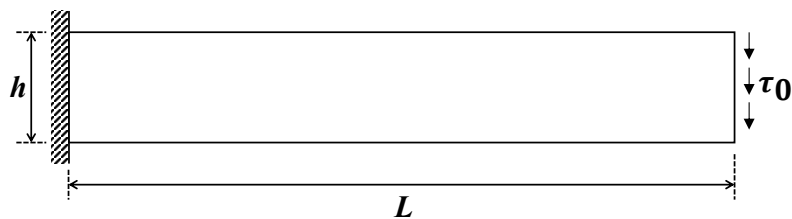


Figura 4.9 – Viga engastada livre - geometria e condições de contorno.

Tabela 4.5 – Viga engastada livre - dados gerais do modelo.

h	t	L	E	$\nu$	$\tau_0$
1	1	10	10 E+05	0,30	1

Para avaliar a convergência foi avaliado o deslocamento no ponto mais inferior da face livre. Os resultados das simulações foram comparadas com a solução analítica calculada conforme a Eq. (2.24) segundo a teoria de Euler-Bernoulli. Efetuando-se os cálculos, têm-se que o valor de referência para o deslocamento no ponto determinado é  $10, \frac{h}{2} = 4,156 \text{ E-}02$ .

O modelo foi discretizado em duas malhas de elementos triangulares (I com 20 e II com 40 elementos conforme observado na Fig. 4.10) todos com espessura constante e constituídos de material homogêneo isotrópico. Pra respeitar as condições de contorno de Dirichlet, o programa automaticamente identifica os nós onde as  $CC$  são aplicadas e, também de maneira autônoma, não permite que esses nós sejam enriquecidos. A integração numérica do domínio foi realizada pela regra de Gauss-Legendre mínima.

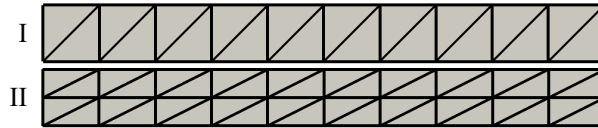


Figura 4.10 – Viga engastada livre - discretizações do modelo.

Foram realizadas simulações  $P0$  para todas as malhas. Da mesma forma, utilizando o mesmo refinamento de malha, foram feitas simulações para avaliar a adaptatividade aplicando diferentes valores de  $p_n^{max}$  (1, 2, 3, 4 e 5) e utilizando apenas a estratégia em elementos (ver Fig. 4.2). A análise da convergência foi feita com relação ao refinamento de malha para três diferentes valores de  $\mathcal{E}^{adm}$ : 3%, 5% e 10%. As Tabs. 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam um resumo dos resultados do deslocamento e Erro Relativo ( $e_r$ ) que foram obtidos para as estratégias  $Pol^i$  e  $Pol^c$  em todas as situações.

Tabela 4.6 – Resultados de  $u_y = (10, \frac{h}{2})$  e  $e_r$  para  $\mathcal{E}^{adm} = 3\%$ .

$p_n^{max}$		MFEG				MEFG/S			
		$Pol^i$		$Pol^c$		$Pol^i$		$Pol^c$	
		I	II	I	II	I	II	I	II
0	<i>GDL</i>	44	66	44	66	44	66	44	66
	$u_y$	0.0095633	0.0150771	-	-	0.0095633	0.0150771	-	-
	$e_r$ (%)	76.99	63.72	-	-	76.99	63.72	-	-
1	<i>GDL</i>	124	186	124	186	-	-	-	-
	$u_y$	0.0399388	0.0401703	0.0399388	0.0401703	-	-	-	-
	$e_r$ (%)	3.90	3.34	3.90	3.34	-	-	-	-
2	<i>GDL</i>	204	274	224	288	124	186	164	246
	$u_y$	0.0400907	0.040193	0.0401909	0.0401954	0.0156905	0.02327	0.03508	0.0369459
	$e_r$ (%)	3.54	3.29	3.29	3.28	62.25	44.01	15.59	11.10
3	<i>GDL</i>	284	418	404	452	204	306	324	486
	$u_y$	0.0401019	0.040206	0.0402419	0.0402305	0.0331577	0.029562	0.0380884	0.0379282
	$e_r$ (%)	3.51	3.26	3.17	3.20	20.22	28.87	8.35	8.74
4	<i>GDL</i>	364	498	604	738	284	426	524	786
	$u_y$	0.0401028	0.0402089	0.0402618	0.0402618	0.0346193	0.030861	0.0393216	0.0392116
	$e_r$ (%)	3.51	3.25	3.12	3.12	16.70	25.74	5.39	5.65
5	<i>GDL</i>	444	626	-	978	364	546	764	1146
	$u_y$	0.040103	0.04021	-	0.0402717	0.0378489	0.0363104	0.0397857	0.0396838
	$e_r$ (%)	3.51	3.25	-	3.10	8.93	12.63	4.27	4.51

Observa-se que, de maneira geral, as simulações utilizando a estratégia  $Pol^c$  apresentam resultados com menor  $e_r$ , algo razoável se levado em consideração a maior quantidade de polinômios compondo o conjunto de enriquecimento e, portanto, maior o refinamento  $p$  do modelo.

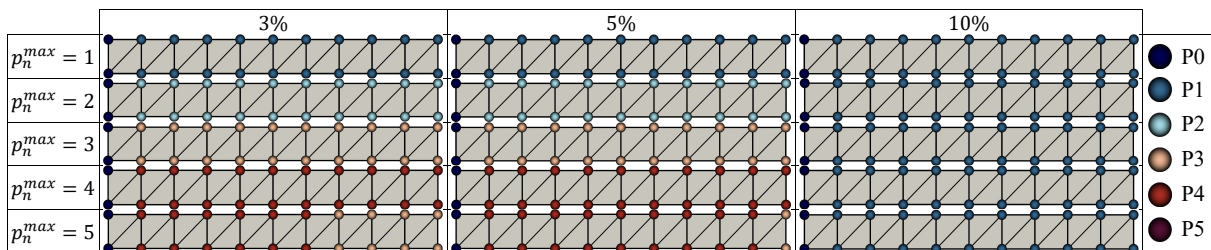


Figura 4.11 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia  $Pol^c$  utilizando MEFG - malha I.



Por outro lado, percebe-se que nesses casos com a estratégia  $Pol^c$  o  $GDL$  é maior quando comparado com as simulações que utilizaram a estratégia  $Pol^i$ . Nota-se, ainda, que as simulações utilizando o MEFG (tanto com a estratégia  $Pol^c$  quanto  $Pol^i$ ) apresentam resultados com menor  $e_r$  que as correspondentes utilizando o MEFG/S.

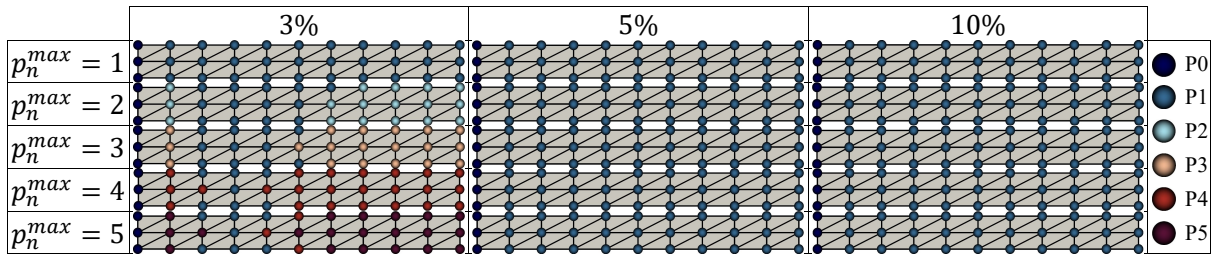


Figura 4.12 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia  $Pol^c$  MEFG - malha II.

As Fig. 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 apresentam o resultado do refinamento  $p$  ao final das análises adaptativas com MEFG (tanto com a estratégia  $Pol^c$  quanto  $Pol^i$ ). Nota-se que ao utilizar  $Pol^i$  os nós tendem a apresentar maior grau de refinamento  $p$  que as respectivas análises utilizando  $Pol^c$ . Isso se dá devido a presença de mais polinômios compondo o conjunto  $Pol^c$ , contribuindo assim para que  $\mathcal{E}^{adm}$  seja alcançado sem a necessidade de tantos nós atingirem graus elevados de enriquecimento polinomial.

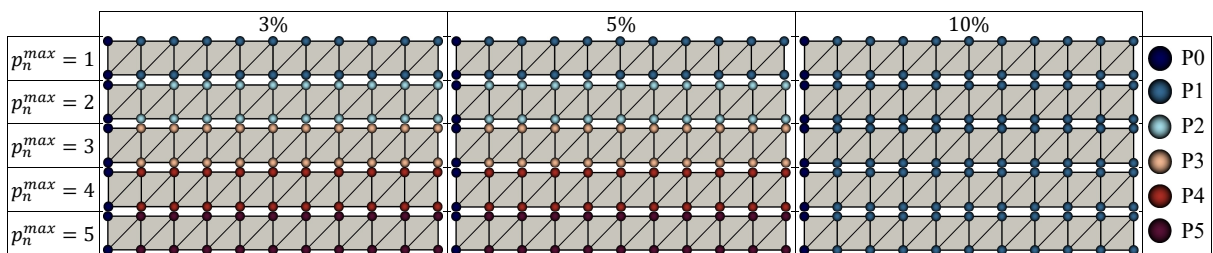


Figura 4.13 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia  $Pol^i$  utilizando MEFG - malha I.

Percebe-se também que quanto mais refinada a malha (refinamento  $h$ ) menor a necessidade de enriquecimento dos nós. Resultado esperado visto que um maior refinamento  $h$  tem como consequência menor necessidade de refinamento  $p$  e vice-versa.

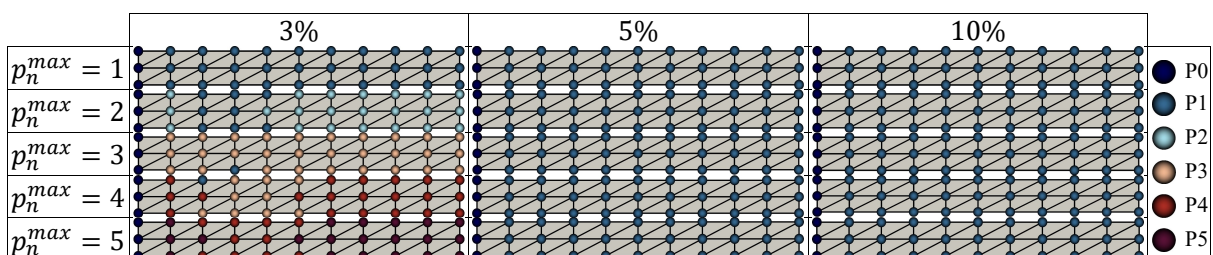


Figura 4.14 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia  $Pol^i$  utilizando MEFG - malha II.

É possível observar que nas situações onde foi utilizado  $\mathcal{E}^{adm}=10\%$  o valor de  $p_n^{max}$  não evoluiu para além de  $P1$  (no caso do MFEFG)  $P2$  (no caso do MFEFG/S). Ou seja, apenas com enriquecimento polinomial  $P1$  (ou  $P2$ , no caso do MFEFG/S) em nós específicos é possível alcançar o  $\mathcal{E}^{adm}$ , suficiente para atingir resultados satisfatórios de  $e_r$  e  $u_y$  a depender da discretização adotada para o modelo.

Tabela 4.7 – Resultados de  $u_y = (10, \frac{h}{2})$  e  $e_r$  para  $\mathcal{E}^{adm} = 5\%$ .

$p_n^{max}$		MFEFG				MFEFG/S			
		Pol <sup>i</sup>		Pol <sup>c</sup>		Pol <sup>i</sup>		Pol <sup>c</sup>	
		I	II	I	II	I	II	I	II
0	<i>GDL</i>	44	66	44	66	44	66	44	66
	$u_y$	0.0095633	0.0150771	-	-	0.0095633	0.0150771	-	-
	$e_r$ (%)	76.99	63.72	-	-	76.99	63.72	-	-
1	<i>GDL</i>	124	186	124	186	-	-	-	-
	$u_y$	0.0399388	0.0401703	0.0399388	0.0401703	-	-	-	-
	$e_r$ (%)	3.90	3.34	3.90	3.34	-	-	-	-
2	<i>GDL</i>	204	186	244	186	124	186	164	246
	$u_y$	0.0400907	0.0401703	0.0401909	0.0401703	0.0156905	0.02327	0.03508	0.0369459
	$e_r$ (%)	3.54	3.34	3.29	3.34	62.25	44.01	15.59	11.10
3	<i>GDL</i>	284	186	404	186	204	306	324	470
	$u_y$	0.0401019	0.0401703	0.0402419	0.0401703	0.0331577	0.029562	0.0380884	0.0379261
	$e_r$ (%)	3.51	3.34	3.17	3.34	20.22	28.87	8.35	8.74
4	<i>GDL</i>	364	186	604	186	284	426	524	470
	$u_y$	0.0401028	0.0401703	0.0402618	0.0401703	0.0346193	0.030861	0.0393216	0.0379261
	$e_r$ (%)	3.51	3.34	3.12	3.34	16.70	25.74	5.39	8.74
5	<i>GDL</i>	444	186	-	186	364	546	764	470
	$u_y$	0.040103	0.0401703	-	0.0401703	0.0378489	0.0363104	0.0397857	0.0379261
	$e_r$ (%)	3.51	3.34	-	3.34	8.93	12.63	4.27	8.74

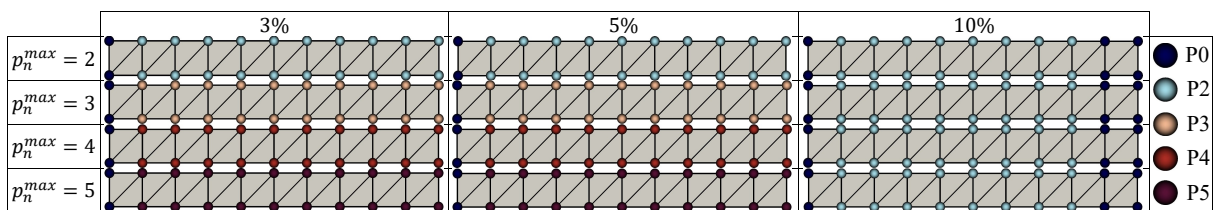


Figura 4.15 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia Pol<sup>c</sup> utilizando MFEFG/S - malha I.

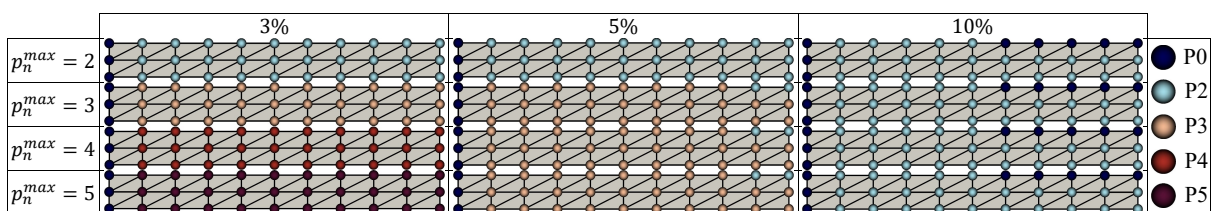


Figura 4.16 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia Pol<sup>c</sup> utilizando MFEFG/S - malha II.

As Fig. 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18 apresentam o resultado do refinamento  $p$  ao final das análises adaptativas com MFEFG/S (tanto com a estratégia Pol<sup>c</sup> quanto Pol<sup>i</sup>). Percebe-se que a malha mais



refinada exige menor necessidade de enriquecimento dos nós. Resultado esperado, posto que a existência de maior refinamento  $h$  tem como consequência menor necessidade de refinamento  $p$ , conforme mencionado anteriormente.

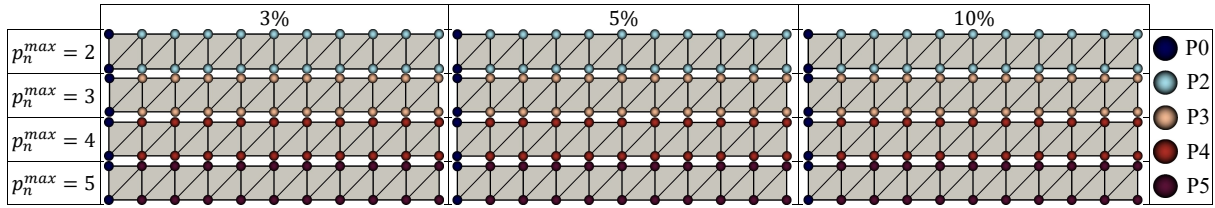


Figura 4.17 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia  $\text{Pol}^i$  utilizando MEFG/S - malha I.

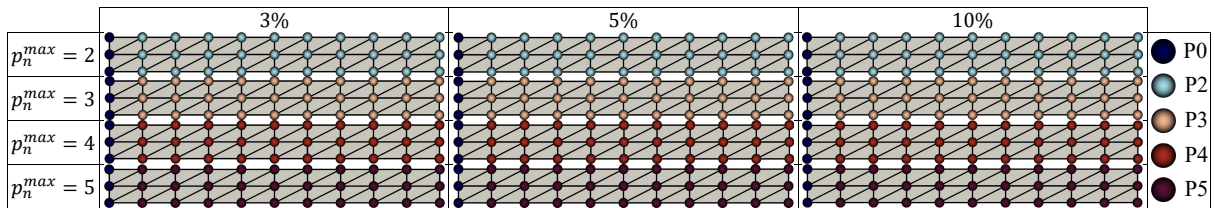


Figura 4.18 – Resultado final do refinamento  $p$ -adaptativo com estratégia  $\text{Pol}^i$  utilizando MEFG/S - malha II.

Tabela 4.8 – Resultados de  $u_y = (10, \frac{h}{2})$  e  $e_r$  para  $\mathcal{E}^{adm} = 10\%$ .

$p_n^{max}$		MEFG				MEFG/S			
		$\text{Pol}^i$		$\text{Pol}^c$		$\text{Pol}^i$		$\text{Pol}^c$	
		I	II	I	II	I	II	I	II
-	<i>GDL</i>	44	66	44	66	44	66	44	66
0	$u_y$	0.0095633	0.0150771	-	-	0.0095633	0.0150771	-	-
	$e_r$ (%)	76.99	63.72	-	-	76.99	63.72	-	-
	<i>GDL</i>	124	186	124	186	-	-	-	-
1	$u_y$	0.0399388	0.0401703	0.0399388	0.0401703	-	-	-	-
	$e_r$ (%)	3.90	3.34	3.90	3.34	-	-	-	-
	<i>GDL</i>	124	186	124	186	124	186	140	216
2	$u_y$	0.0399388	0.0401703	0.0399388	0.0401703	0.0156905	0.02327	0.0349014	0.0361592
	$e_r$ (%)	3.90	3.34	3.90	3.34	62.25	44.00	16.02	12.99
	<i>GDL</i>	124	186	124	186	204	306	140	216
3	$u_y$	0.0399388	0.0401703	0.0399388	0.0401703	0.0331577	0.029562	0.0349014	0.0361592
	$e_r$ (%)	3.90	3.34	3.90	3.34	20.22	28.87	16.02	12.99
	<i>GDL</i>	124	186	124	186	284	426	140	216
4	$u_y$	0.0399388	0.0401703	0.0399388	0.0401703	0.0346193	0.030861	0.0349014	0.0361592
	$e_r$ (%)	3.90	3.34	3.90	3.34	16.70	25.74	16.02	12.99
	<i>GDL</i>	124	186	124	186	364	546	140	216
5	$u_y$	0.0399388	0.0401703	0.0399388	0.0401703	0.0378489	0.0363104	0.0349014	0.0361592
	$e_r$ (%)	3.90	3.34	3.90	3.34	8.93	12.63	16.02	12.99

Pelos resultados encontrados observa-se que o sistema adaptativo funcionou bem tanto com MEFG quanto com MEFG/S. Naturalmente, para maiores valores de  $\mathcal{E}^{adm}$  menor o nível de refinamento  $p$  atingido. As Fig. 4.19 e 4.20 mostram os gráficos de  $e_r$  em função do *GDL*, levando em conta os diferentes refinamentos, os diferentes valores de  $\mathcal{E}^{adm}$  adotados em cada

situação e as variações de  $p_n^{max}$  possíveis ( $P0$  até  $P5$ ). Na Fig. 4.19(a), por exemplo, o ponto onde  $e_r \approx 0.63$  e  $GDL \approx 100$  refere-se à simulação  $P0$ ,  $e_r \approx 0.04$  e  $GDL \approx 990$  refere-se à simulação onde  $p_n^{max} = 5$ .

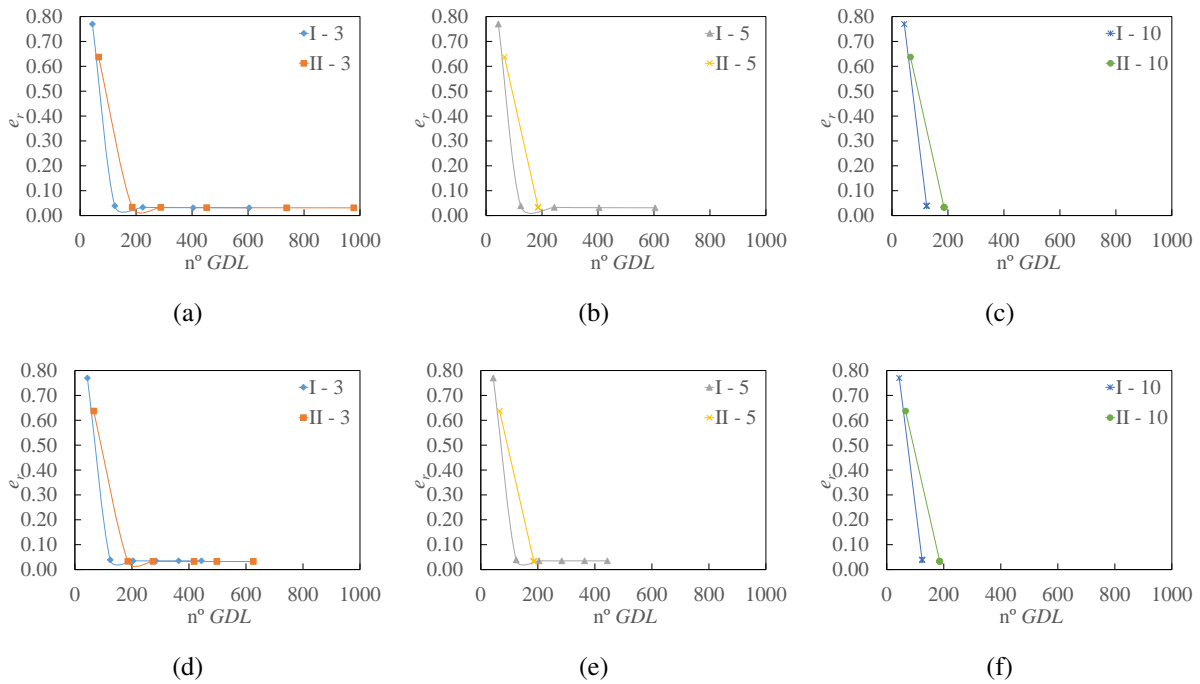


Figura 4.19 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para diferentes  $p_n^{max}$  com MEFG: (a, b, c)  $Pol^c$ ; (d, e, f)  $Pol^i$ .

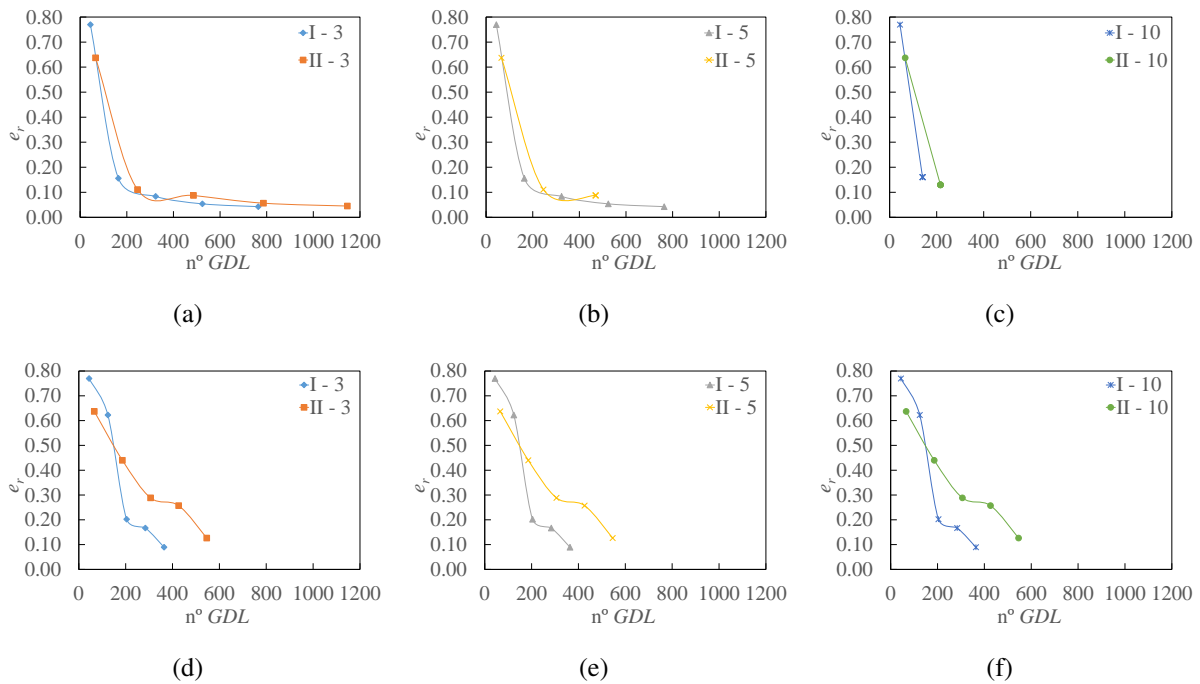


Figura 4.20 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para diferentes  $p_n^{max}$  com MEFG/S: (a, b, c)  $Pol^c$ ; (d, e, f)  $Pol^i$ .

## 4.6 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

O modelo simulado para avaliar o procedimento adaptativo foi o da Chapa em L experimentada por Winkler *et al.* (2001), de onde foram retirados os parâmetros de fratura e os relativos ao material, especificados pela Tab. 4.9. Os resultados das simulações numéricas foram comparados com os dados extraídos dos trabalhos de Winkler *et al.* (2001,2004). A Fig. 4.21(a) ilustra a geometria deste ensaio, sendo  $L = 250\text{mm}$  e a espessura  $t = 100\text{mm}$ . A condição de contorno é constituída pelo engaste na parte inferior. As simulações numéricas foram realizadas com controle de deslocamento, sendo aplicados na região indicada por  $q$  incrementos de  $u = 0.002\text{mm}$ . Foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

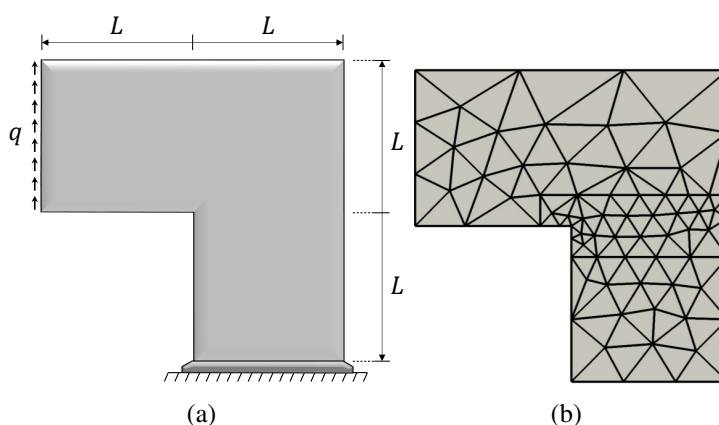


Figura 4.21 – Chapa L: (a) geometria e condições de contorno; (b) malha com 125 elementos.

Tabela 4.9 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio da Chapa em L

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/mm)	$G_f$ (N/mm)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\nu$
0,13	0,09	0,25	25850	2,70	31,00	0,18

Para todas as simulações a velocidade de convergência adotada foi  $n_{\%}^{ele} = 5\%$  e o erro admissível  $\mathcal{E}^{adm} = 20\%$ . Quanto à estratégia de enriquecimento adotada, utilizou-se apenas  $Pol^i$ . Quanto a análise do dano estrutural, utilizou-se apenas o modelo de dano contínua (C). Primeiro foi analisado de forma isolada a qualidade dos resultados das simulações (curvas  $P-d$ , distribuição de dano e eficiência computacional). Após verificar a capacidade da metodologia de conferir boas respostas, foram confrontados os resultados da eficiência computacional das simulações convencionais e aquelas com adaptatividade, a fim de averiguar o real ganho computacional com o uso dessa metodologia. Foi utilizada para as simulações uma malha com 125 elementos finitos triangulares (Fig. 4.21(b)).

### 4.6.1 - Simulações com Módulo Pré Adaptativo

Nesta seção serão expostos os resultados das simulações utilizando o módulo Pré Adaptativo (tanto aplicando a estratégia de elementos quanto a de camadas) utilizando tanto a abordagem MEFG (MEFG $_{pre}^{adapt}$ ) quanto MEFG/S (MEFG/S $_{pre}^{adapt}$ ).

#### 4.6.1.1 - Utilizando estratégia de elementos

A Fig.4.22(a) apresenta as curvas carga-deslocamento ( $P-d$ , cujos valores são medidos na face onde o incremento de deslocamento é aplicado) relativas às simulações com  $MEFG_{pre}^{adapt}$  utilizando a metodologia de elementos. Observa-se que o  $MEFG_{pre}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, tendo em vista a proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental.

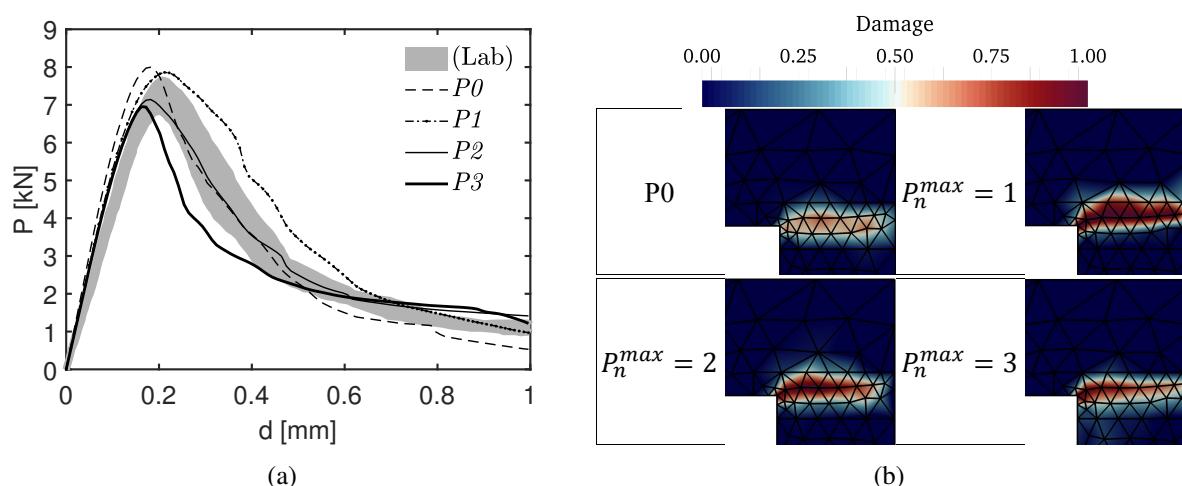


Figura 4.22 – (a) Curvas  $P-d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.22(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior, naturalmente atingido em todos os casos (o dano então tende a ser menos disperso, concentrando-se na região onde a fratura experimental ocorre).

A Fig. 4.23 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MEFG_{pre}^{adapt}$  utilizando a metodologia de elementos, sendo  $N^{it}$  o número de iterações acumuladas por passo,  $N_p^{norm}$  o número de passos normalizado pelo número total de passos da simulação e  $GDL^{proc}$  a quantidade de graus de liberdade processados na simulação completa. A parte das barras em coloração azul indica a parcela dos  $GDL$ 's associada ao MEF, enquanto a outra em coloração laranja indica a quantidade de  $GDL$ 's associada ao enriquecimento.

Na Fig. 4.23(a) observa-se que  $N^{it}$  é menor nas simulação com enriquecimento, comportamento contrário ao observado no Cap. 2 desta tese. Logo, a convergência é mais rápida com a abordagem  $p$ -adaptativa. Em contrapartida, a simulação  $P0$  precisa de mais iterações por passo para a convergência. Isso realça a capacidade do  $MEFG_{pre}^{adapt}$ . É possível notar que as simulações com enriquecimento precisam de menos iterações por passo para convergir. Isso confirma o potencial do  $MEFG_{pre}^{adapt}$  de conferir melhor acurácia aos resultados de tensão e deformação, em simulações com malhas grosseiras garantindo bom nível de eficiência computacional.

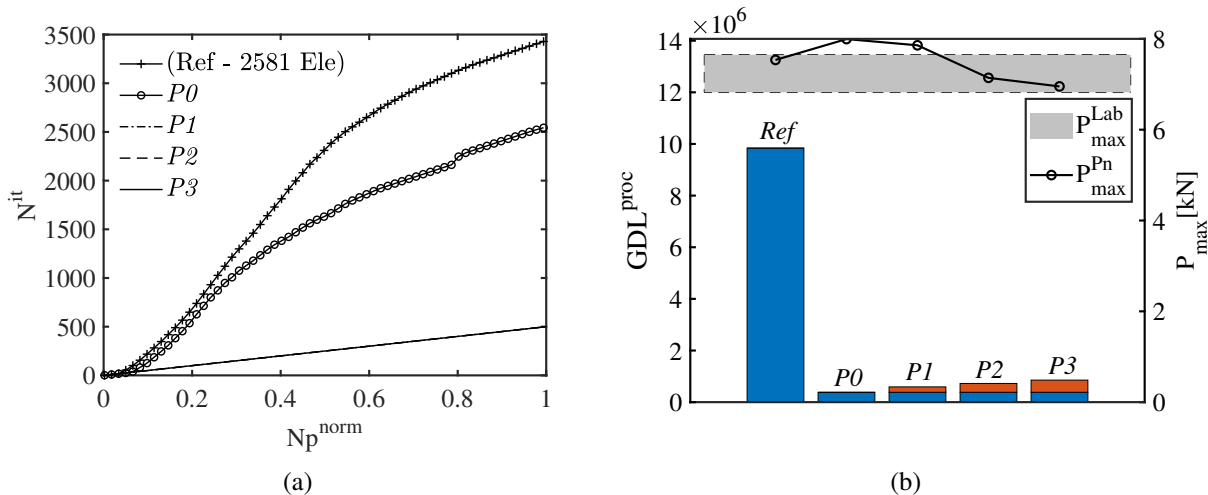


Figura 4.23 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG_{pre}^{adapt} Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 4.23(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia adaptativa foi muito mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada, posto que todas as simulações com refinamento  $p$  apresentaram menor  $GDL^{proc}$ .

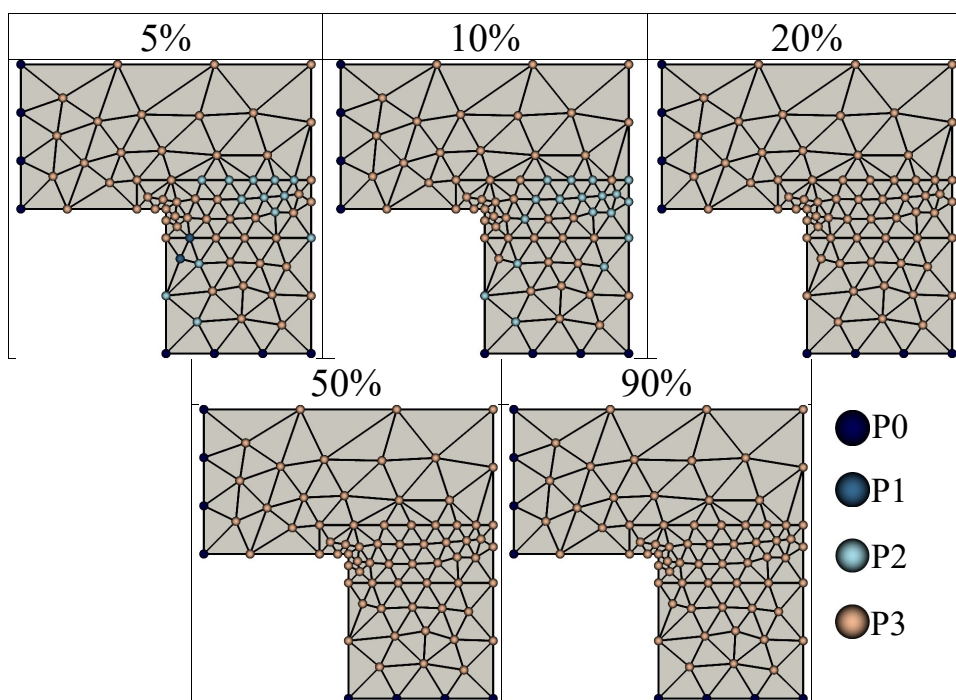


Figura 4.24 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com  $MEFG_{pre}^{adapt}$  em diferentes etapas da simulação.

A Fig. 4.24 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ . A Fig.4.25(a) apresenta as

curvas  $P-d$  relativas às simulações com  $MEFG/S_{pre}^{adapt}$  utilizando a metodologia de elementos. Observa-se que o  $MEFG/S_{pre}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, tendo em vista a proximidade entre as curvas numéricas e a experimental.

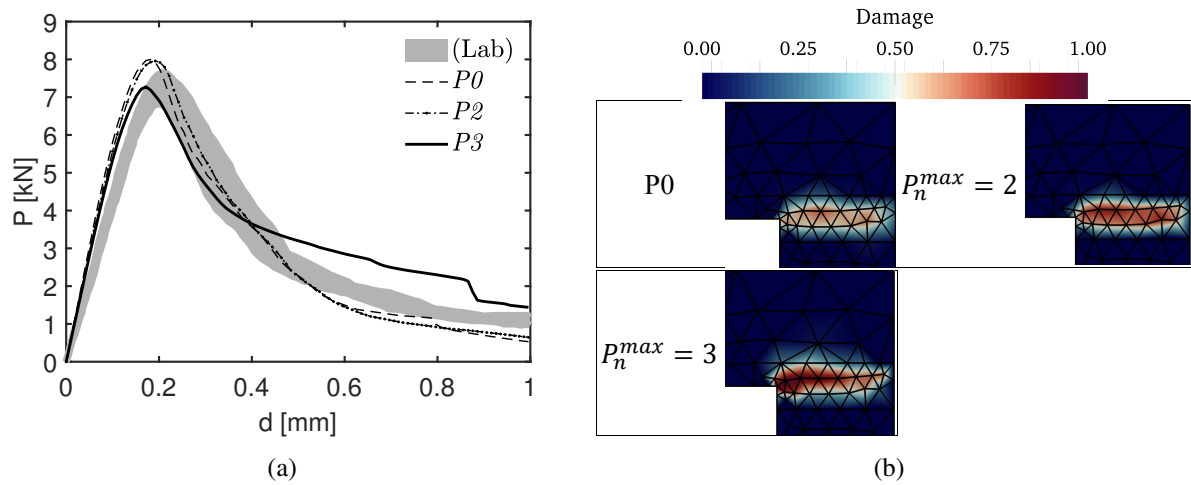


Figura 4.25 – (a) Curvas  $P-d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.25(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior.

A Fig. 4.26 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MEFG/S_{pre}^{adapt}$  utilizando a metodologia de elementos. Na Fig. 4.26(a) ocorre comportamento semelhante ao observado nas Fig. 4.23(a) onde notou-se que  $N^{it}$  foi menor nas simulações com enriquecimento. Elas, portanto, precisam de menos iterações por passo para convergir.

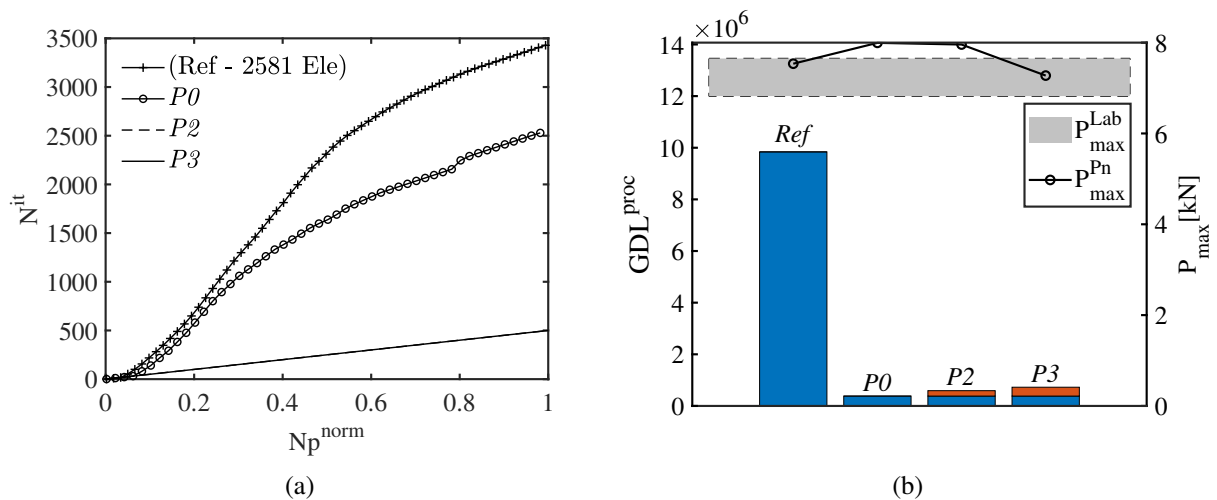


Figura 4.26 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG/S_{pre}^{adapt} Pol^i$ .



É possível notar na Fig. 4.26(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento (embora a diferença entre um e outro seja pequena) haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia adaptativa foi novamente muito mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada. A Fig. 4.27 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ .

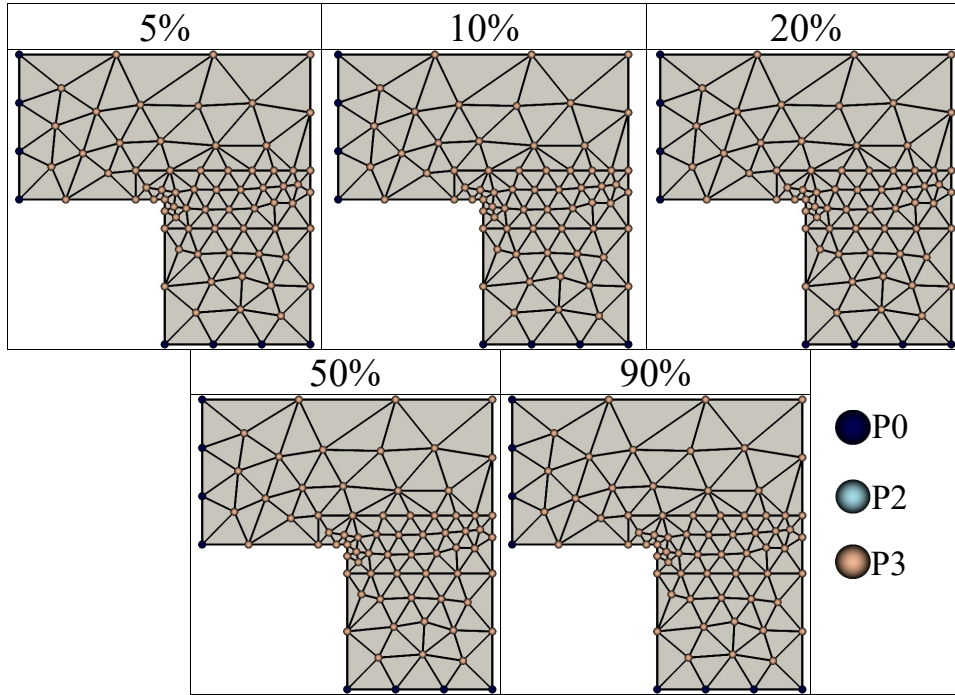


Figura 4.27 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com MEEG/S<sub>pre</sub><sup>adapt</sup> em diferentes etapas da simulação.

Afim de avaliar a qualidade dos resultados  $P$ - $d$  de cada curva, foi estabelecida a medida  $d_r$  para representar a relação entre as medidas  $d_i$  calculadas em seis regiões diferente da curva, sendo  $d_i$  a diferença entre o valor da carga  $P$  da curva analisada e o valor de  $P$  da curva experimental. O cálculo de  $d_r$  foi feito conforme a seguinte equação:

$$d_r = \left[ \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 d_i^2 \right]^{1/2} \quad (4.18)$$

onde  $d_i = P_i^{Lab} - P_i^{Pn}$ , sendo  $P_i^{Lab}$  a carga experimental (medida em seu limite inferior) e  $P_i^{Pn}$  a carga numérica observadas para um mesmo valor no eixo das abscissa. Como referência, calculou-se  $d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf}$ , sendo  $P_i^{Lab,Sup}$  e  $P_i^{Lab,Inf}$  os valores de  $P_i^{Lab}$  medidos no limite superior e inferior, respectivamente. Os menores valores de  $d_r$  indicam as curvas com maior concordância e proximidade em relação aos dados experimentais. Logo, menor  $d_r$  significa resultado com melhor qualidade. A Fig. 4.28 mostra onde cada valor de  $d_i$  é medido, sendo  $a = 0.15L$ .

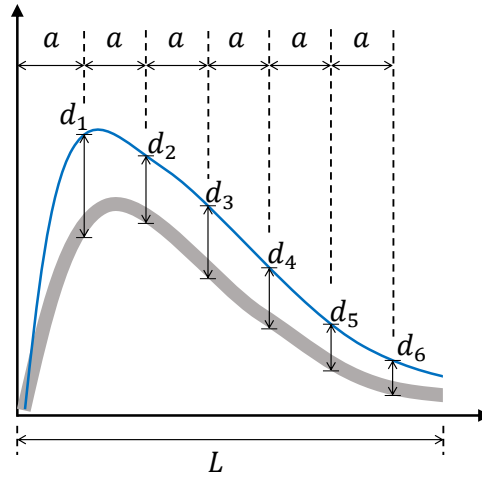


Figura 4.28 – Pontos para avaliação de  $d_i$ .

A Tab. 4.10 apresenta os valores calculados de  $d_r$  comparando simulações com MEFG e MEFG/S convencionais com as realizadas utilizando a estratégia adaptativa (MEFG $_{pre}^{adapt}$  e MEFG/S $_{pre}^{adapt}$ ). Observa-se que em todas as situações o procedimento adaptativo apresentou menor custo computacional que as suas correlatas. Um dos objetivos da utilização do sistema adaptativo foi justamente a otimização do custo computacional das simulações. E isso foi alcançado sem grande perda na qualidade das respostas, visto que os valores de  $d_r$  não divergiram muito em relação à estratégia convencional (no caso MEFG $_{pre}^{adapt}$  com  $p_n^{max} = 3$ , por exemplo, a qualidade da curva foi até melhor que a encontrada na simulação convencional).

Destaca-se que todos os casos apresentaram  $d_r$  e  $GDL^{proc}$  menores que os obtidos na simulação de referência. Ou seja, a metodologia generalizada (adaptativa ou não) foi capaz de gerar respostas com qualidade e eficiência computacional tão boas quanto as obtidas na análise com uma malha cerca de 20 vezes mais refinada.

Tabela 4.10 – Valores de  $d_r$  (kN) com estratégia Pol $^t$ .

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG $_{pre}^{adapt}$		MEFG/S		MEFG/S $_{pre}^{adapt}$	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
P0	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
P1	1.314	1432370	1.377	591350	-	-	-	-
P2	0.407	4535390	0.554	724786	0.608	1414810	0.732	591322
P3	0.687	2762580	0.531	854178	0.837	3836360	0.858	725350

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

#### 4.6.1.2 - Utilizando estratégia de camadas

A Fig.4.29(a) apresenta as curvas  $P-d$  relativas às simulações com MEFG $_{pre}^{adapt}$  utilizando a metodologia de camadas. Observa-se que o MEFG $_{pre}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, devido a proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental.



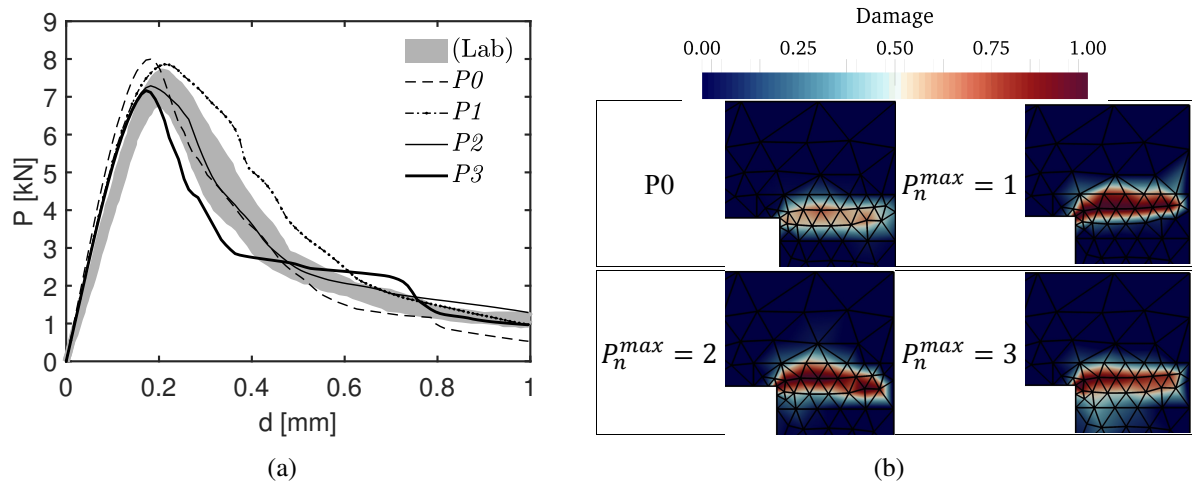


Figura 4.29 – (a) Curvas  $P$ - $d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.29(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior. A Fig. 4.30 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MEFG_{pre}^{adapt}$  utilizando a metodologia de camadas. Na Fig. 4.30(a) ocorre comportamento semelhante ao observado nas Fig. 4.23(a) onde notou-se que  $N^{it}$  foi menor nas simulação com enriquecimento. Elas, portanto, precisam de menos iterações por passo para convergir.

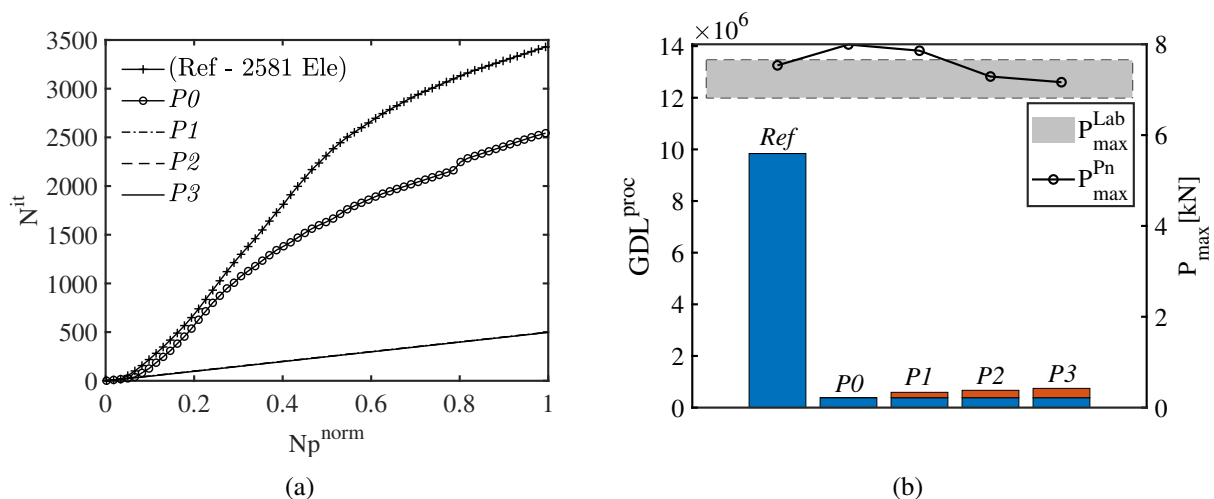


Figura 4.30 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG_{pre}^{adapt} Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 4.30(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento (embora a diferença entre um e outro seja pequena) haja vista haver uma quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia

adaptativa foi novamente mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada. A Fig. 4.31 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 30%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ .

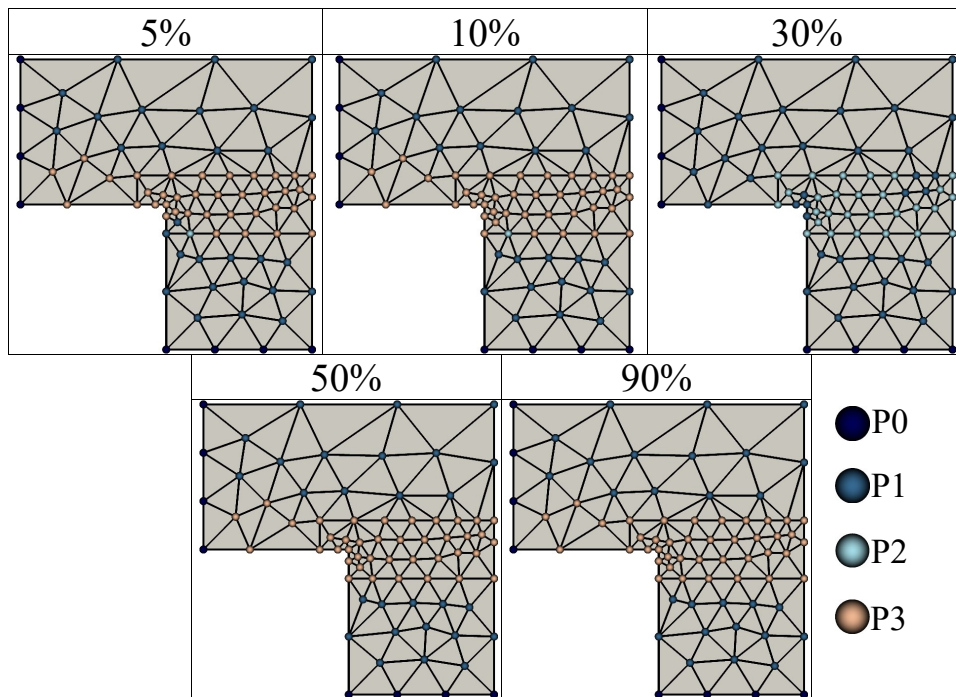


Figura 4.31 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com  $MEFG_{pre}^{adapt}$  e estratégia de camadas em diferentes etapas da simulação.

A Fig.4.32(a) apresenta as curvas  $P$ - $d$  relativas às simulações com  $MEFG/S_{pre}^{adapt}$  utilizando a metodologia de camadas. Observa-se que o  $MEFG/S_{pre}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening* devido à proximidade entre as curvas numéricas e a experimental.

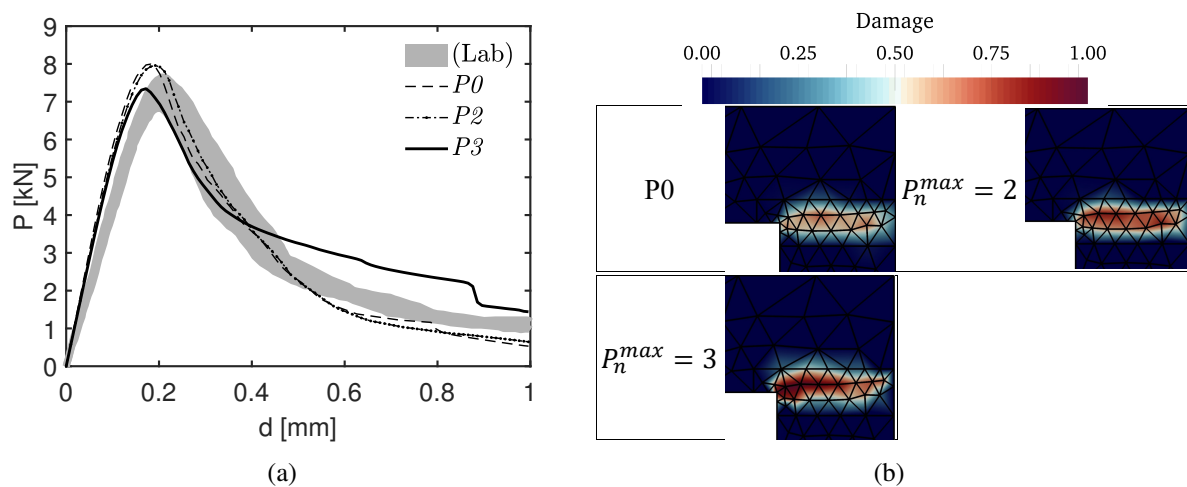


Figura 4.32 – (a) Curvas  $P$ - $d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.32(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior.

A Fig. 4.33 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com MEFG/S<sub>pre</sub><sup>adapt</sup> utilizando a metodologia de camadas. Na Fig. 4.33(a) ocorre comportamento semelhante ao observado nas Fig. 4.23(a) onde notou-se que  $N^{it}$  foi menor nas simulações com enriquecimento. Elas, portanto, precisam de menos iterações por passo para convergir.

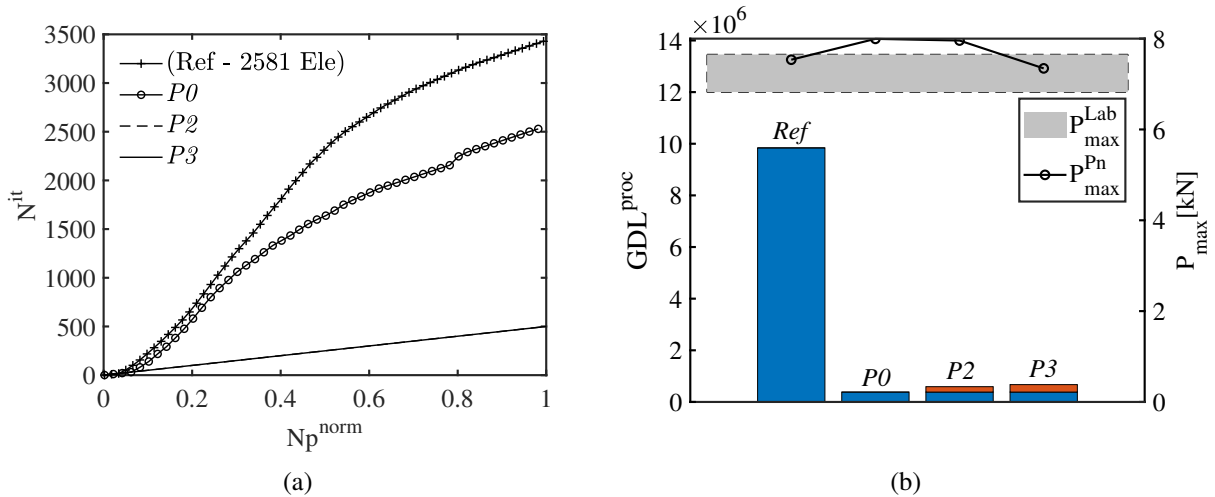


Figura 4.33 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sub>pre</sub><sup>adapt</sup> Pol<sup>i</sup>.

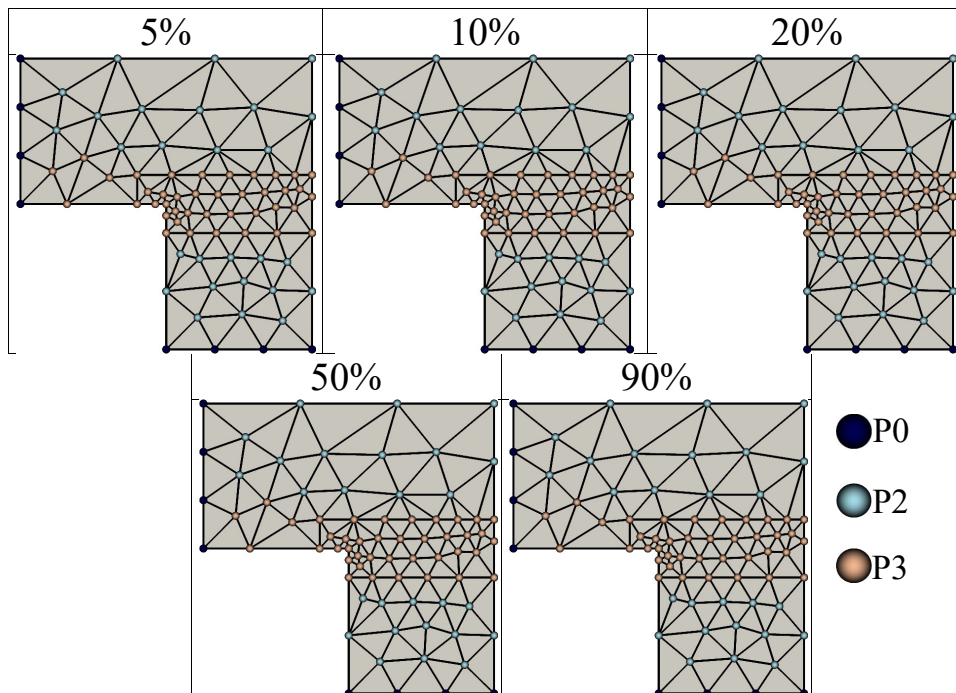


Figura 4.34 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com MEFG/S<sub>pre</sub><sup>adapt</sup> e estratégia de camadas em diferentes etapas da simulação.

É possível notar na Fig. 4.33(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento. Observa-se que a estratégia adaptativa foi novamente mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada. A Fig. 4.34 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ .

A Tab. 4.11 apresenta os valores calculados de  $d_r$  comparando simulações com MEFG e MEFG/S convencionais com as realizadas utilizando a estratégia adaptativa (MEFG $_{pre}^{adapt}$  e MEFG/S $_{pre}^{adapt}$ ).

Tabela 4.11 – Valores de  $d_r$  (kN) com estratégia Pol<sup>i</sup>.

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG $_{pre}^{adapt}$		MEFG/S		MEFG/S $_{pre}^{adapt}$	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
P0	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
P1	1.314	1432370	1.377	591350	-	-	-	-
P2	0.407	4535390	0.543	669320	0.608	1414810	0.733	591350
P3	0.687	2762580	0.499	744744	0.837	3836360	0.906	671350

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

Observa-se que em todas as situações a abordagem  $p$ -adaptativa apresentou menor custo computacional que as suas correlatas. Isso foi alcançado sem grande perda na qualidade das respostas, visto que os valores de  $d_r$  não divergiram muito em relação à estratégia convencional (no caso MEFG $_{pre}^{adapt}$  com  $p_n^{max} = 3$ , por exemplo, a qualidade da curva foi até melhor que a encontrada na simulação sem adaptatividade). Novamente todos os casos com enriquecimento apresentaram  $d_r$  e  $GDL^{proc}$  menores que os obtidos na simulação de referência.

#### 4.6.2 - Simulações com Módulo Pós Adaptativo

Nesta seção serão expostos os resultados das simulações utilizando o módulo Pós Adaptativo utilizando tanto a abordagem MEFG (MEFG $_{pos}^{adapt}$ ) como a sua versão estabilizada MEFG/S (MEFG/S $_{pos}^{adapt}$ ). A Fig.4.35(a) apresenta as curvas  $P$ - $d$  relativas às simulações com MEFG $_{pos}^{adapt}$ . Observa-se que o MEFG $_{pos}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, devido à proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.35(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde a simulação iniciou com enriquecimento de maior grau polinomial (lembrando que este módulo trabalha reduzindo o grau dos enriquecimentos dos nós caso os critérios apontados anteriormente sejam atingidos).

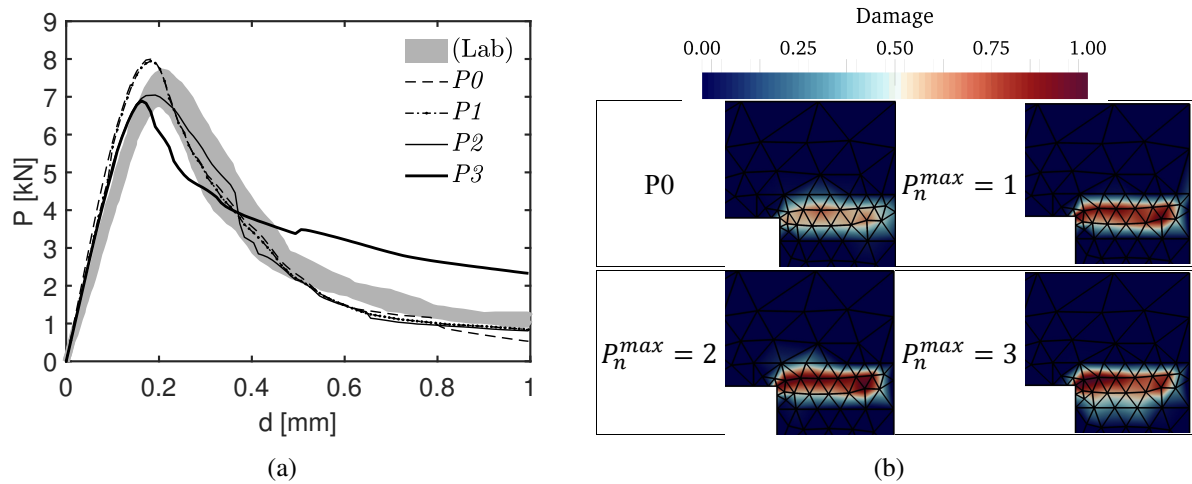


Figura 4.35 – (a) Curvas  $P$ - $d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

A Fig. 4.36 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MEFG_{pos}^{adapt}$ . Na Fig. 4.36(a) ocorre comportamento semelhante ao observado nas Fig. 4.23(a) onde notou-se que  $N^{it}$  foi menor nas simulações com enriquecimento. Elas, portanto, precisam de menos iterações por passo para convergir.

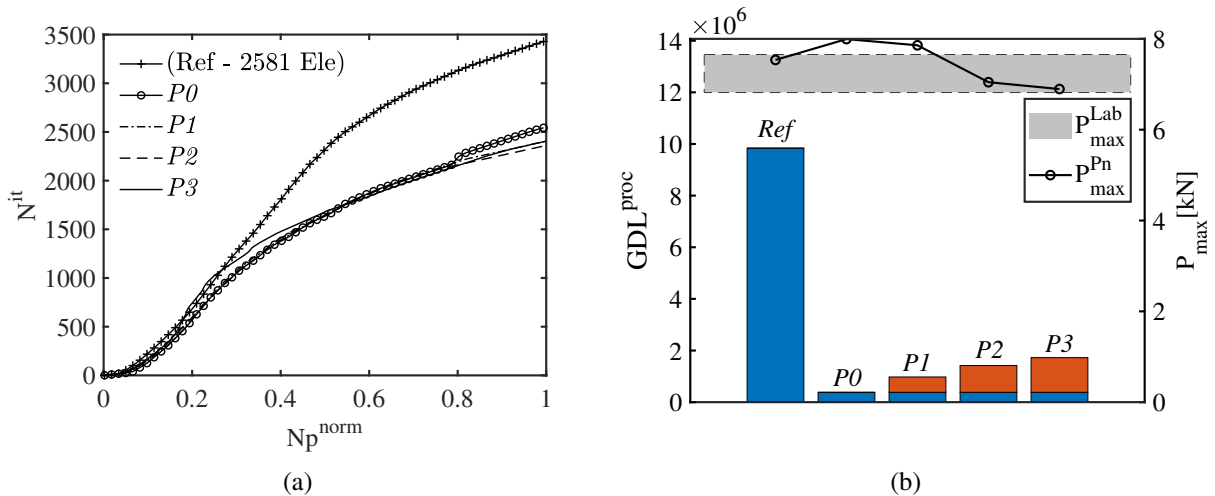


Figura 4.36 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG_{pos}^{adapt} Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 4.36(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento (embora a diferença entre um e outro seja pequena) haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia adaptativa foi novamente mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada. A Fig. 4.37 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) no caso onde iniciou-se com  $P3$ .

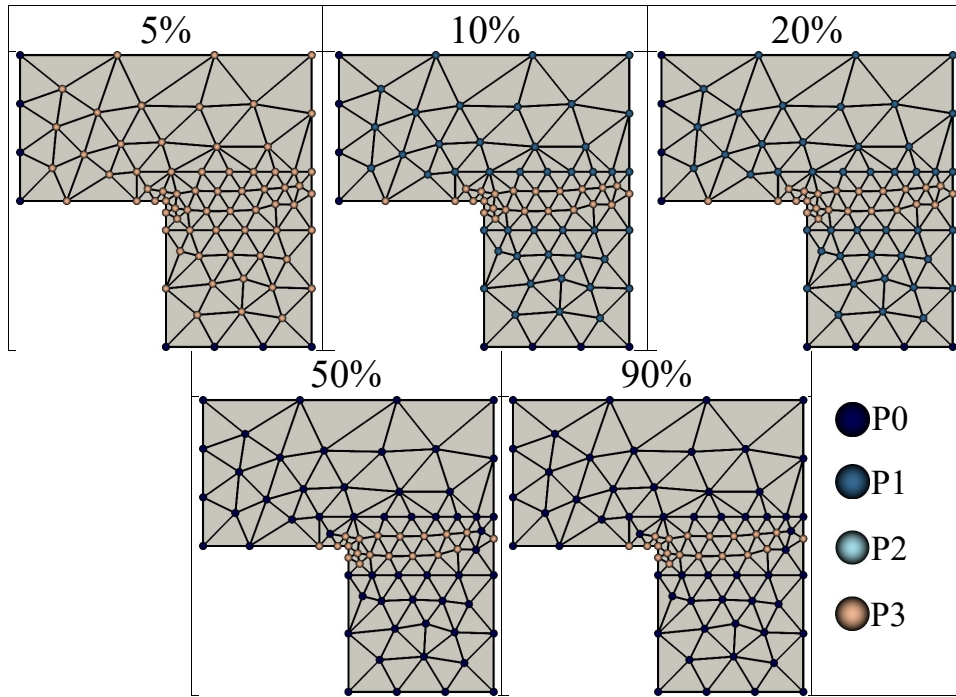


Figura 4.37 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com  $MEFG/S_{pos}^{adapt}$  em diferentes etapas da simulação.

A Fig.4.38(a) apresenta as curvas  $P$ - $d$  relativas às simulações com  $MEFG/S_{pos}^{adapt}$ . Observa-se que o  $MEFG/S_{pos}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, devido à proximidade entre as curvas numéricas e a experimental. Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.38(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde iniciou-se com enriquecimento de maior grau polinomial.

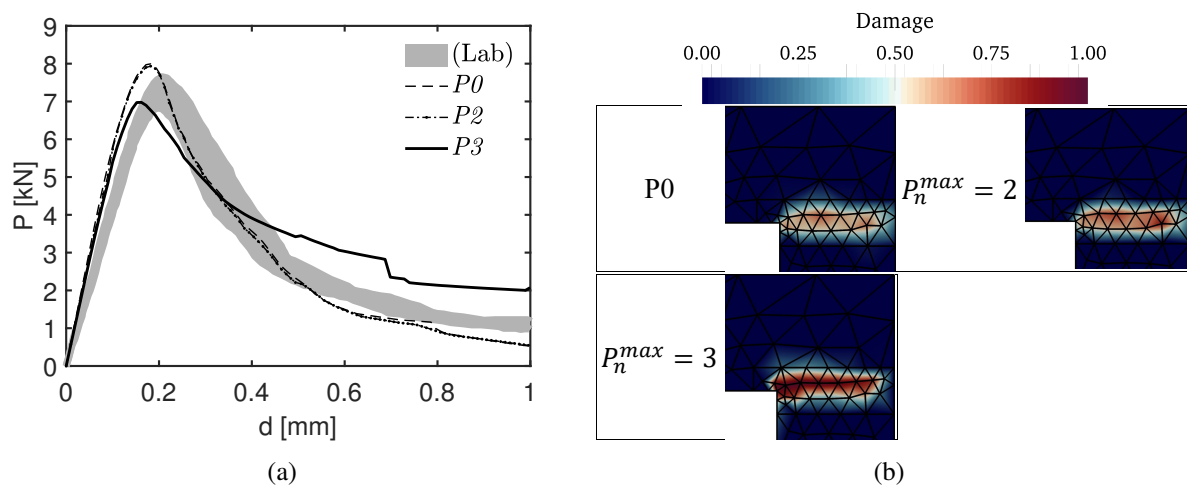


Figura 4.38 – (a) Curvas  $P$ - $d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.



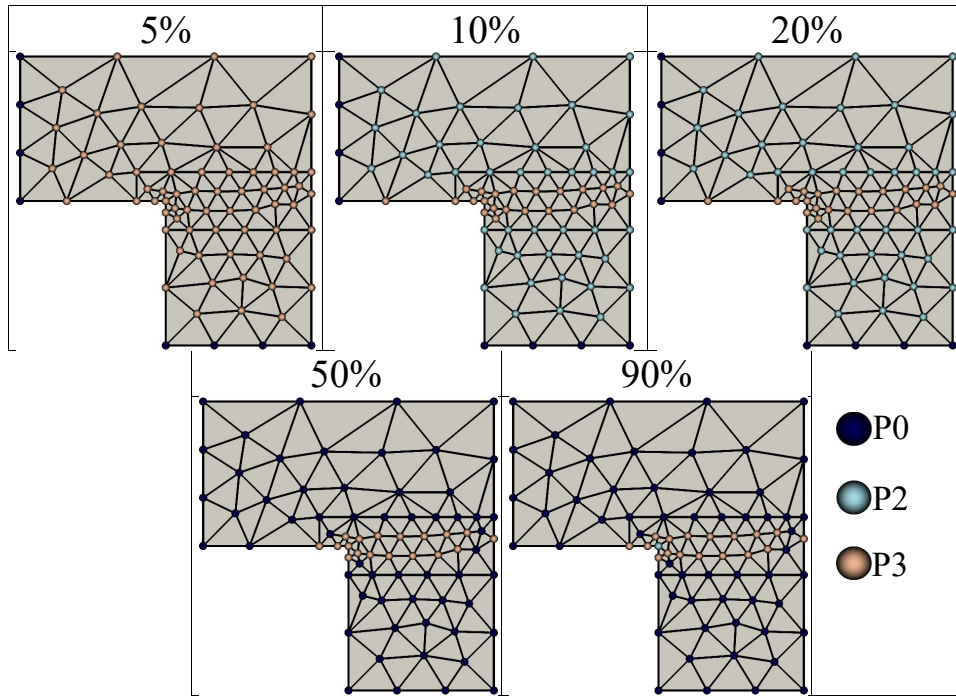


Figura 4.39 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com  $MEFG/S_{pos}^{adapt}$  em diferentes etapas da simulação.

A Fig. 4.40 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MEFG/S_{pos}^{adapt}$ . Na Fig. 4.40(a) ocorre uma divergência em relação aos resultados até aqui apresentados visto que o  $N^{it}$  foi menor nas simulação com enriquecimento, exceto no caso onde iniciou-se com  $P3$ . Esse efeito ocorre, provavelmente, em função do surgimento de muitos elementos de transição quando o processo atinge 50%. Contudo, isso só foi perceptivo no  $MEFG/S_{pos}^{adapt}$  e não no  $MEFG_{pos}^{adapt}$ . A Fig. 4.39 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde iniciou-se com  $P3$ .

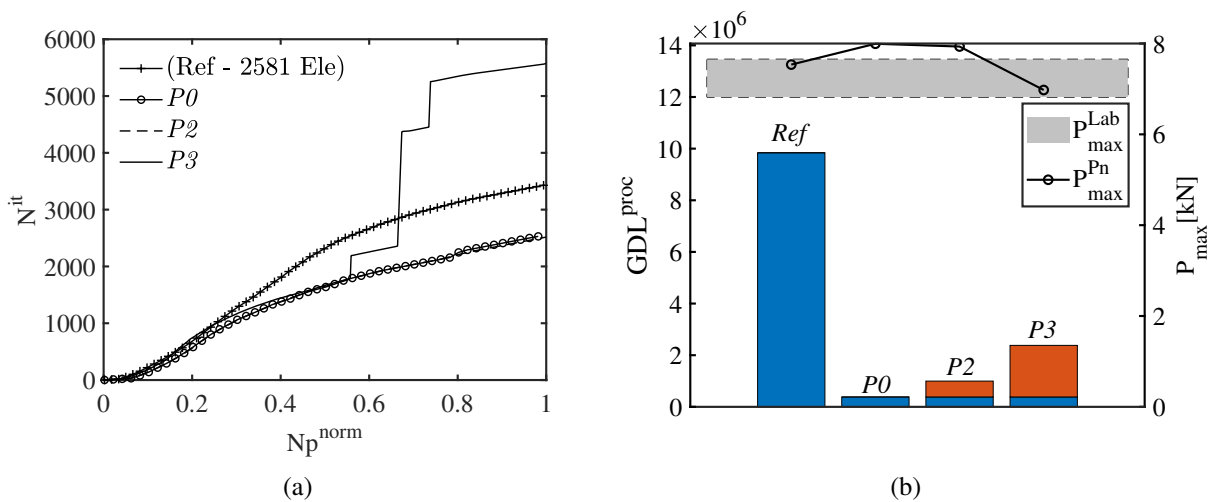


Figura 4.40 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG/S_{pos}^{adapt}$   $Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 4.40(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que iniciam com maior grau polinomial de enriquecimento (embora a diferença entre um e outro seja pequena) haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia adaptativa foi novamente muito mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada.

A Tab. 4.12 apresenta os valores calculados de  $d_r$  comparando simulações com MEFG e MEFG/S convencionais com as realizadas utilizando a estratégia adaptativa (MEFG $_{pos}^{adapt}$  e MEFG/S $_{pos}^{adapt}$ ). Observa-se que em todos as situações o procedimento adaptativo apresentou menor custo computacional que as suas correlatas. Isso foi alcançado sem grande perda na qualidade das respostas, visto que os valores de  $d_r$  não divergiram muito em relação à estratégia convencional (exceção para a simulação utilizando MEFG $_{pos}^{adapt}$  onde iniciou-se com  $P3$ , em que o valor de  $d_r$  foi quase o dobro do valor apresentado no respectivo caso com MEFG). Novamente todos os casos com enriquecimento apresentaram  $d_r$  e  $GDL^{proc}$  menores que os obtidos na simulação de referência.

Tabela 4.12 – Valores de  $d_r$  (kN) com estratégia Pol<sup>i</sup>.

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG $_{pos}^{adapt}$		MEFG/S		MEFG/S $_{pos}^{adapt}$	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
$P0$	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
$P1$	1.314	1432370	0.685	975494	-	-	-	-
$P2$	0.407	4535390	0.555	1418420	0.608	1414810	0.714	996848
$P3$	0.687	2762580	1.150	1725460	0.837	3836360	0.962	2380220

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

### 4.6.3 - Simulações com Módulo Pré-Pós Adaptativo

Nesta seção serão expostos os resultados das simulações utilizando o módulo Pré-Pós Adaptativo (tanto aplicando a metodologia de elementos quanto a de camadas) e ambas as abordagens de enriquecimento: o MEFG (MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$ ) e o MEFG/S (MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$ ).

#### 4.6.3.1 - Utilizando estratégia de elementos

A Fig.4.41(a) apresenta as curvas  $P-d$  relativas às simulações com MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$  utilizando a metodologia de elementos. Observa-se que o MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental.



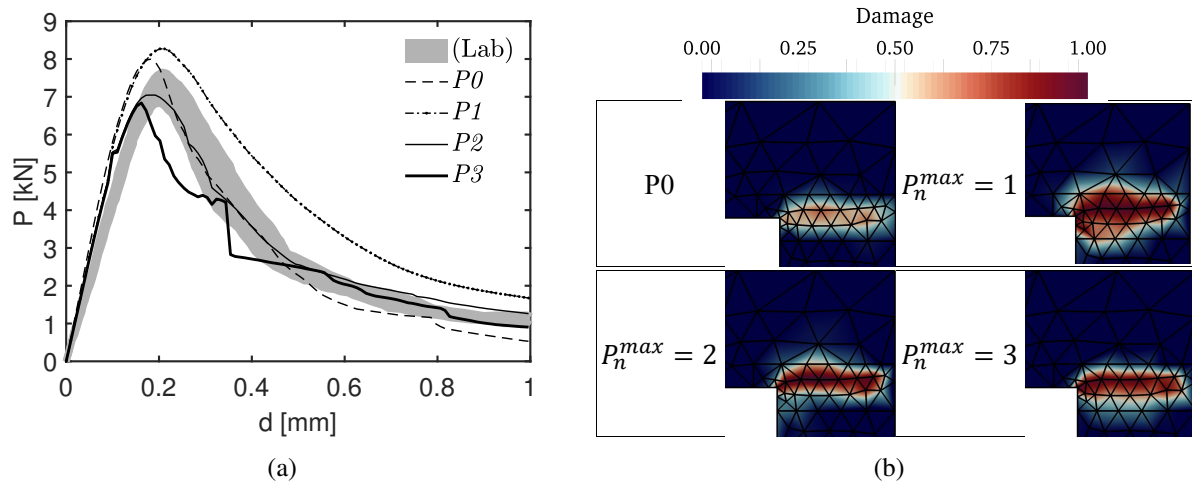


Figura 4.41 – (a) Curvas  $P$ - $d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.41(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior.

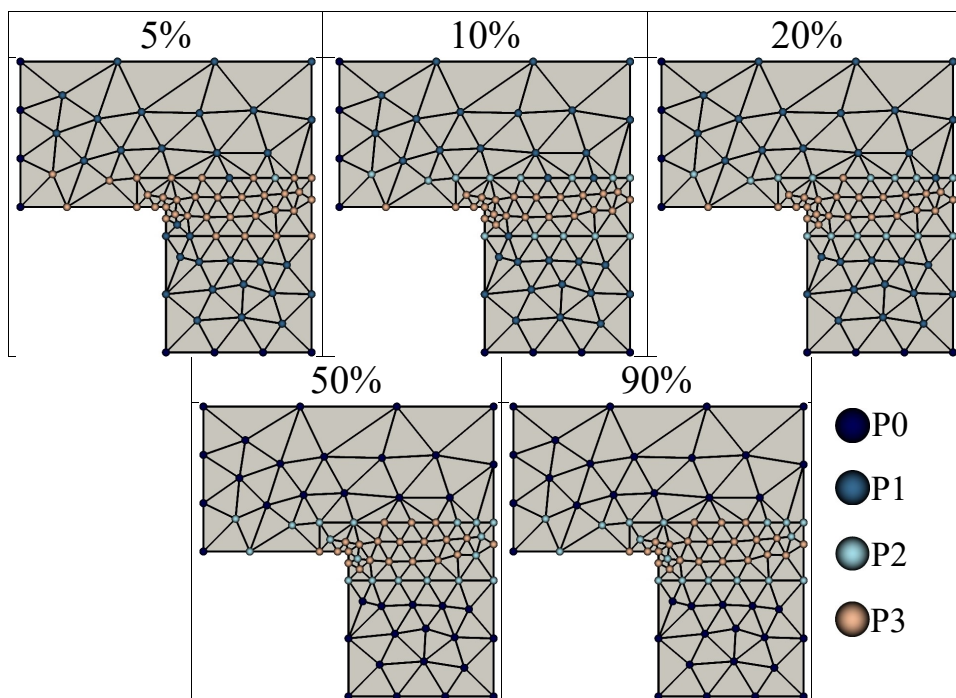


Figura 4.42 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com  $MFG_{pre-pos}^{adapt}$  em diferentes etapas da simulação.

A Fig. 4.43 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MFG_{pre-pos}^{adapt}$ . Na Fig. 4.43(a) nota-se que o  $N^{it}$  foi menor nas simulação com enriquecimento, exceto no

caso onde  $p_n^{max} = 1$ . Esse efeito ocorre, provavelmente, em função do surgimento de muitos elementos de transição quando o processo atinge 50%. A Fig. 4.42 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ .

É possível notar na Fig. 4.43(b) que, de modo geral, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento. Observa-se que a estratégia adaptativa apresentou-se outra vez mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada.

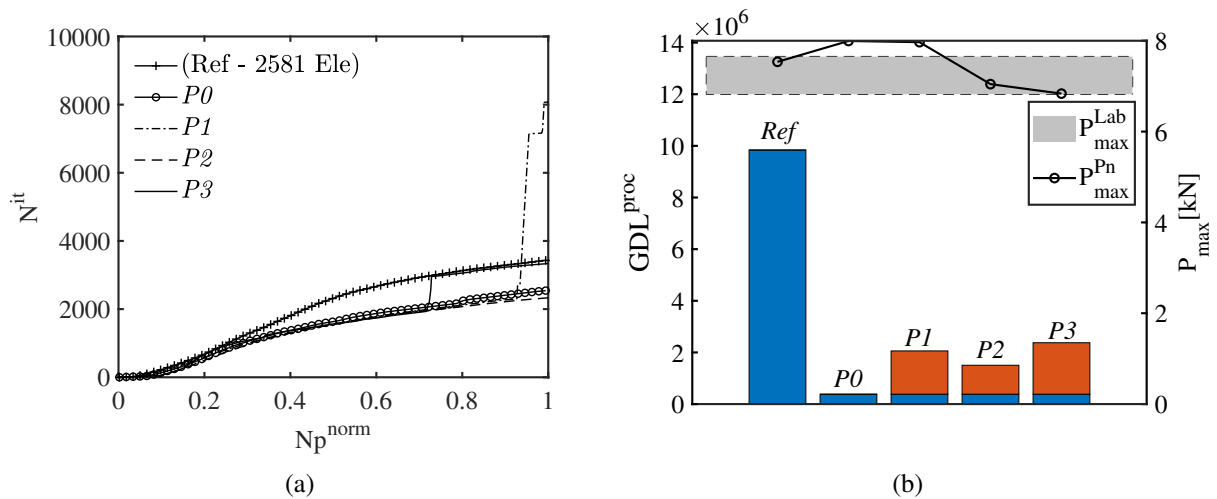


Figura 4.43 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$   $Pol^i$ .

A Fig.4.44(a) apresenta as curvas  $P$ - $d$  relativas às simulações com MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$  e estratégia de elementos. Observa-se que o MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$  apresentou razoável capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental.

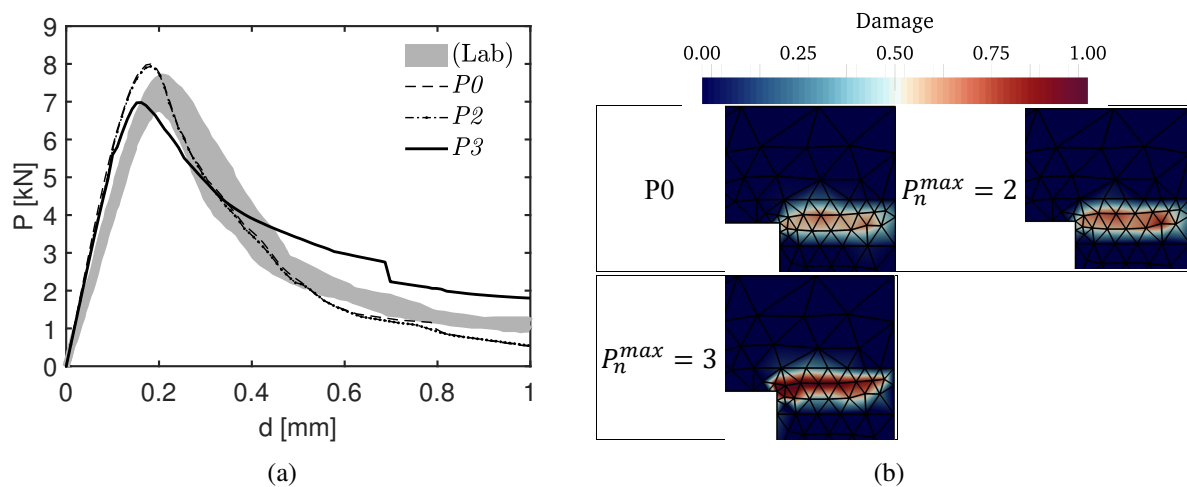


Figura 4.44 – (a) Curvas  $P$ - $d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.44(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior.

A Fig. 4.46 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$ . Na Fig. 4.46(a) ocorre uma divergência em relação à tendência apresentada na maioria dos casos, visto que  $N^{it}$  foi menor nas simulação com enriquecimento, exceto no caso onde  $p_n^{max} = 3$ . Esse efeito ocorre, provavelmente, em função do surgimento de muitos elementos de transição quando o processo atinge 50%. A Fig. 4.45 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ .

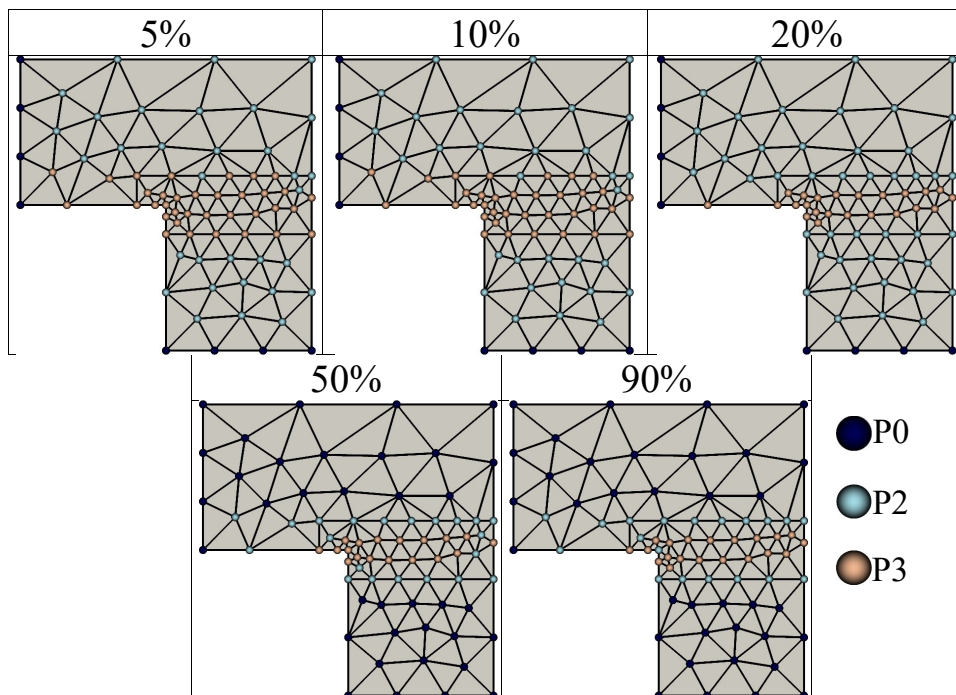


Figura 4.45 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$  em diferentes etapas da simulação.

É possível notar na Fig. 4.46(b) que, conforme esperado, o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia adaptativa foi novamente muito mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada.

A Tab. 4.13 apresenta os valores calculados de  $d_r$  comparando simulações com MEFG e MEFG/S convencionais com as realizadas utilizando a estratégia adaptativa (MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$  e MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$ ). Observa-se que em todos as situações o procedimento adaptativo apresentou menor custo computacional que as suas correlatas. Isso foi alcançado sem grande perda na qualidade das respostas, visto que os valores de  $d_r$  não divergiram muito em relação à estratégia convencional (no caso MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$  com  $p_n^{max} = 3$ , por exemplo, a qualidade da curva foi até melhor que a encontrada na simulação sem adaptatividade). Novamente todos os casos com enriquecimento apresentaram  $d_r$  e  $GDL^{proc}$  menores que os obtidos na simulação

de referência.

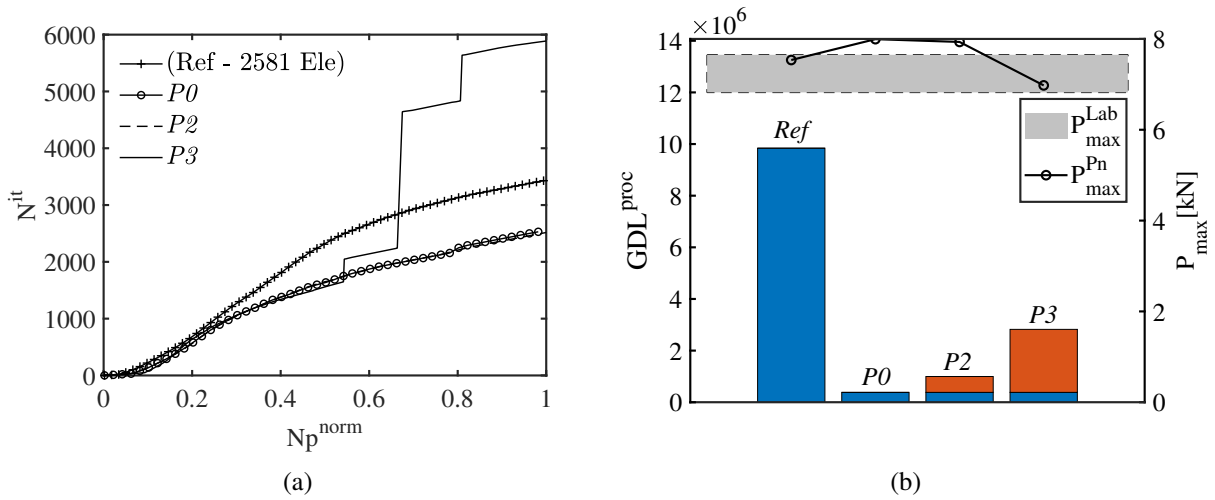


Figura 4.46 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$   $Pol^i$ .

Tabela 4.13 – Valores de  $d_r$  (kN) com estratégia  $Pol^i$ .

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$		MEFG/S		MEFG/S $_{pre-pos}^{adapt}$	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
$P0$	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
$P1$	1.314	1432370	1.726	2058090	-	-	-	-
$P2$	0.407	4535390	0.527	1503540	0.608	1414810	0.715	996848
$P3$	0.687	2762580	0.327	2375440	0.837	3836360	0.917	2822550

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

#### 4.6.3.2 - Utilizando estratégia de camadas

A Fig.4.47(a) apresenta as curvas  $P-d$  relativas às simulações com MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$  utilizando a metodologia de camadas. Observa-se que o MEFG $_{pre-pos}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.47(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior.

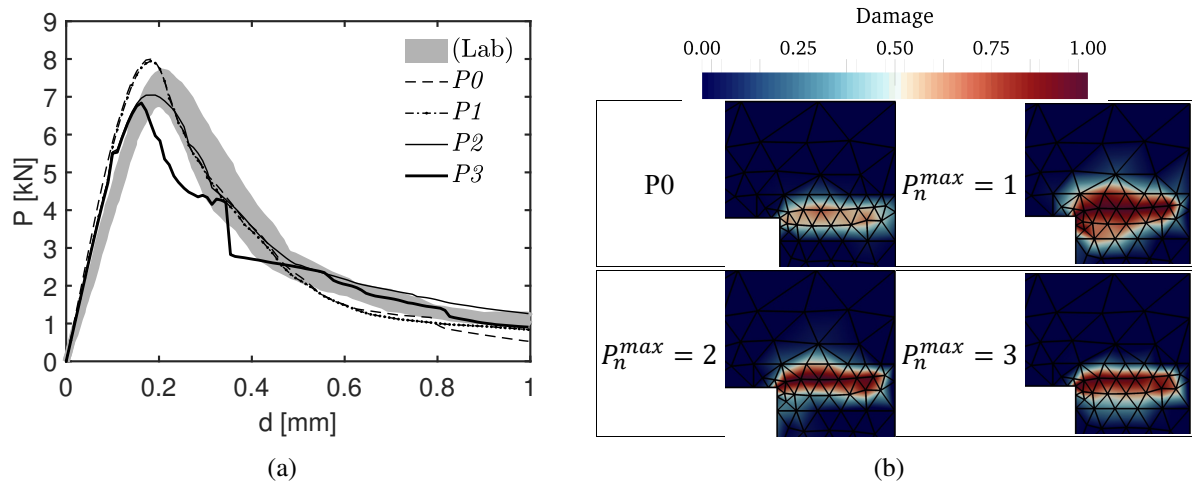


Figura 4.47 – (a) Curvas  $P$ - $d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

A Fig. 4.49 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MEFG_{pre-pos}^{adapt}$  utilizando a estratégia de camadas. Na Fig. 4.49(a) nota-se que o  $N^{it}$  foi menor nas simulação com enriquecimento, exceto no caso onde  $p_n^{max} = 3$ . Esse efeito ocorre, provavelmente, em função do surgimento de muitos elementos de transição quando o processo atinge 50%. A Fig. 4.48 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ .

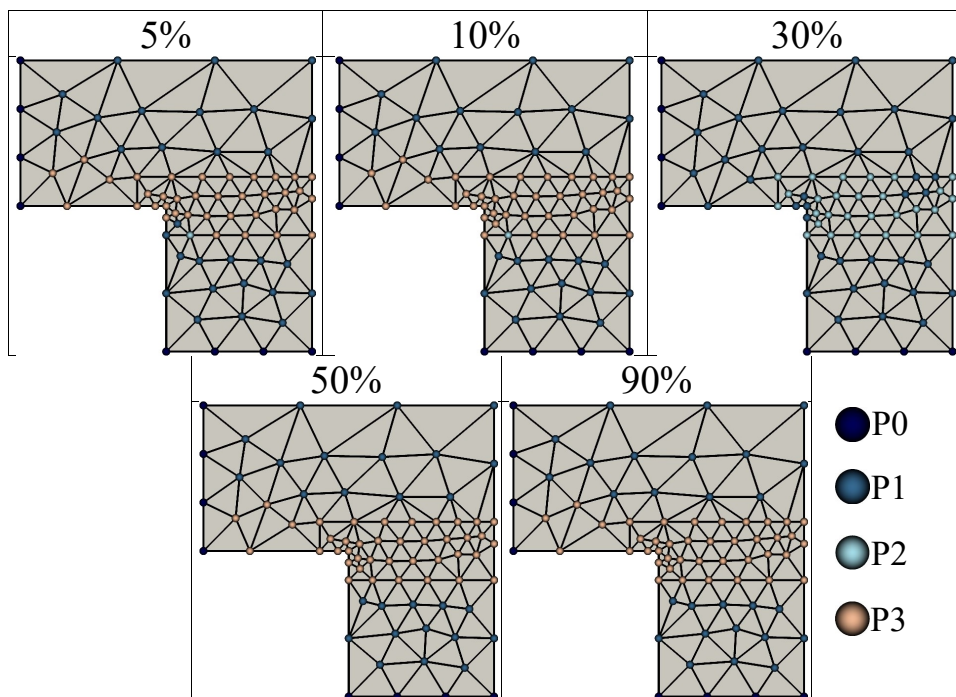


Figura 4.48 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com  $MEFG_{pre-pos}^{adapt}$  em diferentes etapas da simulação.

Contudo, observa-se que na Fig. 4.49(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia adaptativa foi novamente mais eficiente que a simulação de referência.

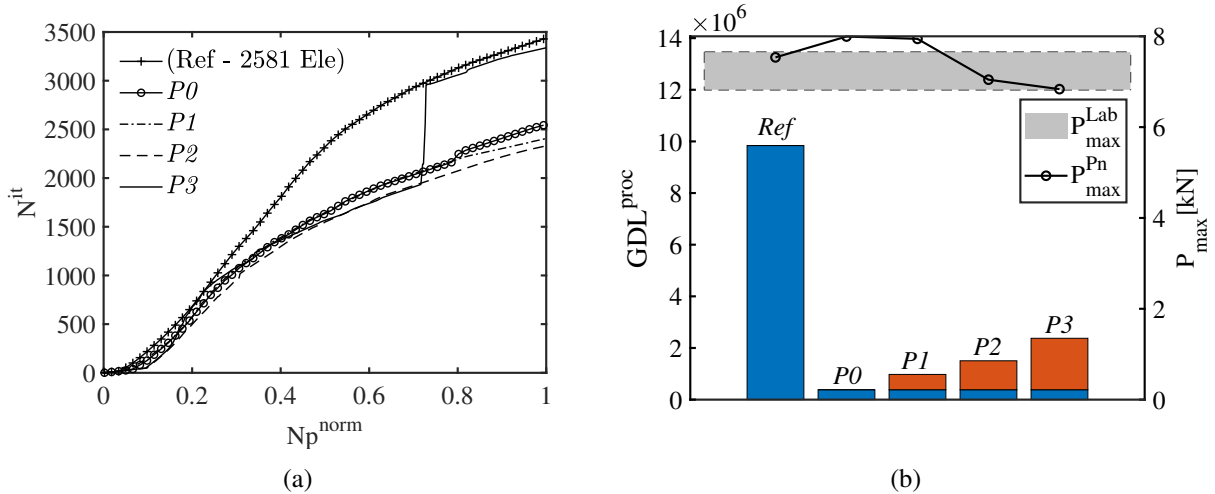


Figura 4.49 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e  $MEFG_{pre-pos}^{adapt} Pol^i$ .

A Fig.4.50(a) apresenta as curvas  $P-d$  relativas às simulações com  $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt}$  e estratégia de camadas. Observa-se que o  $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt}$  apresentou boa capacidade de aproximar tanto  $P_{max}$  quanto o *softening*, em face da proximidade entre as curvas numéricas (sobretudo aquelas com maior grau de enriquecimento) e a experimental.

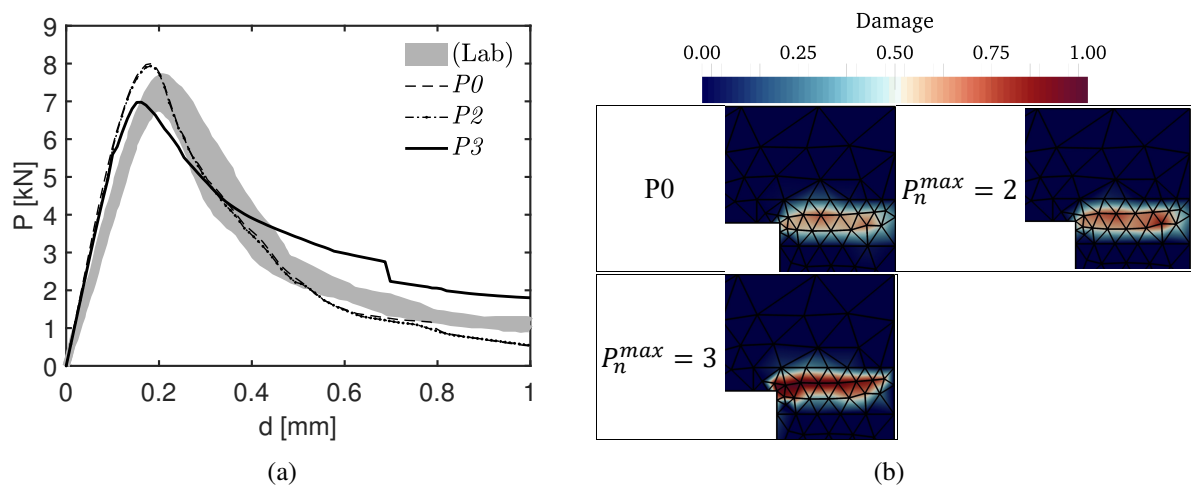


Figura 4.50 – (a) Curvas  $P-d$  experimentais e numéricas - malha com 125 elementos e modelo de dano contínuo e estratégia  $Pol^i$ . (b) Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 4.50(b)) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado



experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001,2004). Observa-se também uma melhor descrição do dano nas simulações onde foi permitido um valor de  $p_n^{max}$  maior.

A Fig. 4.52 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com  $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt}$ . Na Fig. 4.52(a) ocorre uma divergência em relação à tendência apresentada na maioria dos casos pelo  $N^{it}$ , visto que foi menor nas simulação com enriquecimento, exceto no caso onde  $p_n^{max} = 3$ . Esse efeito ocorre, provavelmente, em função do surgimento de muitos elementos de transição quando o processo atinge 50%. A Fig. 4.51 apresenta o resultado do refinamento  $p$ -adaptativo em cinco diferentes etapas da simulação (5%, 10%, 20%, 50% e 90%) para o caso onde  $p_n^{max} = 3$ .

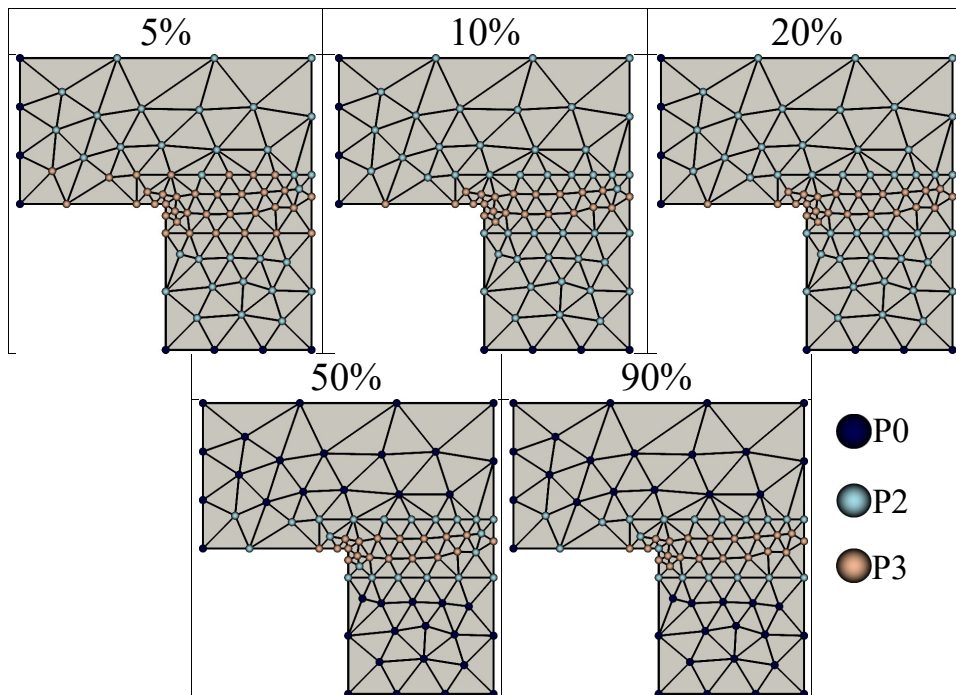


Figura 4.51 – Resultado do refinamento  $p$ -adaptativo com  $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt}$  em diferentes etapas da simulação.

É possível notar na Fig. 4.52(b) que o  $GDL^{proc}$  é maior nas simulações que atingem maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Observa-se que a estratégia adaptativa foi novamente muito mais eficiente que a simulação de referência com a malha refinada.

A Tab. 4.14 apresenta os valores calculados de  $d_r$  comparando simulações com MEFG e MEFG/S convencionais com as realizadas utilizando a estratégia adaptativa ( $MEFG_{pre-pos}^{adapt}$  e  $MEFG/S_{pre-pos}^{adapt}$ ). Observa-se que em todas as situações o procedimento adaptativo apresentou menor custo computacional que as suas correlatas. Isso foi alcançado sem grande perda na qualidade das respostas, visto que os valores de  $d_r$  não divergiram muito em relação à estratégia convencional (no caso  $MEFG_{pre-pos}^{adapt}$  com  $p_n^{max} = 3$ , por exemplo, a qualidade da curva foi até melhor que a encontrada na simulação sem adaptatividade). Novamente todos os casos com enriquecimento apresentaram  $d_r$  e  $GDL^{proc}$  menores que os obtidos na simulação de referência.

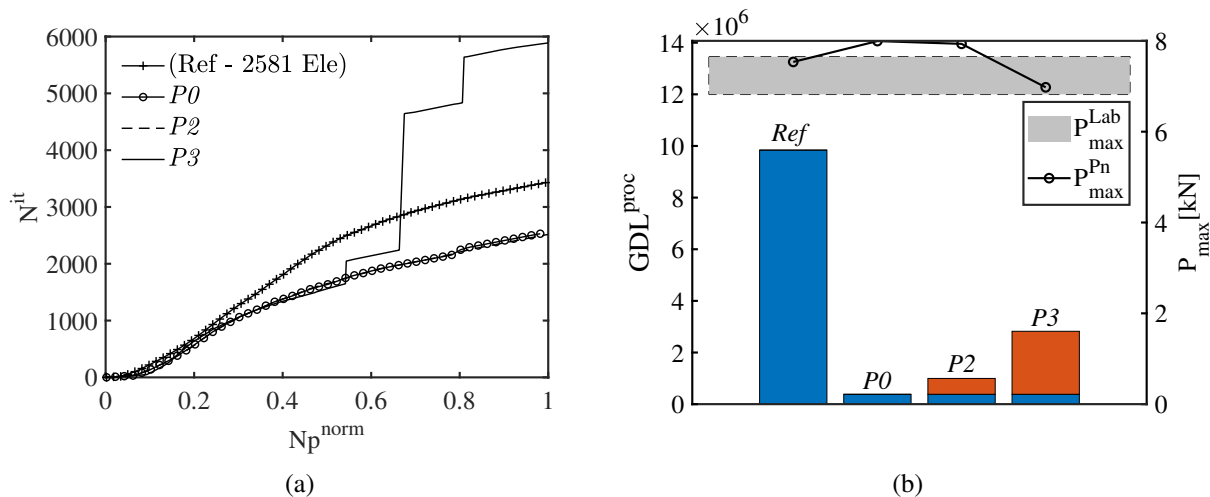


Figura 4.52 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 125 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEFG/S<sup>adapt</sup><sub>pre-pos</sub> Pol<sup>i</sup>.

Tabela 4.14 – Valores de  $d_r$  (kN) com estratégia Pol<sup>i</sup>.

$p_n^{max}$	MEFG		MEFG <sup>adapt</sup> <sub>pre-pos</sub>		MEFG/S		MEFG/S <sup>adapt</sup> <sub>pre-pos</sub>	
	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$	$d_r$	$GDL^{proc}$
P0	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350	0.745	382350
P1	1.314	1432370	0.685	975494	-	-	-	-
P2	0.407	4535390	0.526	1503540	0.608	1414810	0.708	996848
P3	0.687	2762580	0.329	2375440	0.837	3836360	0.915	2822550

$$d_r^{Ref} = P_i^{Lab,Sup} - P_i^{Lab,Inf} = 1.177; GDL_{Ref}^{proc} = 9839560.$$

## 4.7 - CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados os resultados de simulações utilizando o MEFG e o MEFG/S com sistema  $p$ -adaptativo (MEFG<sup>adapt</sup> e MEFG/S<sup>adapt</sup>). É possível afirmar, frente ao exposto na verificação, que a implementação foi feita de maneira eficiente e correta. Notou-se também o grande potencial do MEFG/S<sup>adapt</sup> para resolver PVC diversos com flexibilidade e eficiência computacional. Destaca-se a automaticidade do processo de enriquecimento fornecido pela metodologia, garantindo praticidade (associada à qualidade dos resultados) ao usuário do LACHESIS.

O modelo simulado para validar o procedimento adaptativo foi o da Chapa em L experimentada por Winkler *et al.* (2001), com o modelo de dano contínuo, utilizando os módulos *Pré Adaptativo*, *Pós Adaptativo* e *Pré-Pós Adaptativo*. Tanto o MEFG<sup>adapt</sup> como MEFG/S<sup>adapt</sup> garantiram boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento. A combinação das abordagens MEFG<sup>adapt</sup> e MEFG/S<sup>adapt</sup> com ao modelo de dano, mostrou potencial para prever a distribuição do dano em estruturas sob processo de falha. Ao analisar a eficiência computacional do método, o MEFG<sup>adapt</sup> e o MEFG/S<sup>adapt</sup> mostraram-se, de modo geral, mais eficientes que suas respectivas versões sem abordagem adaptativa.



Como limitação, observou-se que a técnica de estimador de erro *ZZ-SPR* para recuperação das tensões levou os modelos a atingirem, desnecessariamente, grau máximo de enriquecimento em certas regiões do modelo. Isso foi uma consequência da dificuldade crescente de convergência do erro (diretamente proporcional ao crescimento do dano), em função da não linearidade do processo. Assim sendo, maior grau de enriquecimento automaticamente passa a ser requerido afim de haver convergência do estimador de erro. Desse modo, foi necessário adotar um valor de  $\mathcal{E}^{adm}$  relativamente elevado para garantir convergência das simulações (adotou-se 20%).

Assim sendo, como sugestão para trabalhos futuros, indica-se implementar um estimador de erro mais robusto capaz de se associar melhor à não linearidade do processo de análise, talvez o Método dos Resíduos em Elementos (Babuška *et al.*, 1994c; Ainsworth e Oden, 1997a), por exemplo. Desse modo, espera-se conferir ainda mais eficiência computacional ao procedimento.

Até este capítulo foram feitas simulações somente no espaço *2D*. Contudo, é sabido que as simulações numéricas no espaço *3D* fornecem mais informações para subsidiar as análises do usuário do software. Buscando expandir o alcance dos ensaios numéricos para o espaço tridimensional, foi implementado o MEF/S com funções polinomiais de enriquecimento apropriadas para o espaço *3D*. Esse é o tema do Cap. 5 a seguir.

## 5 - O MEFG/S - 3D

### 5.1 - INTRODUÇÃO

A tentativa de superar o baixo desempenho do MEF em certos tipos de análises embasou muitas pesquisas nas últimas três décadas (Duarte e Oden, 1995; Belytschko e Black, 1999; Moës *et al.*, 1999). Esses trabalhos contribuíram para o desenvolvimento de métodos numéricos alternativos, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Strouboulis *et al.*, 2000a; Strouboulis *et al.*, 2000b; Duarte *et al.*, 2001; Pereira *et al.*, 2009b) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFX) (Belytschko e Black, 1999; Dolbow, 1999; Moës *et al.*, 1999; Daux *et al.*, 2000; Moës e Belytschko, 2002; Huang *et al.*, 2003; Belytschko *et al.*, 2009; Gupta e Duarte, 2016), cuja principal vantagem é permitir a ocorrência de trincas arbitrárias no interior do elemento finito (Tejchman e Bobinski, 2013; Kim e Duarte, 2015; Friderikos *et al.*, 2016; Kim *et al.*, 2016).

Estes métodos, baseados na Partição da Unidade de Elementos Finitos (PU-MEF), buscam reduzir (ou eliminar) a dependência entre as equações que governam o problema e a respectiva malha, princípio semelhante ao dos Métodos sem Malha que, segundo Duarte e Oden (1995), buscam minimizar a influência da malha na qualidade do resultado. O MEFG e o MEFX tem sido aplicados com muito sucesso em problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) devido propriedades especiais capazes de produzir soluções com ótima aproximação. Em problemas envolvendo singularidades e descontinuidades o MEFG apresenta excelente desempenho e flexibilidade quanto a aplicação.

#### 5.1.1 - Sobre o MEFG/S

Babuška e Banerjee (2011) e Babuška e Banerjee (2012) apresentaram uma nova abordagem para domínios unidimensionais, o chamado Método dos Elementos Finitos Generalizados e Estabilizado (MEFG/S) baseada em uma modificação nas funções do MEFG para criar um novo espaço de enriquecimento. Os autores mostraram que o MEFG/S tem como características a ótima convergência e o fato de não ter problemas com os elementos de transição (*blends*) entre regiões com diferentes tipos de funções enriquecedoras, como proposto por Fries (2008).

Gupta *et al.* (2013a), Gupta (2014) e Gupta *et al.* (2015) estenderam o MEFG/S 1D para os espaços 2D e 3D analisando problemas da mecânica de fratura. O método está em evidência no momento, como é possível observar nos trabalhos de Agathos *et al.* (2016), Kergrene *et al.* (2016), Malekan e Barros (2016), Zhang *et al.* (2016) e Babuška *et al.* (2017), entre outros. O objetivo do MEFG/S é a melhora do condicionamento da matriz de rigidez do MEFG. Maiores detalhes sobre o MEFG/S podem ser conferidos no Cap. 2.

### 5.1.2 - Funções de enriquecimento do MEF/S - 3D

As funções  $L_{\alpha i}$  da Eq. (2.6) podem ser de base polinomial ou não. A escolha mais comum se faz, naturalmente, pelas funções polinomiais, em vista de sua relativa facilidade de implementação, bem como da enorme capacidade de aproximar funções suaves de forma satisfatória. Podem ser construídas de forma hierárquica tendo como regra o Triângulo de Pascal. Assumindo, de modo geral, o seguinte formato:

$$L(p,q,r) = \frac{X^p Y^q Z^r}{h^{(p+q+r)}} \quad (5.1)$$

Uma alternativa para a Eq. (5.1) é a chamada "função deslocada" definida conforme Eq. (5.2):

$$L(p,q,r) = \frac{(X - X_{\alpha})^p (Y - Y_{\alpha})^q (Z - Z_{\alpha})^r}{h^{(p+q+r)}} \quad (5.2)$$

em que  $X_{\alpha}$ ,  $Y_{\alpha}$  e  $Z_{\alpha}$  são as coordenadas do nó  $\alpha$  no espaço 3D onde o enriquecimento é aplicado;  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são as coordenadas dos pontos de Gauss em cada elemento; e  $h$  atua como normalizador de forma a excluir do enriquecimento informações associadas à geometria do elemento ou à sua posição na malha, minimizando, desta forma, erros de arredondamento. Neste trabalho os conjuntos de funções de enriquecimento foram construídos de duas maneiras: uma utilizando todos os termos do Triângulo de Pascal (polinômio completo - Eq. (5.3b)) e outra utilizando apenas os termos extremos (polinômio incompleto - Eq. (5.3c)). De forma geral, para o MEF/S, tem-se:

$$Linear \rightarrow L_{P1} = \left\{ 1, \frac{x - x_{\alpha}}{h_{\alpha}}, \frac{y - y_{\alpha}}{h_{\alpha}}, \frac{z - z_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right\} \quad (5.3a)$$

$$L_{P2C} = \left\{ L_{P1}, \frac{(x - x_{\alpha})(y - y_{\alpha})}{h_{\alpha}^2}, \frac{(x - x_{\alpha})(z - z_{\alpha})}{h_{\alpha}^2}, \frac{(y - y_{\alpha})(z - z_{\alpha})}{h_{\alpha}^2}, \frac{(x - x_{\alpha})^2}{h_{\alpha}^2}, \frac{(y - y_{\alpha})^2}{h_{\alpha}^2}, \frac{(z - z_{\alpha})^2}{h_{\alpha}^2} \right\} \quad (5.3b)$$

$$L_{P2I} = \left\{ L_{P1}, \frac{(x - x_{\alpha})^2}{h_{\alpha}^2}, \frac{(y - y_{\alpha})^2}{h_{\alpha}^2}, \frac{(z - z_{\alpha})^2}{h_{\alpha}^2} \right\} \quad (5.3c)$$

onde  $P2C$  indica conjunto completo e  $P2I$  conjunto incompleto ambos de segundo grau. Adiante, estas estratégias foram denominadas  $Pol^c$  e  $Pol^i$ , respectivamente, para melhor compreensão. A construção de conjuntos de ordem mais elevada que as demonstradas anteriormente seguiu a mesma lógica. No caso do MEF/S, como dita na Sec. 2.2.4, o interpolante linear  $L_{P1}$  (bem como sua parcela nos conjuntos de maior ordem) foi suprimido.

## 5.2 - METODOLOGIA

A metodologia geral que embasou este trabalho seguiu o seguinte ordenamento:

- Revisão da Literatura;

- Implementação;
- Verificação e validação dos resultados;

A Revisão da literatura seguiu a mesma dinâmica apontada nos capítulos anteriores, com aprofundamento e estudo das características específicas do MEF $\tilde{G}$  e do MEF $\tilde{G}/S$  aplicadas a simulações 3D. Portanto, foram analisados trabalhos na literatura que utilizaram o MEF $\tilde{G}$  ou o MEF $\tilde{G}/S$  para análises de problemas 3D.

### 5.2.1 - Implementação computacional, verificação e validação

Nesta etapa foram realizados os trabalhos de implementação dos códigos computacionais do software de análise numérica dando continuidade ao desenvolvimento do programa *LACHESIS* (Fig. 2.6) pertencente ao grupo de pesquisa. Neste caso específico, foi feita a expansão do espaço de análise para o 3D, com a implementação das funções polinomiais apropriadas para o MEF $\tilde{G}$  e o MEF $\tilde{G}/S$  3D. Também foi proposta uma modificação no cálculo do fator normalizador  $h$ , como será visto mais adiante. Em seguida, foi feita a verificação da implementação através de simulações utilizando problemas elástico-lineares simples com resultados analíticos de fácil obtenção ou com soluções de referência obtidas na literatura.

Após a verificação, foi feita a validação da utilização dessa estratégia numérica combinada com modelo de dano bilinear Contínuo (C). As validações dessa etapa foram feitas através da comparação com resultados experimentais consagrados na literatura tanto para o modo I quanto misto (I+II) de fratura em estruturas com materiais quasi-frágeis.

## 5.3 - VERIFICAÇÃO DO MEF $\tilde{G}$ 3D

As verificações do MEF $\tilde{G}$  e do MEF $\tilde{G}/S$  3D foram realizadas utilizando simulações de exemplos simples, elástico-lineares: uma viga engastada-livre e uma viga bi-engastada. Em todas as simulações, as CC de Dirichlet foram impostas pelo Método da Penalidade, escolhido devido sua simplicidade de implementação e generalidade.

### 5.3.1 - Viga engastada-livre

Foi analisada uma viga engastada e livre, com carregamento distribuído na face oposta ao apoio, conforme a Fig. 5.1, submetida à flexão simples, discretizada em elementos tetraédricos enriquecidos com funções de enriquecimento polinomiais para aproximação local.

Tabela 5.1 – Dados geométricos e condições de contorno do modelo

L	t	h	E	$\nu$	$\tau_0$	CC - deslocamento
10	1	2	30 E+06	0,25	150	$u_x(0, y) = u_y(0, h) =$ $u_z(0, t) = 0$

É um problema considerado de solução suave. As dimensões, o carregamento, as condições de contorno (CC) e as propriedades mecânicas para a resolução do problema são mostrados na Tab. 5.1 (em unidades consistentes)

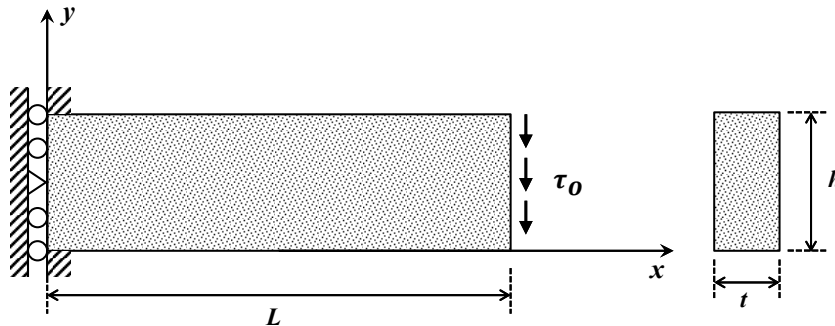


Figura 5.1 – Viga engastada-livre com carregamento cisalhante.

Para a verificação foi analisada a convergência dos resultados de deflexão na face livre, utilizando enriquecimentos de diferentes ordens polinomiais nas simulações, conforme demonstrado pela Eq. 5.2. A solução analítica, segundo a teoria de Euler-Bernoulli, para o deslocamento ( $u_y$ ) é a seguinte:

$$u_y(10, \frac{h}{2}) = - \left( \frac{f_y L^3}{3EI} \right) \left[ 1 + \frac{3(1 + \nu)}{L^2} \right] \quad (5.4)$$

onde I é a Inércia em relação ao eixo z centroidal.

Efetuando-se os cálculos, têm-se que: o valor de referência para o deslocamento no ponto determinado é  $u_y(10, 1) = 5,188 \text{ E-03}$ . Foram feitas seis simulações utilizando o programa Abaqus CAE (malhas com elementos tetraédricos), com diferentes níveis de refinamento de malha, com o objetivo de verificar, a priori, a confiabilidade das equações analíticas neste caso. Os resultados das simulações podem ser vistos a seguir na Tab. 5.2. Nota-se que há correspondência entre o que foi obtido via expressão analítica e aquilo que o programa comercial apresentou, sobretudo na simulação que apresenta maior Número de Graus de Liberdade (GDL). Portanto, há coerência em adotar como solução de referência ( $s_{ref}$ ) o valor obtido através da Eq. (5.4).

Tabela 5.2 – Resultados de  $u_y(10, \frac{h}{2})$  obtidos via Abaqus CAE.

Malha	nº de elementos	NGL	$u_y(10, \frac{h}{2})$
Malha 01	17	39	0,594 E-03
Malha 02	944	939	4,598 E-03
Malha 03	7842	5727	4,946 E-03
Malha 04	112370	66729	5,087 E-03
Malha 05	301217	171660	5,103 E-03
Malha 06	752660	417225	5,112 E-03
$s_{ref}$	-	-	5,188 E-03

Foram feitas quatro malhas (com 17, 24, 35 e 70 elementos), todas regulares e com elementos tetraédricos constituídos de material homogêneo isotrópico. Primeiro foram realizadas simulações sem qualquer tipo de enriquecimento (aproximação de ordem  $P0$ ) iniciando da malha mais grosseira (malha I) até a malha mais refinada (malha IV). Da mesma forma, utilizando o mesmo refinamento de malha, foram feitas simulações com aplicação de funções de enriquecimento polinomiais com aproximação local  $P1$ ,  $P2$ ,  $P3$ ,  $P4$  e  $P5$ , conforme a Eq. (5.3a) e seguintes. Para respeitar as Condições de Contorno (CC) de Dirichlet, os nós das arestas engastadas não foram enriquecidos em nenhum caso. A integração numérica do domínio foi realizada pela regra de Gauss-Legendre mínima.

A Fig. 5.2 apresenta os gráficos correspondentes ao Erro Relativo ( $e_r$ ) em função do tamanho equivalente do elemento ( $h_{eq}$ ), segundo diferentes refinamento de malha para cada ordem de enriquecimento. O  $e_r$  foi calculado com relação a  $s_{ref}$  para o deslocamento na extremidade livre, sendo  $h_{eq} = [(L \text{ da viga}) / (n^\circ \text{ de elementos})]$ .

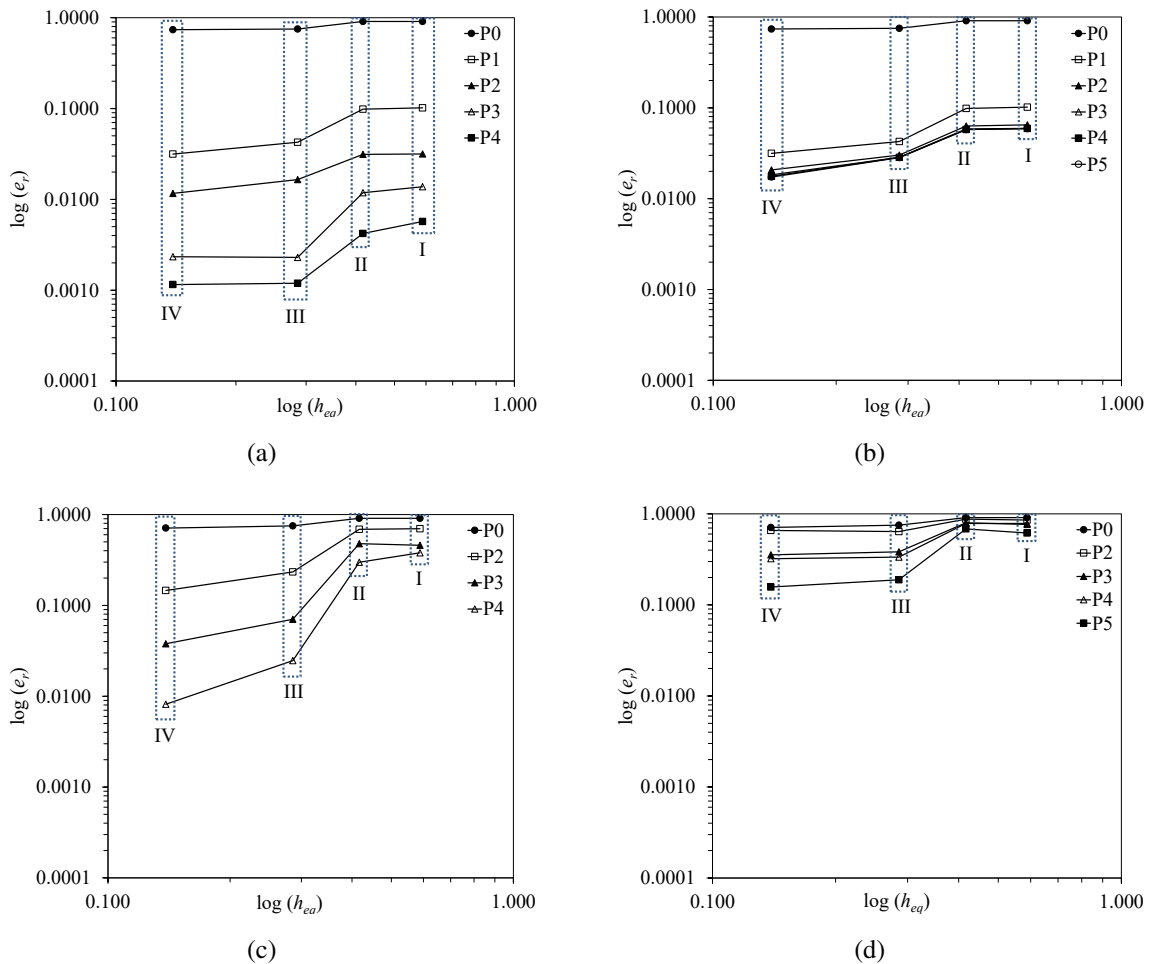


Figura 5.2 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para cada ordem polinomial de enriquecimento: (a) MEFG  $Pol^c$ ; (b) MEFG  $Pol^i$ ; (c) MEFG/S  $Pol^c$ ; (d) MEFG/S  $Pol^i$ .

É possível notar que as simulações sem enriquecimento apresentam elevado  $e_r$  devido o baixo GDL. Em contrapartida, percebe-se que os valores aproximam-se da  $s_{ref}$  à medida que o grau do enriquecimento aumenta. As curvas apresentadas pela Fig. 5.2 apontam, de maneira

preliminar, que a implementação fora feita de forma correta. Além disso, demonstram que o método está sendo efetivo em cumprir a proposta de aproximar a resposta do PVC utilizando malhas grosseiras.

A Fig. 5.3 é semelhante às anteriores. Ela apresenta uma comparação entre as respostas que foram obtido via Abaqus CAE e àquelas obtidas utilizando MEFG com enriquecimento P5 e estratégia Pol<sup>i</sup>. Nota-se que os resultados com MEFG alcançaram valores de  $e_r$  próximos aos obtidos utilizando o MEF mas com GDL muito menor.

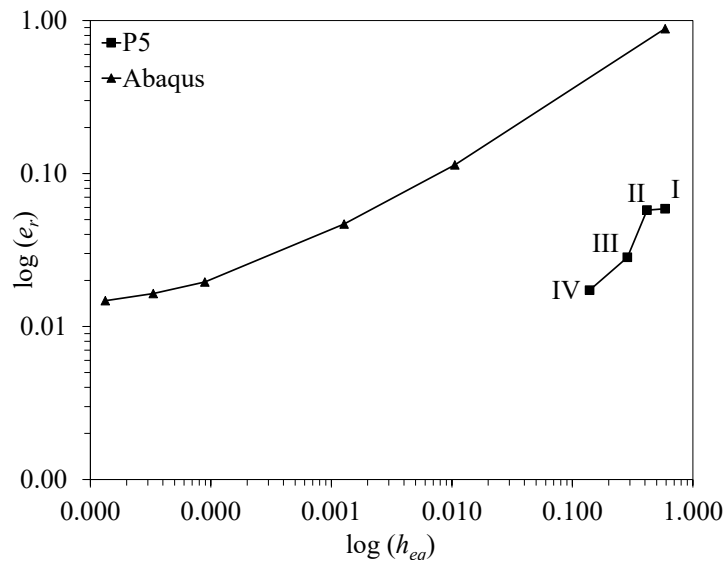


Figura 5.3 – Comparação entre resultados do Abaqus e de simulações com enriquecimento P5.

### 5.3.2 - Viga bi-engastada

O segundo modelo utilizado para a verificação foi o de uma viga bi-engastada com carregamento distribuído ( $g$ ) na face superior.

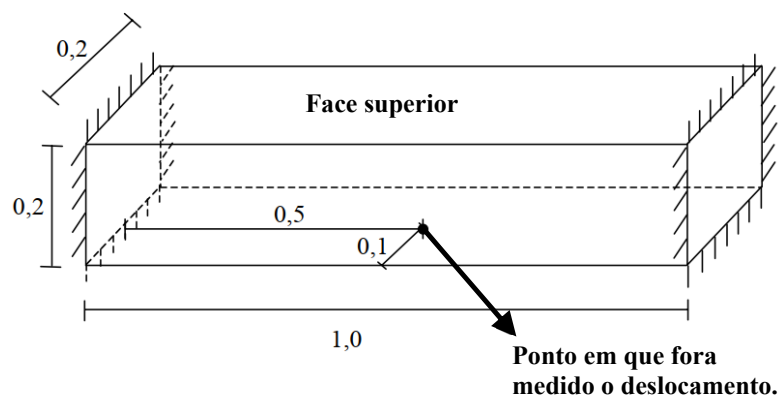


Figura 5.4 – Características geométricas da viga bi-engastada (adaptado de Proença e Torres, 2008).

Este exemplo foi extraído do trabalho de Torres (2003), incluindo todos os dados do problema

apresentados pela Tab.5.3. O valor de referência  $s_{ref}$  diz respeito à deflexão final no centro da face inferior, conforme ilustra a Fig. 5.4. Essa deflexão será medida nas simulações numéricas a seguir e, a partir de  $s_{ref}$ , será calculado o erro relativo  $e_r$ .

Tabela 5.3 – Dados do modelo bi-engastado (em unidades consistentes)

E	$\nu$	$g$	$s_{ref}$
1,0	0,20	1,0	5,5061

O valor para a flecha no ponto analisado utilizando o programa ANSYS 5.4, com 5000 elementos hexaédricos de 20 nós, é  $s_{ref} = 5,5061$ , com um NGL de 68.277 (Torres, 2003). Nas Tabs. 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 são colocados lado-a-lado tanto os resultados obtidos nesta tese quanto os que foram apresentados por Torres (2003), sendo que "(T)" indica os valores pertencentes ao referido autor e "(S)" aqueles obtidos nas simulações realizadas durante a verificação. Em seu trabalho, o autor utilizou todos os termos do Triângulo de Pascal para construir seus conjuntos de funções (igual à estratégia Pol<sup>c</sup> adotada na presente pesquisa). Em todos os casos foram utilizados elementos finitos tetraédricos. Os valores entre parênteses indicam o GDL de cada simulação.

Tabela 5.4 – Deflexão da viga - MEFG Pol<sup>c</sup>.

Grau	Número de elementos da malha					
	66 (T)	64 (S)	105 (T)	100 (S)	285 (T)	289 (S)
<i>P0</i>	2,7150 (75)	2.41139 (60)	2,9499 (102)	3,1342 (144)	3,8458 (276)	3,4070 (336)
<i>P1</i>	4,8952 (300)	5.03278 (396)	5,0667 (408)	4.9956 (504)	5,3551 (1104)	5.1670 (1164)
<i>P2</i>	5,4391 (750)	5.4574 (954)	5,4699 (1020)	5.4997 (1224)	5,4778 (2760)	5.4261 (2820)
<i>P3</i>	5,4778 (1500)	5.44959 (1884)	5,4914 (2040)	5.56775 (2424)	5,4987 (5520)	5.4434 (5580)
<i>P4</i>	5,4971 (2625)	5.50301 (3279)	5,5013 (3570)	5.60965 (4224)	5,5047 (9660)	5.4651 (9720)

Tabela 5.5 – Deflexão da viga - MEFG Pol<sup>i</sup>.

Grau	Número de elementos da malha					
	66 (T)	64 (S)	105 (T)	100 (S)	285 (T)	289 (S)
<i>P0</i>	2,7150 (75)	2.41139 (60)	2,9499 (102)	3,1342 (144)	3,8458 (276)	3,4070 (336)
<i>P1</i>	4,8952 (300)	5.03278 (396)	5,0667 (408)	4.9956 (504)	5,3551 (1104)	5.1670 (1164)
<i>P2</i>	5,4391 (750)	5.26212 (675)	5,4699 (1020)	5.2868 (864)	5,4778 (2760)	5.3351 (1992)
<i>P3</i>	5,4778 (1500)	5.30828 (954)	5,4914 (2040)	5.3551 (1224)	5,4987 (5520)	5.3473 (2820)
<i>P4</i>	5,4971 (2625)	5.30486 (1233)	5,5013 (3570)	5.3871 (1584)	5,5047 (9660)	5.3497 (3648)

Tabela 5.6 – Deflexão da viga - MEFG/S Pol<sup>c</sup>.

Grau	Número de elementos da malha					
	66 (T)	64 (S)	105 (T)	100 (S)	285 (T)	289 (S)
<i>P0</i>	2,7150 (75)	2.41139 (60)	2,9499 (102)	3,1342 (144)	3,8458 (276)	3,4070 (336)
<i>P2</i>	5,4391 (750)	4.40041 (675)	5,4699 (1020)	4.65793 (864)	5,4778 (2760)	4.55789 (1992)
<i>P3</i>	5,4778 (1500)	5.14391 (1605)	5,4914 (2040)	5.21289 (2064)	5,4987 (5520)	5.0592 (4752)
<i>P4</i>	5,4971 (2625)	5.42469 (3000)	5,5013 (3570)	5.41871 (3864)	5,5047 (9660)	5.26482 (8892)



Tabela 5.7 – Deflexão da viga - MEFG/S Pol<sup>i</sup>.

Grau	Número de elementos da malha					
	66 (T)	64 (S)	105 (T)	100 (S)	285 (T)	289 (S)
P0	2,7150 (75)	2.41139 (60)	2,9499 (102)	3,1342 (144)	3,8458 (276)	3,4070 (336)
P2	5,4391 (750)	3.18388 (396)	5,4699 (1020)	3.81905 (504)	5,4778 (2760)	3.94628 (1164)
P3	5,4778 (1500)	4.53551 (675)	5,4914 (2040)	4.45438 (864)	5,4987 (5520)	4.53992 (1992)
P4	5,4971 (2625)	4.66278 (954)	5,5013 (3570)	4.70918 (1224)	5,5047 (9660)	4.79455 (2820)

Não foi possível gerar malhas com igual quantidade de elementos daquelas utilizadas por Torres (2003) porque o mesmo não apresentou figuras. Então, buscou-se a melhor aproximação possível apenas levando em consideração a quantidade de elementos.

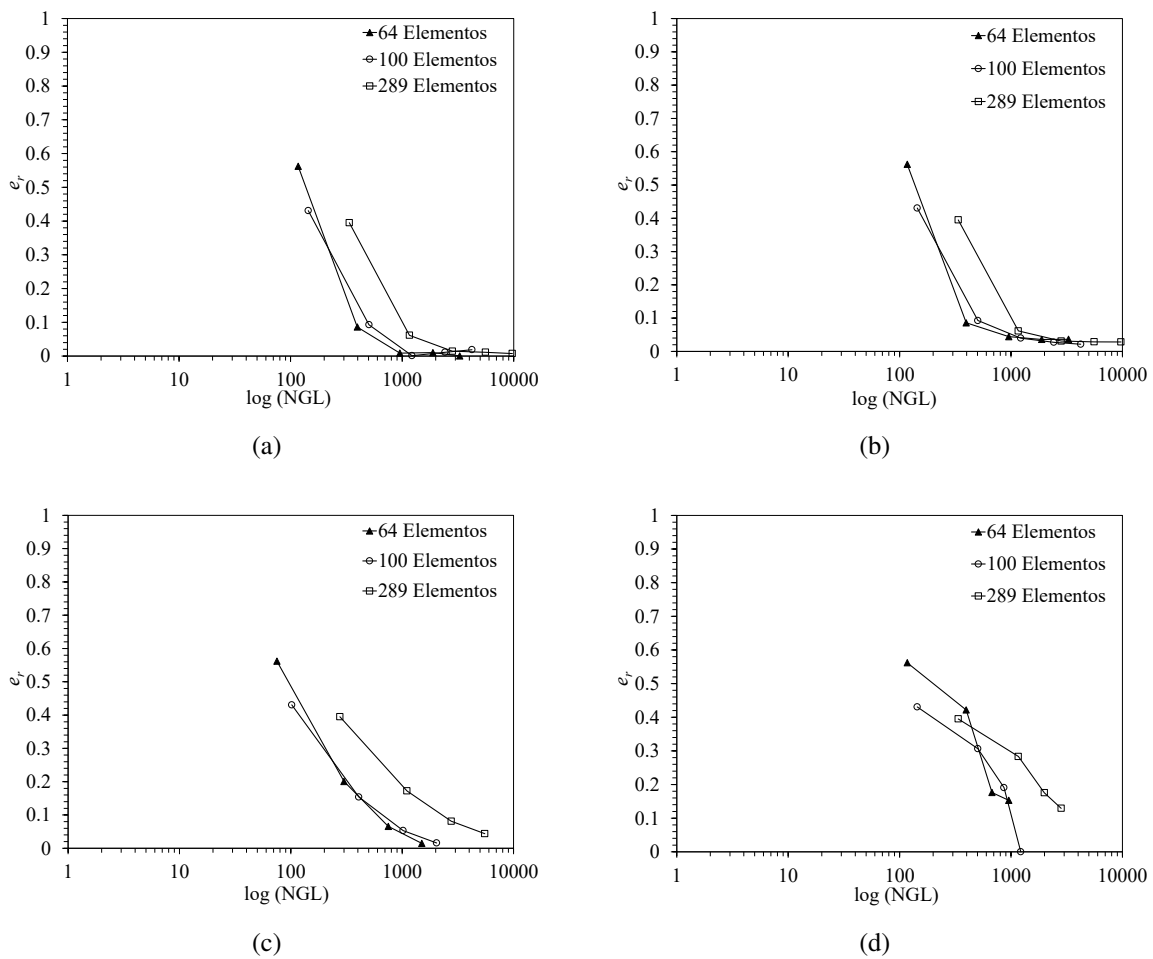


Figura 5.5 – Erro Relativo ( $e_r$ ) para cada ordem polinomial de enriquecimento: (a) MEFG Pol<sup>c</sup>; (b) MEFG Pol<sup>i</sup>; (c) MEFG/S Pol<sup>c</sup>; (d) MEFG/S Pol<sup>i</sup>.

Por fim, a Fig. 5.5 apresenta as curvas de  $e_r$  em função do GDL. Nota-se que conforme o grau do enriquecimento aumenta, para uma mesma malha, o resultado tende a atingir um patamar de convergência. Com o refinamento da malha  $e_r$  reduziu ainda mais. Observa-se que a malha mais grosseira apresentou um resultado razoavelmente bom com enriquecimento P4 e estratégia Pol<sup>c</sup> ( $e_r = 0.056\%$ ). Vale ressaltar que se trata de uma simulação 3D que jamais

alcançaria tal patamar de aproximação com tão poucos elementos em uma simulação de MEF convencional. Devido o fato dos resultados obtidos nas simulações serem próximos daqueles apresentados por Torres (2003), confirmou-se a conclusão parcial acerca da funcionalidade e da correta implementação do MEFG e do MEFG/S realizada nesta tese. Nota-se que os resultados do MEFG/S com  $Pol^i$  não tem o mesmo nível de qualidade dos demais. Isso pode ocasionar resultados não satisfatórios nas análises não lineares.

## 5.4 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I

Esta sessão dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEFG e do MEFG/S, em simulações 3D de estruturas sob modo I de fratura. As respostas encontradas foram comparadas com resultados experimentais ou simulações de modelos semelhantes da literatura. Os ensaios numéricos foram realizados utilizando as estratégias MEFG e MEFG/S com enriquecimento polinomial com ambas as estratégias: aquela que utiliza todos os polinômios do conjunto ( $Pol^c$ ) e aquela que usa apenas os termos extremos do conjunto ( $Pol^i$ ).

### 5.4.1 - TPB com modelo de dano contínuo 3D

Para avaliar o comportamento do MEFG e do MEFG/S polinomial em simulações 3D nos casos de Modo I de fratura, foram realizados ensaios numéricos utilizando a mesma TPB da Fig. 2.10. Os dados geométricos da mesma são detalhados pela Tab. 2.5 e os parâmetros de fratura apresentados na Tab.2.6 foram mantidos. Novamente os resultados numéricos foram comparados com os dados experimentais de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke e Roesler (2010).

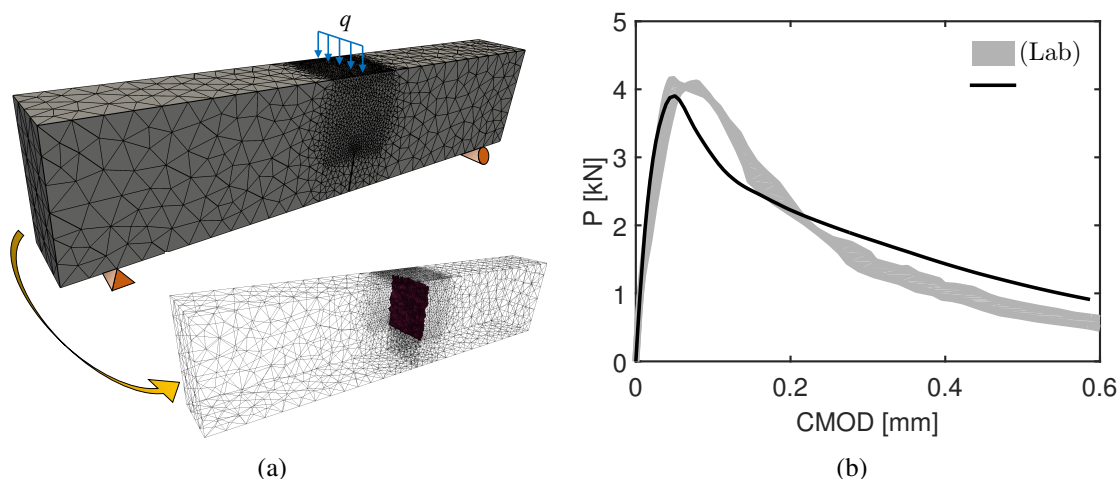


Figura 5.6 – Análise preliminar: (a) Malha com 37583 elementos tetraédricos; (b) curvas  $P$ -CMOD experimental e numérica.

Inicialmente a simulação foi feita utilizando uma malha refinada (37583 elementos tetraédricos), com a finalidade de avaliar se as condições de contorno (bem como as propriedades dos materiais) foram aplicadas corretamente. A Fig. 5.6 apresenta a referida

malha bem como a curva  $P$ - $CMOD$  com o resultado numérico e o experimental, a partir da qual conclui-se que as condições de contorno foram imposta de maneira adequada. Observa-se também a região danificada em total consonância com o problema físico em análise.

#### 5.4.2 - Simulações com MEFG

Assegurada a correção da aplicação das condições de contorno, modelou-se uma malha grosseira para avaliar a aplicação do MEFG e do MEFG/S. A Fig. 5.7 apresenta a malha utilizada para as análises (não estruturada e com 266 elementos finitos tetraédricos) bem como a estratégia de enriquecimento adotada. Os nós escurecidos na região em destaque indicam onde as funções enriquecedoras foram aplicadas, utilizando polinômios conforme a Eq. 5.2.

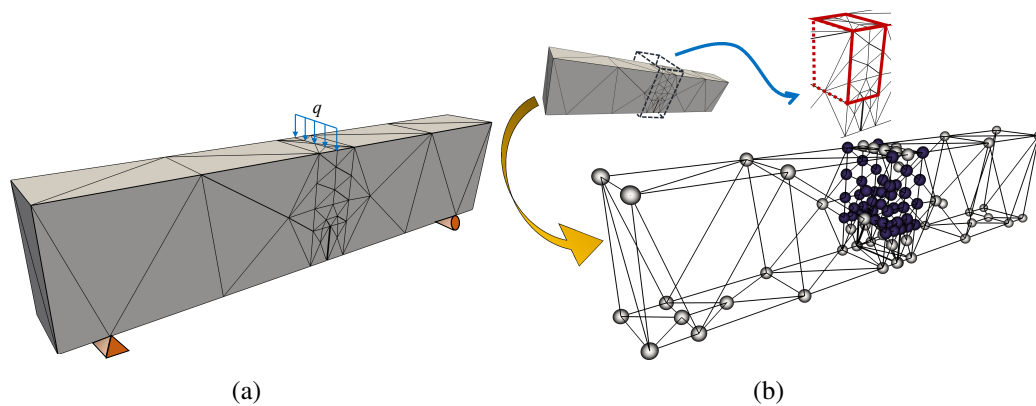


Figura 5.7 – Malha de 266 elementos finitos para  $TPB - 3D$ : (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento.

A Fig. 5.8 apresenta as curvas  $P$ - $CMOD$  tanto para o caso em que fora utilizada a estratégia  $Pol^i$  bem como a  $Pol^c$ , respectivamente. Nota-se que na situação com  $Pol^i$  o  $P_{max}$  é maior e o *softening* apresenta-se mais conformada ao dado experimental.

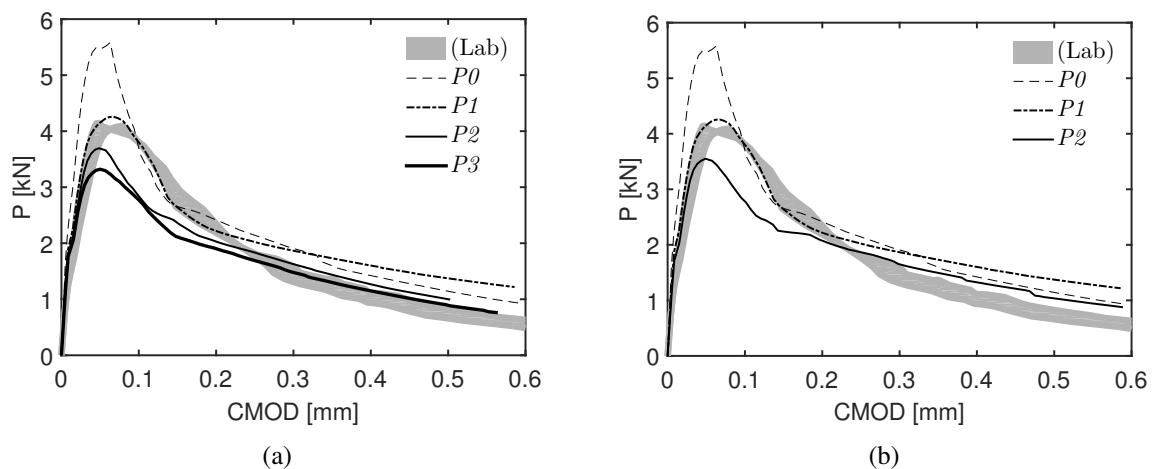


Figura 5.8 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Isto se deve ao fato da intensificação dos campos de tensão/deformação na região enriquecida tornar-se maior a medida que mais polinômios (ou polinômios de maior grau) são utilizados. Desta maneira, como o modelo de dano utilizado depende da deformação do elemento, quanto menor for essa intensificação do campo de deformação mais o elemento demora para atingir um estado de danificação e vice-versa.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, explica-se o fato das curvas com  $P2$  ficarem abaixo do dado experimental. A intensificação dos campos de tensão/deformação mostrou-se muito superior que na simulação com enriquecimento  $P1$ . Tendo em vista que os elementos na região de fratura são muito grandes, ocorre que um grande volume do modelo atinge um estado avançado de dano muito rápido. O volume para dissipar a energia de fratura é muito grande. Vale ressaltar que quanto mais grosseira for a malha menor será o número de pontos de informações (especialmente o campo de deformação) fornecidos ao modelo de dano utilizado pelo sistema. Afim de solucionar essa questão, uma alteração foi feita na Eq. (2.23) para o caso 3D com enriquecimento polinomial, passando a assumir o seguinte formato:

$$h_e = w_{norm}(\sqrt[3]{V^e}) \quad (5.5)$$

onde o peso normalizado  $w_{norm}$  é calculado conforme segue:

$$w_{norm} = \frac{w_{gp}}{w_{gp}^{max}} \quad (5.6)$$

sendo  $w_{gp}$  o peso do Ponto de Gauss (PG) onde o dano estiver sendo analisado e  $w_{gp}^{max}$  o maior peso do conjunto de pontos da regra gaussiana adotada. Deste modo, cada PG contribui de forma ponderada com o dano no elemento, levando em consideração a sua relevância dentro do processo de integração. Assim, o comprimento típico que antes tomava por base o volume inteiro do elemento, passou a adotar um valor mais próximo da zona de influência de cada PG dentro do elemento.

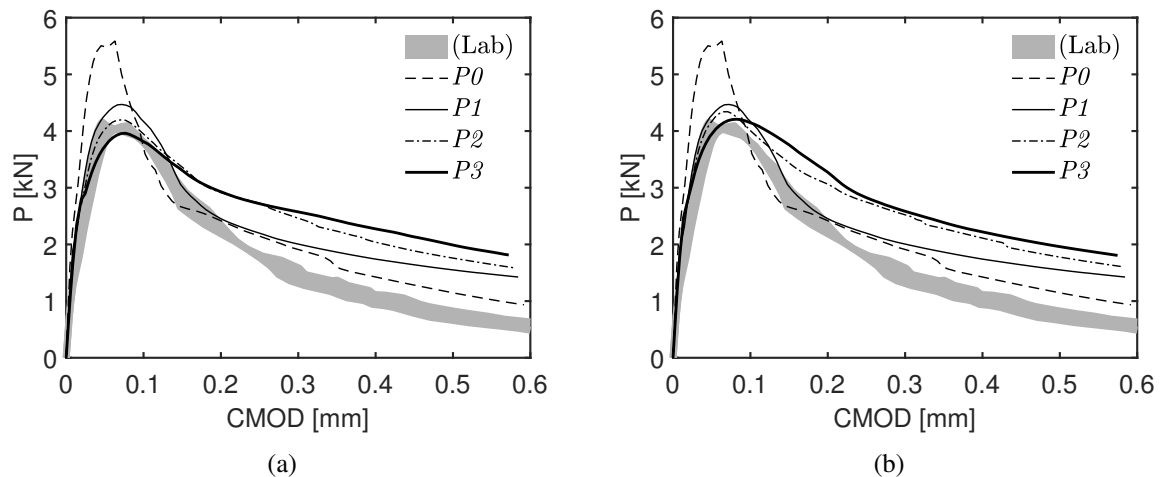


Figura 5.9 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas com MEEG: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Com a alteração proposta, buscou-se adicionar mais dados ao modelo de dano afim de compensar a perda de informações em função da quantidade insuficiente de elementos na malha. Conforme observado na Fig. 2.4 a maior parte da energia de fratura do material é

dissipada na sua parcela inicial ( $G_f$ ). Isso significa dizer que quando o dano atinge  $D_k$  o elemento encontra-se com alto nível de danificação, tornando-se desnecessário um refinamento na obtenção de dados naquele local. Devido isso, foi determinado que a modificação acima indicada no cálculo de  $h_e$  só permanece até o dano no elemento atingir o valor de  $D_k$ , conforme a Fig. 2.4. A partir deste estágio, a formulação retoma o seu estado original.

Observa-se na Fig. 5.9 que o valor de ( $P_{max}$ ) foi melhor representado que na Fig. 5.8. Contudo, nota-se um ganho de rigidez após as curvas atingirem o valor máximo de carga resistida. O efeito se torna mais acentuado a medida que o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumento. Isso ocorreu neste caso devido a existência de muitos nós localizados no "caminho" do dano (na zona de processo), conforme ilustra a Fig. 5.10. Quando o dano atinge a região desses nós ocorre uma indefinição para qual direção os mesmos irão se deslocar, devido a simetria. Como o dano depende das deformações que, por sua vez, são dependentes dos deslocamentos nodais, o elemento deforma-se mais lentamente. Portanto, a energia demora mais para ser dissipada.

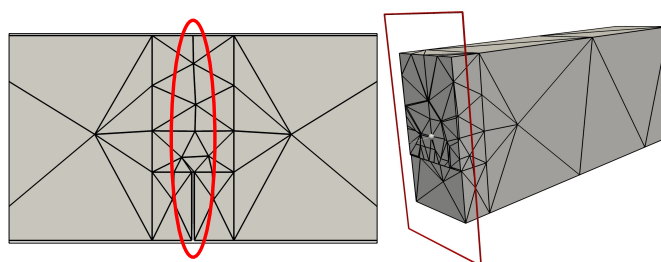


Figura 5.10 – Detalhamento da malha de 266 elementos.

Afim de confirmar essa hipótese, foi construída uma malha com 439 elementos estruturada de modo a evitar nós no provável caminho do dano. A Fig. 5.11 ilustra a malha bem como a estratégia de enriquecimento adotada.

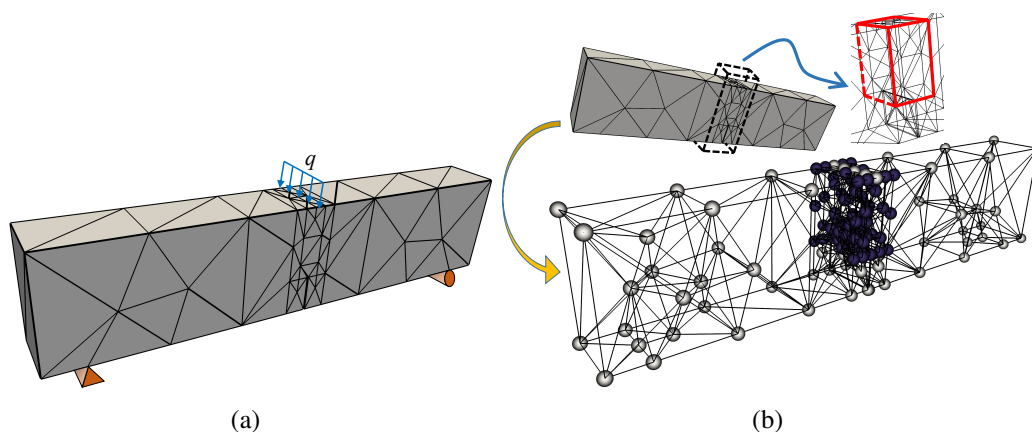


Figura 5.11 – Malha de 439 elementos finitos para *TPB - 3D*: (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento.

Primeiramente serão apresentados os resultados com MEEG e, em seguida, aqueles com MEEG/S. Observa-se na Fig. 5.12 que tanto o ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P - CMOD$  são melhor representadas conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta em uma mesma malha.

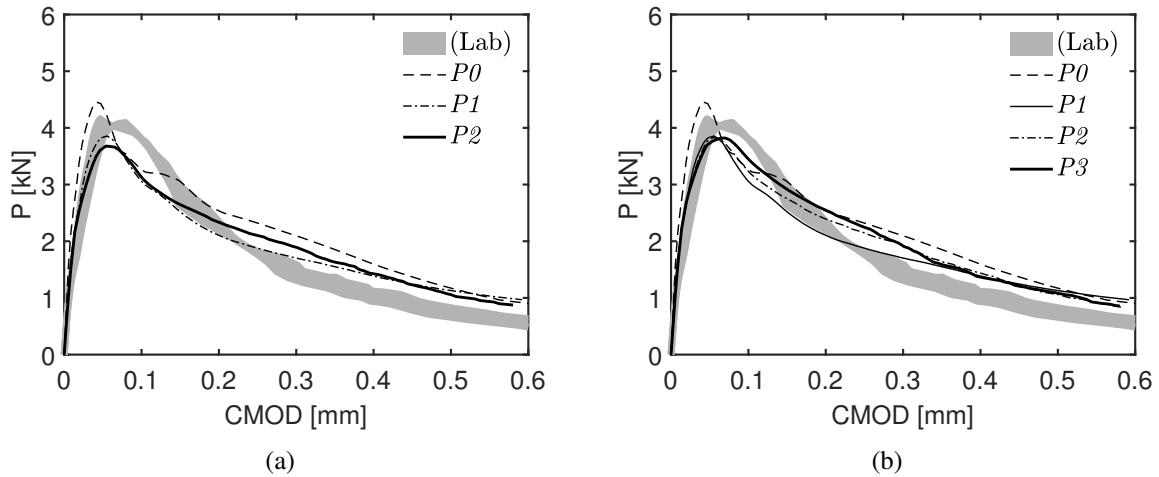


Figura 5.12 – Curvas  $P - CMOD$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

A Fig. 5.13 e a Fig. 5.14 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações com a estratégia  $Pol^c$  como  $Pol^i$ , sendo  $N^{it}$  o número de iterações acumuladas por passo,  $N_p^{norm}$  o número do passo normalizado pelo número total de passos da simulação e  $GDL^{proc}$  o número de graus de liberdade processados na simulação completa. A parte das barras em coloração azul indica a parcela dos GDL's associada ao MEF, enquanto a outra em coloração laranja indica a quantidade de GDL's associada ao MEFG.

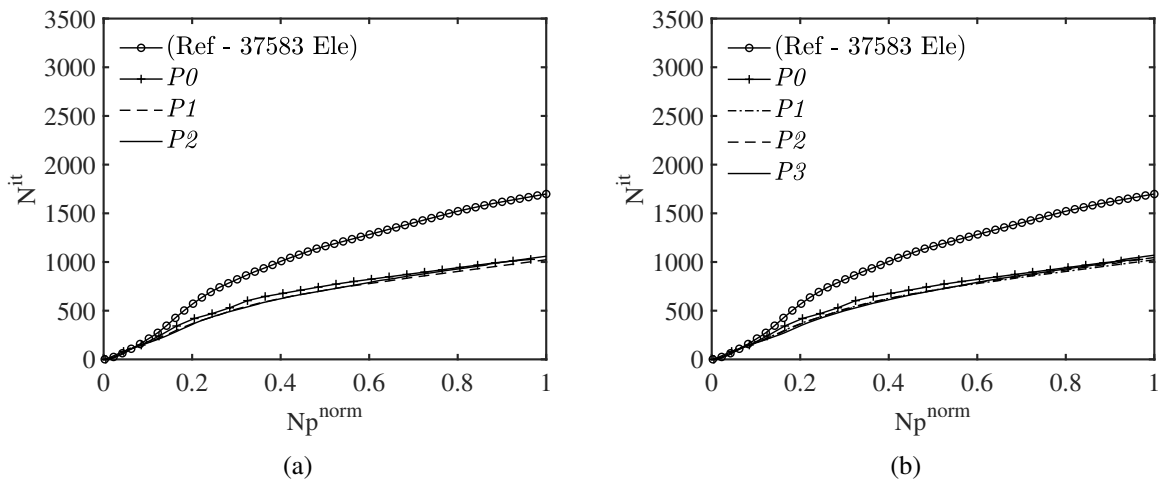


Figura 5.13 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado para TPB: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Na Fig. 5.13 observa-se que  $N^{it}$  é menor nas simulações com enriquecimento, cujos resultados apresentaram-se melhores que os da referência inclusive (sendo que esta última apresenta malha mais refinada com cerca de 140 vezes mais elementos). Nota-se ainda que a simulação  $P0$  também precisa de mais iterações por passo para a convergência quando comparada aos casos com refinamento  $p$ . Portanto, o processamento foi mais eficiente com o MEFG. Isso enaltece o potencial da abordagem generalizada que, além da capacidade de conferir melhor qualidade aos resultados de tensão e deformação em simulações com malhas grosseiras, demonstrou fazê-lo com eficiência computacional satisfatória.

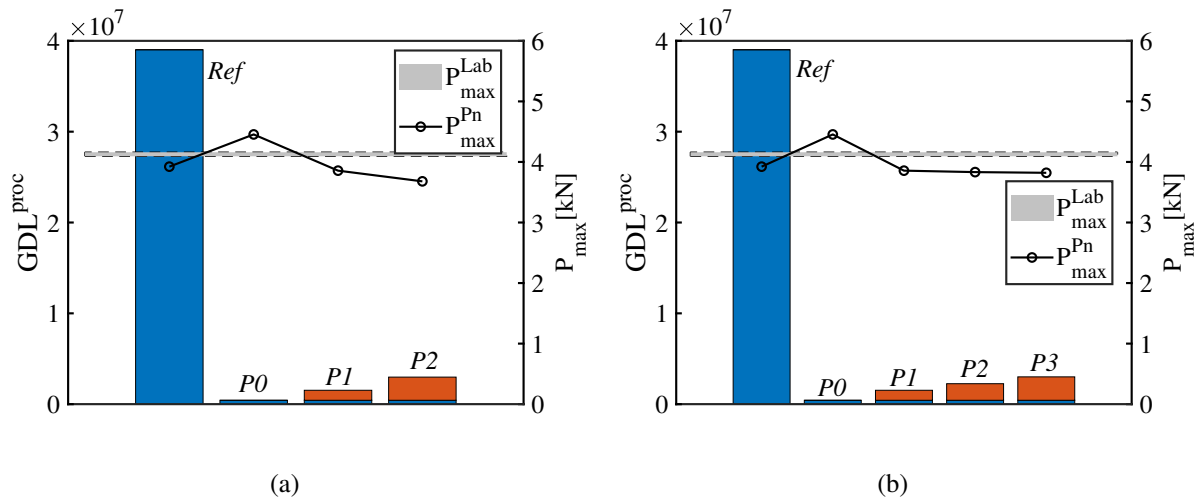


Figura 5.14 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado para TPB: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 5.14 que o  $GDL^{proc}$  foi superior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto (cada função representa um grau de liberdade a mais no nó em cada dimensão do espaço, logo, no 3D, três graus a mais por nó). Pelo mesmo motivo as simulações que utilizaram a estratégia  $Pol^c$  apresentaram um  $GDL^{proc}$  superior (ainda que de maneira sutil) àquelas que utilizaram  $Pol^i$ . Contudo, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência com a malha refinada, visto que todas as simulações com MEFG apresentaram  $GDL^{proc}$  bem menor.

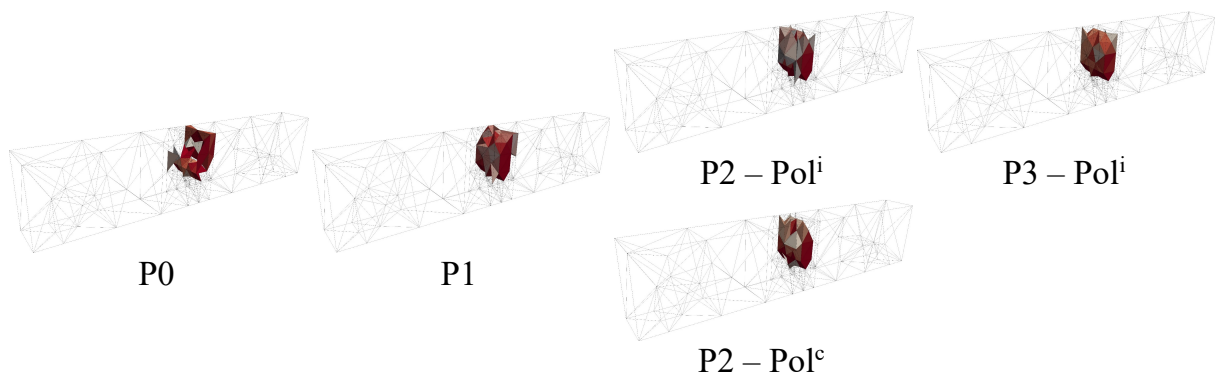


Figura 5.15 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 439 elementos.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 5.15) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Roesler *et al.* (2007a). Observa-se ainda que ocorre um melhor mapeamento do dano nas simulações com a estratégia  $Pol^c$ . Isso ocorre devido o maior refinamento  $p$ . Em todos os casos com MEFG o resultado foi melhor que a simulação P0.

### 5.4.3 - Simulações com MEF/S

A seguir serão apresentados os resultados com MEF/S. Observa-se na Fig. 5.12 que tanto o ( $P_{max}$ ) quanto a região de *softening* da curva  $P$ - $CMOD$  são melhor representadas conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta.

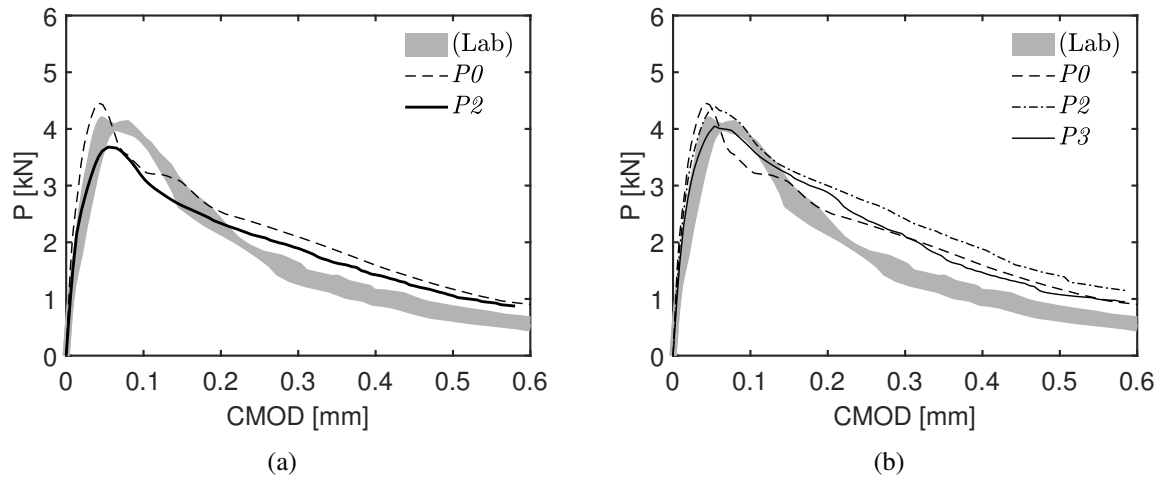


Figura 5.16 – Curvas  $P$  –  $CMOD$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

A Fig. 5.17 e a Fig. 5.18 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações tanto para a estratégia  $Pol^c$  como  $Pol^i$ .

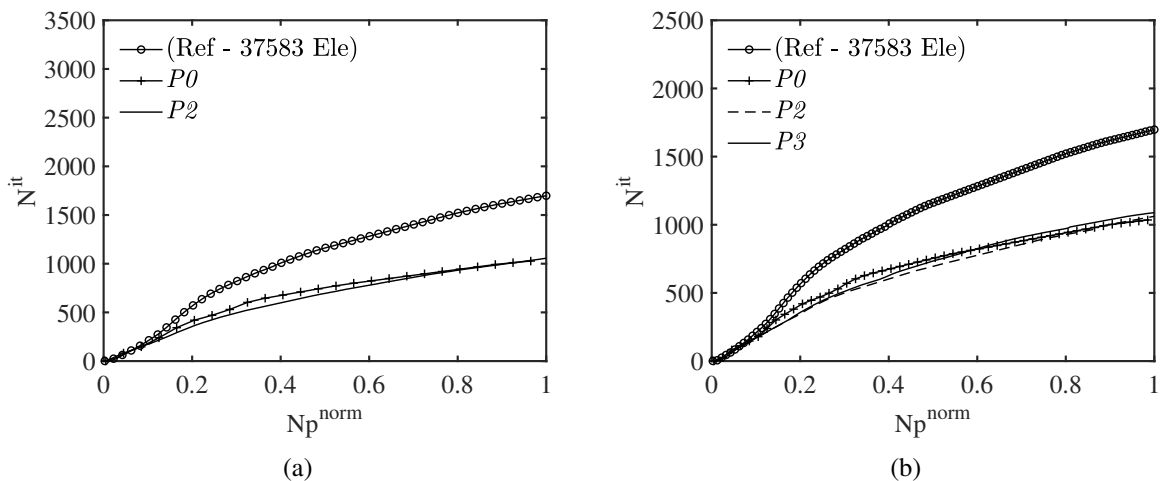


Figura 5.17 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado para  $TPB$ : (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Na Fig. 5.17 observa-se que  $N^{it}$  é menor nas simulações com enriquecimento, cujos resultados apresentaram-se melhor que os da referência inclusive (sendo que esta última apresenta malha mais refinada com cerca de 140 vezes mais elementos). Nota-se ainda que a simulação  $P0$  também precisa de mais iterações por passo para a convergência quando comparada aos casos enriquecidos. Portanto, o processamento foi mais eficiente com o MEF/S. Isso enaltece o



potencial do MEFG/S que, além da capacidade de conferir melhor qualidade aos resultados de tensão e deformação em simulações com malhas grosseiras, demonstrou fazê-lo com eficiência computacional satisfatória.

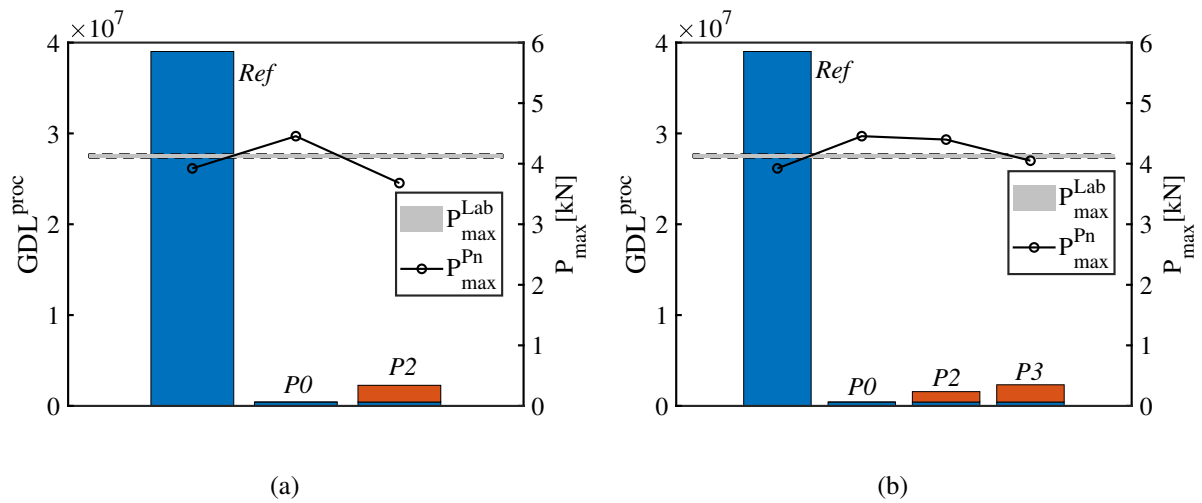


Figura 5.18 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado para  $TPB$ : (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 5.18 que o  $GDL^{proc}$  foi superior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Pelo mesmo motivo as simulações que utilizam a estratégia  $Pol^c$  apresentam de modo geral um  $GDL^{proc}$  superior àquelas que utilizam  $Pol^i$ . Ainda assim, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência com a malha refinada, visto que todas as simulações com MEFG/S apresentaram  $GDL^{proc}$  bem menor.

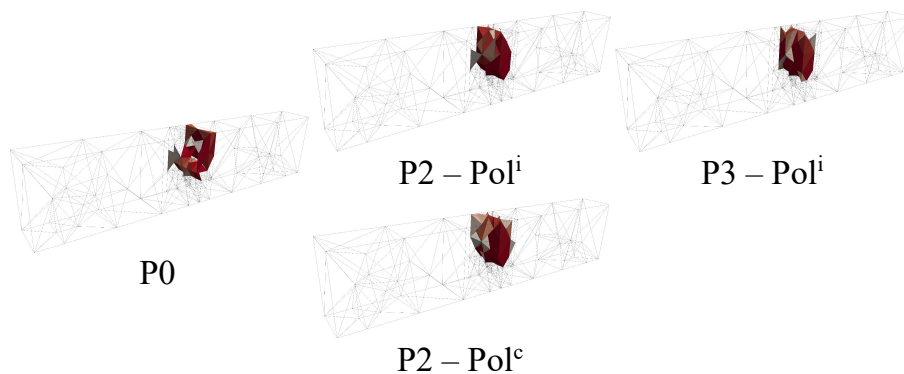


Figura 5.19 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 439 elementos.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 5.19) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Roesler *et al.* (2007a). Observa-se ainda que ocorre um melhor mapeamento do dano nas simulações com a estratégia  $Pol^c$ . Isso ocorre devido o maior refinamento polinomial. Em todos os casos com MEFG/S o resultado foi melhor que a simulação  $P0$ . Nota-se que os resultado com enriquecimento apresentam melhor

comportamento, haja vista o dano ter se concentrado mais na zona de falha nesses casos. Sendo a malha muito grosseira para uma simulação de fratura 3D considera-se estes resultados um excelente indicativo da capacidade do MEFG/S para simular problemas dessa natureza.

## 5.5 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO

Esta sessão dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEFG e do MEFG/S, em simulações 3D de estruturas sob modo misto de fratura. As respostas encontradas foram comparadas com resultados experimentais ou simulações de modelos semelhantes da literatura. Os ensaios numéricos foram realizados utilizando as estratégias MEFG e MEFG/S com enriquecimento polinomial e ambas as estratégias: Pol<sup>c</sup> e Pol<sup>i</sup>.

### 5.5.1 - Estrutura com duplo entalhe - *Double Edge Notch (DEN)*

O modelo aqui simulado para avaliar o MEFG e o MEFG/S 3D em situações de modo misto de fratura foi o *Double Edge Notched (DEN)*. Os resultados das simulações numéricas foram comparados com os dados extraídos de Nooru-Mohamed (1992) onde o autor expôs dados referentes a ensaios laboratoriais em peças quadradas de concreto com duplo entalhe.

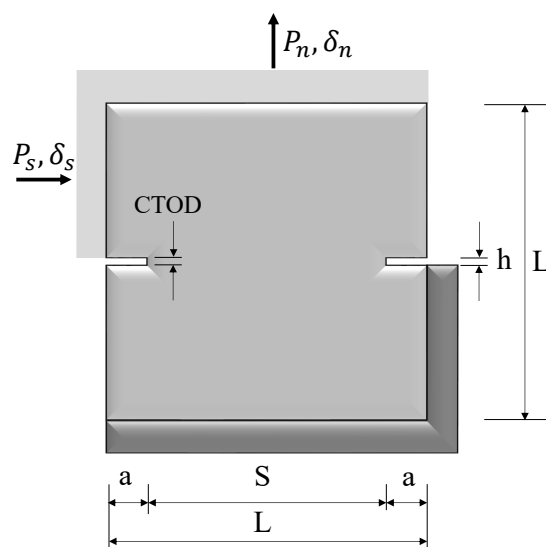


Figura 5.20 – DEN - geometria e condições de contorno.

Tabela 5.8 – Parâmetros de fratura e relativos ao material para DEN

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/mm)	$G_f$ (N/mm)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\nu$
0,100	0,040	0,25	30000	3,30	33,00	0,20

Os parâmetros de fratura e os relativos ao material (Nooru-Mohamed,1992) estão especificados na Tab. 5.8 e a geometria ilustrada pela Fig. 5.20, sendo L = 200mm, S = 150mm, a = 25mm

e  $h = 5\text{mm}$ . As simulações numéricas foram realizadas com controle de deslocamento, sendo aplicados na região indicada por  $\delta_s$  incrementos de  $u = 0.0025\text{mm}$ . Foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

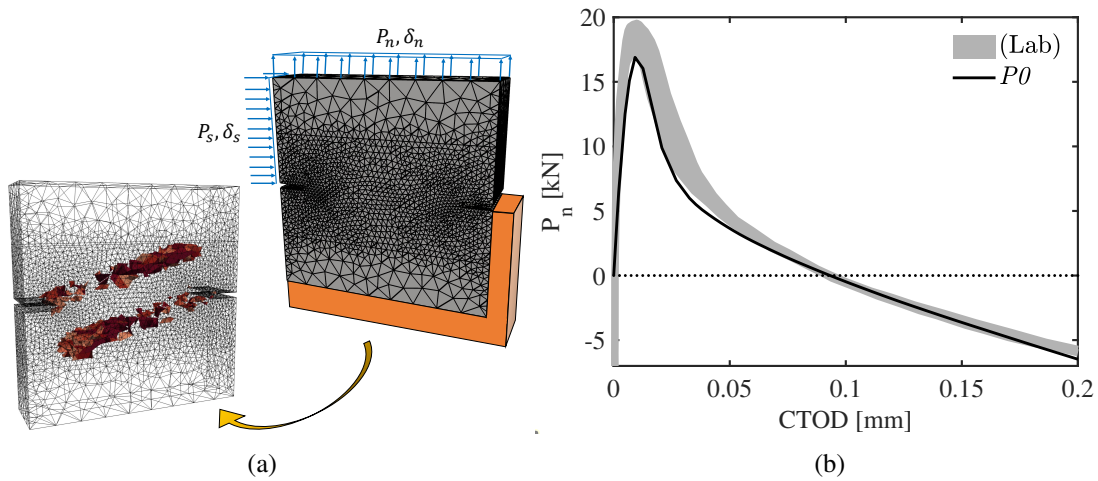


Figura 5.21 – Análise preliminar: (a) Malha com 41234 elementos tetraédricos; (b) curvas  $P_n - CTOD$  experimental e numérica.

Inicialmente foi feita uma simulação com malha refinada (41234 elementos tetraédricos), com a finalidade de avaliar se as condições de contorno (bem como as propriedades dos materiais) foram aplicadas corretamente. A Fig. 5.21 apresenta a malha bem como a curva  $P_n$ - $CTOD$  (que relaciona força vertical ( $P_n$ ) e a abertura de ponta de trinca, *Crack Tip Opening Displacement - CTOD*) com os resultados numérico e o experimental (Fig. 5.21(b)) comparados. Na Fig. 5.22 são apresentados resultados da força horizontal ( $P_s$ ) em função do deslocamento horizontal ( $\delta_s$ ).

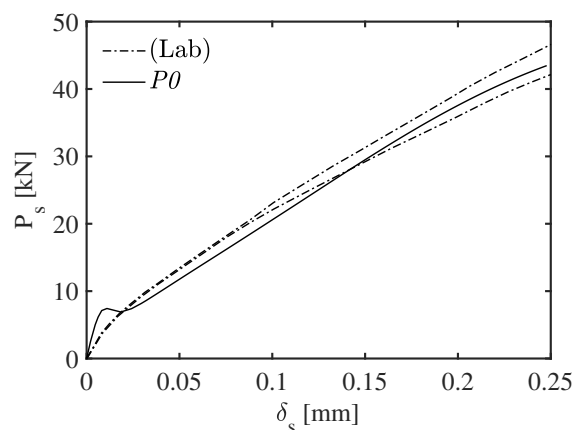


Figura 5.22 – Análise preliminar: curvas  $P_s - \delta_s$  experimental e numérica.

Conclui-se, diante de todos esses dados, que as condições de contorno foram imposta de maneira adequada haja vista o excelente resultado de  $P_{max}$  e uma boa descrição da fase de amolecimento. Observa-se também a região danificada (Fig. 5.21(a)) em consonância com o problema físico em análise.

### 5.5.1.1 - Simulações com MEFG

Assegurada a correção da aplicação das condições de contorno, modelou-se uma malha grosseira para avaliar a aplicação do MEFG (e do MEFG/S mostrados a seguir) com enriquecimento polinomial em estruturas sob processo de danificação. A Fig. 5.23 apresenta a malha utilizada para as análises (não estruturada e com 497 elementos finitos tetraédricos - Fig. 5.23(a)) bem como a estratégia de enriquecimento adotada (Fig. 5.23(b)). Os nós escurecidos na região em destaque indicam onde as funções enriquecedoras foram aplicadas, utilizando polinômios conforme a Eq. (5.2).

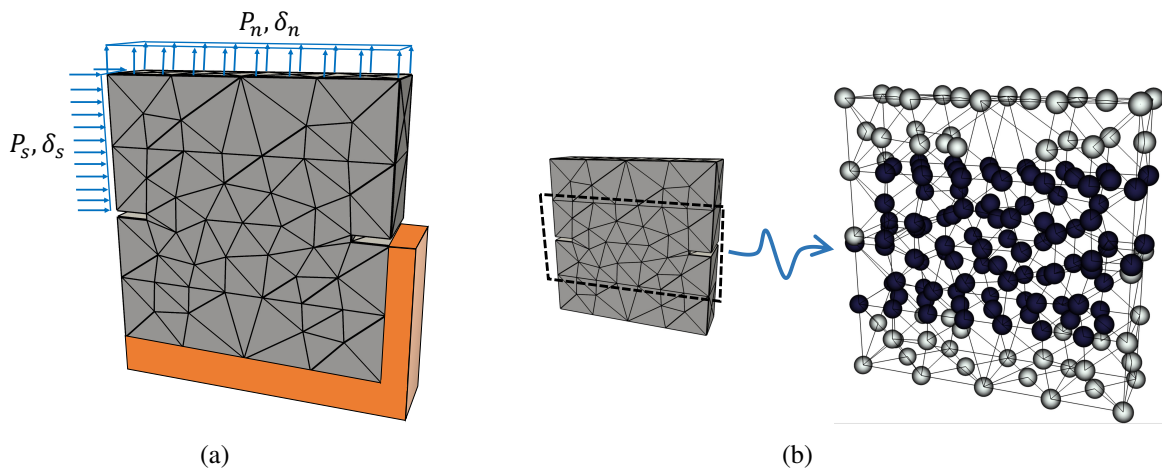


Figura 5.23 – Malha de 497 elementos finitos para DEN - 3D: (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento.

A Fig. 5.24 apresenta as curvas  $P$ -CTOD tanto para o caso em que fora utilizada a estratégia  $Pol^i$  bem como a  $Pol^c$ , respectivamente. Nota-se que na situação  $Pol^i$  o  $P_{max}$  é maior e o *softening* apresenta-se mais conformada ao resultado experimental nas simulações com enriquecimentos  $P1$  e  $P2$ .

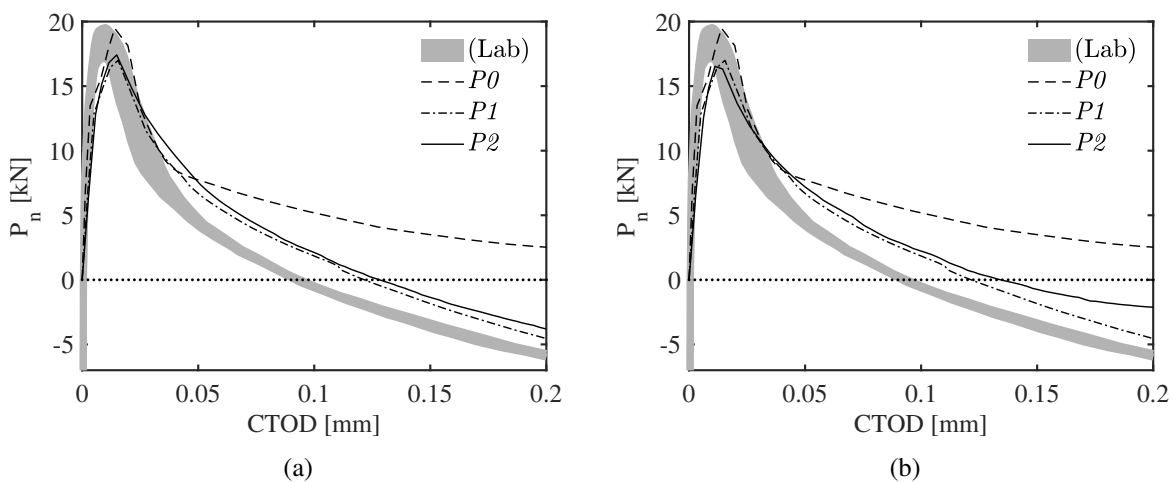


Figura 5.24 – Curvas  $P_n$  – CTOD experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Na Fig. 5.25 são apresentados resultados da força horizontal ( $P_s$ ) em função do deslocamento horizontal ( $\delta_s$ ). Percebe-se que as curvas referentes às simulações com enriquecimento tem comportamento melhor que o caso  $P0$  (esta última apresenta-se bem distante do experimental). Os resultados mostram que o MEFG é capaz de representar de forma razoável o aumento contínuo de  $P_s$  observado no ensaio experimental a medida que  $\delta_s$  é aplicado (isso utilizando uma malha bem grosseira).

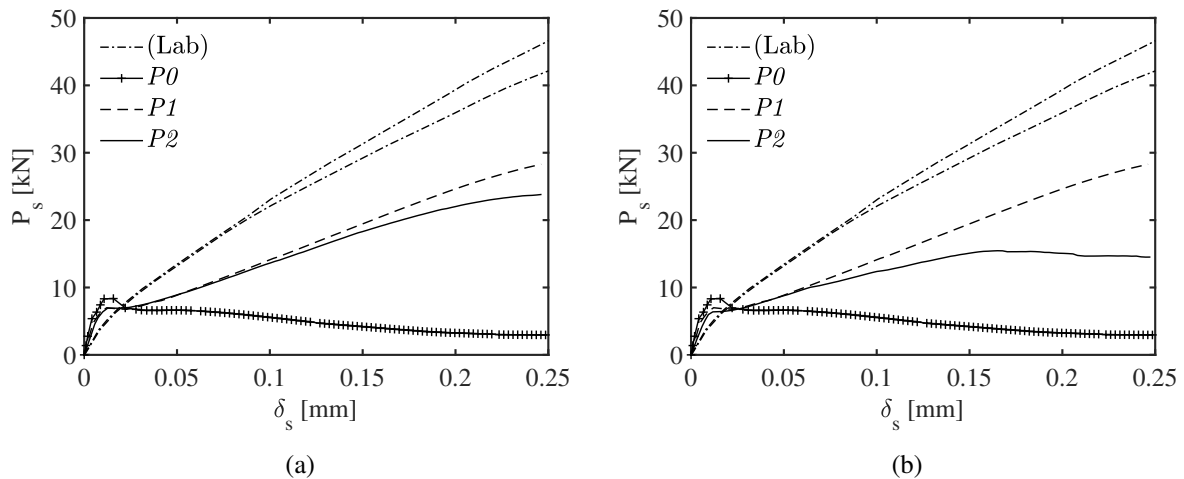


Figura 5.25 – Curvas  $P_s - \delta_s$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Na Fig. 5.26 observa-se que  $N^{it}$  é um pouco maior nas simulações com enriquecimento (exceção para  $P2-Pol^c$  onde o  $N^{it}$  se destaca), embora os resultados apresentem-se próximos ao da referência (sendo que esta última apresenta malha mais refinada com cerca de 83 vezes mais elementos). Isso enaltece o potencial do MEFG que, além da capacidade de conferir melhor acurácia aos resultados de tensão e deformação em simulações com malhas grosseiras, demonstrou fazê-lo com eficiência computacional satisfatória (próximo ao MEF).

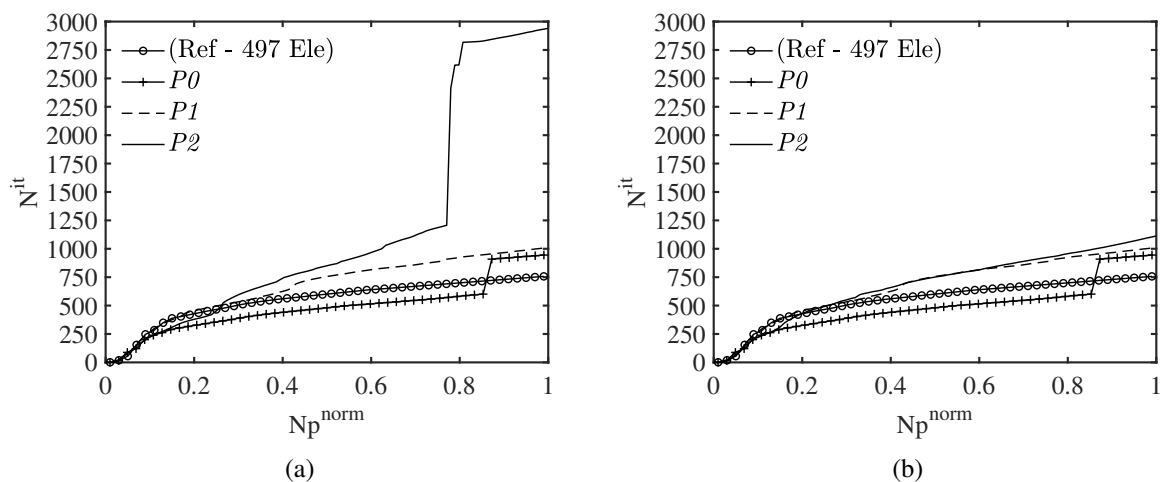


Figura 5.26 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia para DEN: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

A Fig. 5.27 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com estratégia  $Pol^c$

e  $Pol^i$ . É possível notar na Fig. 5.27 que o  $GDL^{proc}$  foi superior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Pelo mesmo motivo as simulações que utilizam a estratégia  $Pol^c$  apresentam um  $GDL^{proc}$  superior àquelas que utilizam  $Pol^i$ . Contudo, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência com a malha refinada, visto que todas as simulações com MEFG apresentaram  $GDL^{proc}$  menor.

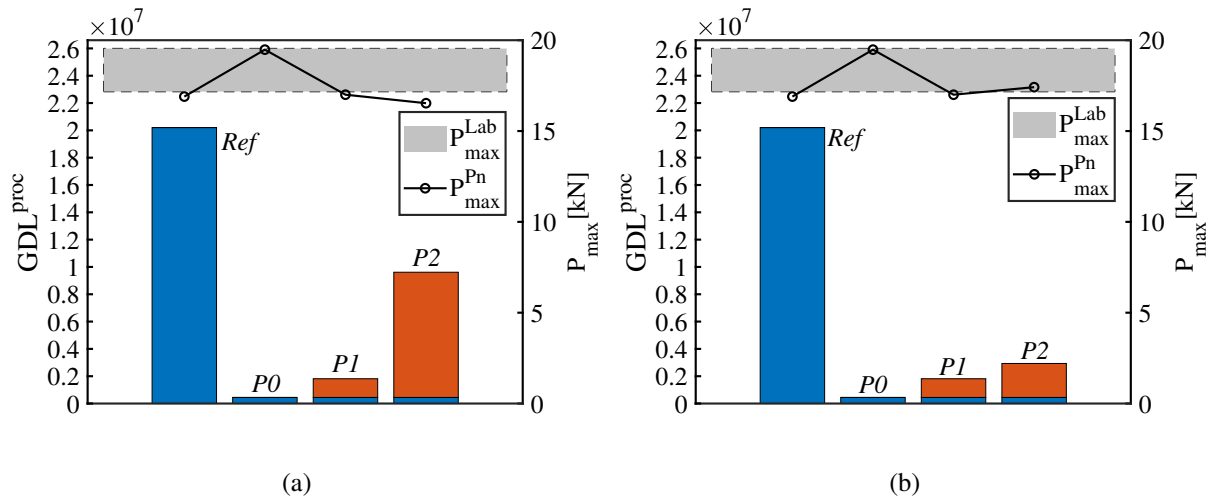


Figura 5.27 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia para DEN: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 5.28) nota-se que a danificação apresentou comportamento razoavelmente dentro do esperado levando em conta o resultado experimental apresentado por Nooru-Mohamed (1992). Observa-se ainda que ocorre um melhor mapeamento do dano nas simulações com enriquecimento, caracterizada pela melhor distribuição na zona de falha. Em todos os casos com MEFG o resultado foi melhor que a simulação  $P0$ . Sendo a malha muito grosseira para uma problema de fratura 3D considera-se estes resultados um bom indicativo da capacidade do MEFG para simular problemas dessa natureza.

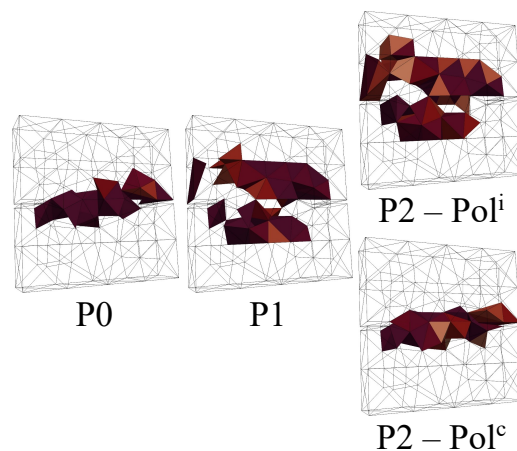


Figura 5.28 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 497 elementos.

### 5.5.1.2 - Simulações com MEFG/S

A Fig. 5.29(b) apresenta as curvas  $P$ - $CTOD$  tanto com as estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ . Nota-se que o os resultados com enriquecimento não são melhores que a simulação  $P0$ .

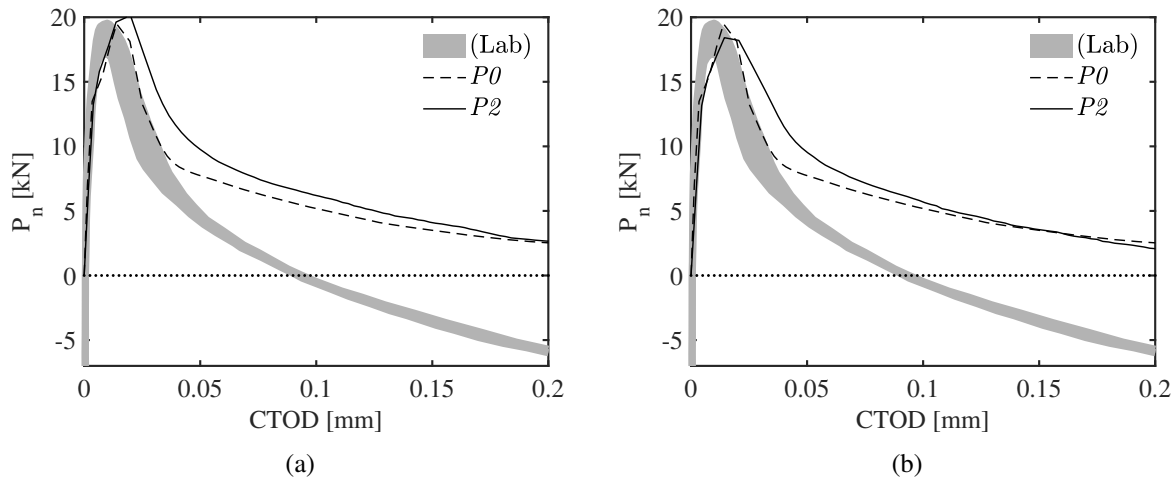


Figura 5.29 – Curvas  $P_n - CTOD$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Na Fig. 5.30 são apresentados resultados da força horizontal ( $P_s$ ) em função do deslocamento horizontal ( $\delta_s$ ). Nota-se que o os resultados com enriquecimento novamente não são bons. A possibilidade de ocorrer uma baixa qualidade do MEFG/S em determinado momento foi mencionada na Sec. 2.5 e deve-se, sobretudo, ao fato da supressão da parcela de interpolação linear (ou bilinear) das funções de enriquecimento.

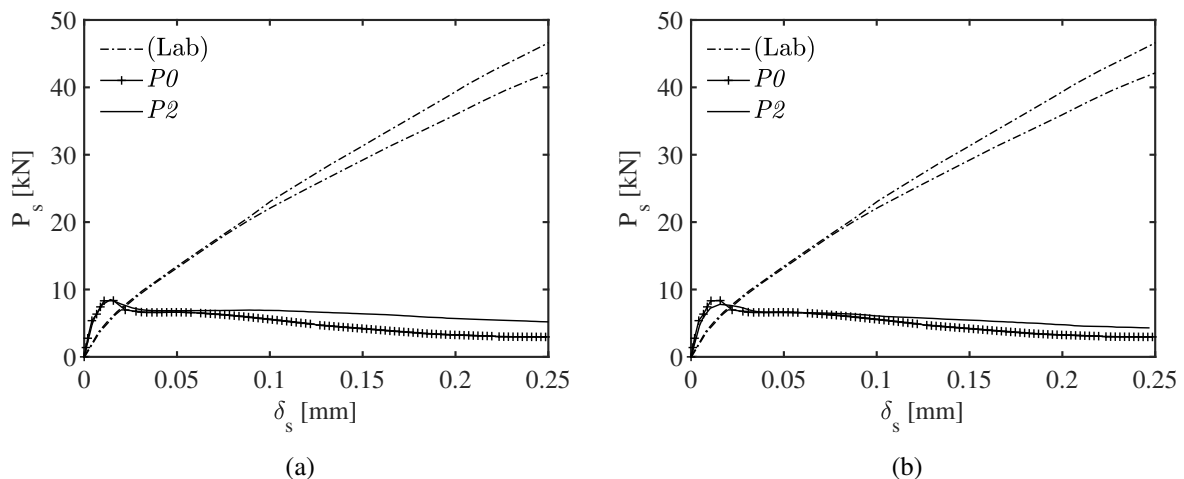


Figura 5.30 – Curvas  $P_s - \delta_s$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Com o objetivo de contornar esse problema, foi realizada uma pequena alteração no espaço de aproximação do MEFG/S. Propô-se a manutenção do interpolante linear  $L_{P1}$  no conjunto de funções de enriquecimento do MEFG/S nos casos de grau  $P2$  em diante. Contudo, sabendo que

a subtração da parcela de interpolação linear ou bilinear ( $I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})$ ) característica do MEFG/S (Eq. (2.13)) gera termos nulos, impôs-se a não aplicação dessa subtração aos monômios de  $L_{P1}$  (sendo mantida nos demais).

Neste sentido, a preocupação inicial foi se esse MEFG/S modificado (MEFG/S<sup>mod</sup>) perderia a vantagem de apresentar um melhor condicionamento matricial que o MEFG (conforme pôde ser visto anteriormente na Fig. 3.6, por exemplo). Essa análise foi feita utilizando o mesmo modelo da viga engastada livre da Fig. 5.1 com aplicação de enriquecimento  $P2$ . A Fig. 5.31 apresenta esse estudo comparando o Número de Condição e Escalonado (NCS) e o erro relativo ( $e_r$ ) do MEFG/S padrão (MEFG/S<sup>std</sup>) com os resultados do MEFG/S<sup>mod</sup>.

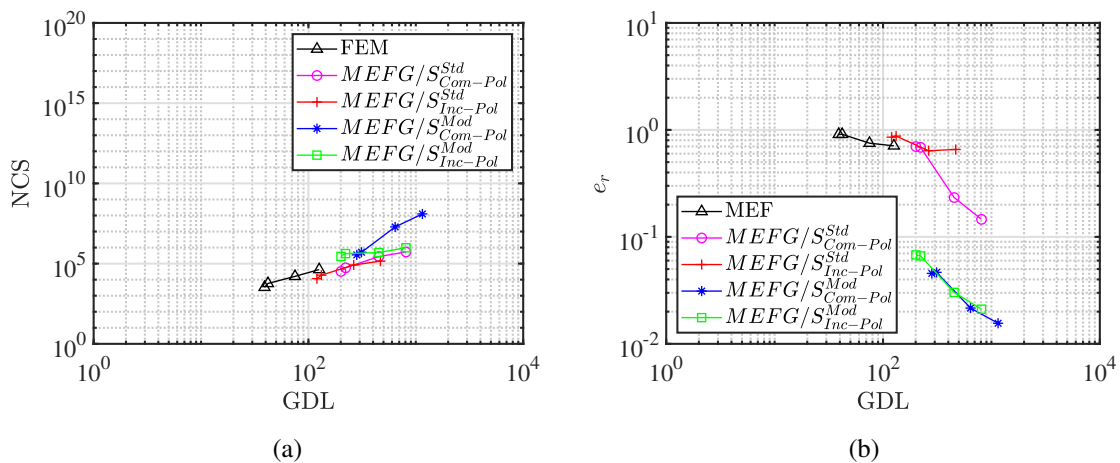


Figura 5.31 – Análise do MEFG/S<sup>mod</sup> com  $P2$ : (a) NCS; (b)  $e_r$ .

Observa-se que o MEFG/S<sup>mod</sup> não perdeu a característica de ter um NCS cuja ordem é próxima ao do MEF (Fig. 5.31(a)). Isso (de maneira geral) favorece a eficiência computacional do MEFG/S perante o MEFG conforme demonstrado em anteriormente. Além disso, é clara a melhora da qualidade do resultado com a utilização do MEFG/S<sup>mod</sup> tendo em vista a substancial redução do  $e_r$  observada na Fig. 5.31(b).

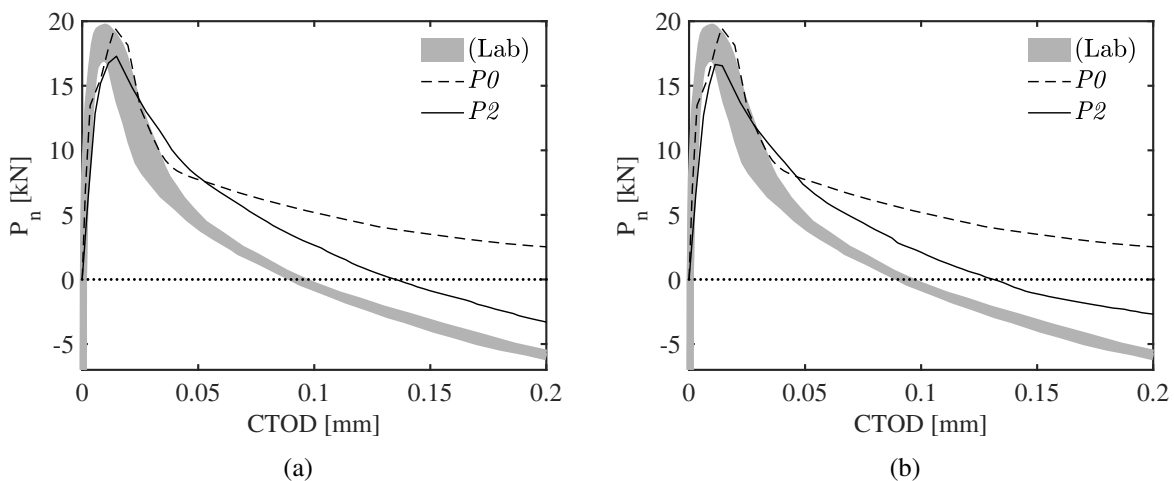


Figura 5.32 – Curvas  $P_n - CTOD$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .



Na Fig. 5.33 são apresentados os resultados da força horizontal ( $P_s$ ) em função do deslocamento horizontal ( $\delta_s$ ). Percebe-se que as curvas referentes às simulações com enriquecimento passaram a ter comportamento melhor que o caso  $P0$ . Os resultados mostram que o MEEG/S<sup>mod</sup> foi capaz de representar razoavelmente bem (haja vista ser uma malha bem grosseira para o problema em questão) o aumento contínuo de  $P_s$  observado no ensaio experimental a medida que  $\delta_s$  é aplicado.

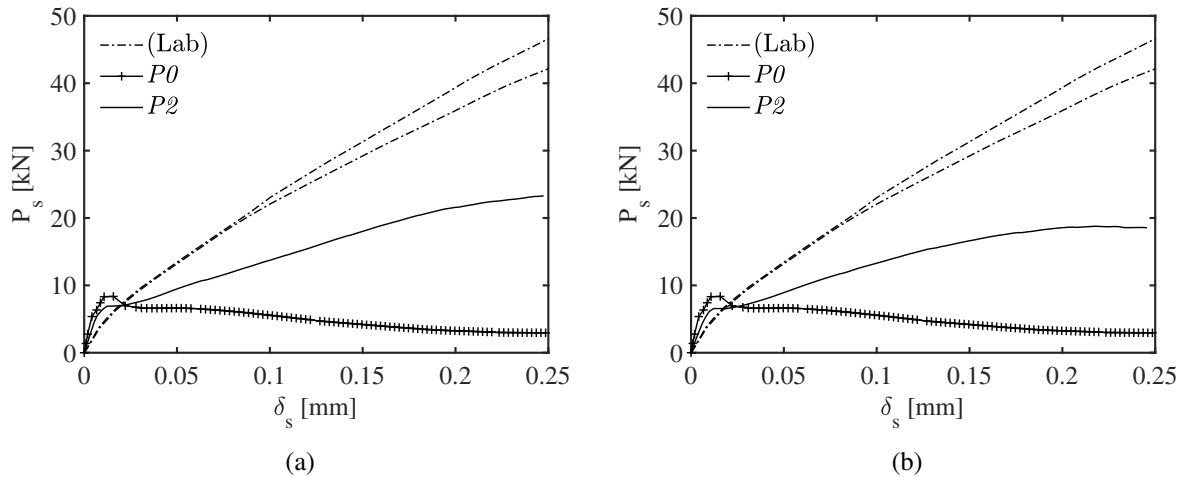


Figura 5.33 – Curvas  $P_s - \delta_s$  experimentais e numéricas: (a)  $Pol^i$ ; (b)  $Pol^c$ .

Na Fig. 5.34 observa-se que  $N^{it}$  é maior nas simulações com enriquecimento, embora na situação  $Pol^i$  esteja próximo ao da referência. Esse, portanto, apresenta melhor eficiência computacional (satisfatória e semelhante ao MEF).

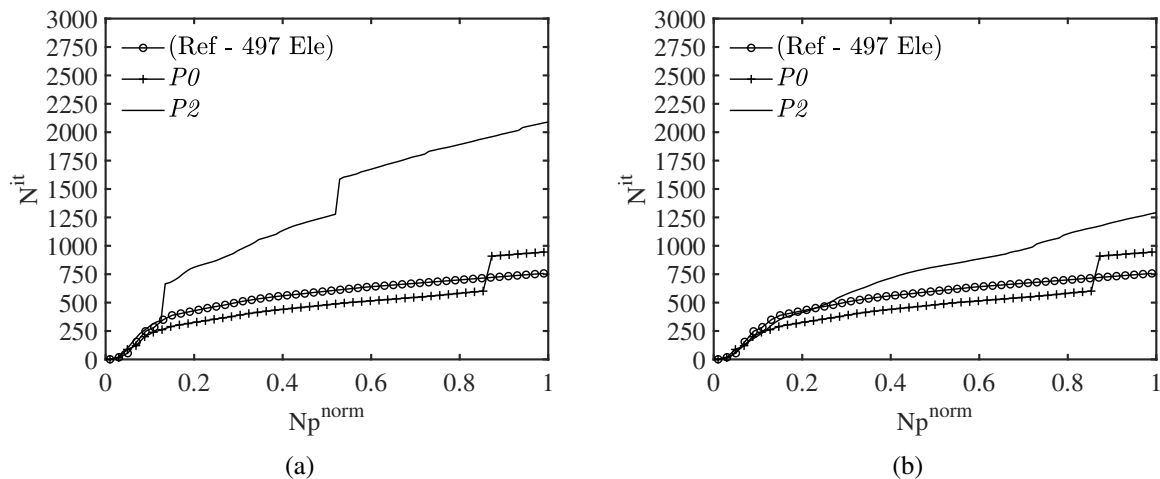


Figura 5.34 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado com estratégia MEEG/S<sup>mod</sup> para DEN: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

A Fig. 5.35 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações tanto para a estratégia  $Pol^c$  como  $Pol^i$ . É possível notar que o  $GDL^{proc}$  foi superior nas simulações que

utilizam a estratégia  $Pol^c$  haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o vetor de enriquecimento. Contudo, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência com a malha refinada, visto que todas as simulações com  $MEFG/S^{mod}$  apresentaram  $GDL^{proc}$  menor.

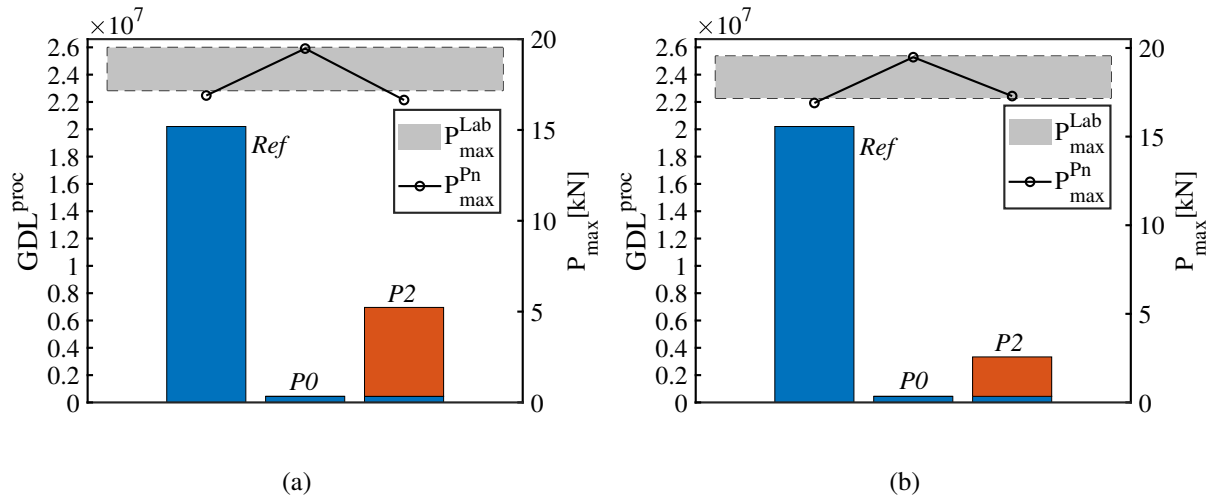


Figura 5.35 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado com estratégia para DEN: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 5.36) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Nooru-Mohamed (1992). Observa-se ainda que ocorre um melhor mapeamento do dano na simulação com enriquecimento, haja vista o dano ter se concentrado mais na zona de falha nesses casos. Sendo a malha muito grosseira para uma simulação de fratura 3D considera-se estes resultados um excelente indicativo da capacidade do  $MEFG/S^{mod}$  para simular problemas dessa natureza.

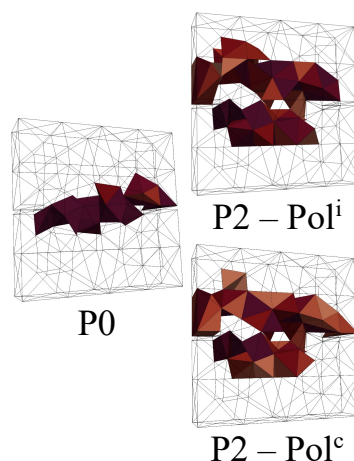


Figura 5.36 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 497 elementos.

## 5.5.2 - Chapa L

Um dos modelos simulados para avaliar o MEF/S 3D em situações de modo misto de fratura foi o da Chapa L experimentada por Winkler *et al.* (2001). Os resultados das simulações numéricas foram comparados com os dados extraídos dos trabalhos de Winkler *et al.* (2001,2004).

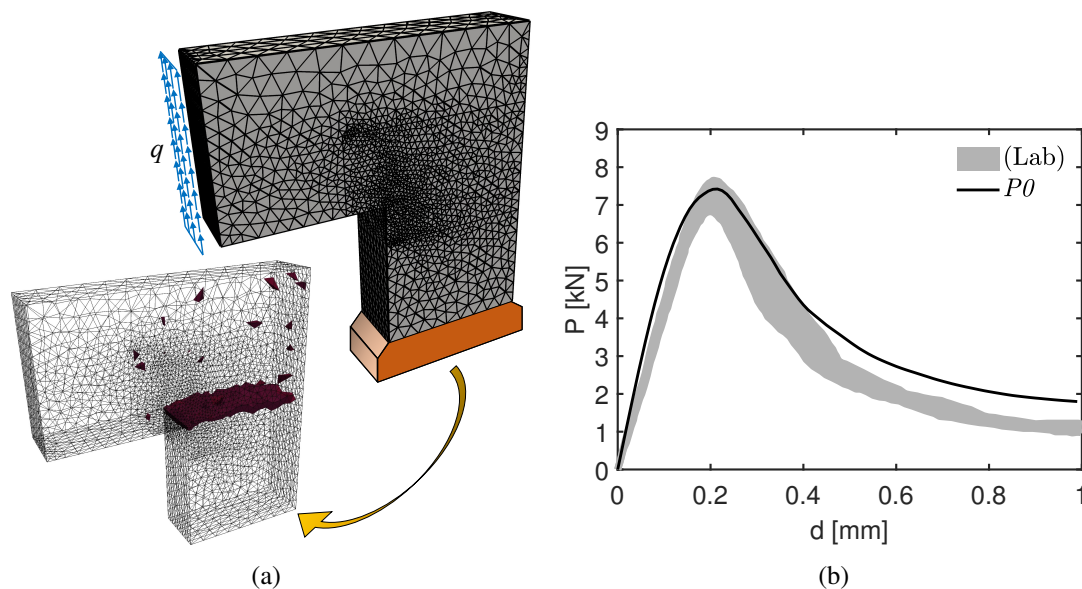


Figura 5.37 – Análise preliminar: (a) Malha com 48042 elementos tetraédricos; (b) curvas  $P$ - $d$  experimental e numérica.

Foram adotados os mesmos parâmetros de fratura e os relativos ao material, especificados pela Tab. 4.9 bem como a mesma geometria ilustrada pela Fig. 4.21 ambas presentes na Sec. 4.6. As simulações numéricas foram realizadas com controle de deslocamento, sendo aplicados na região indicada por  $q$  (Fig. 5.37(a)) incrementos de  $u = 0.002\text{mm}$ .

Inicialmente foi feita uma simulação com malha refinada (48042 elementos tetraédricos), com a finalidade de avaliar se as condições de contorno (bem como as propriedades dos materiais) foram aplicadas corretamente. A Fig. 5.37 apresenta a malha bem como a curva  $P$ - $d$  com o resultado numérico e o experimental (Fig. 5.37(b)). Conclui-se que as condições de contorno foram imposta de maneira adequada haja vista o excelente resultado de  $P_{max}$  e uma boa descrição da fase de amolecimento. Observa-se também a região danificada em consonância com o problema físico em análise (Fig. 5.37(a)).

### 5.5.2.1 - Simulações com MEF/S

Assegurada a correção da aplicação das condições de contorno, modelou-se uma malha grosseira para avaliar a aplicação do MEF/S com enriquecimento polinomial em estruturas sob processo de danificação. A Fig. 5.38 apresenta a malha utilizada para as análises (não estruturada e com 445 elementos finitos tetraédricos - Fig. 5.38(a)) bem como a estratégia de

enriquecimento adotada (Fig. 5.38(b)). Os nós escurecidos na região em destaque indicam onde as funções enriquecedoras foram aplicadas, utilizando polinômios conforme a Eq. (5.2).

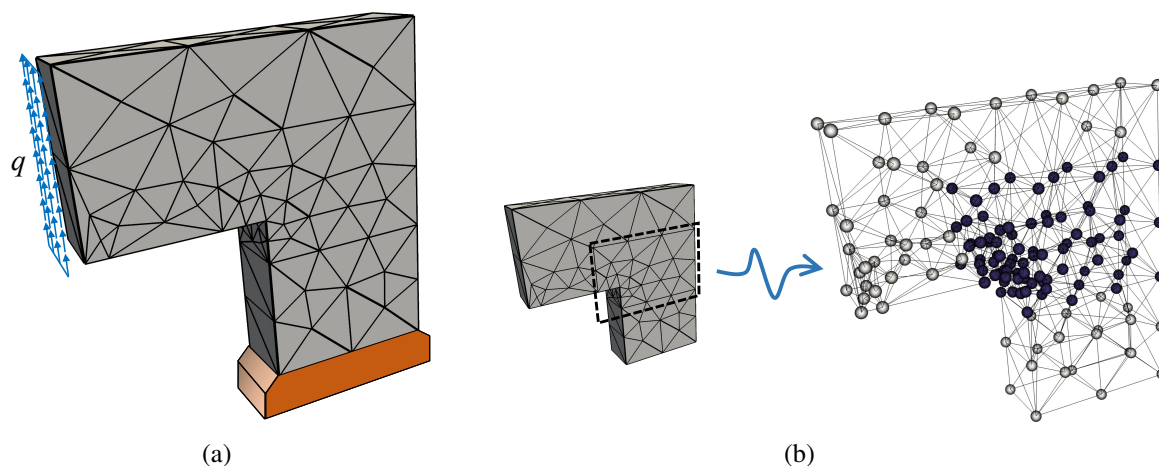


Figura 5.38 – Malha de 445 elementos finitos para chapa L - 3D: (a) condições de contorno; (b) estratégia de enriquecimento.

Observa-se na Fig. 5.39 que o valor de ( $P_{max}$ ) das curvas  $P - d$  são melhor representados conforme o grau polinomial do enriquecimento aplicado aumenta em uma mesma malha, apresentando valores próximos ao da referência com malha refinada. Observa-se um ganho de rigidez, devido sobretudo ao tamanho dos elementos danificados (um volume muito grande que dificulta uma perfeita captura do amolecimento).

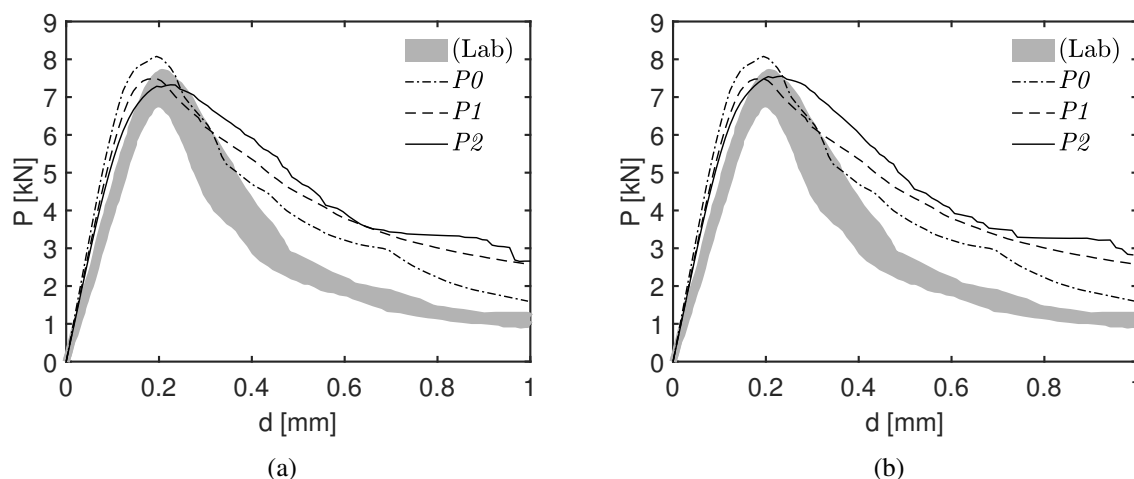


Figura 5.39 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas com MEFG: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

A Fig. 5.40 e a Fig. 5.41 mostram a avaliação da eficiência computacional das simulações com as estratégias  $Pol^c$  e  $Pol^i$ . Na Fig. 5.40 observa-se que o  $N^{it}$  nas simulações com enriquecimento é menor que  $P0$  no caso  $P1$  e em boa parte do processo na simulação com  $P2$ . Da mesma forma observa-se nesse caso maior proximidade com a referência (sendo que esta última apresenta malha mais refinada com cerca de 108 vezes mais elementos). Portanto, o processamento com o MEFG mostrou-se eficiente. Isso enaltece o potencial do método que, além da capacidade

de conferir melhor acurácia aos resultados de tensão e deformação em simulações com malhas grosseiras, demonstrou fazê-lo com eficiência computacional satisfatória.

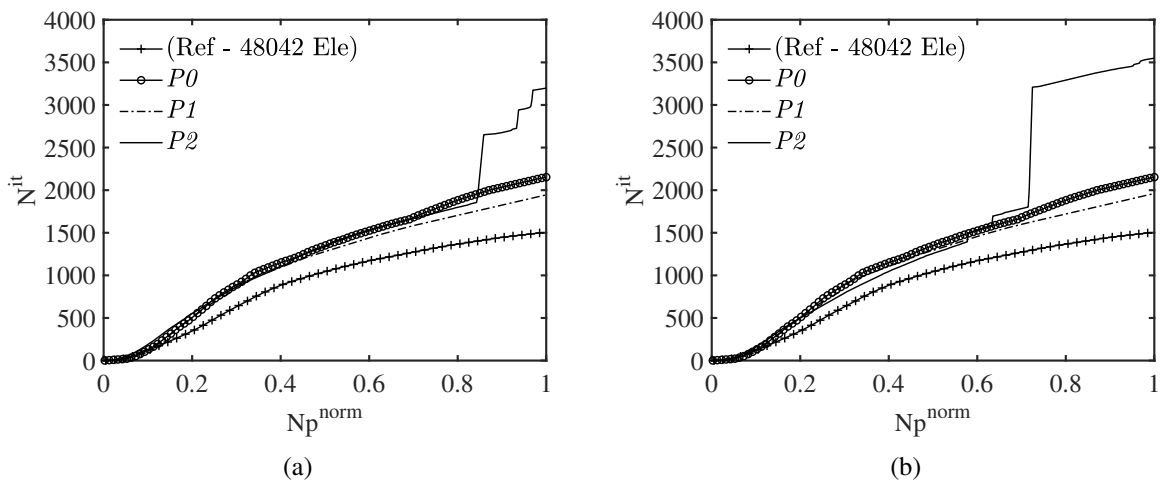


Figura 5.40 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado para chapa L: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

É possível notar na Fig. 5.41 que o  $GDL^{proc}$  foi superior nas simulações com maior grau polinomial de enriquecimento haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o conjunto. Pelo mesmo motivo as simulações que utilizam a estratégia  $Pol^c$  apresentaram um  $GDL^{proc}$  superior àquelas que utilizaram  $Pol^i$ . Contudo, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência com a malha refinada, visto que todas as simulações com MEF $G$  apresentaram  $GDL^{proc}$  bem menor.

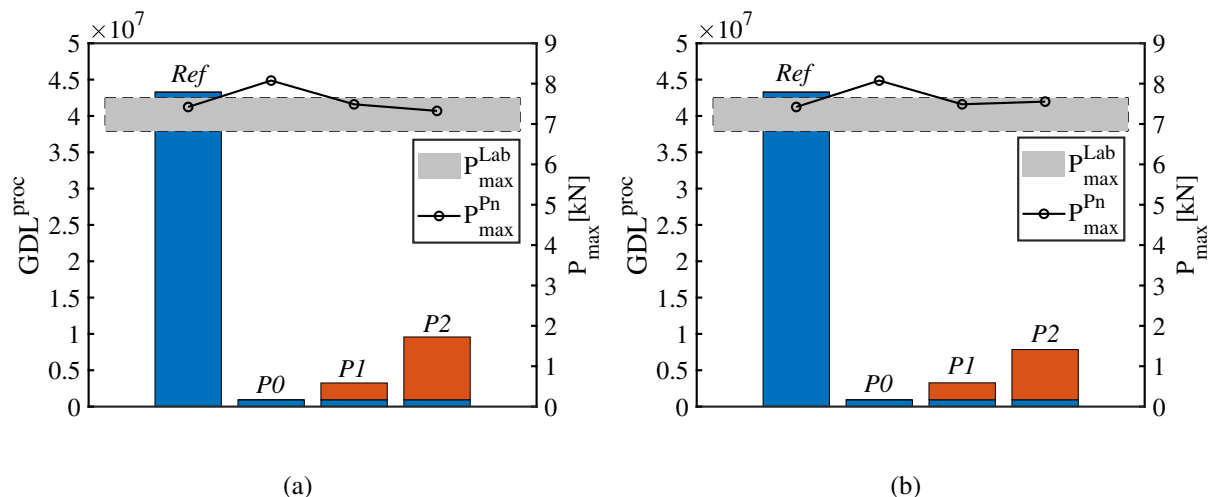


Figura 5.41 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado para chapa L: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 5.42) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001). Observa-se ainda que ocorre um melhor mapeamento do dano nas simulações com a estratégia  $Pol^c$ . Isso ocorre devido o maior

refinamento  $p$ . Por fim, destaca-se que o mapeamento do dano nas simulações com MEFG apresentou qualidade superior a do MEF ( $P0$ ).

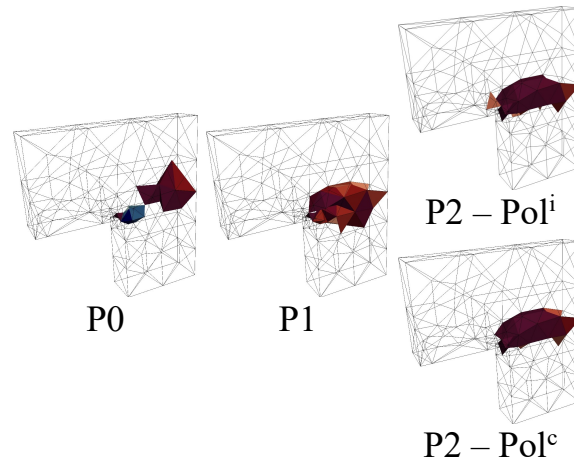


Figura 5.42 – Distribuição de dano com diferentes polinômios de enriquecimento - malha de 445 elementos.

#### 5.5.2.2 - Simulações com MEFG/S modificado

Na Fig. 5.43 são apresentados os resultados de  $P-d$ . Percebe-se que as curvas referentes às simulações com enriquecimento tem comportamento melhor que o caso  $P0$ . Os resultados mostram que o MEFG/S<sup>mod</sup> foi capaz de representar razoavelmente bem o valor de ( $P_{max}$ ) observado no ensaio experimental.

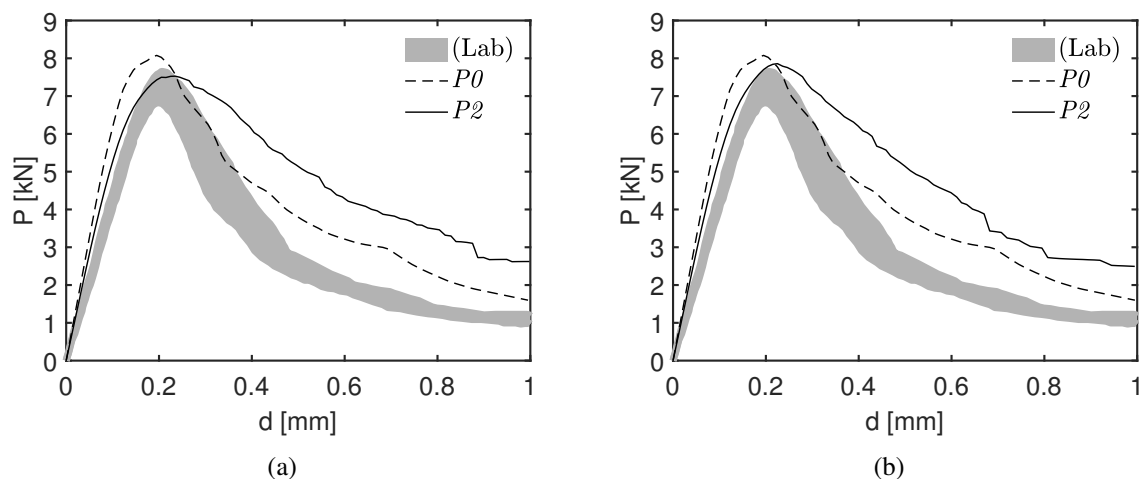


Figura 5.43 – Curvas  $P - d$  experimentais e numéricas com MEFG/S<sup>mod</sup>. (a) Pol<sup>c</sup>; (b) Pol<sup>i</sup>.

Na Fig. 5.44 observa-se que o  $N^{it}$  nas simulações com enriquecimento é menor que  $P0$  em boa parte do processo na situação com estratégia Pol<sup>c</sup>. Da mesma forma observa-se nesse caso maior proximidade com a referência. Contudo, diferente do apresentado na Fig. 5.40 nota-se um maior deslocamento do ensaio com estratégia Pol<sup>i</sup> em relação ao modelo de referência (Fig. 5.44(b)).

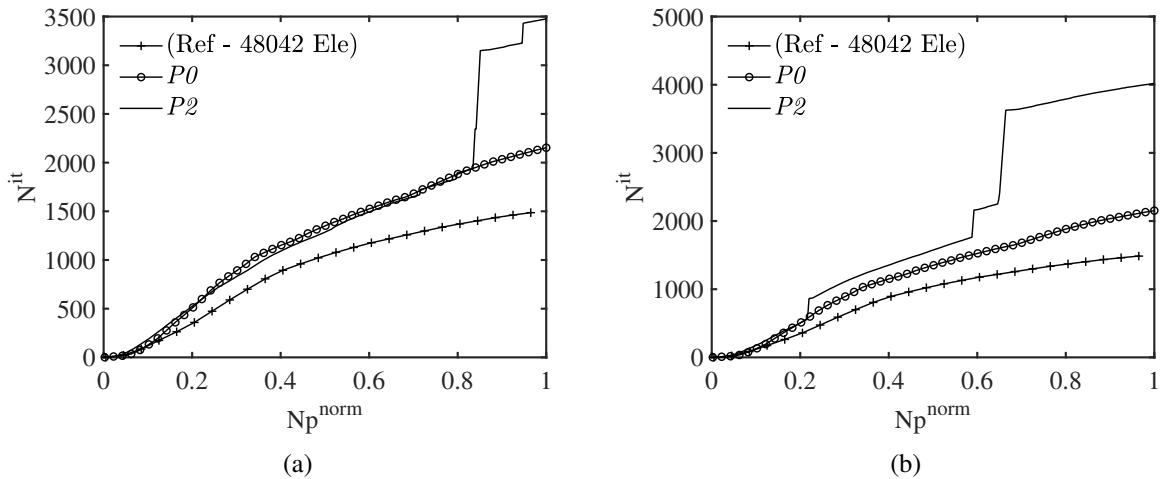


Figura 5.44 – Comparação do  $N^{it}$  normalizado para chapa L: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

A Fig. 5.45 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações tanto para a estratégia  $Pol^c$  como  $Pol^i$ . É possível notar que o  $GDL^{proc}$  foi superior nas simulações que utilizam a estratégia  $Pol^c$  haja vista haver um quantidade maior de polinômios compondo o vetor de enriquecimento. Contudo, observa-se que ambas as estratégias mostraram-se eficientes frente à simulação de referência com a malha refinada, visto que todas as simulações com MEFG/ $S^{mod}$  apresentaram  $GDL^{proc}$  menor.

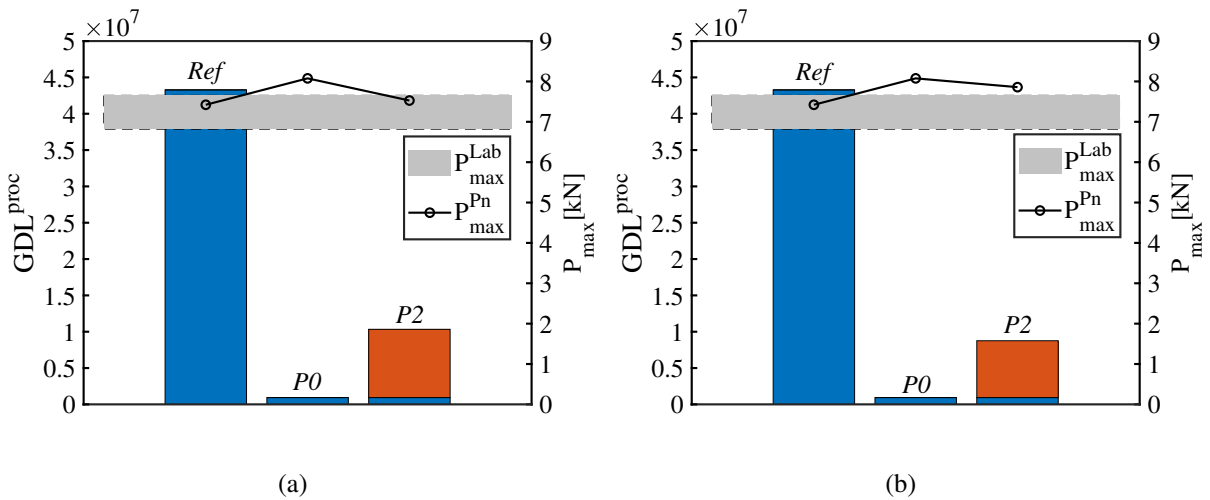


Figura 5.45 – Comparação do  $GDL^{proc}$  normalizado para chapa L: (a)  $Pol^c$ ; (b)  $Pol^i$ .

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 5.46) nota-se que a danificação apresentou comportamento dentro do esperado em função do resultado experimental apresentado por Winkler *et al.* (2001). Observa-se ainda que ocorre uma melhor mapeamento do dano na simulação com enriquecimento, haja vista o dano ter se concentrado mais na zona de falha nesses casos. Sendo a malha muito grosseira para uma simulação de fratura 3D considera-se estes resultados um excelente indicativo da capacidade do MEFG/ $S^{mod}$  para simular problemas dessa natureza.

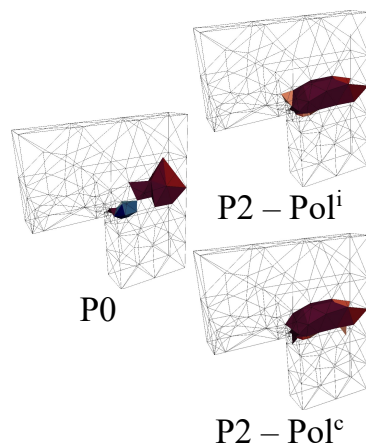


Figura 5.46 – Distribuição de dano em função do enriquecimento - malha de 445 elementos.

## 5.6 - CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados os resultados de simulações utilizando o MEF $G$  e o MEF $G/S$  como metodologia de resolução do sistema de problemas de fratura no espaço  $3D$ . Toda a implementação foi realizada no programa *LACHESIS* desenvolvido pelo grupo de pesquisa *NEXUM* em C++. Esta etapa trata-se da continuação do trabalho desenvolvido em Paiva *et al.* (2016) e Paiva (2017) onde fora abordado apenas o espaço  $2D$ . Notou-se, o grande potencial dos métodos generalizados em questão para resolver PVC  $3D$ , garantindo amplo espaço para crescimento e desenvolvimento desta linha de pesquisa.

Foram apresentadas situações de modo I e misto de fratura, com modelo de dano contínuo onde foi possível observar que o MEF $G$  e o MEF $G/S$  cumpriram satisfatoriamente o objetivo de garantir boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento, mesmo utilizando malhas relativamente grosseiras.

Ressalta-se que nas situações de modo misto o MEF $G/S$  demonstrou qualidade insatisfatória na análise dos problemas envolvendo estruturas em danificação. Para isso foi proposto o MEF $G/S^{mod}$  como alternativa. Com essa modificação a melhora dos resultados foi substancial. Como sugestão para trabalhos futuros, a avaliação de estratégias diferentes na construção dos vetores de enriquecimento do MEF $G/S$  pode ser uma boa linha de pesquisa. Bem como a implementação da abordagem global-local  $3D$ .

Na busca por tornar o *LACHESIS* ainda mais eficiente, foi implementado no contexto dessa tese a abordagem global-local  $2D$  com enriquecimento polinomial. Tema que será discutido no Cap. 6.



## 6 - MEF/S GLOBAL-LOCAL

### 6.1 - INTRODUÇÃO

O MEF convencional apresenta limitações e perda de eficiência diante de problemas como propagação de trincas, descontinuidades materiais ou interfaces, etc. As dificuldades tornam-se maiores ao lidar com análises tridimensionais (sobretudo a geração de malhas com número elevado de elementos e o remalhamento em problemas com propagação de trincas). Nesse contexto, o MEF/S foi proposto com o objetivo de superar tais obstáculos.

Conforme visto nos capítulos anteriores, a formulação do MEF/S é uma extensão do sistema de equações do MEF convencional. Deste modo, a melhor estratégia de implementação é a ampliação de um código de MEF existente. O mau condicionamento do sistema de equações do MEF/S pode tornar-se especialmente problemático em análises não lineares 3D (devido erros de arredondamento) causando problemas de convergência no processo iterativo de solução do sistema (Lang *et al.*, 2014). Também em simulações bidimensionais é possível observar essas circunstâncias (Béchet *et al.*, 2005a; Laborde *et al.*, 2005; Chahine *et al.*, 2008; Chevaugon *et al.*, 2015).

Como o enriquecimento é realizado em regiões específicas do domínio, surgem os elementos de transição (*blending elements*) que são parcialmente enriquecidos. É possível que eles sejam responsáveis pela adição de termos parasitários (Fries e Belytschko, 2010) na aproximação que podem ser a causa do mau condicionamento matricial mencionado anteriormente. Deste modo, os elementos de transição prejudicam o desempenho do MEF/S devido a incapacidade de reproduzir com exatidão as funções de enriquecimento. Ao longo do tempo foram propostas algumas abordagens para solucionar as questões apresentadas anteriormente (Chessa *et al.*, 2003; Fries, 2008; Gracie *et al.*, 2008; Shen e Lew, 2009; Ventura *et al.*, 2009). A implementação de alternativas em softwares existentes de MEF/S, com a finalidade de contornar as deficiências apontadas não é simples e a convergência ideal não é garantida (Aragón *et al.*, 2008).

O MEF Generalizados/Estabilizado (MEF/S) apresenta uma alternativa para tais questões relacionadas à malha e ao comportamento complexo da solução e, por isso, tem atraído o interesse de muitos pesquisadores Agathos *et al.* (2016), Malekan e Barros (2016), Zhang *et al.* (2016), Oliveira *et al.* (2019), Lins *et al.* (2019), Novelli *et al.* (2020) e Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2021). Originalmente proposto por Babuška e Banerjee (2011) e Babuška e Banerjee (2012), o MEF/S foi expandido à mecânica de fratura 2D e 3D em Gupta *et al.* (2013a) e Gupta *et al.* (2015), respectivamente. Em ambos os trabalhos, o número da condição da matriz de rigidez no MEF/S apresentou mesma ordem que no MEF. Conforme mencionado anteriormente, o método baseia-se em uma modificação na estratégia de enriquecimento empregada no MEF tradicional, que consiste na subtração da parcela de interpolação linear (ou bilinear) da função de enriquecimento.

As funções enriquecedoras (polinomiais ou não) multiplicadas pelas funções PU, aumentam a base de aproximação do elemento finito existente, expandindo o espaço da solução (Strouboulis *et al.*, 2000a). Outro tipo de enriquecimento utilizado é a função Heaviside, para descrever um

campo descontínuo, devido à sua capacidade de reproduzir adequadamente a abertura de trincas (como em Evangelista Jr. e Moreira (2020) e Evangelista Jr. *et al.* (2020), por exemplo). O uso dessa função, contudo, pode tornar-se ineficiente especialmente quando a malha é grosseira, ainda que apresente resultados satisfatórios para muitos problemas (Duarte e Kim, 2008).

A fim de contornar tais deficiências, sem a necessidade de excessivo refinamento da malha próxima à região da trinca, foi desenvolvida uma abordagem que permite a opção de criar enriquecimentos personalizados mediante a utilização de um espaço do problema (subdomínio de interesse retirado do modelo global) resolvido separadamente (Duarte e Kim, 2008; Malekan *et al.*, 2018; Evangelista Jr. *et al.*, 2020; Li *et al.*, 2022). A aplicação da estratégia global-local incorporada ao MEF<sub>G</sub>/X foi posteriormente aplicado para problemas 3D em outras pesquisas (Pereira *et al.*, 2012; O’Hara *et al.*, 2016; Li e Duarte, 2018). Segundo Duarte e Kim (2008) e Kim *et al.* (2009). O MEF<sub>G</sub>/X quando aplicado à técnica global-local, permite alcançar boa convergência da solução sem comprometer o desempenho computacional, demonstrando sua aplicabilidade e eficiência em vários cenários. Diante do avanço das pesquisas envolvendo análise multiescala, trabalhos recentes combinaram o MEF<sub>G</sub>/S à técnica global-local (Fonseca *et al.*, 2020; Novelli *et al.*, 2020; Santos e Barros, 2020).

Nesta pesquisa, o Método dos Elementos Finitos Generalizados e Estabilizados com funções de enriquecimento Global-Local (MEFG/S<sup>g-l</sup>) foi utilizado para a análise de estruturas em danificação e propagação de trincas, utilizando o modelo de dano (C) e (C-D) propostos em Evangelista Jr. e Moreira (2020). A estratégia adotada nesta pesquisa foi a seguinte: o domínio de interesse (espaço local) é analisado de maneira não linear; a solução do problema local é então utilizada para enriquecer o domínio global que é, então, resolvido de maneira linear. O mesmo procedimento foi adotado em (Evangelista Jr. *et al.*, 2020) onde os autores aplicaram a estratégia global-local ao MEF<sub>G</sub> utilizando apenas um modelo de dano contínuo.

## 6.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

As equações de equilíbrio do problema, considerando o domínio  $V$  com contorno  $\Gamma$  (decomposto como  $\Gamma = \Gamma^u \cup \Gamma^t$ , sendo  $\Gamma^u \cap \Gamma^t = \emptyset$ ) e, sem levar em consideração as forças inerciais, são definidas conforme segue:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad \text{in } V \quad (6.1a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{in } V \quad (6.1b)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensão de Cauchy;  $\bar{\mathbf{b}}$  são as forças de corpo;  $\mathbf{C}$  é o tensor de Hooke;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o tensor de pequenas deformações. As Condições de Contorno (CC) prescritas em  $\Gamma$  são:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma^u \quad (6.2a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma^t \quad (6.2b)$$

sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal unitário externo a  $\Gamma$ ; os vetores de carregamento  $\bar{\mathbf{t}}$  e de deslocamento  $\bar{\mathbf{u}}$  são as CC prescritas em  $\Gamma^t$  e  $\Gamma^u$ , respectivamente.

### 6.3 - REVISÃO DA LITERATURA

A metodologia global-local, inicialmente proposta por Noor (1986) e Ransom e Knight (1990), é uma técnica híbrida de modelagem e análise. Tem como principal objetivo a redução do custo e/ou do tempo para a resolução de problemas mecânicos não convencionais (especialmente análises não lineares). Segundo Noor (1986), as diferentes abordagens para reduzir o custo computacional da resolução de problemas não lineares podem ser agrupadas em três níveis diferentes: i) aquelas referentes à modelagem, que focam na utilização de modelos simples para capturar os principais efeitos nas respostas, explorando a simetria do problema; ii) aquelas relacionadas com as estratégias computacionais baseadas no conhecimento prévio do comportamento físico da estrutura (informação levada em conta no processo de modelagem); iii) o terceiro nível é o dos algoritmos numéricos, que busca desenvolver sequências de operações mais eficientes para a solução das equações.

Em Duarte *et al.* (2005) e Duarte e Kim (2008) os autores combinaram conceitos do MEF global-local com a abordagem de partição da unidade, propondo o MEF $G^g-l$ . Esta metodologia foi aplicada com sucesso em simulações de problemas complexos, incluindo fratura linear elástica (Kim *et al.*, 2008; Kim *et al.*, 2009; Pal e Rajagopal, 2014), plasticidade confinada (Kim, 2012), fratura não-linear (Gupta *et al.*, 2013b), fratura coesiva (Kim e Duarte, 2015), transferência de calor (O'Hara *et al.*, 2009; O'Hara *et al.*, 2012), pontos de solda (Li e Duarte, 2018; Li *et al.*, 2021; Li *et al.*, 2022), propagação de ondas (Schweitzer e Wu, 2014), dano contínuo (Evangalista Jr. *et al.*, 2020), entre muitos outros. Diante disso, fica evidente a versatilidade da abordagem, visto que pode ser utilizada para analisar problemas de naturezas diversas.

De maneira semelhante ao apresentado por Duarte *et al.* (2005), o algoritmo geral do processo utilizado nesta pesquisa segue os seguintes passos: (i) Resolve-se o problema global - o Problema Global Inicial Linear ( $P_G^{IL}$ ); (ii) utiliza-se a solução do problema global para prescrever as CC para o Problema Local Não Linear ( $P_L^{NL}$ ); (iii) a solução obtida em (ii) é utilizada para construir as funções de enriquecimento para o Problema Global Enriquecido Linear ( $P_G^{EL}$ ); (iv) transferência das variáveis escalares de dano ( $D_{GL}^k$ ) para o  $P_G^{EL}$  e aplicação do enriquecimento global-local nos nós com as funções construídas a partir da solução da etapa anterior; (v) resolve-se o  $P_G^{EL}$ ; (vi) retorna-se para o procedimento (ii) e o processo é repetido até o ultimo passo de carga - a cada nova iteração a solução global da etapa (v) é utilizada para estabelecer as CC's em (ii). Deste modo, nota-se que o procedimento (i) só é necessário no primeiro passo da simulação.

O procedimento global local aplicado nesta pesquisa para construir as funções de enriquecimento é semelhante ao introduzido por Kim *et al.* (2009). A principal ideia é criar as funções enriquecedoras numericamente, a fim de descrever com qualidade o comportamento não linear localizado e, então, utilizá-las para enriquecer o espaço global da solução (Kim, 2012). Convém convencionar os subscritos G e L para representar os problemas globais e locais, respectivamente. A seguir serão descritos com mais detalhes o  $P_G^{IL}$ , o  $P_L^{NL}$  e o  $P_G^{EL}$ . O processo completo é ilustrado pela Fig. 6.1.

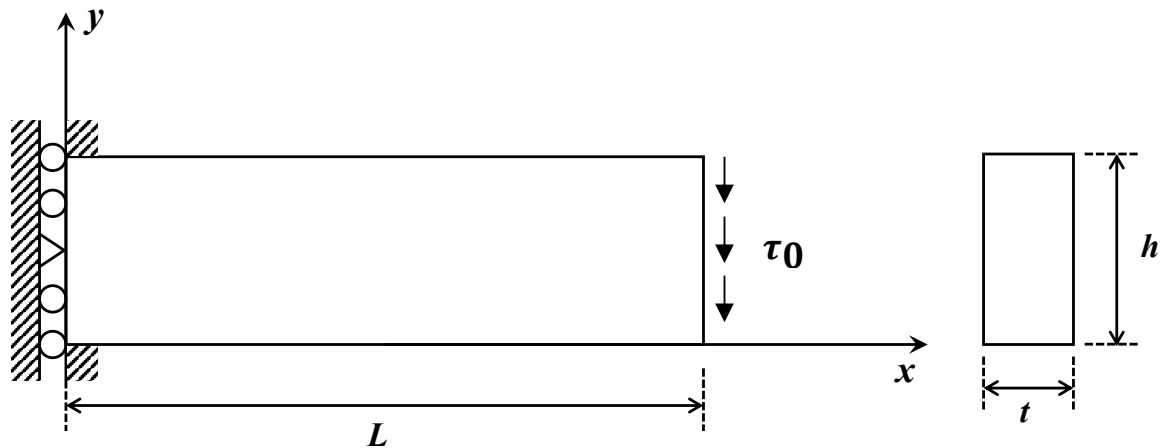


Figura 6.1 – Etapas do procedimento MEFG/S<sup>g-l</sup> para análise não linear.

Nesta tese, a nomenclatura MEFG/S<sup>g-l</sup> faz referência à combinação das funções de enriquecimento do MEFG/S, apresentadas inicialmente por Babuška e Banerjee (2012) (nesta pesquisa foram utilizadas funções polinomiais e a Heaviside) com a metodologia global-local proposta por Noor (1986). Conforme os capítulos precedentes, para o MEFG/S foram utilizadas as funções polinomiais sintetizadas pela Eq. (2.14).

Para as análises não-lineares de dano, além da utilização da versão estabilizada do MEFG, foi proposta uma modificação e uma expansão em relação àquilo que foi apresentado em Evangelista Jr. *et al.* (2020), a saber: (i) a atualização do dano a partir da solução convergida do  $P_G^{EL}$ ; (ii) utilização da metodologia global-local com o modelo de dano Contínuo-Descontínuo comentado brevemente na Sec. 2.3.2 e utilizado nas análises de descontinuidade forte em capítulos anteriores; (iii) também foi analisada a aplicação da estratégia global-local, utilizando o enriquecimento do MEFG/S com a *PU flat-top*, conforme a abordagem desenvolvida e detalhada no Cap. 3.

## 6.4 - METODOLOGIA

De maneira geral a metodologia adotada para elaboração deste capítulo da tese seguiu os seguintes passos: revisão da literatura (através da pesquisa e leitura de artigos relevantes); implementação computacional no programa de análise numérica *Lachesis* desenvolvido pelo grupo de pesquisa em C++ e cuja estrutura geral é apresentada pela Fig. 2.6; verificação e validação através da comparação com resultados numéricos conhecidos e com referências experimentais consagradas, respectivamente. Detalhes sobre a parte numérica da implementação serão abordados a seguir.

### 6.4.1 - Sobre o Problema Global Inicial Linear - $P_G^{IL}$

Dado o domínio  $V_G$  com contorno  $\Gamma_G$ , sendo os vetores de carregamento  $\bar{t}$  e de deslocamento  $\bar{u}$  as CC prescritas em  $\Gamma_G^t$  e  $\Gamma_G^u$ , respectivamente. A aproximação da solução obtida pelo MEF (ou MEFG/S) convencional, assumindo uma relação constitutiva elástico linear, definido nas

Eqs. (6.1a) à (6.2b) é denominado  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$ . Na Fig. 6.1 corresponde à solução do  $P_G^{IL}$  e é obtida solucionando a Eq. (6.3) a seguir.

Encontrar  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1} \in \mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(V_G) \subset H^1(V_G) \quad | \quad \forall \boldsymbol{\nu}_{G,0}^{k-1} \in \mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(V_G)$

$$\int_{V_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu}_{G,0}^{k-1}) dV + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \mathbf{u}_{G,0}^{k-1} \boldsymbol{\nu}_{G,0}^{k-1} d\Gamma = \int_{\Gamma_G^t} \mathbf{t}^{-k-1} \boldsymbol{\nu}_{G,0}^{k-1} d\Gamma + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \mathbf{u}^{-k-1} \boldsymbol{\nu}_{G,0}^{k-1} d\Gamma \quad (6.3)$$

onde  $\boldsymbol{\nu}_{G,0}^{k-1}$  são os deslocamentos virtuais;  $\mathbf{X}_{G,0}^{k-1}$  é a discretização do espaço de Hilbert  $H^1(V_G)$  definido em  $V_G$ , construído com as funções de forma do MEF (ou MEFG/S) convencional. Nesta pesquisa, as CC de Dirichlet foram impostas pelo Método da Penalidade (sendo  $\eta^*$  o parâmetro de penalidade), escolhido devido sua simplicidade de implementação e generalidade. O espaço  $\mathbf{X}_{G,0}^{k-1}$  é representado pela seguinte equação:

$$\mathbf{X}_{G,0}^{k-1}(V_G) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_G} \sum_{i=1}^{D_L} \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\alpha i}^{k-1} L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \right\} \quad (6.4)$$

onde  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$  são os graus de liberdade. O problema apontado na Eq. (6.3) leva a um sistema de equações lineares para os graus de liberdade desconhecidos de  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$ . Segundo Kim *et al.* (2008), a malha utilizada para resolver o problema da Eq. 6.3 é tipicamente uma malha de elementos finitos quase uniforme, no caso do MEFG/S, com poucos elementos.

#### 6.4.2 - Sobre o Problema Local Não Linear - $P_L^{NL}$

Aqui procura-se obter a solução  $\mathbf{u}_L^k$  de um PVC local definido em  $V_L$  que é um subdomínio de  $V_G$ . O comportamento não linear do material é avaliado nesta etapa. Conforme pode ser visto na Fig. 6.1, o problema é resolvido no subdomínio  $V_L$ , submetido preliminarmente à CC  $\mathbf{u}_{G,0}^{k-1}$  concedida pelo  $P_G^{IL}$  no passo de carga  $(k-1)$ . Nos demais passos de carga  $k$  estabelece-se a CC  $\mathbf{u}_{G,0}^k$ , fornecida pelo  $P_G^{EL}$  (discutido à frente). Na Fig. 6.1,  $\mathbf{u}_L^k$  corresponde à solução do  $P_L^{NL}$  e é obtida solucionando a Eq. (6.5) a seguir.

Encontrar  $\mathbf{u}_L^k \in \mathbf{X}_L^k(V_L) \subset H^1(V_L) \quad | \quad \forall \boldsymbol{\nu}_L^k \in \mathbf{X}_L^k(V_L)$

$$\begin{aligned} & \int_{V_L} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L^k) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu}_L^k) dV + \eta^* \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \mathbf{u}_L^k \boldsymbol{\nu}_L^k d\Gamma + \rho \int_{\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} \mathbf{u}_L^k \boldsymbol{\nu}_L^k d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^t} \bar{\mathbf{t}}^k \boldsymbol{\nu}_L^k d\Gamma + \eta^* \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \bar{\mathbf{u}}^k \boldsymbol{\nu}_L^k d\Gamma + \int_{\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{G,0}^k) \eta + \rho \mathbf{u}_{G,0}^k) \boldsymbol{\nu}_L^k d\Gamma \end{aligned} \quad (6.5)$$

sendo o parâmetro  $\rho$  uma rigidez de mola definida no contorno  $\Gamma_L / (\Gamma_L \cap \Gamma_G)$  do  $P_L^{NL}$  (Fig. 6.1) e  $\mathbf{X}_L^k$  a discretização do espaço de Hilbert  $H^1(V_L)$  definido em  $V_L$ , construída com as funções de forma do MEF (ou MEFG/S) convencional, conforme segue:

$$\mathbf{X}_L^k(V_L) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{D_L} \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\alpha i}^k L_{\alpha i}(\mathbf{x}) \right\} \quad (6.6)$$

onde  $\mathbf{u}_{\alpha i}^k$  representa os graus de liberdade nodais no passo de carga  $k$ ;  $\varphi_\alpha$  as funções de forma definidas no domínio  $V_L$ . É possível selecionar o tipo de CC fornecidas por  $\mathbf{u}_{G,0}^k$ , dependendo da escolha de  $\rho$ . Define-se  $\kappa = \eta^* \gg 1$ , visto que a solução  $\mathbf{u}_{G,0}^k$  do  $P_G^{EL}$  é utilizada como CC de Dirichlet em  $\Gamma_L/(\Gamma_L \cap \Gamma_G)$  e é obtido por uma estimativa da solução no  $P_G^{EL}$  no passo de carga  $k$  e é definida conforme segue:

$$\mathbf{u}_{G,0}^k = \frac{k}{k-1} \mathbf{u}_G^{k-1} \quad (6.7)$$

O  $P_L^{NL}$  do passo  $k+1$  incorpora a resposta não linear do  $P_G^{EL}$  convergido. Para isso, o seguinte modelo constitutivo é aplicado na Eq. (6.5)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L^k) = (1 - D_{GL}^k) \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_L^k) \quad (6.8)$$

sendo  $D_{GL}^k$  a variável escalar de dano e  $\mathbf{C}_0$  o tensor constitutivo não danificado. O modelo de dano utilizado é proposto por Evangelista Jr. e Moreira (2020) detalhado na Sec. 2.3.1. Como eles, nesta tese o problema não linear é resolvido através do Método Secante. Deste modo a matriz de rigidez secante pode ser determinada utilizando o módulo elástico danificado  $(1 - D_{GL}^k) \mathbf{C}_0$ .

### 6.4.3 - Sobre o Problema Global Enriquecido Linear $P_G^{EL}$

A solução  $u_L^k$  é utilizado para criar numericamente as funções de enriquecimento global local para o passo de carga vigente  $k$ . Destaca-se que o procedimento iterativo para resolver a solução não linear ocorre apenas no  $P_L^{NL}$ . O produto entre  $u_L^k$  e a PU do elemento gera a função de forma do problema global enriquecido, conforme segue:

$$\phi_{\alpha i}^k = \varphi_{\alpha i} u_{\beta i}^{gl,k} \quad (6.9)$$

onde  $i = 1, \dots, q$ , representa o número de funções enriquecedoras. Obviamente esta função se atualiza a cada passo de carga, visto que depende da solução  $u_L^k$  obtida no  $P_L^{NL}$  e é avaliada em cada nó  $x_\alpha$  enriquecido, do mesmo modo que o ilustrado na Fig. 2.3. o  $P_G^{EL}$  é definido a seguir.

Encontrar  $\mathbf{u}_G^k \in \mathbf{X}_G^k(V_G) \subset H^1(V_G) \quad | \quad \forall \boldsymbol{\nu}_G^k \in \mathbf{X}_G^k(V_G)$

$$\int_{V_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G^k) \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\nu}_G^k) dV + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \mathbf{u}_G^k \boldsymbol{\nu}_G^k d\Gamma = \int_{\Gamma_G^t} \bar{\mathbf{t}} \boldsymbol{\nu}_G^k d\Gamma + \eta^* \int_{\Gamma_G^u} \bar{\mathbf{u}} \boldsymbol{\nu}_G^k d\Gamma \quad (6.10)$$

em que  $\mathbf{X}_G^k(V_G)$  é o mesmo espaço global do passo  $k-1$  ( $\mathbf{X}_G^{k-1}(V_G)$ ) porém, enriquecido com a função  $u_L^k$ , conforme Eq. (6.9) e pode ser definido como:

$$\mathbf{X}_G^k(V_G) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{N_G} \sum_{i=1}^{D_L} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\alpha i}^k L_{\alpha i}(\mathbf{x}) + \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{J}}_{gl}} \varphi_\beta(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\beta^{gl,k}(\mathbf{x}) \right\} \quad (6.11)$$

sendo  $\tilde{\mathcal{J}}_{gl}$  o conjunto dos nós enriquecidos pelas funções  $u_L^k$  e,  $\mathbf{u}_\beta^{gl,k}$  definido como:

$$\mathbf{u}_\beta^{gl,k}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\beta j}^k \mathbf{u}_{Lj}^k(\mathbf{x}) \quad (6.12)$$

onde  $\mathbf{u}_{\beta_j}^k$  são os graus de liberdade associados ao enriquecimento global local;  $j = 1, 2$  para o espaço  $2D$ ;  $\beta$  indica os nós enriquecidos por  $u_L^k$ ;  $\mathbf{u}_{Lj}^k(\mathbf{x})$  são os componentes cartesianos do vetor  $\mathbf{u}_L^k$  mencionado na Sec. 6.4.2.

Por fim, o  $P_G^{EL}$  recebe a informação de dano ( $D_{GL}^k$ ) do  $P_L^{NL}$  convergido no momento da integração numérica. Para este procedimento, é importante que a malha local esteja aninhada na malha global a fim de garantir que as variáveis obtidas no problema local sejam transferidas com exatidão ao espaço global correspondente. A transferência de  $D_{GL}^k$  é garantida através da relação constitutiva de dano contínuo mencionado na Eq. (6.8) nos respectivos pontos de integração da malha do problema global. A Fig. 6.2 ilustra esse processo.

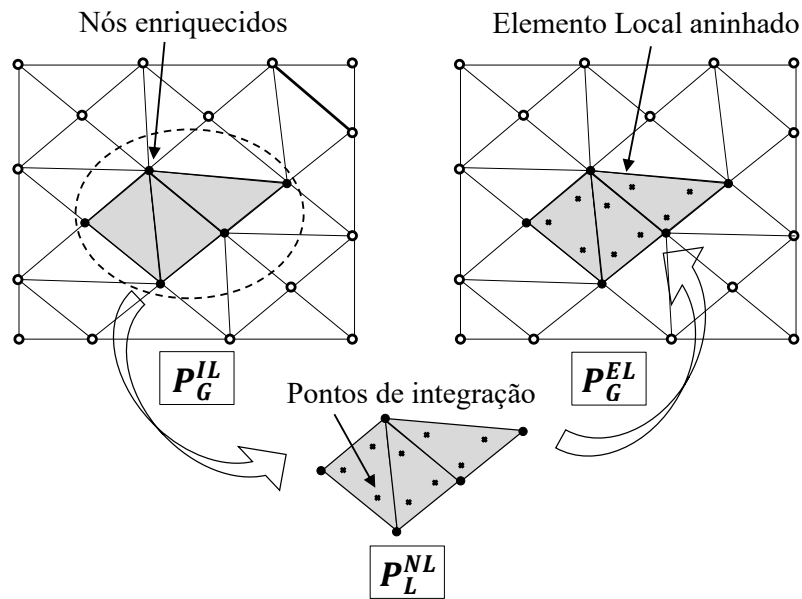


Figura 6.2 – Estratégia de integração e transferência da variável  $D_{GL}^k$  em locais com enriquecimento global local.

Segundo Duarte e Kim (2008), a integração das funções de enriquecimento global local pode ser feita exatamente usando as malhas dos problemas locais que são aninhados na malha global. Deste modo, a grande qualidade da estratégia é permitir a simulação linear de problemas não lineares em escala global (estrutural), valendo-se da simulação de apenas partes destes com escala refinada (o refinamento pode ser  $p$  e/ou  $h$ ) e as demais sem grande refinamento. a Fig. 6.3 apresenta um fluxograma que resume as etapas do MEFG/ $S^{g-l}$  nas análises não lineares.

A diferença do procedimento desta tese em relação ao que foi adotado em Evangelista Jr. *et al.* (2020) está na atualização da variável de dano utilizando a solução  $\mathbf{u}_G^k$  obtida no  $P_G^{EL}$ . No trabalho dos referidos autores, o  $P_L^{NL}$  no passo  $k+1$  recebe a mesma informação de dano  $D_{GL,1}^k$  que é transferida para o  $P_G^{EL}$  no passo  $k$ . Nesta tese, após resolvido o  $P_G^{EL}$  no passo  $k$  o dano é recalculado (o que não ocorre no trabalho de Evangelista Jr. *et al.* (2020)) e é esse valor  $D_{GL,2}^k$  que é, então, transferido para o  $P_L^{NL}$  no passo  $k+1$ .

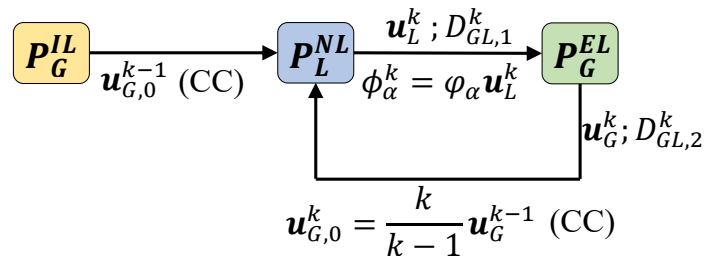


Figura 6.3 – Fluxograma geral do Mefg/S<sup>g-l</sup>.

Ressalta-se que no  $P_G^{EL}$  o sistema é resolvido de maneira linear, sem a necessidade de procedimento iterativo para não linearidade. A Fig. 6.4 ilustra o fluxograma do LACHESIS ao trabalhar com a metodologia Mefg/S<sup>g-l</sup>.

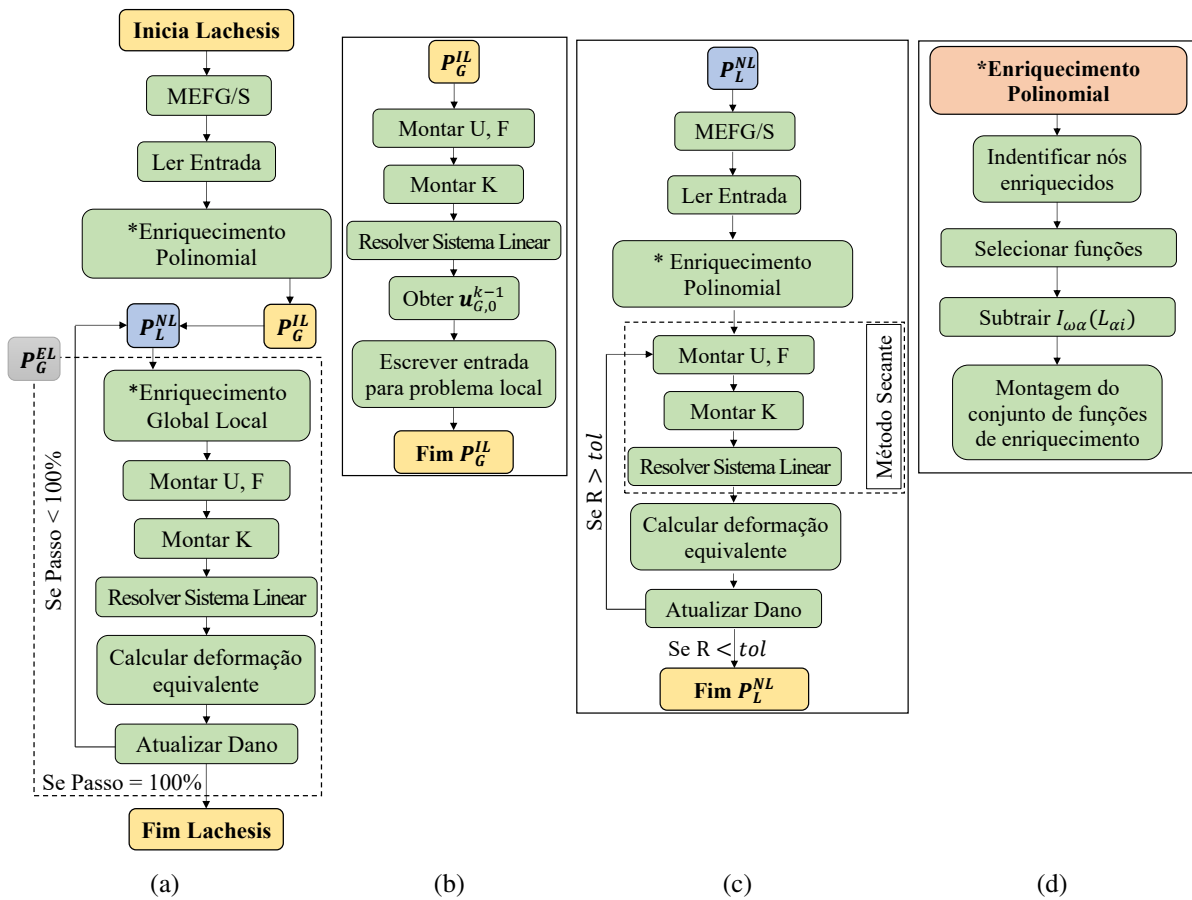


Figura 6.4 – Fluxograma do LACHESIS para o Mefg/S<sup>g-l</sup>: (a) visão geral e  $P_G^{EL}$ ; (b)  $P_G^{IL}$ ; (c)  $P_L^{NL}$ ; (d) detalhe do processo de enriquecimento polinomial.

A Fig. 6.5 apresenta as etapas do processo Mefg/S<sup>g-l</sup> aplicando o modelo de dano C-D. Sendo assim, os elementos cortados pela trinca podem ter os três tipos de enriquecimento que são abordados nesta tese: o polinomial, o descontínuo e o global-local.



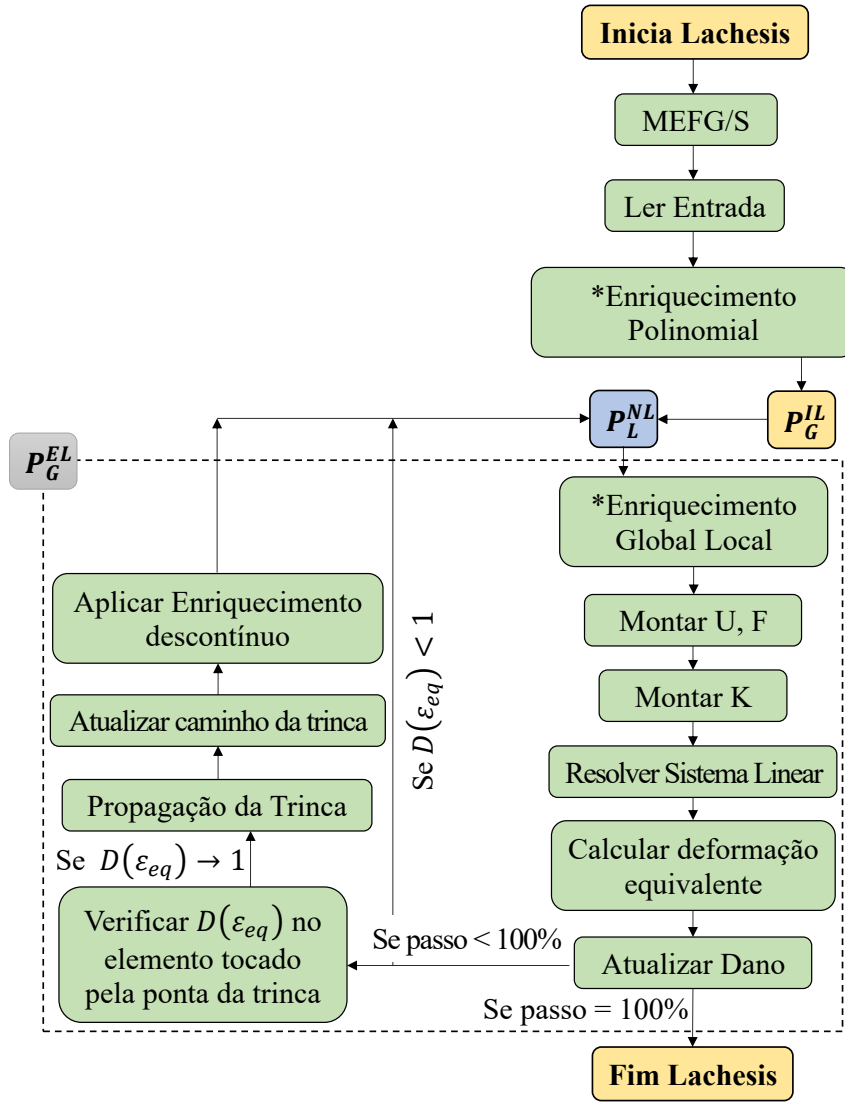


Figura 6.5 – Fluxograma geral do MEFG/S<sup>g-l</sup> com modelo de dano C-D.

Neste caso, a matriz de rigidez global do problema assume a seguinte configuração:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} & \mathbf{K}_{ac} & \mathbf{K}_{ad} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bd} \\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cb} & \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cd} \\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{db} & \mathbf{K}_{dc} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{aa} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \mathbf{K}_{bc} &= \int_V \mathbf{B}^{pT} \mathbf{D} \mathbf{B}^H dV & \mathbf{K}_{ba} &= \mathbf{K}_{ab}^T & \mathbf{K}_{da} &= \mathbf{K}_{ad}^T \\
 \mathbf{K}_{ab} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}^p dV & \mathbf{K}_{bd} &= \int_V \mathbf{B}^{pT} \mathbf{D} \mathbf{B}^{g-l} dV & \mathbf{K}_{cb} &= \mathbf{K}_{bc}^T \\
 \mathbf{K}_{ac} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}^H dV & \mathbf{K}_{cc} &= \int_V \mathbf{B}^{HT} \mathbf{D} \mathbf{B}^H dV & \mathbf{K}_{dc} &= \mathbf{K}_{cd}^T \\
 \mathbf{K}_{ad} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}^{g-l} dV & \mathbf{K}_{cd} &= \int_V \mathbf{B}^{HT} \mathbf{D} \mathbf{B}^{g-l} dV & \mathbf{K}_{ca} &= \mathbf{K}_{ac}^T \\
 \mathbf{K}_{bb} &= \int_V \mathbf{B}^{pT} \mathbf{D} \mathbf{B}^p dV & \mathbf{K}_{dd} &= \int_V \mathbf{B}^{g-lT} \mathbf{D} \mathbf{B}^{g-l} dV & \mathbf{K}_{db} &= \mathbf{K}_{bd}^T
 \end{aligned} \quad (6.14a)$$

onde  $B$ ,  $B^p$ ,  $B^H$  e  $B^{g-l}$  são as matrizes de derivadas parciais relacionadas ao MEF e aos enriquecimentos polinomial, Heaviside e global-local, respectivamente. Utilizou-se para a integração a quadratura de Gauss Legendre seguindo a seguinte regra para a definição da ordem da integração (quantidade mínima de pontos): será o máximo entre (I) a ordem de integração do elemento global (desconsiderando as funções de enriquecimento global local presentes) e (II) a ordem de integração do elemento local acrescido de um. Esse acréscimo de um ocorre porque a solução local é multiplicada pela PU global, conforme a Eq. (6.9), que é um polinômio linear (Duarte e Kim, 2008).

## 6.5 - VERIFICAÇÃO

A verificação da implementação do procedimento global-local foi realizada utilizando o modelo  $TPB$ , comparando os resultados de simulações com MEFG/ $S^{g-l}$  (e atualização do dano no  $P_G^{EL}$ ) com aqueles que foram obtidos por Evangelista Jr. *et al.* (2020) (indicados como "Ref" na Fig. 6.7) no mesmo ensaio (portanto, o modelo foi replicado de maneira idêntica). A Fig. 6.6 mostra as malhas global e local bem como as CC's aplicadas juntamente com a estratégia de enriquecimento. A Tab. 2.5 e a Tab.2.6 apresentam os dados geométricos, os parâmetros de fratura e do material, respectivamente. Foi utilizada a deformação equivalente de Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ). O entalhe possui largura igual a 2,0 mm (dois milímetros).

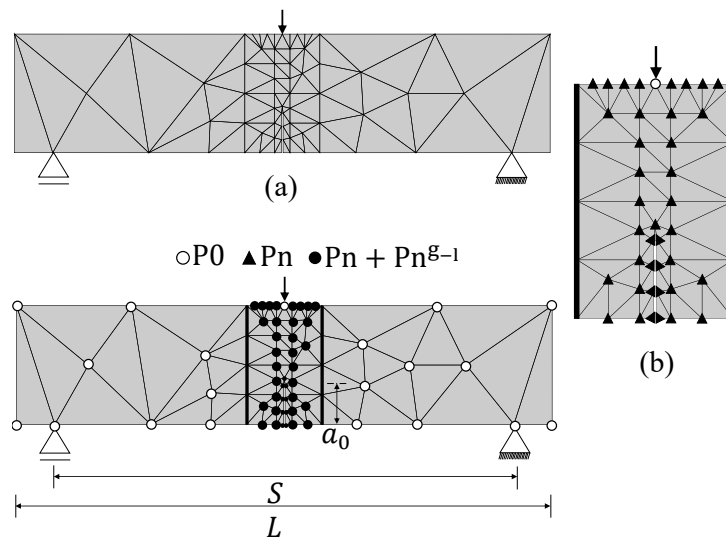


Figura 6.6 – Geometria, carregamento e condições de contorno do modelo: (a)  $P_G^{IL}$  com 101 elementos; (b)  $P_L^{NL}$  com 67 elementos - os nós com triângulos pretos apontam onde foi aplicado enriquecimento polinomial;  $P_G^{EL}$  com 101 elementos - os nós com círculos pretos apontam onde foi aplicado enriquecimento polinomial e global-local, os brancos indicam nós sem enriquecimento.

Daqui por diante será adotado o seguinte formato para designar a que simulação cada resultado se refere:  $P_{G(nElem)}^{EL(Pn)} P_{L(nElem)}^{NL(Pn)}$  onde o índice "n" indica o grau do enriquecimento polinomial (caso haja) e "nElem" o número de elementos nas malhas do  $P_G^{EL}$  e do  $P_L^{NL}$ , respectivamente. A Fig. 6.7 apresenta os resultados obtidos nas simulações utilizando a abordagem global-local com enriquecimento polinomial  $P1$ , assim como em Evangelista Jr. *et al.* (2020). Observa-se na

Fig. 6.7(a) que as curvas  $P$ - $CMOD$  demonstram boa correspondência com aquelas apresentadas pelos autores referenciados. A distribuição do dano apresentada na Fig. 6.7(b) mostra coerência em relação ao comportamento físico do modelo, indicando que a transferência da variável de dano do  $P_L^{NL}$  para o  $P_G^{EL}$  está ocorrendo de maneira correta. Conclui-se, deste modo, que a implementação da estratégia global-local foi feita de maneira satisfatória.

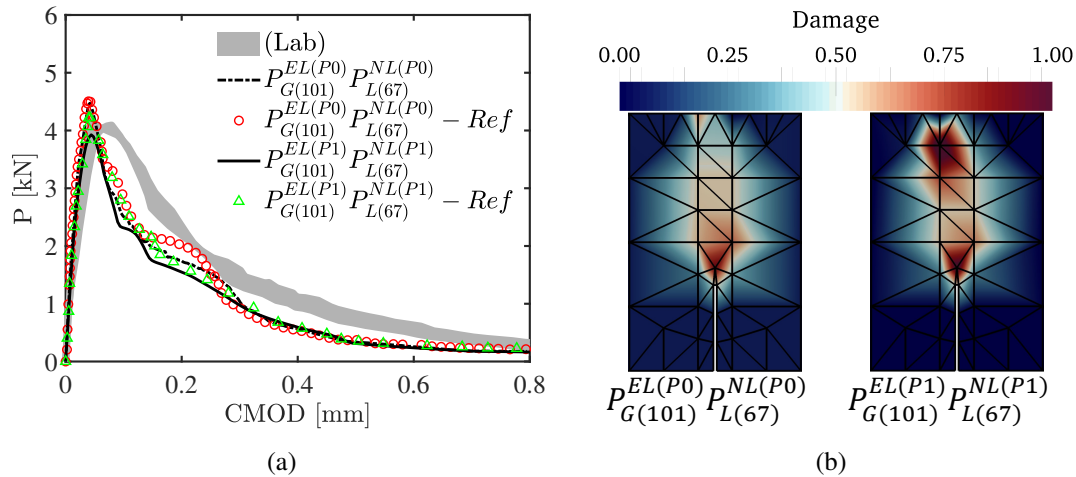


Figura 6.7 – Verificação - comparação com resultados de referência: (a) curvas  $P$  –  $CMOD$  experimentais e numéricas com abordagem  $MEFG^{g-l}$  e enriquecimento  $PI$ ; (b) Distribuição do dano na região do entalhe em função dos graus de enriquecimento polinomial.

### 6.5.1 - Verificação do $MEFG/S^{g-l}$ com $PU$ flat-top

A fim de verificar a implementação do  $MEFG/S^{g-l}$  com  $PU$  flat-top foram feitas simulações em regime elástico-linear utilizando o modelo da chapa em L (Fig. 6.8(a), sendo  $L = 250$ mm e espessura  $t = 100$ mm,  $E = 25850$ MPa;  $\nu = 0,18$ ), discretizado de três maneiras distintas (malhas com 34, 65 e 99 elementos) como objetivo de avaliar a convergência e o comportamento do Número de Condição e Escalonado (NCS) da matriz de rigidez. As simulações numéricas foram realizadas com controle de deslocamento, sendo aplicado na região indicada por  $q$  o valor de  $u = 1,0$ mm.

Tabela 6.1 – Combinações da aplicação do  $MEFG/S^{g-l}$  com  $PU$  flat-top

Combinação	Estratégia	$PU$ do $P_G$	$PU$ do $P_L$
1	$MEFG^{g-l}$	padrão	padrão
2	$MEFG^{g-l}$	padrão	flat-top
3	$MEFG^{g-l}$	flat-top	flat-top
4	$MEFG^{g-l}$	flat-top	padrão
5	$MEFG/S^{g-l}$	padrão	padrão
6	$MEFG/S^{g-l}$	padrão	flat-top
7	$MEFG/S^{g-l}$	flat-top	flat-top
8	$MEFG/S^{g-l}$	flat-top	padrão

Devido a impossibilidade de esgotar nesta tese todas as possibilidades de combinações da

aplicação do MEFG/S<sup>g-l</sup> com *PU flat-top*, foram feitas três combinações aplicando enriquecimento polinomial *P*<sub>2</sub> (utilizando tanto com MEFG<sup>g-l</sup> como com MEFG/S<sup>g-l</sup>) para cada malha, conforme o resumo apresentado pela Tab. 6.1 onde foi verificada a presença da *PU flat-top* no problema global (*P*<sub>G</sub>) e/ou no local (*P*<sub>L</sub>). A Fig. 6.8 apresenta ainda as malhas global e local, bem como as CC's aplicadas e a estratégia de enriquecimento adotada para cada modelo.

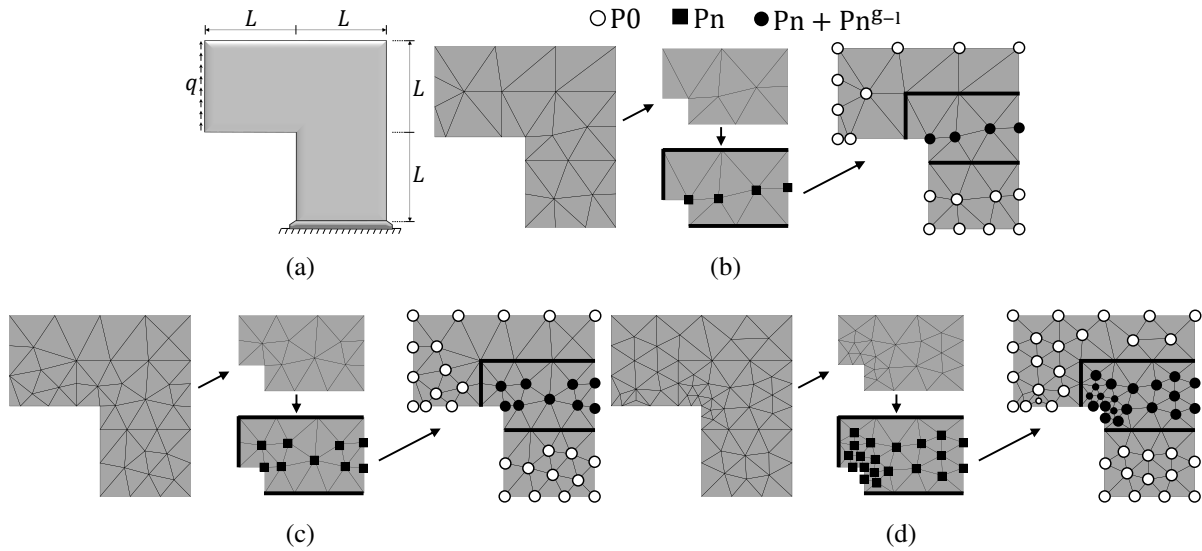


Figura 6.8 – Chapa L - malhas utilizadas: (a) geometria e condições de contorno; (b)  $P_G^{IL}$  e  $P_G^{EL}$  com 34 elementos,  $P_L^{NL}$  com 11 elementos; (c)  $P_G^{IL}$  e  $P_G^{EL}$  com 65 elementos,  $P_L^{NL}$  com 23 elementos; (d)  $P_G^{IL}$  e  $P_G^{EL}$  com 99 elementos,  $P_L^{NL}$  com 43 elementos.

Para avaliar a convergência foi calculado o Erro Relativo  $e_r$  do resultado da força reativa no nó superior da aresta onde ocorre a aplicação do deslocamento. O resultado de referência foi obtido utilizando uma análise do modelo com malha refinada (36620 elementos finitos triangulares), onde obteve-se  $F = 54330,6N$ . Os resultados dessas análises são apresentadas nas Figs. 6.9, 6.10, 6.11, 6.12.

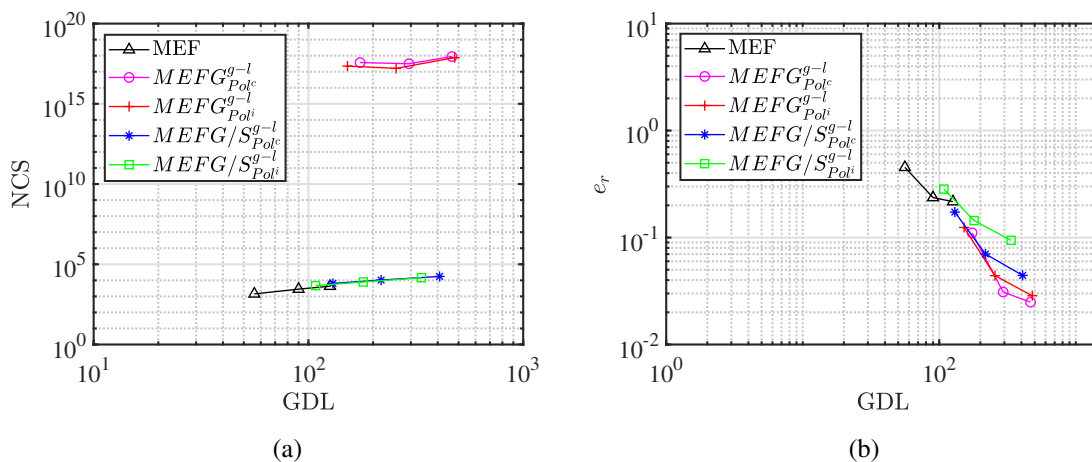
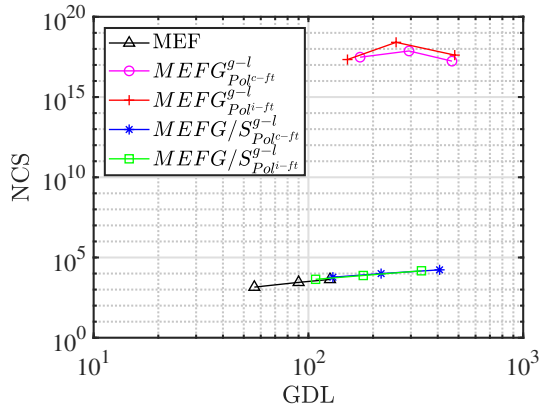
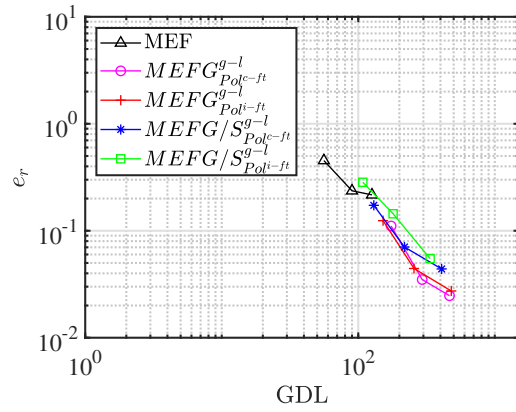


Figura 6.9 – Análise do MEFG/S<sup>g-l</sup> com *P*<sub>2</sub> - combinações 1 e 5: (a) NCS; (b)  $e_r$ .

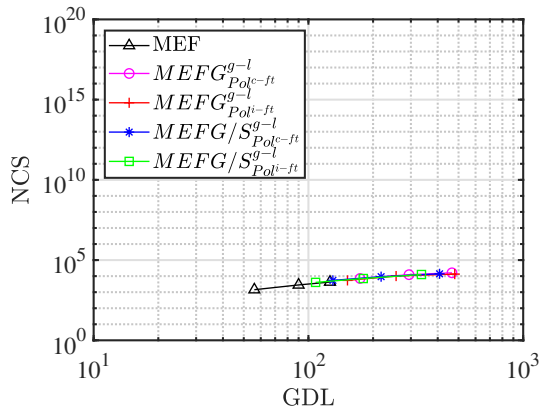


(a)

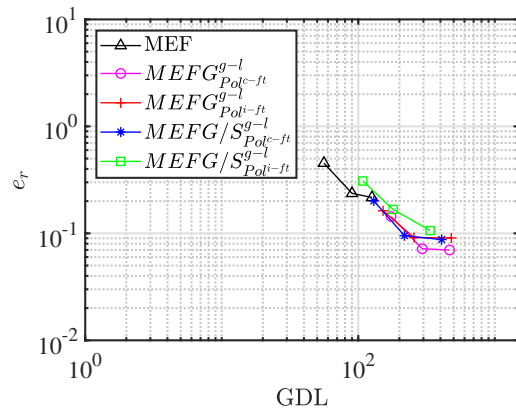


(b)

Figura 6.10 – Análise do MEFG/S<sup>g-l</sup> com P2 - combinações 2 e 6: (a) NCS; (b)  $e_r$ .

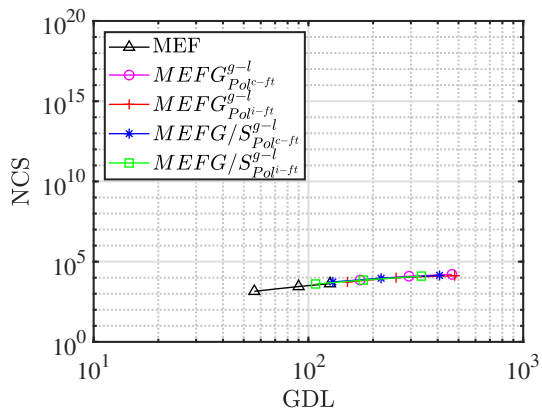


(a)

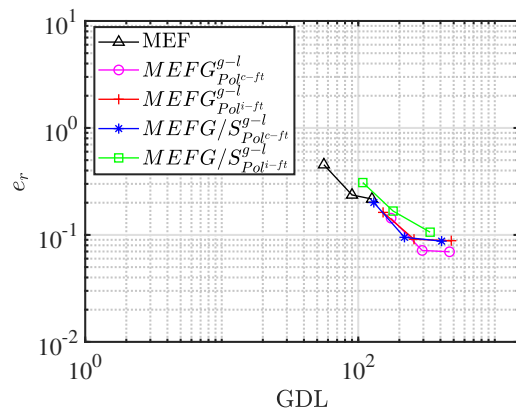


(b)

Figura 6.11 – Análise do MEFG/S<sup>g-l</sup> com P2 - combinações 3 e 7: (a) NCS; (b)  $e_r$ .



(a)



(b)

Figura 6.12 – Análise do MEFG/S<sup>g-l</sup> com P2 - combinações 4 e 8: (a) NCS; (b)  $e_r$ .

Os resultados mostram que a aplicação da PU *flat-top* de fato proporciona um melhor condicionamento para a matriz de rigidez do MEFG $^{g-l}$ . Além disso, reforça-se aquilo que fora observado na Sec. 3.4 (agora utilizando a abordagem global-local): o NCS do MEFG/S $^{g-l}$ , até certa ordem polinomial, apresenta a mesma ordem e magnitude do MEF, ou seja,  $\mathfrak{K}(\mathcal{K}_{MEFG/S_{FT}^{g-l}}) = \mathcal{O}(h^{-2})$ , confirmando o que fora dito por Babuška e Banerjee (2012).

Diante das respostas apresentadas e, devido a impossibilidade de esgotar todas as possibilidades de análises em um único capítulo, nas simulações não lineares que seguem foram analisadas somente as combinações 3 e 7, conforme a Tab. 6.1 e conjunto de enriquecimento *Pol<sup>c</sup>*.

## 6.6 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO I

Esta seção dedica-se à avaliação numérica da eficiência do MEFG/S $_{ft}^{g-l}$  com enriquecimento polinomial e modelo de dano bilinear contínuo (*C*) em simulações 2D. O modelo experimentado neste caso foi a viga sem entalhe sob flexão em quatro pontos, ou *Four Point Bending (FPB)*. Os resultados das simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram comparadas com resultados experimentais de Brand *et al.* (2013) (neste caso os autores apresentaram somente o valor da carga máxima resistida) e também com os resultados numéricos de um ensaio de referência, com uma malha composta de 780 elementos triangulares, semelhante àquela apresentada por Evangelista Jr. e Moreira (2020).

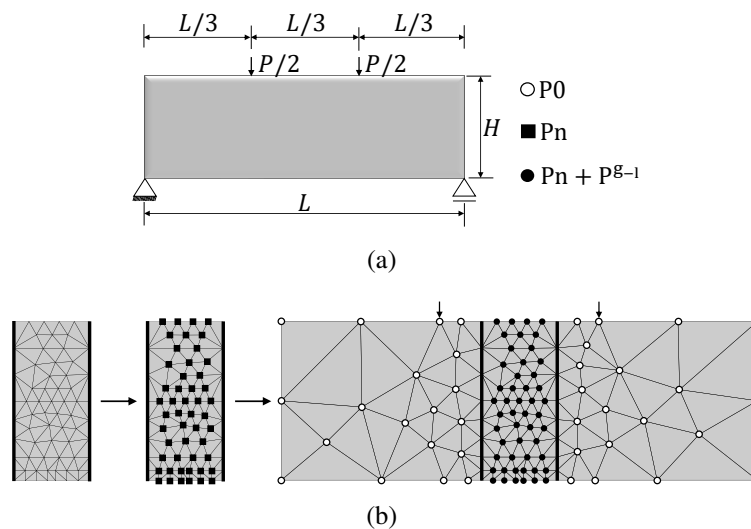


Figura 6.13 – Modelo do ensaio *FPB* e estratégia de enriquecimento: (a) geometria e condições de contorno; (b)  $P_G^{IL}$  e  $P_G^{EL}$  com 180 elementos,  $P_L^{NL}$  com 106 elementos.

A Fig. 6.13 ilustra a geometria utilizada para o esse ensaio, as malhas global e local, bem como as CC's aplicadas e a estratégia de enriquecimento adotada, sendo  $L = 457,2\text{mm}$ ,  $H = 152,4\text{mm}$  e a espessura  $t = 152,4\text{mm}$ . A condição de estado plano de tensão foi considerada, e o controle de deslocamento foi aplicado de forma incremental nos nós indicados pelas setas com a respectiva força relativa  $P$  (monitorada durante a simulação). Foi utilizada a deformação equivalente de Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ). A Tab. 6.13 apresenta os parâmetros de fratura e do material.

Tabela 6.2 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio *FPB*

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$	$CTOD_c$ (mm)
111,7	32,3	0,25	38.61	4,15	0,20	0,014

A Fig.6.14(a) apresenta as curvas  $P$ - $\delta$  relativas às simulações com MEFG/ $S_{ft}^{g-l}$ , enriquecimento P2 e estratégia  $Pol^c$ . Nas simulações P0 e P2 as curvas apresentaram comportamento incoerente (devido não reproduzir bem a danificação conforme a Fig. 6.15 adiante), logo, apresentou-se apenas o  $P_{max}$  delas. Observa-se que o MEFG/ $S_{ft}^{g-l}$  com enriquecimento P2 apresentou boa capacidade de aproximar o  $P_{max}$  comparado com o experimental, mostrando comportamento melhor que a simulação de referência com malha refinada.

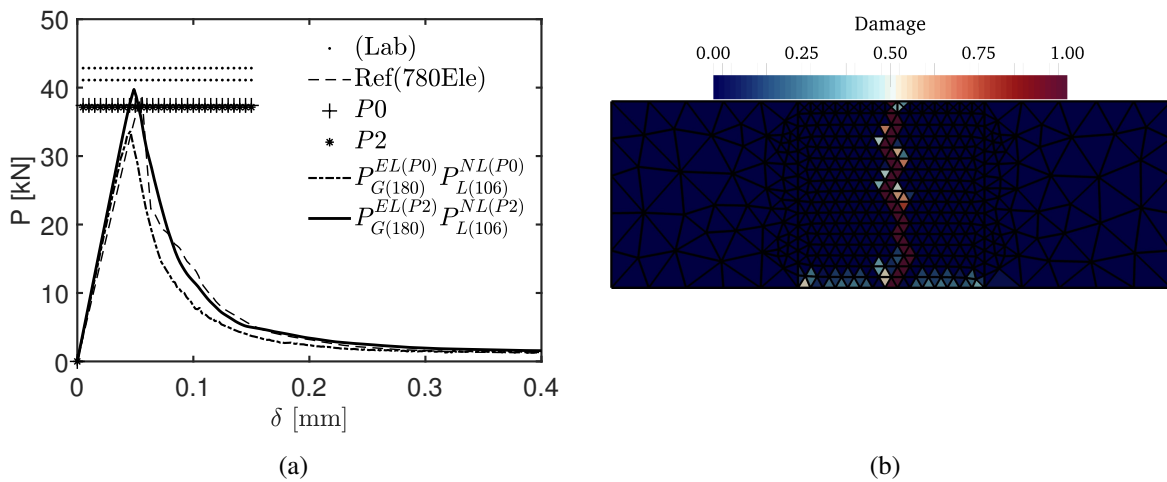


Figura 6.14 – Ensaio *FPB* com MEFG/ $S_{ft}^{g-l}$ , enriquecimento P2 e estratégia  $Pol^c$ : (a) Curvas  $P$ - $\delta$  experimentais e numéricas. (b) Distribuição do dano da referência com 780 elementos.

Ao analisar a distribuição do dano na zona de fratura ao fim da simulação (Fig. 6.15) nota-se que a danificação apresentou comportamento próximo ao da referência (Fig. 6.14(b)) apenas na simulação com MEFG/ $S_{ft}^{g-l}$  e enriquecimento P2- $Pol^c$ .

Neste ensaio há uma dificuldade em capturar a danificação na região central devido o surgimento de uma zona lateral muito deformada. Este efeito é observado inclusive na simulação com malha refinada, embora nesse caso o refinamento da malha contribua para a correção da danificação ao longo da simulação. No entanto, com a malha grosseira, apenas na simulação com MEFG/ $S_{ft}^{g-l}$  e enriquecimento P2- $Pol^c$  favorece essa correção, evidenciando a qualidade da abordagem global-local com enriquecimento polinomial.

A Fig. 6.16 mostra as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/ $S_{ft}^{g-l}$  como do MEFG/S convencional, ambos com estratégia de enriquecimento P2- $Pol^c$ , para comparação. Observa-se na Fig. 6.16(a) que  $N^{it}$  normalizado é muito inferior nas simulações com a abordagem global-local. Da mesma forma, o  $GDL^{proc}$  na Fig. 6.16(b) também foi menor nas simulações com MEFG/ $S_{ft}^{g-l}$ .

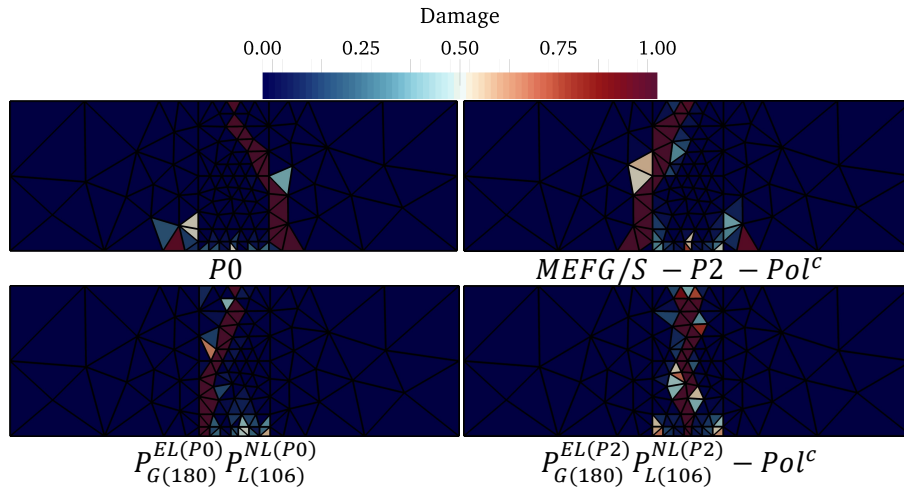


Figura 6.15 – Distribuição de dano em função do enriquecimento do ensaio FPB - malha global com 180 elementos e modelo de dano contínuo.

Quanto aos valores de  $P_{max}$ , as soluções mais próximas do experimental foram as obtidas nos ensaios de referência e  $MEFG/S_{ft}^{g-l} P_{G(180)}^{EL(P2)} P_{L(106)}^{NL(P2)}$ , não por acaso as únicas que apresentaram danificação coerente, conforme ilustrado na Fig. 6.15. Contudo, a eficiência computacional da simulação com abordagem global-local e malha grosseira é bem superior que a demonstrada pela referência (com MEF convencional e malha refinada).

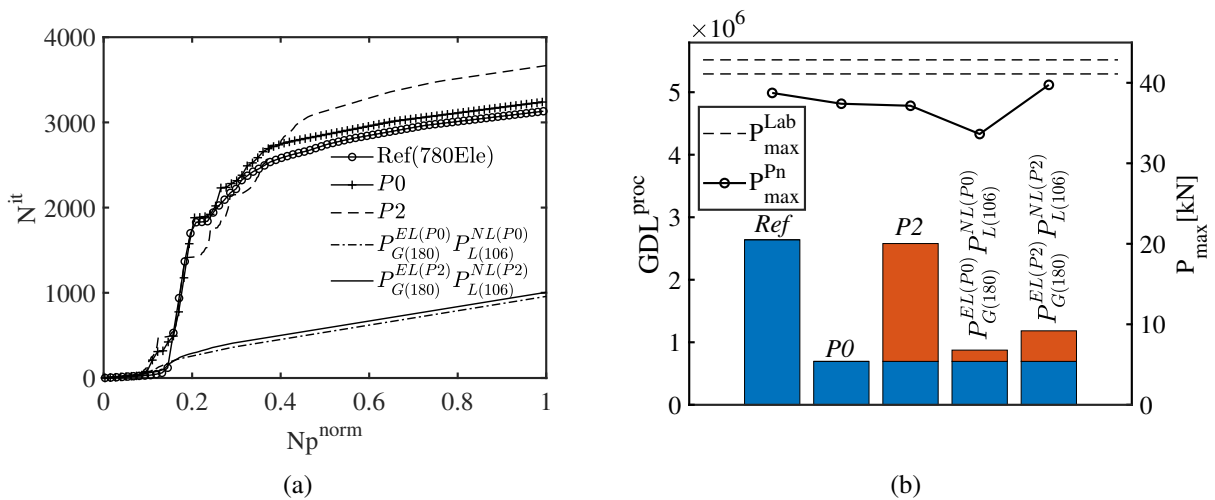


Figura 6.16 – Avaliação da eficiência computacional do ensaio FPB - comparação entre simulação de Referência, MEFG/S e MEFG/S<sub>ft</sub><sup>g-l</sup> e enriquecimento P2-Pol<sup>c</sup>.

## 6.7 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM MODO MISTO

O ensaio realizado para analisar o comportamento da estratégia  $MEFG/S_{ft}^{g-l}$  no modo misto de fratura foi o *Double Edge Notched (DEN)*. Os resultados das simulações numéricas foram comparados com os dados extraídos de Nooru-Mohamed (1992). A Fig. 6.17 apresenta as malhas global e local, bem como as CC's aplicadas e a estratégia de enriquecimento adotada



para o modelo, sendo  $L = 200\text{mm}$ ,  $S = 150\text{mm}$ ,  $a = 25\text{mm}$  e  $h = 5\text{mm}$ . Os parâmetros de fratura e os relativos ao material (Nooru-Mohamed,1992) estão especificados na Tab. 6.3.

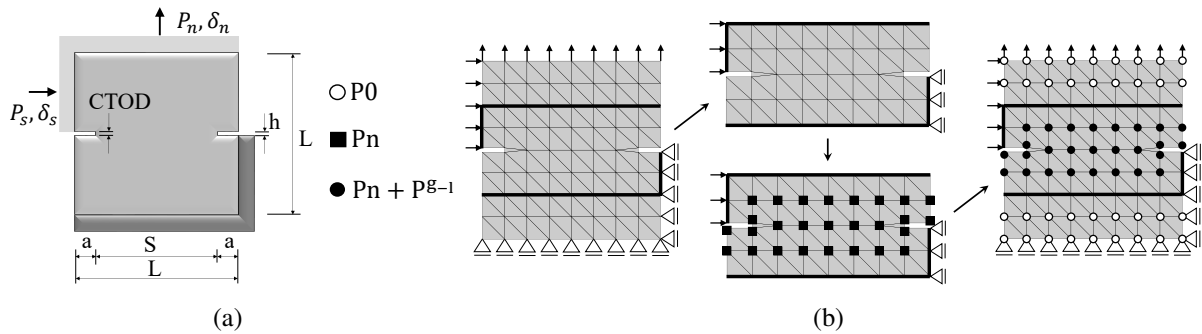


Figura 6.17 – DEN - malhas utilizadas: (a) geometria e condições de contorno; (b)  $P_G^{LL}$  e  $P_G^{EL}$  com 130 elementos,  $P_L^{NL}$  com 66 elementos.

As simulações numéricas foram realizadas com controle de deslocamento, sendo aplicados incrementos nas regiões indicadas por  $\delta_s$  (direção horizontal) e  $\delta_n$  (direção vertical) segundo a relação  $\delta_s/\delta_n=1$ . Foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

Tabela 6.3 – Parâmetros de fratura e relativos ao material para DEN

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/mm)	$G_f$ (N/mm)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$\nu$
0,100	0,040	0,25	30000	3,30	33,00	0,20

Inicialmente foi feita uma simulação com malha refinada (1388 elementos), afim de avaliar se as condições de contorno (bem como as propriedades dos materiais) foram aplicadas corretamente. A Fig. 6.18(a) apresenta a curva  $P_n$ -CTOD (que relacionam força vertical ( $P_n$ ) e a abertura de ponta de trinca, *Crack Tip Opening Displacement - CTOD*) com os resultados numérico e o experimental comparados e a Fig. 6.18(b) mostra a danificação.

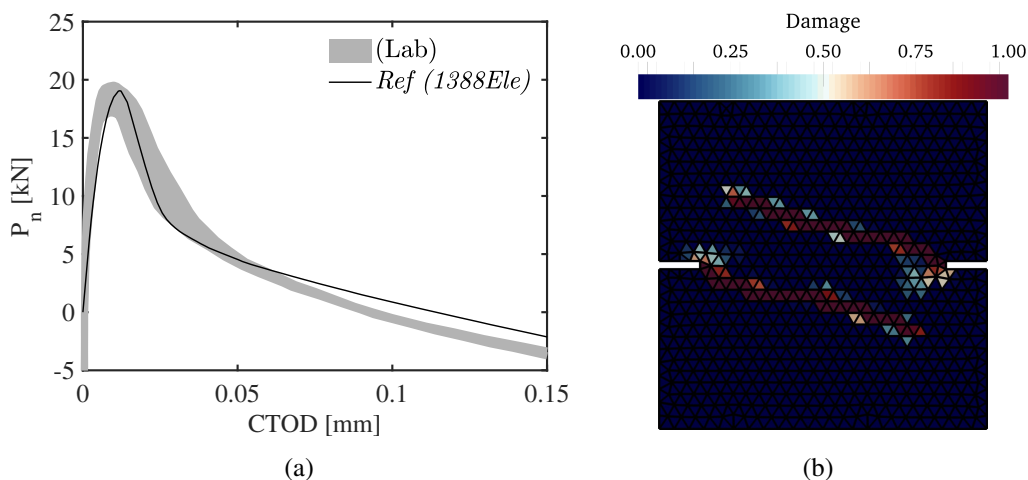


Figura 6.18 – Ensaio DEN de referência: (a) Curvas  $P_n$  – CTOD experimental e numérica. (b) Distribuição do dano de referência com 1388 elementos.

Conclui-se, diante de todos esses dados, que as condições de contorno foram impostas de maneira adequada, haja vista o excelente resultado de carga máxima resistida e uma boa descrição do amolecimento. Também a região danificada apresenta compatibilidade com o experimental.

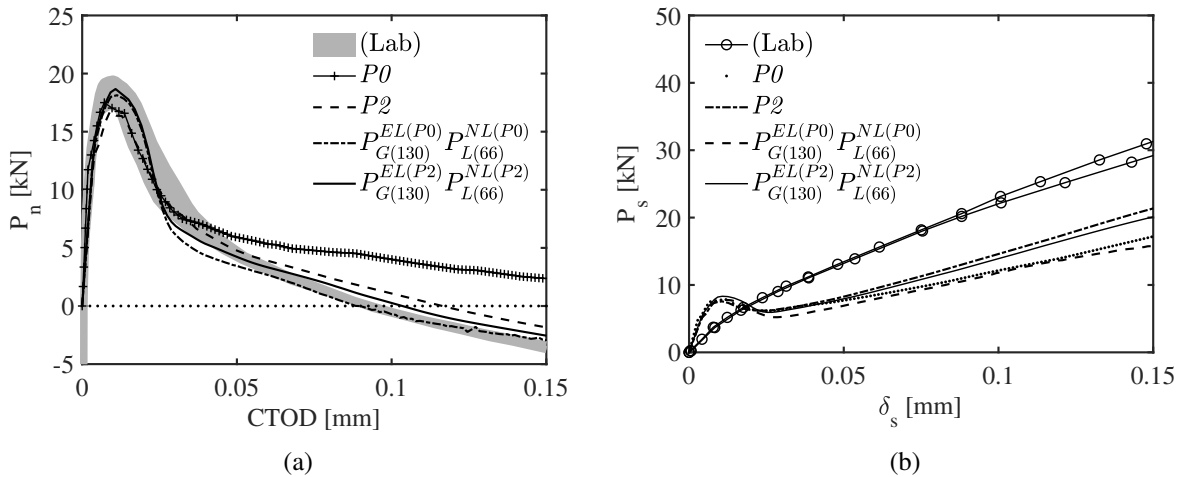


Figura 6.19 – Resultados experimentais e numéricos do ensaio  $DEN$  com  $MEFG/S_{ft}^{g-l}$ , enriquecimento  $P2-Pol^c$ : (a) curvas  $P_n - CTOD$ ; (b) curvas  $P_s - \delta_s$ .

Na Fig.6.19(a) apresentam-se as curvas  $P_n-CTOD$  relativas às simulações com  $MEFG/S_{ft}^{g-l}$ , enriquecidas com funções  $P2-Pol^c$ . Observa-se que o  $MEFG/S_{ft}^{g-l}$  com enriquecimento  $P2$  apresentou boa capacidade de aproximar o  $P_{n,max}$  comparado com o experimental, mostrando comportamento melhor que a simulação de referência com malha refinada.

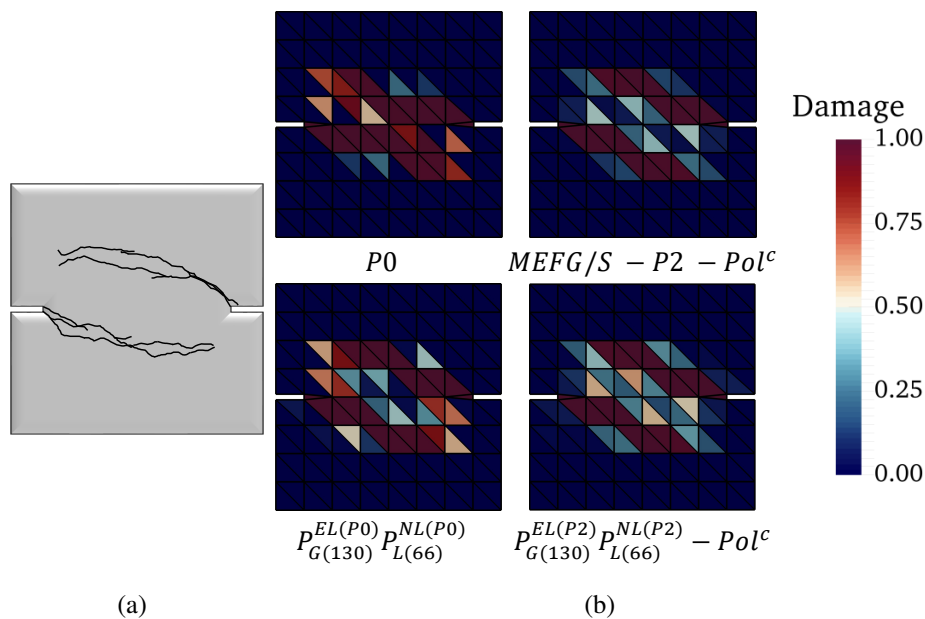


Figura 6.20 – Distribuição de dano do ensaio  $DEN$  - malha global com 130 elementos e modelo de dano contínuo: (a) Resultado experimental (Nooru-Mohamed,1992); (b) respostas numéricas em função do enriquecimento.

Na Fig. 6.19(b) são apresentados resultados da força horizontal ( $P_s$ ) em função do deslocamento horizontal ( $\delta_s$ ). Nota-se que as simulações com enriquecimento conseguem capturar o ganho de rigidez na direção horizontal melhor que a simulação  $P0$ . Analisando a distribuição do dano na região de fratura ao fim da simulação (Fig. 6.20) nota-se que a danificação apresentou comportamento próximo do fraturamento experimental (Fig. 6.20(a)) sobretudo na simulação com MEFG/S $_{ft}^{g-l}$  e enriquecimento  $P2-Pol^c$ .

A Fig. 6.21 mostra as avaliações de eficiência computacional tanto do MEFG/S $_{ft}^{g-l}$  como do MEFG/S convencional, ambos com estratégia de enriquecimento  $P2-Pol^c$ , para comparação. Observa-se na Fig. 6.21(a) que  $N^{it}$  normalizado apresenta valores aproximados para simulações com ou sem enriquecimento. Contudo, o  $N^{it}$  normalizado é inferior nas simulações com a abordagem global-local.

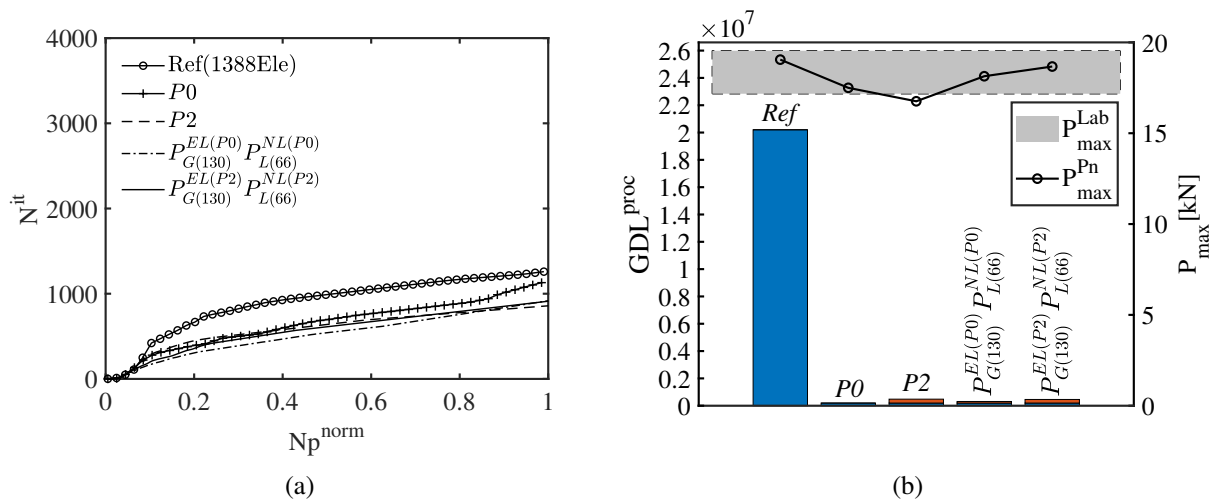


Figura 6.21 – Avaliação da eficiência computacional do ensaio DEN - comparação entre simulação de Referência, MEFG/S e MEFG/S $_{ft}^{g-l}$  e enriquecimento  $P2-Pol^c$ .

O  $GDL^{proc}$  na Fig. 6.21(b) mostrou-se menor nas simulações com enriquecimento (desconsidera-se  $P0$  pois não apresenta curvas compatíveis com o resultado obtido em laboratório). Quanto aos valores de  $P_{max}$ , as soluções mais próximas do experimental foram as obtidas nos ensaios de referência e MEFG/S $_{ft}^{g-l}$ , também foram essas que apresentaram uma mapa de dano mais próximo do ilustrado na Fig. 6.20(a). Contudo, a eficiência computacional da simulação com abordagem global-local e malha grosseira é muito superior que a demonstrada pela referência (com MEF convencional e malha refinada).

## 6.8 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS COM MODELO DE DANO (C-D)

Nesta sessão serão apresentados os resultados referentes às simulações utilizando o MEFG/S $_{ft}^{g-l}$  combinado com o modelo de dano (C-D), onde foi analisado o comportamento da abordagem global-local quando há a incidência (ao mesmo tempo) dos três tipos de enriquecimento implementados nesta tese: o polinomial, o descontínuo e o global-local. Foram realizados ensaios com a viga sob flexão em três pontos, ou *Three Point Bending (TPB)* e com o modelo de um fêmur humano.

### 6.8.1 - Simulações com TPB

O primeiro modelo experimentado foi a viga TPB. Os resultados das simulações numéricas para materiais cimentícios convencionais foram comparados com resultados experimentais de Roesler *et al.* (2007a) e Gaedicke e Roesler (2010). A Fig. 6.22 ilustra a geometria utilizada para esse ensaio.

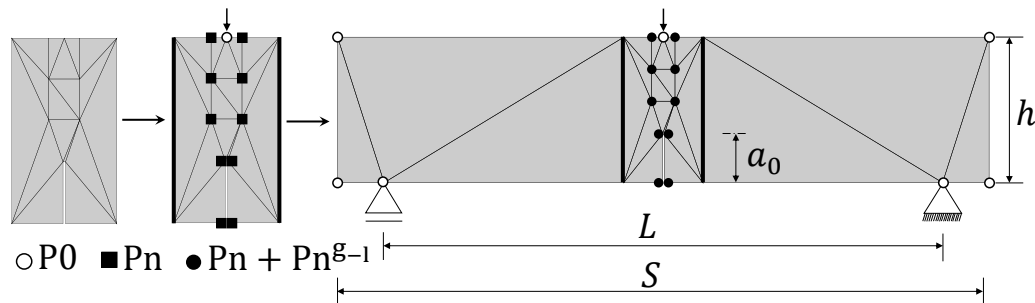


Figura 6.22 – Modelo do ensaio TPB e estratégia de enriquecimento: (a) geometria e condições de contorno; (b)  $P_G^{IL}$  e  $P_G^{EL}$  com 23 elementos,  $P_L^{NL}$  com 17 elementos.

A Fig. 6.22 ilustra a geometria utilizada para o ensaio, as malhas global e local, bem como as CC's aplicadas e a estratégia de enriquecimento adotada, sendo  $L = 700\text{mm}$ ,  $S = 600\text{mm}$ ,  $h = 150\text{mm}$ ,  $a_0 = 50\text{mm}$  e a espessura  $e = 80\text{mm}$ . A condição de estado plano de tensão foi considerada, e o controle de deslocamento foi aplicado de forma incremental no nó indicado pela seta com a respectiva força reativa (monitorada durante a simulação). Foi utilizada a deformação equivalente de Mazars ( $\varepsilon_{eq}^{MA}$ ). A Tab. 6.4 apresenta os parâmetros de fratura e do material.

Tabela 6.4 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material			
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	$E$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$
164,0	56,7	0,25	32000	58,3	4,15	0,20

A Fig. 6.23(a) apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas  $P$ - $CMOD$ , utilizando a abordagem MEFG/ $S^{g-l}$  com estratégia de enriquecimento P2- $Pol^i$ . Percebe-se que não há qualidade nos resultados sem enriquecimento ( $P0$ ). Em contrapartida, é visível que o enriquecimento contribui para melhorar a qualidade dos resultados, sobretudo com a abordagem MEFG/ $S^{g-l}$ , haja vista a boa estimativa da carga máxima resistida  $P_{max}$  ainda que utilizando pouquíssimos elementos finitos no ensaio. O *softening* também é suavizado, sobretudo na simulação MEFG/ $S^{g-l}$   $P_G^{EL(P2)}$   $P_L^{NL(P2)}$ .

A Fig. 6.23(b) apresenta o mapa de propagação da trinca para cada simulação. Nota-se boa correspondência entre os resultados dos ensaios com enriquecimento e os dados da solução de referência (uma malha refinada com 2459 elementos), sobretudo na simulação MEFG/ $S^{g-l}$   $P_G^{EL(P2)}$   $P_L^{NL(P2)}$  cujo resultado praticamente sobrepõe o da referência (utilizando uma malha com 100 vezes menos elementos).

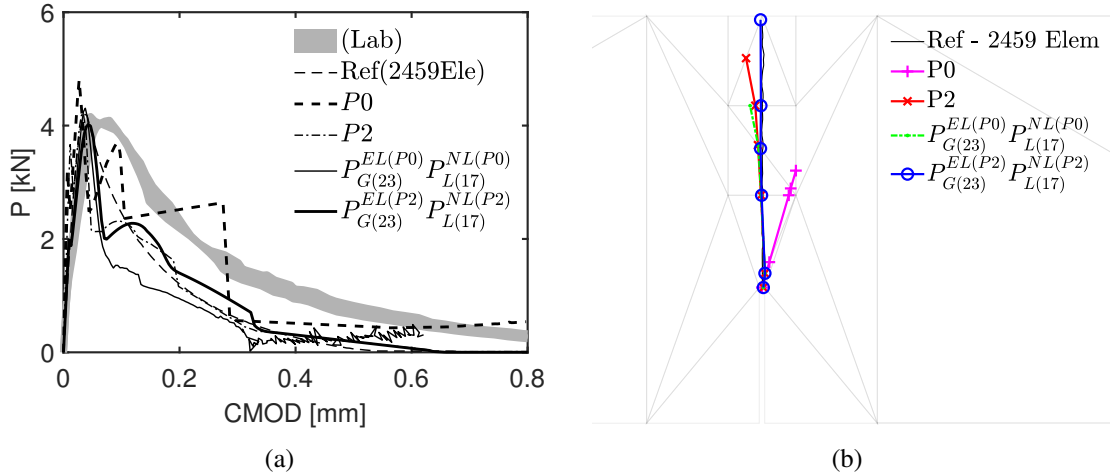


Figura 6.23 – Resultados experimentais e numéricos do ensaio  $TPB$  com  $MEFG/S^{g-l}$ , enriquecimento  $P_2-Pol^i$ : (a) curvas  $P - CMOD$ ; (b) mapa de trincamento.

A Fig. 6.24 mostra as avaliações de eficiência computacional tanto do  $MEFG/S^{g-l}$  como do  $MEFG/S$  convencional, ambos com estratégia de enriquecimento  $P_2-Pol^i$ , para comparação. Observa-se na Fig. 6.24(a) que  $N^{it}$  normalizado apresenta os menores valores nas simulações com  $MEFG/S^{g-l}$ . Da mesma forma, o  $GDL^{proc}$  na Fig. 6.24(b) também foi menor nas simulações com  $MEFG/S^{g-l}$ . Quanto aos valores de  $P_{max}$ , as soluções mais próximas do experimental foram as obtidas nos ensaios de referência e  $MEFG/S^{g-l}$   $P_{G(23)}^{EL(P_2)} P_{L(17)}^{NL(P_2)}$ , não por acaso foram as que apresentaram um padrão de trincamento mais coerente com o comportamento físico obtido em laboratório (Fig. 6.23(b)). Contudo, a eficiência computacional da simulação com abordagem global-local e malha grosseira é bem superior que a demonstrada pela referência (com MEF convencional e malha refinada).

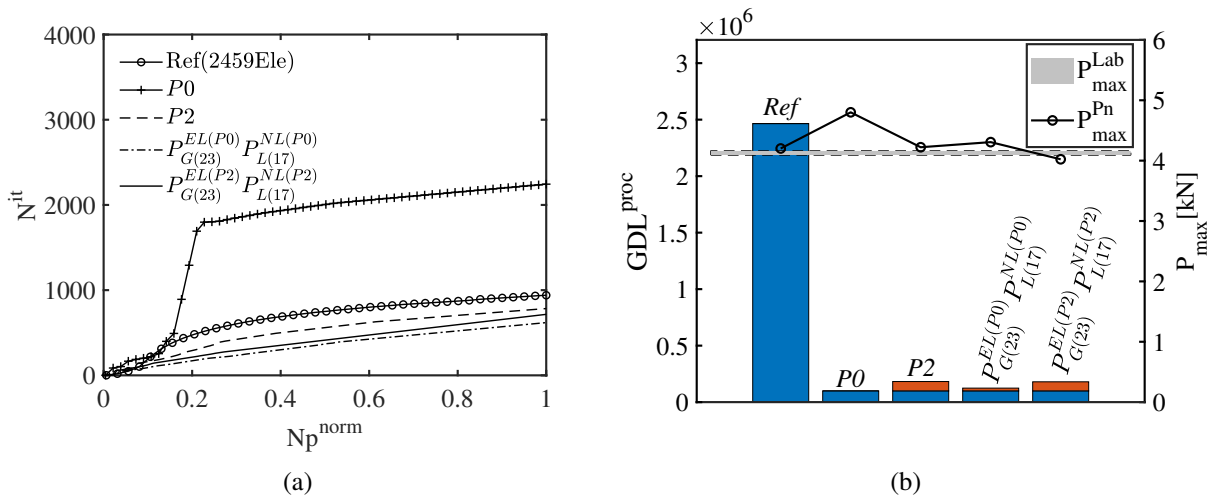


Figura 6.24 – Avaliação da eficiência computacional do ensaio  $TPB$  e modelo de dano (C-D) - comparação entre simulação de Referência,  $MEFG/S$  e  $MEFG/S^{g-l}$  e enriquecimento  $P_2-Pol^i$ .

## 6.8.2 - Simulações com fêmur humano

O segundo modelo experimentado foi o de um fêmur humano. As simulações foram realizadas com controle de deslocamentos ( $\delta_v$ ). Esse osso é composto de duas partes: o osso trabecular (esponjoso ou poroso com módulo de elasticidade  $E_t$ ) e o cortical (mais compacto e resistente, com módulo de elasticidade  $E_c$ ). O ensaio numérico foi realizado conforme o experimento promovido por Miura *et al.* (2017). O modelo foi elaborado com elementos finitos triangulares. Foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

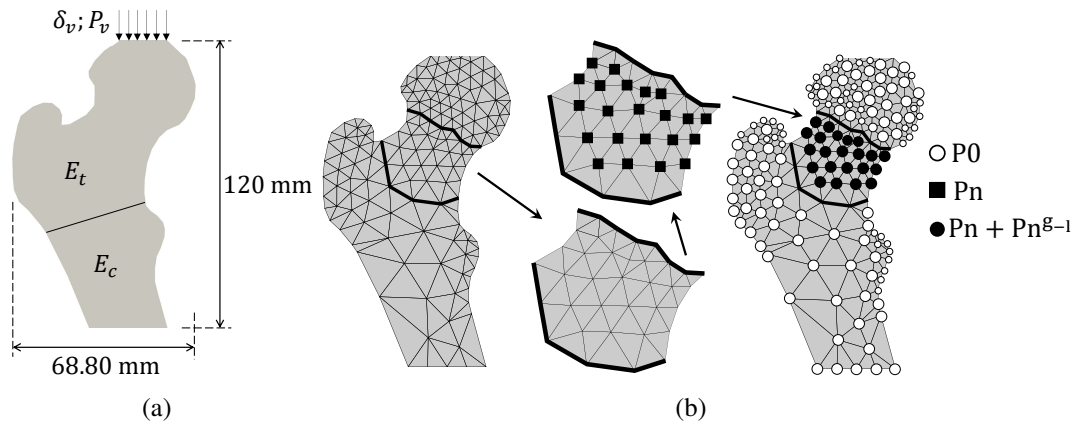


Figura 6.25 – Modelagem de Fêmur: (a) geometria e condições de contorno; (b)  $P_G^{IL}$  e  $P_G^{EL}$  com 265 elementos,  $P_L^{NL}$  com 52 elementos.

A Fig. 6.25 ilustra a geometria utilizada o esse ensaio, as malhas global e local, bem como as CC's aplicadas e a estratégia de enriquecimento adotada. A condição de estado plano de tensão foi considerada, e o controle de deslocamento foi aplicado de forma incremental no nó indicado pelas setas com a respectiva força reativa (monitorada durante a simulação). Foi utilizada a deformação equivalente de von Mises ( $\varepsilon_{eq}^{VM}$ ).

A Tab. 6.5 apresenta os parâmetros de fratura e do material. As propriedades do material foram retiradas de Özkaya e Nordin (1999) e, as de fratura (da região trabecular), podem ser encontradas em Barth *et al.* (2010). Foi adotada a espessura  $e = 20$  mm, conforme Alves (2019).

Tabela 6.5 – Parâmetros de fratura e relativos ao material do ensaio de flexão em três pontos

Parâmetros de Fratura			Parâmetros relativos ao material							
$G_F$ (N/m)	$G_f$ (N/m)	$\Psi$	Região trabecular				Região cortical			
			$E$ (GPa)	$f_c$ (MPa)	$f_t$ (MPa)	$\nu$	$E$ (GPa)	$f_c$ (GPa)	$f_t$ (GPa)	$\nu$
8.8445	0.1566	0,25	10	133	50	0,30	20	193	133	0,12

A Fig. 6.26 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas  $P-d$  (onde  $P$  e  $d$  são a força reativa e o deslocamento medidos na direção vertical, respectivamente, ambos avaliados na altura 120 mm), utilizando a abordagem MEF $G/S^{g-l}$  com estratégia de enriquecimento  $P0$ ,  $P2$  e  $P3$  com conjunto  $Pol^i$ . Para efeitos comparativos, foi apresentada a curva obtida através do ensaio laboratorial realizado por Miura *et al.* (2017) (*Lab*) e as curvas numéricas de Carter e Hayes (1977), Minamisawa (1981), Keller (1994) e Keyak e Skinner (1992). Na Fig. 6.26(a)

é possível observar que as curvas  $P-d$  das simulações estão dentro de uma faixa coerente de resultados quando comparado ao que é encontrado na literatura. A Fig. 6.26(b) destaca que com a utilização do MEF $G/S^{g-l}$  ocorre uma maior proximidade com a resposta da referência.

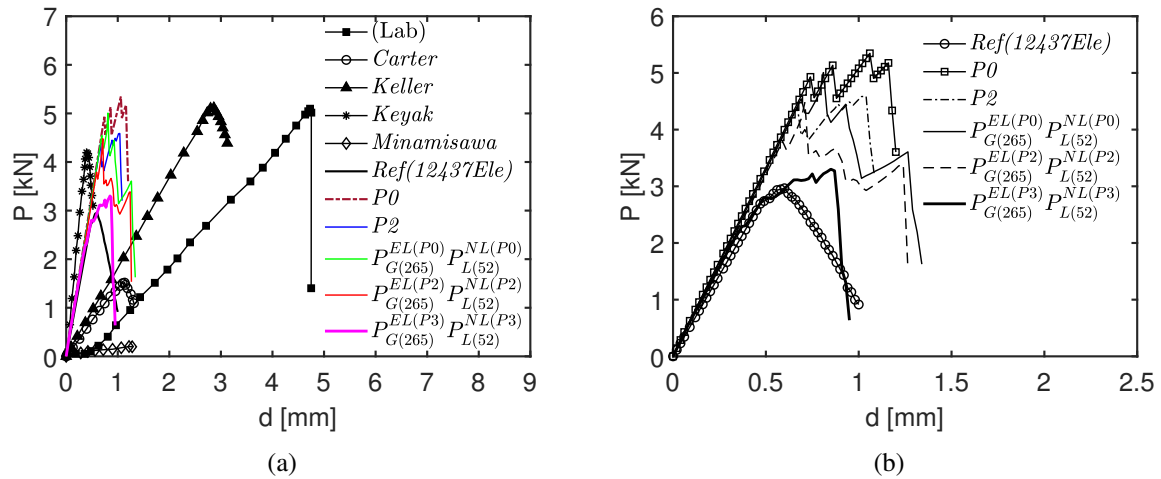


Figura 6.26 – Curvas  $P-d$  experimentais e numéricas (MEFG/ $S^{g-l}$ ): (a) comparação com resultados da literatura; (b) curvas numéricas com estratégia  $P2-Pol^i$ .

A Fig. 6.27 mostra a avaliação da eficiência computacional das simulações com MEF $G/S^{g-l}$  e conjunto  $Pol^i$ . Observa-se que o  $N^{it}$  normalizado na Fig. 6.27(a) não apresentou-se melhor nas simulações com enriquecimento. Contudo, destaca-se o fato dos resultados com MEF $G/S^{g-l}$  (com malha grosseira) mostrarem-se próximos ao da referência.

É possível notar na Fig. 6.27(b) que o  $GDL^{proc}$  é menor nas simulações com enriquecimento. Nota-se ainda que todos os ensaios com MEF $G/S^{g-l}$  mostraram-se mais eficientes que a simulação de referência (com a malha mais refinada), haja vista terem apresentado menor  $GDL^{proc}$ .

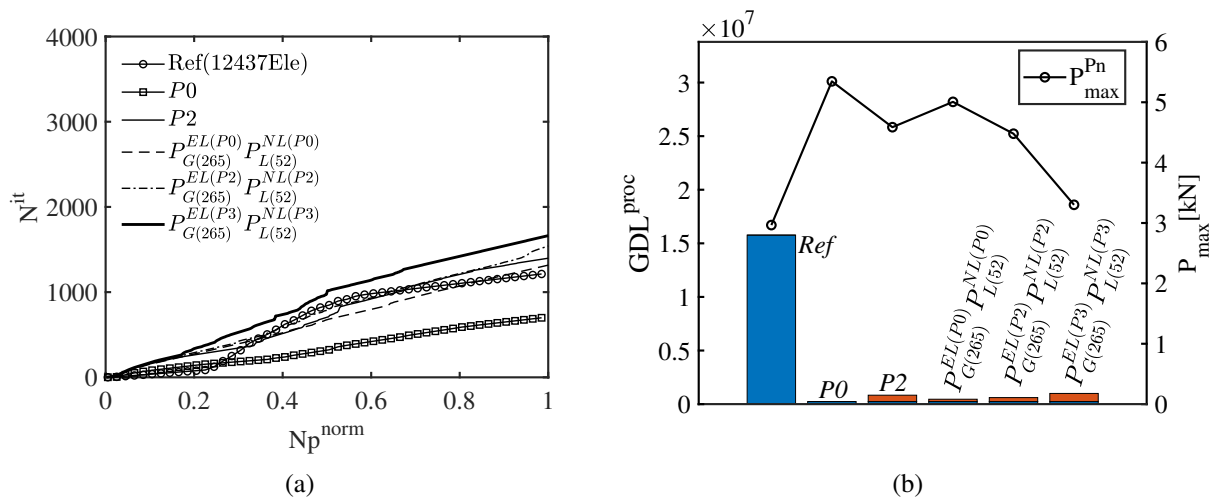


Figura 6.27 – Avaliação da eficiência computacional para a malha de 265 elementos - comparação entre simulação de Referência e MEF $G/S^{g-l}$   $Pol^i$ .



É possível notar na Fig. 6.28 boa correspondência entre o resultados dos ensaios com  $MEFG/S^{g-l}$  e os dados da referência (cuja malha é mais refinada com 12437 elementos finitos triangulares). Observa-se também que a propagação de trinca foi melhor descrita na simulação com  $MEFG/S^{g-l}$   $P_{G(265)}^{EL(P3)}$   $P_{L(52)}^{NL(P3)}$ .

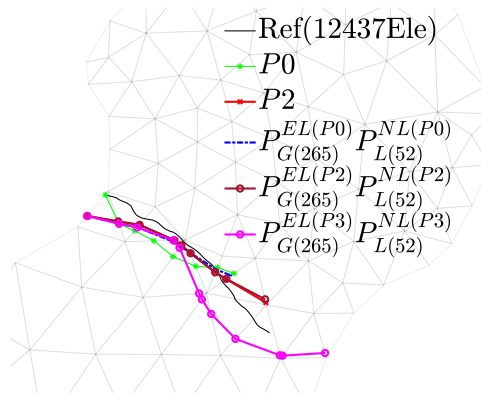


Figura 6.28 – Sobreposição entre padrão de trincamento de referência e  $MEFG/S^{g-l}$  com estratégia  $Pol^i$ .

## 6.9 - CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados os resultados de simulações utilizando a abordagem global-local ( $MEFG/S^{g-l}$ ) com enriquecimento polinomial e descontínuo, como metodologia de resolução de problemas complexos de engenharia. Também foi utilizada estratégia com a substituição da PU padrão pela PU *flat-top* ( $MEFG/S_{ft}^{g-l}$ ). Toda a implementação foi realizada no programa *Lachesis* desenvolvido pelo grupo de pesquisa *NEXUM* em C++. É possível afirmar, frente ao exposto, que a implementação foi feita de maneira eficiente e correta. Além disso, notou-se, o grande potencial do  $MEFG/S$  para resolver PVC diversos, garantindo amplo espaço para crescimento e desenvolvimento desta linha de pesquisa.

Foram apresentadas situações de modo I e misto de fratura, com modelo de dano contínuo e contínuo-descontínuo e, em todas elas, o  $MEFG/S^{g-l}$  cumpriu satisfatoriamente o objetivo de garantir boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento, mesmo utilizando malhas grosseiras nas simulações. A combinação das estratégias do  $MEFG/S^{g-l}$  polinomial e/ou descontínuo, combinadas ao modelo de dano, mostrou-se bastante eficiente para prever a danificação de estruturas sob processo de falha.

Ao analisar a eficiência computacional do método, o  $MEFG/S_{ft}^{g-l}$  mostrou-se mais eficiente que o  $MEFG$  com PU padrão nas simulações em modo I e misto de fratura (utilizou-se  $\sigma = 0.01$  e  $k = 1.0$  como parâmetros para a PU *flat-top*). O mesmo comportamento foi visualizado nos ensaios com  $MEFG/S^{g-l}$ . Destaca-se que todos os casos com abordagem global-local apresentaram melhor eficiência computacional que o MEF convencional.

Em suma, o  $MEFG/S$  combinado com a abordagem global-local (com PU padrão ou *flat-top*) apresentou boa capacidade em melhorar a qualidade da aproximação final, com a utilização racional de funções de enriquecimento, em malhas grosseiras, aliando características como



modelagem flexível, convergência e eficiência computacional. A aplicação da estratégia descontínua garantiu versatilidade aos ensaios, devido eliminar a necessidade da utilização de elementos especiais ou de remalhamento. A combinação da abordagem global-local com enriquecimento polinomial e/ou descontínuo, combinadas ao modelo de dano (C ou C-D), mostrou-se bastante eficiente para prever a distribuição do dano e a evolução da trinca em estruturas sob processo de falha. Importante frisar que foi possível obter bons resultados utilizando apenas refinamento- $p$  (ou seja, não houve refinamento- $h$  em nenhum caso).

Como sugestão para trabalhos futuros, sugere-se a análise das demais combinações de enriquecimento mencionadas na Tab. 6.1. Além disso, estudos sobre a influência dos parâmetros  $\sigma$  e  $k$  nas análises com abordagem global local, buscando obter valores ótimos que mais se adequem a cada modo de fratura ou um que satisfaça de maneira ótima ambos os casos. Como forma de garantir melhores resultados na descrição do dano e da propagação das trincas, propõe-se acoplar ao *Lachesis* um procedimento que permita o refinamento- $h$  no  $P_L^{NL}$  (além do refinamento- $p$  já habilitado). Sugere-se ainda para futuros trabalhos expandir toda essa abordagem global-local (apresentada nesta tese apenas no espaço  $2D$ ) para o espaço  $3D$ .

## 7 - CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

### 7.1 - CONCLUSÕES

A principal contribuição desta pesquisa foi o desenvolvimento de um programa capaz de simular a resistência de membros estruturais em processo de falha com eficiência computacional, boa qualidade de convergência, objetividade de malha e, além disso, utilizando malhas grosserias.

É possível afirmar, com base nos resultados apresentados, que a implementação foi feita de maneira eficiente e correta. Nota-se o grande potencial do MEFG/S para resolver PVC diversos, garantindo amplo espaço para crescimento e desenvolvimento desta linha de pesquisa. Neste trabalho foram apresentadas situações de modo I e misto de fratura, com modelo de dano contínuo bem como contínuo-descontínuo e, em todas elas, o MEFG/S cumpriu satisfatoriamente o objetivo de garantir boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento mesmo utilizando malhas grosseiras nas simulações.

Observou-se que houve redução na velocidade da convergência das iterações, dentro de cada passo de carga, conforme fora aumentado o grau da função polinomial de enriquecimento. Para tentar solucionar este problema, foram implementadas as ditas funções *flat-tops*.

Tanto o MEFG<sup>FT</sup> como o MEFG/S<sup>FT</sup> permitiram atingir resultados de propagação de trinca compatíveis com o comportamento físico e com a propagação obtida na simulação de referência. Isso utilizando uma malha bem grosseira e sem a necessidade de remalhamentos ao longo do processo, nem de inserção de elementos de junta na malha. Proporcionando praticidade quanto à construção da malha e, em ultimo caso, eficiência computacional.

Ao analisar a eficiência computacional do método, o MEFG/S<sup>FT</sup> mostrou-se mais eficiente que o MEFG/S com PU padrão nas simulações em modo I de fratura (utilizando  $\sigma = 0.01$  e  $k = 1.0$  como parâmetros para a PU *flat-top*). Contudo, no modo misto não foi observado mesmo comportamento, onde o MEFG/S com PU padrão apresentou resultados com melhor eficiência. Nesse sentido foram realizadas simulações com  $\sigma = 0.001$  onde foi possível notar, de modo geral, aumento da eficiência computacional do método generalizado associado à PU *flat-top*.

Tratando da procedimento *p*-adaptativo, tanto o MEFG<sup>adapt</sup> como MEFG/S<sup>adapt</sup> garantiram boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento. A combinação das abordagens MEFG<sup>adapt</sup> e MEFG/S<sup>adapt</sup> com o modelo de dano, mostraram potencial para prever a distribuição do dano em estruturas sob processo de falha. Ao analisar a eficiência computacional do método, o MEFG<sup>adapt</sup> e o MEFG/S<sup>adapt</sup> mostraram-se, de modo geral, mais eficiente que suas respectivas versões sem abordagem adaptativa.

No caso das simulações 3D, foram apresentadas situações de modo I e misto de fratura, com modelo de dano contínuo onde foi possível observar que o MEFG e o MEFG/S cumpriram satisfatoriamente o objetivo de garantir boas previsões de carga máxima resistida e do amolecimento, mesmo utilizando malhas relativamente grosseiras. Nas situações de modo

misto o MEFG/S demonstrou qualidade insatisfatória na análise dos problemas envolvendo estruturas em danificação. Para isso foi proposto o MEFG/S<sup>mod</sup> como alternativa. Com essa modificação a melhora dos resultados foi substancial.

O MEFG/S combinado com a abordagem global-local (com PU padrão ou *flat-top*) apresentou boa capacidade em melhorar a qualidade da aproximação final, com a utilização racional de funções de enriquecimento, em malhas grosseiras, aliando características como modelagem flexível, convergência e eficiência computacional. A aplicação da estratégia descontínua garantiu versatilidade aos ensaios, devido eliminar a necessidade da utilização de elementos especiais ou de remalhamento. A combinação da abordagem global-local com enriquecimento polinomial e/ou descontínuo, combinadas ao modelo de dano (C ou C-D), mostrou-se bastante eficiente para prever a distribuição do dano e a evolução da trinca em estruturas sob processo de falha. Foi possível obter bons resultados utilizando apenas refinamento-*p*.

## 7.2 - PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Como recomendações para trabalhos futuros, propõe-se:

- Implementar enriquecimento polinomial do MEFG/S combinado com leis coesivas para controlar o processo de propagação de trincas;
- Implementação de uma estrutura de dados que permita a simulação de multi trincamentos e de coalescência;
- Analisar a influência dos parâmetros  $\sigma$  e  $k$  nas análises não lineares envolvendo dano estrutural, buscando obter valores ótimos que mais se adequem a cada modo de fratura (caso seja possível estabelecer essa diferenciação) ou um que satisfaça de maneira ótima ambos os modos de fratura;
- Desenvolvimento da PU *flat-top* para elementos tetraédricos, ampliando as análises para o MEFG/S<sup>FT</sup> 3D;
- Implementar uma técnica de recuperação mais robusta capaz de se associar melhor à não linearidade do processo de análise de dano;
- Implementar o global-local 3D.

## REFERÊNCIAS DA LITERATURA

- Abdulle, A. e G. Vilmart (2011). “A priori error estimates for finite element methods with numerical quadrature for nonmonotone nonlinear elliptic problems.” Em: *Numerische Mathematik manuscript No.*,
- Agathos, K., E. Chatzi e S. P. A. Bordas (2016). “Stable 3D extended finite elements with higher order enrichment for accurate non planar fracture.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 306, pp. 19–46.
- Ainsworth, M. e J. T. Oden (1997a). “A posteriori error estimation in finite element analysis.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1–2), pp. 1–88.
- (1997b). “A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods.” Em: *Numerische Mathematik*, 23, pp. 50–65.
- (2000). *A posteriori error estimation in finite element analysis*. John Wiley e Sons, p. 240.
- Ainsworth, M., J. Z. Zhu, A. W. Craig e O. C. Zienkiewicz (1989). “Analysis of the Zienkiewicz-Zhua-posteriori error estimator in the finite element method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(9), pp. 2161–2174.
- Allier, P.-E., L. Chamoin e P. Ladevèze (2017). “Towards simplified and optimized a posteriori error estimation using PGD reduced models.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(6), pp. 967–998.
- Alves, G. S. (2019). “Estratégia global local pelo método dos elementos finitos generalizados para simulação de falha estrutural com modelo de dano contínuo.” Tese de dout. Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.
- Arada, N., E. Casas e F. Tröltzsch (2002). “Error estimates for the numerical approximation of a semilinear elliptic control problem.” Em: *J. Comput. Optim. Appl.*, 23, pp. 201–229.
- Aragón, A. M., C. A. Duarte e P. H. Geubelle (2008). “Generalized finite element enrichment functions for discontinuous gradient field.” Em: *Numer. Methods Eng.*, 10, pp. 1–6.
- Attanayake, C., S-H. Chou e Q. Deng (2022). “Higher-Order SGFEM for One-Dimensional Interface Elliptic Problems with Discontinuous Solutions.” Em: *ArXiv*,
- Babuška, I. e U. Banerjee (2011). “Stable generalized finite element method (SGFEM).” Em: *Technical Report ICES REPORT 11-07, The Institute for Computational Engineering and Sciences, The University of Texas at Austin. April*,
- (2012). “Stable generalized finite element method (SGFEM).” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201–204, pp. 91–111.
- Babuška, I., U. Banerjee e K. Kergrene (2017). “Strongly stable generalized finite element method: Application to interface problems.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 327, pp. 58–92.

- Babuška, I., G. Caloz e J. E. Osborn (1994a). “Special Finite Element Methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients.” Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(4), 945—981.
- Babuška, I. e J. M. Melenk (1997). “The partition of unity method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 727—758.
- Babuška, I. e A. Miller (1981). *A posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method*. Rel. técn.
- Babuška, I. e W. C. Rheinboldt (1978). “A posteriori error estimates of the finite elementmethod.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, pp. 1597–1615.
- (1979). “Analysis of optimal finite element meshes in  $R^1$ .” Em: *Mathematics of Computation*, 33, pp. 435–463.
- Babuška, I. e R. Rodriguez (1993). “The problem of the selection of ana posteriori error indicator based on smoothening techniques.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(4), pp. 539–567.
- Babuška, I., T. Strouboulis, k. Copps, S. K. Gangaraj e C. Upadhyay (1998a). “A-posteriori Error Estimation for Finite Element and Generalized Finite Element Method.” Em: *TICAM REPORT 98-01, University of Texas at Austin*.
- Babuška, I., T. Strouboulis, S. K. Gangaraj, K. Copps e D. K. Datta (1998b). “A-posteriori estimation of the error in the error estimate.” Em: *Studies in Applied Mechanics*, pp. 155–197.
- Babuška, I., T. Strouboulis, A. Mathur e C. S. Upadhyay (1994b). *A posteriori error in the h-version of the finite element method and the local quality oa a posteriori error estimators*. Rel. técn.
- Babuška, I., T. Strouboulis, C. S. Upadhyay, S. K. Gangaraj e K. Copps (1994c). “Validation of a posterior error estimators by numerical approach.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 1073–1123.
- Babuška, I., O. C. Zienkiewicz e F. R. A. Oliveira (1986). *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*. John Wiley & Sons, New York., p. 393.
- Babuska, I. e B. Szabo (1982). “On the rates of convergence of the finite element method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(3), 323—341.
- Bao, G., X. Jiang, P. Li e X. Yuan (2020). *An adaptive finite element DtN method for the elastic wave scattering by biperiodic structures*. arXiv: 2007.13013 [math.NA].
- Barenblatt, G. I. (1959). “The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses, axially symmetric cracks.” Em: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 23, pp. 622–636.
- Barlow, J. (1976). “Optimal stress locations in finite element models.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(2), 243—251.

Barros, F. B., S. P. B. Proença e C. S. Barcellos (2004a). “Generalized finite element method in structural nonlinear analysis - a  $p$ -adaptative strategy.” Em: *Computational Mechanics*, 33, pp. 95–107.

— (2004b). “On error estimator and  $p$ -adaptivity in the generalized finite element method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, pp. 2373–2398.

Barth, H. D., M. E. Launey, A. A. MacDowell, J. W. Ager e R. O. Ritchie (2010). “On the effect of X-ray irradiation on the deformation and fracture behavior of human cortical bone.” Em: *Bone*, 46, 1475—1485.

Basu, P. K. e A. Peano (1983). “Adaptivity in  $P$ -Version Finite Element Analysis.” Em: *Journal of Structural Engineering*, 109, pp. 2310–2324.

Bazant, Z. P., T. Belytschko e T. P. Chang (1984). “Continuum theory for strain-softening.” Em: *Journal of Engineering Mechanics*, 110, 1666—1692.

Béchet, E., H. Minnebo, N. Moës e B. Burgardt (2005a). “Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8), pp. 1033–1056. DOI: doi:10.1002/nme.1386.

— (2005b). “Improved implementation and robustness study of the X-FEM method for stress analysis around cracks.” Em: *Int. J. Numer. Methods*, 64, pp. 1033–1056.

Belytschko, T. e T. Black (1999). “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 601—620.

Belytschko, T., R. Gracie e G. Ventura (2009). “A review of extended/generalized finite element methods for material modeling.” Em: *Modeling and Simulation in materials Science and Engineering*, 17, 1—24.

Belytschko, T., Y. Y. Lu e L. Gu (1994). “Element-free Galerkin methods.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 229–256.

Bordas, S. e M. Duflot (2007). “Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements.” Em: *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 196, 3381—3399.

Bordas, S., M. Duflot e P. Le (2007). “A simple error estimator for extended finite elements.” Em: *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 961–971.

— (2008). “A simple error estimator for extended finite elements.” Em: *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 961–971.

Borst R.; Remmers, J. J. C. de, A. Needleman e M-A. Abellan (2004). “Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap.” Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28, 583–607.

Brand, A. S., A. N. Amirkhanian e J. R. Roesler (2013). “Flexural Capacity of Rigid Pavement Concrete Slabs with Recycled Aggregates.” Em: *Reserach Report ICT-13-018, Illinois Center*

for Transportation ICT), University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC), Urbana, Illinois, pp. 1–108.

Carter, D.R. e W. C. Hayes (1977). “The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure.” Em: *J Bone Joint Surg Am*, 59, p. 7.

Casas, E. (1985). “The  $L^2$  estimates for the finite element method for the Dirichlet problem with singular data.” Em: *Numerische Mathematik*, 47, pp. 627–632.

Cerrone, A., P. Wawrzynek, G. H. Paulino e A. Ingraffea (2014). “Implementation and verification of the Park–Paulino–Roesler cohesive zone model in 3D.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 120, pp. 26–42.

Chahine, E., P. Laborde e Y. Renard (2008). “Crack tip enrichment in the XFEM using a cutoff function.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(6), pp. 629–646. DOI: 10.1002/nme.2265.

— (2011). “A non-conformal extended finite element approach: integral matching XFEM.” Em: *Appl. Numer. Math.*, 61, pp. 322–343.

Chen, L., T. Rabczuk, S.P.A. Bordas, G.R. Liu, K.Y. Zeng e P. Kerfriden (2012). “Extended finite element method with edge-based strain smoothing (Esm-XFEM) for linear elastic crack growth.” Em: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 209–212, pp. 250–265.

Chessa, J., H. Wang e T. Belytschko (2003). “On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7), pp. 1015–1038. DOI: 10.1002/nme.777.

Chevaugéon, N., N. Moes e H. Minnebo (2015). “Improved crack tip enrichment functions and integration for crack modeling using the Extended Finite Element Method.” Em: *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 11(6), pp. 597–631. DOI: 10.1615/intjmultcompeng.20130.

Cho, S.H., M.S. Choi, D.K. Kanf, J. H. Lee e C.W. Kim (2015). “Analysis on mass sensing characteristics of SWCNT-based nano-mechanical resonators using continuum mechanics based finite element analysis.” Em: *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(11), pp. 4801–4806.

Comi, C., S. Mariani e U. Perego (2007). “An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation.” Em: *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, 31(2), 213–238.

Cui, C., Q. Zhang, U. Banerjee e I. Babuška (2022). “Stable generalized finite element method (SGFEM) for three-dimensional crack problems.” Em: *Numerische Mathematik*, 152, 475–509. DOI: 10.1007/s00211-022-01312-0.

Cuvilliez, S. T., F. Feyel, E. Lorentz e S. Michel-Ponnelle (2012). “A finite element approach coupling a continuous gradient damage model and a cohesive zone model within the framework of quasi-brittle failure.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237 (240), pp. 244–259.

- Daux, C., N. Möes, J. Dolbow, N. Sukumar e T. Belytschko (2000). “Arbitrary cracks and holes with the extended finite element method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 (12), 1741—1760.
- De, S. R., J. P. Gago, D. W. Kelly, O. C. Zienkiewicz e I. Babuska (1983). “A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part II—adaptive mesh refinement.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(11), pp. 1621–1656.
- Demkowicz, L. e J. T. Oden (1986). “On a mesh optimization method based on a minimization of interpolation error.” Em: *International Journal of Engineering Science*, 24(1), pp. 55–68.
- Demkowicz, L., J. T. Oden e T. Strouboulis (1984). “Adaptive finite elements for flow problems with moving boundaries. Part I: Variational principles and a posteriori estimates.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(02), pp. 217–251.
- Dolbow, J. (1999). “An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics.” Tese de dout. Theoretical e Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA.
- Duarte, C. A., O. N. Hamzeh, T. J. Liszka e W. W. Tworzydło (2001). “A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional crack propagation.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 2227–2262.
- Duarte, C. A. e D.-J. Kim (2008). “Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8), pp. 487–504. DOI: 10.1016/j.cma.2007.08.017.
- Duarte, C. A., D.-J. Kim e I. Babuška (2005). “A Global-Local Approach for the Construction of Enrichment Functions for the Generalized FEM and Its Application to Three-Dimensional Cracks.” Em: *Advances in Meshfree Techniques*, pp. 1–26. DOI: 10.1007/978-1-4020-6095-3\_1.
- Duarte, C. A. e J. T. Oden (1995). “An h-p Meshless Method”. Em: *Texas Institute for Computation and Applied Mathematics*,
- Dugdale, D. S. (1960). “Yield of steel sheets containing slits.” Em: *Journal of the Mechanics and Physics and Solids*, 8, pp. 100–104.
- Durán, R. G., C. Padra e R. Rodríguez (2003). “A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Approximation of Eigenvalue Problems.” Em: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13(08), 1219—1229.
- Elices, M., G. V. Guinea, J. Gómez e J. Planas (2002). “The cohesive zone model: advantage, limitations and challenges.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 137—163.
- Eriksson, K. e C. Johnson (1987). “Error Estimates and Automatic Time Step Control for Nonlinear Parabolic Problems.” Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(08), 12—23.
- Evangelista Jr., F., G. de S. Alves, J. F. A. Moreira e G. O. F. de Paiva (2020). “A global–local strategy with the generalized finite element framework for continuum damage models.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 363.



- Evangelista Jr., F. e J. F. A. Moreira (2020). “A novel continuum damage model to simulate quasi-brittle failure in mode I and mixed-mode conditions using a continuous or a continuous-discontinuous strategy.” Em: *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 109.
- Evangelista Jr, F., J. R. Roesler e C. A. Duarte (2013a). “Two scale Approach Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures using the Generalized Finite Element Method.” Em: *Internationsl Journal of Solids and Structures*, 50, pp. 1991–2002.
- Evangelista Jr, F., J. R. Roesler e S. P. B. Proença (2013b). “Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 97, pp. 261–280.
- Falk, R. S. (1973). “Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates.” Em: *J. Math. Anal. Appl.*, 44, pp. 28–47.
- Fonseca, G. M., F. B. Barros, T. S. de Oliveira, H. A. S. Monteiro, L. Novelli e R. L. S. Pitangueira (2020). “2-D Crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments.” Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 118, pp. 70–83.
- Friderikos, O., E. Baranger e P. Ladevéze (2016). “Multiscale GFEM with Superposition of Crack Enrichment Functions Driven by Finite Fracture Mechanics: theory, first computation and open problems.” Em: *Composite Structures*,
- Fries, T. P. (2008). “A corrected XFEM approximation without problems in blending elements.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75, 503—532.
- Fries, T.-P. e T. Belytschko (2010). “The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94, pp. 1–12. DOI: 10.1002/nme.2914.
- Gaedicke, C. e J. Roesler (2010). “Fracture-Based Method to Determine Flexural Capacity of Concrete Beams on Soil.” Em: *Road Materials and Pavement Design*, 11, pp. 361–385.
- Geers, M. G. D. (1997). *Experimental analysis and computational modelling of damage and fracture*. Technische Universiteit Eindhoven - University of Technology.: Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, p. 170. ISBN: 90-386-0379-7.
- Gerasimov, T., M. Gerasimov e E. Stein (2012). “An explicit residual-type error estimator for Q1-quadrilateral extended finite element method in two-dimensional linear elastic fracture mechanics.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90, pp. 1118–1155.
- Giannakopoulos, A. E. (1989). “An adaptive meshing scheme for the steady state convective-diffusion problems using FEM.” Em: *Computers & Structures*, 31, 545—551.
- Golmakani, M. E. e J. Rezatalab (2014). “Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoscale plates in an elastic matrix based on nonlocal continuum mechanics.” Em: *Composite Structures*, 111, pp. 85–97.

- Gong, W., M. Hinze e Z. Zhou (2014). “A Priori Error Analysis for Finite Element Approximation of Parabolic Optimal Control Problems with Pointwise Control.” Em: *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(1), pp. 97–119.
- González, M. e M. Strugaru (2020). “Stabilization and a posteriori error analysis of a mixed FEM for convection–diffusion problems with mixed boundary conditions.” Em: *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 381.
- Gracie, R., H. Wang e T. Belytschko (2008). “Blending in the extended finite element method by discontinuous Galerkin and assumed strain methods.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(11), pp. 1645–1669. DOI: 10.1002/nme.2217.
- Griebel, M. e M. A. Schweitzer (2002). “A particle-partition of unity method - Part II: Efficient cover construction and reliable integration.” Em: *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23, pp. 1655–1682.
- (2007). “A Particle-Partition of Unity Method - Part VI: Adaptivity.” Em: *Meshfree Methods for Partial Differential Equations III*, pp. 121–147.
- Grätsch, T. e K.J. Bathe (2005). “A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis.” Em: *Computers and Structures*, 83, pp. 235–265.
- Gupta, V. (2014). “Improved conditioning and accuracy of a twoscale generalized finite element method for fracture mechanics.” Tese de dout. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Gupta, V. e C. A. Duarte (2016). “On the enrichment zone size for optimal convergence rate of the Generalized/Extended Finite Element Method.” Em: *Computers and Mathematics with Applications*, 72, pp. 481–493.
- Gupta, V., C. A. Duarte, I. Babuška e U. Banerjee (2013a). “A Stable and Optimally Convergent Generalized FEM (SGFEM) for Linear Elastic Fracture Mechanics.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,
- (2015). “Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289, 355—386.
- Gupta, V., D.-J. Kim e C. A. Duarte (2013b). “Extensions of the two-scale generalized finite element method to nonlinear fracture problems.” Em: *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 11, pp. 581–596. DOI: 10.1615/IntJMultCompEng.2013005685.
- Ha, K., H. Baek e K. Park (2015). “Convergence of fracture process zone size in cohesive zone.” Em: *Applied Mathematical Modelling*, 39(19), 5828—5836.
- Hillerborg, A., M. Modeer e P.E. Peterson (1976). “Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.” Em: *Cement Concrete Research*, 6, pp. 773–782.
- Huang, T, N. Sukumar e J. H. Prévost (2003). “Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications.” Em: *Intenational Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 7539–7552.

- Huang, T e Y. X. Zhang (2016). “Numerical modelling of mechanical behaviour of engineered cementitious composites under axial tension.” Em: *Computers and Structures*, 173, pp. 95–108.
- Jiang, Y., M. Nian e Q. Zhang (2022). “A Stable Generalized Finite Element Method Coupled with Deep Neural Network for Interface Problems with Discontinuities.” Em: *Axioms*, 11, p. 384.
- Jirásek, M. e M. Bauer (2012). “Numerical aspects of the crack band approach.” Em: *Computers and Structures*, 110–111, pp. 60–78.
- Jirásek, M. e P. Grassl (2008). “Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 75, pp. 1921–1943.
- Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Kluwer Academic Publishers, AD Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 135. ISBN: 90-247-3319-7,90-247-2743-X.
- Kachanov, L.M. (1958). “Time of the rupture process under creep conditions.” Em: *Izv. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk*, 8, pp. 26–31.
- Kela, A., M. Saxena e R. Perucchio (1987). “A hierarchical structure for automatic meshing and adaptive FEM analysis.” Em: *Engineering Computations*, 4, 104—112.
- Keller, T. S. (1994). “Predicting the compressive mechanical behavior of bone.” Em: *Journal of Biomechanics*, 27(9), 1159—1168.
- Kelly, D. W. (1984). “The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method.” Em: *Numerical Methods in Engineering*, 20, pp. 1491–1506.
- Kergrene, K., I. Babuška e U. Banerjee (2016). “Stable Generalized Finite Element Method and associated iterative schemes; application to interface problems.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 305, pp. 1–36.
- Keyak, J. H. e H. B. Skinner (1992). “Three-dimensional finite element modelling of bone: effects of element size.” Em: *Journal of Biomedical Engineering*, 14(6), 483—489.
- Kim D.-J. and Duarte, C. A. and Proenca S. P. (2012). “A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems.” Em: *Computational Mechanics*, 50(5), pp. 563–578.
- Kim, D.-J., C. A. Duarte e J. P. Pereira (2008). “Analysis of Interacting Cracks Using the Generalized Finite Element Method With Global-Local Enrichment Functions.” Em: *Journal of Applied Mechanics*, 75(5).
- Kim, D.-J., J. P. Pereira e C. A. Duarte (2009). “Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,

- Kim, J. e C. A. Duarte (2015). “A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104, pp. 1139–1172.
- Kim, J., A. Simone e C. A. Duarte (2016). “Mesh refinement strategies without mapping of nonlinear solutions for the generalized and standard FEM analysis of 3-D cohesive fractures.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,
- Korelc, J. e P. Wriggers (1996). “An efficient 3-D enhanced strain element with Taylor expansion of the shape functions.” Em: *Computational Mechanics*, 19, pp. 30–40.
- Kuan-Jung, J. e E. L. Wilson (1988). “An adaptive finite element technique for structural dynamic analysis.” Em: *Computers & Structures*, 30, 1319—1339.
- Kyza, T. (2011). “A posteriori error analysis for the Crank-Nicolson Method for linear Schrodinger equations.” Em: *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 45, pp. 761–778.
- Lé, B., G. Legrain e N. Moës (2017). “Mixed dimensional modeling of reinforced structures.” Em: *Finite Elements in Analysis and Design*, 128, pp. 1–18.
- Laborde, P., J. Pommier, Y. Renard e M. Salaün (2005). “High order extended finite element method for cracked domains.” Em: *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 64, pp. 354–381.
- Lancaster, P. e K. Salkauskas (1981). “Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods.” Em: *Mathematics of Computation*, 37, 141—158.
- Lang, C., D. Makhija, A. Doostan e K. Maute (2014). “A simple and efficient preconditioning scheme for heaviside enriched XFEM.” Em: *Computational Mechanics*, 54(5), pp. 1357–1374. DOI: 10.1007/s00466-014-1063-8.
- Lemaitre, J. e J. L. Chaboche (1994). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press., p. 582. ISBN: 0521328535.
- Li, H., J. Avecillas-Leon e C. A. Duarte (2022). “A non-intrusive iterative generalized finite element method for multiscale coupling of 3-D solid and shell models.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 402, pp. 1–34. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115408>.
- Li, H. e C. A. Duarte (2018). “A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 337, pp. 28–65. DOI: 10.1016/j.cma.2018.03.030.
- Li, H., P. O’Hara e C. A. Duarte (2021). “Non-intrusive coupling of a 3-D Generalized Finite Element Method and Abaqus for the multiscale analysis of localized defects and structural features.” Em: *Finite Elements in Analysis and Design*, 193, pp. 1–21. DOI: 10.1016/j.finel.2021.103554.
- Li, L. e P. Bettess (1997). “Adaptive Finite Element Methods: A Review.” Em: *Applied Mechanics Reviews*, 50(10), pp. 1581–591.

- Li, Y. N. e R. Y. Liang (1992). “Stability Theory of Cohesive Crack Model.” Em: *Journal of Engineering Mechanics*, 118, pp. 587–603.
- Lin, G., X. G. Meng, A. Cornec e K. H. Schwalbe (1999). “The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints.” Em: *International Journal of Fracture*, 96, 37—54.
- Lins, R. F. (2011). “Estimador de erro a posteriori baseado em recuperação do gradiente para o Método dos Elementos Finitos Generalizados.” Diss. de mestr. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, USP, p. 94.
- Lins, R. M., M. D. C. Ferreira, S. P. B. Proença e C.A. Duarte (2015). “An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the stable generalized/extended finite element method.” Em: *Computational Mechanics*, 56, 947—965.
- Lins, R. M., S. P. B. Proença e C. A. Duarte (2019). “Efficient and accurate stress recovery procedure and a posteriori error estimator for the stable generalized/extended finite element method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1—28.
- Malekan, M. e F. B. Barros (2016). “Well-conditioning global–local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics.” Em: *Computational Mechanics*, 58, pp. 819–831.
- Malekan, M., F. B. Barros e R. L. S. Pitangueira (2018). “Fracture analysis in plane structures with the two-scale G/XFEM method.” Em: *International Journal of Solids and Structures*, DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.07.00.
- Mazars, J. (1984). “Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non linéaire e à la rupture du béton de structure.” Tese de dout. Université de Paris VI.
- Mazars, J. e G. Pijaudier-Cabot (1989). “Continuum damage theory - application to concrete.” Em: *Journal of Engineering Mechanics*, 115, pp. 345–365.
- McGregor, C., N. Zobeiry, A. Vaziri R. Poursartip e Xinran Xiao (2017). “Calibration and Validation of a Continuum Damage Mechanics Model in Aid of Axial Crush Simulation of Braided Composite Tubes.” Em: *Composites: Part A*,
- Melenk, J. M. (1995). “On Generalized Finite Element Methods”. Em.
- Melenk, J. M. e I. Babuška (1996). “The partition of unity finite element method: basic theory and applications.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 289—314.
- Meyer Jr, H. W. e R. M. Brannon (2012). “A model for statistical variation of fracture properties in a continuum mechanics code.” Em: *International Journal of Impact Engineering*, 42, pp. 48–58.
- Minamisawa, T. (1981). “Japanese only.” Em.
- Miura, M., J. Nakamura, Y. Matsuura, Y. Wako, T. Suzuki, S. Hagiwara e S. Ohtori (2017). “Prediction of fracture load and stiffness of the proximal femur by CT-based specimen specific finite element analysis: cadaveric validation study.” Em: *BMC Musculoskeletal Disorders*, 18, pp. 1–8.

- Moës, N. e T. Belytschko (2002). “Extended finite element method for cohesive crack growth.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 813—833.
- Moës, N., J. Dolbow e T. Belytschko (1999). “A finite element method for crack growth without remeshing.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 131—150.
- Noor, A. K. (1986). “Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis.” Em: *Finite Elements in Analysis and Design*, 2(4), pp. 333–346.
- Nooru-Mohamed, M. B. (1992). “Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach.” Tese de dout. Delft University of Technology, Delft, Netherlands.
- Novelli, L., T. S. de Oliveira, H. A. da S. Monteiro, G. M. Fonseca, R. L. da S. Pitangueira e F. B. Barros (2020). “Stable Generalized/eXtended Finite Element Method with global–local enrichment for material nonlinear analysis.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 384.
- Ogden, R. W. (1997). *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, p. 546. ISBN: 0486696480,9780486696485.
- O’Hara, P., C. A. Duarte e T. Eason (2009). “Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26), pp. 1857–1871.
- O’Hara, P., C. A. Duarte e T. Eason (2016). “A two-scale generalized finite element method for interaction and coalescence of multiple crack surfaces.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 163, pp. 274–302.
- O’Hara, P., C. A. Duarte, T. Eason e J. Garzon (2012). “Efficient analysis of transient heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients.” Em: *Computational Mechanics*, 51(5), pp. 743–764.
- Oliveira, T. S. de, F. B. Barros, G. M. Fonseca e R. L. S. Pitangueira (2019). “2-D fracture mechanics problems by SGFEM.” Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 108, pp. 279–294.
- Oliveira, T. S. de. (2018). “Análise de problemas bidimensionais pelo método dos elementos finitos generalizados estável (MEFGE).” Diss. de mest. Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia., p. 117.
- Oliver, J. (1995). “Continuum Modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models.” Em: *Computational Mechanics*, 17, 49—61.
- Paiva, G. O. F. de (2017). “Aplicação e análise do MEFGE com enriquecimento polinomial na simulação de estruturas em processo de danificação.” Diss. de mest. Universidade de Brasília, UnB, p. 93.
- Paiva, G. O. F. de, J. F. A. Moreira, G. S. Alves e F. Evangelista Jr. (2016). “Estudo do enriquecimento polinomial para análise de estruturas em processo de danificação.” Em: *XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*,

- Pal, M. K. e A. Rajagopal (2014). “Sensitivity Analysis of Linear Elastic Cracked Structures Using Generalized Finite Element Method.” Em: *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 15(5), pp. 422–43.
- Palmerio, B. (1988). “A two-dimensional fem adaptive moving-node method for steady euler flow simulations.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, 315–340.
- Park, K. e G. H. Paulino (2013). “Cohesive zone models: A critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces.” Em: *Applied Mechanics Reviews*, 64, pp. 1–20.
- Park, K., G. H. Paulino e J. R. Roesler (2009). “A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture.” Em: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57, pp. 891–908.
- Passos, J. P. (2012). “Desenvolvimento e implementação de um procedimento adaptativo para elementos finitos triangulares baseado em estimador de erro a posteriori.” Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 24.
- Pereira, J. P., C. A. Duarte, D. Guoy e X. Jiao (2009b). “*hp*-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77, pp. 601–633.
- Pereira, J. P. A., D.-J. Kim e C. A. Duarte (2012). “A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures.” Em: *Computational Mechanics*, 49(1), pp. 99–121. DOI: 10.1007/s00466-011-0631-4.
- Pereira, L. F., J. Weerheijm e L. J. Sluys (2016). “A new rate-dependent stress-based nonlocal damage model to simulate dynamic tensile failure of quasi-brittle materials.” Em: *International Journal of Impact Engineering*, 94, pp. 83–95.
- Prange, C., S. Loehnert e P. Wriggers (2012). “Error estimation for crack simulations using the XFEM.” Em: *International Journal of Computational Methods*, 91, pp. 1459–1474.
- Proença, S. P. B. e I. Torres (2008). “Generalized Finite Element method for Nonlinear Three dimensional Analysis of Solids.” Em: *International Journal of Computational Methods*, 5, pp. 37–62.
- Ramos, C. S. (2019). “Partições da Unidade *flat-top* e trigonométricas no Método dos Elementos Finitos Generalizados.” Diss. de mestr. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 96.
- Ramos, C. S. e S. P. B. Proença (2018). “On the employment of *flat-top* partition of unity on GFEM.” Em: *XIII Simpósio de Mecânica Computacional - SIMMEC*.
- Rannacher, R. e R. Scott (1982). “Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations.” Em: *Mathematics of Computation*, 38, pp. 437–445.
- Ransom, J. B. e N. F. Knight (1990). “Global/local stress analysis of composite panels.” Em: *Computers & Structures*, 37(4), pp. 375–395.
- Ródenas, J. J., O. A. González-Estrada, P. Díez e F. J. Fuenmayor (2010). “Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, pp. 2607–2621.

- Ródenas, J. J., O. A. González-Estrada, F. J. Fuenmayor e F. Chinesta (2013). “Enhanced error estimator based on a nearly equilibrated moving least squares recovery technique for FEM and XFEM.” Em: *Computational Mechanics*, 52(2), 321—344.
- Reddy, J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method*. Mc Graw Hill,
- Rivière, B., M. F. Wheeler e V. Girault (2001). “A Priori Error Estimates for Finite Element Methods Based on Discontinuous Approximation Spaces for Elliptic Problems.” Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(3), pp. 902–931.
- Rodrigues, E. A. (2015). “Um modelo multiescala concorrente para representar o processo de fissuração do concreto.” Diss. de mestr. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, p. 196.
- Roesler, J. R., G. H. Paulino, K. Park e C. Gaedicke (2007a). “Concrete Fracture Prediction Using Bilinear Softening.” Em: *Cement and Concrete Composites*, 29, pp. 300–312.
- (2007b). “Fracture behavior of functionally graded concrete materials for rigid pavements.” Em: *Transportation Research Record*, 2037, pp. 40–49.
- Roth, S-N., P. Leger e A. Soulaïmani (2015). “A combined XFEM–damage mechanics approach for concrete crack propagation.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283, pp. 923–955.
- Sanchez-Rivadeneira, A. G. e C. A. Duarte (2021). “A high-order generalized Finite Element Method for multiscale structural dynamics and wave propagation.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 384.
- Santos, K. F. e F. B. Barros (2020). “SGFEM: a numerical investigation of the two-scale simulation of 3D elastic fracture.” Em: *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(6).
- Sato, F. M. (2017). “Experimentos numéricos com versões estáveis do Método dos Elementos Finitos Generalizados.” Diss. de mestr. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, p. 97.
- Sato, F. M., D. P. Neto e S. P. B. Proença (2017). “Numerical experiments with the Generalized Finite Element Method based on a flat-top Partition of Unity.” Em: *Latin American Journal of Solids and Structures*, 15, pp. 1–16.
- Schlangen, E. (1993). “Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete.” Tese de dout. Delft University of Technology, p. 117.
- Schweitzer, M. A. e S. Wu (2014). “Numerical Integration of On-the-Fly-Computed Enrichment Functions in the PUM.” Em: *Meshfree Methods for Partial Differential Equations VII*, pp. 247–267.
- Scott, R. (1976). “Optimal  $L^\infty$  Estimates for the Finite Element Method on Irregular Meshes\*.” Em: *Mathematics of Computation*, 30, pp. 681–697.



Shakya, P. e R. K. Sinha (2019). “A Priori Error Estimates for Finite Element Discretizations of Parabolic Optimal Control Problems with Measure Data.” Em: *Numerical Functional Analysis and Optimization*,

Shen, Y. e A. Lew (2009). “An optimally convergent discontinuous Galerkin-based extended finite element method for fracture mechanics.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, DOI: 10.1002/nme.2781.

Silva, I. A. da, R. D. Machado, M. Arndt e P. de O. Weinhardt (2022). “Assessment of the flat-top stable GFEM for free vibration analysis.” Em: *Computers and Mathematics with Applications*, 117, pp. 271–283.

Simo, J. C. e M. S. Rifai (1990). “A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, pp. 1595–1638.

Simone, A., G. N. Wells e L. J. Sluys (2003). “From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp. 4581–4607.

Smith, E. (1974). “The structure in the vicinity of a crack tip: a general theory based on the cohesive zone model.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 6, pp. 213–222.

Stewart, J. R. e T. J. R. Hughes (1997). “An a posteriori error estimator and hp-adaptive strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains.” Em: *Finite Elements in Analysis and Design*, 25, 1–26.

— (1998). “A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158, 1–22.

Strouboulis, T., I. Babuška e K. Copps (2000a). “The design and analysis of the generalized finite element method.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181, 43–69.

Strouboulis, T., I. Babuška, S. K. Gangaraj, K. Copps e D. K. Datta (1999). “A posteriori estimation of the error in the error estimate.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4), 387–418.

Strouboulis, T., K. Copps e I. Babuška (2000b). “The Generalized Finite Element Method: an example of its implementation and illustration of its performance.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, pp. 1401–1417.

— (2001). “The generalized finite element method.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 4081–4193.

Strouboulis, T., L. Zhang, D. Wang e I. Babuška (2006). “A posteriori error estimation for generalized finite element methods.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 9–12.

Tejchman, J. e J. Bobinski (2013). *Continuous and discontinuous modelling of fracture in concrete using FEM*. Sharif University of Technology, Iran., p. 416. ISBN: 9783642284632.

Torres, I. F. R. (2003). “Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos.” Tese de dout. Escola de Engenharia de São Carlos - USP, p. 262.

Truesdell, C. A. (1966). *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg., p. 283. ISBN: 978-3-540-03683-8,978-3-642-64976-9.

— (1991). *A First Course in Rational Continuum Mechanics: General Concepts*. 2 Rev. Sub. Vol. v. 1, Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc, p. 417. ISBN: 0127013008,9780127013008.

Vandoren, B., K. de Proft e L. J. Sluys (2013). “Mesoscopic modelling of masonry using weak and strong discontinuities.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255, pp. 167–182.

Vavrik, D. e I. Jandejsek (2014). “Experimental evaluation of contour J integral and energy dissipated in the fracture process zone.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 129, pp. 14–25.

Ventura, G., R. Gracie e T. Belytschko (2009). “Fast integration and weight function blending in the extended finite element method.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1), pp. 1–9. DOI: doi:10.1002/nme.2387.

Vree, J. H. P. de, W. A. M. Brekelmans e M. A. J. Van Gils (1995). “Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics.” Em: *Computers and Structures*, 55, pp. 581–588.

Wang, Z., T. Yu, T. Q. Bui, S. Tanaka, C. Zhang, S. Hirose e J. L. Curiel-Sosa (2016). “3-D local mesh refinement XFEM with variable-node hexahedron elements for extraction of stress intensity factors of straight and curved planar cracks.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,

Wei, M. D., F. Dai, N. W. Xu, T. Zhao e K.W. Xia (2016). “Experimental and numerical study on the fracture process zone and fracture toughness determination for ISRM-suggested semi-circular bend rock specimen.” Em: *Engineering Fracture Mechanics*, 154, pp. 43–56.

Wells, G. N. e L. J. Sluys (2001). “A new method for modeling cohesive cracks using finite elements.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, pp. 2667–2682.

Winkler, B., G. Hofstetter e H. Lehar (2004). “Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining.” Em: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28(78), 797—819.

Winkler, B., G. Hofstetter e G. Niederwanger (2001). “Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking.” Em: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications* 215(2), 75—86.

Woo, K. e J. D. Whitcomb (1993). “Macro finite element using subdomain integration.” Em: *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(12), 937—949.

Xie, J., A. M. Waas e M. Rassaian (2016). “Estimating the process zone length of fracture tests used in characterizing composites.” Em: *International Journal of Solids and Structures*, 100(101), pp. 111–126.

- Yagawa, G. (2011). “Computational performance of Free Mesh Method applied to continuum mechanics problems.” Em: *Proc. Jpn. Acad.*, 87, pp. 135–151.
- Zhang, Q., I. Babuška e U. Banerjee (2016). “Robustness in stable generalized finite element methods (SGFEM) applied to Poisson problems with crack singularities.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311, pp. 476–502.
- Zhang, Q., U. Banerjee e I. Babuška (2014). “Higher order stable generalized finite element method.” Em: *Numerische Mathematik*, 128, pp. 1–29.
- Zhang, T. e J. Zhao (2015). “A posteriori error estimates of finite element method for the time-dependent Oseen equations.” Em: *Applicable Analysis*, 95(5), pp. 1144–1163.
- Zienkiewicz, O. C., B. Booromand e J. Z. Zhu (1999). “Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 76, pp. 111–125.
- Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor e J. Z. Zhu (2005). *The Finite Element Method Set. Its Basis and Fundamentals*. 6ª ed. Butterworth Heinemann, Oxford, USA., p. 1872. ISBN: 978-0-7506-6431-8.
- Zienkiewicz, O. C. e J. Z. Zhu (1987). “Simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 337–357.
- (1992a). “Superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part I: The recovery technique.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, pp. 1331–1364.
- (1992b). “Superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part II: Error estimates and adaptivity.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, pp. 1365–1382.
- (1992c). “The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101, pp. 207–224.
- Zienkiewicz, O. C., J. Z. Zhu e J. Wu (1993). “Superconvergent patch recovery techniques - some further tests.” Em: *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(3), pp. 251–258.
- Özkaya, N. e M. Nordin (1999). *Fundamentals of biomechanics*. Nova Iorque.: Springer, p. 388. ISBN: 978-1-4419-3116-0.