

TESE DE DOUTORADO

**Simulação de cone de água e cone de gás  
em poços de petróleo horizontais e verticais  
usando o Método dos Elementos de Contorno**

**Gustavo Silva Vaz Gontijo**

**Brasília, Agosto de 2022**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia

TESE DE DOUTORADO

**Simulação de cone de água e cone de gás  
em poços de petróleo horizontais e verticais  
usando o Método dos Elementos de Contorno**

**Gustavo Silva Vaz Gontijo**

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia Mecânica  
da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília como requisito parcial  
para obtenção do grau de Doutor em Sistemas Mecatrônicos.*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Eugênio L. F. Fortaleza, ENM/UnB  
*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Manoel Porfírio Cordão Neto, ENC/UnB  
*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Lucas Silveira Campos, DEM/UFES  
*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

Dr. Andres Felipe Galvis Rodriguez, University of  
Portsmouth  
*Examinador externo*

\_\_\_\_\_

## FICHA CATALOGRÁFICA

GONTIJO, GUSTAVO SILVA VAZ

Simulação de cone de água e cone de gás em poços de petróleo horizontais e verticais usando o Método dos Elementos de Contorno

[Distrito Federal] 2022.

xii, 155, 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Doutor, Sistemas Mecatrônicos, 2022).

Tese de Doutorado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- |                                     |                                  |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. Método dos Elementos de Contorno | 2. Interface móvel               |
| 3. Cone de água                     | 4. Cone de gás                   |
| 5. Formulação axissimétrica         | 6. Poços de petróleo horizontais |
| 7. Poços de petróleo verticais      |                                  |
| I. ENM/FT/UnB                       | II. Título (série)               |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GONTIJO, G. S. V. (2022). Simulação de cone de água e cone de gás em poços de petróleo horizontais e verticais usando o Método dos Elementos de Contorno, Qualificação de Doutorado em Sistemas Mecatrônicos, Publicação ———, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 155

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gustavo Silva Vaz Gontijo

TÍTULO: Simulação de cone de água e cone de gás em poços de petróleo horizontais e verticais usando o Método dos Elementos de Contorno.

GRAU: Doutor ANO: 2022

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta qualificação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse trabalho de conclusão de curso pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Gustavo Silva Vaz Gontijo

gustavo@vazgontijo.com.br

*...não seremos jamais mais que grãos de poeira no céu.*

Almir Sater, Paulo Simões e Renato Teixeira

## Dedicatória

*Dedico este trabalho aos meus avós Abel e Zélia, minhas referências de A a Z.*

## Agradecimentos

*A Ingrid, minha esposa, companheira de vida e de tudo, pelo amor e apoio incondicional. Por nunca deixar de acreditar, mesmo nos momentos em que eu duvidei.*

*Ao meu filho, Théo, hoje com 8 anos de idade, a quem privei de muitos momentos de companhia durante o desenvolvimento deste trabalho. Por entender e ter paciência. Por ser meu incentivador e por me mostrar todos os dias que cientistas e crianças têm em comum a curiosidade e a vontade de desvendar o funcionamento da natureza.*

*Aos professores Éder Lima de Albuquerque e Eugênio Fortaleza, que me acompanharam durante toda a minha vida acadêmica, pela agradável convivência, pela orientação e pela amizade. Por serem dois gigantes que sempre me ofereceram os ombros para que eu pudesse subir e enxergar mais longe. Muito Obrigado!*

---

## RESUMO

Este trabalho apresenta a aplicação do Método dos Elementos de Contorno no desenvolvimento de simuladores para o estudo dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais e verticais. O escopo é a modelagem numérica bidimensional e axissimétrica dos fenômenos utilizando o Método dos Elementos de Contorno com sub-regiões e interface entre os fluidos modelada como uma fronteira móvel. Este texto traz uma revisão acerca destes fenômenos e de seu impacto na indústria de petróleo, de forma a situar o leitor sobre a motivação para a escolha da aplicação.

São utilizados dois modelos de escoamento potencial, monofásico e bifásico. Um terceiro modelo, de escoamento difusivo monofásico, também é aplicado. Além desses, são adotados modelos monofásico e bifásico para escoamento potencial em domínios axissimétricos. Todo o tratamento matemático envolvido na dedução das equações governantes dos modelos é apresentado. Também estão presentes os desenvolvimentos matemáticos de diversas formulações do Método dos Elementos de Contorno. São elas a formulação para problemas potenciais bidimensionais, a formulação de Reciprocidade Dual para problemas regidos pela equação da difusividade em domínio bidimensional, a formulação para problemas potenciais em domínio tridimensional axissimétrico, e a formulação de sub-regiões, para problemas sobre domínios homogêneos por partes.

Uma alternativa na modelagem do poço de petróleo horizontal em domínio bidimensional é proposta, utilizando um conjunto de sumidouros pontuais para representar seu perímetro. Esta abordagem permite analisar de forma satisfatória o comportamento da interface entre fluidos, mesmo depois que ela já tenha tocado o poço.

Os aspectos principais da implementação dos simuladores são documentados de forma a permitir a utilização deste texto como consulta para implementações semelhantes. A determinação e aplicação das condições de contorno para todos os modelos, incluindo as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface entre fluidos, são apresentadas.

Os simuladores propostos foram desenvolvidos e validados em comparação a resultados analíticos, numéricos e experimentais.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno, Interface móvel, Escoamento potencial, Cone de água, Cone de gás, Reservatórios de petróleo.

---

## ABSTRACT

This thesis presents the application of the Boundary Element Method in the development of simulators for the study of water and gas coning phenomena in horizontal and vertical oil wells. The scope is the two-dimensional and axisymmetric numerical modeling of the phenomena using the Boundary Element Method with sub-regions and interface between fluids modeled as a moving boundary. This text provides a review about these phenomena and their impact on the petroleum industry, in order to situate the reader on the motivation for the choice of the application.

Two potential flow models are used, single-phase and two-phase. A third model, single-phase diffusive flow, is also applied. In addition to these, single-phase and two-phase models are adopted for potential flow in axisymmetric domains. All the mathematical treatment involved in the deduction of the governing equations of the models is presented. The mathematical developments of several formulations of the Boundary Element Method are also presented. These are the formulation for two-dimensional potential problems, the Dual Reciprocity formulation for problems governed by the diffusivity equation in a two-dimensional domain, the formulation for potential problems in a three-dimensional axisymmetric domain, and the subregion formulation, for problems over piecewise homogeneous domains.

An alternative in modeling the horizontal oil well in two-dimensional domain is proposed, using a set of point sinks to represent its perimeter. This approach allows satisfactory analysis of the behavior of the fluid interface, even after it has already touched the well.

The main aspects of the simulators implementation are documented in a way that allows this text to be used as a reference for similar implementations. The determination and application of the boundary conditions for all models, including the compatibility and equilibrium conditions at the fluid interface, are presented.

The proposed simulators have been developed and validated against analytical, numerical, and experimental results.

**Keywords:** Boundary Element Method, Moving interface, Potential flow, Water coning, Gas coning, Oil reservoirs.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1	Os cones de água e de gás .....	1
1.2	O Método dos Elementos de Contorno .....	2
1.3	Objetivo e contribuições do trabalho .....	5
1.4	Descrição do manuscrito .....	6
<b>2</b>	<b>Os fenômenos dos cones de água e de gás</b> .....	<b>8</b>
2.1	Introdução .....	8
2.2	O reservatório de petróleo .....	8
2.3	O poço produtor .....	9
2.4	Etapas da produção .....	12
2.4.1	Mecanismos de recuperação .....	12
2.4.2	Mecanismos de elevação .....	13
2.5	Produção de fluidos indesejados .....	13
2.6	Os cones de água e de gás .....	14
2.6.1	O fenômeno .....	14
2.6.2	Vazão crítica .....	15
2.6.3	Aspectos teóricos .....	16
2.6.4	Desvantagens .....	17
2.6.5	Abordagens .....	17
<b>3</b>	<b>Escoamento em meios porosos</b> .....	<b>19</b>
3.1	Introdução .....	19
3.2	A lei de Darcy .....	19
3.2.1	Considerações sobre a velocidade .....	22
3.2.2	Importância prática da lei de Darcy .....	22
3.3	Escoamento potencial .....	23
3.3.1	A equação governante .....	23
3.3.2	Domínio bidimensional .....	24
3.3.3	Domínio axissimétrico .....	24
3.4	Escoamento difusivo .....	25
3.4.1	A equação governante .....	25
3.4.2	Relação entre escoamento difusivo e potencial .....	29

3.5	Condições de contorno para a representação dos fenômenos dos cones .....	29
3.5.1	Representação dos fenômenos em poços horizontais .....	30
3.5.2	Representação dos fenômenos em poços verticais .....	33
3.5.3	O problema de <i>Quick Drawdown</i> .....	35
<b>4</b>	<b>O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos potenciais bidimensionais .....</b>	<b>38</b>
4.1	Introdução .....	38
4.1.1	Métodos numéricos .....	39
4.2	Soluções fundamentais .....	40
4.2.1	Solução fundamental da velocidade .....	42
4.2.2	Soluções fundamentais ortotrópicas .....	43
4.3	A equação integral de contorno .....	44
4.4	Discretização das equações .....	51
4.5	Elementos de contorno lineares contínuos .....	52
4.6	Método de solução .....	54
4.6.1	Cálculo do potencial e da velocidade no contorno .....	55
4.6.2	Cálculo do potencial e da velocidade em pontos internos .....	58
4.7	Integração analítica das matrizes de influência $H$ e $G$ .....	59
<b>5</b>	<b>O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos potenciais totalmente axissimétricos .....</b>	<b>61</b>
5.1	Introdução .....	61
5.2	Formulação axissimétrica .....	61
5.3	Solução fundamental axissimétrica .....	62
5.3.1	Solução fundamental da velocidade .....	63
5.3.2	Tratamento matemático do eixo de simetria .....	64
5.4	Equação integral de contorno e sua discretização .....	65
<b>6</b>	<b>O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos difusivos bidimensionais .....</b>	<b>66</b>
6.1	Introdução .....	66
6.2	Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y)$ .....	66
6.2.1	Solução em pontos internos .....	70
6.2.2	A função $f$ .....	70
6.3	Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y, u)$ .....	71
6.4	Equação da difusividade hidráulica .....	72
<b>7</b>	<b>Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sub-regiões .....</b>	<b>75</b>
7.1	Introdução .....	75
7.2	Fundamentação teórica .....	75
7.3	Equacionamento .....	77
<b>8</b>	<b>Implementação dos simuladores .....</b>	<b>85</b>

8.1	Introdução .....	85
8.2	Parâmetros de entrada.....	86
8.2.1	Parâmetros calculados.....	86
8.3	Condições de contorno .....	87
8.3.1	Condições de contorno para os simuladores de poços horizontais .....	87
8.3.2	Condições de contorno para os simuladores de poços verticais .....	94
8.4	Movimentação da interface .....	94
8.4.1	Movimentação pela velocidade calculada .....	95
8.4.2	Movimentação pelo potencial calculado.....	96
8.5	Modelagem do poço produtor.....	97
8.5.1	Tipos de representação .....	97
8.5.2	Características da representação adotada .....	100
8.6	Método de solução .....	102
8.6.1	Condição inicial .....	102
8.6.2	Procedimento de cada iteração.....	103
<b>9</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>104</b>
9.1	Introdução .....	104
9.2	Validação.....	104
9.2.1	Solução fundamental ortotrópica .....	104
9.2.2	Validação dos simuladores bidimensionais.....	106
9.2.3	Validação dos simuladores axissimétricos.....	110
9.3	Resultados .....	117
9.3.1	Simuladores bidimensionais .....	117
9.3.2	Simuladores axissimétricos .....	122
<b>10</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>130</b>
10.1	Publicações realizadas .....	131
10.2	Sugestões de trabalhos futuros .....	132
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>133</b>

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Célula de Hele-Shaw do Laboratório de Automação Offshore da Universidade de Brasília (Fortaleza et al., 2019) .....	6
2.1	Configuração geral de um reservatório de petróleo (WSGS, 2014).....	9
2.2	Poços vertical e horizontal .....	10
2.3	Revestimento perfurado e ranhurado (Catálogo National Oilwell Varco, 2014) .....	10
2.4	Cone em poço vertical e em poço horizontal (SPE, 2019) .....	14
2.5	Representação esquemática das posições de interface estável em vazões subcríticas e crítica (Fortaleza et al., 2019).....	15
3.1	Representação bidimensional do reservatório .....	30
3.2	Aspecto geral do problema cone de gás .....	30
3.3	Aspecto geral do problema de cone de água .....	31
3.4	Representação axissimétrica do reservatório .....	33
3.5	Aspecto geral do problema cone de gás em domínio axissimétrico.....	34
3.6	Aspecto geral do problema de cone de água em domínio axissimétrico.....	34
3.7	Aspecto geral do problema de <i>Quick Drawdown</i> em domínio axissimétrico .....	36
4.1	Pontos fonte e campo .....	41
4.2	Modificação do contorno .....	47
4.3	Ângulos interno e externos .....	50
4.4	Discretização do contorno .....	51
4.5	Aproximação dos elementos reais por elementos de contorno .....	52
4.6	Elemento de contorno linear contínuo .....	52
4.7	Funções de forma (Albuquerque, 2013). .....	53
4.8	Exemplo de aplicação - condições de contorno .....	55
4.9	Convergência com distintos tipos de elementos de contorno (Braga, 2012).....	60
7.1	Domínio composto por duas sub-regiões.....	76
7.2	Problema de duas sub-regiões .....	77
8.1	Exemplo: reservatório retangular contendo apenas um fluido .....	87
8.2	Exemplo: reservatório retangular contendo dois fluidos .....	92
8.3	Exemplos de reservatórios retangulares axissimétricos.....	94
8.4	Abordagens para a modelagem geométrica do poço horizontal .....	98

8.5	Interação interface-poço.....	99
8.6	Abordagens para a modelagem geométrica do poço vertical .....	99
8.7	Balanceamento da intensidade dos sumidouros pontuais.....	101
8.8	Posição do ponto central da interface ao longo do tempo .....	102
8.9	Velocidade média normal ao elemento .....	102
9.1	Validação da solução fundamental ortotrópica.....	105
9.2	Comparação dos resultados para a posição da interface.....	108
9.3	Comparação dos resultados para a posição da interface (ampliação) .....	108
9.4	Representação esquemática da validação do regime transiente. ....	109
9.5	Ponto central da interface ao longo do tempo, retornando à posição inicial.....	109
9.6	Condução de calor em cilindro maciço - malha, condições de contorno e distribuição de temperatura.....	111
9.7	Comparação de resultados - cilindro maciço.....	111
9.8	Erro RMS x número de nós - cilindro maciço .....	112
9.9	Erro RMS x número de nós - cilindro maciço (escala logarítmica) .....	112
9.10	Condução de calor em cilindro vazado - malha, condições de contorno e distribuição de temperatura.....	113
9.11	Comparação de resultados - cilindro vazado.....	113
9.12	Erro RMS x número de nós - cilindro vazado .....	114
9.13	Erro RMS x número de nós - cilindro vazado (escala logarítmica) .....	114
9.14	Condução de calor em semiesfera oca - malha, condições de contorno e distribuição de temperatura.....	115
9.15	Comparação de resultados - semiesfera oca.....	115
9.16	Erro RMS x número de nós - semiesfera oca .....	116
9.17	Erro RMS x número de nós - semiesfera oca (escala logarítmica) .....	116
9.18	Comparação entre os deslocamentos do nó central da interface nos escoamentos potencial e difusivo.....	117
9.19	Comparação da propagação do potencial. Coluna esquerda: escoamento difusivo. Coluna direita: escoamento potencial .....	118
9.20	Fluxo que entra no domínio simulado - escoamento potencial.....	119
9.21	Cone de gás no simulador bifásico, com diferentes alturas de coluna de gás .....	120
9.22	Fluxo que entra em cada sub-região .....	120
9.23	Gradientes de potencial no instante $t$ .....	121
9.24	Gradientes de pressão no instante $t$ .....	121
9.25	Geometria simulada e gradiente de potencial obtido .....	122
9.26	Deslocamento do nó central da interface ao longo do tempo de simulação .....	123
9.27	Fluxo que entra no domínio simulado ao longo do tempo.....	123
9.28	Comparação entre resultados com MEC Isogeométrico e o presente trabalho - deslocamento da ponta do cone ao longo do tempo (adaptado de Nascimento (2021))...	124
9.29	Geometria simulada e gradiente de potencial obtido .....	125
9.30	Geometria simulada e gradiente de potencial obtido .....	126

9.31 Problema de <i>Quick Drawdown</i> - geometria .....	127
9.32 Problema de <i>Quick Drawdown</i> - comparação com resultados disponíveis na literatura	127
9.33 Reservatório simulado. ....	128
9.34 Interface estável em incrementos de 5% da vazão crítica. ....	129
9.35 Profundidade do cone de gás versus vazão. ....	129

# LISTA DE TABELAS

4.1	Exemplo de aplicação - variáveis conhecidas e desconhecidas .....	55
9.1	Temperaturas analítica e numéricas, com erros percentuais .....	105
9.2	Comparação dos resultados obtidos.....	107
9.3	Parâmetros do reservatório simulado .....	128

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$A$	Área [ $m^2$ ]
$c$	Compressibilidade do fluido [ $1/Pa$ ]
$c_f$	Compressibilidade efetiva da formação [ $1/Pa$ ]
$c_t$	Compressibilidade total [ $1/Pa$ ]
$g$	Aceleração da gravidade [ $m/s^2$ ]
$k$	Permeabilidade absoluta do meio poroso [ <i>darcy</i> ], [ $m^2$ ]
$K$	Condutividade hidráulica do meio [ $m/s$ ]
$p$	Pressão [ $Pa$ ]
$q$	Velocidade aparente do fluido [ $m/s$ ]
$Q$	Fluxo volumétrico [ $m^3/s$ ]
$u_f$	Velocidade do fluido [ $m/s$ ]

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Razão entre as massas específicas dos fluidos[–]
$\Gamma$	Contorno aproximado
$\delta$	Função delta de Dirac
$\eta$	Constante de difusividade hidráulica [ $m^2/s$ ]
$\lambda$	Função altura da interface [ $m$ ]
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido [ $kg/m.s$ ]
$\xi$	Coordenada local do elemento
$\rho$	Massa específica do fluido [ $kg/m^3$ ]
$\phi$	Porosidade do meio [–]
$\Phi$	Potencial de velocidade [ $m$ ]

## Sobrescritos

*	Solução fundamental
–	Condição de contorno prescrita
$a$	Condição de contorno antes do nó
$d$	Condição de contorno depois do nó

## Subscritos

<i>axis</i>	Relativo ao domínio axissimétrico
<i>crit</i>	Relativo à vazão crítica
<i>d</i>	Relativo ao ponto fonte
<i>f</i>	Relativo à formação
<i>g</i>	Relativo ao gás
<i>o</i>	Relativo ao óleo
<i>orto</i>	Relativo ao meio ortotrópico
<i>s</i>	Relativo à posição do sumidouro
<i>w</i>	Relativo à água
<i>x</i>	Relativo à direção x
<i>y</i>	Relativo à direção y
<i>z</i>	Relativo à direção z

## Siglas

MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRD	Método da Reciprocidade Dual
MVF	Método dos Volumes Finitos

## Negrito

Símbolos em negrito indicam grandezas vetoriais

# Capítulo 1

## Introdução

Registros de escavação de poços de petróleo indicam épocas tão antigas quanto o ano de 1594 (Sokolov, 1972). Após o início de sua exploração comercial, todo um estilo de vida se desenvolveu em torno do uso do petróleo como um dos principais recursos energéticos em nossa sociedade. Inicialmente medidos em alguns metros de profundidade, hoje os poços alcançam quilômetros.

Mesmo para os padrões das empresas que fazem parte desse mercado, o custo de implantação de uma planta de produção de petróleo é bastante alto. Alta produtividade é sempre desejada. Isso significa produzir o máximo possível do óleo mais “puro” possível. No entanto, o óleo não pode ser extraído nem com a velocidade, nem com a pureza desejada, porque vários fatores limitam a produção. Dois deles compõem o tema deste trabalho.

Seja qual for a motivação - lucro, eficiência ou sustentabilidade - o fato é que o melhor entendimento de um sistema permite um melhor controle sobre ele. E aqui entra a utilidade da simulação numérica para o entendimento dos sistemas estudados. As simulações, desde que baseadas em modelos matemáticos representativos da real natureza do problema, podem trazer resultados que ampliam o entendimento acerca do sistema. Simuladores permitem experimentar, embora não com aparatos físicos, o comportamento do sistema estudado em situações hipotéticas. Neste contexto, este trabalho é dedicado ao desenvolvimento e implementação de formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a simulação do comportamento dos cones de água e de gás em poços de petróleo.

### 1.1 Os cones de água e de gás

São de especial interesse da indústria de petróleo os fenômenos denominados “cone de água” e “cone de gás”, que se manifestam com frequência em reservatórios de petróleo quando submetidos à extração através de um poço produtor. Tais fenômenos são fatores limitantes na produtividade de um poço de petróleo e são decorrentes do gradiente de pressão aplicado pelo poço produtor no interior do reservatório. Esse gradiente de pressão atinge todos os fluidos presentes no reservatório (petróleo, água e gás natural) e como a água e o gás têm maior mobilidade que o petróleo, os mesmos tendem a fluir em direção ao poço, tomando, cada um, a forma de um cone.

A limitação na produtividade do poço de petróleo ocorre porque, quanto maior for a vazão de extração, mais as massas de água e de gás se aproximam do poço. Então, existe um limite para a vazão de extração, a partir do qual o cone de água e/ou o cone de gás atingem a extremidade do poço, fazendo com que água e/ou gás sejam produzidos junto com o petróleo, diminuindo a produtividade. Experimentos e análises matemáticas são realizados desde o início da exploração industrial do petróleo (Joshi, 1991), na tentativa de resolver problemas dessa natureza. O primeiro trabalho publicado sobre esse tema, em 1935, já diz que a formação e evolução do cone de água são fenômenos muito complexos, sobre os quais uma análise teórica é praticamente impossível (Muskat and Wyckoff, 1935).

No passado, profissionais da Engenharia de Petróleo tentaram contornar a complexidade destes fenômenos empregando severas aproximações e restrições na formulação de modelos e correlações que são utilizados ainda atualmente para estimar o comportamento dos cones de água e de gás (Rosa et al., 2006). Com o desenvolvimento do poder computacional nas últimas décadas, as análises numéricas se tornaram cada vez mais presentes na indústria. Com a adoção de simulações computacionais, as simplificações nos modelos puderam ser minimizadas, o que trouxe um aumento na acurácia dos resultados obtidos. Mesmo assim, os modelos analíticos aproximados ainda são utilizados para análises rápidas e reconhecimento prévio de relações entre características dos reservatórios e a produtividade esperada.

Os reservatórios de petróleo se estendem por grandes áreas. Naturalmente, é esperado que propriedades como a porosidade do meio e sua permeabilidade ao fluxo de fluidos, que são inerentes da matriz rochosa, não sejam homogêneas ao longo da grande extensão dos reservatórios. Entretanto, os fenômenos dos cones de água e de gás são ocorrências que influenciam o escoamento nas imediações do poço produtor. Nessa região próxima do poço, é razoável admitir que as propriedades sejam homogêneas (Dake, 1978). Essa aproximação é adotada por princípio neste trabalho.

É importante notar que mesmo os modelos mais sofisticados não conseguem representar fielmente os reservatórios. Devido à sua inacessibilidade, nunca se tem um conhecimento real das suas características físicas. O que se tem são extrapolações feitas a partir de dados obtidos em medições e amostras de material retirado do reservatório durante as fases de estudos e de perfuração dos poços. Esta característica do estudo dos reservatórios de petróleo faz com que seja natural se trabalhar com valores médios das suas propriedades físicas, como porosidade, permeabilidade e compressibilidade, mesmo nos casos de modelagem mais complexa. Trabalhar com valores numéricos muito apurados, com um grande número de algarismos significativos, não significa estar aumentando a exatidão do modelo, porque nunca se conhecem os valores reais das grandezas que se está representando.

## 1.2 O Método dos Elementos de Contorno

A maioria dos problemas práticos de engenharia pode ser representada matematicamente por equações diferenciais. Juntamente com as condições de contorno e propriedades dos materiais

envolvidos, podem ser criados modelos com capacidade de apresentar matematicamente a resposta do sistema modelado em diversas situações.

Como nem todos os problemas possuem solução analítica, as técnicas de solução numérica das equações diferenciais são imprescindíveis para os diversos campos da ciência e da engenharia. Nesse sentido, o desenvolvimento dos computadores e o constante aumento em sua capacidade de processamento alçou a análise numérica a um lugar de destaque na análise de problemas práticos de engenharia. Como em toda área do conhecimento, existem entre os métodos numéricos distintos graus de maturidade, de acordo com o seu histórico de desenvolvimento para cada tipo de aplicação. Atualmente, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é considerado o método padrão para análise de problemas estruturais, enquanto o Método dos Volumes Finitos (MVF) é adotado por padrão para a solução de problemas de mecânica dos fluidos, por exemplo. Isso não significa que a comunidade acadêmica deixe de desenvolver certas capacidades em um método pelo simples fato de que algum outro seja o padrão para a área de estudo em questão.

Este trabalho se localiza justamente no desenvolvimento de uma aplicação específica com o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Embora as bases matemáticas que o sustentam sejam antigas, ele é o de desenvolvimento mais recente entre os métodos “padrão”. O MEC tem uma característica interessante: diferente dos métodos numéricos mais populares, como o MEF, o MVF e o Método das Diferenças Finitas (MDF), o MEC é um método numérico integral de contorno. Seu tratamento matemático descreve todo o fenômeno nas fronteiras do domínio (na superfície para um domínio tridimensional; no contorno para um domínio bidimensional; nos pontos da extremidade para um domínio unidimensional). Em problemas envolvendo forças de corpo, as integrais de domínio provenientes destas forças devem ser transformadas em integrais de contorno. São empregadas para isso formulações como o Método da Reciprocidade Dual (MRD) (Partridge et al., 1992), o Analog Equation Method (AEM) (Katsikadelis, 2002) e o Método da Integração Radial (MIR) (Gao, 2002; Gao et al., 2007). O MEC tem, então, a característica de diminuir o problema em uma dimensão espacial, levando a um sistema com menos graus de liberdade. Outra característica inerente do método é o tratamento de domínios infinitos sem a necessidade de truncamento ou aproximação.

As vantagens e desvantagens de um método numérico específico podem ser avaliadas em distintos contextos. Um deles é a facilidade do uso pelo usuário, em contraste com a facilidade de desenvolvimento pelo desenvolvedor. Importante neste contexto é a etapa de geração da malha para a resolução do problema. Do ponto de vista do usuário, criar a malha é a parte mais trabalhosa no processo de simulação (Belytschko et al., 1994). No MEC, esta tarefa é executada de forma mais eficiente, uma vez que a discretização do interior do domínio não é necessária. Além do impacto para o usuário, isso traz também o benefício para o desenvolvedor em problemas onde o ajuste da malha deve ser feito durante a simulação em processos iterativos, como é o caso dos problemas com fronteira móvel analisados neste trabalho.

Atualmente, a análise isogeométrica é uma tentativa de facilitar a geração da malha usando os softwares de desenho assistido por computador (CAD) para gerar a geometria. Diversos trabalhos aplicam a técnica com sucesso. Campos (2016) apresenta uma formulação de elementos de contorno

com modelagem de geometrias complexas através de NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline). Em uma interface entre a análise isogeométrica e o tema do presente trabalho, Nascimento (2021) desenvolve uma formulação do MEC que utiliza NURBS para modelar os fenômenos de cone de água e gás em geometria bidimensional e axissimétrica. Seus resultados são comparados com os obtidos neste manuscrito.

O MEC é um método especialmente eficaz no tratamento de regiões onde as variáveis apresentam altos gradientes. No MEF, por exemplo, as regiões com elevados gradientes necessitam ter uma malha mais refinada para a obtenção de resultados precisos. No MEC, a maior precisão dos resultados é garantida principalmente pelas funções peso utilizadas na obtenção da forma fraca das equações diferenciais. Diferentes de outros métodos numéricos, o MEC utiliza como função de peso soluções analíticas que representam os efeitos de uma carga pontual em um domínio infinito, conhecidas como soluções fundamentais (Becker, 1992). Outro fator que traz precisão nos resultados é discretização apenas do contorno. Dessa forma, não há erros de aproximação de geometria no interior do domínio.

Em problemas com muitos graus de liberdade, a montagem das matrizes cheias e não simétricas do MEC são as grandes consumidoras do tempo de processamento dos códigos. Para atacar esse problema, diversas técnicas são estudadas e empregadas: Wavelets (Bucher et al., 2004), Solvers baseados em blocos (Rigby and Aliabadi, 1995), Processos de aglutinação (Kane et al., 1990), Técnicas iterativas (Mansur et al., 1992), Método dos Multipolos (Liu, 2009) e Aproximação Cruzada Adaptativa (Hackbusch, 2015).

Atacando o problema pela velocidade de processamento, o paralelismo vem sendo aplicado em implementações voltadas para problemas de larga escala. Galvis et al. (2021) desenvolveram o primeiro software totalmente paralelizado para a análise do comportamento mecânico de materiais heterogêneos utilizando o MEC em domínio tridimensional. Ao contrário de todos os outros códigos atualmente disponíveis, este software é capaz de simular tanto materiais isotrópicos quanto anisotrópicos compostos de uma ou várias sub-regiões.

As implementações do MEC envolvendo sub-regiões são normalmente aplicadas em problemas onde as propriedades do domínio apresentam homogeneidade por partes. Assim, cada porção homogênea do domínio é tratada como um sub-domínio independente que se relaciona com os demais através de condições de compatibilidade e equilíbrio nas fronteiras compartilhadas por estes. A técnica é aplicada também para a solução de problemas de fraturas em materiais com trincas (Éder Lima de Albuquerque et al., 2002), em problemas multi-escala com materiais policristalinos (Galvis and Sollero, 2016; Galvis et al., 2017, 2018, 2020), e no presente trabalho é aplicada na representação de cada fluido que constitui o cenário do problema do cone de água ou do cone de gás.

Neste trabalho, a fronteira entre duas sub-regiões é utilizada para representar a interface entre dois fluidos imiscíveis. Esta é uma aproximação adotada, que limita a aplicação do código aqui desenvolvido: assume-se que a zona de transição que sempre existe em dois fluidos que estão em contato é pequena o suficiente para ser aproximada por uma interface “abrupta”. Uma abordagem semelhante é adotada na representação da superfície livre do óleo - ou eventualmente da água -

em contato com o ar ou com o gás natural.

Vários autores aplicaram esta estratégia no MEC para a análise do fenômeno do cone de água ou de fenômenos semelhantes. (Rafiezadeh and Ataie-Ashtiani, 2014) analisa o problema de extração de água em meios porosos em domínio tridimensional com fronteira móvel. Zhang et al. (1999) analisa a eficiência do bombeamento pulsado *versus* o constante em aquíferos monofásicos. Em alguns trabalhos, água doce e salgada foram consideradas coexistindo de forma estratificada por suas diferentes densidades (Hocking and Zhang, 2009; Zhang et al., 2009). Nenhum deles, porém utiliza sub-regiões com interface móvel, e tampouco usam a formulação axissimétrica do MEC.

### 1.3 Objetivo e contribuições do trabalho

As principais contribuições desta tese podem ser descritas em dois campos: o MEC e a aplicação prática. Sua principal contribuição para o MEC são as formulações e técnicas desenvolvidas para a implementação de um conjunto de simuladores que permitam estudar o comportamento da interface móvel entre dois fluidos de densidades diferentes sujeitos a uma perturbação do potencial no interior do seu domínio. Em especial, a associação das formulações axissimétricas do MEC com fronteira móvel tanto para domínio único quanto para sub-regiões. Em relação à aplicação prática, a contribuição deste trabalho é a obtenção de um conjunto de simuladores para a análise dos fenômenos dos cones de água e de gás nas imediações de poços de petróleo horizontais e verticais. A obtenção dos simuladores foi possível a partir da aplicação das formulações e técnicas citadas tanto na natureza do problema dos cones de água e de gás, quanto nos aspectos dos reservatórios de óleo e gás.

Desta forma, o presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento e a implementação de formulações bidimensional e axissimétrica do MEC para a simulação dos fenômenos do cone de água e do cone de gás em poços de petróleo horizontais e verticais. Em linhas gerais, o trabalho se localiza na área da Mecânica Computacional, tendo especificamente o Método dos Elementos de Contorno como seu foco de estudo.

O conjunto de simuladores desenvolvidos abrange:

1. Escoamento monofásico em domínios isotrópicos e ortotrópicos homogêneos, que permite simular o fenômeno de cone de gás em poços de petróleo horizontais;
2. Escoamento bifásico em domínios isotrópicos e ortotrópicos homogêneos, que permite simular os cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais;
3. Escoamento difusivo monofásico em domínios isotrópicos homogêneos, que permite simular o cone de gás em poços de petróleo horizontais computando as compressibilidades da rocha e do óleo;
4. Escoamento monofásico em domínios isotrópicos homogêneos com simetria axial, que permite simular o fenômeno de cone de gás em poços de petróleo verticais;

5. Escoamento bifásico em domínios isotrópicos homogêneos com simetria axial, que permite simular os cones de água e de gás em poços de petróleo verticais.

Um dos possíveis empregos práticos destes simuladores é a composição da plataforma para aplicação de sistemas de controle, onde constantemente se necessita saber a posição e velocidade de qualquer ponto da interface. No campo do trabalho experimental, utilizam-se células de Hele-Shaw (Fig. 1.1) para simular em escala reduzida o escoamento em meios porosos. A validação dos simuladores 1 e 2 foi realizada por comparação de seus resultados com os obtidos experimentalmente nas células de Hele-Shaw do Laboratório de Automação Offshore da Universidade de Brasília. O simulador 1 foi ainda validado por comparação com resultados analíticos (Fortaleza et al., 2019).



Figura 1.1: Célula de Hele-Shaw do Laboratório de Automação Offshore da Universidade de Brasília (Fortaleza et al., 2019)

Em um exemplo de uso, Limaverde Filho (2014) mostra a aplicação de controle não-linear em uma célula de Hele-Shaw onde se realiza a extração de glicerina sujeita ao cone de gás. Aplicando o algoritmo de controle sobre os simuladores desenvolvidos, foram obtidos modelos dinâmicos para controlar a altura da interface. A atuação se dá através da variação da intensidade do bombeamento, garantindo um aumento da produção acumulada ao longo do tempo, sem a produção indesejada de gás.

Outro uso prático é a complementação aos simuladores convencionais que, via de regra, não trabalham com discretização refinada o suficiente para modelar a região próxima ao poço. Num exemplo de modelagem convencional mostrada por Chen and Zhang (2009), com raio do poço de aproximadamente  $0,06\text{ m}$ , o comprimento do elemento de volume utilizado na discretização do reservatório foi de aproximadamente  $90\text{ m}$ . Assim, sem um grande refinamento da malha na região do poço, não há resolução suficiente para analisar a formação dos cones. Pode-se, então, simular o escoamento geral com simuladores convencionais e utilizar a solução proposta para analisar a interface entre fluidos na região próxima do poço.

## 1.4 Descrição do manuscrito

O Capítulo 2 contextualiza os fenômenos dos cones de água e de gás, apresentando seus aspectos principais, bem como conceitos fundamentais a respeito da produção de petróleo, das característi-

cas dos reservatórios, e os tipos de poços produtores. O Capítulo 3 apresenta a base conceitual dos modelos utilizados, sintetizando as deduções das principais equações que governam os escoamentos potencial e difusivo. Neste capítulo são apresentadas ainda as condições de contorno gerais para os tipos de problemas a que os simuladores se propõem a estudar. No Capítulo 4, é apresentada a teoria do Método dos Elementos de Contorno para problemas potenciais. A equação integral de contorno é obtida e discretizada para elementos de contorno lineares contínuos. As soluções fundamentais bidimensionais isotrópicas são apresentadas, e as soluções fundamentais ortotrópicas são propostas. O Capítulo 5 introduz a formulação axissimétrica do MEC para problemas potenciais modelados em domínios axissimétricos. A dedução das equações desta formulação é apresentada em uma abordagem alternativa simples e direta para a obtenção das soluções fundamentais. No Capítulo 6, é apresentada a formulação do Método da Reciprocidade Dual (MRD) do MEC para problemas regidos pela equação da difusividade hidráulica, que é aplicada na implementação do simulador de escoamento difusivo. O Capítulo 7 apresenta a formulação desenvolvida para o acoplamento de sub-regiões e mostra como o conceito das sub-regiões foi utilizado na implementação específica da interface móvel entre os fluidos. O Capítulo 8 apresenta aspectos específicos da implementação realizada, como a determinação das condições de contorno, as maneiras possíveis de se mover a interface e os cálculos correspondes, além das possibilidades de modelagem dos poços produtores. No Capítulo 9, são apresentados os resultados obtidos com os simuladores implementados e as validações pertinentes. As conclusões deste trabalho são apresentadas no Capítulo 10, que traz também as sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Os fenômenos dos cones de água e de gás

### 2.1 Introdução

Por sua importância como área de aplicação dos simuladores desenvolvidos, os fenômenos dos cones de água e de gás serão contextualizados com o objetivo de familiarizar o leitor com conceitos e nomenclatura envolvidos. Nesta contextualização, este capítulo apresenta os aspectos fundamentais a respeito dos reservatórios de petróleo, os tipos de poços produtores e suas características, bem como os fundamentos dos fenômenos dos cones de água e de gás, suas desvantagens e impactos na produção de óleo.

### 2.2 O reservatório de petróleo

Um reservatório de petróleo é um meio poroso, permeável, que normalmente está aprisionado entre uma rocha impermeável acima e uma rocha semipermeável abaixo. Existem várias configurações possíveis dentro do reservatório. A primeira possibilidade é o reservatório conter apenas petróleo. Outra possibilidade é o reservatório conter, além do petróleo, uma massa de água, a que comumente se refere como *aquífero*. Pode haver, também, a ocorrência de petróleo na presença de uma massa de gás natural, a que se convencionou chamar de *capa de gás*. Por último, pode haver a presença dos três fluidos, petróleo, água e gás (Fig. 2.1). Tudo depende das condições de pressão e temperatura a que o reservatório esteve (e está) submetido e das condições geológicas daquele ponto da subsuperfície onde ele se encontra.

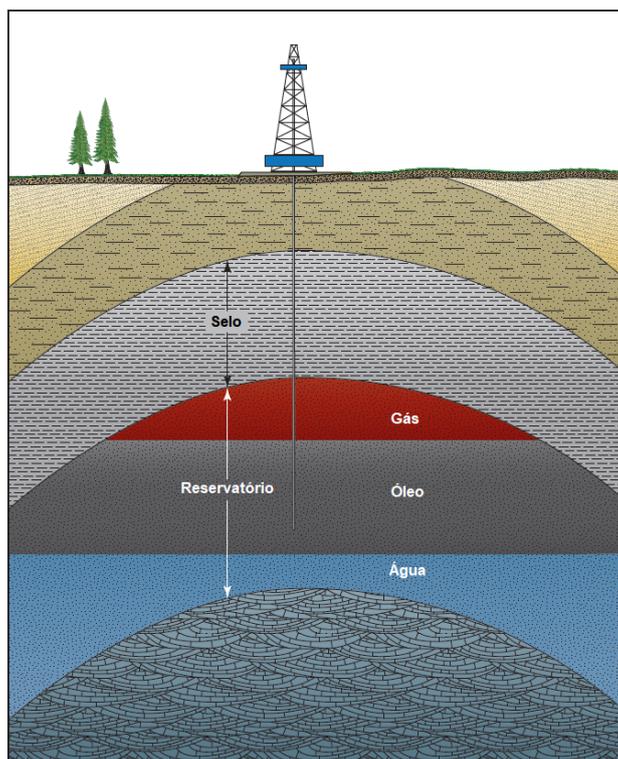


Figura 2.1: Configuração geral de um reservatório de petróleo (WSGS, 2014)

De acordo com Thomas (2004), o processo de formação do petróleo inicia-se nas camadas de rocha sedimentares localizadas em profundidade superior à do reservatório. Uma vez formado o petróleo, este escoa por rochas semipermeáveis até encontrar um bolsão de rocha porosa que esteja aprisionado por rochas impermeáveis. Este bolsão gradativamente se enche de petróleo e se torna, então, um reservatório. Segundo Sokolov (1972), a formação do petróleo é um processo químico que só ocorre sob condições geológicas definidas. As condições de pressão e temperatura aliadas ao longo tempo que o petróleo fica estagnado contribuem para a composição final e o estado físico dos hidrocarbonetos que se encontram no reservatório.

### 2.3 O poço produtor

Para extrair petróleo de um reservatório, um poço é perfurado no solo, passando através de várias camadas de rocha até chegar no meio poroso que contém o petróleo, conforme mostrado na Fig. 2.2. O poço se caracteriza, então, pelo duto perfurado desde a superfície até a zona de óleo do reservatório. Suas paredes são recobertas por um tubo metálico para garantir a estabilidade estrutural necessária. Este tubo, denominado  *revesti mento*, é perfurado (Fig. 2.3a) ou ranhurado (Fig. 2.3b) na região em que tem contato com a zona de óleo. Isso é necessário para permitir a entrada do óleo no interior do poço através de toda a superfície do poço que tem contato com o óleo.

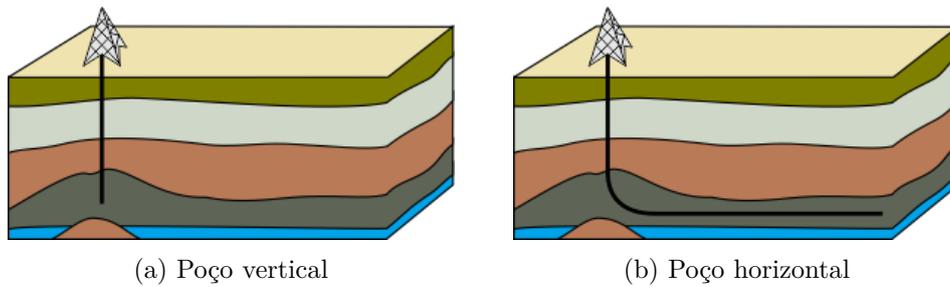
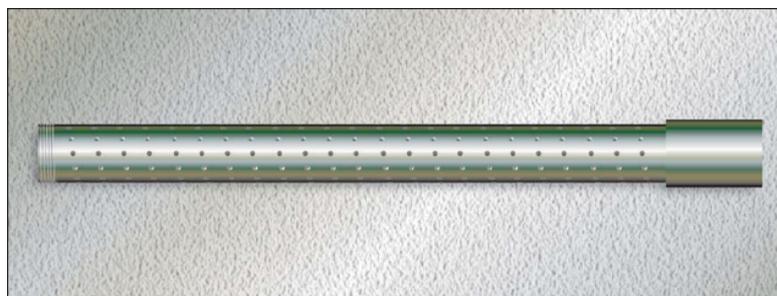


Figura 2.2: Poços vertical e horizontal

Os poços podem ser verticais, direcionais ou horizontais. Os poços direcionais não serão levados em consideração neste trabalho. Todavia, uma ideia geral sobre os mesmos podem ser inferidas pelo leitor considerando que o poço horizontal pode ser visto como um caso particular de poço direcional.



(a) Revestimento perfurado



(b) Revestimento ranhurado

Figura 2.3: Revestimento perfurado e ranhurado (Catálogo National Oilwell Varco, 2014)

### a) Poços verticais

O tipo convencionalmente utilizado desde o início da produção de petróleo pela indústria são os poços verticais (Fig. 2.2a). Estes poços são mais baratos, tecnicamente mais simples e têm tempo de perfuração menor, se comparados aos horizontais.

Os poços verticais possuem duas fortes características. A primeira é que cada poço deve ser perfurado a partir do ponto da superfície localizado exatamente sobre o ponto do reservatório de onde se deseja extrair. Como os reservatórios são muito grandes, da ordem de quilômetros, perfuram-se neles vários poços para extrair petróleo, cada um com uma área de drenagem determi-

nada pela condutividade hidráulica do meio poroso onde o óleo se encontra. A área de drenagem determina o espaçamento entre os poços. Lyons and Plisga (2005) dizem que o usual nos Estados Unidos é que a área de drenagem de um poço seja de 40 acres para a produção de óleo (o equivalente a um quadrado de 400 m de lado ou uma circunferência de 450 m de diâmetro) e 160 ou 320 acres para a produção de gás. Como o custo da perfuração aumenta consideravelmente com a profundidade, é comum que poços mais profundos tenham um espaçamento maior entre si. Isso significa que em grandes reservatórios produzidos por meio de poços verticais, existirá uma grande área na superfície ocupada por equipamentos de produção.

A segunda característica é que o contato dos poços verticais com a zona de óleo do reservatório fica restrita à altura dessa camada de óleo. Então, em um reservatório com uma altura da zona de óleo pequena, maior deverá ser o diferencial de pressão entre o poço e o reservatório para se conseguir uma vazão de óleo considerável, o que pode influenciar fortemente a ocorrência de cone de água e de gás, como será visto adiante.

Estas características dos poços verticais, em algumas situações, podem inviabilizar econômica ou tecnicamente a extração de petróleo de um determinado reservatório. Para superar essas adversidades, a perfuração de poços horizontais foi desenvolvida e atualmente é plenamente utilizada.

## b) Poços horizontais

Um dos maiores propósitos dos poços horizontais (Fig. 2.2b) é o de aumentar o contato entre o poço e o reservatório, e, assim, aumentar a produtividade. Como a zona de óleo de um reservatório é tipicamente mais extensa no plano horizontal do que no vertical, a área de contato entre poço e óleo é consideravelmente maior do que em poços verticais. Assim, as mesmas vazões de óleo podem ser conseguidas com um diferencial de pressão menor, o que auxilia na prevenção do cone de água e de gás.

De acordo com Azar and Samuel (2007), os reservatórios considerados como potenciais candidatos a receberem um poço horizontal têm pelo menos uma das seguintes características:

- São propensos à ocorrência de cone de água ou de gás;
- Têm permeabilidade muito baixa (permeabilidade « 1 md);
- São verticalmente fraturados;
- São economicamente inacessíveis;
- Contêm óleo pesado;
- Têm pouca altura;
- São reservatórios em camadas com ângulo de inclinação muito grande.

Diz-se que tais reservatórios são *potenciais* candidatos porque a perfuração de um poço horizontal é muito mais custosa e demorada que a de um poço vertical. Assim, uma análise de viabilidade econômica é realizada para verificar se os ganhos em produtividade trazidos pelo poço horizontal superam seus custos de perfuração.

## 2.4 Etapas da produção

De acordo com Petex (2011), “produção” é a fase da operação que contempla trazer o petróleo até a superfície e prepará-lo para o transporte até a refinaria. Para tirar o petróleo do reservatório e trazê-lo à superfície, duas etapas são realizadas. A primeira, chamada “recuperação”, é caracterizada pelo escoamento do óleo *dentro do reservatório*, através do meio poroso, até a sua entrada no poço. A segunda, chamada “elevação”, é caracterizada pelo escoamento do óleo *dentro do poço*, até a superfície.

Ao conjunto de causas e efeitos que levam o óleo a sair de seu local de repouso e escoar até a entrada do poço se dá o nome de “mecanismos de recuperação” ou “mecanismos de produção”. Analogamente, o que leva o óleo a escoar dentro do poço, desde o reservatório até a superfície, são os “mecanismos de elevação”.

### 2.4.1 Mecanismos de recuperação

Mecanismos de recuperação, segundo Rosa et al. (2006), são parcialmente baseados na descompressão do reservatório. Esta descompressão se deve à extração de matéria - e, conseqüentemente, energia - do interior do reservatório quando a produção é iniciada e tem basicamente dois efeitos: a expansão dos fluidos contidos no reservatório e a contração dos poros das rochas. A expansão dos fluidos, por si só, causa o escoamento de parte do óleo, pois o mesmo passa a precisar de um volume poroso maior para acomodar a totalidade de sua massa. Somado a isso, a contração dos poros das rochas diminui o volume poroso disponível para o armazenamento de fluidos e contribui para o escoamento do óleo na medida em que expulsa parte dele de seu interior. Como o poço é uma região de menor potencial, a tendência do óleo (e demais fluidos) é de escoar em sua direção.

Ainda segundo Rosa et al. (2006), outra parcela em que se baseiam os mecanismos de recuperação é o deslocamento de um fluido por outro. Um exemplo ilustra esta afirmação. A água proveniente de um aquífero abaixo da zona de óleo, quando escoar pela ação da descompressão do reservatório, empurra o óleo, forçando-o a escoar. Esta ação pode ser vista como uma *frente* de água “lavando” o óleo dos poros da rocha e tem sua raiz na imiscibilidade dos fluidos (Dake, 1978). A mesma coisa ocorre com o gás livre proveniente da capa de gás acima da zona de óleo. Novamente, como o poço produtor representa a região de menor potencial dentro do reservatório, o óleo tende a escoar para o seu interior.

É importante notar que a recuperação depende da energia existente no reservatório, manifestada através da pressão. Uma vez que a produção dos fluidos leva consigo parte dessa energia, chega um momento em que métodos de recuperação secundária se fazem necessários. Tais métodos se baseiam na adição de energia externa no reservatório, de modo a manter a pressão em seu interior em níveis que permitam a continuação do escoamento dos fluidos no meio poroso, ou seja, são uma forma de *recriar* um alto gradiente de pressão no reservatório. Alguns exemplos de métodos de recuperação secundária são a injeção de água e a injeção de gás. Existem também os processos térmicos, nos quais a viscosidade de um óleo pesado é diminuída pela adição de energia térmica ao reservatório, aumentando assim taxa de recuperação (Satter et al., 2007).

## 2.4.2 Mecanismos de elevação

Em um primeiro estágio de produção, a energia natural do reservatório é tão grande que, em alguns casos, além de promover a etapa da recuperação, consegue realizar a elevação naturalmente. Isto é, basta conectar o poço à zona de óleo do reservatório e o óleo surge naturalmente na superfície. Nos casos em que isso acontece, diz-se que o poço é “surgente”, enquanto esta condição se mantém. Esta situação ocorre porque a pressão do reservatório, que é a principal manifestação da sua energia, é alta o suficiente não apenas para vencer a resistência do escoamento no meio poroso até o poço como também para vencer o peso de toda a coluna de fluidos do fundo do poço até a superfície.

Com o avanço da produção e a consequente diminuição da energia natural do reservatório, sua pressão interna eventualmente cai a ponto de não ser mais suficiente para elevar toda a coluna de fluido desde o fundo do poço até a superfície e o petróleo não consegue mais ser elevado desta forma natural. O poço deixa de ser surgente. Neste ponto, a elevação do petróleo até as instalações de superfície passa a ser realizada por mecanismos de elevação artificiais, como bombeamento ou gas-lift. Nos poços não-surgentes, os mecanismos de elevação artificiais são utilizados desde o início da produção.

## 2.5 Produção de fluidos indesejados

A produção de óleo *sempre* implica em produção de água e gás. Por causa de características inerentes ao processo de formação de um reservatório, uma certa quantidade de água sempre está presente nos poros das rochas junto com o óleo - a parcela de água nesta condição é denominada *água conata*. Ambos os fluidos escoam para o interior do poço devido ao diferencial de pressão entre o poço e o reservatório. A água conata se encontra *dentro* da zona de óleo, em equilíbrio, e sua produção é inevitável. Ela não deve ser confundida com a massa de água, ou aquífero, que se localiza abaixo da zona de óleo e pode ou não existir (Fig. 2.1). A produção de água do aquífero é o que se tenta evitar de modo a não produzir mais água do que a quantidade inevitável.

O mesmo ocorre com o gás. Normalmente, há uma parcela de gás que se encontra dissolvida no óleo quando este está submetido às pressões do reservatório. Quando submetido à pressão atmosférica, porém, o gás dissolvido forma uma fase gasosa que inevitavelmente chega junto com o óleo e a água à superfície. O que se tenta evitar é a produção do gás natural proveniente da capa de gás livre, de forma a não produzir mais gás do que a quantidade inevitável.

A produção de água e gás provenientes do aquífero e da capa de gás aceleram a perda da energia natural do reservatório. Isso faz com que os métodos de recuperação secundária tenham que ser adotados mais cedo do que se estes fluidos indesejados não fossem produzidos.

De acordo com Thomas (2004), a quantidade de água produzida junto com o óleo tipicamente alcança valores da ordem de 50 % do volume total de fluidos produzido, podendo chegar até perto de 100 % no final da vida economicamente produtiva de um poço. É comum que se produzam de 1 a 7 barris de água para cada barril de petróleo. Como o interesse comercial repousa apenas

sobre o óleo, a água produzida deve ser separada, tratada e descartada (caso não seja reinjetada no reservatório). Este processo pode ser relativamente simples e barato, ou bastante complexo e custoso, dependendo da característica da mistura de fluidos que chega à superfície.

## 2.6 Os cones de água e de gás

O cone de água é um fenômeno que pode ocorrer durante a extração de petróleo de um reservatório que tem um aquífero de fundo. Analogamente, o cone de gás ocorre em reservatórios que têm capa de gás (Fig. 2.1). Em linhas gerais, a teoria que envolve os fenômenos é a mesma tanto para o cone de gás quanto para o cone de água, mudando apenas o par de fluidos envolvidos: óleo/água ou óleo/gás. Portanto, neste texto, quando tratando de aspectos que são válidos para ambos os fluidos, o fenômeno será referenciado simplesmente por *cone*. Quando o aspecto tratado for específico de um dos fluidos, será tratado por *cone de água* ou *cone de gás*.

Tecnicamente, o termo *cone* é empregado apenas quando o fenômeno ocorre em poços verticais (Fig. 2.4a). Quando se trata de poços horizontais, o nome do fenômeno é *crista* (Fig. 2.4b). Entretanto, por praticidade, tem-se utilizado o nome *cone* para ambos os casos, sem distinção, e esta prática também é adotada neste texto.

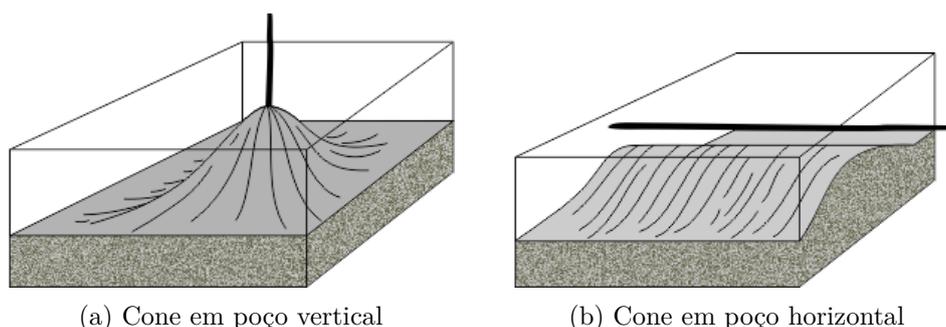


Figura 2.4: Cone em poço vertical e em poço horizontal (SPE, 2019)

### 2.6.1 O fenômeno

O reservatório em repouso se encontra em um campo de pressão estabelecido pelas condições locais: uma combinação da pressão da coluna de fluidos no interior do reservatório com a pressão das camadas geológicas sobre ele. Este campo de pressão tem decaimento vertical, com a pressão mais alta no fundo do reservatório. A ocorrência de bombeamento de fluidos através do poço produtor introduz no reservatório um segundo campo de pressão, este com decaimento radial a partir da extremidade do poço (ponto de pressão mais baixa). A pressão resultante no reservatório é a soma de dois campos: o campo de pressão natural do reservatório e o campo de pressão induzido pelo bombeamento.

Assim como tem o efeito principal de impelir o petróleo para o interior do poço, o gradiente de pressão resultante tem o efeito colateral de causar a tendência da água e do gás também se encaminharem para o poço. Esse efeito gera o fenômeno do cone, que tem esse nome porque,

devido à movimentação dos fluidos em direção ao poço e à condição de imiscibilidade entre eles, a superfície de interface entre óleo e água (assim como entre óleo e gás) toma a forma de uma cônica, que é a forma “desenhada” pelas linhas de corrente do óleo que flui para o interior do poço.

## 2.6.2 Vazão crítica

A altura atingida pelo cone é uma função da diferença de pressão entre o poço e o reservatório, que por sua vez, dita a vazão de petróleo no poço. Logo, a altura do cone de água é função da vazão de petróleo. Existe, então, uma vazão na qual a altura do cone é tal que a sua ponta fica na iminência de atingir o poço e, neste momento, qualquer incremento na vazão faz com que água (do aquífero de fundo) ou gás (da capa de gás) passem a ser extraídos junto com o petróleo, no que se convencionou chamar de *irrupção* do cone. A esta vazão é dado o nome de *vazão crítica*. A vazão crítica é definida, então, como a máxima vazão na qual óleo é produzido sem causar a irrupção do cone (Joshi, 1991). Qualquer vazão maior que esta é chamada de *vazão supercrítica*. Qualquer vazão inferior é chamada de *vazão subcrítica*. A Fig. 2.5 ilustra as posições estáveis da interface em vazões subcríticas e na vazão crítica para o cone de gás. É evidenciado que, mesmo que em vazão crítica a ponta do cone ainda esteja a uma certa distância do poço, qualquer incremento da vazão fará o cone colapsar em direção ao poço, causando a irrupção.

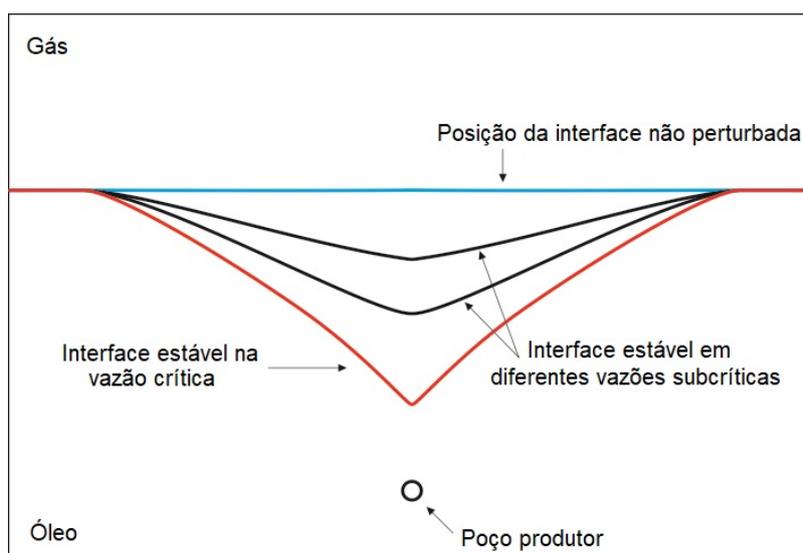


Figura 2.5: Representação esquemática das posições de interface estável em vazões subcríticas e crítica (Fortaleza et al., 2019)

A vazão crítica de um poço pode ser determinada por meio de testes de produção. Nestes testes, a vazão de produção é aumentada aos poucos até ocorrer um aumento repentino na quantidade de água ou gás produzidos. Este é o momento em que o cone atinge o poço e água ou gás provenientes do aquífero ou da capa de gás passaram a ser produzidos. A vazão crítica é determinada como sendo a vazão imediatamente menor que esta.

Na maioria das vezes, quando a irrupção do cone ocorre, é possível desligar o poço para permitir que as interfaces se re-estabilizem (Calhoun Jr, 1953). Entretanto, existem reservatórios nos quais

uma vez que a água começa a ser produzida, o cone é irreversível (Joshi, 1991). Em alguns casos, mesmo o desligamento do poço por alguns dias não causa a diminuição no cone quando o poço é religado. Influenciam este comportamento as forças capilares que conseguem sustentar a saturação de água nos arredores do poço. Nestes casos, a vazão crítica não pode ser determinada por um teste de produção. Então, esses são casos em que simulações numéricas como as mostradas neste trabalho são fortemente indicadas para a determinação da vazão crítica.

Essa característica, por si só, faz com que trabalhos como este tenham lugar na literatura corrente sobre o tema. O desenvolvimento de simuladores eficientes é importante para a criação de uma plataforma de estudos sobre a dinâmica destes importantes fenômenos.

### 2.6.3 Aspectos teóricos

Para analisar os aspectos teóricos do fenômeno dos cones de água e de gás, deve-se considerar os principais parâmetros físicos que os afetam:

- Viscosidade dinâmica do óleo ( $\mu_{\acute{o}leo}$ );
- Massa específica do óleo ( $\rho_{\acute{o}leo}$ );
- Permeabilidade efetiva do meio poroso ao óleo ( $k_{\acute{o}leo}$ );
- Mobilidade do óleo no meio poroso ( $k_{\acute{o}leo}/\mu_{\acute{o}leo}$ ).

Ahmed (2010) diz que o fenômeno do cone é resultado do movimento dos fluidos do reservatório na direção de menor resistência, balanceado pela tendência dos fluidos de se manterem em equilíbrio gravitacional. Essa correlação pode ser vista no número de Froude (Eq. 2.1), que é um parâmetro adimensional que expressa a razão entre a força de sucção do sumidouro e a força gravitacional que tende a segregar óleo, água e gás em camadas de acordo com suas densidades (Lucas et al., 1991).

$$F = \frac{Q \mu_{\acute{o}leo}}{k_{\acute{o}leo} H \Delta \rho g} \quad (2.1)$$

Na expressão do número de Froude, em um problema bidimensional,  $Q$  é a vazão volumétrica por unidade de comprimento do sumidouro  $[(L^3/T)/L]$ . A variável  $H$  representa a escala característica de comprimento.  $\Delta \rho$  representa a diferença de massa específica entre água e óleo (para cone de água) ou entre óleo e gás (para cone de gás). Há ainda a constante  $g$ , que representa a aceleração da gravidade. Em um problema tridimensional,  $Q$  passa a ter unidade de vazão volumétrica  $[(L^3/T)]$  e o termo  $H$  fica elevado ao quadrado  $[(L^2)]$ , mantendo-se assim a adimensionalidade do parâmetro.

A expressão do número de Froude pode ser empregada para inferir características gerais do fenômenos dos cones. Para isso, deve-se fazer  $F$  e  $H$  constantes, variar as magnitudes de  $k_{\acute{o}leo}$ ,  $\mu_{\acute{o}leo}$  e/ou  $\Delta \rho$  e analisar o que acontece com a variável  $Q$ , que representará a vazão crítica do poço (Eq. 2.2).

$$Q_{crítica} = (FHg) \frac{k_{óleo}}{\mu_{óleo}} \Delta\rho \quad (2.2)$$

Pode-se observar na Eq.(2.2) que quanto maior a viscosidade do óleo, maior a tendência à ocorrência do cone. Entretanto, os reservatórios de óleo pesado (mais viscosos) que são explorados comercialmente geralmente têm permeabilidade bem maior que os de óleo leve (Joshi, 1991). Assim, a razão  $k_{óleo}/\mu_{óleo}$  exibida pelos reservatórios de óleo pesado é comparável à exibida pelos reservatórios de óleo leve que tenham baixa permeabilidade ao óleo.

Da Eq.(2.2), pode-se inferir também que, no geral, quanto maior for o  $\Delta\rho$ , maior será a vazão crítica e, portanto, menor será a tendência ao cone.

Outro importante parâmetro é a permeabilidade na direção vertical. Se esta for zero, então não haverá fluxo na direção vertical e o cone não ocorrerá. Em casos limite, a permeabilidade vertical pode chegar a ser igual à horizontal e a tendência ao cone é máxima.

#### 2.6.4 Desvantagens

Como mostrado na seção anterior, toda a água produzida pode ser descartada ou reinjetada no reservatório. Ambos os casos exigem um oneroso tratamento. A produção inevitável de água (proveniente da própria zona de óleo) já tem normalmente um volume considerável, suficiente para reinjeção nos casos em que esta manobra é necessária como mecanismo de recuperação secundária. Isso faz com que qualquer quantidade de água extra produzida por meio de cone de água seja extremamente prejudicial à viabilidade econômica do poço.

O gás produzido por ocorrência do cone de gás pode, em alguns casos, chegar a ser vendido. Os custos de tratamento deste gás que é produzido junto com o óleo, porém, não justificam sua produção intencional. Assim, a produção de gás por meio do cone de gás é sempre prejudicial.

A produção de gás e água por ocorrência do cone faz a pressão do reservatório cair rapidamente, interferindo na ação dos mecanismos de recuperação. Isso pode forçar adoção prematura de mecanismos de recuperação secundária, impactando diretamente os custos de produção, além de prejudicar a produtividade do poço (Para maiores detalhes sobre o processo de produção de petróleo, veja Gontijo (2015)).

Em suma, a produção indesejada de água ou gás pode reduzir significativamente a produção de óleo. Então, é importante impedir o surgimento do cone, minimizar seus efeitos ou, pelo menos, atrasar o seu surgimento.

#### 2.6.5 Abordagens

Existem várias abordagens para tentar contornar o problema de produção da água e do gás. A principal delas é manter a vazão de produção abaixo da vazão crítica. Outra forma de prevenir a produção de água é alterar a sua mobilidade, tornando-a não tão suscetível a formar um cone significativamente perigoso para a produção de óleo. Tal objetivo pode ser conseguido com a

injeção de polímeros hidrossolúveis que a tornem mais viscosa.

O principal esforço, entretanto, se concentra no entendimento do comportamento das interfaces óleo/água e óleo/gás. Para isto, vários modelos analíticos, experimentais e numéricos já foram propostos e testados. Os modelos analíticos muitas vezes utilizam em sua concepção simplificações das equações para permitir um tratamento matemático que as solucione. Os resultados, portanto, só são válidos para aplicação na análise de casos em que as simplificações adotadas sejam consideradas válidas.

Neste viés entram as vantagens dos modelos numéricos. Neles, as equações são resolvidas numericamente, sem a necessidade de se obter uma expressão analítica que explique o comportamento do objeto de estudo. Por isso, os modelos numéricos não necessitam tantas simplificações nas equações governantes do problema e podem, assim, ter uma aplicação mais geral. Um modelo numérico, normalmente, pode ser utilizado para estudar reservatórios e poços com características diferentes, além de permitir o estudo de regimes transientes. Por causa de suas características, modelos numéricos ganharam espaço no estudo de fenômenos complexos.

## Capítulo 3

# Escoamento em meios porosos

### 3.1 Introdução

Este trabalho trata da simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais e verticais. As simulações são realizadas em domínio bidimensional e axissimétrico. Dentre as alternativas de representação de um escoamento em meios porosos, destacam-se o modelo de escoamento potencial e o modelo de escoamento difusivo. No primeiro modelo, fluidos e rochas são considerados incompressíveis, enquanto, no segundo, fluidos e rochas são considerados compressíveis, com compressibilidade constante. Uma das diferenças conceituais entre os dois modelos pode ser entendida na forma de que o modelo potencial trata da solução do fenômeno em regime permanente, enquanto o modelo difusivo tem a capacidade de tratar também o regime transiente.

Este capítulo apresenta a base conceitual dos modelos utilizados, a qual serve de suporte para o desenvolvimento do conjunto de simuladores. São sintetizadas as deduções das principais equações que governam os escoamentos potencial e difusivo. São apresentadas também as condições de contorno gerais para os tipos de problemas a que os simuladores se propõem a estudar.

### 3.2 A lei de Darcy

Como em qualquer escoamento de fluidos, os escoamentos em meios porosos podem, em princípio, ser descritos pelas equações de Navier-Stokes. Porém, o desconhecimento da geometria exata dos poros impede esta aplicação direta. Nesse caso, as equações do momento podem ser obtidas através do equilíbrio entre as diferentes forças atuantes sobre o fluido:

- Pressão do fluido;
- Gravidade;
- Forças inerciais;
- Força de resistência viscosa com a qual o meio poroso se opõe ao movimento do fluido.

O equilíbrio destas forças é expresso como:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = g \nabla \Phi + \mathbf{F}_{\text{vis}} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{q}$  é a velocidade do escoamento,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\Phi$  é a função potencial cujo gradiente expressa o campo de velocidades, e  $\mathbf{F}_{\text{vis}}$  é a força de resistência viscosa por unidade de massa do meio poroso. O lado esquerdo desta equação apresenta somente forças inerciais, constituindo a aceleração total, ou lagrangiana (o primeiro termo é a variação temporal da velocidade, ou seja, a aceleração local, e o segundo termo é a aceleração convectiva).

O tipo de escoamento, que de forma geral pode ser laminar ou turbulento, é identificado pelo número de Reynolds do escoamento:

$$Re = \frac{q \ell}{\nu} \quad (3.2)$$

onde  $\ell$  é um comprimento característico do escoamento (em geral, o diâmetro médio dos grãos que compõem o meio poroso) e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido. Nos escoamentos em meios porosos, o número de Reynolds é geralmente menor do que 1, caracterizando o escoamento laminar. Neste tipo de escoamento, as forças inerciais podem ser desprezadas, por terem significância muito pequena quando comparadas às outras forças envolvidas. Desta forma, igualando a zero o lado esquerdo da Eq.(3.1), tem-se:

$$0 = g \nabla \Phi + \mathbf{F}_{\text{vis}} \quad \rightarrow \quad \nabla \Phi = -\frac{\mathbf{F}_{\text{vis}}}{g} \quad (3.3)$$

Outra consequência do baixo número de Reynolds é que a força de resistência viscosa  $\mathbf{F}_{\text{vis}}$  é proporcional à velocidade do escoamento. A constante de proporcionalidade desta relação é a condutividade hidráulica do meio ( $\mathbf{K}$ ). Com estas considerações, a Eq.(3.1) dá origem à representação da velocidade como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \frac{\mathbf{F}_{\text{vis}}}{g} \quad (3.4)$$

Assim, nestas condições de escoamento laminar, substituindo a Eq.(3.3) na expressão acima, obtém-se a equação:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \nabla \Phi \quad (3.5)$$

Esta equação é também conhecida como Lei de Darcy (em homenagem ao engenheiro francês Henry Darcy, que se dedicou aos experimentos que levaram à sua formulação de forma empírica (Darcy, 1856)). Esta equação mostra que a velocidade aparente do fluido,  $\mathbf{q}$ , está linearmente relacionada (através da condutividade hidráulica do meio,  $\mathbf{K}$ ) com o gradiente da função potencial do escoamento,  $\Phi$ . Esta função, representada pela altura piezométrica do fluido, é dada por (Liggett and Liu, 1983):

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad (3.6)$$

onde  $p$  e  $z$  são respectivamente a pressão e a coordenada vertical do ponto material considerado.

A condutividade hidráulica do meio,  $\mathbf{K}$ , é uma grandeza que relaciona características tanto da

matriz porosa quanto do fluido que por ela escoar. É expressa como:

$$\mathbf{K} = \frac{\rho g}{\mu} \mathbf{k} \quad (3.7)$$

Nesta equação,  $\rho$  e  $\mu$  são a densidade e a viscosidade dinâmica do fluido, enquanto  $\mathbf{k}$  é a permeabilidade absoluta da matriz porosa, uma propriedade intrínseca do meio poroso que não depende de propriedades dos fluidos.

A permeabilidade é uma grandeza que define a capacidade do meio de permitir o fluxo de fluidos, e é relacionada com a porosidade. Além do volume poroso, porém, esta relação também depende do formato dos poros e da conectividade entre eles. Quanto mais estreitos e tortuosos forem os “canais” formados pela conexão dos poros, maior será a resistência que a matriz porosa impõe sobre o escoamento. Por outro lado, quanto maiores e mais conectados forem os poros, menor será esta resistência. No processo de formação do meio poroso, o formato dos sedimentos, seu tamanho e as características da deposição irão ditar a relação entre as componentes de  $\mathbf{k}$  e suas magnitudes. Em geral, grãos maiores levam a permeabilidades mais elevadas, porque criam mais espaço intersticial ao se aglutinar formando a matriz porosa.

Normalmente, a orientação do sistema de coordenadas pode ser alinhado de acordo com as camadas geológicas no reservatório, de modo que a permeabilidade  $\mathbf{k}$  seja uma matriz diagonal (Jansen, 2013):

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Quando o sistema de coordenadas não está alinhado com os eixos principais da formação, a permeabilidade se faz representar por todas as nove componentes da matriz  $\mathbf{k}$ . Sendo uma propriedade física do meio, a matriz sempre apresenta as seguintes características: é simétrica ( $k_{ij} = k_{ji}$ ), tem diagonal principal positiva ( $k_{ii} > 0$ ) e tem limitação de magnitude dos componentes fora da diagonal principal ( $k_{ij} \leq \sqrt{k_{ii}k_{jj}}$ ).

Estas características garantem que o tensor sempre seja diagonalizável. Os autovetores da transformação resultam nas direções principais e os autovalores representam as permeabilidades nestas direções. Então, com uma rotação do sistema de coordenadas, o sistema com permeabilidade anisotrópica seja transformado em um sistema ortotrópico equivalente, no qual a representação de  $\mathbf{k}$  seja a da Eq.(3.8). Da mesma forma, é possível fazer uma transformação de coordenadas através de alongamento e/ou contração dos eixos, de forma a obter um sistema equivalente no qual a permeabilidade do meio poroso seja isotrópica, na forma  $\mathbf{k} = k\mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Detalhes destas transformações podem ser vistos em Bear (1972) e Liggett and Liu (1983).

### 3.2.1 Considerações sobre a velocidade

A velocidade tratada na lei de Darcy é a velocidade aparente do fluido, que é dada pela vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal ao escoamento, ou seja:

$$\mathbf{q} = \frac{Q}{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.9)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário normal à área  $A$ .

É conveniente notar, entretanto, que esta é uma velocidade média macroscópica do escoamento, denominada também velocidade de Darcy, velocidade de descarga, ou velocidade superficial, e não representa a velocidade real do fluido no interior dos poros. Para se obter a velocidade real do fluido, deve-se considerar que o mesmo ocupa apenas uma fração do volume total do meio poroso e que percorre caminhos tortuosos dentro dos poros interconectados das rochas (Bruch, 1991).

A velocidade média real do fluido no interior dos poros está relacionada com a velocidade aparente por (Liggett and Liu, 1983):

$$\mathbf{q} = \phi \mathbf{u} \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{u}$  é a velocidade média real do fluido e  $\phi$  é a porosidade do meio, dada por:

$$\phi = \frac{\text{Volume de vazios na rocha}}{\text{Volume total da rocha}} \quad (3.11)$$

Pode-se perceber da análise das equações (3.10) e (3.11) que a velocidade média real do fluido  $\mathbf{u}$  é sempre maior que a velocidade aparente  $\mathbf{q}$ , porque a porosidade será sempre inferior à unidade.

### 3.2.2 Importância prática da lei de Darcy

A lei de Darcy fornece uma ferramenta simples, porém útil, para os engenheiros de reservatório na visualização e avaliação dos fatores que afetam o fluxo de fluido em meios porosos, permitindo-lhes extrair inferências úteis (Satter et al., 2007). A análise da Eq.(3.5), já sugere que:

- O fluxo de fluido em um meio poroso ocorre em uma direção oposta ao aumento da pressão. Em outras palavras, o fluido é conduzido em direção aos poços produtores devido à diminuição da pressão do reservatório próximo ao poço.
- Reservatórios com alta permeabilidade tendem a produzir com relativa facilidade, e uma melhor recuperação é normalmente esperada. Se todos os outros fatores forem os mesmos, um gradiente de pressão relativamente alto (mais energia) seria necessário para atingir um taxa de produção semelhante em uma formação de baixa permeabilidade.
- A vazão do fluido é inversamente proporcional à sua viscosidade. Isto indica que a fase gasosa, tendo muito menos viscosidade, fluirá a uma taxa mais rápida do que a fase oleosa

na mesma formação. Da mesma forma, espera-se que a água seja mais móvel em meio poroso, pois é menos viscosa do que o petróleo. Muitos dos desafios enfrentados pelo engenheiro de reservatório no gerenciamento de um reservatório estão relacionados a estes fenômenos, como é o caso dos cones de água e de gás.

- Estratégias de reservatórios em toda a indústria que visam uma melhor recuperação de petróleo são prontamente entendidas considerando a lei de Darcy. Um exemplo é a injeção de fluidos para aumento do gradiente de pressão no reservatório.

A aplicação conceitual da lei de Darcy ajuda na visualização do desempenho do reservatório no sentido qualitativo.

### 3.3 Escoamento potencial

No modelo de escoamento potencial, tanto os fluidos como o meio são considerados incompressíveis. A região do escoamento é um meio poroso homogêneo com permeabilidade constante. A viscosidade dos fluidos é constante. Logo, a condutividade hidráulica do escoamento também é homogênea e constante.

#### 3.3.1 A equação governante

Pelo princípio de conservação da massa, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (3.12)$$

e na presença de um sumidouro pontual, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.13)$$

onde  $Q$  é a intensidade do sumidouro,  $\delta$  é a função delta de Dirac e  $\mathbf{x}_s$  é o vetor posição do sumidouro.

Substituindo a Eq.(3.5) na Eq.(3.13), obtemos:

$$\nabla \cdot (-\mathbf{K} \nabla \Phi) = -Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.14)$$

Para um meio homogêneo e isotrópico,  $\mathbf{K}$  pode ser representado apenas por um escalar  $K$ . Desta forma, a partir da Eq.(3.14), obtém-se a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{Q}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.15)$$

e para o caso sem fontes ou sumidouros, obtém-se a equação de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (3.16)$$

As Eqs. 3.14 a 3.16 são as equações diferenciais que governam o escoamento incompressível em meios porosos, indo do caso geral (anisotrópico com fontes e/ou sumidouros) para o particular (isotrópico sem fontes e/ou sumidouros). A equação de Laplace, além do escoamento de fluidos incompressíveis em meios porosos, governa a transferência de calor por condução em sólidos, o fluxo de corrente elétrica em um condutor entre outros fenômenos físicos.

### 3.3.2 Domínio bidimensional

Em um domínio bidimensional descrito em coordenadas cartesianas, a Eq.(3.14) se desenvolve como:

$$K_x \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.17)$$

e, para o caso isotrópico:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{Q}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.18)$$

### 3.3.3 Domínio axissimétrico

Um domínio tridimensional é considerado axissimétrico quando pode ser representado pela rotação de um plano bidimensional por 360° em torno de um eixo de simetria rotacional (Becker, 1992). Para o caso das simulações dos fenômenos físicos associados ao escoamento de fluidos, uma restrição deve ser pontuada: além da geometria, os fenômenos devem também ser passíveis de serem representados em um plano bidimensional. Assim, todos os fluxos no domínio devem ter simetria axial, bem como a distribuição de potenciais.

Garantindo-se que tanto a geometria quanto as variáveis com significado físico sejam axissimétricas, o domínio tridimensional pode ser representado pelo modelo axissimétrico. Essa situação é verificada quando se analisam os escoamentos em reservatórios de petróleo que estão sendo produzidos a partir de poços verticais. Neles, a própria linha central do poço representa geometricamente o eixo de simetria. Se o reservatório é homogêneo, o comportamento dos fluidos não varia em relação ao ângulo de revolução do plano considerado em torno do poço.

Em um domínio tridimensional descrito em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , a Eq.(3.14) se desenvolve como:

$$K_r \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + K_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} + K_z \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.19)$$

Como qualquer plano bidimensional que contenha o eixo de simetria deve ser representativo do escoamento, as derivadas em relação a  $\theta$  são nulas, levando à equação governante do problema em

sistemas axissimétricos:

$$K_r \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + K_z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.20)$$

e, para o caso isotrópico, chega-se à equação de Poisson para sistemas axissimétricos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{Q}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.21)$$

### 3.4 Escoamento difusivo

No modelo de escoamento difusivo, tanto os fluidos como o meio poroso são considerados compressíveis. Isso significa que o volume das rochas (tanto o volume da parte sólida quanto o volume poroso) também varia com a pressão. A *compressibilidade efetiva* da formação,  $c_f$ , é o fator que representa esse efeito.

No desenvolvimento desta formulação, a região de escoamento é considerada homogênea e a permeabilidade é isotrópica e constante. A viscosidade dos fluidos é constante, assim como as compressibilidades dos fluidos e da formação.

É importante ressaltar que apesar das velocidades do escoamento serem muito mais baixas que a do som - que é a condição usual do escoamento compressível - a compressibilidade pode ser relevante quando se deseja observar a propagação do gradiente de potencial no interior do domínio ao longo do tempo. Como será mostrado adiante, utilizando a modelagem do escoamento difusivo, pode-se avaliar como a onda de potencial (e de pressão) se desloca no interior do meio poroso ao longo do tempo. Esta dinâmica é invisível aos olhos do modelo de escoamento potencial, que considera que a propagação do gradiente do potencial ocorre instantaneamente, sendo qualquer variação sentida simultaneamente por todos os pontos do domínio.

#### 3.4.1 A equação governante

A equação governante do escoamento compressível em meios porosos é a *equação da difusividade hidráulica*. Esta equação é obtida da combinação entre o princípio de conservação da massa, a lei de Darcy e a equação da compressibilidade.

##### a) Princípio de conservação da massa

Considerando um elemento diferencial de volume de meio poroso com formato cúbico com arestas de comprimento  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , pode-se analisar a conservação da massa de duas maneiras distintas.

De acordo com o fluxo líquido de massa em cada direção, temos:

$$\begin{aligned} \text{Massa acumulada} = \Delta t[(Q_x\rho)_x - (Q_x\rho)_{x+\Delta x}] + \Delta t[(Q_y\rho)_y - (Q_y\rho)_{y+\Delta y}] + \\ + \Delta t[(Q_z\rho)_z - (Q_z\rho)_{z+\Delta z}] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Outra maneira é analisar a conservação da massa de acordo com a massa existente nos instantes inicial e final de um intervalo de tempo qualquer:

$$\text{Massa acumulada} = \Delta x \Delta y \Delta z [(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t] \quad (3.23)$$

onde  $\phi$  é a porosidade do meio, dada pela Eq.(3.11).

Igualando-se as equações (3.22) e (3.23), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta t[(Q_x\rho)_x - (Q_x\rho)_{x+\Delta x}] + \Delta t[(Q_y\rho)_y - (Q_y\rho)_{y+\Delta y}] + \\ + \Delta t[(Q_z\rho)_z - (Q_z\rho)_{z+\Delta z}] = \Delta x \Delta y \Delta z [(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t] \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dividindo-se a Eq.(3.24) por  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ , obtém-se:

$$\frac{(Q_x\rho)_x - (Q_x\rho)_{x+\Delta x}}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{(Q_y\rho)_y - (Q_y\rho)_{y+\Delta y}}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{(Q_z\rho)_z - (Q_z\rho)_{z+\Delta z}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t}{\Delta t} \quad (3.25)$$

Na Eq.(3.25), aparece o termo  $Q_x/\Delta y \Delta z$ , que corresponde ao fluxo volumétrico  $Q$  na direção  $x$  dividido por sua área de seção transversal. Esta é a definição da velocidade aparente  $\mathbf{q}$  do fluido na direção  $x$ . Os análogos às direções  $y$  e  $z$  também estão presentes. Substituindo estes termos por  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$ , obtém-se:

$$\frac{(q_x\rho)_x - (q_x\rho)_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{(q_y\rho)_y - (q_y\rho)_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(q_z\rho)_z - (q_z\rho)_{z+\Delta z}}{\Delta z} = \frac{(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t}{\Delta t} \quad (3.26)$$

Fazendo  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  e  $\Delta t$  tão pequenos quanto se queira, chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(q_x\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.27)$$

que pode ser escrita de forma compacta como:

$$\nabla \cdot (\mathbf{q}\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.28)$$

Através de uma rápida análise, pode-se notar que a Eq.(3.28) tem dimensão de massa por tempo por unidade de volume.

## b) Lei de Darcy

Substituindo a equação da lei de Darcy (Eq. 3.5) na Eq.(3.28), tem-se:

$$\nabla \cdot (-K\nabla\Phi\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.29)$$

Substituindo  $K$  por  $k\rho g/\mu$  (Eq. 3.7), tem-se:

$$\nabla \cdot \left( \frac{k\rho^2 g}{\mu} \nabla\Phi \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.30)$$

Rosa et al. (2006) diz que pode-se desprezar os efeitos da variação da altura, fazendo o potencial  $\Phi$  ser representado apenas por  $p/\rho g$ :

$$\frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho\nabla p) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.31)$$

## c) Equação da compressibilidade

Neste ponto, devem ser adicionados na formulação a contribuição das compressibilidades, tanto do fluido quanto da formação rochosa. A introdução das compressibilidades visa expressar a derivada temporal de porosidade e massa específica (lado direito da Eq.(3.31)) em termos da pressão.

A equação da compressibilidade dos fluidos, na condição isotérmica, é dada por (Rosa et al., 2006):

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (3.32)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho c \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.33)$$

Analogamente, a equação da compressibilidade efetiva da formação é dada por (Rosa et al., 2006):

$$c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (3.34)$$

que, por sua vez, pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi c_f \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.35)$$

As duas equações de compressibilidade, (3.32) e (3.34), expressam o quanto o volume se altera

com a variação da pressão. No caso dos fluidos, em termos da massa específica e no caso da formação, em termos da porosidade.

A derivada temporal no lado direito da Eq.(3.31) pode ser desenvolvido como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3.36)$$

Substituindo nesta as equações (3.33) e (3.35), chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) &= \phi\rho c \frac{\partial p}{\partial t} + \phi\rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \phi\rho(c + c_f) \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \phi\rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde  $c_t$  é a compressibilidade total do sistema, representada por  $c_t = c + c_f$ .

Substituindo este resultado na Eq.(3.31), tem-se:

$$\frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla p) = \phi\rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.38)$$

Desenvolvendo-se o lado esquerdo desta equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \nabla p) &= \rho \frac{\phi\mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \rho \nabla^2 p + \nabla\rho \cdot \nabla p &= \rho \frac{\phi\mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.39)$$

O gradiente de densidade é, em geral, muito pequeno. O produto escalar dos fatores  $\nabla\rho \cdot \nabla p$  se torna uma parcela desprezível quando comparada aos outros termos da equação. Por isso, no desenvolvimento matemático deste modelo, optou-se por adotar o procedimento indicado por Rosa et al. (2006) e desprezar esta parcela da equação. Desta forma, obtém-se:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi\mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.40)$$

Esta é a equação da difusividade hidráulica, que governa o escoamento de fluidos compressíveis no meio poroso. Sua escrita é mais conveniente na forma:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.41)$$

onde a constante  $\eta$  é chamada de *constante de difusividade hidráulica*, que tem dimensão de  $m^2/s$  e é definida por:

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (3.42)$$

Para o caso da existência de um sumidouro, tem-se:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q \rho g}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.43)$$

Em um domínio bidimensional descrito em coordenadas cartesianas, a Eq.(3.43) se desenvolve como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q \rho g}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.44)$$

### 3.4.2 Relação entre escoamento difusivo e potencial

A partir da Eq.(3.43) pode ser notado que quando o escoamento atinge o regime permanente, a derivada em relação ao tempo no termo da direita se torna zero e a expressão se torna a equação de Poisson em termos da pressão:

$$\nabla^2 p = \frac{Q \rho g}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (3.45)$$

A *altura piezométrica* do fluido definida pela Eq.(3.6) pode ser rearranjada de forma a explicitar a pressão:

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad \rightarrow \quad p = (\Phi - z) \rho g \quad (3.46)$$

Substituindo esta expressão da pressão na Eq.(3.45), a equação de Poisson em termos do potencial (Eq. 3.15) é obtida.

Assim, a equação de Poisson resulta na resposta estacionária do problema, mostrando o gradiente de potencial que o domínio terá quando for atingido o equilíbrio entre os fluidos durante a extração. A equação da difusividade hidráulica resulta na resposta ao longo do tempo, mostrando a evolução do gradiente de pressão. Quando o sistema atinge o estado estacionário, ambas as soluções convergem. Em se tratando de situações de estabilidade da interface, a equação de Poisson gera exatamente o mesmo resultado que a equação da difusividade hidráulica.

## 3.5 Condições de contorno para a representação dos fenômenos dos cones

São apresentadas as condições de contorno para a representação dos fenômenos dos cones de água e de gás nas imediações dos poços de petróleo, tanto em domínio bidimensional quanto axissimétrico. O domínio bidimensional permite analisar o problema em poços horizontais, enquanto o domínio axissimétrico é empregado na análise do problema em poços verticais.

Com relação ao número de fases empregadas, duas situações são consideradas. A simulação de escoamento monofásico, representando apenas a zona de óleo, permite analisar apenas o fenômeno do cone de gás, em regime de produção com vazão subcrítica, sem irrupção do cone. A simulação de escoamento bifásico, representando as duas massas de fluidos envolvidos, permite analisar os fenômenos dos cones de água e de gás, desde a vazão subcrítica até a supercrítica com irrupção do cone.

### 3.5.1 Representação dos fenômenos em poços horizontais

Considere uma região de um reservatório produzida a partir de um poço horizontal. A Fig. 3.1 mostra como um domínio bidimensional representativo do escoamento no reservatório tridimensional é obtido através de um plano de corte.

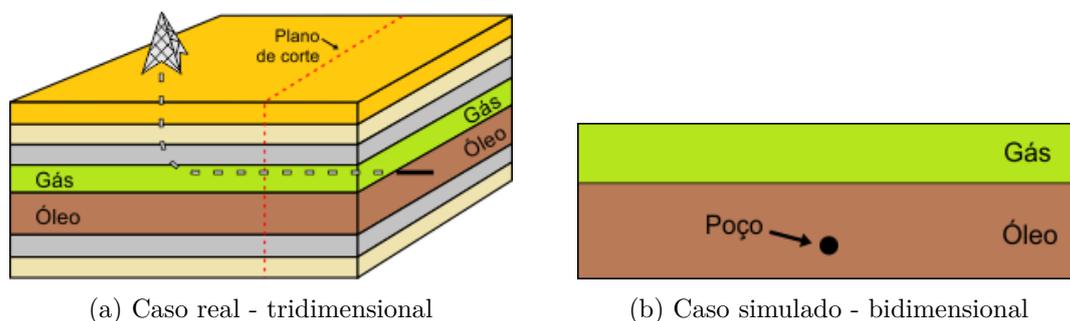


Figura 3.1: Representação bidimensional do reservatório

#### 3.5.1.1 Escoamento monofásico

Para a simulação do fenômeno do cone de gás, um simulador monofásico é empregado. A Fig. 3.2 mostra o aspecto geral deste tipo de problema.

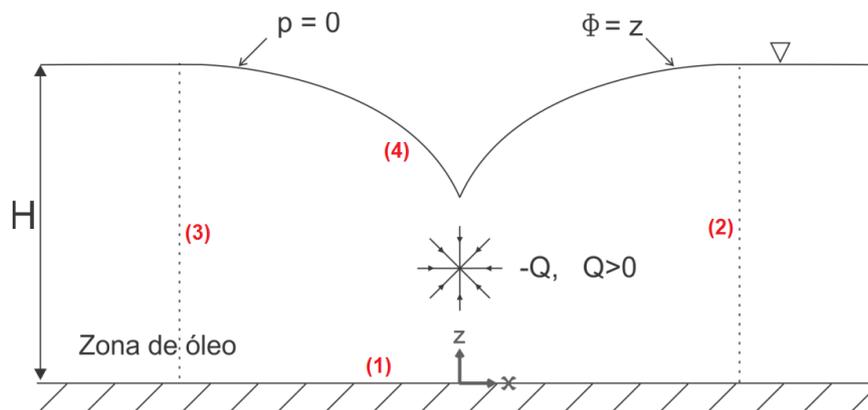


Figura 3.2: Aspecto geral do problema cone de gás

Nesta figura, pode-se identificar que:

O limite inferior da zona de óleo é a base, definida como uma fronteira impermeável. A impermeabilidade implica na condição de que não há escoamento na direção normal à base. Assim:

$$\mathbf{q}_o \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{no contorno (1)} \quad (3.47)$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor unitário normal que aponta para fora da região considerada. O sub-índice “o” indica que a variável se refere ao óleo.

Na Fig. 3.2,  $H$  é a altura da zona de óleo, medida da base impermeável até a interface óleo/gás não perturbada pelo escoamento. Desta forma, os limites laterais têm sempre o potencial igual a  $H$ . O sumidouro tem intensidade  $-Q$ , com  $Q > 0$ .

$$\Phi_o = H \quad \text{nos contornos (2) e (3)} \quad (3.48)$$

O limite superior da zona de óleo é a interface óleo/gás (superfície livre), que é definida como uma superfície freática, onde  $p_o = 0$ . Logo, de acordo com a Eq.(3.6), a altura piezométrica da superfície livre é simplesmente sua altura (coordenada  $z$ ), que por sua vez, é o objeto de estudo.

$$\Phi_o = z(x) \quad \text{no contorno (4)} \quad (3.49)$$

As equações (3.47), (3.48) e (3.49) são as condições de contorno para o escoamento monofásico.

### 3.5.1.2 Escoamento bifásico

Para a simulação do fenômeno do cone de água, um simulador bifásico é empregado. Cada fase representa uma massa de fluido envolvido: óleo e água. A Fig. 3.3 mostra o aspecto geral deste tipo de problema.

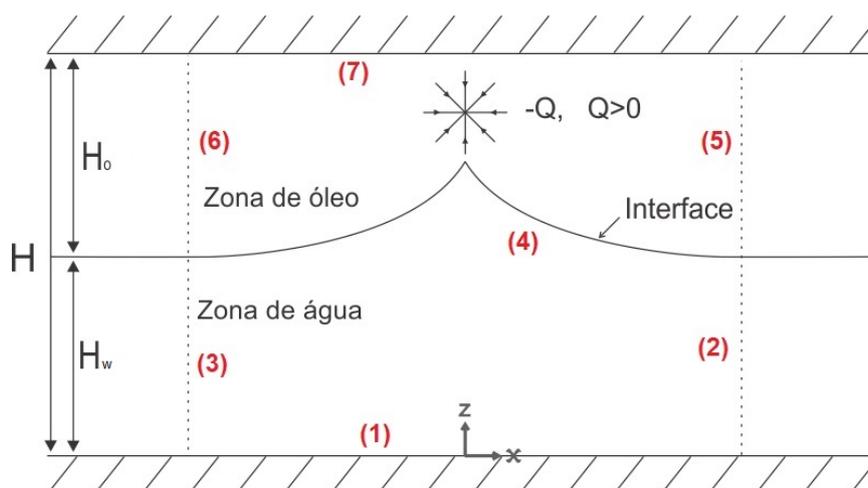


Figura 3.3: Aspecto geral do problema de cone de água

Na Fig. 3.3, pode-se indicar que:

O limite inferior da zona de água é a base, definida como uma fronteira impermeável. A impermeabilidade implica na condição de que não há escoamento na direção normal à base. Assim:

$$\mathbf{q}_w \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{no contorno (1)} \quad (3.50)$$

onde o sub-índice “ $w$ ” indica que a variável se refere à água.

O limite superior da zona de óleo é o topo, também definido como uma fronteira impermeável. Com isso, tem-se:

$$\mathbf{q}_o \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{no contorno (7)} \quad (3.51)$$

Na Fig. 3.3,  $H$  é a altura total do reservatório.  $H_w$  é a altura da zona de água, medida da base impermeável até a interface não perturbada pelo escoamento.  $H_o$  é a altura da zona de óleo, medida da interface não perturbada pelo escoamento até o topo impermeável. Desta forma, considerando as condições hidrostáticas na fronteira, têm-se as condições de contorno para os limites laterais:

$$\Phi_w = H_w + (\rho_o H_o) / (\rho_w) \quad \text{nos contornos (2) e (3)} \quad (3.52)$$

$$\Phi_o = H_o + H_w \quad \text{nos contornos (5) e (6)} \quad (3.53)$$

## Interface

O limite entre as zonas de água e óleo é a interface. Este trabalho adota as considerações de fluidos imiscíveis entre si e de interface abrupta. Esta é uma aproximação que considera que quando dois fluidos imiscíveis estão em contato, existe uma interface entre eles e, de cada lado desta interface, só existe um fluido cujo escoamento é governado pelo gradiente de seu próprio potencial. Quando a interface se movimenta, ambos os fluidos também se movimentam, de forma que não ocorrem vazios nem sobreposições entre as massas de fluido (Bear, 1972).

O que fundamenta tal aproximação é o fato de que a camada de transição entre os fluidos (que estão estratificados em função de suas diferentes densidades), na qual existe efetivamente a mistura entre eles, tem altura insignificante em comparação com a escala de comprimento característica do escoamento. Esta aproximação é tão mais válida quanto maior for a diferença de densidade entre os fluidos envolvidos. Assim, no contexto de reservatórios de petróleo, a adoção desta aproximação é mais representativa do que ocorre na interface gás-óleo, devido à maior diferença de densidade entre eles do que a que existe entre óleo e água.

Tratar a interface como abrupta implica na condição de que, para um ponto localizado sobre a interface, a velocidade deve ter a mesma magnitude do ponto de vista de qualquer um dos dois fluidos, porém, sentidos contrários. A dinâmica do fenômeno leva ainda à condição de continuidade de pressão entre os dois fluidos, ao longo de todo o reservatório e, conseqüentemente, na interface.

Desta forma, as condições de contorno para a interface são as equações de compatibilidade de pressões e equilíbrio de velocidades:

$$p_o = p_w \quad \text{no contorno (4)} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{q}_o \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{q}_w \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{no contorno (4)} \quad (3.55)$$

As equações (3.50) a (3.55) são as condições de contorno para o escoamento bifásico óleo/água e têm suas análogas para o escoamento de óleo/gás, o que permite simular um problema de cone de gás considerando as duas massas de fluido envolvidas.

## Sumidouro

O sumidouro tem intensidade  $-Q$ ,  $Q > 0$ . Sua coordenada  $z$  se localiza, inicialmente, no interior da zona de óleo. À medida que o cone de água (ou de gás) avança, a coordenada do sumidouro pode vir a ser tomada pela zona de água (ou de gás).

Durante a extração do óleo, a interface, assim como a superfície livre no caso monofásico, tem localização desconhecida. Descobrir esta localização é parte do problema.

### 3.5.2 Representação dos fenômenos em poços verticais

Considere uma região de um reservatório produzida a partir de um poço vertical. A Fig. 3.4 mostra como um domínio axissimétrico representativo do escoamento no reservatório tridimensional é obtido.

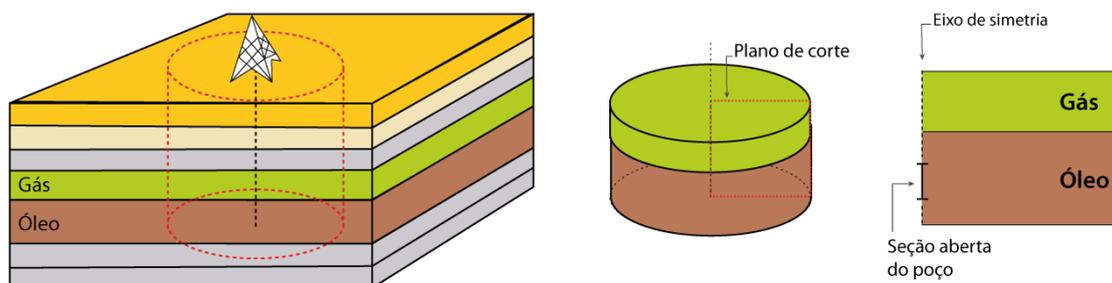


Figura 3.4: Representação axissimétrica do reservatório

A representação geométrica do domínio axissimétrico é um plano bidimensional com coordenadas  $r, z$ . Desta forma, como pode ser visto nas figuras a seguir, as condições de contorno para o domínio axissimétrico são iguais às do domínio bidimensional.

A Fig. 3.5 mostra o aspecto geral da representação do problema de cone de gás em domínio axissimétrico.

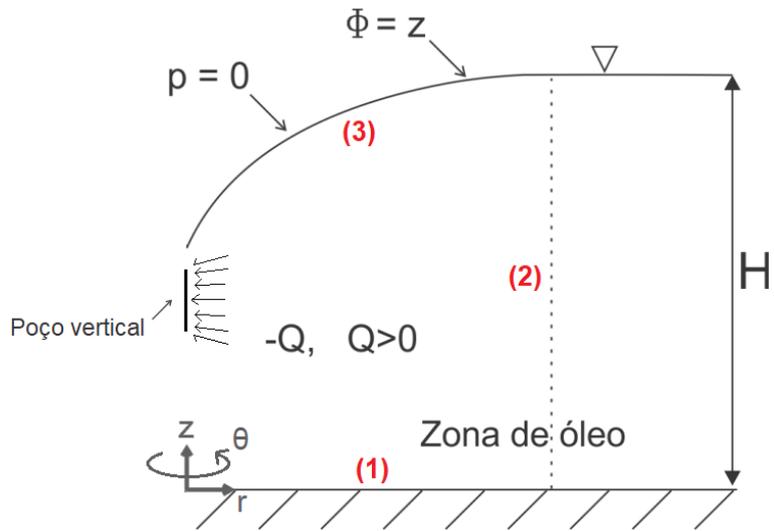


Figura 3.5: Aspecto geral do problema cone de gás em domínio axissimétrico

Onde as seguintes condições de contorno se apresentam:

$$\mathbf{q}_o \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{no contorno (1)} \quad (3.56)$$

$$\Phi_o = H \quad \text{no contorno (2)} \quad (3.57)$$

$$\Phi_o = z(r) \quad \text{no contorno (3)} \quad (3.58)$$

A Fig. 3.6 mostra o aspecto geral do problema de cone de água em domínio axissimétrico.

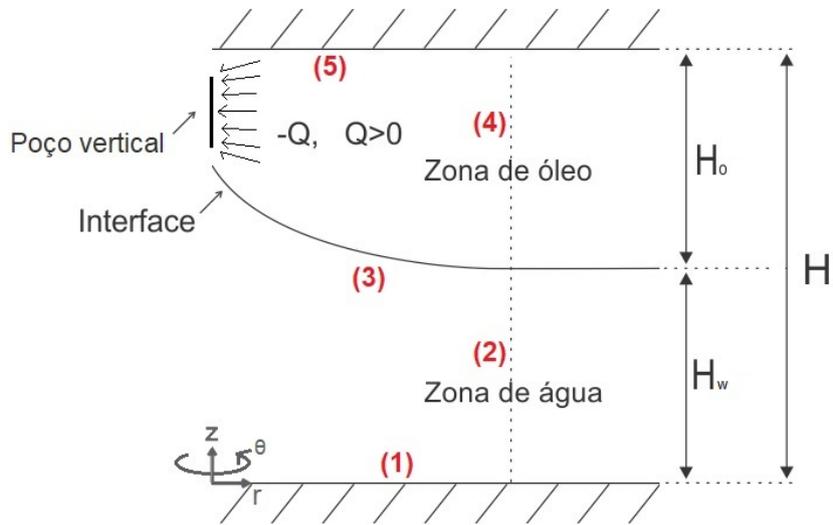


Figura 3.6: Aspecto geral do problema de cone de água em domínio axissimétrico

Onde as seguintes condições de contorno se apresentam:

$$\mathbf{q}_w \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{no contorno (1)} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{q}_o \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{no contorno (5)} \quad (3.60)$$

$$\Phi_w = H_w + (\rho_o H_o)/(\rho_w) \quad \text{no contorno (2)} \quad (3.61)$$

$$\Phi_o = H_o + H_w \quad \text{no contorno (4)} \quad (3.62)$$

$$p_o = p_w \quad \text{no contorno (3)} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{q}_o \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\mathbf{q}_w \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{no contorno (3)} \quad (3.64)$$

## Sumidouro

Para o domínio axissimétrico, o sumidouro é distribuído linearmente ao longo do eixo  $z$ , em comprimento igual à extensão ativa do poço (extensão em que o poço é ranhurado ou perfurado). Sua coordenada  $z$  se localiza, inicialmente, no interior da zona de óleo. À medida que o cone de água (ou de gás) avança, parte do comprimento do sumidouro pode vir a ser tomado pela zona de água (ou de gás).

### 3.5.3 O problema de *Quick Drawdown*

O problema de *Quick Drawdown* é caracterizado por um escoamento em meio poroso saturado de água em uma região circular. Para melhor compreensão, considere o exemplo hipotético de uma ilha circular, além da qual a água se mantém em nível constante. No centro da ilha, cava-se um poço aberto até o limite da fronteira impermeável inferior - a base da ilha. Como o meio é saturado, ao escavar o poço, este se preenche de água. A partir destas condições iniciais, promove-se uma abrupta extração de água do poço, mantendo-se seu nível em uma altura arbitrária às custas de subsequente extração de água ao longo do tempo.

É observado, entretanto, que mesmo em regime permanente, o ponto de contato entre a superfície livre e o poço fica acima da superfície da água dentro do poço. O problema consiste em calcular a posição da interface (incluindo o ponto de contato desta com o poço) ao longo do tempo, de sua posição inicial em repouso até atingir uma posição estável, uma vez mantida a água do poço em nível mais baixo que o inicial. Este problema foi bastante estudado e é considerado um benchmark para implementações axissimétricas utilizando vários métodos numéricos. O trabalho experimental de Hall (1955) foi o ponto de partida, sendo utilizado para validação das implementações numéricas realizadas por Taylor and Luthin (1969), Neuman and Whitherspoon (1970), Neuman (1971), Liggett and Liu (1983), Cooley (1983), Clement et al. (1994), e Rafieezadeh and Ataie-Ashtiani (2014).

Apesar de semelhante ao problema de cone de gás monofásico, esta configuração apresenta algumas diferenças fundamentais, começando pela representação do poço. Diferente dos problemas

de cone de água e de gás em reservatório de petróleo, o raio do poço não é negligenciável. Sendo assim, o poço não é tratado como um sumidouro, ou seja, a sua condição de contorno não é de imposição de um fluxo em um determinado ponto (ou conjunto de pontos). A condição de contorno de poço é a de potenciais e fluxos estabelecidos em suas paredes. Outra diferença é que neste problema, por causa da representação extensa do poço, a superfície livre não se estende até o eixo de simetria, indo apenas até a parede do poço. A Fig. 3.7 apresenta a geometria e as condições de contorno do problema.

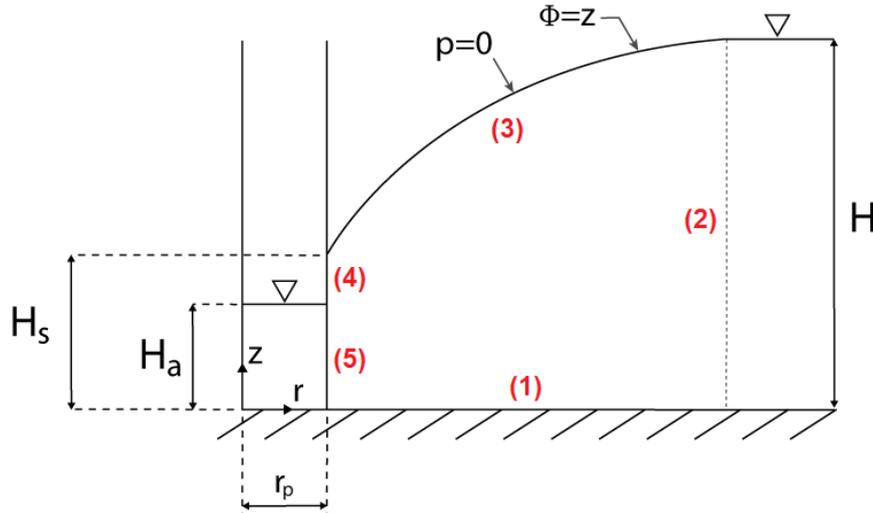


Figura 3.7: Aspecto geral do problema de *Quick Drawdown* em domínio axissimétrico

Da figura, pode-se perceber que, com exceção do poço, as condições de contorno são análogas às do problema de cone de gás em domínio axissimétrico:

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{no contorno (1)} \quad (3.65)$$

$$\Phi = H \quad \text{no contorno (2)} \quad (3.66)$$

$$\Phi = z(r) \quad \text{no contorno (3)} \quad (3.67)$$

O poço tem raio  $r_p$  e é escavado por toda a altura da do domínio até sua base impermeável. No limite lateral esquerdo, têm-se definidas 3 alturas: A altura total do poço escavado,  $H$ ; a altura do nível de água dentro do poço,  $H_a$ ; e a altura em que a superfície livre toca a parede escavada do poço,  $H_s$ .

Com atenção ao limite lateral esquerdo do meio poroso, observam-se as seguintes condições. Para  $r = r_p$  e  $0 \leq z \leq H_a$ , o potencial é igual a  $H_a$ , visto que existe ali uma superfície livre em posição constante dentro do poço, mantendo o potencial imutável igual à sua altura. Deste ponto adiante, em sentido vertical, ou seja, para  $r = r_p$  e  $H_a \leq z \leq H_s$ , o potencial é igual à altura em que a superfície livre da água toca a parede do poço, ou seja, é igual à coordenada  $z$ . Dessa

forma, tem-se:

$$\bar{\Phi} = z(r_p) \quad \text{no contorno (4)} \quad (3.68)$$

$$\bar{\Phi} = H_a \quad \text{no contorno (5)} \quad (3.69)$$

## Capítulo 4

# O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos potenciais bidimensionais

### 4.1 Introdução

Os modelos matemáticos de quaisquer sistemas a serem estudados são, normalmente, construídos a partir de equações diferenciais que regem o comportamento de cada parte infinitesimal de tal sistema. Segundo Banerjee (1994), uma vez descrito o sistema na forma deste conjunto de equações diferenciais, passa-se ao trabalho de obtenção da solução das equações em um determinado domínio, ou região, que por sua vez, pode ter forma geométrica complicada, composição de distintos materiais e propriedades complexas.

Tais complicações, que aparecem na maioria dos problemas práticos, dificultam sobremaneira a obtenção de soluções analíticas para as equações governantes e, nestes casos, os métodos numéricos se apresentam como opções factíveis para a obtenção de resultados com boa precisão. Entre os métodos numéricos de grande expressão atualmente destacam-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Volumes Finitos, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

Este capítulo apresenta a formulação do Método dos Elementos de Contorno para escoamentos potenciais bidimensionais, aplicada na implementação do conjunto de simuladores desenvolvidos neste trabalho. É mostrado o processo de obtenção da equação integral de contorno a partir da equação diferencial governante do problema, bem como as soluções fundamentais utilizadas para o potencial e velocidade para casos isotrópicos. O capítulo traz, ainda, uma proposta de soluções fundamentais para casos ortotrópicos.

### 4.1.1 Métodos numéricos

De acordo com Banerjee (1994), o Método das Diferenças Finitas (MDF) é, em princípio, aplicável a qualquer sistema de equações diferenciais, mas sua implementação computacional no que tange à aplicação das condições de contorno é, não raras vezes, uma tarefa laboriosa. Neste método, a precisão dos resultados obtidos é fortemente dependente do refinamento da malha utilizada, logo, a quantidade de operações envolvidas é elevada.

O Método dos Volumes Finitos (MVF) é largamente utilizado em problemas de mecânica dos fluidos. O método discretiza o domínio em volumes de controle e aplica as equações governantes em sua forma integral, respeitando, por definição, os princípios de conservação de massa, momento e energia. Por aplicar as equações integrais tanto de domínio quanto de contorno, o método exige a discretização de todo o domínio simulado.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste na discretização de todo o corpo em elementos de tamanho finito (isto é, não-infinitesimal). Neste método, segundo Banerjee (1994), cada elemento reproduz aproximadamente o comportamento da região do corpo que ocupa. A implementação das condições de contorno é relativamente fácil, ao contrário do MDF. O MEF vem sendo aplicado há mais de 50 anos de maneira popular como ferramenta na análise de problemas reais de engenharia, e ocupa um lugar de ferramenta computacional padrão durante todo esse tempo.

Seu principal ponto fraco, no entanto, é a necessidade de discretização do corpo todo, o que inevitavelmente leva a trabalhar com um número elevado de elementos finitos, principalmente em problemas tridimensionais em grande escala. Além disso, a tarefa de modelagem de geometrias complexas é extremamente laboriosa e consome muito tempo de trabalho. Ainda nesta característica, a modificação da malha em problemas de geometria variável ao longo do tempo é igualmente complicada. Com relação à precisão dos resultados, embora o MEF compute com grande acurácia a função de campo sobre o domínio, o método não é tão eficiente na determinação de suas derivadas (esta precisão diminui mais ainda nas regiões de gradientes acentuados).

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste em uma alternativa em relação à maneira como as equações diferenciais governantes do problema são abordadas. O primeiro passo realizado neste método é a transformação das equações diferenciais em equações integrais de contorno equivalentes. Como resultado deste passo, as variáveis envolvidas passam a ser avaliadas apenas nos extremos (contornos) da região de integração. Este é o motivo pelo qual, no MEC, a discretização só necessita ser realizada na superfície do corpo (seu contorno). Isso faz com que o MEC trabalhe com um número menor de elementos que os métodos de domínio: um corpo tridimensional passa a ser tratado apenas por sua superfície envoltória ao invés de todo o volume do corpo; um domínio bidimensional passa a ser tratado apenas por seu contorno ao invés de toda a sua área; um domínio unidimensional passa a ser tratado apenas por seus dois pontos extremos ao invés de todo seu comprimento. Esta característica faz com que a discretização do domínio no MEC seja uma tarefa muito mais simples do que em outros métodos numéricos. Por consequência, o método é mais *amigável* a problemas com geometrias variáveis no tempo, como é o caso das aplicações deste trabalho.

Além de diminuir o problema em uma dimensão, o MEC tem também a vantagem de possibilitar soluções que variem continuamente em todo o corpo, sendo que as aproximações ficam restritas ao seu contorno. O MEC é particularmente efetivo na obtenção das derivadas das funções de campo (por exemplo, a velocidade do escoamento nos casos estudados neste trabalho). A discretização apenas do contorno leva a um sistema com número muito menor de equações do que o MEF ou o MDF. No entanto, o MEC gera matrizes densamente povoadas, enquanto o MEF gera matrizes maiores, porém esparsas.

As próximas seções apresentam a formulação do MEC para problemas regidos pela equação de Laplace em domínio bidimensional, presente na maior parte dos modelos adotados neste trabalho, para o escoamento potencial.

## 4.2 Soluções fundamentais

A solução fundamental da equação diferencial governante é a base da formulação do MEC (Dominguez, 1993). Para o caso estudado neste trabalho, a solução fundamental corresponde à resposta do potencial em um meio infinito quando a fonte (ou sumidouro) está concentrada em um ponto. De acordo com Dominguez (1993) ela é a solução particular da equação de Poisson quando o termo não homogêneo (referente à fonte ou ao sumidouro) é igual ao delta de Dirac:

$$\nabla^2 \Phi^* = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} \quad (4.1)$$

Segundo Katsikadelis (2016), o domínio infinito contendo apenas uma carga pontual pode ser descrito como um domínio axissimétrico cuja origem está localizada sobre tal carga. Desta forma, desenvolve-se a Eq.(4.1) em termos de coordenadas polares:

$$\nabla^2 \Phi^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial \theta^2} = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} \quad (4.2)$$

Como a solução é axissimétrica, as variações em relação a  $\theta$  são iguais a zero, chegando-se a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} \quad (4.3)$$

Considerando-se que o lado direito da equação é igual a zero em todos os pontos com exceção da origem, tem-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right) = 0 \quad (4.4)$$

em que  $r$  é a distância Euclidiana entre o ponto onde a fonte é aplicada (ponto fonte) e o ponto onde o potencial é medido (ponto campo) (Fig. 4.1):

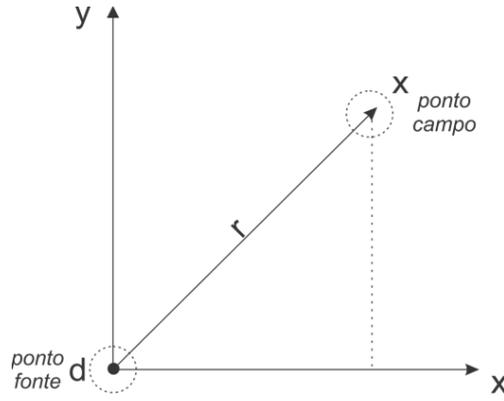


Figura 4.1: Pontos fonte e campo

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (4.5)$$

A Eq.(4.4) pode ser integrada duas vezes em relação a  $r$ , dando origem a:

$$\Phi^* = A \ln(r) + B \quad (4.6)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias. Sem perda de generalidade, ao se buscar uma solução particular a constante  $B$  pode ser assumida igual a zero. A constante  $A$ , por sua vez, pode ser determinada aplicando as equações em um domínio circular  $\Omega$  de contorno  $S$  com origem no ponto fonte. Utilizando o teorema de Gauss-Green nesse domínio, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \Phi^* d\Omega = \int_S \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS \quad (4.7)$$

O integrando do lado esquerdo desta equação é dado pela Eq.(4.1). O integrando do lado direito pode ser obtido a partir da derivação da Eq.(4.6) em relação a  $r$  no domínio circular (onde  $\frac{d(*)}{dn} = \frac{d(*)}{dr}$ ):

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = A \frac{1}{r} \quad (4.8)$$

Substituindo este resultado, bem como a Eq.(4.1), na Eq.(4.7), obtém-se:

$$\int_{\Omega} -\frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} d\Omega = \int_S A \frac{1}{r} dS \quad (4.9)$$

Lançando-se mão da substituição de variáveis  $dS = r d\theta$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)}{K} d\Omega = - \int_0^{2\pi} A d\theta \quad (4.10)$$

Finalmente, aplicando as propriedades da função delta de Dirac, chega-se a:

$$\frac{1}{K} = -2\pi A \quad (4.11)$$

Logo,

$$A = -\frac{1}{2\pi K} \quad (4.12)$$

A substituição da constante  $A$  na Eq.(4.6) dá origem a:

$$\Phi^* = -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \quad (4.13)$$

A Eq.(4.13) é a solução fundamental do potencial.

#### 4.2.1 Solução fundamental da velocidade

Avaliando o fluxo que atravessa o contorno, temos que:

$$q = -K \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \quad (4.14)$$

A Eq.(4.14) pode ser reescrita como

$$q = -K \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.15)$$

Logo, a solução fundamental para a velocidade é:

$$q^* = -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.16)$$

Utilizando o valor de  $\Phi^*$  obtido na Eq.(4.13), temos:

$$q^* = -K \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) \quad (4.17)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(\ln(r))}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial(\ln(r))}{\partial x} n_x + \frac{\partial(\ln(r))}{\partial y} n_y \right] \quad (4.18)$$

Analisando a Eq.(4.18) em  $x$ :

$$\frac{\partial(\ln(r))}{\partial x} = \frac{\partial(\ln(r))}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial(\ln(r))}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2} \quad (4.20)$$

Analogamente, em  $y$ :

$$\frac{\partial(\ln(r))}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{y}{r} = \frac{y}{r^2} \quad (4.21)$$

Substituindo as Eqs.(4.20) e (4.21) na Eq.(4.18), segue que

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x}{r^2} n_x + \frac{y}{r^2} n_y \right] \quad (4.22)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} (x n_x + y n_y) \quad (4.23)$$

Generalizando para quando o ponto fonte não está localizado na origem do sistema de coordenadas, a Eq.(4.23) toma a forma:

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y] \quad (4.24)$$

A Eq.(4.24) é a solução fundamental da velocidade.

Quando o ponto fonte não está localizado na origem, a expressão para o raio é:

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (4.25)$$

onde  $(x_d, y_d)$  são as coordenadas do ponto fonte.

#### 4.2.2 Soluções fundamentais ortotrópicas

Para domínios ortotrópicos, uma proposta de solução fundamental é realizada. Partindo da solução fundamental isotrópica do potencial (Eq. 4.13), a seguinte solução fundamental ortotrópica é sugerida:

$$\Phi_{orto}^* = -\frac{1}{2\pi K_m} \ln(r') \quad (4.26)$$

na qual  $K_m$  é a condutividade hidráulica *média* e  $r'$  é o raio *modificado*, expressos por:

$$K_m = \sqrt{K_x K_y} \quad (4.27)$$

e

$$r' = \sqrt{\frac{(x - x_d)^2}{K_x} + \frac{(y - y_d)^2}{K_y}} \sqrt{K_m} \quad (4.28)$$

A obtenção da solução fundamental ortotrópica da velocidade deve satisfazer a seguinte equação:

$$q_{orto}^* = - \left( K_x \frac{\partial \Phi_{orto}^*}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \Phi_{orto}^*}{\partial y} n_y \right) \quad (4.29)$$

Desenvolvendo a derivada parcial em  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{orto}^*}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{2\pi K_m} \ln(r') \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi K_m} \frac{\partial}{\partial x} (\ln(r')) \\ &= -\frac{1}{2\pi K_m} K_m^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r'} \left[ \frac{(x-x_d)^2}{K_x} + \frac{(y-y_d)^2}{K_y} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{(x-x_d)}{K_x} \\ &= -\frac{1}{2\pi (r')^2} \frac{(x-x_d)}{K_x} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Analogamente, em  $y$ , tem-se:

$$\frac{\partial \Phi_{orto}^*}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi (r')^2} \frac{(y-y_d)}{K_y} \quad (4.31)$$

Substituindo as derivadas na equação original, tem-se:

$$q_{orto}^* = - \left[ K_x \left( -\frac{1}{2\pi (r')^2} \frac{(x-x_d)}{K_x} \right) n_x + K_y \left( -\frac{1}{2\pi (r')^2} \frac{(y-y_d)}{K_y} \right) n_y \right] \quad (4.32)$$

Levando a:

$$q_{orto}^* = \frac{1}{2\pi (r')^2} [(x-x_d)n_x + (y-y_d)n_y] \quad (4.33)$$

Estas soluções propostas satisfazem a equação:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \Phi_{orto}^*) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (4.34)$$

e têm a característica de convergir para as soluções fundamentais isotrópicas dadas pelas equações 4.13 e 4.24 quando  $K_x = K_y$ . Com isso, garante-se continuidade das soluções entre sistemas isotrópicos, quase-isotrópicos (nos quais  $K_x$  e  $K_y$  têm valores próximos) e ortotrópicos. A validação das soluções fundamentais propostas é mostrada no Capítulo 9.

### 4.3 A equação integral de contorno

Para obter a equação integral de contorno, utiliza-se o método dos resíduos ponderados e o teorema de Gauss-Green. O método dos resíduos ponderados multiplica a equação diferencial governante

do problema, Eq.(3.16), por uma função peso arbitrária  $\omega$ . Integra-se a expressão obtida em todo o domínio e assume-se que o resultado da integração é zero. Este procedimento é mostrado na Eq.(4.35).

$$\int_A (\nabla^2 \Phi) \omega dA = 0 \quad (4.35)$$

Desenvolvendo a Eq.(4.35), tem-se:

$$\int_A \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \omega dA = 0 \quad (4.36)$$

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = 0 \quad (4.37)$$

Neste ponto, lança-se mão do teorema de Gauss-Green - Eq.(4.38) - para realizar a transformação das integrais sobre o domínio em integrais sobre o contorno:

$$\int_S f(x, y) n_x dS = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA \quad (4.38)$$

A partir daqui, será analisado a primeira integral da Eq.(4.37), que traz a derivada em  $x$ :

Fazendo  $f(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega$  na Eq.(4.38), temos que

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS &= \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega \right) dA \\ &= \int_A \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA \\ &= \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \end{aligned} \quad (4.39)$$

Reorganizando a Eq.(4.39):

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \quad (4.40)$$

Para transformar a última integral de domínio, do lado direito da Eq.(4.40), utiliza-se o seguinte artifício:

Aplicando o teorema de Gauss-Green fazendo  $f = \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x}$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS &= \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA \\
&= \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Reorganizando a Eq.(4.41):

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA = \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS - \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \tag{4.42}$$

Com isso, podemos escrever a primeira integral da Eq.(4.37), substituindo a Eq.(4.42) na Eq.(4.40), como:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \tag{4.43}$$

Analogamente, para a segunda integral da Eq.(4.37), pode-se escrever:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial y} \omega n_y dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} dA \tag{4.44}$$

Substituindo as equações (4.43) e (4.44) na Eq.(4.37), é obtido:

$$\int_S \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y \right) \omega dS - \int_S \Phi \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) dS + \int_A \Phi \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dA = 0 \tag{4.45}$$

A Eq.(4.45) pode ser escrita na forma:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \omega dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \omega dA = 0 \tag{4.46}$$

O próximo passo é a eliminar a integral de domínio da Eq.(4.46) de forma a obter uma equação integral de contorno. Para isso, deve ser escolhida uma função peso  $\omega(x, y)$  cujo laplaciano seja igual a zero. Uma das características do MEC é utilizar como função peso a solução fundamental para o potencial, ou seja, fazer  $\omega = \Phi^*$ . Como o laplaciano da solução fundamental é uma função delta de Dirac, então o mesmo será igual a zero para todo o domínio, exceto no ponto fonte.

Desta forma, a Eq.(4.46) fica:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \Phi^* dA = 0 \tag{4.47}$$

Substituindo o laplaciano da solução fundamental pelo expresso na Eq.(4.1), tem-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \left( -\frac{\delta(x - x_d)}{K} \right) dA = 0 \quad (4.48)$$

Pelas propriedades da função delta de Dirac, tem-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS - \frac{\Phi(x_d, y_d)}{K} = 0 \quad (4.49)$$

Multiplicando a Eq.(4.49) por  $(-K)$ :

$$\int_S \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi^* dS - \int_S \Phi \left( -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) dS + \Phi(x_d, y_d) = 0 \quad (4.50)$$

Isolando  $\Phi(x_d, y_d)$ :

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi \left( -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) dS - \int_S \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Phi^* dS \quad (4.51)$$

Substituindo as equações (4.15) e (4.16) na Eq.(4.51), tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.52)$$

A Eq.(4.52) é a equação integral de contorno válida para quando o ponto fonte está no interior do domínio.

Para abranger o caso em que o ponto fonte se encontra sobre o contorno, devemos lançar mão do seguinte artifício:

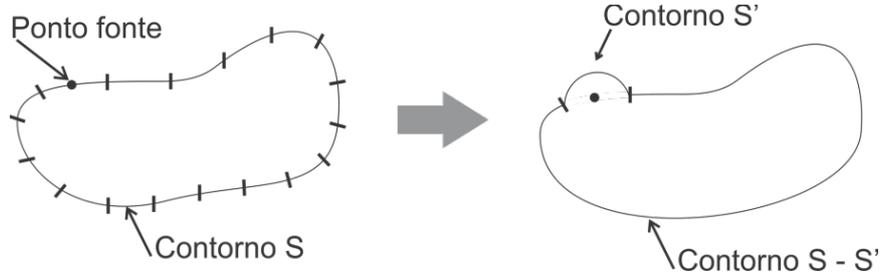


Figura 4.2: Modificação do contorno

Da Fig. 4.2, tem-se que o contorno original é o contorno  $S$ . Faz-se uma alteração no contorno  $S$ , criando um arco de circunferência sobre o ponto fonte. A este arco chamamos contorno  $S'$ .

Da análise da Fig. 4.2, percebe-se que:

$$[\text{Contorno } S] = [\text{Contorno original}] \quad (4.53)$$

$$[\text{Contorno } S - S'] + [\text{Contorno } S'] = [\text{Contorno alterado}] \quad (4.54)$$

O contorno  $S'$  é um arco de circunferência de raio  $\varepsilon$ . Em qualquer ponto de  $S'$ , o raio  $r$ , que é a distância entre ponto fonte e ponto campo, é sempre igual a  $\varepsilon$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se o ponto fonte sobre o contorno. Para a aplicação deste artifício, deve-se separar as integrais da equação integral de contorno, Eq.(4.52), em  $S'$  e  $(S - S')$ . Como mostrado a seguir.

Considerações prévias:

$$|\mathbf{r}| = r = \left[ (x - x_d)^2 + (y - y_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{r} = (x - x_d)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_d)\hat{\mathbf{j}} = r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}}}{(r_x^2 + r_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}}}{r} \quad (4.57)$$

$$\therefore n_x = \frac{r_x}{r} ; n_y = \frac{r_y}{r} \quad (4.58)$$

Separando as integrais da Eq.(4.52), tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_{S'} \Phi q^* dS - \int_{S'} q \Phi^* dS + \int_{(S-S')} \Phi q^* dS - \int_{(S-S')} q \Phi^* dS \quad (4.59)$$

Analisando a primeira integral em  $S'$  da Eq.(4.59) e substituindo na mesma a expressão para  $q^*$  da Eq.(4.24), tem-se:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d) n_x + (y - y_d) n_y] dS \quad (4.60)$$

Com o exposto nas considerações prévias - Eqs.(4.55) a (4.58) -, a Eq.(4.60) fica:

$$\begin{aligned} \int_{S'} \Phi q^* dS &= \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} [r_x n_x + r_y n_y] dS \\ &= \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} \left[ r_x \frac{r_x}{r} + r_y \frac{r_y}{r} \right] dS \end{aligned} \quad (4.61)$$

Como, em todo  $S'$ ,  $r = \varepsilon$  e  $dS = r d\theta \Rightarrow dS = \varepsilon d\theta$ , tem-se:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi \varepsilon^2} \left( \frac{r_x^2 + r_y^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta \quad (4.62)$$

Como  $r_x^2 + r_y^2 = r^2 = \varepsilon^2$ :

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi \varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi} d\theta = \frac{\Phi}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.63)$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi \rightarrow \Phi(x_d, y_d)$ . Com isso:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \quad (4.64)$$

Analisando, agora, a segunda integral em  $S'$  da Eq.(4.59) e substituindo na mesma a expressão para  $\Phi^*$  da Eq.(4.13), tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = \int_{S'} q \left( -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) dS \quad (4.65)$$

Fazendo  $r = \varepsilon$  e  $dS = \varepsilon d\theta$ , tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \left( -\frac{1}{2\pi K} \ln(\varepsilon) \right) \varepsilon d\theta \quad (4.66)$$

Lembrando que  $\varepsilon$  é constante em todo  $S'$ , tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \varepsilon \ln(\varepsilon) \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \quad (4.67)$$

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \varepsilon \ln(\varepsilon) (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.68)$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} (\theta_2 - \theta_1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \ln(\varepsilon)] = 0 \quad (4.69)$$

Portanto, tem-se que:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = 0 \quad (4.70)$$

Substituindo os resultados obtidos com as equações (4.64) e (4.70) na equação original, (4.59), segue que:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_{(S-S')} \Phi q^* dS - \int_{(S-S')} q \Phi^* dS \quad (4.71)$$

Levando em consideração que quando se faz  $\varepsilon \rightarrow 0$  isso implica que  $(S - S') \rightarrow S$ , então:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.72)$$

Reorganizando, tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) - \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.73)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[ 1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.74)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[ \frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.75)$$

O numerador da expressão entre colchetes,  $2\pi - (\theta_2 - \theta_1)$ , corresponde ao ângulo interno do contorno, conforme mostrado na Fig. 4.3. Então:

$$\Phi(x_d, y_d) \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.76)$$

A Eq.(4.76) é a equação integral de contorno válida quando o ponto fonte está sobre o contorno.

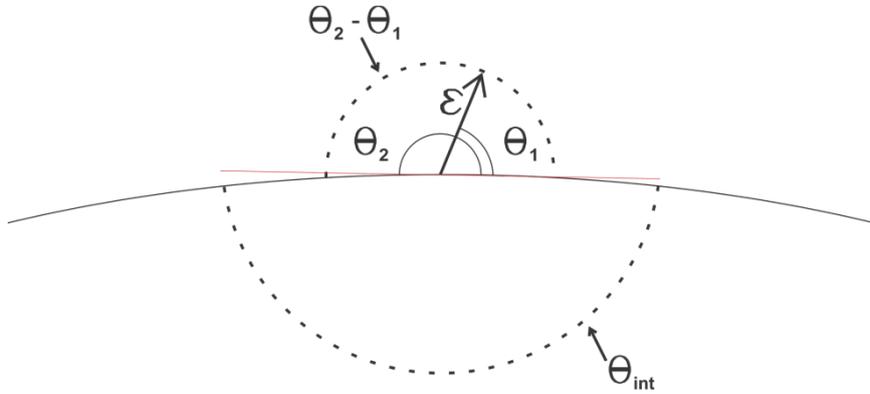


Figura 4.3: Ângulos interno e externos

Se o ponto fonte estiver no exterior do domínio e fora do contorno, então a integral do delta de Dirac da Eq.(4.48) é igual a zero e, com isso,  $\Phi(x_d, y_d) = 0$ . Neste caso, então:

$$0 = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.77)$$

A Eq.(4.77) é a equação integral de contorno válida quando o ponto fonte está no exterior do domínio e fora do contorno.

Dos resultados obtidos nas equações (4.52), (4.76) e (4.77), pode-se escrever:

$$c \Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.78)$$

$$\text{onde: } c = \begin{cases} 0 & \text{quando o ponto fonte está fora do domínio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi} & \text{quando o ponto fonte está sobre o contorno} \\ 1 & \text{quando o ponto fonte está no interior do domínio} \end{cases}$$

Para um ponto suave do contorno, é de fácil visualização que  $\frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{1}{2}$  (Banerjee, 1994; Kane, 1994).

#### 4.4 Discretização das equações

A formulação do MEC implica na discretização do contorno da região estudada. Desta forma, o contorno  $S$  é escrito como a soma de  $n$  pedaços nos quais o mesmo é dividido, conforme a Fig. 4.4.

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n \quad (4.79)$$

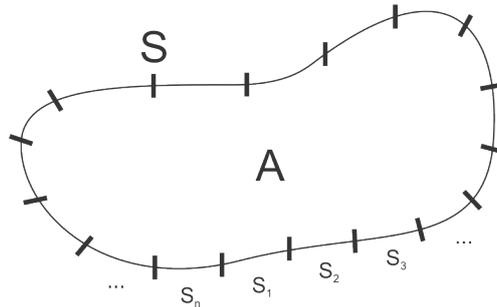


Figura 4.4: Discretização do contorno

A discretização do contorno implica na discretização da equação integral de contorno (4.78). Desta forma, cada uma das integrais da equação dá origem a  $n$  integrais sobre os  $n$  pedaços do contorno dividido. A Eq.(4.78) discretizada é escrita como:

$$c \Phi(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left( \int_{S_j} \Phi q^* dS_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \int_{S_j} q \Phi^* dS_j \right) \quad (4.80)$$

A discretização do contorno gera  $n$  pedaços do contorno que precisam, ainda, ser representados matematicamente. Estes pedaços do contorno podem ter uma forma qualquer, fato que leva à necessidade de serem aproximados por uma forma conhecida, como, segmentos de reta, polinômios de primeira ordem, polinômios de segunda ordem, etc. Quanto mais alto for o grau do polinômio utilizado, mais fiel será a representação que esta forma conhecida fará do pedaço do contorno.

Estas formas conhecidas são chamadas de *elementos de contorno*. A soma de todos os elementos de contorno será, então, uma aproximação do contorno real  $S$ . Quanto maior for a discretização, ou seja, quanto maior for o número  $n$  de pedaços em que o contorno foi dividido, melhor será a aproximação feita por meio dos elementos de contorno. Enquanto o contorno real é denominado  $S$ , o contorno aproximado é denominado  $\Gamma$ . Cada pedaço do contorno real  $S_j$  é aproximado por um *elemento de contorno*  $\Gamma_j$ , conforme mostrado na Fig. 4.5. A Eq.(4.80) para a aproximação com os elementos de contorno fica:

$$c\Phi(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Gamma_j} \Phi q^* d\Gamma_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \int_{\Gamma_j} q \Phi^* d\Gamma_j \right) \quad (4.81)$$

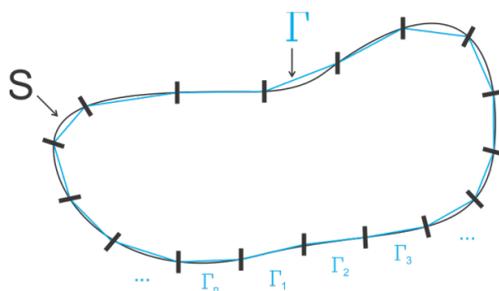


Figura 4.5: Aproximação dos elementos reais por elementos de contorno

## 4.5 Elementos de contorno lineares contínuos

Os elementos de contorno lineares contínuos são aproximações da geometria dos elementos de contorno reais por meio de segmentos de reta com um nó em cada extremidade do elemento (Fig. 4.6). As condições de contorno variam linearmente ao longo dos elementos.



Figura 4.6: Elemento de contorno linear contínuo

Como os nós estão na extremidade do elemento, nem sempre o ponto fonte estará em uma parte suave do contorno. Assim sendo, a constante  $c$  da Eq.(4.81) nem sempre irá assumir o valor de  $c = \frac{1}{2}$ , devendo ser calculada para cada posição do ponto fonte (nos casos em que o mesmo estiver localizado sobre o contorno).

As condições de contorno da Eq.(4.81) devem ser explicitadas em termos do potencial e da velocidade em cada um dos dois nós do elemento. Assim, assume-se que:

$$\Phi_j = (N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2)_j \quad (4.82)$$

$$q_j = (N_1 q_1 + N_2 q_2)_j \quad (4.83)$$

com  $j = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é o número de elementos de contorno utilizados na discretização.

Nas Eq.(4.82) e (4.83),  $N_1$  e  $N_2$  são as *funções de forma* do elemento. Como se trata de elementos retilíneos, as funções de forma são equações de reta baseadas na coordenada local do elemento, denominada  $\xi$ , que varia de  $-1$  a  $+1$ , conforme mostrado na Fig. 4.7.

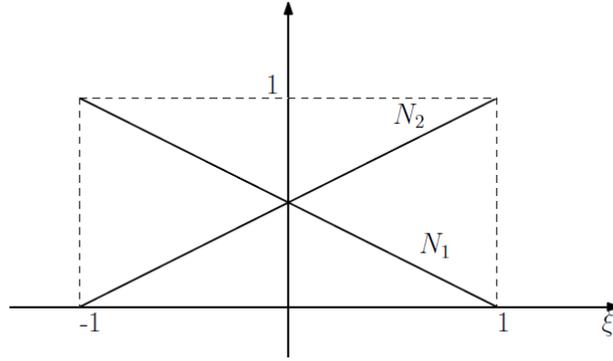


Figura 4.7: Funções de forma (Albuquerque, 2013).

Brebbia et al. (1984) mostram que, para os elementos de contorno lineares contínuos, as funções de forma são dadas por:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.84)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.85)$$

Assim, o valor do potencial e da velocidade em qualquer ponto sobre o elemento pode ser definido em termos de seus valores nodais (na extremidade) e das duas funções de forma, que são funções de interpolação lineares sobre a coordenada  $\xi$  local do elemento.

Aplicando as considerações a respeito dos elementos lineares contínuos, a equação integral de contorno fica:

$$c \Phi^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.86)$$

Na Eq.(4.86), os termos  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $g_1$  e  $g_2$  são dados por:

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma \quad (4.87)$$

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma \quad (4.88)$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 \Phi^* d\Gamma \quad (4.89)$$

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 \Phi^* d\Gamma \quad (4.90)$$

A Eq.(4.86) é a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares contínuos, onde o índice  $i$  corresponde ao  $i$ -ésimo elemento de contorno analisado.

Pode-se organizar a Eq.(4.86) da seguinte forma:

$$-c \Phi^i(x_d, y_d) + \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.91)$$

A Eq.(4.91) é a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares. Ela pode ser transformada em uma forma matricial, fazendo:

$$H_{ij} = \begin{cases} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j & \text{se } i \neq j \\ -c + \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_j & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.92)$$

e

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}_j \quad (4.93)$$

Com isso, a Eq.(4.91) fica:

$$\sum_{j=1}^n \left( H_{ij} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( G_{ij} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.94)$$

Finalmente, a Eq.(4.94) é a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares e em forma matricial.

## 4.6 Método de solução

Para a descrição do método de solução, será apresentado um exemplo simples de aplicação em um problema de escoamento potencial unidirecional em um meio retangular com dois lados imper-

meáveis e dois lados com potenciais estabelecidos, conforme a Fig. 4.8. A discretização utilizada é de um elemento por lado.

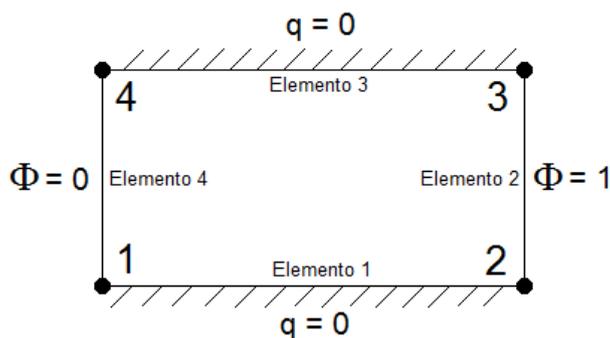


Figura 4.8: Exemplo de aplicação - condições de contorno

É importante notar que cada um dos nós é compartilhado por dois elementos. Para cada nó, existe apenas um valor de potencial, ou seja, existe uma continuidade de potencial ao longo do contorno, entre os elementos. A velocidade calculada em um nó, porém, pode ser diferente, dependendo do ponto de vista de cada elemento. Assim, existe uma velocidade *antes* do nó  $j$  ( $q_j^a$ ), calculada do ponto de vista do elemento exatamente anterior ao nó, e uma velocidade *depois* do mesmo nó  $j$  ( $q_j^d$ ), calculada do ponto de vista do elemento exatamente posterior ao nó. Portanto, existem 3 variáveis para cada nó. Note que, como a equação diferencial é de segunda ordem, cada nó só pode ter uma variável desconhecida para que o problema seja solucionado.

A tabela 4.1 relaciona quais são as variáveis conhecidas e desconhecidas em cada nó.

Tabela 4.1: Exemplo de aplicação - variáveis conhecidas e desconhecidas

Nó	Variáveis conhecidas	Variáveis desconhecidas
1	$\Phi_1 = 0$	$q_1^d = 0$ , $q_1^a$
2	$\Phi_2 = 1$	$q_2^a = 0$ , $q_2^d$
3	$\Phi_3 = 1$	$q_3^d = 0$ , $q_3^a$
4	$\Phi_4 = 0$	$q_4^a = 0$ , $q_4^d$

#### 4.6.1 Cálculo do potencial e da velocidade no contorno

O primeiro passo para a aplicação é colocar o ponto fonte sobre o primeiro nó do primeiro elemento (nó 1) e escrever a Eq.(4.91) para este nó:

$$\begin{aligned}
 -c_1 \bar{\Phi}_1 + (h_{11} \bar{\Phi}_1 + h_{21} \bar{\Phi}_2 + h_{12} \bar{\Phi}_2 + h_{22} \bar{\Phi}_3 + h_{13} \bar{\Phi}_3 + h_{23} \bar{\Phi}_4 + h_{14} \bar{\Phi}_4 + h_{24} \bar{\Phi}_1) = \\
 = (g_{11} \bar{q}_1^d + g_{21} \bar{q}_2^a + g_{12} \bar{q}_2^d + g_{22} \bar{q}_3^a + g_{13} \bar{q}_3^d + g_{23} \bar{q}_4^a + g_{14} \bar{q}_4^d + g_{24} \bar{q}_1^a) \quad (4.95)
 \end{aligned}$$

onde as variáveis sobrescritas com uma barra significam que são variáveis conhecidas, prescritas

através das condições de contorno. Agrupando os termos comuns, tem-se:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(-c_1 + h_{11} + h_{24})}_{H_{11}} \bar{\Phi}_1 + \underbrace{(h_{21} + h_{12})}_{H_{12}} \bar{\Phi}_2 + \underbrace{(h_{22} + h_{13})}_{H_{13}} \bar{\Phi}_3 + \underbrace{(h_{23} + h_{14})}_{H_{12}} \bar{\Phi}_4 = \\ & = g_{11} \bar{q}_1^d + g_{21} \bar{q}_2^a + g_{12} q_2^d + g_{22} q_3^a + g_{13} \bar{q}_3^d + g_{23} \bar{q}_4^a + g_{14} q_4^d + g_{24} q_1^a \quad (4.96) \end{aligned}$$

Aplicando a notação dada pelas Eq.(4.92) e (4.93), tem-se:

$$H_{11} \bar{\Phi}_1 + H_{12} \bar{\Phi}_2 + H_{13} \bar{\Phi}_3 + H_{14} \bar{\Phi}_4 = G_{11}^d \bar{q}_1^d + G_{12}^a \bar{q}_2^a + G_{12}^d q_2^d + G_{13}^a q_3^a + G_{13}^d \bar{q}_3^d + G_{14}^a \bar{q}_4^a \quad (4.97)$$

Colocando o ponto fonte sobre o nó 2 e fazendo o mesmo procedimento, obtém-se:

$$H_{21} \bar{\Phi}_1 + H_{22} \bar{\Phi}_2 + H_{23} \bar{\Phi}_3 + H_{24} \bar{\Phi}_4 = G_{21}^d \bar{q}_1^d + G_{22}^a \bar{q}_2^a + G_{22}^d q_2^d + G_{23}^a q_3^a + G_{23}^d \bar{q}_3^d + G_{24}^a \bar{q}_4^a \quad (4.98)$$

Procede-se da mesma forma para os nós 3 e 4. Ao final deste procedimento, tem-se, de forma matricial:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} G_{11}^d & G_{12}^a & G_{12}^d & G_{13}^a & G_{13}^d & G_{14}^a & G_{14}^d & G_{11}^a \\ G_{21}^d & G_{22}^a & G_{22}^d & G_{23}^a & G_{23}^d & G_{24}^a & G_{24}^d & G_{21}^a \\ G_{31}^d & G_{32}^a & G_{32}^d & G_{33}^a & G_{33}^d & G_{34}^a & G_{34}^d & G_{31}^a \\ G_{41}^d & G_{42}^a & G_{42}^d & G_{43}^a & G_{43}^d & G_{44}^a & G_{44}^d & G_{41}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1^d \\ \bar{q}_2^a \\ q_2^d \\ q_3^a \\ \bar{q}_3^d \\ \bar{q}_4^a \\ q_4^d \\ q_1^a \end{Bmatrix} \quad (4.99) \end{aligned}$$

ou, de forma compacta,

$$[H]\{\Phi\} = [G]\{q\} \quad (4.100)$$

A seguir, reorganizam-se as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, resultando em:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -G_{12}^d & -G_{13}^a & -G_{14}^d & -G_{11}^a \\ -G_{22}^d & -G_{23}^a & -G_{24}^d & -G_{21}^a \\ -G_{32}^d & -G_{33}^a & -G_{34}^d & -G_{31}^a \\ -G_{42}^d & -G_{43}^a & -G_{44}^d & -G_{41}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2^d \\ q_3^a \\ q_4^d \\ q_1^a \end{Bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} G_{11}^d & G_{12}^a & -H_{11} & -H_{12} & G_{13}^d & G_{14}^a & -H_{13} & -H_{14} \\ G_{21}^d & G_{22}^a & -H_{21} & -H_{22} & G_{23}^d & G_{24}^a & -H_{23} & -H_{24} \\ G_{31}^d & G_{32}^a & -H_{31} & -H_{32} & G_{33}^d & G_{34}^a & -H_{33} & -H_{34} \\ G_{41}^d & G_{42}^a & -H_{41} & -H_{42} & G_{43}^d & G_{44}^a & -H_{43} & -H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1^d \\ \bar{q}_2^a \\ \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{q}_3^d \\ \bar{q}_4^a \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.101)
\end{aligned}$$

É importante lembrar que todos os elementos das matrizes  $H$  e  $G$  são conhecidos, resultando da resolução das equações (4.92) e (4.93). As variáveis do vetor da esquerda são desconhecidas enquanto que as do vetor da direita são todas conhecidas. Desta forma, pode-se escrever:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (4.102)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (4.103)$$

### Caso com fontes ou sumidouros pontuais

Para o caso em que a equação governante não é a de Laplace, mas sim a de Poisson (Eq. 3.15), a Eq.(4.100) se torna:

$$[H]\{\Phi\} = [G]\{q\} - \{s\} \quad (4.104)$$

onde  $s$  é o vetor que guarda a contribuição de cada sumidouro pontual. Cada elemento deste vetor corresponde ao efeito dos sumidouros em um ponto fonte  $i$ , dado por:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n_{sc}} Q_j \Phi_j^* \quad (4.105)$$

sendo que  $n_{sc}$  é o número de sumidouros pontuais do problema,  $Q_j$  é a intensidade do sumidouro  $j$  e  $\Phi^*$  é a solução fundamental do potencial, expressa pela Eq.(4.13).

Reorganizando as matrizes para separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, tem-se:

$$[A]\{x\} = \{b\} - \{s\} \quad (4.106)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}(\{b\} - \{s\}) \quad (4.107)$$

Da resolução do sistema linear dado pela Eq.(4.103) ou pela Eq. (4.107), obtém-se os valores desconhecidos de  $\Phi$  e  $q$  no contorno.

#### 4.6.2 Cálculo do potencial e da velocidade em pontos internos

Depois que o potencial e a velocidade foram calculados no contorno, os mesmos podem, então, ser calculados em qualquer ponto no interior do domínio. Para a realização de tal tarefa, coloca-se o ponto fonte no interior do domínio, no ponto desejado e aplica-se a equação integral de contorno (Eq. 4.78). Como as integrais desta equação são avaliadas no contorno e, nele, os valores de  $\Phi$  e  $q$  já são conhecidos, então a única incógnita da equação integral de contorno é o potencial no ponto interno em questão. É importante notar que, quando o ponto fonte está no interior do domínio, a constante  $c$  da Eq.(4.78) vale 1.

Para o cálculo da velocidade em um ponto interior ao domínio é necessário, primeiramente, derivar a equação integral de contorno (Eq. 4.78) em relação às coordenadas do ponto fonte  $(x_d, y_d)$ , fazendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x_d)}{\partial x_d} &= \frac{\partial}{\partial x_d} \left[ \int_S q_{(x,x_d)}^* \Phi(x) dS(x) \right] - \frac{\partial}{\partial x_d} \left[ \int_S \Phi_{(x,x_d)}^* q(x) dS(x) \right] \\ &= \int_S \frac{\partial q_{(x,x_d)}^*}{\partial x_d} \Phi(x) dS(x) - \int_S \frac{\partial \Phi_{(x,x_d)}^*}{\partial x_d} q(x) dS(x) \end{aligned} \quad (4.108)$$

A partir desta equação, pode-se calcular a velocidade em um ponto do interior do domínio, lembrando que:

$$\mathbf{q} = \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( -K \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{j}} \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_d} = \frac{[n_x(r_x^2 - r_y^2) + 2n_y r_x r_y]}{2\pi r^4} \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_d} = \frac{r_x}{2\pi K r^2}; \text{ onde } r_x = x - x_d \quad (4.111)$$

As equações (4.108) a (4.111), com exceção da Eq.(4.109) têm suas análogas em relação a  $y_d$ .

## 4.7 Integração analítica das matrizes de influência $H$ e $G$

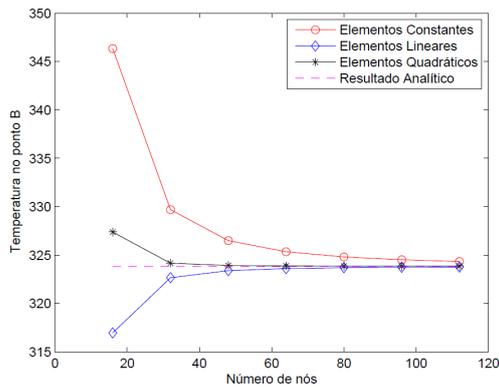
Como mostrado neste capítulo, o MEC é um método integral que tem graus de liberdade apenas no contorno da região estudada. De acordo com Kane (1994), este método tem duas características importantes, no que concerne às integrações:

- são consumidos muitos recursos computacionais com as integrações (se comparados com métodos de domínio), considerando que cada elemento de contorno é integrado  $N$  vezes, uma para cada localização do ponto fonte, sendo  $N$  o número total de nós do problema;
- a qualidade da solução obtida está intimamente relacionada à precisão do procedimento de integração utilizado.

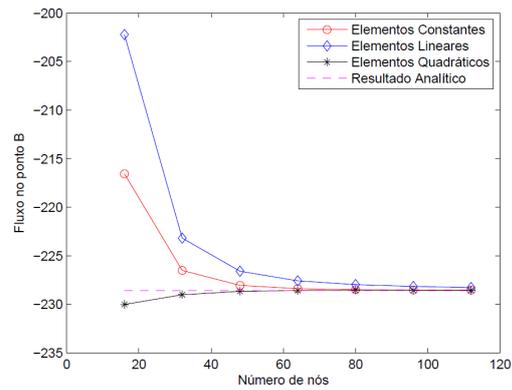
Uma observação importante é que quando o ponto fonte está localizado sobre o elemento que está sendo integrado, os integrandos costumam apresentar singularidades, como por exemplo, com o raio tendendo a zero nas soluções fundamentais mostradas nas equações (4.13) e (4.24).

É mostrado por Kane (1994) que a integração exata das expressões é algo que pode se tornar bastante complicado quando o contorno discretizado foi aproximado por elementos de contorno quadráticos ou de ordem mais alta, porque os integrandos podem ser bastante complicados. Isto não significa que não possam ser obtidas expressões analíticas para estas integrais (principalmente com o auxílio dos softwares de manipulação simbólica atuais), mas tais expressões analíticas podem chegar a ser tão longas que se consome mais recursos computacionais na manipulação das mesmas pelos algoritmos do que se fosse realizada a integração numérica. Nestes casos, há que se pesar o benefício obtido pela solução mais precisa trazida pela integração analítica e o custo computacional adicional requerido.

A integração numérica, embora seja uma aproximação da solução exata da integral, é, normalmente, o meio mais utilizado para realizar as integrações no MEC, principalmente o método da quadratura de Gauss. Entre os motivos para esta popularidade, estão a capacidade de se tratar as singularidades das soluções fundamentais e a possibilidade de utilização de elementos curvos (de ordem 2 ou superior). A utilização de elementos curvos diminui a discretização do contorno requerida para um mesmo grau de precisão entre o contorno real e o contorno aproximado, em relação a elementos retilíneos. Intuitivamente, espera-se um ganho de performance ao utilizar uma malha com um número menor de nós para se conseguir uma solução de igual qualidade. Análises de performance realizadas por Braga (2012), porém, mostram que formulações com elementos constantes e elementos lineares convergem quase tão rapidamente para a solução exata quanto elementos quadráticos, como pode ser visto na Fig. 4.9. Além disso, Kane (1994) afirma que é vantajoso se utilizar elementos retilíneos (incluem-se os constantes) combinados com integração analítica ao invés de utilizar elementos curvos combinados com integração numérica.



(a) Convergência da solução para a temperatura



(b) Convergência da solução para o fluxo

Figura 4.9: Convergência com distintos tipos de elementos de contorno (Braga, 2012)

Embora este cenário seja muitas vezes favorável à adoção da integração numérica com elementos de contorno de alta ordem, é mostrado por Banerjee (1994) e Kane (1994) que, quando se utilizam elementos de contorno retilíneos (lineares contínuos, lineares descontínuos e elementos constantes), a integração analítica é uma prática formidável devido às expressões obtidas serem factivelmente aplicáveis nos algoritmos; a dificuldade de se obter e aplicar as expressões analíticas não são tão dramáticas quanto no caso dos elementos curvos.

A integração analítica dos elementos das matrizes  $H$  e  $G$  das formulações do MEC para problemas potenciais com elementos de contorno lineares contínuos desenvolvida por Córdoba (2013) é utilizada neste trabalho nas implementações dos simuladores de escoamento potencial em domínio bidimensional.

## Capítulo 5

# O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos potenciais totalmente axissimétricos

### 5.1 Introdução

Este capítulo apresenta a formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas potenciais modelados em domínios axissimétricos. A derivação das equações desta formulação está presente em diversos trabalhos (Bakr (1986); Becker (1992); Liggett and Liu (1983)), no entanto, muitas vezes de forma não clara. Apresenta-se neste capítulo uma abordagem alternativa simples e direta para a obtenção das soluções fundamentais.

### 5.2 Formulação axissimétrica

Para o desenvolvimento da formulação axissimétrica, parte-se do fato de que a sua representação é equivalente à tridimensional. De fato, como visto no Capítulo 3, chega-se na equação governante axissimétrica apenas escrevendo-se a equação de Laplace tridimensional em coordenadas cilíndricas, e igualando-se a zero as derivadas em relação à coordenada  $\theta$ . Como apresentado no Capítulo 3, no domínio axissimétrico, a equação de Laplace é expressa como:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.1)$$

Como visto no Capítulo 4, a solução fundamental da equação governante é a base do MEC. No mesmo capítulo foi mostrado que a solução fundamental é a resposta a uma perturbação pontual no domínio. No caso totalmente axissimétrico, que é o caso de estudo deste trabalho, tanto a geometria quanto as variáveis devem ser simétricas em relação ao eixo de rotação. Assim, quaisquer planos arbitrários que contenham o eixo de simetria devem ter representação idêntica

entre si. Desta forma, pode-se inferir que a solução fundamental no domínio axissimétrico não é a resposta a uma carga pontual, mas sim a uma carga anular. É natural que, se todo plano possível que contém o eixo de simetria possui uma carga pontual na mesma coordenada  $(r, z)$ , então a conjunção destes planos forma um domínio tridimensional que contém um anel de cargas em seu interior.

Então, a solução fundamental axissimétrica pode ser obtida integrando-se a solução fundamental tridimensional por uma volta completa em torno do eixo de simetria. Dessa forma, a carga pontual da solução fundamental tridimensional é convertida em um anel de cargas.

### 5.3 Solução fundamental axissimétrica

Na formulação tridimensional cartesiana do MEC, a solução fundamental do potencial é:

$$\Phi_{3D}^* = \frac{1}{4K\pi R}, \quad R = \left[ (x_c - x_d)^2 + (y_c - y_d)^2 + (z_c - z_d)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$

onde  $(x_d, y_d, z_d)$  são as coordenadas do ponto fonte (ponto de colocação da carga no interior do domínio),  $(x_c, y_c, z_c)$  são as coordenadas do ponto campo (ponto sobre o contorno onde a resposta é avaliada) e  $R$  é a distância entre esses pontos.

Para a obtenção da formulação axissimétrica, primeiro é necessário expressar a mesma equação em coordenadas cilíndricas. Para a expressão do raio, devem ser levadas em consideração as seguintes transformações entre sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_d &= r_d \cos \theta_d & x_c &= r_c \cos \theta_c \\ y_d &= r_d \sin \theta_d & y_c &= r_c \sin \theta_c \end{aligned} \quad (5.3)$$

Com estas transformações, obtém-se a solução fundamental *tridimensional* escrita em coordenadas cilíndricas:

$$\Phi_{3D, cil.}^* = \frac{1}{4K\pi} \left[ (r_d + r_c)^2 + (z_d - z_c)^2 - 4 r_d r_c \cos^2 \left( \frac{\theta_c - \theta_d}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

De posse desta expressão, integra-se em relação a  $\theta$  ao longo de uma volta em torno do eixo de simetria, para a obtenção de uma carga em forma de anel, garantindo a simetria axial.

$$\Phi_{axis}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{3D, cil.}^* d\theta \quad (5.5)$$

Substituindo a Eq.(5.4) no integrando, tem-se:

$$\Phi_{axis}^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4K\pi} \left[ (r_d + r_c)^2 + (z_d - z_c)^2 - 4 r_d r_c \cos^2 \left( \frac{\theta_c - \theta_d}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (5.6)$$

Aqui pode ser utilizada uma mudança de variáveis, fazendo  $\theta_c - \theta_d = \pi - 2\alpha$ . Vale lembrar que o ponto fonte é constante, logo  $\theta_d$  é constante, mas o ponto campo é livre para se mover, logo  $\theta_c$  é uma variável. Com isso, os limites de integração passam a ser de  $\pi/2$  a  $-\pi/2$ , o diferencial  $d\theta$  se transforma em  $-2d\alpha$  e a expressão do cosseno se tranforma em seno:

$$\Phi_{axis}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4K\pi} \left[ (r_d + r_c)^2 + (z_d - z_c)^2 - 4 r_d r_c \sin^2 \alpha \right]^{-\frac{1}{2}} (-2d\alpha) \quad (5.7)$$

Utilizando-se as seguintes expressões:

$$m = \frac{2 (r_d r_c)^{\frac{1}{2}}}{\left[ (r_d + r_c)^2 + (z_d - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.8)$$

e

$$\lambda_1\left(m, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - m^2 \sin^2 \alpha\right)^{-\frac{1}{2}} d\alpha \quad (5.9)$$

a Eq.(5.7) pode ser reescrita como:

$$\Phi_{axis}^* = \left(\frac{-1}{2K\pi^2}\right) \frac{m}{(r_d r_c)^{\frac{1}{2}}} \lambda_1\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.10)$$

A Eq.(5.10) é a solução fundamental do potencial no domínio axissimétrico. Note-se que  $m$  é um parâmetro geométrico, composto pelas coordenadas dos pontos fonte e campo. Por sua vez,  $\lambda_1$  é uma integral elíptica do primeiro tipo, cujo argumento é o ângulo  $\pi/2$  e o módulo é o parâmetro  $m$ .

### 5.3.1 Solução fundamental da velocidade

Como já visto no Capítulo 4, a solução fundamental da velocidade é a derivada da solução fundamental do potencial na direção normal ao contorno. Assim, o mesmo procedimento seguido para o domínio bidimensional é adotado, levando a:

$$q_{axis}^* = -K \frac{\partial \Phi_{axis}^*}{\partial \mathbf{n}} = -K \left( \frac{\partial \Phi_{axis}^*}{\partial r} \frac{dr}{d\mathbf{n}} + \frac{\partial \Phi_{axis}^*}{\partial z} \frac{dz}{d\mathbf{n}} \right) \quad (5.11)$$

É fácil observar que as derivadas das coordenadas em relação à direção normal são as componentes do vetor unitário normal no ponto considerado, ou seja,  $n_r$  e  $n_z$ , respectivamente. Substituindo estes valores, a equação se torna:

$$q_{axis}^* = -K \left( \frac{\partial \Phi_{axis}^*}{\partial r_c} n_r + \frac{\partial \Phi_{axis}^*}{\partial z_c} n_z \right) \quad (5.12)$$

Para realizar as derivações de  $\Phi_{axis}^*$  em relação a  $r$  e a  $z$ , deve ser observado que  $\Phi_{axis}^*$  é função de  $m$  e de  $\lambda_1$ .  $\lambda_1$ , por sua vez, é função de  $m$ . Dessa forma, para realizar as derivações presentes

na Eq.(5.12), deve-se primeiro fazer a derivada de  $\lambda_1$  em relação a  $m$ :

$$\frac{d\lambda_1}{dm} = \frac{\lambda_2}{m(1-m^2)} - \frac{\lambda_1}{m} \quad (5.13)$$

onde  $\lambda_2$  é a integral elíptica do segundo tipo, dada por:

$$\lambda_2(m, \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha \quad (5.14)$$

Na expressão para a solução fundamental do potencial aparece ainda a multiplicação  $m \lambda_1$ , cuja derivada é calculada como:

$$\frac{d}{dm} (m \lambda_1) = \lambda_1 + m \frac{d\lambda_1}{dm} = \lambda_1 + m \left( \frac{\lambda_2}{m(1-m^2)} - \frac{\lambda_1}{m} \right) = \frac{\lambda_2}{1-m^2} \quad (5.15)$$

Da mesma forma, deve-se derivar  $m$  em relação a  $r$  e  $z$ , fazendo:

$$\frac{\partial m}{\partial r} = \frac{m}{2} \left[ \frac{-2(r_d + r_c)}{(r_d + r_c)^2 + (z_d - z_c)^2} + \frac{1}{r_c} \right] \quad (5.16)$$

e

$$\frac{\partial m}{\partial z} = \frac{m(z_d - z_c)}{(r_d + r_c)^2 + (z_d - z_c)^2} \quad (5.17)$$

Munidos das equações 5.13 a 5.17, podem ser escritas as expressões para as derivadas de  $\Phi_{axis}^*$  em relação a  $r$  e a  $z$ :

$$\frac{\partial \Phi_{axis}^*}{\partial r} = \frac{m}{4K\pi^2 r_c (r_d r_c)^{\frac{1}{2}}} \left[ \lambda_1 - \frac{r_d^2 - r_c^2 + (z_p - z_c)^2}{(r_d - r_c)^2 + (z_d - z_c)^2} \lambda_2 \right] \quad (5.18)$$

e

$$\frac{\partial \Phi_{axis}^*}{\partial z} = \frac{-m}{2K\pi^2 (r_d r_c)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{z_d - z_c}{(r_d - r_c)^2 + (z_d - z_c)^2} \lambda_2 \right] \quad (5.19)$$

Finalmente, da substituição das equações 5.18 e 5.19 na Eq.(5.12), obtém-se a solução fundamental para a velocidade em domínio axissimétrico:

$$q_{axis}^* = \frac{m}{4\pi^2 (r_d r_c)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left[ \frac{1}{r_c} \lambda_1 - \frac{r_d^2 - r_c^2 + (z_p - z_c)^2}{r_c [(r_d - r_c)^2 + (z_d - z_c)^2]} \lambda_2 \right] n_r - \left[ \frac{2(z_d - z_c)}{(r_d - r_c)^2 + (z_d - z_c)^2} \lambda_2 \right] n_z \right\} \quad (5.20)$$

### 5.3.2 Tratamento matemático do eixo de simetria

Em alguns casos, o eixo de simetria faz parte do domínio simulado. Um exemplo disso ocorre na simulação da extração de petróleo em reservatórios através de poços verticais. O eixo de simetria

faz parte dos limites da região bidimensional gerada pelo plano de corte no domínio axissimétrico (veja a posição do eixo  $z$  nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.6). Note que isso não acontece no problema de *Quick Drawdown*, onde o limite do meio poroso está distante do eixo de simetria (veja a posição do eixo  $z$  na Fig. 3.7).

Nos casos em que o eixo  $z$  faz parte dos limites da região simulada, o contorno de tal região será uma curva aberta, com ambas as extremidades sobre o eixo  $z$ . Assim, na aplicação do procedimento do MEC, ao colocar o ponto fonte sobre o eixo  $z$ , a coordenada  $r_d$  será igual a 0. Uma rápida análise na Eq.(5.8) mostra que  $m = 0$  quando  $r_d = 0$ . Seguindo a análise, percebe-se nas Eq.(5.9) e (5.14) que, para  $m = 0$ , tem-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pi/2$ .

Embora à primeira vista as soluções fundamentais pareçam singulares para  $r_d = 0$  e  $m = 0$ , elas não o são. Reescrevendo a Eq.(5.10) com o parâmetro  $m$  descrito por extenso, tem-se:

$$\Phi_{axis}^* = \left( \frac{-1}{2K\pi^2} \right) \frac{2(r_d r_c)^{\frac{1}{2}}}{\left[ (r_d + r_c)^2 + (z_d - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (r_d r_c)^{\frac{1}{2}}} \lambda\left(m, \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.21)$$

Nesta expressão, fazendo-se  $r = 0$  e  $\lambda_1 = \pi/2$ , chega-se a:

$$[\Phi_{axis}^*]_{r_d=0} = \frac{-1}{2K\pi \left[ r_c^2 + (z_d - z_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.22)$$

Com um procedimento análogo, chega-se a:

$$[q_{axis}^*]_{r_d=0} = \frac{1}{2\pi \left[ r_c^2 + (z_d - z_c)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} [r_c n_r - (z_d - z_c) n_z] \quad (5.23)$$

As equações (5.22) e (5.23) são as soluções fundamentais para quando o ponto fonte se encontra sobre o eixo de simetria.

## 5.4 Equação integral de contorno e sua discretização

A equação integral de contorno para o domínio axissimétrico é a mesma obtida para o domínio bidimensional. De fato, sob um ponto de vista geométrico, o domínio tridimensional axissimétrico é reduzido a um plano bidimensional  $r$ - $z$ . Então, para a implementação do MEC no domínio axissimétrico, uma vez obtidas as soluções fundamentais axissimétricas, vale todo o equacionamento apresentado no Capítulo 4, nas Seções 4.3, 4.4 e 4.5, com a ressalva de utilizar a coordenada  $r$  ao invés de  $x$  para o eixo coordenado horizontal. Este equacionamento apresenta a obtenção da equação integral de contorno e sua discretização em elementos de contorno lineares. Além disso, aplica-se exatamente o mesmo método de solução apresentado na Seção 4.6.

## Capítulo 6

# O Método dos Elementos de Contorno para escoamentos difusivos bidimensionais

### 6.1 Introdução

Este capítulo apresenta a formulação do Método da Reciprocidade Dual (MRD) do MEC para problemas regidos pela equação da difusividade hidráulica (Eq. 3.41),

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}$$

que é o caso do modelo adotado neste trabalho para o escoamento difusivo. Desde que foi apresentado pelos seus criadores, este método vem sendo muito utilizado pelo seu baixo custo computacional (Partridge et al., 1992).

Este capítulo fará uso da nomenclatura padrão do MRD, portanto, a pressão ( $p$ ) será denotada pela letra  $u$  e sua derivada normal  $\partial p / \partial n$  será representada pela letra  $q$ .

Para melhor entendimento, a apresentação deste método se dará de forma gradual, primeiro para equações do tipo  $\nabla^2 u = b(x, y)$ , expandindo a formulação para equações do tipo  $\nabla^2 u = b(x, y, u)$ , e finalmente chegando à equação da difusividade hidráulica, que é do tipo  $\nabla^2 u = b(x, y, u, t)$ .

### 6.2 Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y)$

Seja considerada a equação de Poisson na forma:

$$\nabla^2 u = b(x, y) \tag{6.1}$$

onde  $b$  é uma função conhecida da posição, distribuída sobre o domínio. O objetivo é conseguir resolver o problema sem precisar discretizar o domínio, mantendo a característica do MEC de discretizar apenas o contorno. Para isso, o MRD foi desenvolvido e é explicado neste capítulo com base em Partridge et al. (1992).

A solução da Eq.(6.1) pode ser expressa como a soma da solução da equação diferencial homogênea (que, neste caso é a equação de Laplace) e uma solução particular, que será chamada de  $\hat{u}$ :

$$\nabla^2 \hat{u} = b \quad (6.2)$$

O MRD propõe o uso de uma série de soluções particulares  $\hat{u}_j$  ao invés de uma única  $\hat{u}$ . O número de soluções particulares utilizada será igual ao número total de nós do problema. Por *número total de nós*, entenda-se o número de nós do contorno  $N$  mais o número de pontos internos  $L$  nos quais se deseja conhecer os resultados. Dessa forma, a função  $b$  tem o valor aproximado por:

$$b \simeq \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (6.3)$$

onde  $\alpha_j$  é o conjunto de coeficientes inicialmente desconhecidos e  $f_j$  são as funções de aproximação. As soluções particulares  $\hat{u}_j$  e as funções de aproximação  $f_j$  estão relacionadas por:

$$\nabla \hat{u}_j = f_j \quad (6.4)$$

A Eq.(6.3) deve ser válida tanto sobre o domínio como sobre cada um dos elementos. As funções de aproximação  $f_j$  dependem da geometria, assim como as funções de forma.

Substituindo a Eq.(6.4) na Eq.(6.3) tem-se:

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (6.5)$$

Substituindo esta equação na equação de Poisson original (Eq. 6.1), chega-se a:

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (6.6)$$

Neste ponto, utilizam-se as técnicas utilizadas no Capítulo 4 para o desenvolvimento do MEC para a equação de Laplace. Aplicando-se o método dos resíduos ponderados e usando a segunda identidade de Green, Eq.(6.6) origina:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \quad (6.7)$$

Utilizando-se da mesma estratégia do Capítulo 4 para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno, chega-se a:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (6.8)$$

Esta é a equação integral de contorno do MRD. Nela,  $i$  indica o ponto fonte. O termo  $\hat{q}_j$  é definido como  $\hat{q}_j = \partial \hat{u}_j / \partial n$ , em que  $n$  é o vetor unitário normal ao contorno.  $\hat{q}_j$  pode ser expandido como:

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (6.9)$$

A Eq.(6.8) é a equação integral de contorno, que assim como mostrado no MEC padrão, deve ser discretizada em elementos de contorno, resultando em:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* u d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q^* \hat{u}_j d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (6.10)$$

É importante notar que, uma vez definida a função de aproximação  $f$ , as funções  $\hat{u}$  e  $\hat{q}$  ficam sendo conhecidas. Desta forma, não é necessário utilizar as funções de forma para obter seu valor aproximado sobre o elemento, com base nos valores nodais, como é feito para  $u$  e  $q$ . No entanto, se tais aproximações forem feitas, as mesmas matrizes  $H$  e  $G$  definidas no Capítulo 4 podem ser utilizadas nos dois lados da Eq.(6.10). Esta estratégia introduz um erro numérico por utilizar valores aproximados ao invés dos valores reais disponíveis. Entretanto, Partridge et al. (1992) dizem que este erro foi provado como sendo pequeno e é um preço justo a se pagar pelo aumento considerável que esta estratégia traz na eficiência do método.

Aplicando a nomenclatura das matrizes  $H$  e  $G$ , a equação pode ser escrita em termos dos valores nodais como:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (6.11)$$

Novamente, os elementos das matrizes  $H$  e  $G$  são os mesmos mostrados no Capítulo 4 (equações 4.92 e 4.93) e sua integração é feita de forma analítica, conforme pontuado na Seção 4.7.

O índice  $i$  é utilizado para os pontos-fonte e o índice  $k$  é usado para os pontos-campo. Escrevendo de forma matricial, tem-se:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j ([H]\{\hat{u}_j\} - [G]\{\hat{q}_j\}) \quad (6.12)$$

A equação pode ainda ser escrita na forma:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (6.13)$$

A Eq.(6.13) é a base da aplicação do MRD em elementos de contorno, na qual cada vetor  $\hat{u}_j$  é uma coluna da matriz  $\hat{U}$  e cada vetor  $\hat{q}_j$  é uma coluna da matriz  $\hat{Q}$ .

### O vetor $\alpha$

A Eq.(6.3) mostra que  $b$  é assumido como sendo:

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} f_j \alpha_j \quad (6.14)$$

Avaliando o valor de  $b$  a partir de cada um dos nós (nos  $N$  nós do contorno e nos  $L$  pontos internos), um conjunto de  $N + L$  equações, cada uma com  $N + L$  termos será obtido. Essas equações, expressas em forma matricial, tornam-se:

$$\{b\} = [F]\{\alpha\} \quad (6.15)$$

em que cada coluna da matriz  $F$  consiste em um vetor  $f_j$  contendo os valores da função  $f_j$  em cada um dos  $N + L$  pontos do problema. A matriz  $F$  pode ser invertida para obter o vetor  $\alpha$ :

$$\{\alpha\} = [F]^{-1}\{b\} \quad (6.16)$$

Deve-se lembrar que, como dito no início do capítulo, a função  $b$  é uma função conhecida da posição, então, todos os elementos do vetor  $b$  são conhecidos. Assim, o vetor  $\alpha$  é obtido.

Conhecido o vetor  $\alpha$ , o lado direito da Eq.(6.13) vira um vetor conhecido, agora nomeado como  $d$ . Então, a equação fica:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \{d\} \quad (6.17)$$

onde

$$\{d\} = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (6.18)$$

Reorganizando-se a equação, tem-se:

$$[H]\{u\} = [G]\{q\} + \{d\} \quad (6.19)$$

Como pode ser visto, o vetor  $d$  é obtido simplesmente pela multiplicação de vetores e matrizes conhecidos. A seguir, aplicam-se as condições de contorno na Eq.(6.19) e reorganizam-se as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, assim como mostrado no Capítulo 4 (pág.57). Com isso, chega-se à forma:

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (6.20)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}\{y\} \quad (6.21)$$

onde o vetor  $x$  contém todas as variáveis desconhecidas no contorno. Da resolução deste sistema linear, obtém-se os valores desconhecidos de  $u$  e  $q$  no contorno.

### 6.2.1 Solução em pontos internos

Depois que a solução é obtida para o contorno,  $u$  e  $q$  podem, então, ser calculados nos pontos internos ao domínio. Para isso, toma-se a constante  $c$  com valor igual a 1 e aplica-se a Eq.(6.11), que, então, fica:

$$u_i = - \sum_{k=1}^N H_{ij} u_k + \sum_{k=1}^N G_{ij} q_k + \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left( \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (6.22)$$

e tem como única incógnita  $u_i$ . Derivando esta equação em relação às coordenadas do ponto-fonte, pode-se calcular as derivadas em relação a  $x$  e  $y$  no ponto considerado.

### 6.2.2 A função $f$

A solução particular  $\hat{u}$ , sua derivada normal  $\hat{q}$  e a função de aproximação  $f$  correspondente utilizadas no MRD não são limitadas pela formulação. A única restrição é que a matriz  $F$  resultante não pode ser singular. A forma usual de obtenção destas funções é propor uma função  $f$  e, então, calcular  $\hat{u}$  e  $\hat{q}$  utilizando as equações (6.4) e (6.9).

Segundo Partridge et al. (1992), as funções de  $r$  são adotadas pela maioria dos pesquisadores como a alternativa mais simples e mais exata. Neste trabalho, adotou-se  $f = 1 + r$ . Neste caso:

$$\hat{u} = r^2/4 + r^3/9 \quad (6.23)$$

$$\hat{q} = (r_x \partial x / \partial n + r_y \partial y / \partial n)(1/2 + r/3) \quad (6.24)$$

### 6.3 Equação de Poisson na forma $\nabla^2 u = b(x, y, u)$

$$\nabla^2 u = b(x, y, u) \quad (6.25)$$

onde  $b$  agora é uma função conhecida da posição, e da própria variável dependente  $u$ , distribuída sobre o domínio. Para fins de exemplificação, será tratada a equação:

$$\nabla^2 u + u = 0 \quad (6.26)$$

na qual a função  $b$  é  $-u$ . Então, substituindo esta nova definição de  $b$  na Eq.(6.16), tem-se:

$$\{\alpha\} = -[F]^{-1}\{u\} \quad (6.27)$$

É importante notar que o vetor  $\alpha$  agora não pode ser calculado explicitamente, pois é também uma função de  $u$ . Por isso, este vetor será expresso nas equações matriciais como  $[F]^{-1}\{b\}$ . Neste caso,  $\{b\} = \{u\}$  e a Eq.(6.13) se torna:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = -([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1}\{u\} \quad (6.28)$$

Todos os termos do lado direito da equação são conhecidos, com exceção do vetor  $u$ . Assim, pode-se definir:

$$[S] = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1} \quad (6.29)$$

onde a matriz  $S$  é a multiplicação de matrizes conhecidas. Assim, chega-se a:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = -[S]\{u\} \quad (6.30)$$

Esta equação pode ser reorganizada como:

$$([H] + [S])\{u\} = [G]\{q\} \quad (6.31)$$

A seguir, aplicam-se as condições de contorno na Eq.(6.31) e reorganizam-se as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, chegando-se à forma:

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (6.32)$$

Pode-se, então, fazer

$$\{x\} = [A]^{-1}\{y\} \quad (6.33)$$

onde o vetor  $x$  contém os valores desconhecidos de  $u$  e  $q$ . Da resolução deste sistema linear, obtém-se os valores desconhecidos de  $u$  e  $q$ .

## 6.4 Equação da difusividade hidráulica

Agora, considere-se uma equação de Poisson cujo termo não-homogêneo inclua a variação da própria função  $u$  no tempo. Este é o caso da equação da difusividade hidráulica, que governa o escoamento de fluidos compressíveis em meios porosos:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.34)$$

Neste caso, a constante  $1/\eta$  aparece na Eq.(6.13):

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \frac{1}{\eta} ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (6.35)$$

Para a equação da difusividade, a aproximação mostrada pela Eq.(6.3) é dada por:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f_j(x, y) \alpha_j(t) \quad (6.36)$$

onde pode-se ver uma separação entre variáveis de geometria e de tempo:  $f_j$  são funções conhecidas da geometria e  $\alpha_j$  são funções *desconhecidas* do tempo. Desta forma, as matrizes  $\hat{U}$  e  $\hat{Q}$  continuam sendo conhecidas e o vetor  $\alpha$  fica desconhecido.

Assim como para as equações anteriores, tem-se que

$$\begin{aligned} \{b\} &= [F]\{\alpha\} \\ \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= [F]\{\alpha\} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Explicitando o vetor  $\alpha$

$$\{\alpha\} = [F]^{-1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} \quad (6.38)$$

Substituindo esta expressão do vetor  $\alpha$  na Eq.(6.35), tem-se:

$$[H]\{u\} - [G]\{q\} = \frac{1}{\eta}([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \quad (6.39)$$

Todos os termos do lado direito da equação são conhecidos, com exceção do vetor  $\partial u/\partial t$ . Assim, pode-se definir:

$$[S] = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1} \quad (6.40)$$

onde a matriz  $S$  é a multiplicação de matrizes conhecidas. Assim, chega-se a:

$$[H]\{u\} - \frac{1}{\eta}[S]\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = [G]\{q\} \quad (6.41)$$

Aplicam-se nesta equação as seguintes aproximações para as variações temporais de  $u$ ,  $q$ , e  $\partial u/\partial t$ :

$$u = (1 - \theta_u)u_m + \theta_u u_{m+1} \quad (6.42)$$

$$q = (1 - \theta_q)q_m + \theta_q q_{m+1} \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}(u_{m+1} - u_m) \quad (6.44)$$

onde  $\theta_u$  e  $\theta_q$  são pesos variando entre 0 e 1 para ponderação de  $u$  e  $q$  entre os passos de tempo  $m$  e  $m + 1$ . Substituindo estas aproximações na Eq.(6.41), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\eta\Delta t}[S] + \theta_u[H]\right)\{u\}_{m+1} - \theta_q[G]\{q\}_{m+1} &= \\ &= \left[-\frac{1}{\eta\Delta t}[S] - (1 - \theta_u)[H]\right]\{u\}_m + (1 - \theta_q)[G]\{q\}_m \end{aligned} \quad (6.45)$$

Segundo Partridge et al. (1992), uma série de testes indicaram que, no geral, boa exatidão nos resultados são obtidos utilizando  $\theta_u = 0,5$  e  $\theta_q = 1$ . Dessa forma, a Eq.(6.45) fica:

$$\left(-\frac{2}{\eta\Delta t}[S] + [H]\right)\{u\}_{m+1} - 2[G]\{q\}_{m+1} = \left(-\frac{2}{\eta\Delta t}[S] - [H]\right)\{u\}_m \quad (6.46)$$

e pode, ainda, ser escrita na forma:

$$[H']\{u\}_{m+1} = [G']\{q\}_{m+1} + \{y'\} \quad (6.47)$$

onde

$$[H'] = -\frac{2}{\eta\Delta t}[S] + [H] \quad \text{conhecida} \quad (6.48)$$

$$[G'] = 2[G] \quad \text{conhecida} \quad (6.49)$$

$$\{y'\} = \left(-\frac{2}{\eta\Delta t}[S] - [H]\right) \{u\}_m \quad \text{conhecido} \quad (6.50)$$

Deve-se notar que o vetor  $u_m$  é conhecido por se tratar de valores já calculados no passo de tempo anterior ou de condições de contorno estabelecidas para o instante de tempo inicial. Com isso, pode-se escrever a Eq.(6.47) como:

$$[A]\{x\} = \{y\} \quad (6.51)$$

após aplicar as condições de contorno e separar as variáveis conhecidas das desconhecidas. O vetor  $x$  contém todas as variáveis desconhecidas e pode ser calculado por:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{y\} \quad (6.52)$$

Com isso, são calculados todos os valores de  $u$  e  $q$  desconhecidos.

## Capítulo 7

# Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sub-regiões

### 7.1 Introdução

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da formulação do MEC para sub-regiões. O conceito central das sub-regiões é de que um domínio pode ser dividido em partes onde a aplicação do método numérico seja feita de forma independente. Sustenta-se no fato de que, se uma equação diferencial ou integral é válida em todo o domínio, então ela é igualmente válida em cada parte dele. A adoção das sub-regiões pode ser feita com inúmeros objetivos. Neste trabalho, a estratégia foi adotada para permitir aplicar a formulação padrão do MEC apresentada nos capítulos anteriores - uma formulação válida apenas para domínios inteiramente homogêneos - na representação das “zonas” de cada fluido, cada uma com permeabilidade distinta.

A partir da teoria a respeito do acoplamento das sub-regiões, uma técnica foi desenvolvida para a aplicação nos simuladores. Nas próximas seções, será mostrado como o conceito das sub-regiões foi utilizado na implementação específica da interface móvel entre as regiões ocupadas por cada massa de fluido no fenômeno dos cones. Todo o equacionamento, bem como um exemplo de aplicação são apresentados, para que seja possível a implementação de projetos futuros utilizando a mesma estratégia.

### 7.2 Fundamentação teórica

A formulação do MEC apresentada no Capítulo 4 é aplicável apenas a domínios homogêneos, por restrição das soluções fundamentais utilizadas. Em muitos casos, porém, o domínio sobre o qual o problema é considerado não é homogêneo como um todo, porém, é homogêneo por partes. Nestes casos, podem-se aplicar os procedimentos numéricos apresentados em cada uma destas partes, ou *sub-regiões*, como se elas estivessem separadas umas das outras (Brebbia and Dominguez, 1992).

A condição de homogeneidade por sub-regiões tem ocorrência frequente em problemas de

engenharia. Um exemplo é a condução de calor em um sólido composto de dois materiais distintos, cada um tendo uma condutividade térmica diferente. Katsikadelis (2016) cita a aplicação da formulação de sub-regiões na modelagem de corpos constituídos de materiais compósitos, sendo cada componente do material compósito tratado como uma sub-região. O caso do escoamento bifásico em meio poroso, tratado neste trabalho, também é homogêneo por partes, visto que a zona ocupada por cada fluido tem condutividade hidráulica  $K$  diferente e homogênea em toda sua extensão (segundo o modelo adotado). Bruch (1991) diz ainda que a divisão do domínio em sub-regiões é um artifício muito útil se o domínio tiver uma geometria complicada. Segundo ele, nestes casos, é obtida melhor precisão nos resultados se o domínio for dividido em sub-regiões ao invés de ser tratado por inteiro, sem divisões.

Na interface, tanto o potencial quanto a velocidade são desconhecidos. Isso faz com que cada nó da interface (com exceção dos nós das extremidades) tenha 3 variáveis desconhecidas ( $\Phi$ ,  $q^a$  e  $q^d$ ) ao invés de apenas uma - os superíndices  $a$  e  $d$  significam *antes do nó* e *depois do nó*, respectivamente. São necessárias, então, mais duas equações para que o sistema possa ser resolvido. São utilizadas, então, as equações que representam a continuidade ao longo da interface. Brebbia et al. (1984) mostra que o sistema de equações para o domínio completo é obtido pela junção do conjunto independente de equações para cada sub-região com as equações de compatibilidade de pressões e equilíbrio de velocidades (Eqs. 3.54 e 3.55) para cada nó da interface.

A Fig. 7.1 mostra o aspecto geral de um domínio composto por duas sub-regiões,  $R_1$  e  $R_2$ , com uma interface entre elas.

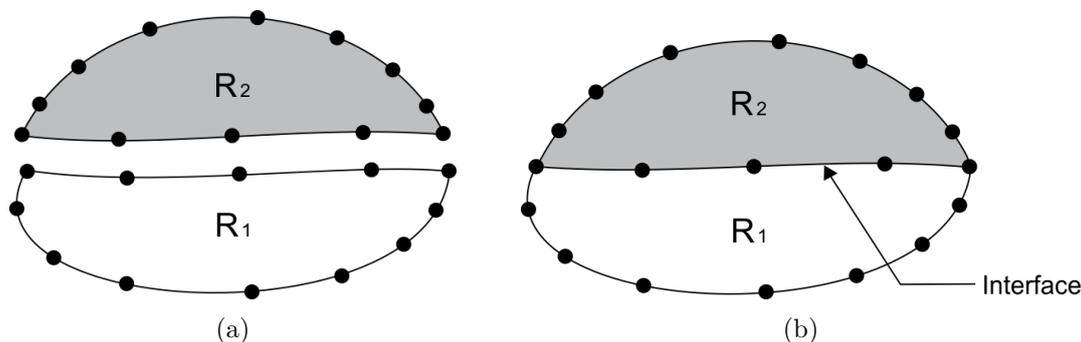


Figura 7.1: Domínio composto por duas sub-regiões

O potencial é contínuo dentro de cada sub-região, mas apresenta descontinuidade na interface (veja a Eq. 3.6:  $\Phi = \frac{p}{\rho g} + z$ ). A pressão, ao contrário, é contínua em todo o domínio. Então, da Fig. 7.1b, pode-se perceber que em cada ponto da interface, a pressão é única, não importando qual sub-região se toma como referência. O fluxo normal à interface, por sua vez, tem a mesma magnitude para as duas sub-regiões, porém, sentidos opostos. Isso leva às seguintes condições de acoplamento das regiões, na interface:

$$p_{R_1} = p_{R_2} \quad (7.1)$$

$$q_{R_1} = -q_{R_2} \quad (7.2)$$

### 7.3 Equacionamento

A seguir é apresentado um exemplo de aplicação da formulação do MEC para um problema de escoamento potencial em duas sub-regiões. Foi utilizada uma discretização com poucos elementos, de forma a minimizar o número de componentes das matrizes  $H$  e  $G$  para simplificar a demonstração.

A Fig. 7.2 ilustra a geometria do problema e mostra as condições de contorno envolvidas.

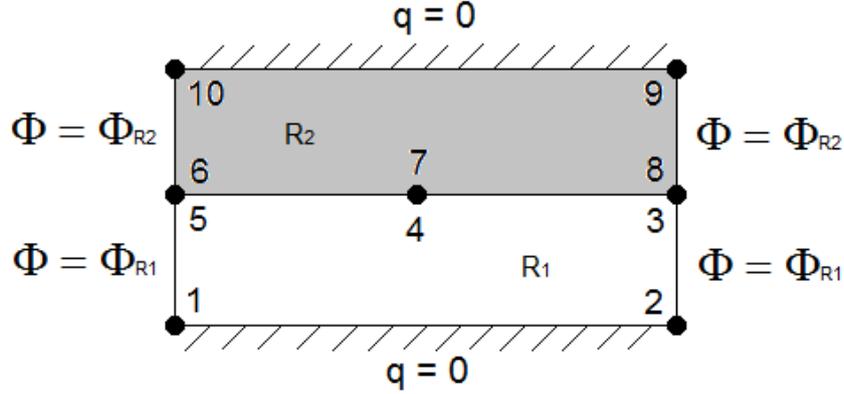


Figura 7.2: Problema de duas sub-regiões

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento a partir da equação integral de contorno em sua forma matricial (Eq. 4.94) para as sub-regiões.

Para a sub-região 1, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \\ \bar{\Phi}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^d & G_{12}^a & G_{12}^d & G_{13}^a & G_{13}^d & G_{14}^a & G_{14}^d & G_{15}^a & G_{15}^d & G_{11}^a \\ G_{21}^d & G_{22}^a & G_{22}^d & G_{23}^a & G_{23}^d & G_{24}^a & G_{24}^d & G_{25}^a & G_{25}^d & G_{21}^a \\ G_{31}^d & G_{32}^a & G_{32}^d & G_{33}^a & G_{33}^d & G_{34}^a & G_{34}^d & G_{35}^a & G_{35}^d & G_{31}^a \\ G_{41}^d & G_{42}^a & G_{42}^d & G_{43}^a & G_{43}^d & G_{44}^a & G_{44}^d & G_{45}^a & G_{45}^d & G_{41}^a \\ G_{51}^d & G_{52}^a & G_{52}^d & G_{53}^a & G_{53}^d & G_{54}^a & G_{54}^d & G_{55}^a & G_{55}^d & G_{51}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1^d \\ \bar{q}_2^a \\ q_2^d \\ q_3^a \\ q_3^d \\ q_4^a \\ q_4^d \\ q_5^a \\ q_5^d \\ q_1^a \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

Para a sub-região 2, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{66} & H_{67} & H_{68} & H_{69} & H_{610} \\ H_{76} & H_{77} & H_{78} & H_{79} & H_{710} \\ H_{86} & H_{87} & H_{88} & H_{89} & H_{810} \\ H_{96} & H_{97} & H_{98} & H_{99} & H_{910} \\ H_{106} & H_{107} & H_{108} & H_{109} & H_{1010} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_6 \\ \bar{\Phi}_7 \\ \bar{\Phi}_8 \\ \bar{\Phi}_9 \\ \bar{\Phi}_{10} \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} G_{66}^d & G_{67}^a & G_{67}^d & G_{68}^a & G_{68}^d & G_{69}^a & G_{69}^d & G_{610}^a & G_{610}^d & G_{66}^a \\ G_{76}^d & G_{77}^a & G_{77}^d & G_{78}^a & G_{78}^d & G_{79}^a & G_{79}^d & G_{710}^a & G_{710}^d & G_{76}^a \\ G_{86}^d & G_{87}^a & G_{87}^d & G_{88}^a & G_{88}^d & G_{89}^a & G_{89}^d & G_{810}^a & G_{810}^d & G_{86}^a \\ G_{96}^d & G_{97}^a & G_{97}^d & G_{98}^a & G_{98}^d & G_{99}^a & G_{99}^d & G_{910}^a & G_{910}^d & G_{96}^a \\ G_{106}^d & G_{107}^a & G_{107}^d & G_{108}^a & G_{108}^d & G_{109}^a & G_{109}^d & G_{1010}^a & G_{1010}^d & G_{106}^a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_6^d \\ q_7^a \\ q_7^d \\ q_8^a \\ q_8^d \\ q_9^a \\ q_9^d \\ \bar{q}_{10}^a \\ q_{10}^d \\ q_6^a \end{pmatrix} \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

Escrevendo todas as equações em um único sistema matricial, obtém-se a Eq.(7.5). O sistema de equações resultante possui 10 equações e 18 incógnitas (2 potenciais e 16 velocidades). São necessárias mais 8 equações para que o sistema possa ser resolvido.

Das oito equações adicionais necessárias, três serão equações de continuidade de pressão e quatro serão equações de equilíbrio de velocidades dadas pelas Eqs.(7.1) e (7.2), respectivamente. As quatro equações de equilíbrio de velocidades podem ser prontamente adicionadas no sistema matricial fazendo:

$$q_3^d = -q_8^a \quad \text{ou} \quad q_3^d + q_8^a = 0 \quad (7.6)$$

$$q_4^a = -q_7^d \quad \text{ou} \quad q_4^a + q_7^d = 0 \quad (7.7)$$

$$q_4^d = -q_7^a \quad \text{ou} \quad q_4^d + q_7^a = 0 \quad (7.8)$$

$$q_5^a = -q_6^d \quad \text{ou} \quad q_5^a + q_6^d = 0 \quad (7.9)$$

As três equações de continuidade de pressão, por sua vez, requerem uma pequena manipulação para sua inclusão no sistema. Uma vez que a equação integral é escrita em termos do potencial  $\Phi$ , a equação de continuidade de pressão (Eq. 7.1) também deve ser escrita em termos de  $\Phi$ . Explicitando a pressão na Eq.(3.6), tem-se:



$$p = (\Phi - z)\rho g \quad (7.10)$$

Substituindo a Eq.(7.10) na Eq.(7.1), chega-se a:

$$(\Phi_{R_1} - z_{R_1})\rho_{R_1} g = (\Phi_{R_2} - z_{R_2})\rho_{R_2} g \quad (7.11)$$

Dividindo ambos os lados por  $\rho_{R_2} g$ :

$$(\Phi_{R_1} - z_{R_1})\frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} = \Phi_{R_2} - z_{R_2} \quad (7.12)$$

Para um ponto da interface,  $z_{R_1} = z_{R_2} = z$ . Com isso, tem-se:

$$\begin{aligned} (\Phi_{R_1} - z)\frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} &= \Phi_{R_2} - z \\ \Phi_{R_2} - \alpha\Phi_{R_1} &= (1 - \alpha)z \end{aligned} \quad (7.13)$$

onde

$$\alpha = \frac{\rho_{R_1}}{\rho_{R_2}} \quad (7.14)$$

A Eq.(7.13) é a equação de continuidade de pressão escrita em termos do potencial  $\Phi$ . De fato, ela se torna a equação de compatibilidade de potenciais. Note que para o caso do cone de água, o parâmetro  $\alpha$  é definido como  $\rho_{\text{água}}/\rho_{\text{óleo}}$  e no caso do cone de gás, como  $\rho_{\text{óleo}}/\rho_{\text{gás}}$ .

As três equações de compatibilidade de potenciais podem ser, finalmente, adicionadas no sistema matricial fazendo:

$$\Phi_8 - \alpha\Phi_3 = (1 - \alpha)z_3 \quad (7.15)$$

$$\Phi_7 - \alpha\Phi_4 = (1 - \alpha)z_4 \quad (7.16)$$

$$\Phi_6 - \alpha\Phi_5 = (1 - \alpha)z_5 \quad (7.17)$$

Com quatro equações de equilíbrio de velocidades e três de compatibilidade de potenciais, o sistema conta agora com 17 equações e 18 incógnitas. A última equação necessária é obtida a partir da hipótese de que, na interface, a velocidade antes de um nó é igual à velocidade depois desse mesmo nó. Para que essa hipótese tenha validade, a discretização da interface deve ser suficientemente refinada para que os vetores normais entre elementos adjacentes sejam o mais coincidentes possível. Com isso, pode-se escrever:

$$q_4^a = q_4^d \quad \text{ou} \quad q_4^a - q_4^d = 0 \quad (7.18)$$

Adicionando as equações (7.6) a (7.9), (7.15) a (7.17) e (7.18) ao sistema de equações (7.5), obtém-se a Eq.(7.19).

Neste ponto, tem-se o sistema matricial na forma

$$[ H ]_{18 \times 10} \{ \Phi \}_{10 \times 1} = [ G ]_{18 \times 20} \{ q \}_{20 \times 1} + \{ b_3 \}_{18 \times 1} \quad (7.20)$$

Organizando as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, chega-se ao sistema na forma em que pode ser resolvido, dado pela Eq.(7.21).

Representando o sistema de forma simplificada, tem-se:

$$[ A ]_{18 \times 18} \{ x \}_{18 \times 1} = [ B_1 ]_{18 \times 12} \{ b_2 \}_{12 \times 1} + \{ b_3 \}_{18 \times 1} \quad (7.22)$$

Todos os elementos das matrizes  $[A]$  e  $[B_1]$  são conhecidos e dependem apenas da geometria do problema. Todos os elementos do vetor  $\{b_2\}$  são conhecidos, vindos da aplicação das condições de contorno. Todos os elementos do vetor  $\{b_3\}$  são conhecidos e dependem da geometria do problema e da razão entre as massas específicas dos fluidos. O vetor  $\{x\}$  contém todas as variáveis desconhecidas do problema (potenciais e velocidades no contorno).

Fazendo  $\{b\} = [B_1]\{b_2\} + \{b_3\}$ , é possível escrever o sistema na forma:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (7.23)$$

Agora, o sistema pode ser resolvido fazendo:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (7.24)$$

### Caso com sumidouros pontuais

Para o caso em que a equação governante não é a de Laplace, mas sim a de Poisson (Eq. 3.15), a Eq.(7.20) se torna:

$$[ H ]_{18 \times 10} \{ \Phi \}_{10 \times 1} = [ G ]_{18 \times 20} \{ q \}_{20 \times 1} + \{ b_3 \}_{18 \times 1} - \{ s_o \} - \{ s_w \} \quad (7.25)$$

onde  $s_o$  e  $s_w$  são os vetores que guardam a contribuição de cada sumidouro pontual aos pontos fontes de sua própria sub-região. Cada elemento destes vetores corresponde ao efeito dos sumidouros em um ponto fonte  $i$ , dado por:





$$s_i = \sum_{j=1}^{n_{sc}} Q_j \Phi^* \quad (7.26)$$

sendo que  $n_{sc}$  é o número de sumidouros pontuais da sub-região,  $Q_j$  é a intensidade do sumidouro  $j$  e  $\Phi^*$  é a solução fundamental do potencial, expressa pela Eq.(4.13).

Reorganizando as matrizes para separar as variáveis conhecidas das desconhecidas e fazendo  $\{s\} = \{s_o\} + \{s_w\}$ , tem-se:

$$[A]\{x\} = \{b\} - \{s\} \quad (7.27)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1}(\{b\} - \{s\}) \quad (7.28)$$

Da resolução do sistema linear dado pela Eq.(7.24) ou pela Eq.(7.28), obtém-se os valores de potencial e velocidade no contorno das duas sub-regiões (incluindo a interface).

Para a obtenção dos valores de potencial e velocidade em pontos internos, procede-se da mesma maneira que a apresentada no Capítulo 4, tratando cada sub-região como um domínio completamente independente do outro.

# Capítulo 8

## Implementação dos simuladores

### 8.1 Introdução

Com base nos modelos definidos no Capítulo 3, um conjunto de simuladores foi desenvolvido utilizando a linguagem Matlab. Os simuladores se classificam primeiramente em relação ao tipo de poço produtor representado, horizontal ou vertical. Em segundo lugar, a classificação ocorre pelo número de fluidos representados, em monofásico ou bifásico. Para poços horizontais, foram desenvolvidos:

- **Simulador de escoamento monofásico potencial.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos potenciais bidimensionais apresentada no Capítulo 4;
- **Simulador de escoamento monofásico difusivo.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos difusivos bidimensionais apresentada no Capítulo 6;
- **Simulador de escoamento bifásico potencial.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos potenciais bidimensionais apresentada no Capítulo 4 e a formulação para sub-regiões apresentada no Capítulo 7.

Para poços verticais, os seguintes simuladores foram desenvolvidos:

- **Simulador de escoamento monofásico potencial.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos potenciais axissimétricos apresentada no Capítulo 5;
- **Simulador de escoamento bifásico potencial.** Utiliza a formulação do MEC para escoamentos potenciais axissimétricos apresentada no Capítulo 5 e a formulação para sub-regiões apresentada no Capítulo 7.

Neste capítulo, são apresentadas especificidades sobre a implementação dos simuladores como os parâmetros de entrada, a determinação das condições de contorno, o cálculo da movimentação da interface e a modelagem do poço produtor.

## 8.2 Parâmetros de entrada

Além da malha do reservatório, são requeridos pelos programas alguns parâmetros, listados a seguir.

**Meio poroso.** Os parâmetros de entrada para o meio poroso são:

- Permeabilidade absoluta nos planos horizontal e vertical  $k_h, k_v [m^2]$ ;
- Porosidade  $\phi [-]$ ;
- Compressibilidade total do sistema  $c_t [Pa^{-1}]$  (para o simulador monofásico compressível).

**Fluidos.** Os parâmetros de entrada para o(s) fluido(s) são:

- Massa específica  $\rho [kg/m^3]$ ;
- Viscosidade dinâmica  $\mu [Pa.s]$ .

**Poço.** Os parâmetros de entrada para a modelagem do poço horizontal são:

- Coordenadas do centro do poço  $[m]$ ;
- Raio do poço  $[m]$ ;
- Intensidade do poço  $Q [m^2/s]$  (para poços horizontais) ou  $[m^3/s]$  (para poços verticais).

**Simulação.** Os parâmetros de entrada para a simulação são:

- Tamanho  $\Delta t [s]$  e quantidade dos passos de tempo;
- Tempos  $[s]$  de início e fim da extração.

### 8.2.1 Parâmetros calculados

Utilizando a permeabilidade absoluta, a massa específica e a viscosidade dinâmica, são calculadas as condutividades hidráulicas  $K [m/s]$  do meio poroso, por meio da equação 3.7.

A partir da malha inserida, são calculadas as alturas das zonas de fluido. Com esta informação, é possível calcular o potencial  $\Phi [m]$  de cada fluido, em repouso, que será utilizado como condição de contorno.

Utilizando a permeabilidade absoluta, a porosidade, a viscosidade dinâmica e a compressibilidade total do sistema, é calculada a constante de difusividade hidráulica  $\eta [m^2/s]$  por meio da equação 3.42.

## 8.3 Condições de contorno

A determinação das condições de contorno é diferente para cada simulador e será mostrada separadamente. Para fins de simplificação dos exemplos, serão utilizados reservatórios com geometria simplificada (retangular) em todos os casos.

### 8.3.1 Condições de contorno para os simuladores de poços horizontais

#### 8.3.1.1 Escoamento monofásico potencial

A equação governante do escoamento potencial é a Eq.(3.14), escrita em termos do potencial  $\Phi$ . Logo, as condições de contorno aplicáveis a cada um dos nós são de *potencial conhecido* ou de *velocidade conhecida*. Para fins de exemplificação, considere o reservatório com a geometria simplificada mostrada na Fig. 8.1, contendo óleo.

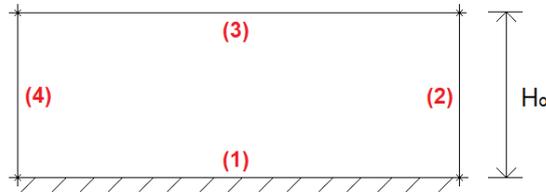


Figura 8.1: Exemplo: reservatório retangular contendo apenas um fluido

Da figura, nota-se que a altura da zona de óleo não perturbada pelo escoamento,  $H_o$ , é igual à altura de toda a porção simulada do reservatório.

#### a) Potencial

O potencial é conhecido nas duas laterais (2) e (4) e na superfície livre (3). Seu valor é constante, calculado pela Eq.(3.6):

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z$$

onde  $p$  é a pressão total a que uma partícula fluida localizada na posição do nó considerado está submetida, ou seja:

$$p = p_o + p_t \quad (8.1)$$

sendo que  $p_o$  é a pressão referente ao peso da coluna de óleo que está acima do nó e  $p_t$  é a pressão no topo desta coluna de óleo. Neste caso,  $p_t$  é a pressão que o gás faz sobre a superfície livre. Substituindo a expressão de  $p$  na equação do potencial, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{p_o + p_t}{\rho g} + z \\
&= \frac{\rho g(H_o - z)}{\rho g} + \frac{p_t}{\rho g} + z \\
&= H_o + \frac{p_t}{\rho g}
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Na interface entre o óleo e o gás, ou seja, na superfície livre (3), a pressão é apenas a que o gás exerce sobre o óleo ( $p_t$ ). Sem perda de generalidade, a pressão na superfície livre pode ser assumida como zero. Com isso, todo o domínio tem potencial constante de valor igual à sua altura ( $H_o$ ). Assim, todos os nós dos limites laterais (2) e (4) e da superfície livre (3) têm potencial conhecido como:

$$\Phi_{(2)} = \Phi_{(3)} = \Phi_{(4)} = H_o \tag{8.3}$$

onde  $H_o$  é a altura da zona de óleo medida pela coordenada  $z$  da superfície livre não perturbada pelo escoamento.

## b) Velocidade

**Base.** O limite inferior (1) é a base impermeável do reservatório. Logo, não há fluxo de óleo na direção normal a ele. Isso leva à condição de contorno:

$$\mathbf{q}_{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{(1)} = 0 \tag{8.4}$$

Então, no primeiro nó da base, tem-se a condição de contorno  $q^d = 0$ . No último, tem-se a condição de contorno  $q^a = 0$ . Em todos os nós intermediários, tem-se  $q^a = q^d = 0$ . Note que as velocidades antes do primeiro e depois do último nós da base são desconhecidas (tais velocidades são referentes às laterais (4) e (2), respectivamente).

Os nós da base têm então, cada um, apenas uma variável desconhecida. No caso do primeiro, a variável desconhecida é  $q^a$ . No caso do último,  $q^d$ . No caso dos nós intermediários, a variável desconhecida é o potencial  $\Phi$ .

**Limites laterais.** Os elementos de contorno que compõem os limites laterais serão sempre colineares entre si. Isso ocorre porque nos modelos adotados, os limites laterais são sempre verticais. Pela continuidade da velocidade ao longo desses segmentos de reta, tem-se que a velocidade imediatamente antes de um nó é igual à velocidade imediatamente depois. Logo, para qualquer nó intermediário dos limites laterais tem-se  $q^a = q^d = q$ . Isso não é válido para o primeiro e último nós desses segmentos, porque os elementos que os compartilham não são colineares.

Dessa forma, os nós dos limites laterais ficam com apenas uma variável desconhecida. No caso

do primeiro nó do limite direito (2), a variável desconhecida é  $q^d$ . No caso do último nó do limite esquerdo (4),  $q^a$ . No caso dos nós intermediários, a variável desconhecida é a velocidade “comum”  $q$ . Os nós compartilhados com as extremidades da superfície livre serão tratados posteriormente.

**Superfície livre.** Na superfície livre, adota-se a mesma abordagem dos limites laterais. Faz-se, nos nós intermediários,  $q^a = q^d$ . É importante notar que, ao longo do tempo, a interface se move e perde a condição de colinearidade entre os seus elementos. Esta é uma fonte de erro numérico da técnica utilizada. Então, é importante que na discretização da superfície livre seja utilizada uma grande quantidade de elementos de contorno. Assim, pode-se minimizar o erro introduzido pela adoção da condição de colinearidade entre dois elementos consecutivos da superfície livre.

O primeiro e o último nós da superfície livre necessitem de tratamento especial. Como os elementos que os compartilham fazem um ângulo expressivo, não se pode utilizar a aproximação de colinearidade. Logo, uma equação adicional é necessária para cada nó.

O modelo adotado diz que na área externa à porção simulada do reservatório a posição da interface não é perturbada pela ação do poço. Logo, imediatamente ao lado dos limites laterais, as linhas de corrente do escoamento são horizontais. Isso nos permite fazer a aproximação de que, no primeiro nó da superfície livre, não existe velocidade projetada na direção normal (à superfície livre), ou seja,  $q^d = 0$ . Este elemento deve ser, então, pequeno o suficiente para minimizar o erro numérico causado por esta aproximação. A mesma estratégia é adotada para o último nó da superfície livre. Nele,  $q^a = 0$ .

Assim, os nós da superfície livre ficam com apenas uma variável desconhecida. No nó da extremidade direita, a variável desconhecida é  $q^a$ . No nó da extremidade esquerda,  $q^d$ . Os nós intermediários têm desconhecida a velocidade “comum”  $q$ .

### 8.3.1.2 Escoamento monofásico difusivo

A determinação das condições de contorno para o escoamento monofásico difusivo é semelhante à do escoamento monofásico potencial. A diferença é que a equação da difusividade hidráulica (Eq. 3.41), que governa este caso, é escrita em termos da pressão. Logo, as condições de contorno aplicáveis a cada um dos nós são de *pressão ( $p$ ) conhecida* ou de *derivada da pressão na direção normal ao elemento ( $\partial p/\partial n$ ) conhecida*. Para fins de exemplificação, considere o mesmo reservatório do caso anterior (Fig. 8.1).

#### a) Pressão

A determinação das condições de contorno para este caso é semelhante à do escoamento monofásico potencial. A diferença é que se deve expressar as equações em termos de pressão, ao invés de potencial. Isso é feito utilizando a Eq.(8.1). Desenvolvendo-a, tem-se:

$$\begin{aligned}
p &= p_o + p_t \\
&= \rho g(H_o - z) + p_t
\end{aligned} \tag{8.5}$$

onde  $H_o$  é a altura da zona de óleo e  $z$  é a coordenada do nó considerado. Novamente, a pressão atuante sobre a interface entre óleo e gás, ou seja, na superfície livre (3), é apenas aquela exercida pelo gás sobre o óleo ( $p_t$ ), pois  $z = H_o$ . Sem perda de generalidade, a pressão na interface pode ser assumida como zero. Assim, todos os nós dos limites laterais (2) e (4) e da superfície livre (3) tem pressão conhecida com valor em função da sua coordenada  $z$ :

$$p(z) = \rho g(H_o - z) \tag{8.6}$$

Desta equação, pode-se notar que a pressão varia linearmente com a profundidade, desde 0 na superfície livre até  $\rho g H_o$  na base.

### b) Derivada da pressão na direção normal

A determinação das condições de contorno de velocidade devem ser traduzidas em termos de variação da pressão na direção normal ao elemento. Para isso, utiliza-se a Eq.(3.5):

$$\mathbf{q} = -K \nabla \Phi$$

Sobre o contorno, se calcula a velocidade na direção normal ao elemento, que é dada por:

$$\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = q = -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{8.7}$$

Substituindo a definição do potencial, tem-se:

$$\begin{aligned}
q &= -K \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) \\
&= -K \left[ \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p}{\rho g} \right) + \frac{\partial z}{\partial n} \right]
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Como a transformação de potencial em pressão está sendo realizada apenas pontualmente, pode-se escrever que:

$$q = -K \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial n} \right) \tag{8.9}$$

Explicitando-se o termo da pressão, tem-se:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho g \left( \frac{q}{K} + \frac{\partial z}{\partial n} \right) \quad (8.10)$$

Da Fig. 8.1, pode-se perceber que a direção normal à base (único segmento que tem velocidade conhecida) é  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$ . Assim, a condição de contorno da base fica:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{base}} = \rho g \quad (8.11)$$

Assim, para os mesmos nós da base que se determinou a condição de  $q = 0$  para o escoamento potencial, se define  $\partial p / \partial n = \rho g$  para o escoamento difusivo. A partir da Eq.(8.10) se escrevem as condições de contorno de fluxo no instante de tempo inicial  $t = 0$ , considerando que no tempo  $t = 0$ ,  $q = 0$  para todo o domínio:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{lateral direita}} = 0 \quad (8.12)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{superfície livre}} = -\rho g \quad (8.13)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{lateral esquerda}} = 0 \quad (8.14)$$

As técnicas de obtenção das equações extra são as mesmas empregadas para o escoamento monofásico potencial.

### 8.3.1.3 Escoamento bifásico potencial

Assim como no escoamento monofásico potencial, a equação governante é a Eq.(3.14), escrita em termos do potencial  $\Phi$ . Logo, as condições de contorno aplicáveis a cada um dos nós são novamente de *potencial conhecido* ou de *velocidade conhecida*. Para fins de exemplificação, considere o reservatório cotendo dois fluidos mostrado na Fig. 8.2, contendo o fluido mais denso na sub-região inferior e o menos denso na sub-região superior.

Para efeitos de simplificação da nomenclatura, será assumido que há água na sub-região inferior (identificada pelo sub-índice “ $w$ ”) e óleo na sub-região superior (identificado pelo sub-índice “ $o$ ”). O tratamento matemático é idêntico se os fluidos forem óleo na sub-região inferior e gás na superior.

Conforme mostrado no Capítulo 7, cada sub-região deve ser tratada de forma independente da outra. Todavia, como formam um único domínio, as duas sub-regiões devem compartilhar o mesmo sistema de coordenadas.

#### a) Potencial

**Sub-região superior.** A sub-região superior, contendo óleo, tem potencial dado por:

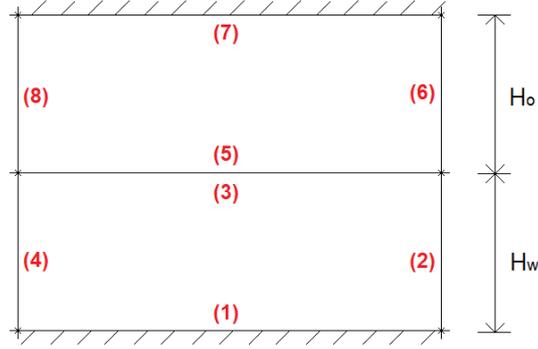


Figura 8.2: Exemplo: reservatório retangular contendo dois fluidos

$$\begin{aligned}
 \Phi_o &= \frac{p_o + p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= \frac{\rho_o g (H_o + H_w - z_o)}{\rho_o g} + \frac{p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= H_o + H_w - z_o + \frac{p_t}{\rho_o g} + z_o \\
 &= H_o + H_w + \frac{p_t}{\rho_o g} \tag{8.15}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma que nos casos anteriores,  $p_t$  é a pressão de topo, a que a coluna de fluido superior está submetida. Esta pressão pode ser assumida como sendo zero. Desta forma, toda a sub-região superior tem potencial constante de valor igual à altura total da porção simulada do reservatório ( $H_o + H_w$ ). Assim, todos os nós dos limites laterais (6) e (8) têm potencial conhecido, igual a:

$$\Phi_{(6)} = \Phi_{(8)} = H_o + H_w \tag{8.16}$$

**Sub-região inferior.** A sub-região inferior, contendo água, tem potencial dado por:

$$\Phi_w = \frac{(p_w + p_o + p_t)}{\rho_w g} + z_w \tag{8.17}$$

onde  $p_w$  é a pressão referente ao peso da coluna de água que está acima do nó,  $p_o$  é a pressão que toda a coluna de óleo exerce sobre a interface e  $p_t$  é a pressão de topo. Continuando o desenvolvimento, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Phi_w &= \frac{\rho_w g (H_w - z_w)}{\rho_w g} + \frac{\rho_o g H_o}{\rho_w g} + \frac{p_t}{\rho_w g} + z_w \\
&= H_w - z_w + \frac{\rho_o}{\rho_w} H_o + \frac{p_t}{\rho_w g} + z_w \\
&= H_w + \frac{1}{\alpha} H_o + \frac{p_t}{\rho_w g}
\end{aligned} \tag{8.18}$$

onde  $\alpha$  é a razão entre as massas específicas do fluido inferior e do superior (Eq. 7.14). Novamente, assume-se  $p_t = 0$ . Dessa forma, toda sub-região inferior tem potencial constante de valor relacionado às alturas das duas sub-regiões ( $H_w$  e  $H_o$ ). Assim, todos os nós dos limites laterais (2) e (4) têm potencial conhecido como:

$$\Phi_{(2)} = \Phi_{(4)} = H_w + \frac{1}{\alpha} H_o \tag{8.19}$$

## b) Velocidade

**Base, topo e limites laterais.** Tratando cada sub-região de forma independente, a determinação das condições de contorno de velocidade para base e limites laterais é idêntica à mostrada para o escoamento monofásico potencial. A do topo é idêntica à da base.

## c) Interface

Na interface reside a maior diferença na determinação das condições de contorno entre os simuladores potenciais monofásico e bifásico. Até aqui, as duas sub-regiões foram tratadas como independentes. Para “acoplá-las”, utilizam-se, conforme mostrado no Capítulo 7, as equações de continuidade na interface. São elas a equação de compatibilidade de potenciais (Eq. 7.13) e a equação de equilíbrio de velocidades (Eq. 7.2). Assim, tem-se:

$$\Phi_{(5)} + \alpha \Phi_{(3)} = (1 - \alpha)z \tag{8.20}$$

e

$$q_{(3)} + q_{(5)} = 0 \tag{8.21}$$

A Eq.(8.20) é aplicada apenas aos nós intermediários da interface (os nós nas duas extremidade já têm seu potencial conhecido). A Eq.(8.21) é aplicada a todos os nós da interface, começando na velocidade depois do primeiro nó e terminando na velocidade antes do último nó.

Além destas equações de “acoplamento”, os nós intermediários da interface necessitam, assim como os da superfície livre dos simuladores monofásicos, de equações extra por terem, cada um, 3 variáveis desconhecidas. Para suprir as equações necessárias, novamente é utilizada a técnica de adotar a condição de colinearidade entre os elementos, fazendo  $q^a = q^d$ . Mais uma vez, a

discretização da interface deve ser feita em um número suficientemente grande de elementos, de forma que se minimize o erro numérico introduzido pela suposição de colinearidade.

### 8.3.2 Condições de contorno para os simuladores de poços verticais

Para os simuladores dos fenômenos em poços verticais, que representam o domínio em geometria axissimétrica, as condições de contorno são análogas às apresentadas nas Seções 8.3.1.1 e 8.3.1.3. A exceção é que para o caso axissimétrico, não existe contorno na coordenada  $x = 0$ , que representa o eixo de simetria. Logo, não há condição de contorno explícita no eixo de simetria. As condições estão implícitas nas soluções fundamentais axissimétricas.

Para fins de compatibilidade com a notação apresentada nas seções anteriores deste capítulo, não são usadas as numerações (4) e (8) na identificação dos contornos na Fig. 8.3. Assim, as equações para as condições de contorno podem ser aplicadas da forma como aparecem nas seções correspondentes para os simuladores de poços horizontais.

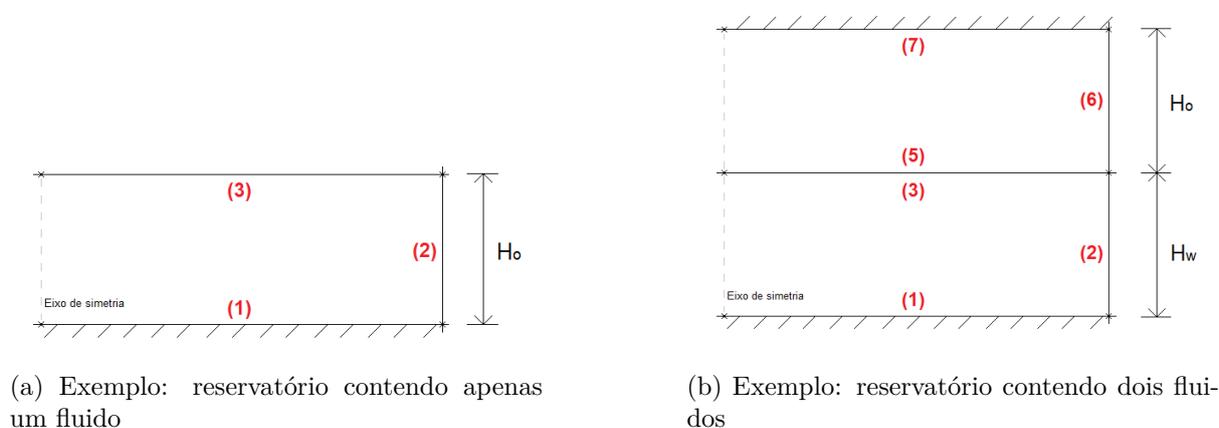


Figura 8.3: Exemplos de reservatórios retangulares axissimétricos

Diferente do caso bidimensional, nos simuladores axissimétricos, o nó da extremidade esquerda da interface é livre, assim, não se aplica a condição contorno de velocidade  $q^a = 0$ .

## 8.4 Movimentação da interface

Usando etapas de tempo suficientemente pequenas, a simulação trata o regime transitório (interface em movimento) como uma sucessão de estados de quase-equilíbrio nos quais a equação de Poisson descreve as condições de potencial e velocidades no domínio. Isto é válido porque as sucessivas mudanças na posição da fronteira causam sucessivas mudanças nas condições de contorno, estabelecendo um novo cenário a ser resolvido. Em outras palavras, cada pequena etapa temporal da simulação lida com um problema completamente novo, declarado pela nova posição da interface e as condições de contorno correspondentes. Assim, é possível simular a movimentação da interface usando o equação de Poisson, como uma sucessão de regimes estacionários.

Foram implementadas duas maneiras de mover a interface. A primeira é a movimentação da

interface pela velocidade calculada. A segunda é a movimentação pelo potencial calculado. Ambas serão descritas nas seções a seguir.

#### 8.4.1 Movimentação pela velocidade calculada

A velocidade calculada na interface é, na verdade, a velocidade dos pontos materiais que a definem. É possível, então, deduzir a equação que define sua posição em função desta velocidade. Considere, para este caso, que exista uma função  $F$ , definida por:

$$F = z - \lambda(x, t) = 0 \quad (8.22)$$

onde  $\lambda(x, t)$  é a função que expressa a altura da interface para uma determinada coordenada  $x$  e um certo instante de tempo.

Como a interface é uma linha material, pode-se fazer:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\phi} \cdot \nabla F = 0 \quad (8.23)$$

Substituindo a Eq.(8.22) na Eq.(8.23), tem-se:

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\phi} \cdot (\nabla z - \nabla \lambda) = 0 \quad (8.24)$$

Explicitando a variação de  $\lambda$  no tempo, tem-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\phi} [\mathbf{q} \cdot \nabla z - \mathbf{q} \cdot \nabla \lambda] \quad (8.25)$$

Sabendo que  $\nabla z = \hat{\mathbf{e}}_z$ , pode-se fazer:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\phi} [\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z - \mathbf{q} \cdot \nabla \lambda] \quad (8.26)$$

Como  $\lambda = \lambda(x, t)$ , então:

$$\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (8.27)$$

Dessa forma, com o resultado dos produtos escalares da Eq.(8.26), tem-se:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\phi} \left( q_z - q_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \quad (8.28)$$

A Eq.(8.28) é a equação que define a variação da coordenada  $z$  de um determinado ponto da interface. Nesta equação,  $q_x$  e  $q_z$  são as velocidades projetadas nos eixos  $x$  e  $z$ , respectivamente.

Porém, como a informação que se obtém na simulação é a de velocidade na direção normal ao elemento de contorno ( $q$ ), deve-se escrever a equação em termos desta velocidade normal projetada nos eixos  $x$  e  $z$ :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\phi} \left( q \cos \beta - q \sin \beta \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \quad (8.29)$$

onde  $\beta$  é o ângulo formado entre o vetor normal ao elemento e o eixo  $z$ . A derivada de  $\lambda$  em relação a  $x$  é a própria inclinação do elemento, dada por  $-\tan \beta$ . Dessa forma, chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= \frac{1}{\phi} [q \cos \beta - q \sin \beta (-\tan \beta)] \\ &= \frac{1}{\phi} q \left( \cos \beta + \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\phi} \frac{q}{\cos \beta} \end{aligned} \quad (8.30)$$

A Eq.(8.30) é a equação utilizada neste estudo para a simulação da movimentação da superfície livre ou da interface entre dois fluidos. A implementação desta equação no código desenvolvido, porém, deve ser feita de forma a levar em conta o tamanho do passo de tempo utilizado nas iterações. Escrevendo-a em termos de diferenças finitas, temos:

$$z_{m+1} = z_m + \frac{1}{\phi} \frac{q_m}{\cos \beta} \Delta t \quad (8.31)$$

onde  $z$  é a altura da interface,  $\Delta t$  é o tamanho do passo de tempo e os sub-índices  $m$  e  $m + 1$  indicam o passo de tempo atual e o imediatamente próximo.

Um coeficiente de ponderação pode ser adicionado, de forma a garantir a estabilidade da movimentação da interface:

$$z_{m+1} = z_m + \frac{1}{\phi} \frac{1}{\cos \beta} [\omega q_m + (1 - \omega) q_{m-1}] \Delta t \quad (8.32)$$

onde o coeficiente  $\omega$  varia de 0 a 1.

#### 8.4.2 Movimentação pelo potencial calculado

Outra maneira de mover a interface é através do estabelecimento da condição de contorno de velocidade zero nos elementos que a compõem. Tome como exemplo os reservatórios das figuras 8.1 e 8.2. As condições de contorno para a interface, representada pelos contornos (3) e (5) devem ser

alteradas para velocidade igual a zero e potencial desconhecido:

$$q_{(3)} = q_{(5)} = 0 \quad (8.33)$$

$$\Phi_{(3)} = \Phi_{(5)} = z \text{ (desconhecido)} \quad (8.34)$$

A primeira condição de contorno ( $q = 0$ ) será usada para resolver o sistema linear. A outra condição ( $\Phi = z$ ) será usada para atualizar a posição da interface. Os valores encontrados para o potencial da interface móvel é numericamente igual à altura da interface que levaria à condição de velocidade zero em seus elementos. Isso ocorre porque a solução do problema, ou seja, as variáveis calculadas pelo MEC associadas às condições de contorno compõem um cenário de equilíbrio. Fisicamente, o potencial calculado para cada nó da interface é exatamente o potencial que garante a condição de velocidade zero na interface. Assim, a coordenada  $z$  do nó pode ser diretamente atualizada pelo potencial calculado como:

$$z_{m+1} = \Phi_m \quad (8.35)$$

onde os sub-índices  $m$  e  $m + 1$  indicam o passo de tempo atual e o imediatamente próximo.

Assim como na movimentação da interface pela velocidade, nesta equação pode ser adicionado um coeficiente de ponderação por questões de estabilidade:

$$z_{m+1} = \omega \Phi_m + (1 - \omega) z_m \quad (8.36)$$

É interessante notar que esta abordagem não envolve a discretização em passos de tempo. Assim, uma desvantagem deste método de mover a interface é não se ter a informação do tempo de escoamento transcorrido durante a simulação. Uma vantagem do método, entretanto, é a rápida convergência para o estado estacionário, em que as massas de fluido atingem o equilíbrio. Esta vantagem é especialmente interessante na determinação da vazão crítica do sistema, quando normalmente se desejam respostas rápidas e não se faz necessária a obtenção do tempo transcorrido em cada cenário de escoamento simulado.

## 8.5 Modelagem do poço produtor

Como já visto no Capítulo 2, os poços de petróleo introduzem uma diferença de potencial no reservatório. Essa diferença de potencial causa o escoamento dos fluidos para o interior do poço. Para representar o poço nos simuladores, dois fatores devem ser levados em consideração: a representação do seu efeito no reservatório e a representação da sua geometria.

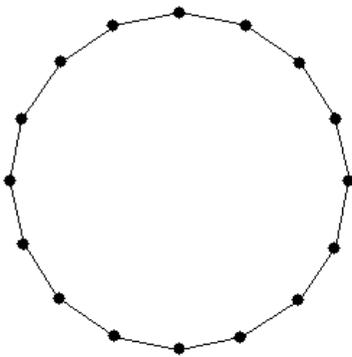
### 8.5.1 Tipos de representação

Com relação ao efeito do poço no reservatório, existem duas possíveis abordagens. A primeira delas é o estabelecimento do potencial na parede do poço. A segunda é o estabelecimento da vazão

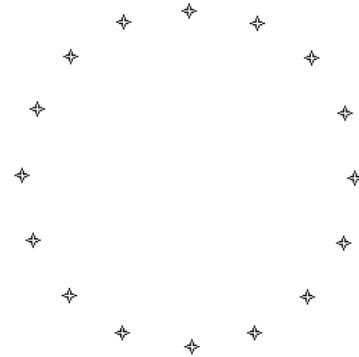
que entra no poço. Ambas estão relacionadas pela relação de causa e efeito que mantêm.

Com relação à representação geométrica, existem, também, duas possíveis abordagens: A primeira possibilidade é modelar o poço como um “furo” dentro do domínio, utilizando elementos de contorno para representar o seu perímetro (Fig. 8.4a). Assim, elementos de contorno representam fisicamente a parede do poço. Com essa modelagem geométrica, é possível adotar qualquer uma das abordagens para modelagem do efeito do poço: potencial ou vazão prescritos. Neste caso, o potencial ou a vazão são estabelecidos como condições de contorno dos elementos que representam a parede do poço.

A segunda abordagem para a modelagem geométrica é a de se modelar o poço como um conjunto de sumidouros concentrados (Fig. 8.4b). Estes são dispostos sobre o perímetro que seria formado pela parede do poço. Como sumidouros concentrados, por definição, são entidades relacionadas ao fluxo, esta modelagem geométrica funciona apenas com o estabelecimento da vazão como representação do efeito do poço.



(a) Poço horizontal representado por elementos de contorno



(b) Poço horizontal representado por sumidouros concentrados

Figura 8.4: Abordagens para a modelagem geométrica do poço horizontal

A representação geométrica do poço por meio de elementos de contorno apresenta uma dificuldade de implementação. Quando a simulação envolve extração de fluidos acima da vazão crítica, a interface ou superfície livre necessariamente chega a tocar o poço. Neste momento, os elementos de contorno que formam a “parede” do poço devem se integrar à interface. A Fig. 8.5a mostra esta situação. Nesta figura, as porções da interface em cor vermelha representam onde os elementos das duas sub-regiões são coincidentes, como foi desde o início. Os elementos em azul representam a parte da interface coincidente com o poço e pertencente à sub-região inferior. Os elementos em verde representam a parte da interface coincidente com o poço e pertencente à sub-região superior. A cada instante de tempo subsequente, a movimentação da interface exige um re-arranjo dos elementos, haja visto que a altura em que a interface toca no poço varia ao longo do tempo. Toda essa readequação da malha é muito trabalhosa e impacta no desempenho do simulador. Além disso, nas porções em verde e azul, as equações de continuidade ao longo da interface (Eqs. 7.1, 7.2 e 7.13) não são válidas, devendo ser substituídas pelas condições de contorno da parede do poço.

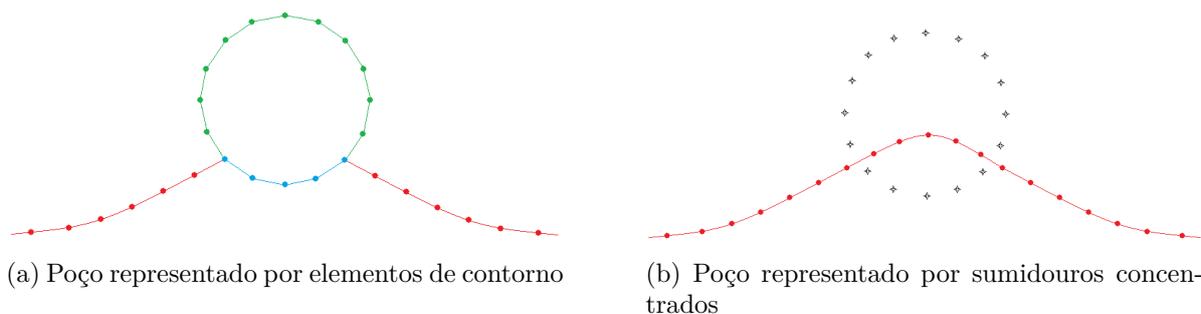


Figura 8.5: Interação interface-poço

Tendo estes problemas em vista, a representação da geometria do poço por um conjunto de sumidouros pontuais se torna a escolha natural. Como os sumidouros pontuais não envolvem a utilização de elementos de contorno, a movimentação da interface sobre eles não demanda nenhuma alteração na malha (Fig. 8.5b).

### 8.5.1.1 Poços verticais

A análise realizada para os poços horizontais é válida para os poços verticais, chegando-se às mesmas conclusões. A representação equivalente a um sumidouro concentrado em domínio bidimensional é realizada em domínio axissimétrico através de uma distribuição linear de sumidouros concentrados na vertical, ao longo do eixo de simetria do problema (coordenada  $x = 0$ ). Alternativamente, a representação do perímetro do poço pode ser aproximada também por uma distribuição linear de sumidouros concentrados paralelos ao eixo de simetria, distando deste o equivalente ao raio do poço. A Fig. 8.6 mostra estas possibilidades de implementação.

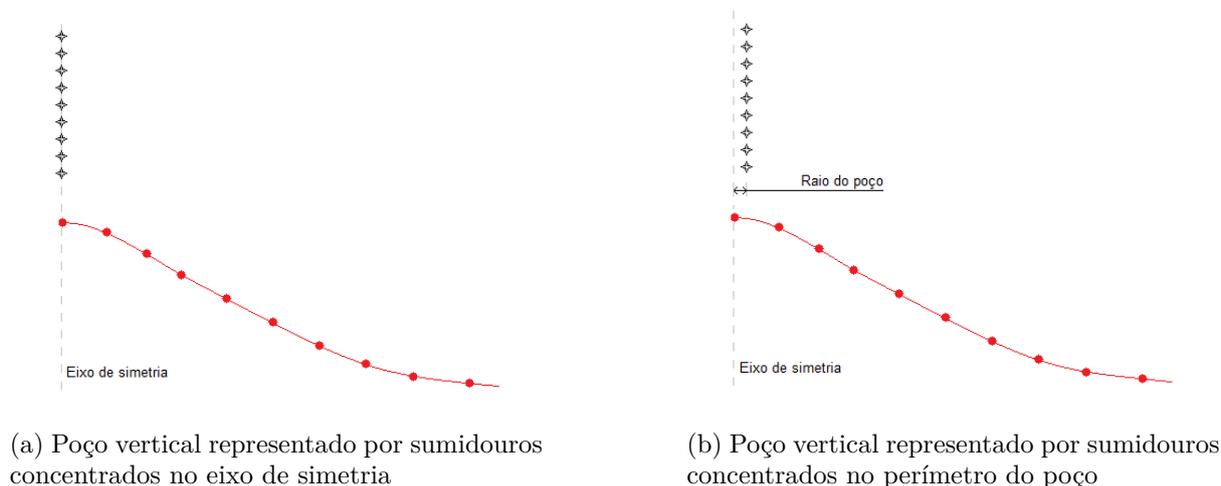


Figura 8.6: Abordagens para a modelagem geométrica do poço vertical

## 8.5.2 Características da representação adotada

A representação geométrica do poço é feita, então, por um conjunto de sumidouros pontuais, distribuídos de modo a formar o perímetro do poço. A representação do efeito do poço é feita pelo estabelecimento da vazão total de fluidos que nele entra. Esta vazão é, então, um parâmetro de entrada da simulação e é distribuída entre todos os sumidouros. Entretanto, a distribuição não se dá de forma igualitária, e o motivo é explicado a seguir.

### 8.5.2.1 Condição de equipotencial no poço horizontal

Caso seja desejado, a seção transversal do poço horizontal pode ser modelada como uma superfície equipotencial. Baseando-se nesta condição, a distribuição da vazão entre os sumidouros utiliza o critério de balanceamento da intensidade de cada um deles, de modo a tornar equipotencial o interior do poço simulado. Para garantir esta condição, foi desenvolvido um algoritmo que ajusta as intensidades de cada sumidouro pontual baseado na distribuição de potencial no interior do perímetro formado por eles. Então, a cada instante de tempo simulado, o simulador garante que o interior do poço será uma região equipotencial.

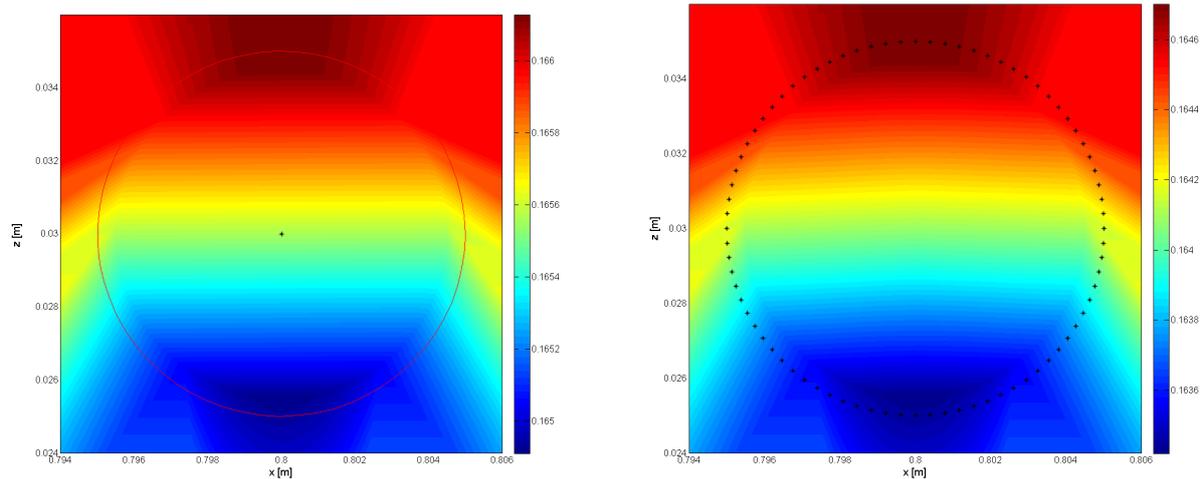
A Fig. 8.7 mostra a comparação entre o poço sem e com o balanceamento dos sumidouros pontuais.

Pode-se ver na figura 8.7c que o interior do poço com balanceamento de intensidade dos sumidouros fica com uma diferença de potencial máxima de  $1 \times 10^{-4} m$ , ou seja, o equivalente a uma coluna de fluido com um décimo de milímetro de altura. Sem o balanceamento, a diferença de potencial no poço, que tem  $10 mm$  de diâmetro, chega a  $1 mm$ . O gradiente de potencial neste caso é semelhante ao que se obtém quando a representação do poço é feita por um único sumidouro pontual (Fig. 8.7a).

Apesar de parecer pequeno, o gradiente de potencial no interior do poço não balanceado gera resultado diferente para a movimentação da interface, se comparado com o poço balanceado, conforme pode ser visto na Fig. 8.8.

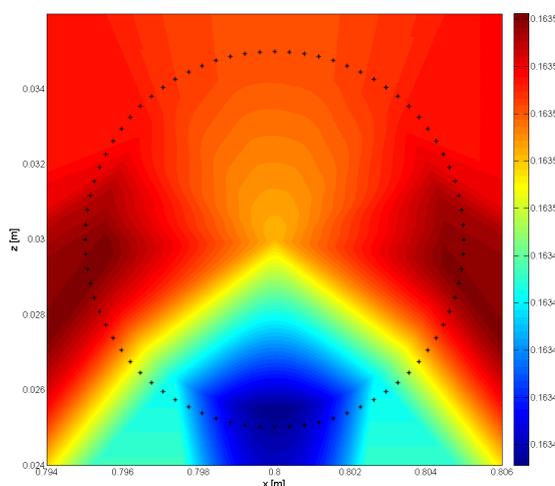
### 8.5.2.2 Produção supercrítica

Com essa modelagem apresentada, consegue-se facilmente simular a extração supercrítica dos fluidos. Considere, por exemplo, um reservatório contendo água e óleo. Inicialmente, todos os sumidouros que, em conjunto, representam o poço real, estão localizados dentro da zona de óleo (sub-região superior). À medida que a simulação avança, o cone sobe e toca no primeiro sumidouro concentrado, na parte inferior do poço. Neste momento, tudo que é necessário fazer é transferir a contribuição deste sumidouro concentrado para a zona de água. Isto demanda apenas deixar de contabilizar a contribuição deste sumidouro no vetor  $s_o$ , da zona de óleo, e passar a contabilizá-la no vetor  $s_w$ , da zona de água (Eq. 7.25). No caso dos simuladores monofásicos, a tarefa se restringe em não contabilizar a contribuição daquele sumidouro no vetor  $s$  da Eq.(4.104). Cada vez que a interface avança sobre um dos sumidouros pontuais, esta tarefa é repetida. O processo inverso é



(a) Representação por um sumidouro pontual

(b) Interior do poço sem balanceamento



(c) Interior do poço com balanceamento

Figura 8.7: Balanceamento da intensidade dos sumidouros pontuais

feito quando a interface retrocede.

Este processo é extremamente simples e praticamente não consome recursos computacionais. Além disso, esta representação permite facilmente quantificar o volume produzido de cada um dos fluidos ao longo do tempo durante uma extração supercrítica. Levando-se em consideração que cada sumidouro pontual só produz um dos fluidos de cada vez, pode-se computar a produção de um determinado fluido por um determinado sumidouro multiplicando sua intensidade, ou vazão individual ( $Q_i$  [ $m^2/s$ ]), pelo tamanho do passo de tempo ( $\Delta t$  [ $s$ ]). Assim, o volume total de água produzida ( $V_w$  [ $m^2$ ]), por exemplo, é calculado por:

$$V_w = \sum_{m=1}^{N_t} \left( \sum_{i=1}^{N_w} Q_i * \Delta t \right)_m \quad (8.37)$$

onde  $N_w$  é o número de sumidouros pontuais localizados dentro da zona de água e  $N_t$  indica o número total de passos de tempo simulados.

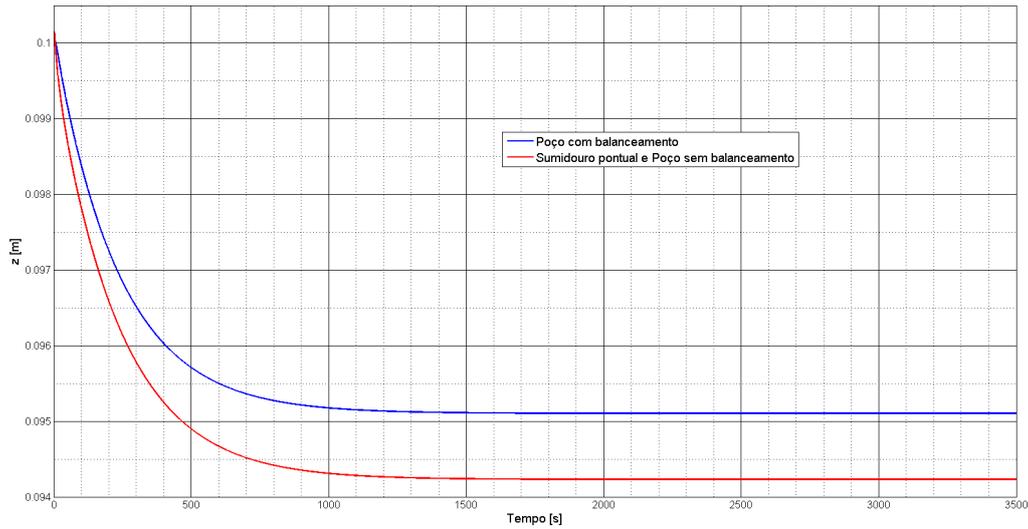


Figura 8.8: Posição do ponto central da interface ao longo do tempo

Uma segunda maneira de mensurar a produção dos fluidos é computar a sua taxa de produção. Isso é feito calculando o fluxo que entra no reservatório pelos limites laterais de cada sub-região. Para isso, multiplica-se a velocidade média normal ( $\underline{q}_j$  [m/s]) a cada elemento que compõe os limites laterais pelo comprimento ( $l_j$  [m]) do elemento (Fig. 8.9). Assim, a taxa de produção de água ( $Q_w$  [m<sup>2</sup>/s]), por exemplo, é calculada por:

$$Q_w = \sum_{j=1}^{N_e} \underline{q}_j l_j + \sum_{j=1}^{N_d} \underline{q}_j l_j \quad (8.38)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos no limite lateral esquerdo da sub-região e  $N_d$  é o número de elementos no limite lateral direito.

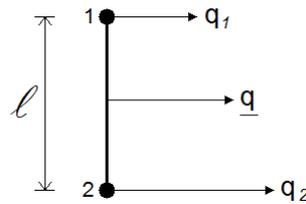


Figura 8.9: Velocidade média normal ao elemento

## 8.6 Método de solução

### 8.6.1 Condição inicial

Inicialmente, têm-se as condições de contorno prescritas, conforme demonstrado na seção 8.3. No instante de tempo  $t = 0$ , assume-se que a interface coincide com a horizontal.

## 8.6.2 Procedimento de cada iteração

### 8.6.2.1 Simuladores de escoamento potencial

Os códigos desenvolvidos resolvem o problema potencial decorrente do cenário inicial, calculando os potenciais e as velocidades na direção normal em todos os nós do contorno e da interface. A próxima etapa é o cálculo da nova posição da interface. Para isso, leva-se em conta a velocidade calculada, aplicando-a na Eq.(8.31). Como resultado, são obtidas as coordenadas de cada nó da interface ao final do intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Estabelecem-se, então, para a próxima iteração, um novo cenário. As novas condições de contorno são estabelecidas com base nos mesmos conceitos utilizados no cenário inicial. A posição da interface, no entanto, não é mais assumida como horizontal, mas sim determinada pelas coordenadas calculadas.

O programa resolve o problema potencial decorrente deste novo cenário e realiza o cálculo da nova posição da interface. Todo este procedimento é repetido pelo número de passos de tempo indicado como parâmetro.

Com isto, pode-se obter a evolução da interface ao longo do tempo.

### 8.6.2.2 Simulador de escoamento compressível

O simulador de escoamento compressível calcula as pressões e sua derivada na direção normal. Assim, depois de calculados, dois passos adicionais são necessários. O primeiro é converter os valores calculados de pressão ( $p$ ) em valores de potencial ( $\Phi$ ), por meio da Eq.(3.6):

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z$$

O segundo é converter os valores calculados de derivadas de pressão ( $\partial p / \partial n$ ) em valores de velocidade ( $q$ ). Isso é feito utilizando a equação (8.9):

$$q = -K \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial n} \right)$$

A velocidade pode, então, ser utilizada para calcular a movimentação da interface. Com exceção destes dois passos extra, o método de solução utilizado no simulador de escoamento compressível é igual ao utilizado nos simuladores potenciais.

# Capítulo 9

## Resultados

### 9.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a implementação dos simuladores. Inicialmente, são apresentadas as validações de cada um deles. Para as implementações em domínio bidimensional, uma solução analítica está disponível na literatura e foi utilizada como referência. Para as implementações em domínio axissimétrico, não foram encontradas na literatura soluções analíticas. Os resultados foram comparados, então, com os obtidos por outros autores. Ainda para domínios axissimétricos, uma comparação com resultados para o problema de *Quick Drawdown* é apresentada. Neste capítulo são apresentadas também a validação da solução fundamental ortotrópica proposta no Capítulo 4.

Após a sessão de validação, uma análise de problema prático de cone de gás é realizada, utilizando o simulador monofásico bidimensional. São apresentados, ainda, resultados de cada simulador para casos específicos, para que sirvam de comparação para trabalhos futuros.

### 9.2 Validação

#### 9.2.1 Solução fundamental ortotrópica

As soluções analítica e numérica (obtidos via MDF) para um problema de condução de calor em domínio bidimensional ortotrópico foram apresentadas por Sameti et al. (2014). O mesmo caso foi simulado com as formulações desenvolvidas de MEC bidimensional com solução fundamental ortotrópica e os resultados foram comparados com o do referido trabalho.

A Fig. (9.1a) mostra a geometria e condições de contorno do problema. O domínio tem dimensões  $6\text{ cm} \times 4\text{ cm}$  e condutividade térmica  $k_x = 6,5\text{ W/m}^2\text{K}$  e  $k_y = 11,3\text{ W/m}^2\text{K}$ . As temperaturas são estabelecidas nos nós do contorno, em graus Celsius, como sendo:

$$T_1 = 0; T_2 = 50; T_3 = 53,3; T_4 = 45; T_5 = 32; T_6 = 16,6; T_7 = 0$$

para os nós de 1 a 7, e zero nos demais nós do contorno. A Fig. 9.1b apresenta a distribuição de temperatura calculada no interior do domínio considerado.

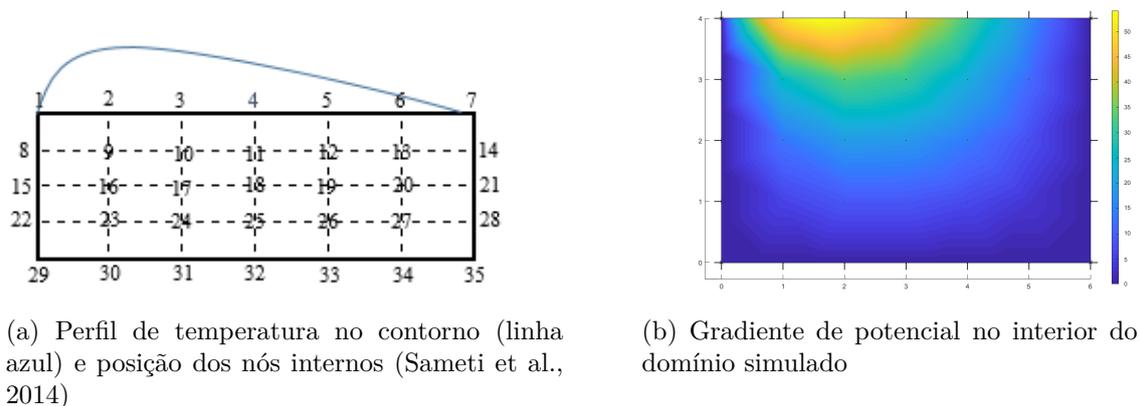


Figura 9.1: Validação da solução fundamental ortotrópica

Com a solução fundamental proposta, o problema foi simulado com as implementações realizadas. Os resultados podem ser vistos na Tabela 9.1.

Tabela 9.1: Temperaturas analítica e numéricas, com erros percentuais

Nó	T Analítica [°C]	T FDM [°C]	Erro FDM [%]	T MEC [°C]	Erro MEC [%]
9	25,65	26,33	2,65	25,59	0,25
10	33,34	33,36	0,06	33,30	0,13
11	30,35	30,27	0,26	30,33	0,08
12	22,28	22,21	0,31	22,26	0,08
13	11,71	11,66	0,43	11,69	0,13
16	13,16	13,77	4,63	13,13	0,20
17	19,08	19,25	0,89	19,06	0,11
18	18,43	18,40	0,16	18,42	0,05
19	13,92	13,77	1,08	13,91	0,07
20	7,40	7,36	0,54	7,39	0,18
23	5,68	5,97	5,10	5,67	0,17
24	8,65	8,78	1,50	8,65	0,02
25	8,65	8,65	0	8,65	0,07
26	6,66	6,63	0,45	6,66	0,01
27	N/A	N/A	-	3,57	-

Na tabela acima, o erro percentual foi definido como:

$$Erro \% = \frac{|T_{num} - T_{an}|}{T_{an}} \times 100 \quad (9.1)$$

onde  $T_{an}$  e  $T_{num}$  são as temperaturas analítica e numérica, respectivamente.

A raiz do erro médio quadrático dos resultados (Eq. 9.2) também foi calculada. O Erro RMS dos resultados obtidos com MDF foi igual a 0,27 °C. O Erro RMS utilizando o MEC foi de 0,03 °C.

$$Erro\ RMS = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (T_{num,j} - T_{an,j})^2}{m}} \quad (9.2)$$

No cálculo do Erro RMS,  $m$  é o número de nós onde se tem resposta analítica.

## 9.2.2 Validação dos simuladores bidimensionais

Antes de utilizar os simuladores desenvolvidos em análises, é necessário validá-los com base em resultados disponíveis na literatura. Fortaleza et al. (2019) desenvolveram uma solução analítica para a vazão crítica e para a correspondente posição da interface em condição de estabilidade. Esta solução foi utilizada como base para comparar os resultados dos simuladores.

### 9.2.2.1 Solução analítica

A solução analítica disponível foi desenvolvida para validação de experimentos realizados em células de Hele-Shaw, aparatos construídos para simular o escoamento de fluidos em meios porosos. Sua validade é restrita a casos que apresentam:

- Escoamento bidimensional monofásico potencial;
- Pressão na superfície livre igual a zero;
- Um único sumidouro pontual com coordenada  $x$  igual à metade da largura do domínio e coordenada  $z$  igual a zero.

Os resultados publicados foram obtidos para uma célula de 2  $m$  de largura, 0,4  $m$  de altura da coluna de líquido e 4  $mm$  de espessura. O fluido extraído é glicerina, com densidade de 1255  $kg/m^3$  e viscosidade de 1025,5  $\times 10^{-3}$   $Pa.s$ . Em cada um dos simuladores desenvolvidos para domínios bidimensionais foi inserido o conjunto de dados de forma a replicar o caso resolvido analiticamente.

### 9.2.2.2 Simulador monofásico potencial bidimensional

Os resultados do simulador de escoamento monofásico potencial bidimensional podem ser comparados diretamente com os resultados analíticos, uma vez que ambos adotam o mesmo modelo matemático.

### 9.2.2.3 Simulador monofásico difusivo bidimensional

Não foram encontrados resultados analíticos para o problema de escoamento difusivo bidimensional em meio poroso com fronteira móvel. No entanto, os resultados analíticos disponíveis para

o problema potencial apresentam como resposta a posição da interface estabilizada em vazão crítica. Tal posição estabilizada, conforme a teoria mostrada no Capítulo 3, será igual tanto para o escoamento potencial quanto para o escoamento difusivo. Assim, o simulador de escoamento monofásico difusivo bidimensional também pode ser comparado diretamente com os resultados analíticos disponíveis para o caso potencial.

#### 9.2.2.4 Simulador bifásico potencial bidimensional

Para ser validado por meio de comparação com um escoamento monofásico, o simulador bifásico deve simular um caso que mantenha semelhança dinâmica com o escoamento monofásico que servirá de referência. Analisando o número de Froude (Eq. 2.1), pode-se perceber que, para garantir a semelhança dinâmica entre os modelos de escoamento bifásico e monofásico, deve-se utilizar o mesmo  $\Delta\rho$  em ambos os casos.

Assim, o simulador bifásico deve ter seus parâmetros alterados de forma que o  $\Delta\rho$  bifásico seja igual ao  $\Delta\rho$  monofásico. Então, faz-se

$$\rho_{\text{óleo(bifásico)}} = \rho_{\text{óleo(monofásico)}} + \rho_{\text{gás(bifásico)}} \quad (9.3)$$

Além disso, há que se garantir que a pressão sobre a interface seja zero, para que ela tenha a mesma condição da superfície livre do escoamento monofásico. Então, deve ser adotada uma pressão de topo  $p_t = -\rho_{\text{gás}} g H_{\text{gás}}$  para que na interface, a pressão resultante seja zero.

Como todos os demais parâmetros continuam iguais, a semelhança dinâmica entre os escoamentos é alcançada e os resultados do escoamento bifásico potencial podem ser comparados com os resultados analíticos disponíveis.

#### 9.2.2.5 Comparação dos resultados

A tabela 9.2 apresenta os valores obtidos para vazão crítica e a correspondente coordenada  $z$  do nó central da interface em condição de estabilidade. A Fig. 9.2 mostra a comparação dos resultados obtidos para a posição da interface em condição de estabilidade.

Tabela 9.2: Comparação dos resultados obtidos

Simulador	Vazão crítica [m <sup>2</sup> /s]	Erro [%]	Altura do nó central [m]	Erro [%]
<i>Resultado analítico</i>	0,00254	-	0,04243	-
Monofásico potencial	0,00259	1,97	0,04228	0,35
Monofásico difusivo	0,00259	1,97	0,04224	0,45
Bifásico potencial	0,00260	2,36	0,04416	4,08

Há de se notar que o resultado analítico não apresenta os pontos da região central (ponta) da

interface (Fig. 9.3). A coordenada da altura do nó central apresentada na tabela é fruto de uma interpolação da curva analítica.

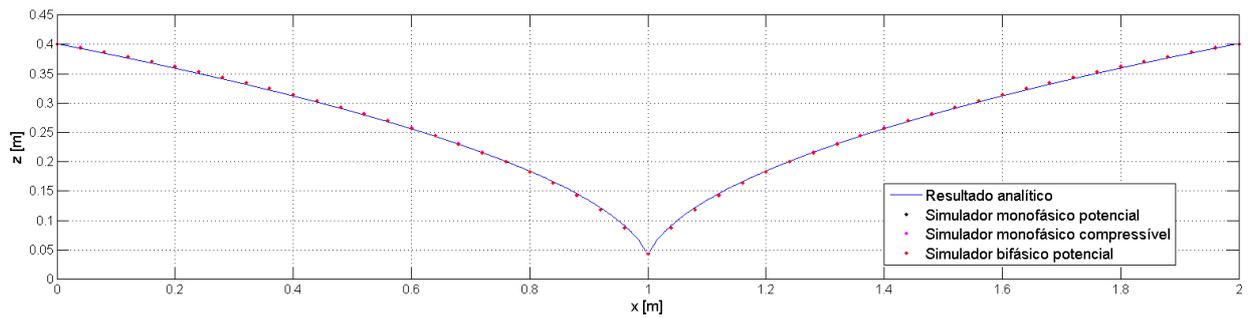


Figura 9.2: Comparação dos resultados para a posição da interface

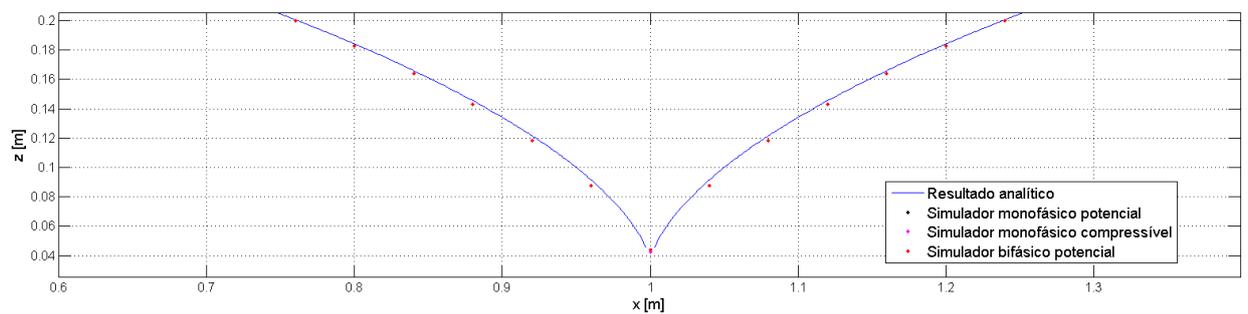


Figura 9.3: Comparação dos resultados para a posição da interface (ampliação)

Também foi realizada uma comparação para validar os simuladores em relação à semelhança dimensional entre escoamentos. Considerando-se o Número de Froude de um escoamento, dado pela Eq.(2.1), aqui repetida:

$$F = \frac{Q \mu_{\text{óleo}}}{k_{\text{óleo}} H \Delta \rho g}$$

pode-se perceber que se a diferença entre as densidades dos fluidos ( $\Delta\rho$ ) e a vazão ( $Q$ ) forem multiplicadas pelo mesmo fator, o equilíbrio de forças se mantém e a posição da interface se mantém na mesma configuração original quando o regime permanente é atingido. Para analisar se os simuladores cumprem ou não com esta previsão, um caso com a mesma geometria da validação analítica foi simulado, desta vez com ambos ( $\Delta\rho$ ) e ( $Q$ ) divididos por um fator de 10. O maior erro relativo obtido para a posição da interface entre os dois casos foi de  $5,95 \times 10^{-4}\%$  em seu ponto central, mostrando que os simuladores desenvolvidos estão de acordo com esta previsão teórica.

### 9.2.2.6 Validação do regime transiente

Visando a validação do regime transiente, uma comparação foi feita observando o caminho de retorno da interface da posição deformada para a não deformada em uma célula de Hele-Shaw, uma vez que a extração tenha cessado após a interface alcançar a condição de estabilidade. Assim, no instante  $t = t_0$ , a interface estava em posição estável e a bomba de extração de líquido foi

desligada. Em cada instante de tempo  $t$  subsequente, a posição do ponto central da interface foi registrada. Uma representação esquemática é mostrada na Fig. 9.4.

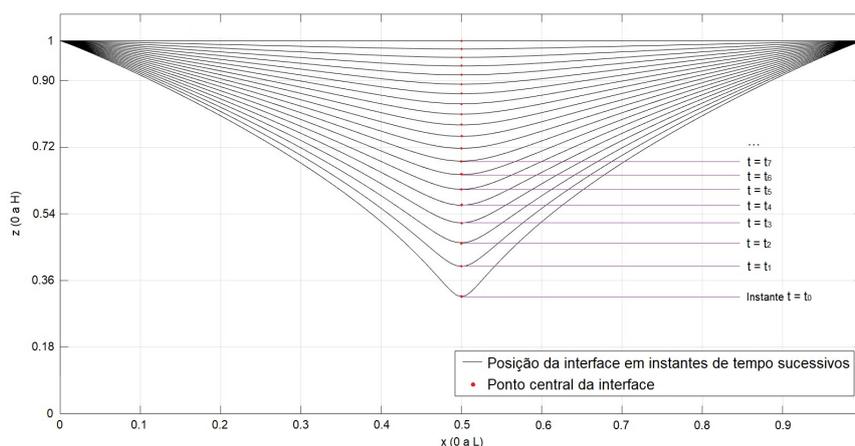


Figura 9.4: Representação esquemática da validação do regime transiente.

Os resultados obtidos com o simulador desenvolvido foram comparados com os experimentais e com os obtidos pelo software MRST (Matlab Reservoir Simulation Toolbox). O MRST é um framework para simulação de escoamento em meios porosos baseado no Método das Diferenças Finitas. É largamente adotado na academia e foi amplamente testado e documentado, inclusive em comparação a softwares comerciais adotados pela indústria (Jansen et al., 2014; Krogstad et al., 2015; Lie, 2015; Lie et al., 2010). Os resultados são mostrados na Fig. 9.5. Pode-se ver que os resultados obtidos concordam com os resultados experimentais, apresentando melhor coerência do que os resultados obtidos com o MRST.

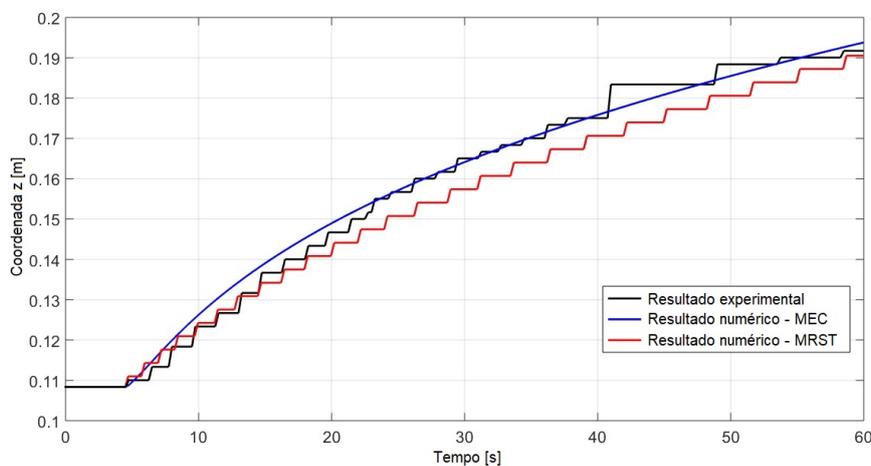


Figura 9.5: Ponto central da interface ao longo do tempo, retornando à posição inicial.

Na Fig. 9.5, o resultado obtido usando o simulador monofásico potencial é representado pela curva suave, em azul. O resultado obtido com o MRST, em vermelho, apresenta evolução em degraus por causa da dimensão do elemento de volume usado na discretização do domínio. O resultado experimental, em preto, apresenta evolução também em degraus, por causa da resolução em pixels da câmera que captura a posição da interface na célula de Hele-Shaw.

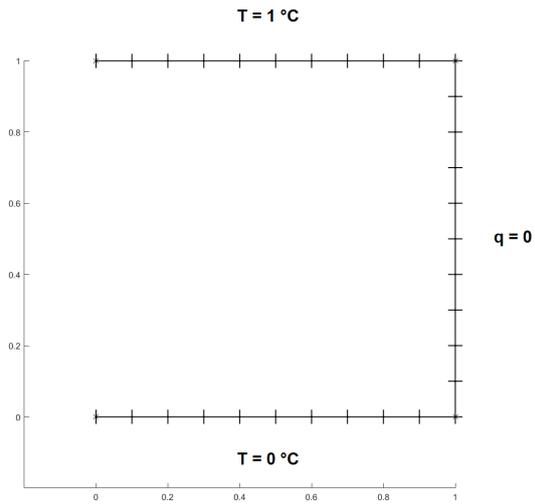
Como mostrado no Capítulo 3, se a equação de Difusividade for aplicada até o momento em que a difusão se estabiliza, o resultado neste instante é o mesmo que o obtido pela equação de Poisson. Portanto, em problemas com fronteiras móveis, isto significa que, usando etapas de tempo suficientemente pequenas, a simulação trata o regime transitório como uma sucessão de estados de quase-equilíbrio nos quais a equação de Poisson descreve suficientemente o regime transitório. Isto pode ser feito porque, em problemas de fronteira móvel, as sucessivas mudanças na posição da fronteira causam sucessivas mudanças nas condições de contorno com as quais a equação de Poisson está lidando. Em outras palavras, cada pequena etapa temporal da simulação lida com um problema completamente novo, declarado pela nova posição da interface e as condições de contorno correspondentes. É por isso que, neste caso particular, é possível simular o regime transiente de um problema de fronteira móvel usando a equação de Poisson, como uma sucessão de regimes estacionários. De fato, observando a Fig. 9.5, entende-se que o tempo calculado na simulação com a formulação implementada (a sucessão de passos de tempo) concorda com o tempo real do escoamento na Célula de Hele-Shaw.

### 9.2.3 Validação dos simuladores axissimétricos

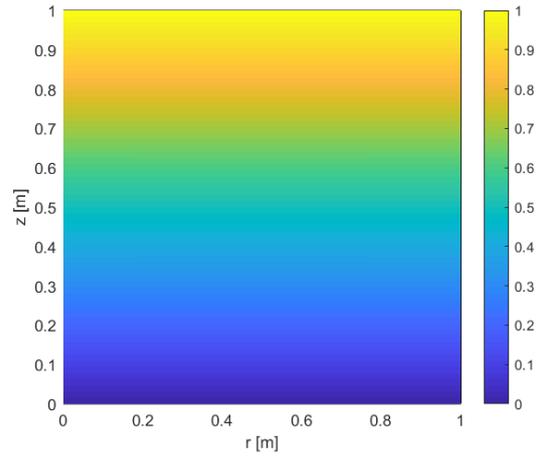
Não foram encontrados na literatura resultados analíticos para a deformação da fronteira móvel para o caso axissimétrico. Por esse motivo, a validação da formulação será realizada com problemas de condução de calor em sólidos axissimétricos, para os quais se têm soluções analíticas: cilindro maciço, cilindro vazado e semi-esfera oca.

#### 9.2.3.1 Cilindro maciço

A Fig. 9.6a apresenta a malha utilizada e as condições de contorno para o problema de condução de calor em cilindro maciço. A Fig. 9.6b traz o gradiente de temperatura calculado, cuja solução analítica é  $T = z$ . A comparação entre a solução analítica e a numérica é mostrada na Fig. 9.7. O erro RMS entre a solução analítica e a numérica é apresentado na Fig. 9.8.



(a) Malha e condições de contorno



(b) Distribuição de temperatura

Figura 9.6: Condução de calor em cilindro maciço - malha, condições de contorno e distribuição de temperatura

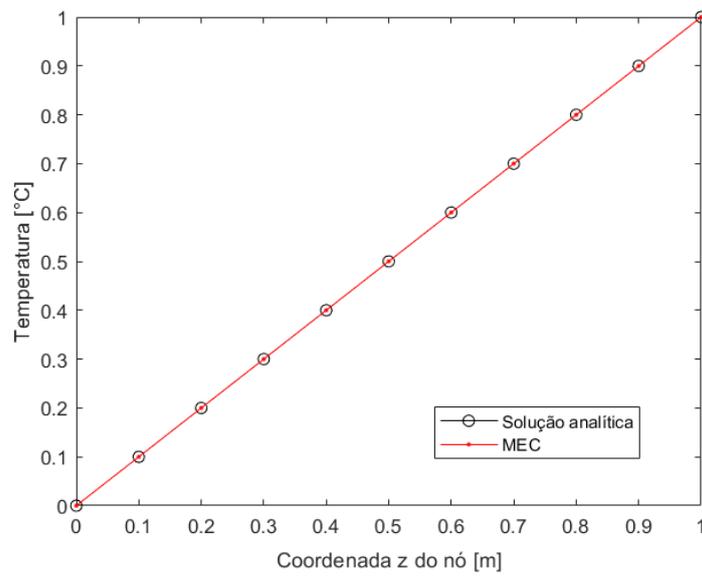


Figura 9.7: Comparação de resultados - cilindro maciço

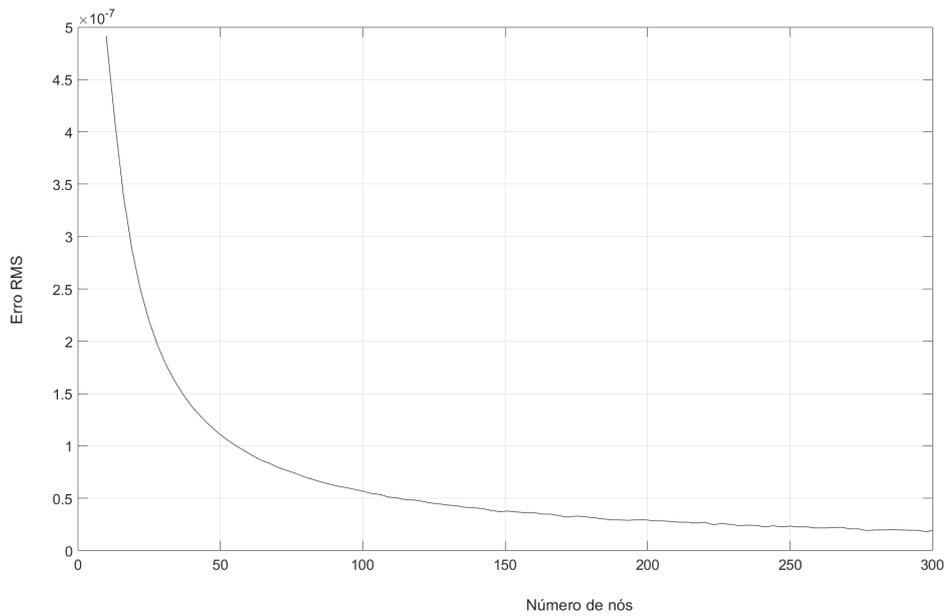


Figura 9.8: Erro RMS x número de nós - cilindro maciço

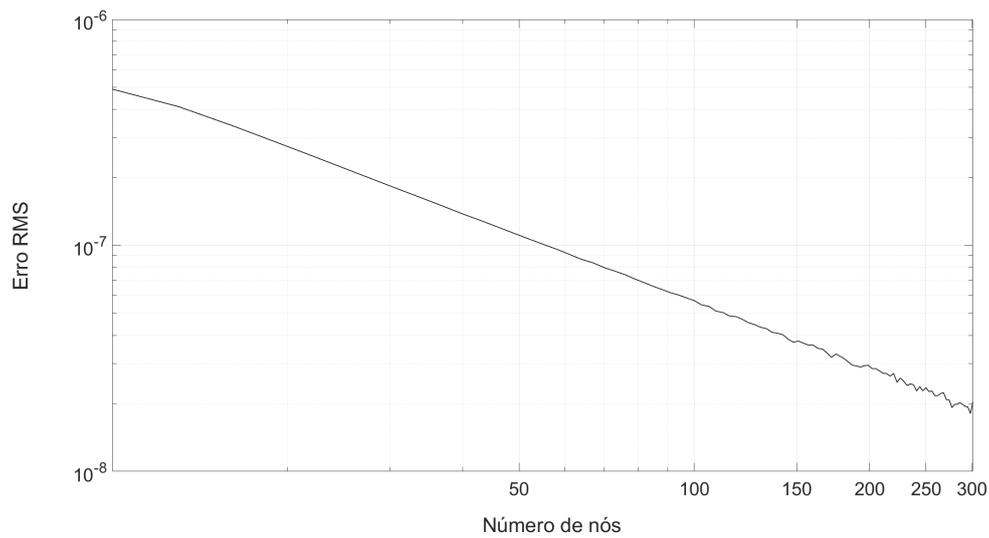
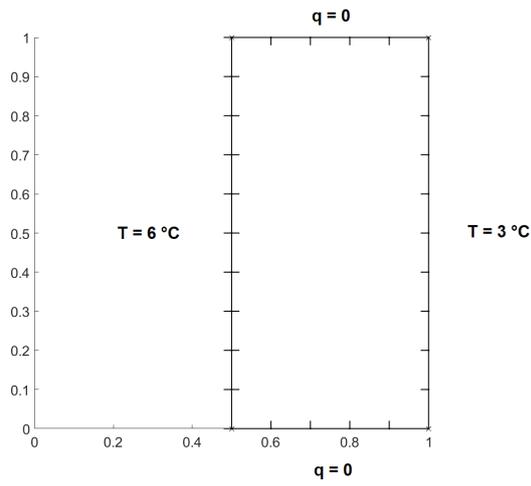


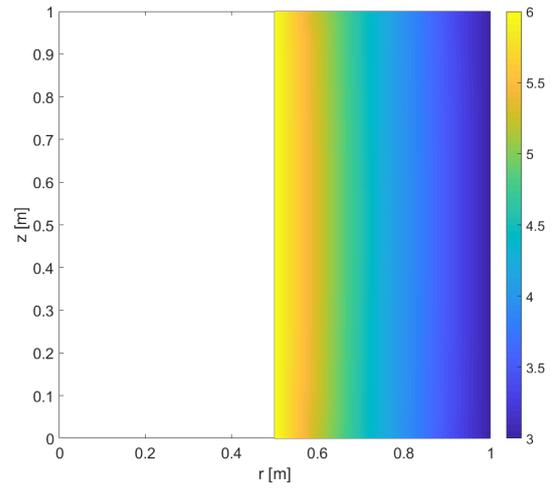
Figura 9.9: Erro RMS x número de nós - cilindro maciço (escala logarítmica)

### 9.2.3.2 Cilindro vazado

A Fig. 9.10a apresenta a malha utilizada e as condições de contorno para o problema de condução de calor em cilindro vazado. A Fig. 9.10b traz o gradiente de temperatura calculado, cuja solução analítica é dada pela Eq.(9.4). A comparação entre a solução analítica e a numérica é mostrada na Fig. 9.11. O erro RMS entre a solução analítica e a numérica é apresentado na Fig. 9.12.



(a) Malha e condições de contorno



(b) Distribuição de temperatura

Figura 9.10: Condução de calor em cilindro vazado - malha, condições de contorno e distribuição de temperatura

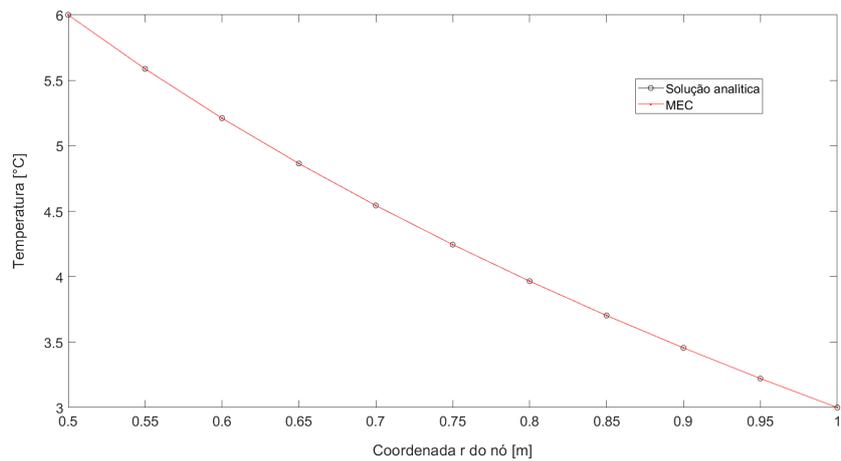


Figura 9.11: Comparação de resultados - cilindro vazado

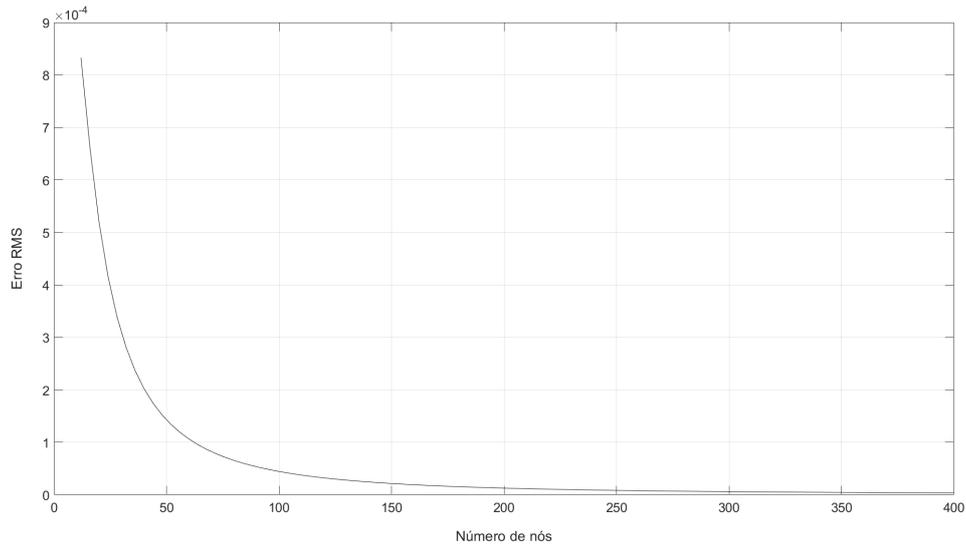


Figura 9.12: Erro RMS x número de nós - cilindro vazado

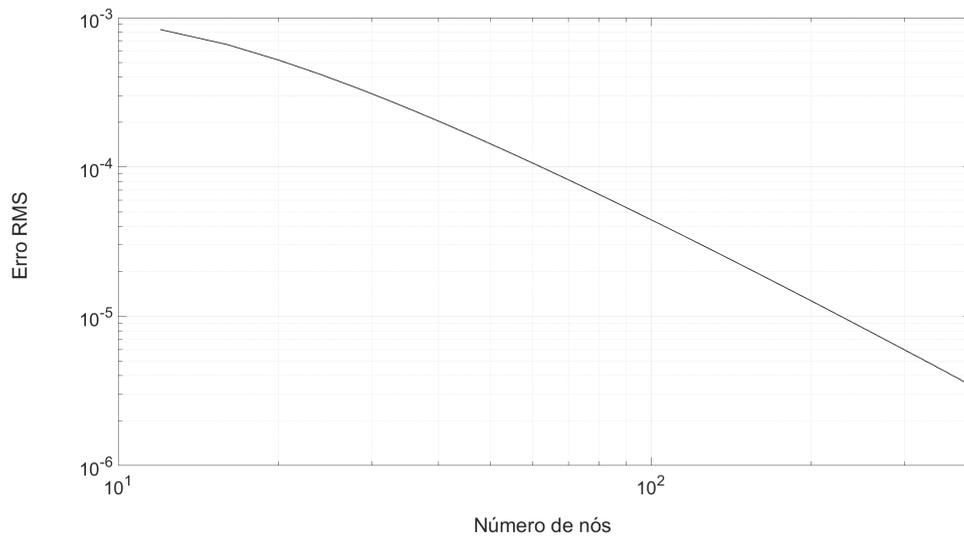


Figura 9.13: Erro RMS x número de nós - cilindro vazado (escala logarítmica)

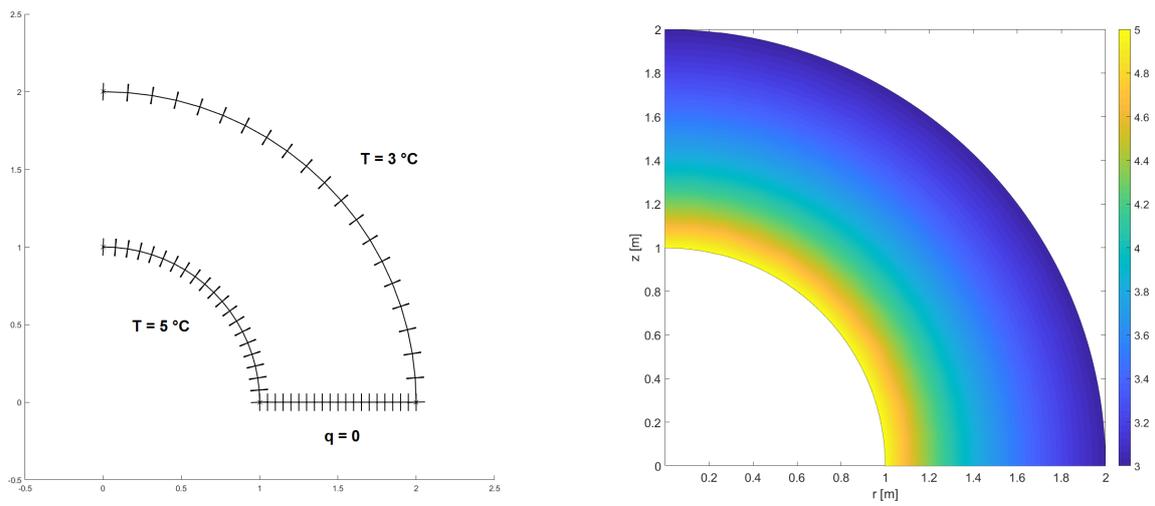
A solução analítica da temperatura no cilindro maciço é dada por:

$$T = -\frac{T_i - T_e}{\ln(r_e/r_i)} \ln r + T_i + \frac{T_i - T_e}{\ln(r_e/r_i)} \ln r_i \quad (9.4)$$

### 9.2.3.3 Semiesfera oca

A Fig. 9.14a apresenta a malha utilizada e as condições de contorno para o problema de condução de calor em uma semiesfera oca. A Fig. 9.14b traz o gradiente de temperatura calculado, cuja solução analítica é dada pela Eq.(9.5). A comparação entre a solução analítica e a numérica é mostrada na Fig. 9.15. O erro RMS entre a solução analítica e a numérica é apresentado na

Fig. 9.16.



(a) Malha e condições de contorno

(b) Distribuição de temperatura

Figura 9.14: Condução de calor em semiesfera oca - malha, condições de contorno e distribuição de temperatura

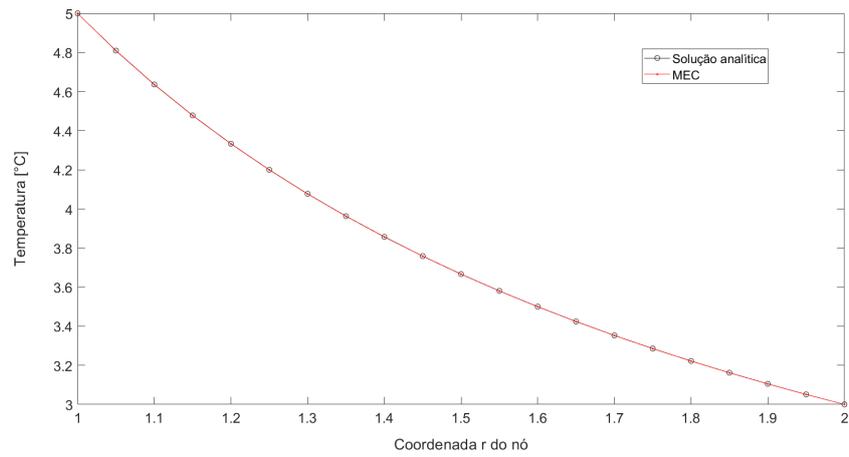


Figura 9.15: Comparação de resultados - semiesfera oca

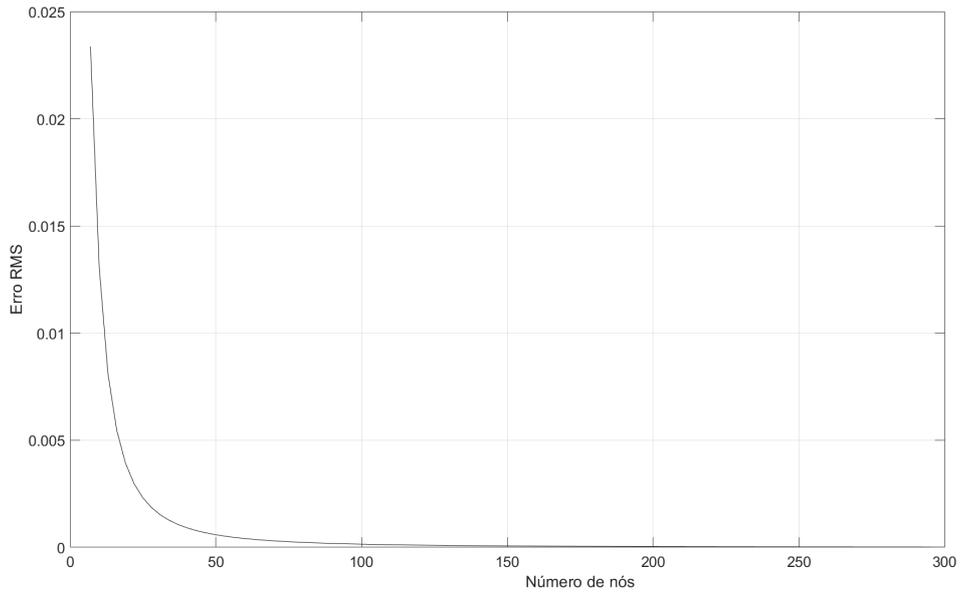


Figura 9.16: Erro RMS x número de nós - semiesfera oca

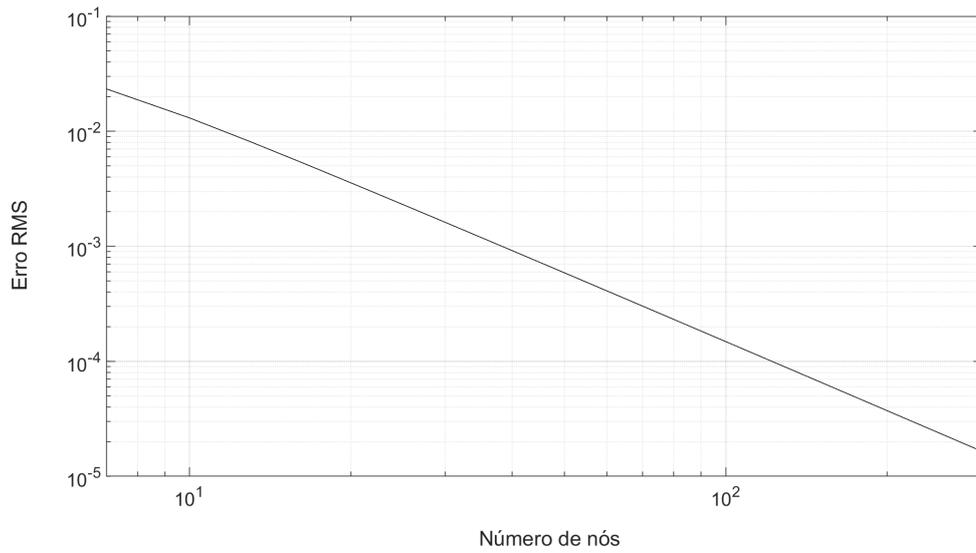


Figura 9.17: Erro RMS x número de nós - semiesfera oca (escala logarítmica)

A solução analítica para a temperatura na semiesfera oca é dada por:

$$\frac{T - T_i}{T_e - T_i} = T_i + \frac{r_i r_e}{r_e - r_i} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r} \right) \quad (9.5)$$

## 9.3 Resultados

Os simuladores desenvolvidos podem ser aplicados em diversos tipos de análises. Nesta seção, será mostrado um exemplo para cada um deles.

### 9.3.1 Simuladores bidimensionais

#### 9.3.1.1 Simuladores monofásicos - Cone de gás em poço horizontal

Com os simuladores monofásicos é possível simular o fenômeno do cone de gás. Um caso de extração em vazão crítica é apresentado em ambos os simuladores (escoamento potencial e difusivo). O simulador difusivo leva em consideração a compressibilidade do sistema óleo-rocha. Para evidenciar os efeitos da compressibilidade, exagerou-se o valor de  $c_t$ , refletido no valor de  $\eta$  utilizado.

Dados:

- **Propriedades do líquido:**  $\rho = 1255,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,51 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ;  $K = 0,0335 \text{ m/s}$ ;  
 $\eta = 0,0335 \text{ Pa}^{-1}$
- **Vazão:**  $-1,4202 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$
- **Tempo final:**  $10000 \text{ s}$ ;  $\Delta t = 1 \text{ s}$

A Fig. 9.18 apresenta a comparação entre o deslocamento do nó central ao longo do tempo para os dois casos. É perceptível que, apesar de convergirem para a posição de estabilidade em tempos diferentes, ambos os casos convergem para a mesma solução, como previsto. As sucessivas imagens do gradiente de potencial para o caso difusivo podem ser comparadas com as do escoamento potencial (Fig. 9.19).

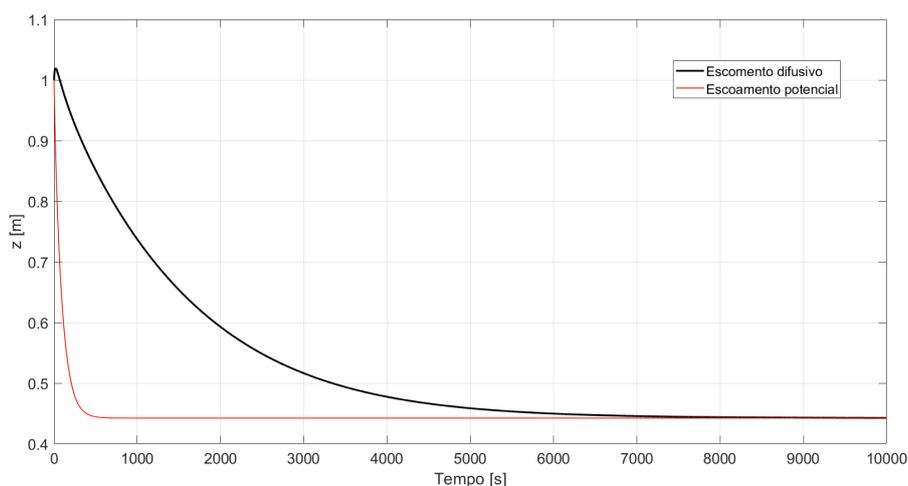


Figura 9.18: Comparação entre os deslocamentos do nó central da interface nos escoamentos potencial e difusivo

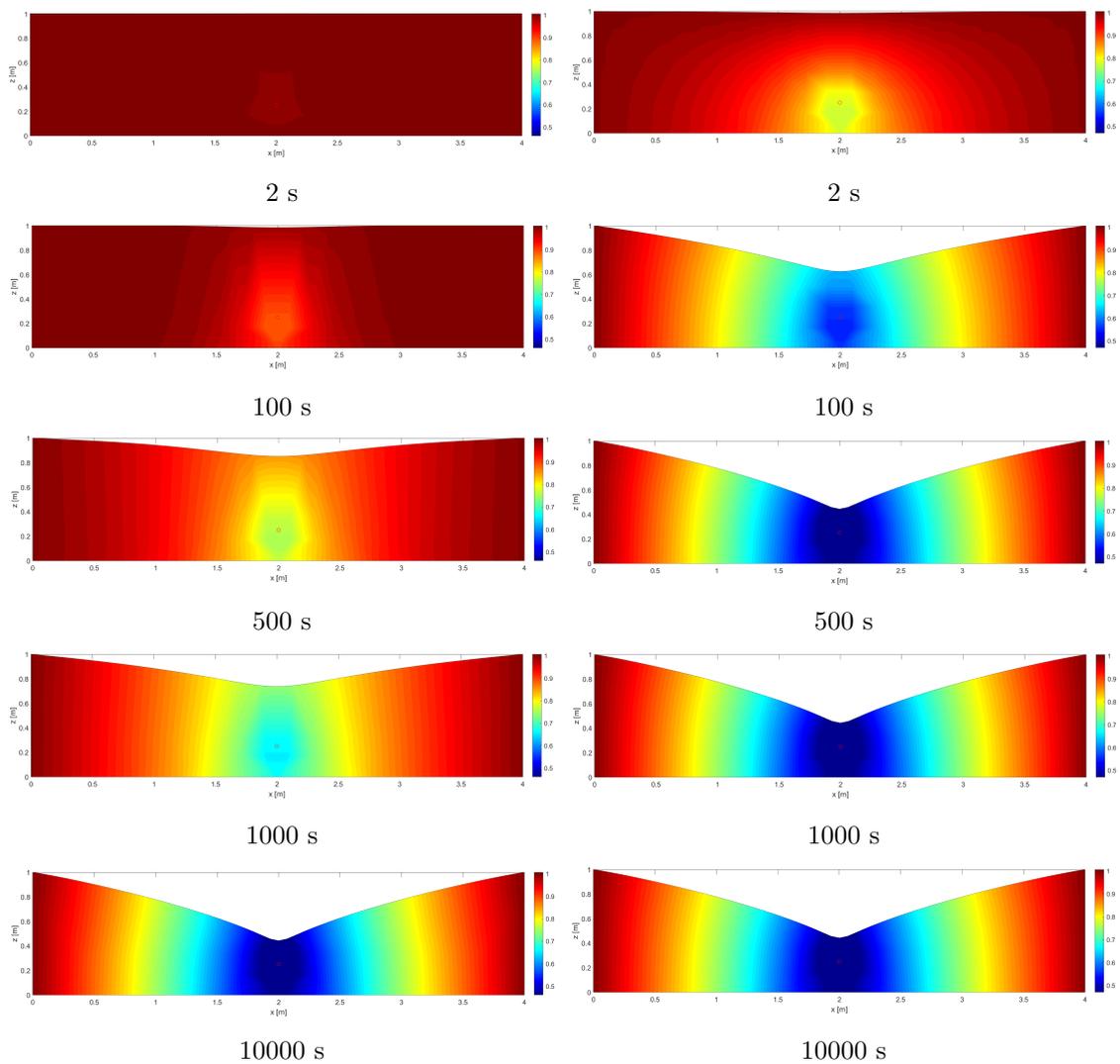


Figura 9.19: Comparação da propagação do potencial. Coluna esquerda: escoamento difusivo. Coluna direita: escoamento potencial

Conforme previsto, os gradientes de potencial no domínio quando a interface atinge a posição de estabilidade são exatamente os mesmos para ambos os modelos, difusivo e potencial. Apesar da vazão utilizada ter sido previamente determinada como sendo a crítica, note que a superfície livre estabilizada ainda se localiza a uma certa distância do poço, conforme previsão teórica.

A Fig. 9.20 mostra o fluxo de líquido que entra pelos limites laterais.

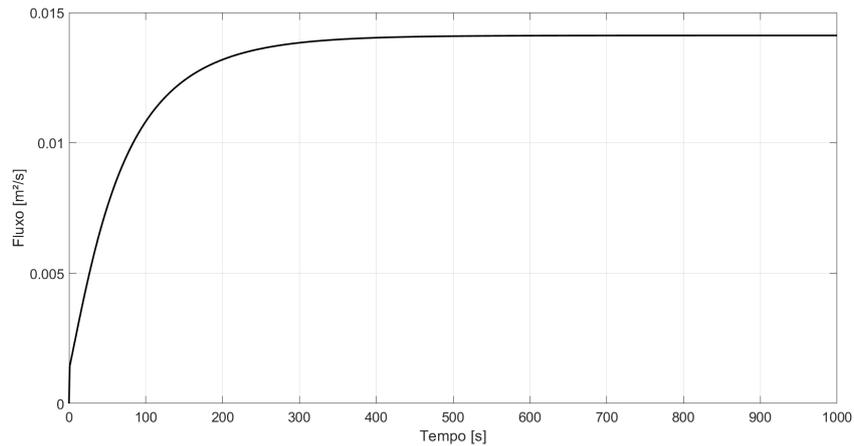


Figura 9.20: Fluxo que entra no domínio simulado - escoamento potencial

### 9.3.1.2 Simulador bifásico - Cone de gás em poço horizontal

Com o simulador bifásico é possível simular o fenômeno do cone de gás bem como o cone de água. A primeira análise realizada com este simulador foi uma comparação entre os resultados de dois casos de extração de óleo sujeitos a cone de gás. A única variante entre os dois casos é a altura da zona de gás, que foi igual à da zona de líquido no primeiro caso e 5 vezes esta altura no segundo caso.

Dados:

- **Propriedades do líquido:**  $\rho = 1245,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,400 \text{ Pa.s}$ ;  $K = 5,7250 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
- **Propriedades do gás:**  $\rho = 1,084 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 18,2 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$
- **Vazão:**  $-2,8946 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
- **Tempo final:**  $3600 \text{ s}$ ;  $\Delta t = 1 \text{ s}$

As figuras 9.21a e 9.21b mostram o gradiente de potencial em cada fluido no tempo final, com interface estável. Pode-se perceber pela escala que a pressão na zona de líquido não se altera com a altura da zona de gás simulada, como era de se esperar.

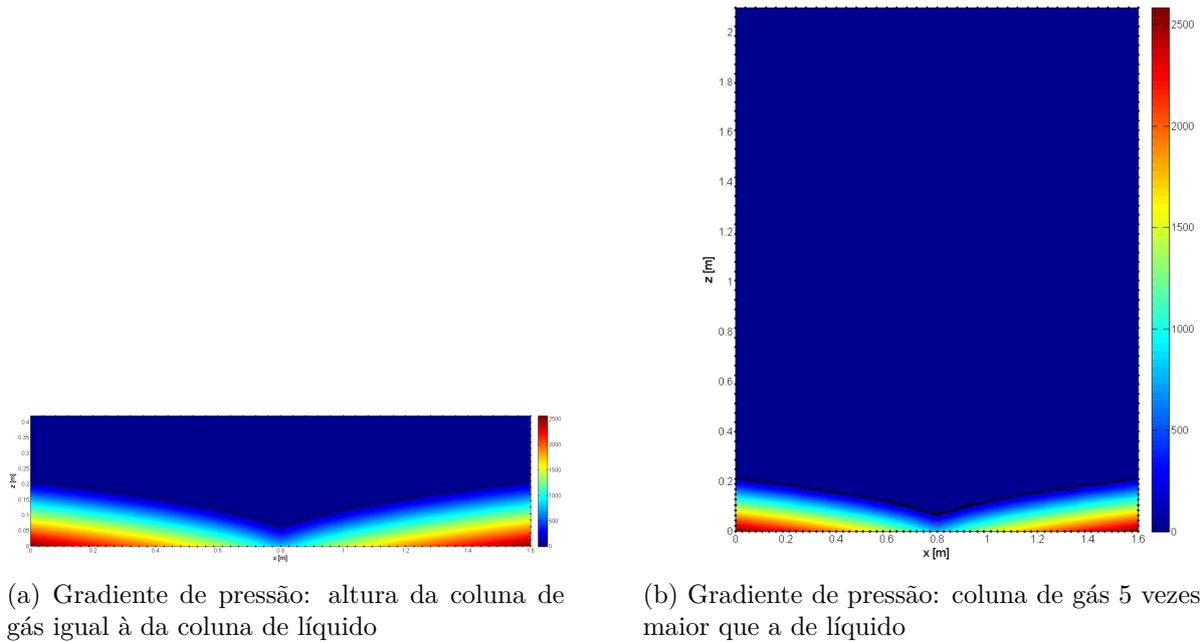


Figura 9.21: Cone de gás no simulador bifásico, com diferentes alturas de coluna de gás

O fluxo de líquido que entra no domínio pelos limites laterais também não se altera, como pode ser visto na Fig. 9.22. É possível perceber que a altura da coluna de gás não influencia nos resultados da simulação. De fato, isto permite que se utilize a formulação de domínio único para simular o fenômeno do cone de gás sem prejuízo nos resultados referentes ao líquido. Da Fig. 9.22 pode-se inferir que a interface alcançou o estado estacionário, pois não há alteração no fluxo de fluidos que entra em cada sub-região.

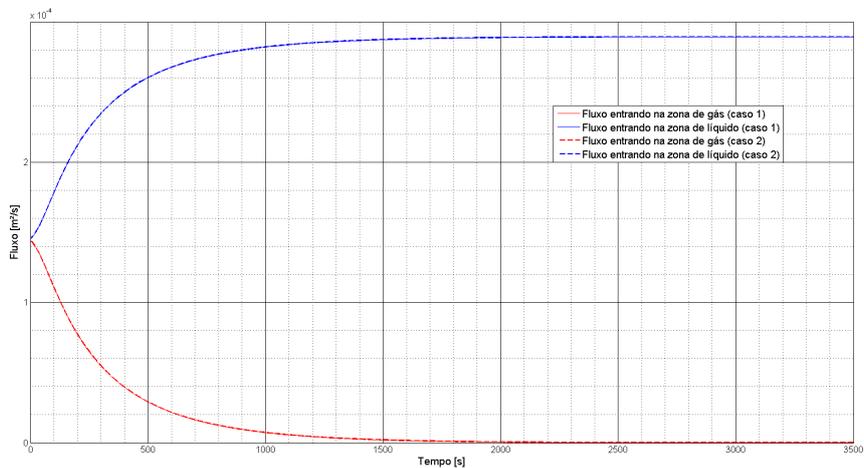


Figura 9.22: Fluxo que entra em cada sub-região

### 9.3.1.3 Simulador bifásico - Cone de água em poço horizontal

A segunda análise realizada com o simulador bifásico foi uma comparação qualitativa entre os gradientes de potencial e de pressão no domínio e seu comportamento na interface. O cenário é uma extração de óleo sujeita à ocorrência do cone de água.

Dados:

- **Propriedades do líquido na sub-região inferior:**  $\rho = 1025,1817 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,0003 \text{ Pa.s}$ ;  $k = 1 \text{ darcy}$
- **Propriedades do líquido na sub-região superior:**  $\rho = 688,7939 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,003 \text{ Pa.s}$
- **Vazão:**  $-1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
- **Tempo final:**  $864000 \text{ s}$  (10 dias);  $\Delta t = 100 \text{ s}$

A Fig. 9.23 mostra os gradientes de *potencial* em cada sub-região em um determinado instante de tempo. A Fig. 9.24 mostra os gradientes de *pressão* no mesmo instante de tempo.

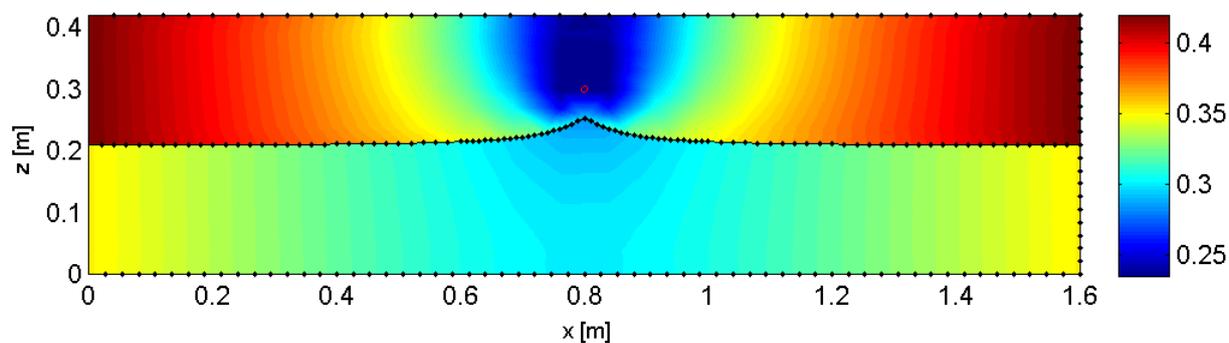


Figura 9.23: Gradientes de potencial no instante  $t$

Pode-se perceber as condições de compatibilidade na interface: a pressão é contínua ao longo de todo o domínio. O potencial dá um salto na interface entre os fluidos.

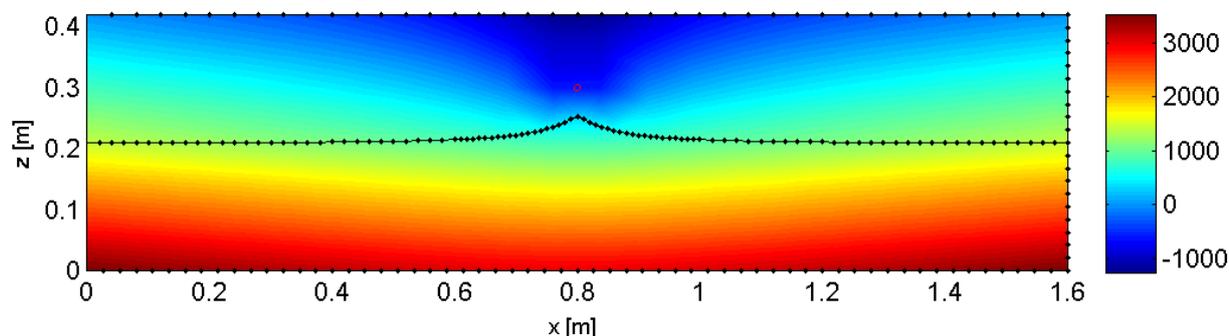


Figura 9.24: Gradientes de pressão no instante  $t$

## 9.3.2 Simuladores axissimétricos

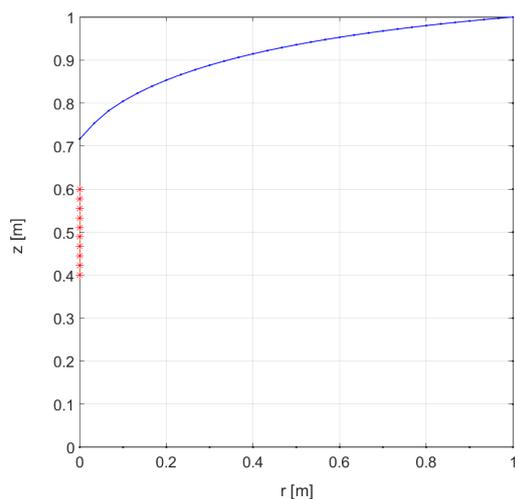
### 9.3.2.1 Simulador monofásico - Cone de gás em poço vertical

O simulador em domínio axissimétrico monofásico permite simular o fenômeno do cone de gás em poço vertical. É apresentada uma comparação entre os resultados obtidos com o simulador implementado neste trabalho e os resultados obtidos por Nascimento (2021) utilizando formulação Isogeométrica do MEC.

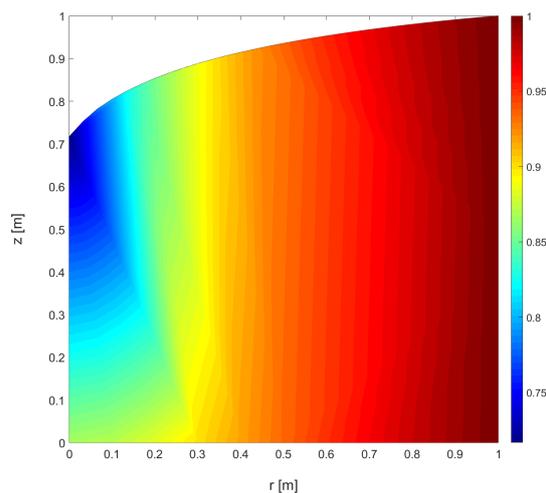
Dados:

- **Propriedades do líquido:**  $\rho = 1245,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,400 \text{ Pa.s}$ ;  $K = 5,7250 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
- **Vazão:**  $-5,697 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
- **Tempo final:**  $250 \text{ s}$ ;  $\Delta t = 0,5 \text{ s}$
- **Distribuição do poço:**  $z = 0,4 \text{ m}$  a  $z = 0,6 \text{ m}$  em 10 sumidouros pontuais

As figuras 9.25a e 9.25b mostram a discretização do contorno do caso simulado e o gradiente de potencial em regime estacionário.



(a) Geometria do caso simulado



(b) Gradiente de potencial

Figura 9.25: Geometria simulada e gradiente de potencial obtido

Nas figuras 9.26 e 9.27 são apresentados o deslocamento da ponta do cone ao longo do tempo e o fluxo que entra na região simulada, respectivamente.

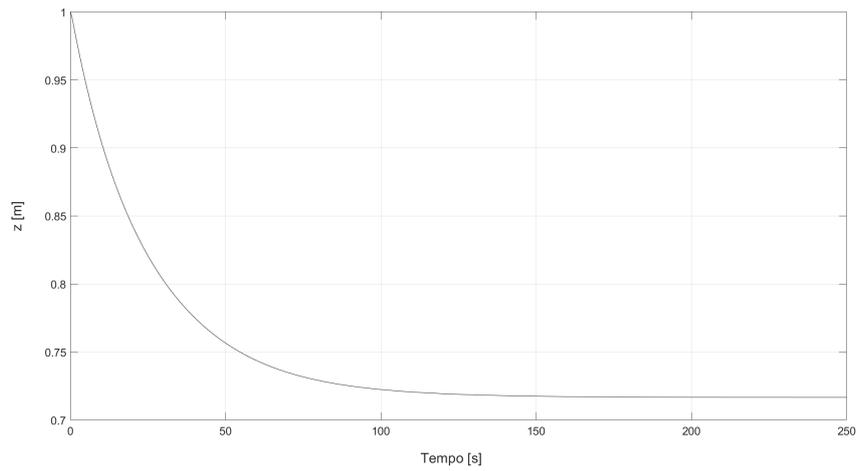


Figura 9.26: Deslocamento do nó central da interface ao longo do tempo de simulação

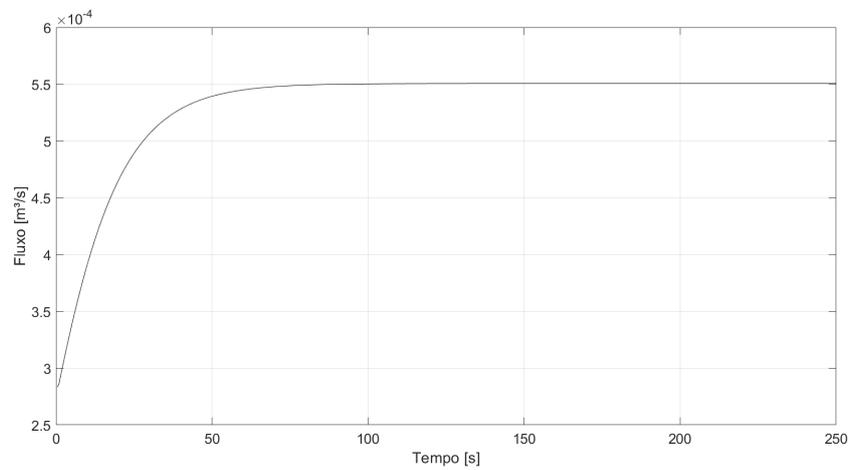


Figura 9.27: Fluxo que entra no domínio simulado ao longo do tempo

A Fig. 9.28 traz uma comparação dos resultados obtidos para o deslocamento da ponta do cone ao longo do tempo entre a formulação Isogeométrica do MEC, desenvolvida no trabalho de Nascimento (2021), e a formulação desenvolvida no presente trabalho. Esta figura mostra que ambas as formulações convergem para os mesmos resultados, embora a formulação Isogeométrica o faça de forma mais lenta.

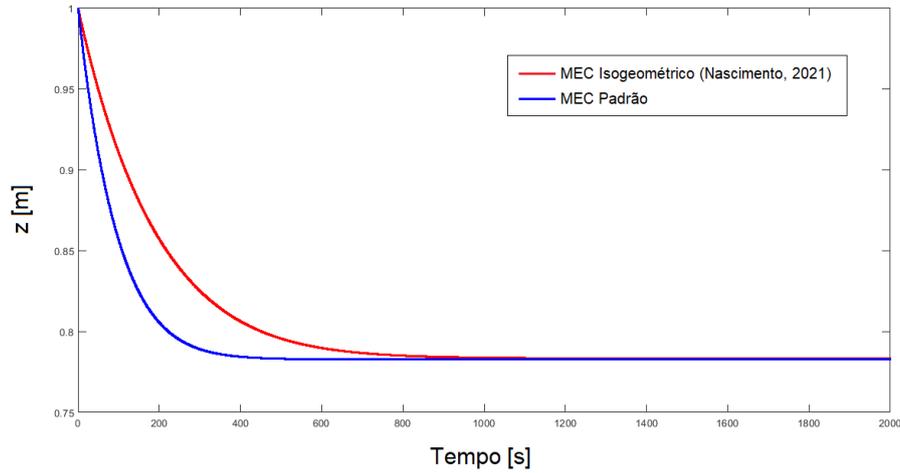


Figura 9.28: Comparação entre resultados com MEC Isogeométrico e o presente trabalho - deslocamento da ponta do cone ao longo do tempo (adaptado de Nascimento (2021))

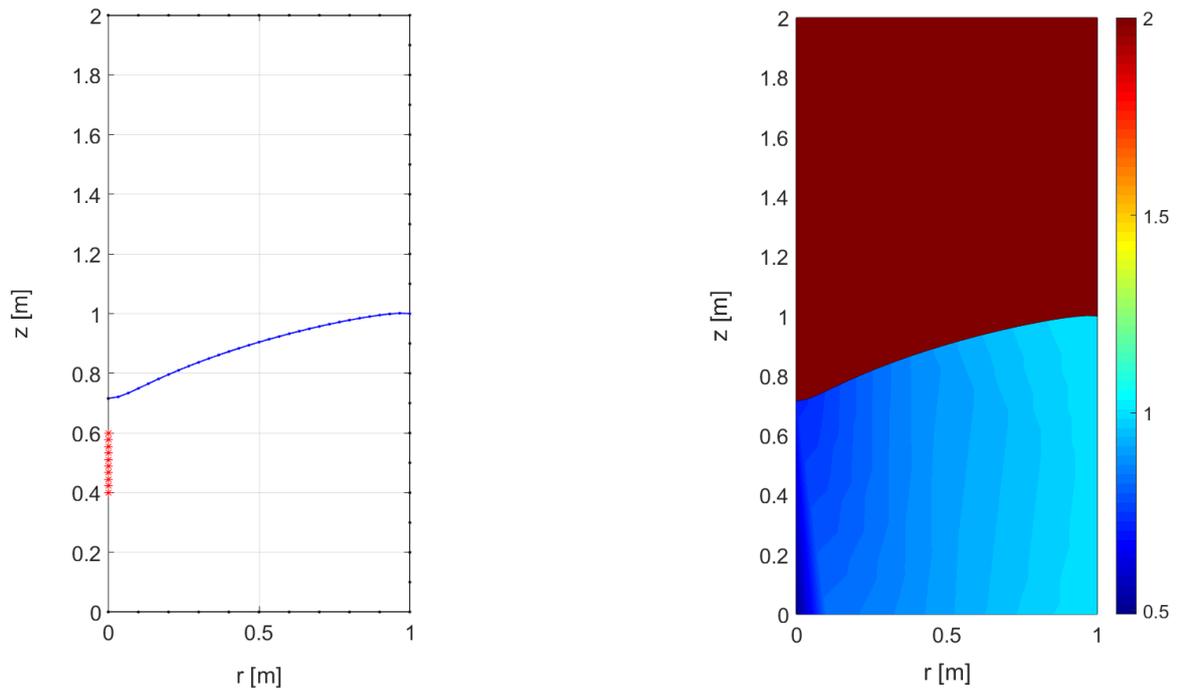
### 9.3.2.2 Simulador bifásico - Cone de gás em poço vertical

O simulador em domínio axissimétrico bifásico permite simular os fenômenos dos cones de água e de gás em poço vertical. A seguir, são apresentados os resultados de um cenário de extração de óleo sujeita à ocorrência de cone de gás.

Dados:

- **Propriedades do líquido:**  $\rho = 1245,000 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,400 \text{ Pa.s}$ ;  $K = 5,7250 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
- **Propriedades do gás:**  $\rho = 1,084 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 18,2 \times 10^{-6} \text{ Pa.s}$
- **Vazão:**  $-4,000 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$
- **Tempo final:**  $1000 \text{ s}$ ;  $\Delta t = 0,5 \text{ s}$
- **Distribuição do poço:**  $z = 0,4 \text{ m}$  a  $z = 0,6 \text{ m}$  em 10 sumidouros pontuais

A Fig. 9.29a mostra a geometria do problema com a interface já deformada e a discretização utilizada. A Fig. 9.29b mostra o gradiente de potencial obtido.



(a) Geometria final do problema com a interface em posição estável

(b) Gradiente de potencial em condição de interface estável

Figura 9.29: Geometria simulada e gradiente de potencial obtido

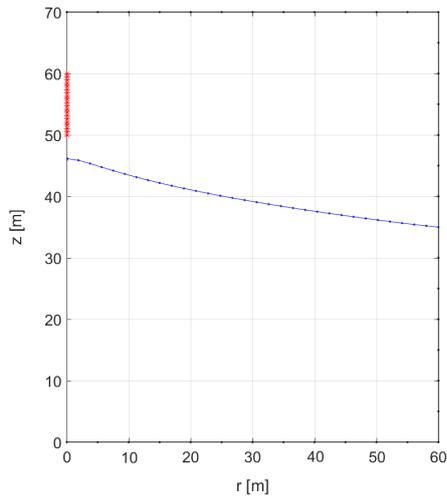
### 9.3.2.3 Simulador bifásico - Cone de água em poço vertical

A segunda análise com o simulador bifásico em domínio axissimétrico envolve um cenário de extração de óleo sujeita à ocorrência do cone de água.

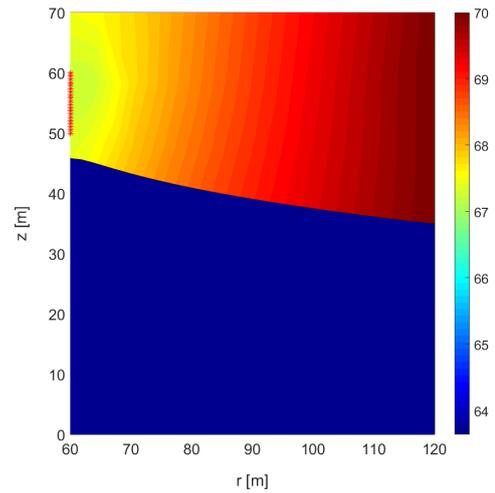
Dados:

- **Propriedades do líquido na sub-região inferior:**  $\rho = 1029,51 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,00052 \text{ Pa.s}$ ;  $k = 60 \times 10^{-3} \text{ darcy}$
- **Propriedades do líquido na sub-região superior:**  $\rho = 849,62 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu = 0,0012 \text{ Pa.s}$
- **Vazão:**  $-1,503 \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$
- **Tempo final:** 2000 dias  $\Delta t = 1 \text{ dia}$
- **Distribuição do poço:**  $z = 50 \text{ m}$  a  $z = 60 \text{ m}$  em 20 sumidouros pontuais

A geometria do problema com a interface já deformada, bem como a discretização utilizada são apresentadas na Fig. 9.30a. A Fig. 9.30b mostra o gradiente de potencial obtido para o caso.



(a) Geometria final do problema com a interface em posição estável



(b) Gradiente de potencial em condição de interface estável

Figura 9.30: Geometria simulada e gradiente de potencial obtido

#### 9.3.2.4 Problema de *Quick Drawdown*

O problema de *Quick Drawdown*, cujas condições de contorno foram apresentadas na Seção 3.5.3, vem sendo utilizado como benchmark para comparação de simulações de escoamentos radiais. Este problema foi, então, escolhido para a comparação de resultados do simulador em domínio axissimétrico, por contar tanto com resultados experimentais quanto numéricos publicados. Os parâmetros da simulação são mostrados no trabalho de Hall (1955) e listados a seguir com a nomenclatura utilizada na Seção 3.5.3.

Dados:

- Condutividade hidráulica  $K = 4,051 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
- Raio do poço  $r_p = 0,122 \text{ m}$
- Raio externo  $r_e = 1,951 \text{ m}$
- Altura da água no poço  $H_a = 0,305 \text{ m}$
- Altura do nível externo da água  $H = 1,22 \text{ m}$

A Fig. 9.31 mostra a geometria do problema com a interface já deformada e a discretização utilizada. A Fig. 9.32 compara o resultado obtido com os disponíveis na literatura.

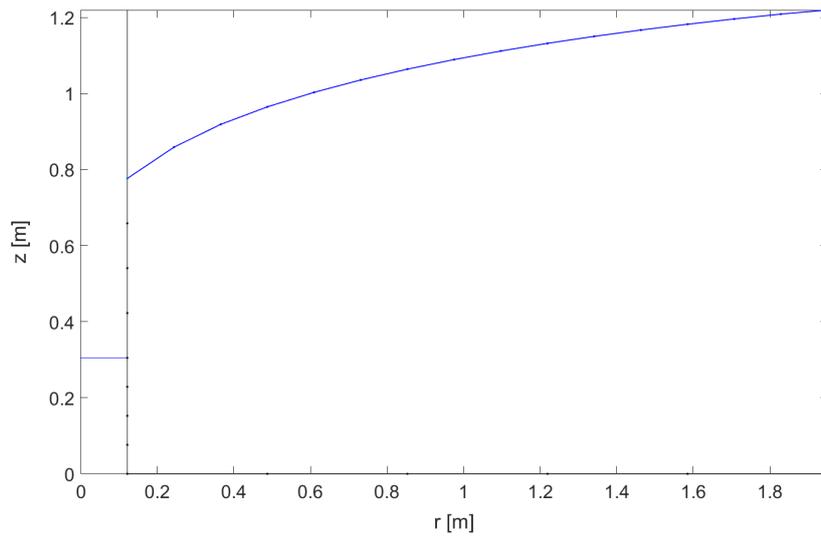


Figura 9.31: Problema de *Quick Drawdown* - geometria

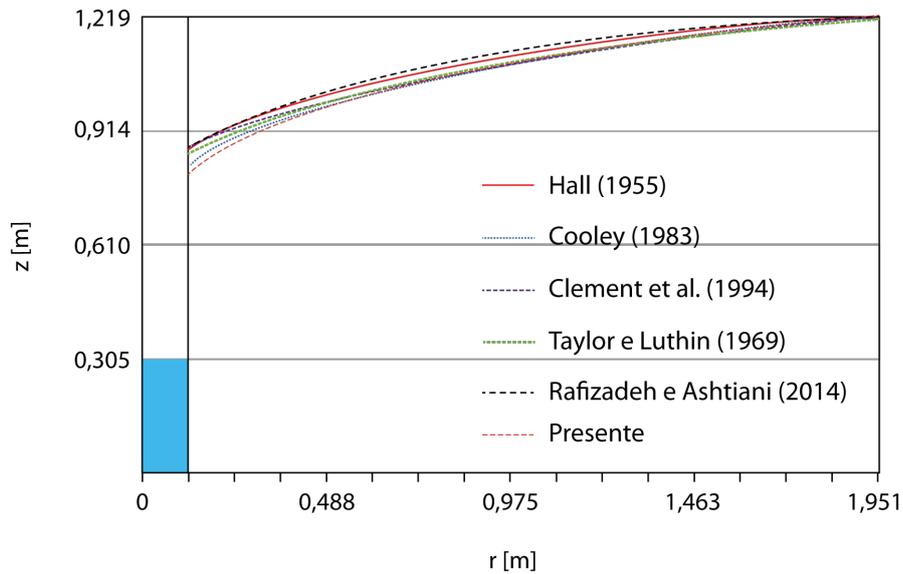


Figura 9.32: Problema de *Quick Drawdown* - comparação com resultados disponíveis na literatura

Os resultados obtidos com a presente formulação são compatíveis com os disponíveis na literatura. Uma análise mais aprofundada dos resultados, com avaliação do erro RMS não é possível, uma vez que os dados numéricos das curvas não foram disponibilizados pelos autores das publicações comparadas.

### 9.3.2.5 Análise realizada: estudo para otimização da vazão de produção

O simulador desenvolvido foi usado na análise do escoamento em regime supercrítico em poço horizontal, com o auxílio de um sistema de controle. Conforme explicado no Capítulo 2, no regime supercrítico, a interface colapsa, tocando o poço antes de atingir a condição de equilíbrio. A Fig. 9.33 e a Tabela 9.3 apresentam as características do reservatório para as simulações.

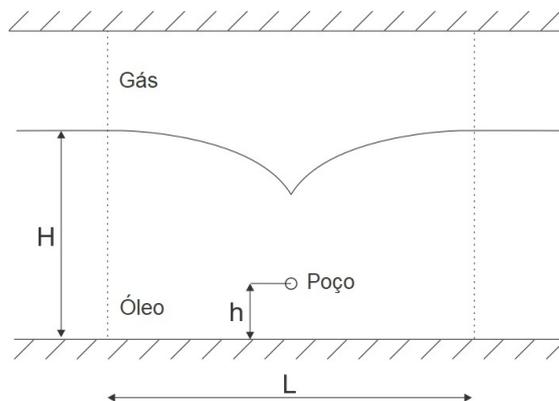


Figura 9.33: Reservatório simulado.

Tabela 9.3: Parâmetros do reservatório simulado

Parâmetro	Valor
Largura (L)	60 m
Altura (H)	30 m
Altura do poço (h)	7,5 m
Raio do poço	0,075 m
Densidade do óleo	714 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade do óleo	0,00111 Pa s
Permeabilidade	1 × 10 <sup>-12</sup> m (1 darcy)
Vazão crítica	1,508 × 10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> /s

Primeiramente, foram simulados escoamentos em vazões subcríticas, partindo de zero, com incrementos de 5% até atingir 100% da vazão crítica, previamente determinada (Fig. 9.34).

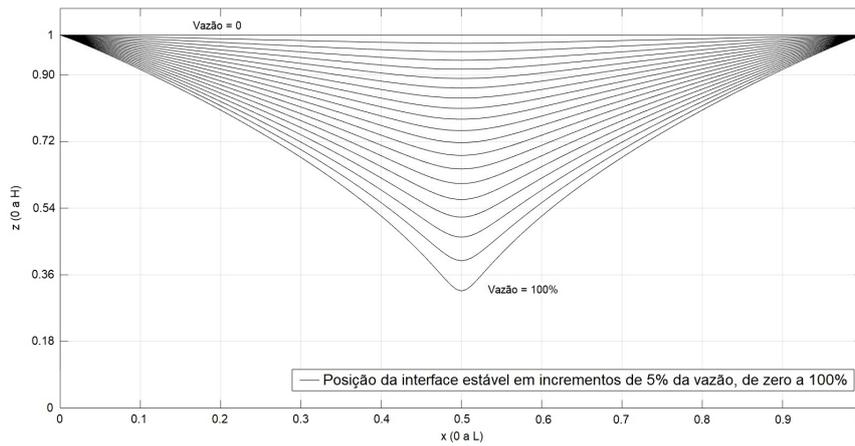


Figura 9.34: Interface estável em incrementos de 5% da vazão crítica.

Como segundo passo, sobre o código do simulador desenvolvido, foram aplicados mecanismos de controle descritos no trabalho de Limaverde Filho et al. (2016) (cujo detalhamento está fora do escopo desta tese), para estabilizar artificialmente a interface na região *instável*. Ao reunir as informações de todas as vazões simuladas (subcríticas, crítica e supercríticas artificialmente estabilizadas) e suas respectivas coordenadas do ponto central da interface, foi possível obter uma curva de profundidade do cone de gás versus vazão, mostrada na Fig. 9.35. A linha pontilhada mostra a previsão do modelo não-linear desenvolvido (Fortaleza et al., 2019), com base em Limaverde Filho et al. (2016).

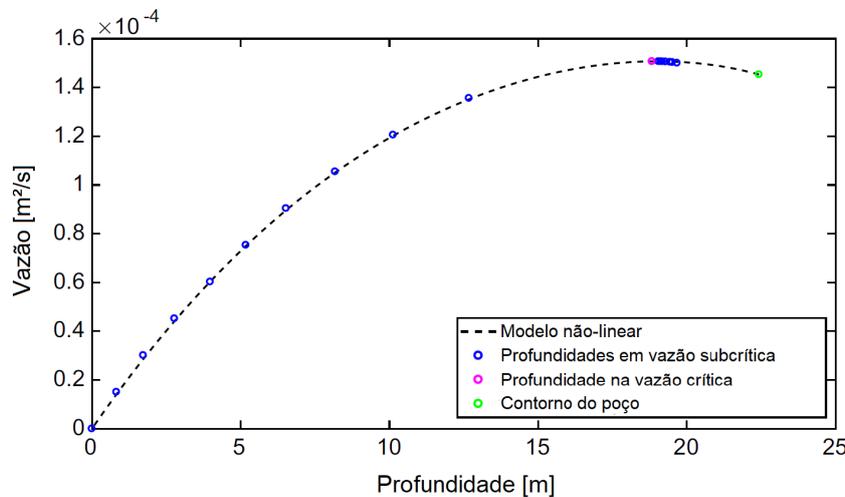


Figura 9.35: Profundidade do cone de gás versus vazão.

Este resultado mostra que, apesar dos esforços em estabilizar artificialmente a interface em uma região instável, as vazões obtidas não são superiores à vazão crítica. Isso pode ser observado no gráfico, onde o ponto de máximo da curva (ou seja, a maior vazão obtida) é relativo à própria vazão crítica.

# Capítulo 10

## Conclusões

Este trabalho apresentou os modelos matemáticos utilizados nos simuladores desenvolvidos para a representação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais e verticais. As características principais a respeito de tais fenômenos foram reunidas e analisadas. A partir dos modelos matemáticos propostos, as formulações do Método dos Elementos de Contorno foram desenvolvidas para o estudo dos fenômenos, bem como foram apresentadas as condições de contorno pertinentes.

Diversas análises a respeito do problema de escoamentos em meios porosos com fronteira móvel mostraram que o Método dos Elementos de Contorno é uma ferramenta adequada para o estudo proposto. Ficou evidenciado que este método é eficaz no tratamento de problemas desta natureza, sobretudo para aqueles onde pode ser adotada a simplificação de interface abrupta entre os fluidos, como é o caso dos cones em interface entre líquido e gás.

Um conjunto de simuladores foi desenvolvido seguindo as bases teóricas aqui apresentadas:

- O primeiro simula escoamentos monofásicos, para utilização no estudo do cone de gás em poços de petróleo horizontais em produção sub-crítica.
- O segundo simula escoamentos bifásicos para utilização tanto no estudo do cone de água quanto no estudo do cone de gás em poços horizontais, em ambos os regimes de produção: sub-crítica ou supercrítica. Este simulador utiliza a formulação de sub-regiões do MEC para lidar com um domínio homogêneo por partes.
- O terceiro é um simulador de escoamentos monofásicos considerando fluidos e matriz porosa compressíveis, para utilização no estudo do cone de gás em poços horizontais. Este simulador emprega a formulação do Método da Reciprocidade Dual do MEC para tratar problemas regidos pela equação da difusividade hidráulica.
- O quarto simulador é aplicável a escoamentos monofásicos em domínio axissimétrico, para utilização no estudo do cone de gás em poços de petróleo verticais, em produção sub-crítica.
- Finalmente, o quinto simula escoamentos bifásicos em domínio axissimétrico, para utilização tanto no estudo do cone de água quanto no estudo do cone de gás em poços verticais, em

regime de produção sub-crítica e supercrítica. Este simulador também utiliza a formulação de sub-regiões apresentada.

A montagem das matrizes de influência  $H$  e  $G$  para os casos de escoamento potencial bidimensional com permeabilidade isotrópica foi feita utilizando o procedimento de integração analítica de seus elementos. Os simuladores foram comparados satisfatoriamente com relação a soluções analíticas e/ou numéricas disponíveis.

O conjunto de simuladores desenvolvidos para o estudo de escoamentos em reservatórios de petróleo com poços produtores horizontais longos foi efetivamente empregado na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás. Seu principal uso ocorreu em paralelo a experimentos de controle e automação no Laboratório de Automação Offshore da Universidade de Brasília utilizando células de Hele-Shaw, os quais visavam a otimização da produção de óleo. Neste ambiente, o conjunto de simuladores tornou-se a principal ferramenta para a determinação da vazão crítica e predição do comportamento da interface entre fluidos, comprovando sua utilidade em pesquisas aplicadas de engenharia. O conjunto de simuladores desenvolvidos para o estudo de escoamentos induzidos por poços verticais vislumbra a mesma aplicação prática.

## 10.1 Publicações realizadas

O trabalho desenvolvido nesta tese permitiu o desenvolvimento, de forma direta ou indireta, dos seguintes artigos apresentados em conferências e publicados em periódicos científicos (em ordem cronológica):

- **GONTIJO, G. S. V. ; ALBUQUERQUE, E. L. ; FORTALEZA, E. L. . Representation of a Production Well Using a Series of Point Sinks in 2D BEM Simulations.** In: XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2018, Paris/Compiègne. Proceedings of XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Compiègne: Adnan Ibrahimbegovic and Paulo de Mattos Pimenta, 2018. p. 241-244. (Gontijo et al., 2018)
- FORTALEZA, EUGÊNIO L. F. ; LIMAVERDE FILHO, JOSÉ O. A. ; **GONTIJO, Gustavo S. V. ; ALBUQUERQUE, ÉDER L. ; SIMÕES, RAFAEL D. P. ; SOARES, MATHEUS M. ; MIRANDA, MARCO E. R. ; ABADE, GUSTAVO C. . Analytical, numerical and experimental study of gas coning on horizontal wells.** JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES AND ENGINEERING (ONLINE), v. 41, p. 141, 2019. (Fortaleza et al., 2019)
- NASCIMENTO, L. G. ; **GONTIJO, G. S. V. ; CAMPOS, L. S. ; ALBUQUERQUE, E. L. ; TREVELYAN, J. . A Reservoir Simulator Based on Formulations of Isogeometric Boundary Elements.** In: XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2019, Natal, Brazil. Proceedings of XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2019. (Nascimento et al., 2019)

- MIRANDA, MARCO E. R. ; FORTALEZA, EUGÊNIO L. F. ; **GONTIJO, Gustavo S. V.** ; ABADE, GUSTAVO C. ; MUNERATO, F. P. ; LIMAVERDE FILHO, J. O. A. . **Analysis of the viscosity ratio and the influence of the diffuse interface between water and oil.** In: Rio Oil & Gas Expo and Conference 2020, 2020, Rio de Janeiro. Trabalhos técnicos da Rio Oil & Gas 2020: Technical Papers. Rio de Janeiro: IBP, 2020. v. 20. p. 82-83. (Miranda et al., 2020)
- NASCIMENTO, LÚCIO G. ; **GONTIJO, G. S. V.** ; ALBUQUERQUE, ÉDER L. ; CAMPOS, LUCAS S. ; TREVELYAN, JON ; FORTALEZA, E. L. F. . **A well simulator for homogeneous reservoirs based on formulations of the isogeometric boundary element method.** JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES AND ENGINEERING (ONLINE), v. 43, p. 206, 2021. (Nascimento et al., 2021)

## 10.2 Sugestões de trabalhos futuros

Para a continuação desta pesquisa são sugeridos os seguintes tópicos como trabalhos futuros:

1. A extensão da formulação axissimétrica para permeabilidade ortotrópica do meio poroso, característica de ocorrência frequente nas rochas sedimentares;
2. A extensão das formulações para o tratamento de meios porosos com permeabilidade não homogênea;
3. A adoção de heterogeneidades como a permeabilidade variável no espaço em função da pressão;
4. A inserção do tratamento de poços injetores;
5. O desenvolvimento das formulações para o tratamento de domínios tridimensionais.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- T. H. Ahmed. *Reservoir Engineering Handbook*. Gulf Professional Publishing, 4 ed., 2010. ISBN 978-1-85617-803-7.
- E. L. Albuquerque. Introdução ao método dos elementos de contorno. Apostila - Universidade de Brasília, 2013.
- J. J. Azar e G. R. Samuel. *Drilling engineering*. PenWell, 1 ed., 2007. ISBN 978-1-59370-072-0.
- A. A. Bakr. *The boundary integral equation method in axisymmetric stress analysis problems*. Springer-Verlag, 1 ed., 1986. ISBN 0-387-16030-2.
- P. K. Banerjee. *Boundary element methods in engineering*. McGraw-Hill, 2 ed., 1994. ISBN 0-07-707769-5.
- J. Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier, 1972.
- A. A. Becker. *The boundary element method in engineering: a complete course*. McGraw-Hill, 1 ed., 1992. ISBN 0-07-707439-4.
- T. Belytschko, Y. Y. Lu, e L. Gu. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256, 1994.
- L. M. Braga. O método dos elementos de contorno rápido com expansão em multipólos aplicado a problemas de condução de calor. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2012.
- C. A. Brebbia e J. Dominguez. *Boundary elements - an introductory course*. WIT Press, 2 ed., 1992. ISBN 1-85312-160-6.
- C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, e L. C. Wrobel. *Boundary element techniques - theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, 1 ed., 1984. ISBN 978-3-642-48862-7.
- E. K. Bruch. *The boundary element method for groundwater flow*. Springer-Verlag, 1 ed., 1991. ISBN 978-3-540-54407-4.
- H. F. Bucher, L. C. Wrobel, W. J. Mansur, e C. Magluta. On the block wavelet transform applied to the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(6):571–581, 2004.
- J. C. Calhoun Jr. *Fundamentals of reservoir engineering*. University of Oklahoma Press, 2 ed., 1953.

- L. S. Campos. Método dos elementos de contorno isogeométricos acelerado pela aproximação cruzada adaptativa. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2016.
- Z. Chen e Y. Zhang. Well flow models for various numerical methods. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 6(3):375–38, 2009.
- T. P. Clement, W. R. Wise, e F. J. Molz. A physically based, two-dimensional, finite-difference algorithm for modeling variably saturated flow. *Journal of Hydrology*, 161(1):71–90, 1994.
- R. L. Cooley. Some new procedures for numerical solution of variably saturated flow problems. *Water Resources Research*, 19(5):1271–1285, 1983.
- L. M. I. Córdoba. Simulação 2d e controle de cone de água. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2013.
- L. P. Dake. *Fundamentals of reservoir engineering*. Elsevier Science B. V., 1 ed., 1978. ISBN 0-444-41830-X.
- H. Darcy. *Les fontaines publiques de la Ville de Dijon*. Dalmont, 1 ed., 1856.
- Éder Lima de Albuquerque, P. Sollero, e M. H. Aliabadi. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 39:1405–1422, 2002.
- J. Dominguez. *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications, 1 ed., 1993. ISBN 1-85312-258-0.
- E. L. F. Fortaleza, J. O. A. Limaverde Filho, G. S. V. Gontijo, Éder Lima de Albuquerque, R. D. P. Simões, M. M. Soares, M. E. R. Miranda, e G. C. Abade. Analytical, numerical and experimental study of gas coning on horizontal wells. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 41:141:1–141:16, 2019. doi: 10.1007/s40430-019-1643-9.
- A. F. Galvis e P. Sollero. 2d analysis of intergranular dynamic crack propagation in polycrystalline materials: a multiscale cohesive zone model and dual reciprocity boundary elements. *Computers and Structures*, 164:1–14, 2016. doi: 10.1016/j.compstruc.2015.11.004.
- A. F. Galvis, R. Q. Rodríguez, e P. Sollero. Analysis of three-dimensional hexagonal and cubic polycrystals using the boundary element method. *Mechanics of Materials*, 117:58–72, 2017. doi: 10.1016/j.mechmat.2017.10.009.
- A. F. Galvis, R. Q. Rodríguez, e P. Sollero. Dynamic analysis of three-dimensional polycrystalline materials using the boundary element method. *Computers and Structures*, 200:11–20, 2018. doi: 10.1016/j.mechmat.2017.10.009.
- A. F. Galvis, P. A. Santos-Flórez, P. Sollero, M. de Koning, e L. C. Wrobel. Multiscale model of the role of grain boundary structures in the dynamic intergranular failure of polycrystal aggregates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 362, 2020. doi: 10.1016/j.cma.2020.112868.

- A. F. Galvis, D. M. Prada, L. S. Moura, C. Zavaglia, J. M. Foster, P. Sollero, e L. C. Wrobel. Besle: Boundary element software for 3d linear elasticity. *Computer Physics Communications*, 265, 2021. doi: 10.1016/j.cpc.2021.108009.
- X.-W. Gao. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(10):905–916, 2002.
- X.-W. Gao, C. Zhang, e L. Guo. Boundary-only element method for 2d and 3d nonlinear and nonhomogeneous elastic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(12):974–982, 2007.
- G. S. V. Gontijo. Aplicação do método dos elementos de contorno na simulação dos fenômenos dos cones de água e de gás em poços de petróleo horizontais. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2015.
- G. S. V. Gontijo, E. L. Albuquerque, e E. L. F. Fortaleza. Representation of a production well using a series of point sinks in 2d bem simulations. In *CILAMCE 2018 Proceedings of XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, pages 241–244. Adnan Ibrahimbegovic and Paulo de Mattos Pimenta, 2018. ISBN 978-2-9565961-0-3.
- W. Hackbusch. *Hierarchical Matrices: Algorithms and Analysis*. Springer, 1 ed., 2015. ISBN 978-3-662-47323-8.
- H. P. Hall. An investigation of steady flow toward a gravity well. *La Houille Blanche*, 41(1):8–35, 1955. doi: 10.1051/lhb/1955022.
- G. C. Hocking e H. Zhang. Coning during withdrawal from two fluids of different density in a porous medium. *Journal of Engineering Mathematics*, 65(2):101–109, 2009. doi: 10.1007/s10665-009-9267-1.
- J.-D. Jansen. *A systems description of flow through porous media*. Springer, 1 ed., 2013. ISBN 978-3-319-00259-0.
- J. D. Jansen, R. M. Fonseca, S. Kahrobaei, M. M. Siraj, G. M. V. Essen, e P. M. J. V. den Hof. The egg model - a geological ensemble for reservoir simulation. *Geosci Data J*, 1(2):192–195, 2014.
- S. D. Joshi. *Horizontal well technology*. PennWell, 1 ed., 1991. ISBN 0-87814-350-5.
- J. H. Kane. *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*. Prentice-Hall, 1 ed., 1994. ISBN 0-13-086927-9.
- J. H. Kane, B. L. K. Kumar, e S. Saigal. An arbitrary condensing, noncondensing solution strategy for large scale, multi-zone boundary element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79(2):219–244, 1990.
- J. T. Katsikadelis. The analog equation method. a boundary-only integral equation method for nonlinear static and dynamic problems in general bodies. *Theoretical and Applied Mechanics*, pages 13–38, 2002.

- J. T. Katsikadelis. *The boundary element method for engineers and scientists: theory and applications*. Elsevier, 2 ed., 2016. ISBN 978-0-12-804493-3.
- S. Krogstad, K.-A. Lie, O. Møyner, H. M. Nilsen, X. Raynaud, e B. Skaflestad. Mrst-ad - an open-source framework for rapid prototyping and evaluation of reservoir simulation problems. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, 2015. doi: 10.2118/173317-ms.
- K.-A. Lie. *An introduction to reservoir simulation using MATLAB*. SINTEF ICT, 1 ed., 2015.
- K.-A. Lie, S. Krogstad, I. S. Ligaarden, J. R. Natvig, H. M. Nilsen, e B. Skaflestad. Discretisation on complex and polyhedral grids - open source matlab implementation. In *12th European conference on the mathematics of oil recovery*, 2010. doi: 10.3997/2214-4609.20145007.
- J. A. Liggett e P. L.-F. Liu. *The boundary integral equation method for porous media flow*. George Allen and Unwin, 1 ed., 1983. ISBN 0-04-620011-8.
- J. O. A. Limaverde Filho. Aplicação de controle não-linear para veículos marítimos e produção de petróleo. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, 2014.
- J. O. A. Limaverde Filho, L. M. I. Córdoba, e E. L. F. Fortaleza. Identification and nonlinear control strategy for two-dimensional gas coning problem. In *IFAC-PapersOnLine*, 2016. 10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS), Monterey, USA.
- Y. Liu. *Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and applications in engineering*. Cambridge University Press, 1 ed., 2009. ISBN 978-0-511-60504-8.
- S. K. Lucas, J. R. Blake, e A. Kucera. A boundary integral method applied to water coning in oil reservoirs. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 32(3):261–283, 1991. doi: 10.1017/S0334270000006858.
- W. C. Lyons e G. J. Plisga. *Standard handbook of petroleum and natural gas engineering*. Gulf Professional Publishing, 2 ed., 2005. ISBN 0-7506-7785-6.
- W. J. Mansur, F. C. Araújo, e J. E. B. Malaghini. Solution of bem systems of equations via iterative techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1823–1841, 1992.
- M. E. R. Miranda, E. L. F. Fortaleza, G. S. V. Gontijo, G. C. Abade, F. P. Munerato, e J. O. A. Limaverde Filho. Analysis of the viscosity ratio and the influence of the diffuse interface between water and oil. In *Trabalhos técnicos da Rio Oil & Gas 2020: Technical Papers*, pages 82–83. IBP, 2020.
- M. Muskat e R. D. Wyckoff. An approximate theory of water-coning in oil production. *Transactions of the AIME*, 114(01):144–163, 1935. doi: 10.2118/935144-G.
- L. G. Nascimento. Um simulador de reservatório baseado em formulações do método dos elementos de contorno isogeométricos. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, 2021.

- L. G. Nascimento, G. S. V. Gontijo, L. S. Campos, E. L. Albuquerque, e J. Trevelyan. A reservoir simulator based on formulations of isogeometric boundary elements. In *CILAMCE 2019 Proceedings of XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2019.
- L. G. Nascimento, G. S. V. Gontijo, E. L. Albuquerque, L. S. Campos, J. Trevelyan, e E. L. F. Fortaleza. A well simulator for homogeneous reservoirs based on formulations of the isogeometric boundary element method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 43:206:1–206:16, 2021. doi: 10.1007/s40430-021-02924-7.
- S. P. Neuman. Analysis of nonsteady flow with a free surface using the finite element method. *Water Resources Research*, 7(3):611–623, 1971.
- S. P. Neuman e P. A. Whitherspoon. Finite element method of analyzing steady seepage with a free surface. *Water Resources Research*, 6(3):889–897, 1970.
- P. W. Partridge, C. A. Brebbia, e L. C. Wrobel. *The dual reciprocity boundary element method*. Computational Mechanics Publications, 1 ed., 1992. ISBN 1-85132-098-7.
- Petex. *Fundamentals of petroleum*. The University of Texas - Petex, 5 ed., 2011. ISBN 978-0-88698-231-7.
- K. Rafiezadeh e B. Ataie-Ashtiani. Transient free-surface seepage in three-dimensional general anisotropic media by bem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 46:51–66, 2014. doi: 10.1016/j.enganabound.2014.04.025.
- R. H. Rigby e M. H. Aliabadi. Out-of-core solver for large, multi-zone boundary element matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(9):1507–1533, 1995.
- A. J. Rosa, R. S. Carvalho, e J. A. D. Xavier. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. Interciência, 1 ed., 2006. ISBN 85-7193-135-6.
- M. Sameti, F. R. Astaraié, F. Pourfayaz, e A. Kasaeian. Analytical and fdm solutions for anisotropic heat conduction in an orthotropic rectangular. *American Journal of Numerical Analysis*, 2(2):65–68, 2014. doi: 10.12691/ajna-2-2-6.
- A. Satter, G. M. Iqbal, e J. L. Buchwalter. *Practical enhanced reservoir engineering: assisted with simulation software*. PenWell, 1 ed., 2007. ISBN 978-1-59370-056-0.
- V. A. Sokolov. *Petroleum*. University Press of the Pacific, 1 ed., 1972. ISBN 0-89875-725-8.
- SPE. Water and gas coning, 2019. URL [https://petrowiki.spe.org/water\\_and\\_gas\\_coning](https://petrowiki.spe.org/water_and_gas_coning).
- G. S. Taylor e J. N. Luthin. Computer methods for transient analysis of water-table aquifers. *Water Resources Research*, 5(1):144–152, 1969.
- J. E. Thomas. *Fundamentos de engenharia de petróleo*. Interciência, 2 ed., 2004. ISBN 85-7193-099-6.

WSGS. Types of oil and gas traps, 2014. URL <https://www.wsgs.wyo.gov/docs/wsgs-web-traps.pdf>.

H. Zhang, D. A. Barry, e G. C. Hocking. Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer. *Advances in Water Resources*, 22(6):623–632, 1999. doi: 10.1016/j.advwatres.2009.09.002.

H. Zhang, G. C. Hocking, e B. Seymour. Critical and supercritical withdrawal from a two-layer fluid through a line sink in a partially bounded aquifer. *Advances in Water Resources*, 32(12): 1703–1710, 2009.