Universidade de Brasília

Soluções para uma classe de equações elípticas semilineares com não linearidade indefinida

Gabriel de Medeiros Nogueira

Orientador: Dra. Manuela Caetano Martins de Rezende

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 24 de Agosto de 2022

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Soluções para uma classe de equações elípticas semilineares com não linearidade indefinida

Gabriel de Medeiros Nogueira*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 24 de agosto de 2022.

Comissão Examinadora:

Manuela Caetano Martins de Rezende

Profa. Dra. Manuela Caetano Martins de Rezende- MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado– MAT/UnB (Membro)

Sandra Imaculada Moreira Neto

Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto– UEMA (Membro)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

NN778s

Nogueira, Gabriel de Medeiros
Soluções para uma classe de equações elípticas semilineares com não linearidade indefinida / Gabriel de Medeiros Nogueira; orientador Manuela Caetano Martins de Rezende. -- Brasília, 2022.
118 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Problemas indefinidos. 2. Métodos variacionais. 3. Problemas elípticos semilineares. I. de Rezende, Manuela Caetano Martins , orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por sua infinita graça sobre a minha vida. A Ele seja toda honra e glória para todo o sempre. Amém.

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais, Ronaldo e Marluce, por todo apoio, amor e dedicação.

Agradeço a minha querida orientadora, professora Manuela Rezende. Sou grato por seus inúmeros ensinamentos, por sua paciência e dedicação em todos os momentos, por ter acreditado no meu potencial e por sua amizade. Também agradeço ao professor Elves Alves, por suas valiosas contribuições durante a escrita deste trabalho.

Agradeço a minha companheira Gabriela Ferreira por todo o apoio e incentivo durante a graduação e o mestrado.

Agradeço também a todos os amigos que estiveram comigo durante estes dois anos e que, de alguma forma, contribuíram para que eu obtivesse sucesso. Ismael, Caio, Mateus Figueiredo, Kobayashi, Katianny, Rodolfo, Thiago, Felipe Neto, Flávia, Maristela, Jailson, Francisca Cappellesso, Maria Edna, Tharles, Talita, Jonatas Peralta, Henrylla, Wendy, Daniel Abreu e tia Claudia, a vocês meus sinceros agradecimentos.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação, sobretudo aos membros da banca, professor Marcelo Furtado, Sandra Imaculada e Ricardo Ruviaro, cujas sugestões e correções enriqueceram este trabalho.

Meus agradecimentos ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual não teria sido possível concluir meus estudos.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções positivas para uma classe de equações elípticas semilineares com não linearidade indefinida. Mais especificamente, baseados no artigo de Alama e Tarantello (1993), estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \gamma W(x) f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, λ e γ são parâmetros reais, $W \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$ é uma função que muda de sinal em Ω e $f \in C^1(\mathbb{R})$. Com o auxílio de técnicas variacionais e um teorema de bifurcação, estabelecemos a existência, não existência e a multiplicidade de soluções positivas para o problema acima, em função dos parâmetros λ e γ.

Abstract

In this work we study the existence of positive solutions for a class of semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearity. More specifically, based on the article by Alama and Tarantello (1993), we study the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \gamma W(x) f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, λ and γ are real parameters, $W \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$ is a function that changes sign in Ω and $f \in C^1(\mathbb{R})$. With the aid of variational techniques and a bifurcation theorem, we establish the existence, non-existence and multiplicity of positive solutions for the above problem in function of the parameters λ and γ.

Conteúdo

Notações

$L(X,Y)$	Espaço das aplicações lineares contínuas de X em Y
$C^1(X,\mathbb{R})$	Espaço dos funcionais lineares de classe C^1 de X em $\mathbb{R}$
$C(X,Y)$	Espaço das funções contínuas de X em Y
$C^k(\overline{\Omega})$	Espaço das funções de classe C^k em $\overline{\Omega}$
$C_0^k(\overline{\Omega})$	Espaço das funções de classe C^k em $\overline{\Omega}$ e com suporte compacto em Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	Espaço das funções de classe C^∞ com suporte compacto em Ω
$C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$	Espaço de Hölder usual
$C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega})$	Espaço das funções $u \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ tais que $u\vert_{\partial\Omega} = 0$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev usual
$H_0^1(\Omega)$	Fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ na norma do espaço $W^{1,2}(\Omega)$
$L^1_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções localmente integráveis em Ω
$\mathbb{R}^N$	Espaço euclidiano N-dimensional
∂X	Fronteira do subconjunto $X \subset \mathbb{R}^N$
$B_r(x_0)$	Bola aberta de centro x_0 e raio r
$\overline{\Omega}$	Fecho do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
η	Vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$
$\\|\cdot\\|_{k,p}$	Norma do espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$
$\\|\cdot\\|$	Norma do espaço $H_0^1(\Omega)$
$\vert\cdot\vert_p$	Norma do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$
$\\|\cdot\\|_X$	Norma de um dado espaço X
$\\|\cdot\\|_{C^{k,\alpha}}$	Norma no espaço $C^{k,\alpha}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \alpha < 1$

$N[T]$	Núcleo do operador $T \in L(X,Y)$
$R[T]$	Imagem do operador $T \in L(X,Y)$
$\text{codim}[D]$	$\dim[X \setminus D]$, onde D é um subespaço de X
$D^{\perp}$	Ortogonal de um subespaço vetorial D
$\hookrightarrow$	Imersão contínua
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
λ_1	Primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$
φ_1	Primeira autofunção do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ associada a λ_1
$u\|_{\partial\Omega}$	Restrição da função u à fronteira $\partial\Omega$
dS	Elemento de área na integral de superfície
2^*	Expoente crítico de Sobolev, isto é, $2^* = 2N/(N-2)$
div u	Divergente da função u
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno usual em $H_0^1(\Omega)$
$(\cdot, \cdot)_2$	Produto interno em $L^2(\Omega)$
(u_k)	Sequência de números reais ou de funções
$\oplus$	Soma direta
suppφ	Suporte da função φ

Introdução

Nas últimas décadas, problemas envolvendo não-linearidades indefinidas têm sido objeto de estudo de diversos pesquisadores, sobretudo na década de 1990 e início dos anos 2000, vários artigos nessa linha de pesquisa foram publicados. Dentre esses, podemos citar [2–4, 8, 14, 17, 32] e os trabalhos mais recentes [29, 34], do ano de 2013.

A terminologia "problema indefinido" parece ter surgido em um trabalho de P. Hess e T. Kato que data da década de 1980 (ver [25]) e se refere à presença de uma função peso que apresenta mudança de sinal em um certo conjunto Ω no qual está definida. Em geral, nos artigos é muito comum encontrarmos a análise desse tipo de problema sendo feita com base no estudo dos pontos críticos para o funcional energia associado, e tendo como principal ferramenta o Teorema do Passo da Montanha (ver [4, 8, 29]). Outros métodos de resolução incluem o estudo de problemas de minimização restrita (ver [3, 9]), o uso de estimativas *a priori* (veja [8, 29]) e da Teoria de Morse ([4, 14]). Uma outra técnica interessante foi introduzida por Ouyang em [32], em que se estudou o problema

$$\Delta u + \lambda u + h(x)u^p = 0,$$

definido sobre uma variedade Riemanniana compacta N-dimensional utilizando a teoria da bifurcação, a fim de provar a existência de soluções positivas. Mais tarde, inspirados nesse mesmo trabalho, Alama e Tarantello ([3]) lançaram mão da mesma técnica com o objetivo de demonstrar um resultado de existência de solução, o qual será exposto aqui.

Quando se aborda problemas indefinidos via métodos variacionais, algumas dificuldades surgem no meio do caminho. Por exemplo, em [14] os autores se propõem a estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = g(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

no qual $g(x,u) = h_-(x)g_1(u) + h_+(x)g_2(u)$, $h_- \leq 0$ e $h_+ \geq 0$, e comentam que um dos principais obstáculos encontrados é que a condição de superlinearidade de Ambrosetti-Rabinowitz não é suficiente para garantir a limitação das sequências de Palais-Smale, tornando mais delicada a tarefa de mostrar que o funcional energia associado satisfaz a condição (PS).

Como é possível verificar nos textos citados acima, existem diversos tipos de problemas indefinidos, cada um deles possuindo suas próprias dificuldades inerentes e maneiras de se abordar. Neste trabalho, apresentamos alguns resultados relacionados a existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos semilineares

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \gamma W(x) f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\gamma}$}$$

nos quais λ e γ são parâmetros reais, $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $W \in C^\beta(\overline{\Omega})$ é uma função que muda de sinal no domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, o que caracteriza $(P_{\lambda,\gamma})$ como um problema indefinido.

A maneira como abordaremos o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ está relacionada principalmente com o emprego de ferramentas variacionais. Dessa forma, eventualmente faremos uso de métodos de minimização, dentre outros resultados clássicos que, em geral, são vistos em um curso de introdução às técnicas variacionais, tais como o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

No que se refere ao estudo do problema $(P_{\lambda,\gamma})$, em todo este trabalho estaremos considerando as seguintes hipóteses gerais:

(H1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e com fronteira regular;

(H2) Considerando a função W em $(P_{\lambda,\gamma})$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega^+ &:= \{x \in \Omega : W(x) > 0\}, \\ \Omega^- &:= \{x \in \Omega : W(x) < 0\}, \\ \Omega^0 &:= \Omega \setminus \overline{\Omega^+ \cup \Omega^-}, \end{aligned}$$

os quais suporemos não vazios, com $\partial\Omega^0$ regular;

(H3) Existe uma função F com as seguintes propriedades:

(i) $F \in C^2(\mathbb{R})$,

(ii) $F'(s) = f(s) > 0$ para $s > 0$,

(iii) $f(0) = 0$,

(iv) $F(s) \leq A + B|s|^p$,

(v) $F(s) = 0$ para $s \leq 0$,

em que A e B são constantes positivas e $2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$.

Nosso primeiro resultado estabelece a existência, via minimização, de uma solução para o problema de autovalor não linear

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = \gamma W(x) f(u) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{\lambda_1,\gamma})$$

e posteriormente apresentamos um outro resultado de existência obtido ao considerarmos o caso particular em que $\gamma = 1$ e $f(u) = u^{p-1}$, $2 < p < 2^*$.

Na sequência, impondo sobre f as condições de crescimento na origem

$$\lim_{|s| \to 0} \frac{f(s)}{|s|^{q-2}s} = a > 0, \quad 2 < q < 2^*,$$

e no infinito

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = 1, \quad 2 < p < 2^*,$$

provamos que o problema $(P_{\lambda_1,\gamma})$, com $\gamma = 1$, admite uma solução positiva. Nesse caso, a existência de uma tal solução será garantida por meio do Teorema do Passo da Montanha, e como veremos, sua positividade seguirá como consequência do Princípio Variacional de Ekeland.

Posteriormente, averiguamos a existência de soluções positivas para valores $\lambda > \lambda_1$. Para tanto, inicialmente provamos que o problema não admite soluções positivas para parâmetros λ acima de um certo valor $\overline{\lambda}$ e então definimos

$$\Lambda = \sup\{\lambda \geq \lambda_1 \mid (P_{\lambda,\gamma}) \text{ admite solução positiva}\}.$$

Via um teorema de bifurcação, mostraremos que o supremo acima definido é estritamente maior do que λ_1, o que nos conduzirá ao estudo do problema $(P_{\lambda,\gamma})$ analisando parâmetros $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$. Para estes, provaremos a existência de pelo menos duas soluções positivas.

Em nossos estudos relacionados à existência de duas soluções positivas, para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, provaremos a existência de uma subsolução u_- e de uma supersolução u_+ de

$(P_{\lambda,\gamma})$, tais que $0 < u_- < u_+$. A existência dessas funções, entre outras coisas, nos fornecerá uma primeira solução positiva para o problema $(P_{\lambda,\gamma})$, a qual denotaremos por u_1. Em seguida, por meio de um resultado devido a Brezis e Nirenberg ([12]), mostraremos que u_1 é um mínimo local em $H_0^1(\Omega)$ para o funcional associado ao problema em questão, fato que nos será útil para provar a existência de uma segunda solução u_2 via Passo da Montanha. Ao final, veremos que as soluções u_1 e u_2 são comparáveis, no sentido de que $u_1 < u_2$, o que nos garantirá a positividade da segunda solução.

Em resumo, provaremos que valem as seguintes afirmações:

(i) Para $\lambda = \lambda_1$ o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ admite uma solução (u,γ), com $u > 0$, $\gamma > 0$.

(ii) Para todo $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, o problema $(P_{\lambda,1})$ admite pelo menos duas soluções positivas.

(iii) Para $\lambda > \Lambda$, o problema $(P_{\lambda,1})$ não admite soluções positivas.

Durante a elaboração deste trabalho, tivemos como principais referências três artigos, a saber: [3], [12] e [29]. No primeiro, Alama e Tarantello vão muito além do que nos propomos a fazer aqui, fornecendo resultados de multiplicidade de soluções para o problema $(P_{\lambda,\gamma})$, tanto no caso em que $2 < p < 2^*$, quanto no caso crítico $p = 2^*$. O segundo é um artigo de H. Brezis e L. Nirenberg no qual nos baseamos para demonstrar a existência da primeira solução positiva para o problema $(P_{\lambda,\gamma})$, referente ao caso $\lambda > \lambda_1$. Já o último é um trabalho mais recente devido a Medeiros, Severo e Silva (2013) que, de certa forma, melhora o resultado obtido por Alama e Tarantello em [3], pois trata de um problema mais geral em relação ao que estamos considerando.

Finalizamos esta introdução fazendo breves comentários acerca da estrutura do trabalho. O Capítulo 1, está dividido em 5 seções. A primeira trata de definições básicas que serão importantes para a compreensão do texto. A segunda apresenta alguns rudimentos da Teoria da Bifurcação necessários para a introdução do Teorema de Crandall-Rabinowitz, o qual será fundamental para o que faremos no Capítulo 3. A Seção 3 trata de alguns teoremas da teoria de métodos variacionais, tais como o clássico Teorema do Passo da Montanha, resultados sobre autovalores, dentre outros que são bastante úteis de modo geral. A Seção 4 contém alguns resultados de princípio do máximo e lemas de Hopf para funções $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. Além disso, também enunciamos nessa subseção um teorema devido aos matemáticos H. Brezis e L. Nirenberg que trata da existência de mínimos locais na topologia de C^1 e $H_0^1(\Omega)$. Por fim, a seção 5 é dedicada a um resultado abstrato referente ao operador $(-\Delta)^{-1}$.

O capítulo 2 contém dois teoremas relativos ao caso $\lambda = \lambda_1$. O primeiro trata do problema de autovalor não linear $(P_{\lambda_1,\gamma})$. O segundo teorema é o mais importante, pois ao demonstrá-lo nos depararemos com resultados que irão nos acompanhar até o final deste trabalho. Nesse sentido, salientamos que embora o Capítulo 2 seja, à primeira vista, independente do seguinte, o mesmo contém resultados que serão também utilizados no capítulo 3.

O Capítulo 3 está dividido em duas seções. Na primeira, com o auxílio dos teoremas de Brezis-Nirenberg e Crandall- Rabinowitz, mostramos que o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ admite pelo menos uma solução positiva para $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$ (Seção 3.1). Na Seção 3.2, baseados em [29], mostramos a existência de uma segunda solução positiva para o caso $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$.

Por fim, nas páginas finais do trabalho, o leitor encontrará os apêndices A, B e C. O Apêndice A contém duas seções. A primeira delas traz a demonstração de alguns lemas técnicos que complementam o Capítulo 2, enquanto que a segunda apresenta as demonstrações de alguns resultados preliminares enunciados no Capítulo 1. Os Apêndices B e C contém resultados de Análise Funcional, Teoria da Medida e Regularidade Elíptica que foram utilizados ao longo do texto, os quais podem/devem ser consultados sempre que houver necessidade.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Começamos nosso trabalho apresentando algumas definições e terminologia que serão utilizadas ao longo do texto, embora assumamos que o leitor tenha alguma familiaridade com os conceitos básicos da teoria de equações diferenciais parciais elípticas.

1.1 Definições

Seja Ω um domínio limitado e considere o operador diferencial parcial

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x), \ \ x \in \Omega, \tag{1.1}$$

no qual os coeficientes $a_{ij}, b_j, c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas.

Definição 1.1 ([27])**.** *Dado $x \in \Omega$, dizemos que L é um operador elíptico no ponto x se existe uma constante $\theta_x > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_x \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N}, \ \ \textit{para todo } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

isto é, quando a forma bilinear associada à matriz $A(x) = [a_{ij}(x)]$,

$$B(\xi,\zeta) = \xi^{\top} A(x)\zeta, \ \ (\xi,\zeta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,$$

é positiva definida; em outras palavras, quando todos os autovalores de $A(x)$ são positivos. Nesse caso, θ_x é chamada uma constante de elipticidade para L em x.

O operador L chama-se elíptico em Ω quando é elíptico em todo ponto $x \in \Omega$. Nesse caso, L chama-se uniformemente elíptico em Ω quando a constante de elipticidade θ_x pode ser escolhida de maneira a não depender de $x \in \Omega$, isto é, quando existe $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N}, \ \ \textit{para todo } (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

O maior θ para o qual essa condição vale chama-se a constante de elipticidade uniforme de L em Ω.

Em posse dessa definição, observamos que o operador $L = -\Delta$ é uniformemente elíptico, uma vez que a matriz dos coeficientes $A(x) = [a_{ij}(x)]$ é a identidade para todo $x \in \Omega$.

Quando se estuda um problema de equações diferenciais parciais, em geral não é possível encontrar soluções com a regularidade que o problema pede. Por exemplo, no caso do problema $(P_{\lambda,\gamma})$, o ideal seria encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisfizesse ambas as equações, mas como sabemos, dependendo das hipóteses consideradas é difícil obter soluções com tanta regularidade. Pensando nisso, uma alternativa frequentemente adotada é a busca por uma solução fraca, que em nosso contexto torna-se o problema de encontrar uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi + \gamma \int_\Omega W(x)f(u)\varphi, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Dito isso, em todo este trabalho a palavra "solução" significará para nós uma solução fraca (no sentido mencionado acima), a menos que seja dito o contrário.

Ainda com relação ao conceito de solução, vamos explicitar o que estaremos entendendo por subsolução e supersolução.

Definição 1.2. *[35] Seja Ω é um domínio limitado com fronteira regular em $\mathbb{R}^N$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função Carathéodory e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ dado. Considere a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,u) & \textit{em } \Omega, \\ u = u_0 & \textit{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Por definição, $u \in H^{1,2}(\Omega)$ é uma subsolução (fraca) para (1.2)*, se $u \leq u_0$ em $\partial\Omega$ e*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \leq \int_\Omega h(x,u)\varphi, \ \ \forall\ \varphi \in C_0\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0.$$

Analogamente, diremos que $u \in H^{1,2}(\Omega)$ é uma supersolução (fraca) para (1.2)*, se $u \geq u_0$ em $\partial\Omega$ e*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \geq \int_\Omega h(x,u)\varphi, \ \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \varphi \geq 0.$$

Em certos casos e sob hipóteses bastante específicas, é possível recuperar a regularidade das soluções no sentido de que uma solução fraca que *a priori* está em $H_0^1(\Omega)$ (e não possui derivadas no sentido clássico) pode vir a ser uma função de classe $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Uma dessas exigências, é que a fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ em que se considera o problema seja regular, conforme definimos abaixo:

Definição 1.3 ([21])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado e $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que a fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^k se para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma função C^k $\gamma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que - a menos de renomeamento e reorientação dos eixos coordenados se necessário - tem-se*

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \mid x_N > \gamma(x_1, \cdots, x_{N-1})\}.$$

Além disso, $\partial\Omega \in C^\infty$ se $\partial\Omega \in C^k$, para $k = 1,2,\cdots$, e $\partial\Omega$ é analítica se o mapa γ é analítico.

Essas exigências justificam-se pelo fato de que quando $\partial\Omega$ é regular, podemos utilizar sem maiores problemas a teoria de regularidade elíptica. Outra vantagem dessa imposição, reside na possibilidade de podermos definir um campo de vetores normais unitário exterior, que será denotado por $\eta = \eta(x)$, $x \in \partial\Omega$.

No Apêndice B mostramos que as soluções de $(P_{\lambda,\gamma})$ vivem no espaço $C^1(\overline{\Omega})$. Para estas funções faz sentido calcular o limite

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) := \lim_{t \to 0^-} \frac{u(x_0 + t\eta) - u(x_0)}{t} = \nabla u(x_0) \cdot \eta(x_0),$$

comumente chamado, na literatura, de derivada normal exterior de u no ponto $x_0 \in \partial\Omega$.

Gostaríamos agora de destacar alguns dos espaços de funções que serão frequentemente mencionados durante os capítulos subsequentes. O primeiro é o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,2}}$, que estará munido com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

cuja norma induzida é

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $p \geq 1$, o espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ terá sua norma denotada por

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A última coisa que gostaríamos de destacar antes de finalizar nossos comentários iniciais é o conceito de parte positiva e parte negativa de uma função. Dada uma função $u \in H_0^1(\Omega)$, prova-se que as funções

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$$

também pertencem a $H_0^1(\Omega)$ (veja [21]). Estas são, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa da função u. Vale observar que u^+ e u^- são sempre não negativas, ambas não se anulam simultaneamente (a menos que $u \equiv 0$) e, tem-se

$$u = u^+ - u^- \quad \text{e} \quad |u| = u^+ + u^-,$$

de modo que $|u| \in H_0^1(\Omega)$. Embora algumas dessas definições sejam elementares, fizemos questão de explicitá-las ao leitor pois esses fatos serão demasiadamente utilizados durante o texto.

1.2 O Teorema de Bifurcação de Crandall e Rabinowitz

Esta seção é dedicada a um teorema de bifurcação local devido a Crandall e Rabinowitz ([19, 20]). Antes de apresentar seu enunciado, iremos estabelecer algumas definições que julgamos serem necessárias para sua compreensão.

Dados X e Y espaços de Banach reais e $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ um intervalo, seja $\mathcal{F} : X \times \mathcal{I} \to Y$ um operador não-linear, com equação não-linear associada

$$\mathcal{F}(u, \lambda) = 0.$$

Nesse contexto, iremos sempre admitir que os pares da forma $(0,\lambda) \in X \times \mathcal{I}$ verificam a igualdade acima. Sendo assim, nos referiremos a estes pares como soluções triviais da equação não-linear associada, uma vez que são conhecidas.

No que segue, apresentamos a definição do que vem a ser um ponto de bifurcação.

Definição 1.4 ([26])**.** *Seja $(0,\lambda_0)$. Dizemos que $(0,\lambda_0)$ é um ponto de bifurcação da curva de soluções triviais $(0,\lambda)$ se existe uma sequência $(u_n,\lambda_n) \in (X \setminus \{0\}) \times \mathcal{I}$ tal que*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n,\lambda_n) = (0,\lambda_0)$$

e

$$\mathcal{F}(u_n,\lambda_n) = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como é usual, denotaremos por $L(X,Y)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de X em Y. Se $T \in L(X,Y)$, definimos

$$N[T] := \{u \in X \mid Tu = 0\} \quad \text{e} \quad R[T] := \{Tu \mid u \in X\},$$

e chamamos $N[T]$ e $R[T]$ o núcleo e a imagem do operador T, respectivamente. Além disso, se M é um subespaço de X, dizemos que M tem codimensão finita se existe um subespaço $Z \subset X$ de dimensão finita tal que $X = M \oplus Z$. Neste caso, a codimensão de M, a qual denotaremos por codim M, é a dimensão do subespaço Z (cf. [11]).

Vamos agora definir uma classe de operadores lineares que tem relevância para o que desejamos fazer.

Definição 1.5. *([11]) Dados dois espaços de Banach X e Y, dizemos que $T \in L(X,Y)$ é um operador de Fredholm (ou um operador de Noether), e escrevemos $T \in \phi(X,Y)$ se T satisfaz*

(i) N[T] tem dimensão finita;

(ii) R[T] é fechado e tem codimensão finita.

O índice de T é definido por

$$ind[T] := dimN[T] - codimR[T].$$

Com relação ao conjunto de todos os operadores de Fredholm, destacamos o conjunto daqueles cujo índice é zero, isto é,

$$\mathrm{Fred}_0 := \{T \in L(X,Y) \mid \mathrm{ind}[T] = 0\}.$$

Estamos agora em condições de enunciar o

Teorema 1.1. *Sejam X,Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V_0 \subset X \times \mathbb{K}$ uma vizinhança de $(0,\lambda_0)$ e $\mathcal{F} : V_0 \to Y$ tal que*

(i) $F(0,\lambda) \equiv 0$, $\mathcal{F} \in C^1(V_0)$ *e* $\mathcal{F}_{\lambda x} \in C(V_0)$;

(ii) $\mathcal{F}_x(0,\lambda_0)$ *é Fredholm de índice zero e* $N[\mathcal{F}_x(0,\lambda_0)] = \langle \varphi_0 \rangle$;

(iii) $\mathcal{F}_{\lambda x}(0,\lambda_0)\varphi_0 \notin R[\mathcal{F}_x(0,\lambda_0)]$.

Seja Z o complemento topológico de $\langle \varphi_0 \rangle$, isto é, $X = \langle \varphi_0 \rangle \oplus Z$. Nas condições acima, $(0,\lambda_0)$ é um ponto de bifurcação para $\mathcal{F}(x,\lambda) = 0$ e

$$\mathcal{F}^{-1}(0) \cap U = \{(\alpha\varphi_0 + \alpha\psi, \lambda_0 + \varphi(\alpha)); \alpha \in (-a,a)\} \cup \{(0,\lambda); (0,\lambda) \in U\}$$

para algum $a > 0$ e alguma vizinhança U de $(0,\lambda_0)$, onde $\varphi : (-a,a) \to \mathbb{R}$ e $\psi : (-a,a) \to Z$ são funções contínuas tais que $\varphi(0) = 0$ e $\psi(0) = 0$. Além disso, se $\mathcal{F} \in C^k$ para algum $k \geq 2$, então φ e ψ são de classe C^k.

Demonstração. Ver [19] ou [20]. □

Observação 1. *Denotando por $\tilde{\varphi}(\alpha) = \varphi(\alpha) + \lambda_0$, em que φ é a função obtida no Teorema 1.1, vemos que $\tilde{\varphi}(0) = \lambda_0$. Nesse caso, o conjunto onde moram as soluções torna-se*

$$\mathcal{F}^{-1}(0) \cap U = \{(\alpha\varphi_0 + \alpha\psi, \tilde{\varphi}(\alpha)); \alpha \in (-a,a)\} \cup \{(0,\lambda); (0,\lambda) \in U\}.$$

Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ certamente é contínua. Com base nessas considerações, ao aplicar o Teorema 1.1, estaremos considerando, sem perda de generalidade, a função $\tilde{\varphi}$ ao invés de φ, embora continuemos usando a notação φ.

Para o leitor que deseja se aprofundar nesses conceitos, recomendamos as referências [5, 15, 20, 26], as quais, de um modo geral, inspiraram esta breve exposição.

1.3 Técnicas Variacionais

Nesta seção, iremos apresentar alguns resultados da teoria de métodos variacionais que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Começamos com o seguinte teorema de minimização.

Teorema 1.2 ([35]). *Suponha que X é um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|_X$, e seja $M \subset X$ um subconjunto fracamente fechado de X. Suponha que $I : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente com respeito a X, isto é, que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\lim\limits_{\|u\|_X \to +\infty} I(u) = +\infty$*;*

(ii) dado $u \in M$, para toda sequência $(u_k) \subset M$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em X tem-se

$$I(u) \leq \liminf_{k \to +\infty} I(u_k).$$

Então, I é limitado inferiormente e seu ínfimo é atingido em M.

Demonstração. Para uma demonstração consulte, por exemplo, [23, 35]. □

O próximo teorema nos dá condições suficientes para que o funcional associado ao problema que estamos tratando esteja bem definido e seja de classe C^1. Mais do que isso, ele fornece uma expressão para a diferencial de Gateaux desse funcional, o que nos permitirá relacionar seus pontos críticos com o conceito de solução fraca. Em outras palavras, este é um resultado indispensável.

Teorema 1.3 ([23]). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e a função h satisfaz:*

(i) $h \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(ii) existem $c_1, c_2 \geq 0$ e $1 \leq p < 2^*$ tais que

$$|h(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \quad \forall\, (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Então o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega H(x,u),$$

em que $H(x,s) = \displaystyle\int_0^s h(x,t)dt$ *está bem definido, é de classe* C^1 *e*

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega h(x,u)\varphi, \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, se $p < 2^*$, *então a derivada* $I' : X \to X'$ *é da forma* $I' = Id - K$, *com* Id *sendo o operador identidade e* $K : X \to X'$ *compacto.*

Demonstração. A prova deste resultado é um tanto técnica, mas pode ser encontrada com detalhes em [23]. □

Definição 1.6 ([23])**.** *Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. *Dizemos que* I *satisfaz a condição de Palais-Smale se toda sequência* $(u_n) \subset X$ *tal que*

$$\sup_n |I(u_n)| < +\infty \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0, \tag{I}$$

possui subsequência convergente. Se $c \in \mathbb{R}$, *dizemos que* I *satisfaz a condição de Palais-Smale no nível* c, *se toda sequência tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} I(u_n) = c \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0, \tag{II}$$

possui subsequência convergente.

Observamos ainda que uma sequência (u_n) que satisfaz a condição (I), é denominada uma sequência de Palais-Smale, ou simplesmente uma sequência (PS). Por outro lado, se satisfizer (II), chamamos (u_n) uma sequência de Palais-Smale no nível c. Além disso, I satisfaz Palais-Smale se, e somente se, satisfizer Palais-Smale em todo nível c, uma vez que em $\mathbb{R}$, toda sequência limitada possui alguma subsequência convergente e, por sua vez, toda sequência convergente é limitada.

Enunciaremos agora o célebre Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz (veja [33]), o qual é, em geral, o primeiro teorema do tipo "minimax"que se estuda em um curso básico de métodos variacionais.

Teorema 1.4. *(Teorema do Passo da Montanha, [33]) Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ *satisfazendo* (PS). *Suponha que* $I(0) = 0$ *e*

(i) existem ρ, $\alpha > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

(ii) existe $e \in X$ *tal que* $\|e\|_X > \rho$ *e* $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I(\gamma(s)),$$

em que $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X); \gamma(0) = 0$ *e* $\gamma(1) = e\}$.

Demonstração. Ver, por exemplo, [16, 23, 33]. □

Observação 2. *Se em (i) tivermos $I|_{\partial B} \geq 0$, ainda teremos um ponto crítico não-trivial, conforme Teorema 3.10 em [33].*

Na literatura, as condições (i) e (ii) do teorema anterior são comumente chamadas de primeira e segunda geometria do Passo da Montanha, respectivamente. Nesse sentido, quando o funcional I satisfaz essas condições, dizemos que I possui a geometria do Passo da Montanha.

Teorema 1.5. *(Princípio Variacional de Ekeland, [35]) Sejam M um espaço métrico completo e $\varphi : M \to]-\infty, +\infty]$ uma função semicontínua inferiormente, limitada inferiormente e não identicamente $+\infty$. Sejam $\varepsilon > 0$ dado e $u \in M$ tais que*

$$\varphi(u) \leq \inf_M \varphi + \varepsilon.$$

Então existe $v \in M$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(v) &\leq \varphi(u) \\ d(u,v) &\leq 1 \end{aligned}$$

e, para cada $w \neq v$ em M,

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \varepsilon d(v,w).$$

Demonstração. Consulte por exemplo [28] e [35]. □

O próximo resultado pode ser encontrado na referência [28], Teorema 4.3. Sua demonstração é bastante técnica e foge aos propósitos deste trabalho. Contudo, ainda daremos uma ideia de como ela é feita, pois o argumento utilizado pelos autores fornece uma ferramenta bastante útil para a determinação de sequências (PS), conforme veremos na demonstração do Teorema 2.1.

Teorema 1.6 (Mawhin-Willem). *Seja K um espaço métrico compacto, $K_0 \subset K$ um conjunto fechado, X um espaço de Banach, $\chi \in C(K_0, X)$ e vamos definir o espaço métrico completo M por*

$$M = \{g \in C(K,X) \ ; \ g(s) = \chi(s) \ se \ s \in K_0\}$$

com a distância usual $d(\gamma_1, \gamma_2) = \max\limits_{s\in K} \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\|_X$. Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e defina

$$c = \inf_{\gamma\in M} \max_{s\in K} \varphi(g(s)), \ \ c_1 = \max_{\chi(K_0)} \varphi.$$

Se $c > c_1$, então para cada $\varepsilon > 0$ e cada $f \in M$ tais que

$$c \leq \max_{s\in K} \varphi(f(s)) \leq c + \varepsilon$$

existe $v \in X$ tal que

$$\begin{aligned} c - \varepsilon \leq \varphi(v) &\leq \max_{s\in K} \varphi(f(s)), \\ d(v, f(K)) &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \\ \|\varphi'(v)\|_{X'} &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Veja Apêndice A, Seção A.2. $\square$

Na sequência iremos destacar mais alguns resultados que serão úteis no decorrer do próximo capítulo.

Proposição 1.1 ([7]). *Seja $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a sequência de autovalores de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ as autofunções associadas. Dado $k \in \mathbb{N}$, considere $V = \langle \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{k-1}\rangle$ e $W = V^{\perp}$. Então, valem as seguintes desigualdades*

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \lambda_{k-1} \int_\Omega |v|^2, \ \ \forall\, v \in V \quad e \quad \lambda_k \int_\Omega |w|^2 \leq \int_\Omega |\nabla w|^2, \ \ \forall\, w \in W.$$

Demonstração. Veja Apêndice A, Seção A.2. $\square$

A proposição seguinte é bastante conhecida na literatura. Em geral, nas aplicações, ela nos ajuda a concluir que o funcional $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição (PS), bastando para isso provar que toda sequência de Palais-Smale é limitada.

Proposição 1.2 ([23]). *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e f é uma função que satisfaz:*

(i) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$*;*

(ii) Existem $c_1, c_2 > 0$ e $1 \leq p < 2^*$ tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \ \ \forall \ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência (PS) limitada do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

então (u_n) possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Veja Apêndice A, Seção A.2. □

Proposição 1.3. *(Monotonicidade de λ_1 com respeito ao domínio, [7]) Dado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, denote por $\lambda_1(\Omega)$ o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$. Se $\Omega^0 \subset \Omega$, então $\lambda_1(\Omega^0) \geq \lambda_1(\Omega)$. Além disso, se $\Omega^0 \subset \Omega$ é um subconjunto próprio, tem-se $\lambda_1(\Omega^0) > \lambda_1(\Omega)$.*

Demonstração. Veja Apêndice A, Seção A.2. □

1.4 Princípio do Máximo, Lema de Hopf e o Teorema de Brezis e Nirenberg

Princípios de máximo são extremamente úteis para determinar o sinal de uma solução. Como estamos interessados em determinar soluções positivas, dedicamos uma seção a alguns resultados dessa natureza, os quais serão importantes no que se seguirá.

Em toda essa seção, vamos supor que os coeficientes a_{ij}, b_j e c do operador L, definido em (1.1), pertencem a $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.7 (Princípio do máximo fraco de Hopf, [27] Teorema 7.1.5). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio, L um operador uniformemente elíptico tal que $c \geq 0$. Suponha que $u \in W^{2,p}(\Omega)$, com $p > N$ e L satisfazem*

$$Lu \geq 0 \ q.t.p. \ em \ \Omega \quad e \quad m := \inf_\Omega u \in (-\infty, 0].$$

Então $u = m$ em Ω ou $u(x) > m$, para todo $x \in \Omega$. Em outras palavras, u não pode atingir m em Ω, a menos que seja constante igual a m. Além disso, tem-se

$$\inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u$$

quando Ω é limitado.

Para os dois próximos resultados, vamos precisar da seguinte definição:

Definição 1.7 ([24]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $\partial\Omega$ sua fronteira. Dizemos que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em $x_0 \in \partial\Omega$ se existe uma bola $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$.*

Observamos que se Ω é de classe C^2, então $\partial\Omega$ satisfaz a propriedade da esfera interior descrita acima. O leitor interessado em mais detalhes, encontrará este resultado provado na referência [27], Teorema 1.8.4 do Apêndice 1.8.

Teorema 1.8 (Lema da fronteira fraco de Hopf, [27] Teorema 7.1.6)**.** *Sejam L um operador uniformemente elíptico com $c \geq 0$ e $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, é uma função não-constante satisfazendo*

$$Lu \geq 0 \ q.t.p. \ em \ \Omega \quad e \quad m := \inf_{\Omega} u \in (-\infty, 0].$$

Suponha ainda que exista $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = m$ com Ω satisfazendo a propriedade da esfera interior em x_0. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) := \lim_{t \to 0^-} \frac{u(x_0 + t\eta) - u(x_0)}{t} < 0.$$

Teorema 1.9 ([27])**.** *Suponha que L é uniformemente elíptico em Ω com $c \geq 0$ e $u \in C^2(\Omega)$ é uma função não constante satisfazendo*

$$Lu \geq 0 \ em \ \Omega \ e \ m := \inf_{\Omega} u \in (-\infty, 0].$$

Suponha ainda que existe $x_0 \in \partial\Omega$ e $R > 0$ tal que $u(x_0) = m$ e $u \in C(B_R(x_0) \cap \overline{\Omega})$, com Ω satisfazendo a propriedade da esfera interior em x_0. Então, para qualquer vetor normal exterior $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ em x_0 para o qual

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{u(x_0 + h\eta) - u(x_0)}{h}$$

exista, necessariamente deve ocorrer $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0$.

Demonstração. Consulte [27]. □

Observe que é sempre verdade que se x_0 é um ponto de mínimo para u, então

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{u(x_0+h\eta)-u(x_0)}{h} \leq 0,$$

independentemente se $Lu \geq 0$ ou $Lu \leq 0$. Desse modo, o grande trunfo dos lemas anteriores é a garantia de que se terá

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

desde que sejam satisfeitas as condições exigidas. Essa garantia nos dá algumas consequências interessantes, tais como:

Proposição 1.4. *Suponha que* $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *é tal que*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0 < u$$

para todo $x \in \partial\Omega$*. Então, existem constantes* $c_1, c_2 > 0$ *tais que*

$$c_1 d(x) \leq u(x) \leq c_2 d(x)$$

para todo $x \in \Omega$*, em que* $d(x) = d(x, \partial\Omega)$ *é a distância de* x *até a fronteira* $\partial\Omega$*.*

Demonstração. O leitor interessado pode encontrar sua prova em [30], página 872. Outras referências são [13, 18]. □

Um fato como este é interessantíssimo de se ter em mente, pois através dele podemos obter muitas estimativas importantes. Outras consequências da hipótese sobre a derivada normal serão vistas nos capítulos subsequentes, quando estivermos buscando determinar para quais valores de λ o problema $(P_{\lambda,\gamma})$ admite solução positiva.

O último resultado dessa seção trata-se de um famoso teorema devido aos ilustres matemáticos Haim Brezis e Louis Nirenberg. Ele afirma simplesmente que, sob condições adequadas, mínimos locais na topologia de C^1 são também mínimos locais na topologia de $H_0^1(\Omega)$. Sua prova é um tanto delicada e preferimos omiti-la. Contudo, o leitor interessado pode deliciar-se com ela ao buscar a referência [12].

Teorema 1.10 (Brezis e Nirenberg)**.** *Suponha que u_0 é um mínimo local de I na topologia de C^1, isto é, existe algum $r > 0$ tal que*

$$I(u_0) \leq I(u_0 + v), \qquad \forall\, v \in C_0^1(\overline{\Omega}),\ com\ \|v\|_{C^1} \leq r.$$

Então u_0 é um mínimo local de I na topologia de $H_0^1(\Omega)$, isto é, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$I(u_0) \leq I(u_0 + v), \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ com\ \|v\| \leq r.$$

Conforme observado por Brezis e Nirenberg em [12], para garantir a validade desse resultado, os funcionais $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ devem ser da forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} H(x,s),$$

em que $H(x,s)$ é a primitiva em s da função Carathéodory $h(x,s)$, a qual possui condição de crescimento subcrítico, ou seja, existe uma constante $\tilde{C} > 0$ e $1 \leq p < 2^*$ tais que

$$|h(x,s)| \leq \tilde{C}(1 + |s|^{p-1}),\ \ \forall\ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Caso contrário, isto é, se o funcional não tem essa estrutura, a conclusão pode vir a ser falsa. Além disso, é importante que o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um domínio (aberto e conexo) limitado.

1.5 A Compacidade do Operador $(-\Delta)^{-1}: C^{\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{\beta}(\overline{\Omega})$

Para cada $f \in L^2(\Omega)$, mostra-se que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

admite uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$. Sendo assim, podemos definir o operador

$$(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

dado por $(-\Delta)^{-1}(f) = u_f$, em que u_f é a única solução do problema acima, correspondente à função f. Usando a definição de solução fraca e as imersões de Sobolev, é possível provar que o operador $(-\Delta)^{-1}$ assim definido é linear e contínuo. Além disso, usando a compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, verifica-se que $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é compacto.

Nesse sentido, vale também o seguinte resultado:

Proposição 1.5. *O operador $S : C^\beta(\overline{\Omega}) \to C^\beta(\overline{\Omega})$, dado por $S(g) = (-\Delta)^{-1}(g)$, é compacto.*

Demonstração. Ver Apêndice A, Seção A.2. $\square$

Capítulo 2

O caso $\lambda = \lambda_1$

Iniciamos este capítulo considerando o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = \gamma W(x) f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda_1,\gamma}$}$$

no qual $\gamma \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ e λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, com autofunção associada $\varphi_1 > 0$ em Ω.

Nas próximas duas seções, estaremos interessados em determinar soluções positivas para o problema de autovalor não linear $(P_{\lambda_1,\gamma})$. Na Seção 2.1, estudaremos esse problema por meio de um argumento de minimização restrita, o que justifica a nomenclatura "caso restrito". Na Seção 2.2 utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter pontos críticos não triviais para o funcional associado ao problema $(P_{\lambda_1,\gamma})$. Enunciamos abaixo o principal resultado desta seção e ressaltamos que este será de fundamental importância para o que faremos no Capítulo 3.

Vamos supor que a função f seja estendida como ímpar para $s < 0$ e satisfaça as seguintes condições:

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{|s|^{q-2}s} = a > 0, \tag{2.1}$$

e

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = 1, \tag{2.2}$$

em que $p, q \in (2, 2^*)$.

Teorema 2.1. *Sob as condições acima, suponha que existam $p,q \in (2,2^*)$ tais que:*

(i) $\displaystyle\int_\Omega W(x)\varphi_1^q < 0$;

(ii) $|f'(s)| \leq \tilde{A}|s|^{p-2} + \tilde{B}, \ \forall\, s \in \mathbb{R}$.

Suponha ainda que uma das seguintes condições seja satisfeita:

(iv) $\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset$;

(v) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|f(s)s - pF(s)| \leq c_1|s|^2 + c_2, \text{ em que } F \text{ é a primitiva da função} f.$$

Sob essas hipóteses, existe pelo menos uma solução positiva para o problema $(P_{\lambda_1,\gamma})$, com $\gamma = 1$.

Observamos que para se garantir a validade do Teorema 2.1, é suficiente considerar as hipóteses gerais (H1), (H2) e (H3) item (i).

2.1 O caso restrito

O próximo resultado garante a existência de uma solução positiva para o problema de autovalor $(P_{\lambda_1,\gamma})$ descrito acima.

Teorema 2.2. *Suponha que F satisfaz*

$$F(tu) \geq \begin{cases} t^p F(u), & se\ t \geq 1, \\ t^q F(u), & se\ t \leq 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

com $2 < q \leq p < 2^*$. Se para algum $t_0 > 0$ tem-se

$$\int_\Omega W(x)F(t_0\varphi_1) < 0, \tag{2.4}$$

então existe um par $(\tilde{u}, \tilde{\gamma})$, com $\tilde{u} > 0$ e $\tilde{\gamma} > 0$, solução de $(P_{\lambda_1,\gamma})$.

Para a prova do Teorema 2.2, além das hipóteses (2.3) e (2.4), estaremos admitindo a validade de (H1), (H2) e (H3), exceto a condição de que $\partial\Omega^0$ é regular, a qual não é necessária para se garantir a veracidade dos argumentos.

Uma outra observação importante é que a hipótese (2.3), dentre outras coisas, implica que $sf(s) \leq qF(s)$, para todo $s \geq 0$. Com isso, podemos mostrar que a função $h(x,s) := \lambda_1 s + W(x)f(s)$ tem crescimento subcrítico, o que nos permitirá provar, usando o Teorema B.4, que uma solução deste problema está em $W^{2,l}(\Omega)$, $l > N$. A demonstração deste fato está feita com detalhes no Apêndice A, Seção A.1, Lema A.3.

Antes de iniciar a demonstração do Teorema 2.2, gostaríamos de apresentar uma interessante consequência, a qual evidencia a conexão da hipótese (2.4) com o problema $(P_{\lambda,\gamma})$, no caso em que $\lambda = \lambda_1$, $\gamma = 1$ e $f(s) = s^{p-1}$, $2 < p < 2^*$.

Corolário 2.1. *Seja $2 < p < 2^*$. Então, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + W(x)u^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\overline{P}_{\lambda_1}$}$$

admite uma solução positiva se, e somente se, ocorre

$$\int_\Omega W(x)\varphi_1^p < 0. \tag{2.5}$$

O corolário acima segue, em uma direção, como consequência do Teorema 2.2, ao tomar $F(s) = s^p/p$, $2 < p < 2^*$ e $t_0 > 0$ arbitrário. De fato, em vista de (2.5), temos

$$\int_\Omega W(x)F(t_0\varphi_1) = \frac{t_0^p}{p}\int_\Omega W(x)\varphi_1^p < 0.$$

Além disso,

$$F(ts) = \frac{1}{p}(ts)^p = t^p F(s), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Logo, as hipóteses do Teorema 2.2 estão satisfeitas, de modo que temos a garantia da existência de um par $(\tilde{u}, \alpha)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} = \lambda_1\tilde{u} + \alpha W(x)\tilde{u}^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \tilde{u} > 0 & \text{em } \Omega, \\ \tilde{u} = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Observe que o problema $(\overline{P}_{\lambda_1})$ estaria resolvido se pudéssemos fazer sumir o coeficiente α em $-\Delta\tilde{u} = \lambda_1\tilde{u} + \alpha W(x)\tilde{u}^{p-1}$. Por sorte, a função $f(s) = s^{p-1}$ é homogênea, o que nos permite tomar $t > 0$ de tal modo que a função $u_0 = t\tilde{u}$ resolve $(\overline{P}_{\lambda_1})$. Para tanto, basta escolher

$t = \alpha^{\frac{1}{p-2}}$, e teremos

$$\begin{aligned}
-\Delta u_0 - \lambda_1 u_0 &= \alpha^{\frac{1}{p-2}}(-\Delta\tilde{u} - \lambda_1\tilde{u}) \\
&= \alpha^{\frac{1}{p-2}}(\alpha W(x)\tilde{u}^{p-1}) \\
&= \alpha^{\frac{p-1}{p-2}} W(x)\tilde{u}^{p-1} \\
&= W(x)u_0^{p-1},
\end{aligned}$$

donde u_0 é solução de $(\overline{P}_{\lambda_1})$, como queríamos.

A reciproca do Corolário 2.1 resulta imediatamente do seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada no Apêndice A, Lema A.2.

Lema 2.1. *Se existe uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = W(x)u^{p-1} & em\ \Omega, \\ u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases}$$

com $2 < p < 2^*$ e $\lambda \geq \lambda_1$, então $\int_\Omega W(x)\varphi_1^p < 0$, em que φ_1 é uma autofunção do operador laplaciano associada a λ_1.

Vale ressaltar que o lema acima continua válido mesmo para $\lambda > \lambda_1$, desde que o problema $(P_{\lambda,1})$ admita solução.

Antes de passarmos à demonstração do Teorema (2.2), gostaríamos de fazer alguns breves comentários. A ideia é introduzir uma família de funcionais $\{J_\mu\}_{\mu\in\mathbb{R}^+}$ e um funcional G, com o objetivo de resolver um problema de minimização restrito ao vínculo

$$S = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid G(u) = 1\}.$$

Como veremos, para cada $\mu \geq 0$, será possível mostrar que o funcional J_μ é limitado inferiormente por zero em $H_0^1(\Omega)$, o que irá nos permitir definir a função $\gamma\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\gamma(\mu) = \inf_{u\in S} J_\mu(u).$$

Veremos ainda que esta função possui algumas propriedades interessantes e que, para cada $\mu \geq 0$, existe um elemento $v_\mu \in S$ que realiza o ínfimo do funcional J_μ em S. De posse desse fato, após verificar que a equação $\gamma(\mu) = \mu$ admite uma solução $\mu^* > 0$, seremos capazes de concluir que o minimizante v_{μ^*} associado a J_{μ^*} é uma solução do problema $(P_{\lambda_1,\gamma})$, para algum $\tilde{\gamma}>0$.

Algo que é interessante nessa demonstração, é a escolha da família de funcionais $\{J_\mu\}_{\mu\in\mathbb{R}^+}$, escolhas essas que *a priori* parecem não estar diretamente relacionadas ao problema $(P_{\lambda_1,\gamma})$, algo que é digno de nota, e que por sua vez, acrescenta um toque de elegância ao método. Sem mais delongas, vamos à demonstração do Teorema 2.2.

Demonstração. Uma vez que esta demonstração é longa, vamos dividi-la em etapas, objetivando ampliar a clareza e facilitar sua leitura.

ETAPA 1 - Construções e definições iniciais.

Vamos começar construindo o conjunto S mencionado acima e provando que ele é não vazio. Para esse fim, note que por (H3) item (ii), F é estritamente crescente em $[0,+\infty)$. Dessa forma, como $t_0\varphi_1>0$, resulta que

$$\int_\Omega W^+(x)F(t_0\varphi_1)=\int_{\Omega^+} W^+(x)F(t_0\varphi_1)=L>0,$$

já que $W^+(x)F(t_0\varphi_1)>0$ em Ω^+. Consequentemente, se tomarmos $\kappa=2L$, a função $\tilde{W}(x)=\dfrac{1}{\kappa}W(x)$ irá verificar

$$\int_\Omega \tilde{W}^+(x)F(t_0\varphi_1)=\frac{1}{\kappa}\int_\Omega W^+(x)F(t_0\varphi_1)=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}.$$

Agora, escolhendo

$$a=\frac{1}{2\displaystyle\int_\Omega F(t_0\varphi_1)},$$

iremos obter

$$\int_\Omega (\tilde{W}^+(x)+a)F(t_0\varphi_1)=1. \tag{2.6}$$

Com isso, indicando por

$$G(u)=\int_\Omega (\tilde{W}^+(x)+a)F(u),\ \ u\in H_0^1(\Omega),$$

vemos que o conjunto

$$S = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : G(u) = 1\right\}$$

é não vazio, como queríamos.

Veja que se tomarmos $\tilde{W}$ ao invés de W, estaremos considerando o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = \gamma \tilde{W}(x) f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entretanto, se trocarmos γ por $\tilde{\gamma} = \kappa\gamma$ na equação acima, uma solução deste novo problema será uma solução do problema original. Sendo assim, sem perda de generalidade, ignoraremos o til e assumiremos que a igualdade em (2.6) vale para a função W. Com essa convenção, o conjunto S introduzido acima torna-se

$$S = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega (W^+(x) + a) F(u) = 1\right\}.$$

Para $\mu \in \mathbb{R}^+$, consideremos a família de funcionais

$$J_\mu(u) = F\left(\sqrt{\|u\|^2 - \lambda_1 |u|_2^2}\right) + \mu \int_\Omega (W^-(x) + a) F(u), \ \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Como $F(s) = 0$ para $s \leq 0$ e $F(s) > 0$ para $s > 0$, se escrevemos $u = u^+ - u^-$, tem-se que

$$J_\mu(u) = F\left(\sqrt{\|u\|^2 - \lambda_1 |u|_2^2}\right) + \mu \int_\Omega (W^-(x) + a) F(u^+) \geq 0.$$

Sendo assim, o número real

$$\gamma(\mu) = \inf_{u \in S} J_\mu(u)$$

satisfaz $\gamma(\mu) \geq 0$, seja qual for $\mu \geq 0$.

ETAPA 2: Existência de um minimizante para a função J_μ.

Antes de tudo, afirmamos que, sem perda de generalidade, podemos considerar sequências minimizantes cujos termos são não negativos. De fato, seja $\mu \geq 0$ arbitrariamente fixado e

$(u_n)=(u_{n,\mu})\subset S$ uma sequência minimizante para $\gamma(\mu)$, isto é,

$$J_\mu(u_n)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\gamma(\mu).$$

Desde que $u_n\in S$ para cada $n\in\mathbb{N}$, temos que

$$\int_\Omega (W^+(x)+a)F(u_n)=1,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Dessa forma, sendo $u_n=u_n^+-u_n^-$ e $F(s)=0$ para $s\le 0$, obtemos a seguinte igualdade

$$1=\int_\Omega (W^+(x)+a)F(u_n^+),\ \ \forall\, n\in\mathbb{N},$$

a qual mostra que para cada $n\in\mathbb{N}$, u_n tem parte positiva não trivial, pois do contrário, a integral do lado direito da igualdade acima seria 0. Em particular, $u_n^+\in S$, de onde concluímos que $\gamma(\mu)\le J_\mu(u_n^+)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Para completar a prova da afirmação é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{n\to+\infty} J_\mu(u_n^+)=\gamma(\mu),$$

pois uma vez provado isto, teremos obtido uma sequência minimizante formada por termos não negativos. Para este fim, notemos que

$$\|u_n\|^2=\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2+\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2=\|u_n^+\|^2+\|u_n^-\|^2,$$

e

$$\lambda_1|u_n|_2^2=\lambda_1\int_\Omega |u_n^+|^2+\lambda_1\int_\Omega |u_n^-|^2=\lambda_1|u_n^+|_2^2+\lambda_1|u_n^-|_2^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2-\lambda_1\|u_n\|_2^2&=(\|u_n^+\|^2-\lambda_1|u_n^+|_2^2)+(\|u_n^-\|^2-\lambda_1|u_n^-|_2^2)\\&\ge \|u_n^+\|^2-\lambda_1|u_n^+|_2^2\ge 0.\end{aligned}$$

Uma vez que $F(\sqrt{s})$ é crescente em $[0,+\infty)$, a desigualdade acima nos permite escrever

$$F\Big(\sqrt{\|u_n\|^2-\lambda_1|u_n|_2^2}\Big)\ge F\Big(\sqrt{\|u_n^+\|^2-\lambda_1|u_n^+|_2^2}\Big),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} J_\mu(u_n) &= F(\sqrt{\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2}) + \mu \int_\Omega (W^-(x) + a) F(u_n) \\ &\geq F(\sqrt{\|u_n^+\|^2 - \lambda_1 |u_n^+|_2^2}) + \mu \int_\Omega (W^-(x) + a) F(u_n^+) = J_\mu(u_n^+). \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$J_\mu(u_n) \geq J_\mu(u_n^+) \geq \gamma(\mu),$$

o que pelo Teorema do Confronto implica que

$$\lim_{n \to +\infty} J_\mu(u_n^+) = \gamma(\mu).$$

Portanto, sempre podemos tomar sequências minimizantes cujos termos são não negativos. Considerando então $u_n = u_{n,\mu}$ uma sequência minimizante de funções não negativas para $\gamma(\mu)$, nosso objetivo agora é mostrar que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Para tanto, comece observando que existe $C > 0$ verificando

$$0 \leq \|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2 \leq C, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

De fato, caso contrário teríamos (passando a uma subsequência, se necessário) que

$$\lim_{n \to +\infty} F\left(\sqrt{\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2}\right) = +\infty,$$

já que, por (2.3), $F(t) \geq t^p F(1)$. Consequentemente, ocorreria

$$\lim_{n \to +\infty} J_\mu(u_n) = +\infty,$$

desde que

$$\mu \int_\Omega (W^-(x) + a) F(u_n) \geq 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mas isso contraria o fato de que (u_n) é uma sequência minimizante para $\gamma(\mu)$, garantindo a veracidade de (2.7).

Agora, escrevendo o conjunto Ω como a união disjunta

$$\Omega = \{u_n(x) > 1\} \cup \{0 \leq u_n(x) \leq 1\}$$

e observando que $F(u_n) = F(|u_n|) = F(1 \cdot |u_n|)$, temos por (2.3) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n|^p &= \int_{u_n>1} |u_n|^p + \int_{u_n\leq 1} |u_n|^p \\
&\leq \int_{u_n>1} |u_n|^p + |\Omega| \qquad (2.8)\\
&\leq \frac{1}{F(1)} \int_{u_n>1} F(u_n) + |\Omega|.
\end{aligned}$$

Como $(u_n) \subset S$, usando a constante $a > 0$ obtida na ETAPA 1, concluímos de (2.8) que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n|^p &\leq \frac{1}{aF(1))} \int_{u_n>1} aF(u_n) + |\Omega| \\
&\leq \frac{1}{aF(1)} \int_{u_n>1} (W^+(x)+a)F(u_n) + |\Omega| \\
&\leq \frac{1}{aF(1)} \int_\Omega (W^+(x)+a)F(u_n) + |\Omega| \\
&= \frac{1}{aF(1)} + |\Omega| := C_0. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Dessa forma, por (2.7) e da imersão $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, vemos que existe $M = M(\mu) > 0$ satisfazendo

$$\|u_n\| \leq M, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo, podemos supor que existe $v_\mu \in H_0^1(\Omega)$, tal que a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup v_\mu$ em $H_0^1(\Omega)$. Pela compacidade da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, tem-se ainda que $u_n \to v_\mu$ em $L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1, 2^*)$. Logo, podemos admitir (passando a uma subsequência, se necessário) que

$$\begin{cases} u_n(x) \to v_\mu(x) \text{ q. t. p. } x \in \Omega \\ \text{Existe } h \in L^p(\Omega) \text{ tal que } |u_n(x)| \leq h(x) \text{ q. t. p. } \in \Omega, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Assim, utilizando a hipótese (H3) itens (i) e (iv), vemos que

$$\begin{cases} (W^+(x)+a)(x)F(u_n(x)) \to (W^+(x)+a)F(v_\mu(x)) \text{ q. t. p.} \in \Omega \text{ com } n \to \infty \\ (W^+(x)+a)|F(u_n)| \leq (|W|_\infty + a)(A + Bh^p(x)) \in L^1(\Omega), \end{cases}$$

o que nos permite utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\int_\Omega (W^+ + a)F(v_\mu) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (W^+ + a)F(u_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

provando que $v_\mu \in S$ e, em particular, que $v_\mu \neq 0$.

Afirmamos que para cada $\mu \geq 0$, a função v_μ realiza o ínfimo $\gamma(\mu)$, isto é, $J_\mu(v_\mu) = \gamma(\mu)$. Para ver isso, comece observando que, a menos de subsequência, tem-se

$$F\left(\sqrt{\|v_\mu\|^2 - \lambda_1 |v_\mu|_2^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty} F\left(\sqrt{\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2}\right). \tag{2.10}$$

De fato, pelas propriedades de convergência, temos que

$$\|v_\mu\|^2 - \lambda_1 |v_\mu|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 + \liminf_{n\to\infty} \left(-\lambda_1 |u_n|_2^2\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2\right),$$

de onde segue que

$$F\left(\sqrt{\|v_\mu\|^2 - \lambda_1 |v_\mu|_2^2}\right) \leq F\left(\sqrt{\liminf_{n\to\infty} (\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2)}\right), \tag{2.11}$$

uma vez que $F(\sqrt{s})$ é monótona. Por sua vez, como

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2\right) = \lim_{j\to\infty} (\|u_{n_j}\|^2 - \lambda_1 |u_{n_j}|_2^2), \tag{2.12}$$

para alguma subsequência (z_{n_j}) de $(z_n) = \left(\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2\right)$, usando (2.11), (2.12) e a continuidade de $F(\sqrt{s})$, obtemos (2.10).

Como antes, podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (W^- + a)F(u_n) = \int_\Omega (W^- + a)F(v_\mu),$$

o que nos permite concluir que

$$
\begin{aligned}
0 \leq J_\mu(v_\mu) &= F\left(\sqrt{\|v_\mu\|^2 - \lambda_1 |v_\mu|_2^2}\right) + \mu \int_\Omega (W^- + a) F(v_\mu) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left[F\left(\sqrt{\|u_n\|^2 - \lambda_1 |u_n|_2^2}\right) + \mu \int_\Omega (W^- + a) F(u_n) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} J_\mu(u_n) = \gamma(\mu).
\end{aligned}
$$

Lembrando que $v_\mu \in S$, necessariamente devemos ter $J_\mu(v_\mu) \geq \gamma(\mu)$. Juntando isto e a conclusão obtida acima de que $J_\mu(v_\mu) \leq \gamma(\mu)$, segue que $\gamma(\mu) = J_\mu(v_\mu)$, o que conclui a ETAPA 2.

ETAPA 3: Propriedades da função γ.

Nesta etapa, provaremos que a função $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida anteriormente possui as seguintes propriedades:

(i) $\gamma(0) = 0$;

(ii) γ é estritamente crescente em $(0,+\infty)$;

(iii) γ é Lipschitz em $[0,+\infty)$.

Para verificar o item (i) note que, pela definição de ínfimo, devemos ter $\gamma(0) \leq 0$, uma vez que $t_0\varphi_1 \in S$ e $J_0(t_0\varphi_1) = 0$. Por outro lado, lembrando que $\gamma(\mu) \geq 0$ para todo $\mu \geq 0$, resulta que $\gamma(0) = 0$.

Para a prova (ii), tomemos $0 < \mu_1 < \mu_2 < +\infty$ arbitrários e procuremos mostrar que $\gamma(\mu_1) < \gamma(\mu_2)$. Com efeito, desde que estamos supondo (H3), tem-se

$$\int_\Omega (W^- + a) F(u) = \int_\Omega (W^- + a) F(u^+) > 0,$$

de sorte $J_{\mu_1}(u) < J_{\mu_2}(u)$, ou ainda, $\gamma(\mu_1) \leq \gamma(\mu_2)$. De fato podemos mostrar que ocorre a desigualdade estrita, uma vez observado que

$$J_{\mu_1}(v_{\mu_2}) = J_{\mu_2}(v_{\mu_2}) - (\mu_2 - \mu_1) \int_\Omega (W^- + a) F(v_{\mu_2}),$$

o que por sua vez implica que $\gamma(\mu_1) \leq J_{\mu_1}(v_{\mu_2}) < J_{\mu_2}(v_{\mu_2}) = \gamma(\mu_2)$, tendo em vista que $\mu_2 > \mu_1$ e

$$\int_\Omega (W^- + a) F(v_{\mu_2}) > 0.$$

Antes de seguirmos com a prova de (iii), julgamos necessário fazer uma pequena observação acerca da relação (2.9). Pois bem, de acordo com as desigualdades lá descritas, esta relação é válida para qualquer $u \in S$. Dessa forma, como para cada $\mu \geq 0$, $v_\mu \in S$, está assegurada a existência de uma constante $C > 0$ tal que $|v_\mu|_p \leq C$ para todo $\mu \geq 0$, pois como vimos durante a ETAPA 2, v_μ é sempre um elemento de S. Tendo isso em vista, podemos garantir a existência de uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_\Omega (W^- + a)F(v_\mu) \leq C_1 \int_\Omega 1 + C_2 \int_\Omega |v_\mu|^p \leq C_3, \;\; \forall\, \mu \geq 0. \tag{2.13}$$

Agora, tomando arbitrariamente α e β no intervalo $[0, +\infty)$, pela definição de ínfimo, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha) &= F\left(\sqrt{\|v_\alpha\|^2 - \lambda_1 |v_\alpha|_2^2}\right) + \alpha \int_\Omega (W^- + a)F(v_\alpha) \\
&\leq F\left(\sqrt{\|v_\beta\|^2 - \lambda_1 |v_\beta|_2^2}\right) + \alpha \int_\Omega (W^- + a)F(v_\beta) \\
&= \gamma(\beta) + (\alpha - \beta) \int_\Omega (W^- + a)F(v_\beta) \\
&\leq \gamma(\beta) + |\alpha - \beta| \int_\Omega (W^- + a)F(v_\beta),
\end{aligned} \tag{2.14a}$$

e analogamente, com o mesmo raciocínio, obtemos

$$\gamma(\beta) \leq \gamma(\alpha) + |\alpha - \beta| \int_\Omega (W^- + a)F(v_\alpha). \tag{2.14b}$$

Combinando (2.13), (2.14a) e (2.14b) vemos que

$$\gamma(\alpha) \leq \gamma(\beta) + C_3|\alpha - \beta| \quad \text{e} \quad \gamma(\beta) \leq \gamma(\alpha) + C_3|\alpha - \beta|.$$

Mas isto é equivalente a dizer que $|\gamma(\alpha) - \gamma(\beta)| \leq C_3|\alpha - \beta|$. Sendo assim, pela arbitrariedade da escolha de $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, o item (iii) fica provado.

ETAPA 4: Existe $\overline{\mu} > 0$ tal que $\gamma(\mu) < \mu$, para todo $\mu > \overline{\mu}$.

Para ver isso, fixe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo $\varphi(x) \geq 0$, $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega^+$ e

$$\int_\Omega (W^+(x) + a)F(\varphi) = 1.$$

Pela escolha de φ, da definição de ínfimo e do fato de que $W^-(x) = W^+(x) - W(x)$, resulta a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\gamma(\mu) \leq J_\mu(\varphi) &= C_4 + \mu \int_\Omega (W^-(x)+a)F(\varphi) \\ &= C_4 + \mu \left(1 - \int_\Omega W(x)F(\varphi)\right).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Em particular, como as exigências $\varphi(x) \geq 0$ e $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega^+$ nos garantem que

$$\int_\Omega W(x)F(\varphi) = \int_{\Omega^+} W^+(x)F(\varphi) > 0,$$

multiplicando ambos os membros da desigualdade em (2.15) por $1/\mu$ e passando o limite com $\mu \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\gamma(\mu)}{\mu} \leq 1 - \int_\Omega W(x)F(\varphi) < 1.$$

Logo, para $\overline{\mu} > 0$ suficientemente grande temos $\gamma(\mu) < \mu$, desde que $\mu > \overline{\mu}$.

ETAPA 5: A unicidade do minimizante positivo para J_0.

Consideremos a função $G : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(t) = \int_\Omega (W^+(x)+a)F(t\varphi_1).$$

A função G assim definida é contínua, estritamente crescente e $G(0) = 0$, visto que $t \mapsto (W^+(x)+a)F(t\varphi)$ é contínua, F é estritamente crescente em $[0,+\infty)$ e $F(0) = 0$. Observando que $G(t_0) = 1$, podemos concluir que

$$\begin{cases} G(t) < 1, \text{ se } 0 \leq t < t_0 \\ G(t) > 1, \text{ se } t > t_0 \end{cases}$$

Com base nesse argumento, vemos que a função $v(t) = t\varphi_1$ está em S se, e somente se, $t = t_0$. Consequentemente, a função $t_0\varphi_1$ é um minimizante para J_0, uma vez que pelo item (i) da ETAPA 3, para $\mu = 0$, tem-se $J_0(t_0\varphi_1) = 0 = \gamma(0)$.

Se v é um outro minimizante positivo para J_0, então $J_0(v) = 0$. Como $F(s) > 0$ para $s > 0$, necessariamente devemos ter

$$\begin{aligned} \|v\|^2 - \lambda_1 |v|_2^2 = 0 &\iff \|v\|^2 = \lambda_1 |v|_2^2 \\ &\iff v = t\varphi_1 \\ &\iff t > 0, \text{ pois } v > 0. \end{aligned}$$

Mas de acordo com o que acabamos de discutir acima, estas equivalências implicam que $t = t_0$. Portanto, $v_0 = t_0\varphi_1$ é o único minimizante positivo para J_0.

ETAPA 6: A convergência de v_μ quando $\mu \to 0$.

Nesta etapa da prova do Teorema 2.2 vamos mostrar que $v_\mu \stackrel{\mu\to 0}{\longrightarrow} v_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Para fazer isso, devemos lembrar que para cada $\mu \geq 0$, existe um minimizante $v_\mu \in S$ para J_μ e que γ é estritamente crescente. Tendo isso em vista, segue naturalmente da definição de ínfimo que

$$\gamma(0) = 0 < J_\mu(v_\mu) = \gamma(\mu) = \inf_{u\in S} J_\mu(u) \leq J_\mu(t_0\varphi_1) = \mu \int_\Omega (W^- + a)F(t_0\varphi_1) \stackrel{\mu\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

o que pelo teorema do confronto acarreta em

$$\lim_{\mu\to 0} J_\mu(v_\mu) = 0.$$

Em particular, usando o fato de que F é crescente e sua continuidade, podemos garantir que

$$\sqrt{\|v_\mu\|^2 - \lambda_1 |v_\mu|_2^2} \stackrel{\mu\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{2.16}$$

De fato, pois caso contrário, existiria uma sequência $(\mu_m) \subset (0, +\infty)$, com $\mu_m \to 0$ tal que

$$\liminf_{m\to+\infty} \sqrt{\|v_{\mu_m}\|^2 - \lambda_1 |v_{\mu_m}|_2^2} = \alpha,$$

para algum $\alpha \in (0, +\infty)$. Mas então teríamos (a menos de subsequência) que

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{m\to+\infty} J_\mu(v_{\mu_m}) &\geq \lim_{m\to+\infty} F\left(\sqrt{\|v_{\mu_m}\|^2 - \lambda_1 |v_{\mu_m}|_2^2}\right) \\ &= F\left(\lim_{m\to+\infty} \sqrt{\|v_{\mu_m}\|^2 - \lambda_1 |v_{\mu_m}|_2^2}\right) = F(\alpha) > 0, \end{aligned}$$

o que claramente é um absurdo.

Conforme foi observado anteriormente, podemos admitir que existe uma constante $C_6 > 0$ tal que $|v_\mu|_p^p \leq C_6$, para todo $\mu \geq 0$. Assim, pela continuidade da imersão $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ encontramos ainda $C_7 > 0$ tal que

$$|v_\mu|_2^2 \leq C_7, \ \ \forall\, \mu \geq 0. \tag{2.17}$$

Tomando $\mu > 0$ suficientemente pequeno, decorre de (2.16) e (2.17) que existe $C_8 > 0$ tal que

$$\|v_\mu\|^2 = \left(\sqrt{\|v_\mu\|^2 - \lambda_1 |v_\mu|_2^2}\right)^2 + \lambda_1 |v_\mu|_2^2 \leq C_8 \tag{2.18}$$

o que mostra que (v_μ) é limitada na norma de $H_0^1(\Omega)$, para $\mu > 0$ suficientemente pequeno. Logo, para toda sequência (μ_m) verificando (2.18) e tal que $\mu_m \to 0$, podemos admitir que a menos de subsequência,

$$\begin{cases} v_{\mu_m} \rightharpoonup w \text{ em } H_0^1(\Omega), \\ v_{\mu_m} \to w \text{ em } L^2(\Omega), \end{cases}$$

tendo em vista a compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e o Teorema C.5. Sendo assim, das propriedades de convergência fraca e por (2.16), temos as relações

$$\|w\|^2 \leq \liminf_{m \to +\infty} \|v_{\mu_m}\|^2, \tag{2.19}$$

e

$$\|v_{\mu_m}\|^2 = \left(\sqrt{\|v_{\mu_m}\|^2 - \lambda_1 |v_{\mu_m}|_2^2}\right)^2 + \lambda_1 |v_{\mu_m}|_2^2 \overset{\mu \to 0}{\longrightarrow} \lambda_1 |w|_2^2. \tag{2.20}$$

Por (2.19), (2.20) e da caracterização variacional de λ_1 (ver Proposição 1.1) resulta que

$$\|w\|^2 \leq \liminf_{m \to +\infty} \|v_{\mu_m}\|^2 = \lambda_1 |w|_2^2 \leq \|w\|^2,$$

o que por sua vez nos assegura que $\|v_{\mu_m}\|^2 \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \|w\|^2$ e $w = t\varphi_1$, para algum $t > 0$. Em particular, tem-se $v_{\mu_m} \to w$, dado que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Resta mostrar que $t = t_0$. Isto pode ser feito tomando a subsequência acima e observando que, como F tem crescimento abaixo do crítico, o Teorema 1.3 garante que o funcional

$g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$g(u) = \int_\Omega (W^+ + a)F(u),\ u \in H_0^1(\Omega),$$

é contínuo, de sorte que

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \int_\Omega (W^+(x) + a)F(v_{\mu_m}) = \int_\Omega (W^+ + a)F(w) = \int_\Omega (W^+ + a)F(t\varphi_1).$$

Desse modo, como $t\varphi_1 > 0$ e $J_0(t\varphi_1) = 0 = \gamma(0)$, podemos utilizar o fato constatado na ETAPA 5 para ver que $t = t_0$.

ETAPA 7: Existência de um ponto fixo para a aplicação γ.

A fim de mostrar que a equação $\gamma(\mu) = u$ admite solução, note que pela etapa 6 e pela hipótese (2.4), temos que

$$\frac{\gamma(\mu)}{\mu} = \frac{1}{\mu} F\left(\sqrt{\|v_\mu\|^2 - \lambda_1 |v_\mu|_2^2}\right) + \left(1 - \int_\Omega W(x)F(v_\mu)\right) \stackrel{\mu\to 0^+}{\longrightarrow} 1 - \int_\Omega W(x)F(t_0\varphi_1) > 1.$$

Logo, existe $\delta > 0$, suficientemente pequeno, para o qual tem-se $\gamma(\mu) > \mu$ sempre que $0 < \mu < \delta$. Juntando este fato e o que foi demonstrado na ETAPA 4, podemos utilizar o teorema do valor intermediário para assegurar a existência de um ponto μ^* tal que $l(\mu^*) = 0$, em que $l(\mu) = \gamma(\mu) - \mu$.

ETAPA 8: v_{μ^*} é solução do problema $(P_{\lambda_1,\gamma})$.

Iremos agora introduzir um funcional auxiliar a fim de provar que v_{μ^*} é solução do problema $(P_{\lambda_1,\gamma})$. Seja então $\tilde{J} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\tilde{J}(u) = F\left(\sqrt{\|u\|^2 - \lambda_1 |u|_2^2}\right) - \mu^* \int_\Omega W(x)F(u).$$

Dado $u \in S$ podemos reescrever $\tilde{J}(u)$ como

$$\tilde{J}(u) = F\left(\sqrt{\|u\|^2 - \lambda_1 |u|_2^2}\right) - \mu^* \int_\Omega (W^+ - W^- + a - a)F(u),$$

para obter

$$\begin{aligned}\tilde{J}(u) &= F\left(\sqrt{\|u\|^2 - \lambda_1|u|_2^2}\right) + \mu^* \int_\Omega (W^- + a)F(u) - \mu^* \int_\Omega (W^+ + a)F(u)\\ &= F\left(\sqrt{\|u\|^2 - \lambda_1|u|_2^2}\right) + \mu^* \int_\Omega (W^- + a)F(u) - \mu^*\\ &= J_{\mu^*}(u) - \mu^*.\end{aligned}$$

Tendo isso em vista, e utilizando o fato provado na ETAPA 7, temos

$$\tilde{J}(v_{\mu^*}) = J_{\mu^*}(v_{\mu^*}) - \mu^* = \gamma(\mu^*) - \mu^* = 0.$$

Sendo assim, para provar que v_{μ^*} é um minimizante global para $\tilde{J}$ em $H_0^1(\Omega)$, é suficiente mostrarmos que $\tilde{J}(u) \geq 0 = \tilde{J}(v_{\mu^*})$, seja qual for $u \in H_0^1(\Omega)$. Para esse fim, veja que se fixarmos $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $u^+ \equiv 0$, então devemos ter $u^- \not\equiv 0$, e por conseguinte

$$\begin{aligned}\tilde{J}(u) &= F\left(\sqrt{\|u^-\|^2 - \lambda_1|u^-|_2^2}\right) - \mu^* \int_\Omega (W^+(x) + a)F(-u^-)\\ &= F\left(\sqrt{\|u^-\|^2 - \lambda_1|u^-|_2^2}\right) \geq 0 = \tilde{J}(v_{\mu^*}).\end{aligned}$$

Nesse caso, já temos a desigualdade desejada. Por outro lado, se for $u^+ \not\equiv 0$, a função $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(t) = \int_\Omega (W^+(x) + a)F(tu),$$

é estritamente crescente e contínua, pois F o é. Note ainda que, por (2.3), ψ é ilimitada superiormente. Daí, resulta que existe um único $t = t(u) \in (0, +\infty)$ tal que $\psi(t(u)) = 1$, o qual é não nulo, tendo em vista que $\psi(0) = 0$. Além disso, evidentemente tem-se $t(u)u \in S$.

Desde que estamos supondo $q \leq p$, usando o fato de que $\psi(t(u)) = 1$ e as desigualdades

$$\begin{cases}\psi(t) \geq t^p \int_\Omega (W^+(x) + a)F(u), \text{ para todo } t \geq 1,\\ \psi(t) \geq t^q \int_\Omega (W^+(x) + a)F(u), \text{ para todo } t \leq 1,\end{cases}$$

obtidas como aplicação direta da hipótese (2.3), deduzimos facilmente a estimativa

$$\min\{t(u)^{-p}, t(u)^{-q}\} \geq \int_\Omega (W^+(x) + a)F(u). \tag{2.21}$$

Ainda utilizando (2.3), concluímos que

$$F\left(\sqrt{\|u\|^2-\lambda_1|u|_2^2}\right) \geq \min\{t(u)^{-p}, t(u)^{-q}\} F\left(\sqrt{\|t(u)u\|^2-\lambda_1|t(u)u|_2^2}\right). \tag{2.22}$$

Daí, observando que $W(x) = (W^+(x)+a)-(W^-(x)+a)$ e valendo-nos de (2.22), chegamos às seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\tilde{J}(u) &\geq \min\{t(u)^{-p}, t(u)^{-q}\} F\left(\sqrt{\|t(u)u\|^2-\lambda_1|t(u)u|_2^2}\right) - \mu^* \int_\Omega W(x)F(u) \\
&\geq \min\{t(u)^{-p}, t(u)^{-q}\} J_{\mu^*}(t(u)u) - \mu^* \int_\Omega (W^+(x)+a)F(u).
\end{aligned}$$

Como também $J_{\mu^*}(t(u)u) \geq \gamma(\mu^*) = \mu^*$, decorre de (2.21) que

$$\begin{aligned}
&\min\{t(u)^{-p}, t(u)^{-q}\} J_{\mu^*}(t(u)u) - \mu^* \int_\Omega (W^+(x)+a)F(u) \\
&\geq \min\{t(u)^{-p}, t(u)^{-q}\} \mu^* - \mu^* \int_\Omega (W^+(x)+a)F(u) \\
&= \mu^* \left(\min\{t(u)^{-p}, t(u)^{-q}\} - \int_\Omega (W^+(x)+a)F(u)\right) \geq 0 = \tilde{J}(v_{\mu^*}),
\end{aligned}$$

de sorte que $\tilde{J}(u) \geq \tilde{J}(v_{\mu^*})$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo, v_{μ^*} é um ponto de mínimo para $\tilde{J}$, o que acarreta em $\tilde{J}'(u) \equiv 0$, isto é,

$$\alpha\left(\int_\Omega \nabla v_{\mu^*} \cdot \nabla \varphi - \lambda_1 \int_\Omega v_{\mu^*}\varphi\right) = \mu^* \int_\Omega W(x) f(v_{\mu^*})\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

em que

$$\alpha = \frac{f\left(\sqrt{\|v_{\mu^*}\|^2-\lambda_1|v_{\mu^*}|_2^2}\right)}{\left(\sqrt{\|v_{\mu^*}\|^2-\lambda_1|v_{\mu^*}|_2^2}\right)}.$$

Se fosse $\alpha = 0$, como $f(s) > 0$ para $s > 0$ e $f(0) = 0$, seguiria da igualdade

$$f\left(\sqrt{\|v_{\mu^*}\|^2-\lambda_1|v_{\mu^*}|_2^2}\right) = 0,$$

que $\|v_{\mu^*}\|^2 - \lambda_1|v_{\mu^*}|_2^2 = 0$. Dessa forma, teríamos $v_{\mu^*} = t_0\varphi_1$, implicando em

$$\mu^* W(x) f(t_0\varphi_1) = 0.$$

No entanto, uma vez que $\mu^* > 0$, $W(x) \not\equiv 0$ e $f(t_0\varphi_1) > 0$, a igualdade acima não pode ocorrer. Consequentemente $\alpha > 0$, de sorte que o par ordenado $(v_{\mu^*}, \mu^*/\alpha)$ satisfaz

$$-\Delta v_{\mu^*} = \lambda_1 v_{\mu^*} + \frac{\mu^*}{\alpha} W(x) f(v_{\mu^*}) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

ETAPA 9: Positividade da solução.

A fim de provar que v_{μ^*} é uma solução positiva para $(P_{\lambda_1,\gamma})$, vamos recorrer ao Princípio do Máximo (Teorema 1.7). Para tanto, recorde que a função $u \in W^{2,l}(\Omega), l > N$, conforme foi observado após o enuciado do Teorema 2.2. Lembrando ainda que $u_{n,\mu^*} \rightharpoonup v_{\mu^*}$ e que $u_{n,\mu^*} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sem perda de generalidade, podemos admitir que $v_{\mu^*}(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω. Além disso, como $\mu^*/\alpha > 0$, temos

$$-\Delta v_{\mu^*} \geq \frac{\mu^*}{\alpha} W(x) v_{\mu^*}^{p-1} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} -\Delta v_{\mu^*} &\geq \frac{\mu^*}{\alpha}(W^+(x) - W^-(x))(g^+(x) - g^-(x)) \\ &= \frac{\mu^*}{\alpha}(W^+(x) + W^-(x) g^-(x)) - \frac{\mu^*}{\alpha}(W^+(x) g^+(x) + W^-(x) g^+(x)), \end{aligned} \tag{2.23}$$

em que denotamos $g(x) = v_{\mu^*}^{p-1}(x)$, por simplicidade.

Agora, notando que os termos entre parentes na expressão acima são sempre não negativos e lembrando que v_{μ^*} é não trivial, podemos definir a função

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu^*}{\alpha} \dfrac{(W^+(x) g^-(x) + W^-(x) g^+(x))}{v_{\mu^*}(x)}, & \text{se } v_{\mu^*}(x) > 0, \\ 0, & \text{se } v_{\mu^*}(x) = 0, \end{cases}$$

a qual satisfaz $c(x) \geq 0$ em Ω. Note que a função $c(x)$ acima definida pertence a $L^\infty(\Omega)$, uma vez que a continuidade da função v_{μ^*} no compacto $\overline{\Omega}$ nos assegura a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$0 \leq c(x) \leq |W|_\infty \frac{|g(x)|}{v_{\mu^*}(x)} = |W|_\infty v_{\mu^*}^{p-2}(x) \leq C, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Resulta então da desigualdade em (2.23) que $-\Delta v_{\mu^*} + c(x) v_{\mu^*} \geq 0$ q.t.p. em Ω. Estamos portanto habilitados a utilizar o Teorema 1.7, com o operador $L = -\Delta + c(x)$, para concluir que $v_{\mu^*} > 0$ em Ω. $\square$

2.2 O caso não-restrito

Vamos agora lidar com o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u = W(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_{λ_1}}$$

Diferentemente da seção anterior, para tratar do problema acima imporemos condições apropriadas sobre a função f, objetivando utilizar o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.4) a fim de obter pontos críticos não-triviais para o funcional associado a (P_{λ_1}). Para este fim, iremos admitir que f satisfaz as condições (2.1) e (2.2) enunciadas no início do Capítulo 2, isto é,

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{|s|^{q-2}s} = a > 0 \;\text{ e }\; \lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} = 1,$$

bem como as condições assumidas no Teorema 2.1.

O funcional associado ao problema (P_{λ_1}) é dado por

$$I_{\lambda_1}(u) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \lambda_1 |u|_2^2\right) - \int_\Omega W(x)F(u), \;\; u \in H_0^1(\Omega),$$

em que $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\, ds$.

Uma vez que pretendemos utilizar o Teorema do Passo da Montanha, devemos nos preocupar em mostrar que I_{λ_1} está bem definido e é de classe C^1. Isto pode ser feito observando que $h(x,s) = \lambda_1 s + W(x)f(s)$ tem crescimento subcrítico (vide Teorema B.5) e aplicando o Teorema 1.3. Com relação às demais condições requeridas pelo Teorema 1.4, na Subseção 2.2.1 mostraremos que a geometria do Passo da Montanha é satisfeita e, na Subseção 2.2.2, verificaremos a condição (PS).

2.2.1 A geometria do Passo da Montanha

O seguinte lema mostra que o funcional definido acima possui a geometria do Passo da Montanha (cf. Teorema 1.4).

Lema 2.2. *Se f satisfaz as condições* (2.1) *e* (2.2)*, e além disso*

$$\int_\Omega W(x)\varphi_1^q < 0, \tag{2.24}$$

então $u_0 = 0$ é um mínimo local estrito para o funcional I_{λ_1}. Além disso, I_{λ_1} satisfaz (i) e (ii) do Teorema 1.4.

Demonstração. Denote por

$$A = -\int_\Omega W(x)\varphi_1^q > 0.$$

Pelo Teorema C.3, dado $u \in H_0^1(\Omega)$, existe um único v tal que $u = t\varphi_1 + v$, em que $t \in \mathbb{R}$ e v satisfaz

$$\int_\Omega v\varphi_1 = 0.$$

Se $u \in H_0^1(\Omega)$ verifica $\|u\| \leq \dfrac{1}{10|\varphi_1|_\infty}$, então desde que

$$\|u\|^2 = \|t\varphi_1 + v\|^2 = t^2\|\varphi_1\|^2 + \|v\|^2 = t^2 + \|v\|^2,$$

obtemos

$$|t| \leq \frac{1}{10|\varphi_1|_\infty}. \tag{2.25}$$

Agora, a Proposição 1.1 nos garante que $\lambda_2|v|_2^2 \leq \|v\|^2$, o que implica em $-\lambda_1|v_2|_2^2 \geq -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\|v\|^2$. Portanto, considerando $a > 0$ dado por (2.1), temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda_1}(u) &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \lambda_1|u|_2^2\right) - \int_\Omega W(x)F(u) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 - \lambda_1|v|_2^2\right) - \int_\Omega W(x)F(t\varphi_1 + v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|v\|^2 - \int_\Omega W(x)F(t\varphi_1 + v) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|v\|^2 - \frac{a|t|^q}{q}\int_\Omega W(x)\varphi_1^q + R(t,v) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|v\|^2 + \frac{Aa|t|^q}{q} + R(t,v), \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde

$$R(t,v)=\int_\Omega W(x)\left[\frac{a|t\varphi_1|^q}{q}-F(t\varphi_1)\right]+\int_\Omega W(x)\left[F(t\varphi_1)-F(t\varphi_1+v)\right].$$

Afirmamos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{|t|^q}\int_\Omega W(x)\left[\frac{a|t\varphi_1|^q}{q}-F(t\varphi_1)\right]. \tag{2.27}$$

Com efeito, por (2.1), tomando $\varepsilon=1$, existirá $\delta>0$ tal que

$$|f(s)|\le(a+1)|s|^{q-1} \text{ para todo } |s|<\delta.$$

Desde que $|t\varphi_1(x)|\le|t||\varphi_1|_\infty$, $x\in\Omega$, tomando $|t|<\dfrac{\delta}{|\varphi_1|_\infty}$, temos

$$\begin{aligned}\left|W(x)\frac{F(t\varphi_1(x))}{|t|^q}\right|&\le M\left|\frac{F(t\varphi_1(x))}{|t|^q}\right|\le M\int_0^{t\varphi_1(x)}\frac{|f(s)|}{|t|^q}ds\le M(a+1)\int_0^{t\varphi_1(x)}\frac{|s|^{q-1}}{|t|^q}ds\\&=\frac{M(a+1)}{q}\frac{|t\varphi_1(x)|^q}{|t|^q}\le\frac{M(a+1)}{q}|\varphi_1|_\infty^q\in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

A partir de (2.1), a regra de L'Hopital nos permite obter a relação

$$\lim_{s\to 0}\frac{F(s)}{|s|^q}=\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{q|s|^{q-2}s}=\frac{a}{q}, \tag{2.28}$$

de onde segue que

$$\lim_{t\to 0}\frac{W(x)F(t\varphi_1(x))}{|t|^q}=\frac{W(x)}{q}\lim_{t\to 0}\frac{f(t\varphi_1(x))}{|t|^{q-2}}=\frac{W(x)}{q}\lim_{t\to 0}\frac{f(t\varphi_1(x))}{|t\varphi_1(x)|^q}\varphi_1^q(x)=\frac{aW(x)\varphi_1^q(x)}{q}$$

em Ω. Podemos então usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que vale (2.27).

A fim de estimar a parcela restante na definição de $R(t,v)$ em (2.27) veja que, pelo Teorema do Valor Médio, para cada v,t,x existe um número $\theta=\theta(v,t,x)$, com $\theta\in(0,1)$ tal que

$$F(t\varphi_1(x)+v(x))-F(t\varphi_1(x))=f(t\varphi_1(x)+\theta v(x))v(x). \tag{2.29}$$

Além disso, por (2.1), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq (a+\varepsilon)|s|^{q-1}, \text{ para todo } |s| < \delta,$$

e portanto podemos usar a continuidade da função $\dfrac{|f(s)|}{|s|^{q-1}}$ longe da origem para obter $C_1 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_1|s|^{q-1}, \text{ se } |s| \leq 1.$$

Por outro lado, usando a condição (2.2) e a continuidade da função $\dfrac{f(s)}{|s|^{p-1}}$ longe da origem, podemos obter $C_2 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq C_2|s|^{p-1}, \text{ se } |s| \geq 1.$$

De posse dessas estimativas, tomando $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$, obtemos

$$\begin{cases} |f(s)| \leq C_3|s|^{q-1}, \text{ se } |s| \leq 1, \\ |f(s)| \leq C_3|s|^{p-1}, \text{ se } |s| \geq 1. \end{cases} \tag{2.30}$$

Tendo em vista a relação (2.30), iremos considerar dois casos. Primeiro, se $x \in \Omega$ é tal que $|u(x)| = |t\varphi_1(x) + \theta v(x)| \geq 1$. Neste caso, lembrando que $|t| \leq \dfrac{1}{10|\varphi_1|_\infty}$, chegamos à seguinte desigualdade

$$|\theta v(x)| \geq 1 - |t|\varphi_1(x) \geq 1 - \frac{\varphi_1(x)}{10|\varphi_1|_\infty} = \frac{10|\varphi_1|_\infty - \varphi_1(x)}{10|\varphi_1|_\infty} \geq \frac{9\varphi_1(x)}{10|\varphi_1|_\infty} \geq 9|t|\varphi_1(x).$$

Usando esta desigualdade e a relação (2.30) vemos que

$$\begin{aligned} |W(x)||f(t\varphi_1(x) + \theta v(x))| &\leq |W|_\infty C_3|t\varphi_1(x) + \theta v(x))|^{p-1}|v(x)| \\ &\leq |W|_\infty C_3[|t\varphi_1(x)| + |\theta v(x)|]^{p-1}|v(x)| \\ &\leq |W|_\infty C_3\left[\frac{|\theta v(x)|}{9} + |\theta v(x)|\right]^{p-1}|v(x)| \\ &= \left(\frac{10}{9}\right)^{p-1}|W|_\infty C_3|v(x)|^p. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Por outro lado, se $x \in \Omega$ é tal que $|u(x)| = |t\varphi_1(x) + \theta v(x)| \leq 1$, podemos novamente usar a relação (2.30) para obter

$$\begin{aligned}
|W(x)||f(t\varphi_1(x)+\theta v(x))| &\leq |W|_\infty C_3 |t\varphi_1(x)+\theta v(x))|^{q-1}|v(x)| \\
&\leq |W|_\infty C_3 [|t\varphi_1(x)| + |\theta v(x)|]^{q-1}|v(x)| \\
&\leq 2^{q-2}|W|_\infty C_3 [|t\varphi_1|^{q-1} + |v(x)|^{q-1}]|v(x)| \\
&\leq |t\varphi_1|^{q-1}|\overline{C}v(x)| + \overline{C}|v(x)|^q \\
&\leq \varepsilon|t\varphi_1|^q + C_\varepsilon|v(x)|^q, \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

em que, na passagem para a última desigualdade, utilizamos a Desigualdade de Young (cf. Teorema C.12), tomando $a = |t\varphi_1|^{q-1}$, $b = |\overline{C}v(x)|$ e observando que $(q-1)/q + 1/q = 1$.

Retomando (2.27), por (2.29), (2.31), (2.32) e das imersões de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
R(t,v) &= o(|t|^q) + \int_\Omega W(x)[F(t\varphi_1) - F(t\varphi_1 + v)] \\
&\geq o(|t|^q) - \left(\frac{10}{9}\right)^{p-1} C_3|W|_\infty C_p\|v\|^p - \varepsilon|t|^q|\varphi_1|_\infty^q|\Omega| - C_\varepsilon C_q\|v\|^q \\
&= o(|t|^q) - C_4\|v\|^p - \varepsilon C_5|t|^q - C_6\|v\|^q,
\end{aligned}$$

em que $o(|t|^q)$ denota uma quantidade $B(t)$ que satisfaz $\lim\limits_{t\to 0} B(t)|t|^{-q} = 0$.

Logo, retomando (2.26), vemos que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda_1}(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|v\|^2 + \frac{Aa|t|^q}{q} + R(t,v) \\
&\geq \left[\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} - C_4\|v\|^{p-2} - C_6\|v\|^{q-2}\right]\|v\|^2 + \left[\frac{Aa}{q} + \frac{o(|t|^q)}{|t|^q} - \varepsilon C_5\right]|t|^q.
\end{aligned}$$

Tome $0 < \varepsilon C_5 < \dfrac{Aa}{2q}$. Daí,

$$I_{\lambda_1}(u) \geq \left[\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} - C_4\|v\|^{p-2} - C_6\|v\|^{q-2}\right]\|v\|^2 + \left[\frac{Aa}{2q} + \frac{o(|t|^q)}{|t|^q}\right]|t|^q.$$

Existe $\eta > 0$ tal que se $|t| \leq \eta$, então $\dfrac{|o(|t|^q)|}{|t|^q} < \dfrac{Aa}{4q}$. Como, $\|u\|^2 = \|t\varphi_1 + v\|^2 = t^2 + \|v\|^2$, vale que $\|u\| \geq |t|$ e $\|u\| \geq \|v\|$. Logo, supondo que $\|u\| \leq \eta$ temos $|t| \leq \eta$ e portanto,

$$I_{\lambda_1}(u) \geq \left[\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} - C_4\|v\|^{p-2} - C_6\|v\|^{q-2}\right]\|v\|^2 + \frac{Aa}{4q}|t|^q$$

se $\|u\| \leq \rho_0 \leq \eta$. Sendo $p, q > 2$ existem $\rho_1, \rho_2 > 0$ tais que

$$C_4\rho_1^{p-2} < \frac{\lambda_2-\lambda_1}{8\lambda_2} \quad \text{e} \quad C_6\rho_2^{q-2} < \frac{\lambda_2-\lambda_1}{8\lambda_2}.$$

Escolhendo $\rho = \min\{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$, temos que

$$\begin{aligned} I_{\lambda_1}(u) &\geq \left[\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} - \frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{8\lambda_2} - \frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{8\lambda_2}\right]\|v\|^2 + \frac{Aa}{4q}|t|^q \\ &= \frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{4\lambda_2}\|v\|^2 + \frac{Aa}{4q}|t|^q \end{aligned}$$

sempre que $\|u\| \leq \rho$. Além disso, para $u \neq 0$, v e t não se anulam simultaneamente, de sorte que a desigualdade acima implica que $I_{\lambda_1}(u) > 0 = I_{\lambda_1}(0)$, para $0 < \|u\| \leq \rho$. Mais do que isso, sem perda de generalidade podemos supor que $\|u\| \leq \rho < 1$. Em particular, tem-se $\|v\| < 1$, o que implica que

$$\begin{aligned} I_{\lambda_1}(u) &\geq \min\left\{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{4\lambda_2}, \frac{Aa}{4q}\right\}(\|v\|^q + |t|^q) \\ &\geq \min\left\{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{4\lambda_2}, \frac{Aa}{4q}\right\}\frac{(\|v\|+|t|)^q}{2^q} \\ &\geq \min\left\{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{4\lambda_2}, \frac{Aa}{4q}\right\}\frac{(\|v\|^2+|t|^2)^q}{2^q} \\ &= \min\left\{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{4\lambda_2}, \frac{Aa}{4q}\right\}\frac{\rho^{2q}}{2^{q-1}} = \alpha > 0, \end{aligned}$$

desde que $\|u\| = \rho$. Isto conclui a verificação do item (i).

Mostraremos agora que o funcional I_{λ_1} satisfaz a hipótese (ii) do Teorema 1.4. Com efeito, pela condição (2.2) existe $s_0 > 0$ tal que

$$\frac{f(s)}{|s|^{p-2}s} \geq \frac{1}{2}, \;\; \forall\, |s| > s_0.$$

Consequentemente, pela continuidade de f, existe $C_7 > 0$ tal que

$$f(s) \geq \frac{1}{2}|s|^{p-2}s - C_7, \ \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Daí, segue que

$$F(s) \geq \frac{1}{2}\int_0^s (t^{p-1} - C_7)\,dt = \frac{1}{2p}s^p - C_7 s, \ \ \forall\, s \geq 0.$$

Assim, dado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^+) \setminus \{0\}$, $\varphi \geq 0$, podemos usar a definição do funcional I_{λ_1} e a hipótese de que $p > 2$ para obter

$$\lim_{t\to+\infty} I_{\lambda_1}(t\varphi) \leq \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^2}{2}(\|\varphi\|^2 - \lambda_1|\varphi|_2^2) - \frac{t^p}{2p}\int_K W(x)|\varphi|^p - tpC_7\int_K W(x)|\varphi|\right] = -\infty$$

em que $K = \mathrm{supp}\varphi$. Escolhendo $t_0 > 0$ suficientemente grande obtemos $e = t_0\varphi$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I_{\lambda_1}(e) < 0$. Isso mostra que I_{λ_1} satisfaz (ii) do Teorema do Passo da Montanha, concluindo a demonstração do Lema 2.2. □

2.2.2 A condição de Palais-Smale

Agora estamos interessados em estudar sob que condições o funcional I_{λ_1} satisfaz (PS). Nesse sentido, o próximo lema estabelece uma condição suficiente para que o funcional I_{λ_1} satisfaça essa condição. Antes de enunciá-lo, gostaríamos de definir um certo subconjunto de $H_0^1(\Omega)$ e estabelecer algumas notações.

Considere o subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$ dado por

$$H_D^1(\Omega^0) := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ q.t.p em } \Omega \setminus \Omega^0\}$$

e defina

$$\lambda_1^D(\Omega^0) := \inf_{u\in H_D^1(\Omega^0)} \frac{\int_{\Omega^0}|\nabla u|^2}{\int_{\Omega^0}|u|^2}.$$

De acordo com Alama e Del Pino em [4], ao supor que $\partial\Omega^0$ é regular pode-se mostrar que $H_D^1(\Omega^0) = H_0^1(\Omega^0)$ e por conseguinte, que o espectro $\sigma_D(\Omega^0)$ de $-\Delta$ em $H_D^1(\Omega)$ coincide com o espectro em $H_0^1(\Omega^0)$. Dessa forma, podemos argumentar como na Proposição 1.1 para concluir que o ínfimo acima definido é atingido e vale a desigualdade $\lambda_1^D(\Omega^0) > \lambda_1$, como estabelecido na Proposição 1.3.

Observação 3. *Tendo em vista a hipótese de que* $\partial\Omega^0$ *é regular* (H_2)*, com base nas considerações acima iremos denotar por* $\sigma(\Omega^0)$ *o espectro de* $-\Delta$ *em* $H_D^1(\Omega^0) = H_0^1(\Omega^0)$*. Também escreveremos* $\lambda_1(\Omega^0)$ *ao invés de* $\lambda_1^D(\Omega^0)$*.*

Lema 2.3. *Suponha que* $\lambda \notin \sigma(\Omega^0)$*,* f *satisfaz* (2.2)*, com* $2 < p < 2^*$*, e vale a condição de crescimento*

$$|f'(s)| \leq \tilde{A}|s|^{p-2} + \tilde{B}, \tag{2.33}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ *e constantes convenientes* $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$*. Então* I_λ *satisfaz (PS) se vale alguma das seguintes condições:*

(i) $\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset$*;*

(ii) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ *tais que, para todo* $s \in \mathbb{R}$*,*

$$|f(s)s - pF(s)| \leq c_1|s|^2 + c_2.$$

Demonstração. Considere uma sequência (PS) relativamente ao funcional I_λ, isto é, uma sequência $u_n \in H_0^1(\Omega)$ verificando

$$I_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}(\|u_n\|^2 - \lambda|u_n|_2^2) - \int_\Omega W(x)F(u_n) \leq c, \tag{2.34}$$

$$I'_\lambda(u_n)\varphi = \int_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla\varphi - \lambda u_n\varphi - W(x)f(u_n)\varphi) = \int_\Omega \nabla z_n \cdot \nabla\varphi, \ \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.35}$$

em que $z_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n \to +\infty$.

Em posse da estimativa $|h(x,s)| \leq \tilde{C}(1+|s|^{p-1})$, com $h(x,s) = \lambda_1 s + W(x)f(s)$ (ver Teorema B.5), desde que $2 < p < 2^*$, para concluir que I_λ satisfaz (PS), basta mostrar que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ (cf. Proposição 1.2).

Suponha por absurdo que (u_n) não é limitada, isto é, a menos de subsequência vale que $\|u_n\| \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. A sequência $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, logo, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Afirmação: $v_0 \not\equiv 0$ em Ω.

Assumindo esta afirmação por um momento vejamos o que acontece. Dividindo a equação em (2.35) por $\|u_n\|$ e usando as propriedades da convergência fraca, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla v_0 \cdot \nabla \varphi - \lambda v_0 \varphi) &= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|}\varphi \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\|u_n\|^{p-2} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\varphi \right). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Agora note que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\varphi = 0. \tag{2.37}$$

De fato, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\|u_n\|^{p-2} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\varphi \right) = \int_\Omega \nabla v_0 \cdot \nabla \varphi - \lambda v_0 \varphi < +\infty,$$

e $\|u_n\|^{p-2} \to +\infty$ a única possibilidade é esta.

Por outro lado, observando que $u_n = \|u_n\| \cdot \dfrac{u_n}{\|u_n\|} = t_n v_n$, em que estamos denotando $t_n = \|u_n\|$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\varphi = \int_\Omega W(x) \left[\frac{f(t_n v_n) - f(t_n v_0)}{t_n^{p-1}} \right] \varphi + \int_\Omega W(x) \left[\frac{f(t_n v_0) - |t_n v_0|^{p-2} t_n v_0}{t_n^{p-1}} \right] \varphi \\ + \int_\Omega W(x) |v_0|^{p-2} v_0 \varphi. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Mostremos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W(x) \left[\frac{f(t_n v_0) - |t_n v_0|^{p-2} t_n v_0}{t_n^{p-1}} \right] \varphi = 0. \tag{2.39}$$

De fato, veja que

$$\frac{f(t_n v_0)}{t_n^{p-1}} - |v_0|^{p-2} v_0 = \begin{cases} 0, & \text{se } v_0(x) = 0, \\ \left[\dfrac{f(t_n v_0)}{t_n^{p-1} |v_0|^{p-2} v_0} - 1 \right] |v_0|^{p-2} v_0 \,, & \text{se } v_0(x) \neq 0. \end{cases}$$

Logo, se $v_0(x) \neq 0$, a relação (2.2) nos fornece

$$\lim_{n\to+\infty} W(x)\left[\frac{f(t_nv_0)}{t_n^{p-1}} - |v_0|^{p-2}v_0\right] = \lim_{n\to+\infty} W(x)\left[\frac{f(t_nv_0)}{t_n^{p-2}|v_0|^{p-2}t_nv_0} - 1\right]|v_0|^{p-2}v_0 = 0.$$

Se $v_0(x) = 0$, claramente temos o mesmo resultado. Agora, sem perda de generalidade, podemos supor que $t_n \geq 1$ e assim concluir, usando que f tem crescimento subcrítico (ver Teorema B.5), que

$$\frac{|f(t_nv_0)|}{t_n^{p-1}} \leq \frac{C|t_nv_0|^{p-1}+D}{t_n^{p-1}} = C|v_0|^{p-1} + \frac{D}{t_n^{p-1}} \leq C|v_0|^{p-1} + D.$$

Então, desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $1 \leq r < 2^*$, a Desigualdade de Hölder nos dá

$$\left|W(x)\left[\frac{f(t_nv_0)}{t_n^{p-1}} - |v_0|^{p-2}v_0\right]\varphi\right| \leq |W|_\infty C(|v_0|^{p-1}+D)|\varphi| + |W|_\infty|v_0|^{p-1}|\varphi| \in L^1(\Omega).$$

Desse modo, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos leva a obter (2.39). Vamos agora estimar a integral

$$\int_\Omega W(x)\left[\frac{f(t_nv_n) - f(t_nv_0)}{t_n^{p-1}}\right]\varphi.$$

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $x \in \Omega$, a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) = h_n(x,s) = f(s(t_nv_n(x) - t_nv_0(x)) + t_nv_0(x)).$$

A função h assim definida é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e tal que $h(1) = f(t_nv_n(x))$ e $h(0) = f(t_nv_0(x))$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta = \theta(x,n) \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
f(t_nv_n(x)) - f(t_nv_0(x)) &= h(1) - h(0) = h'(\theta) \\
&= f'(\theta(t_nv_n(x) - t_nv_0(x)) + t_nv_0(x))(t_nv_n(x) - t_nv_0(x)) \\
&= t_nf'(\theta(t_nv_n(x) - t_nv_0(x)) + t_nv_0(x))(v_n(x) - v_0(x)) \\
&= t_nf'(t_n[\theta v_n(x) + (1-\theta)v_0(x)])(v_n(x) - v_0(x)).
\end{aligned}$$

Usando isto e a condição de crescimento sobre f', obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega W(x)\left[\frac{f(t_nv_n)-f(t_nv_0)}{t_n^{p-1}}\right]\varphi\right| &\leq |W|_\infty\int_\Omega\left|\frac{f(t_nv_n)-f(t_nv_0)}{t_n^{p-1}}\right||\varphi|\\
&= |W|_\infty\int_\Omega\frac{|f'(t_n[\theta v_n+(1-\theta)v_0])||v_n-v_0|}{t_n^{p-2}}|\varphi|\\
&\leq |W|_\infty\int_\Omega\frac{\tilde{A}(|t_n[\theta v_n+(1-\theta)v_0]|^{p-2}+\tilde{B})|v_n-v_0|}{t_n^{p-2}}|\varphi|\\
&\leq C_1\int_\Omega|\theta v_n+(1-\theta)v_0|^{p-2}+1)|v_n-v_0||\varphi|\\
&\leq C_1(|\theta v_n+(1-\theta)\ v_0|_p^{p-2}+1)|v_n-v_0|_p|\varphi|_p,
\end{aligned}$$

em que $C_1>0$ é uma constante adequada e, na passagem para a última desigualdade, usamos a desigualdade de Hölder generalizada, notando que $(p-2)/p+1/p+1/p=1$. Agora, das imersões compactas de Sobolev, segue que a expressão na última desigualdade acima converge a zero, quando $n\to\infty$. Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_\Omega W(x)\left[\frac{f(t_nv_n)-f(t_nv_0)}{t_n^{p-1}}\right]\varphi\right|=0.$$

Juntando isto, (2.37), (2.38) e (2.39), concluímos que

$$\int_\Omega W(x)|v_0|^{p-2}v_0\varphi=0,\ \ \forall\ \varphi\in H_0^1(\Omega).$$

Daí, uma vez observado que $C_0^\infty(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$, deduzimos, através do Lema Fundamental do Cálculo das Variações (cf. Teorema C.2), que

$$W(x)|v_0|^{p-2}v_0=0,\quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Desde que $\Omega=\Omega^0\cup\Omega^+\cup\Omega^-$ e W não se anula em $\Omega^+\cup\Omega^-$, conclui-se que $v_0\equiv 0$ q.t.p em $\Omega^+\cap\Omega^-$. Consequentemente, $v_0\in H_D^1(\Omega^0)=H_0^1(\Omega^0)$ e, além disso, lembrando que $W\equiv 0$ em Ω^0, retomando (2.36), obtemos

$$\int_{\Omega^0}(\nabla v_0\cdot\nabla\varphi-\lambda v_0\varphi)=\lim_{n\to+\infty}\left(\|u_n\|^{p-2}\int_{\Omega^0}W(x)\frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}}\varphi\right)=0,\ \ \forall\ \varphi\in H_0^1(\Omega^0).$$

Isto por sua vez, contraria a hipótese de que $\lambda\notin\sigma(\Omega^0)$, contradição esta que surgiu ao supormos que a sequência (u_n) não era limitada. Sendo assim, (u_n) deve ser limitada.

Resta ainda mostrar que $v_0 \not\equiv 0$. Na verdade, veremos que isto segue como consequência dos itens (i) e (ii) do Lema 2.3, os quais serão tratados separadamente.

Admitindo que vale (i), ou seja, que $\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset$, vamos supor por contradição que $v_0 \equiv 0$. Se for este o caso, dividindo a expressão em (2.35) por $\|u_n\|^2$ e escolhendo $\varphi = u_n$, vemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\nabla z_n}{\|u_n\|} \cdot \nabla v_n &= \int_\Omega \left[\left| \nabla \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right) \right|^2 - \lambda \left| \frac{u_n}{\|u_n\|} \right|^2 \right] - \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^2} u_n \\ &= \|v_n\|^2 - \lambda |v_n|_2^2 - \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^2} u_n \\ &= 1 - \lambda |v_n|_2^2 - \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^2} u_n.\end{aligned}$$

Assim, como $v_n \rightharpoonup v_0 = 0$ em $H_0^1(\Omega)$, a compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ fornece

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^2} u_n = 1. \tag{2.40}$$

Agora, uma vez que $\overline{\Omega^+}$ e $\overline{\Omega^-}$ são fechados e disjuntos, podemos usar o Lema de Urysson para obter uma função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1 \in \Omega^-$ e $\psi \equiv 0 \in \Omega^+$. Tomando $\varphi_n = \psi v_n \in H_0^1(\Omega)$, novamente por (2.35) temos

$$\begin{aligned} I'_\lambda(u_n)\psi v_n &= \int_\Omega [\nabla u_n \cdot \nabla(\psi v_n) - \lambda u_n(\psi v_n)] - \int_\Omega W(x) f(u_n)(\psi v_n) \\ &= \int_\Omega [\nabla u_n \cdot (\psi \nabla v_n + v_n \nabla \psi) - \lambda u_n(\psi v_n)] - \int_\Omega W(x) f(u_n)(\psi v_n) \\ &= \int_\Omega [(\nabla u_n \cdot \nabla v_n)\psi + (\nabla u_n \cdot \nabla \psi) v_n - \lambda u_n(\psi v_n)] - \int_\Omega (W^+ - W^-) f(u_n)(\psi v_n).\end{aligned}$$

Observando que $\nabla \psi = 0$, tanto para $x \in \Omega^+$ quanto para $x \in \Omega^-$, resulta desta última igualdade acima que

$$I'_\lambda(u_n)\psi v_n = \int_\Omega (\nabla u_n \cdot \nabla v_n)\psi - \lambda \int_\Omega u_n(v_n \psi) + \int_{\Omega^0} (\nabla u_n \cdot \nabla \psi) v_n + \int_{\Omega^-} W^-(x) f(u_n) v_n.$$

Dividindo esta expressão por $\|u_n\|$ e lembrando que $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, obtemos

$$I'_\lambda(u_n)\psi\frac{u_n}{\|u_n\|^2} = \int_\Omega |\nabla v_n|^2\psi - \lambda\int_\Omega |v_n|^2\psi + \int_{\Omega^0}(\nabla v_n\cdot\nabla\psi)v_n + \int_{\Omega^-} W^-(x)\frac{f(u_n)}{\|u_n\|^2}u_n. \tag{2.41}$$

Observando ainda que $(\nabla v_n\cdot\nabla\psi)$ é um sequência limitada em $L^2(\Omega^0)$, podemos usar a desigualdade de Hölder, com expoentes conjugados $r = s = 2$, para ver que

$$\int_{\Omega^0} |(\nabla v_n\cdot\nabla\psi)v_n| \leq |\nabla v_n\cdot\nabla\psi|_2|v_n|_2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n\to+\infty,$$

e, além disso,

$$\lambda\int_\Omega |v_n|^2\psi \leq \lambda\int_\Omega |v_n|^2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n\to+\infty,$$

em que usamos o fato de que $\psi\leq 1$ e a compacidade da imersão de Sobolev $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$. Deste modo, passando o limite quando $n\to+\infty$ em (2.41), obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_\Omega |\nabla v_n|^2\psi + \int_\Omega W^-(x)\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2}\right] = 0. \tag{2.42}$$

Por (2.2), existe $R > 0$ tal que $f(s)s > 0$ sempre que $|s| > R$. Como $[-R,R]$ é compacto e $f(s)s$ é contínua, existe $C > 0$ tal que $f(s)s\geq -C$ para todo $|s|\leq R$, donde $f(s)s + C\geq 0$, para todo $s\in\mathbb{R}$. Daí, como $W^-(x)$ é limitada e

$$\int_\Omega W^-(x)\frac{C}{\|u_n\|^2} \longrightarrow 0, \text{ quando } n\to+\infty, \tag{2.43}$$

por (2.42) ainda temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_\Omega |\nabla v_n|^2\psi + \int_\Omega W^-(x)\frac{(f(u_n)u_n + C)}{\|u_n\|^2}\right] = 0.$$

Desde que

$$0\leq\int_\Omega W^-(x)\frac{f(u_n)u_n + C}{\|u_n\|^2} \leq \int_\Omega |\nabla v_n|^2\psi + \int_\Omega W^-(x)\frac{f(u_n)u_n + C}{\|u_n\|^2},$$

por (2.42), (2.43) e o Teorema do Confronto, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega W^- \frac{f(u_n)u_n + C}{\|u_n\|^2} = 0,$$

de onde segue, utilizando mais uma vez (2.43), que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega W^-(x)\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 0. \tag{2.44}$$

Agora, por (2.34), (2.35), com $\varphi = u_n$, tem-se

$$\frac{1}{2}I'_\lambda(u_n)u_n - I_\lambda(u_n) = \int_\Omega W(x)\left[F(u_n) - \frac{1}{2}f(u_n)u_n\right] \geq -c + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla z_n \cdot \nabla u_n.$$

Dividindo esta última expressão por $\|u_n\|^2$ e passando o limite quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega W(x)\left[\frac{F(u_n) - \frac{1}{2}f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2}\right] \geq 0. \tag{2.45}$$

Por L'Hôpital e (2.2), temos que

$$\lim_{|s|\to+\infty}\frac{F(s)}{|s|^p} = \lim_{|s|\to+\infty}\frac{f(s)}{p|s|^{p-2}s} = \frac{1}{p}. \tag{2.46}$$

Observando que

$$\frac{|s|^p}{s} = \frac{|s|^{p-2}s^2}{s} = |s|^{p-2}s,$$

para todo $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, por (2.2) e (2.46), segue que

$$\lim_{|s|\to+\infty}\frac{F(s)}{f(s)s} = \lim_{|s|\to+\infty}\frac{F(s)}{|s|^p}\frac{|s|^p}{f(s)s} = \frac{1}{p}\cdot 1 = \frac{1}{p}.$$

Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|s| > R \implies \frac{1}{p} - \varepsilon < \frac{F(s)}{f(s)s} < \frac{1}{p} + \varepsilon.$$

Como antes, podemos tomar $R > 0$ suficientemente grande de modo que $f(s)s > 0$, e assim

$$|s| > R \implies \left(\frac{1}{p} - \varepsilon\right) f(s)s < F(s) < \left(\frac{1}{p} + \varepsilon\right) f(s)s.$$

Segue pela continuidade das funções envolvidas que existem $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$|s| \leq R \implies F(s) < \left(\frac{1}{p} + \varepsilon\right) f(s)s + C_1$$

e

$$|s| > R \implies \left(\frac{1}{p} - \varepsilon\right) f(s)s - C_2 < F(s).$$

Tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$, podemos escrever

$$\left(\frac{1}{p} - \varepsilon\right) f(s)s - C < F(s) < \left(\frac{1}{p} + \varepsilon\right) f(s)s + C,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Juntando esta relação com (2.44), (2.45) e lembrando que $\|u_n\| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W^+(x) \frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} &\geq \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W^+(x) \left[\frac{F(u_n) - \frac{1}{2} f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2}\right] \\
&\geq \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W^-(x) \left[\frac{F(u_n) - \frac{1}{2} f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2}\right] \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} - \varepsilon\right) \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W^-(x) \frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 0.
\end{aligned}$$

Fixando $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min\left\{\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right\}$, temos que $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \varepsilon < 0$, e então

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W^+ \frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 0,$$

o que é um absurdo, tendo em vista (2.40) e (2.44). Portanto, a afirmação de que $v_0 \not\equiv 0$ deve valer sob a condição (i).

Vamos mostrar agora que, se (ii) vale, então $v_0 \not\equiv 0$. Combinando novamente (2.34) e (2.35), obtemos

$$\int_\Omega W(x)\left[\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] \leq c - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla z_n \cdot \nabla u_n.$$

Usando isto e o item (ii), segue que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega W(x)f(u_n)u_n &= \frac{1}{2}\int_\Omega W(x)f(u_n)u_n - \frac{1}{p}\int_\Omega W(x)f(u_n)u_n \\
&\leq c - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla z_n \cdot \nabla u_n + \int_\Omega W(x)F(u_n) - \frac{1}{p}\int_\Omega W(x)f(u_n) \\
&= c - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla z_n \cdot \nabla u_n + \int_\Omega W(x)\left[F(u_n) - \frac{1}{p}f(u_n)u_n\right] \\
&\leq c - \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla z_n \cdot \nabla u_n + |W|_\infty \left(\frac{c_2}{p} + \frac{c_1}{p}\int_\Omega |u_n|^2\right).
\end{aligned}$$

Vamos novamente supor, por contradição, que $v_n \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, dividindo a desigualdade acima por $\|u_n\|^2$, vemos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega W(x)\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} \leq 0,$$

uma vez que $2 < p$.

Observando que (2.40) vale também neste caso, temos

$$1 = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega W(x)\frac{f(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} \leq 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, a afirmação de que $v_0 \not\equiv 0$ deve valer sob a condição (ii). A demonstração do Lema (2.3) está concluída. $\square$

Como foi mencionado anteriormente, tem-se $\lambda_1(\Omega^0) > \lambda_1$. Tendo isso em vista, o Lema 2.3 garante que I_{λ_1} satisfaz a condição (PS) e, com isso, todas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha estão verificadas. Sendo assim, já podemos afirmar que o nível minimax do Passo da Montanha é um nível crítico e, por conseguinte, temos garantida a existência de uma solução para o problema que estamos tratando. Entretanto, não se sabe ainda se a solução obtida é positiva, negativa ou muda de sinal em Ω. Tudo o que sabemos até então é que este ponto crítico é não trivial. Afirmamos que a solução obtida é positiva, e para checar isso tomaremos um caminho alternativo cuja escolha é justificada pelo ganho de uma estimativa que permite a obtenção desta solução positiva.

Considere então $e \in H_0^1(\Omega)$ nas condições do item (ii) do Teorema 1.4. Para o resultado a seguir, no contexto do Teorema 1.6, faremos $K = [0,1]$, $K_0 = \{0,1\}$, $X = H_0^1(\Omega)$ e $\phi = I_{\lambda_1}$. Além disso, escolheremos $\chi \in C(K_0, X)$ dada por $\chi(0) = 0$ e $\chi(1) = e$. Com essas escolhas, o espaço métrico completo M torna-se

$$M = \Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I_{\lambda_1}(\gamma(s))$$

é o nível minimax do passo da montanha. Por fim, $c_1 = \max_{\chi(K_0)} I_{\lambda_1}(s) = \max\{I_{\lambda_1}(0), I_{\lambda_1}(e)\} = 0$, uma vez que $I_{\lambda_1}(e) < 0$.

A seguir faremos a prova do Teorema 2.1, enunciado no início do Capítulo 2. Antes porém, recomendamos que o leitor veja a ideia da prova do Teorema 1.6, dada no Apêndice A, pois o argumento utilizado para demonstrar o Teorema 2.1 é baseado nela.

Demonstração. Desde que I_{λ_1} satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 1.4, temos

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} I_{\lambda_1}(\gamma(s)) > 0 = c_1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ e escolha $\gamma_n \in \Gamma$ com a seguinte propriedade:

$$c \leq \max_{s \in [0,1]} I_{\lambda_1}(\gamma_n(s)) \leq c + \varepsilon.$$

Podemos supor que a sequência (γ_n) escolhida acima é tal que $\gamma_n(s) \geq 0$, q.t.p. em Ω. Com efeito, uma vez que f é ímpar, temos que $F(s) = F(|s|)$. Além disso, como $|\gamma(s)| \in H_0^1(\Omega)$ sempre que $\gamma(s) \in H_0^1(\Omega)$, podemos escrever, para cada $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} I_{\lambda_1}(|\gamma(s)|) &= \frac{1}{2}(\||\gamma(s)|\|^2 - \lambda_1||\gamma(s)||_2^2) - \int_\Omega W(x)F(|\gamma(s)|) \\ &= \frac{1}{2}(\|\gamma(s)\|^2 - \lambda_1|\gamma(s)|_2^2) - \int_\Omega W(x)F(\gamma(s)) = I_{\lambda_1}(\gamma(s)). \end{aligned}$$

Posto isso, de acordo com o que foi discutido acerca do Teorema 1.6, para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível encontrar $\gamma_n^* \in \Gamma$ e $s_n \in [0,1]$ tais que, denotando por $v_n = \gamma_n^*(s_n) \in H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$\begin{cases} c - \dfrac{1}{n} \leq I_{\lambda_1}(v_n) \leq \max\limits_{s\in[0,1]} I_{\lambda_1}(\gamma_n^*(s)) \leq \max\limits_{s\in[0,1]} I_{\lambda_1}(\gamma_n(s)) \leq c + \dfrac{1}{n}, \\ \|I'_{\lambda_1}(v_n)\| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \\ \max\limits_{s\in[0,1]} \|\gamma_n^*(s) - \gamma_n(s)\| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

A primeira e a segunda relações acima mostram que (v_n) é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I_{λ_1}. Por Palais-Smale, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $v_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ fortemente quando $n \to +\infty$, o que pela regularidade do funcional, garante que u é um ponto crítico no nível c, e portanto, uma solução não-trivial do problema considerado.

Vamos mostrar agora que $u > 0$ em Ω. Denotando $u_n = \gamma_n(s_n)$, podemos usar a terceira das relações acima para obter

$$\|u_n - v\| \leq \|\gamma_n(s_n) - \gamma_n^*(s_n)\| + \|v_n - u\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \|v_n - u\|.$$

Lembrando que $v_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, essas desigualdades mostram que $u_n \to u$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. em Ω, de sorte que $u(x) \geq 0$, q.t.p em Ω.

De acordo com o Teorema B.6, temos que $u > 0$ em Ω. Além disso, pelo Teorema B.5 temos $u \in C^1(\overline{\Omega})$. $\square$

Capítulo 3

O caso $\lambda > \lambda_1$

Durante todo este capítulo iremos admitir a validade das hipóteses gerais (H1), (H2), (H3) itens (i) e (ii). Outras hipóteses serão mencionadas em momento oportuno.

Nosso objetivo agora é encontrar soluções positivas para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = W(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

cujo funcional associado é $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 - \lambda |u|_2^2) - \int_\Omega W(x)F(u).$$

Os teoremas enunciados a seguir são os dois principais resultados deste capítulo. Juntos, eles nos garantem a existência de pelo menos duas soluções positivas do problema (P_λ), para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$.

Teorema 3.1. *Suponha que $f' \in C^\beta([-c,c])$, para algum $c > 0$, e existe $2 < q < 2^*$ tal que*

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{s^{q-1}} = a > 0 \tag{3.1}$$

e

$$\int_\Omega W(x)\varphi_1^q < 0. \tag{3.2}$$

Nessas condições, para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, o problema (P_λ) admite uma solução positiva u_1 que é um mínimo local de I_λ em $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 3.2. *Suponha que* $f' \in C^{\beta}([-c,c])$*, para algum* $c>0$*, existem constantes* $\tilde{A},\tilde{B}>0$ *e* $2<p<2^*$ *tais que*

$$|f'(s)| \leq \tilde{A}|s|^{p-2} + \tilde{B}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Se além disso, $\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset$ *e as relações* (2.2)*,* (3.1) *e* (3.2) *são satisfeitas, então, para cada* $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$*, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta v = -\Delta u - (-\Delta u_1) = h(x, u_1 + v^+) - h(x, u_1) & \text{em } \Omega, \\ v = u - u_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q_λ}$$

admite uma solução $v_0 > 0$*. Em particular, para cada* $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$*, o problema* (P_λ) *possui uma segunda solução positiva* $u_2 > u_1$*.*

No capítulo anterior, consideramos o caso em que $\lambda = \lambda_1$ e vimos, através do Lema 2.3, que o funcional I_λ satisfaz Palais-Smale quando $\lambda \notin \sigma(\Omega^0)$. Naquela ocasião, pôde-se usar o Teorema do Passo da Montanha para garantir a existência de uma solução positiva, uma vez que $\lambda_1 \notin \sigma(\Omega^0)$. O problema agora é que, para valores arbitrários de $\lambda > \lambda_1$, *a priori* não temos garantia de que estes não estejam em $\sigma(\Omega^0)$, e portanto não podemos aplicar de imediato o resultado obtido no Lema 2.3. Pensando nisso, nossa estratégia será provar que o conjunto dos valores de λ para os quais o problema (P_λ) admite solução é limitado superiormente, e portanto, admite um supremo. Feito isso, mostraremos que este supremo é menor ou igual do que $\lambda_1(\Omega^0)$, o que nos permitirá usar o Lema 2.3 para todos os valores entre λ_1 e o tal supremo.

Começaremos então com o seguinte lema, o qual mostra que se considerarmos $\lambda > \lambda_1$, sob condições apropriadas, este problema possui uma subsolução (cf. Definição 1.2). Entre outras coisas, a existência dessa subsolução será útil para garantir a positividade da primeira solução que determinaremos.

Lema 3.1. *Seja* $\lambda > \lambda_1$ *e suponha que existem constantes* $K_1, K_2 > 0$ *e* $q > 2$ *tais que*

$$0 \leq f(s) \leq K_1 s^{q-1}, \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq K_2.$$

Se

$$0 < t < \min\left\{ \frac{K_2}{\|\varphi_1\|_\infty}, \left(\frac{\lambda - \lambda_1}{K_1 \|W^-\|_\infty \|\varphi_1\|_\infty^{q-2}} \right)^{\frac{1}{q-2}} \right\},$$

a função $u = t\varphi_1$ é uma subsolução para o problema (P_λ), em que $\varphi_1 > 0$ é a primeira autofunção do operador laplaciano em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $\lambda > \lambda_1$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x) \geq 0$ em Ω. Então, dada $u = t\varphi_1$ nas condições acima, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \lambda \int_\Omega u\varphi - \int_\Omega W(x) f(u)\varphi \\
&= t\int_\Omega \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi - t\lambda \int_\Omega \varphi_1 \varphi - \int_\Omega W(x) f(t\varphi_1)\varphi \\
&= -(\lambda - \lambda_1)t \int_\Omega \varphi_1 \varphi - \int_\Omega W(x) f(t\varphi_1)\varphi \\
&\leq \int_\Omega W^-(x) f(t\varphi_1)\varphi - (\lambda - \lambda_1)t \int_\Omega \varphi_1 \varphi.
\end{aligned}$$

Pela escolha de t, temos que $0 < t\varphi_1 < K_2$, o que, em vista da hipótese sobre f, implica que $f(t\varphi_1) \leq K_1 (t\varphi_1)^{q-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega W^-(x) f(t\varphi_1)\varphi - (\lambda - \lambda_1)t \int_\Omega \varphi_1 \varphi &\leq K_1 |W^-|_\infty \int_\Omega (t\varphi_1)^{q-1}\varphi - (\lambda - \lambda_1)t \int_\Omega \varphi_1 \varphi \\
&= K_1 |W^-|_\infty t^{q-1} |\varphi_1|_\infty^{q-2} \int_\Omega \varphi_1 \varphi - (\lambda - \lambda_1)t \int_\Omega \varphi_1 \varphi \\
&= [K_1 |W^-|_\infty |\varphi_1|_\infty^{q-2} t^{q-2} - (\lambda - \lambda_1)]t \int_\Omega \varphi_1 \varphi \leq 0,
\end{aligned}$$

o que se justifica pela escolha de t. Consequentemente,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \lambda \int_\Omega u\varphi - \int_\Omega W(x) f(u)\varphi \leq 0,$$

donde $u = t\varphi_1$ é uma subsolução para (P_λ), com $\lambda > \lambda_1$, como desejado. □

O próximo resultado estabelece a não-existência de soluções positivas para o problema (P_λ) no caso em que λ é muito grande.

Lema 3.2. *Existe $\overline{\lambda} > \lambda_1$ tal que o problema (P_λ) não admite solução positiva, seja qual for $\lambda \geq \overline{\lambda}$.*

Demonstração. Tome $\overline{\lambda} = \lambda_1(\Omega^*)$, em que $\Omega^* \subset \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ é um conjunto com fronteira suave. Seja $\psi > 0$ uma autofunção associada a $\overline{\lambda}$. Desde que $\overline{\lambda} = \lambda_1(\Omega^*)$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega^*)$, a Proposição 1.3 nos garante que $\overline{\lambda} > \lambda_1(\Omega)$.

Seja u uma solução positiva de (P_λ). Como $\psi \in H_0^1(\Omega^*) \subset H_0^1(\Omega)$ e $\psi = 0$ em $\Omega \setminus \Omega^* \supset \Omega^-$,

$$\int_{\Omega^*} \nabla u \cdot \nabla \psi - \lambda \int_{\Omega^*} u\psi = \int_{\Omega^*} W^+(x) f(u) \psi.$$

Sendo $\partial\Omega^*$ suave, temos

$$\int_{\Omega^*} \nabla u \cdot \nabla \psi = \overline{\lambda} \int_{\Omega^*} u\psi + \int_{\partial\Omega^*} u \frac{\partial \psi}{\partial \eta} dS.$$

Juntando estas relações, vemos que

$$\overline{\lambda} \int_{\Omega^*} u\psi + \int_{\partial\Omega^*} u \frac{\partial \psi}{\partial \eta} dS - \lambda \int_{\Omega^*} u\psi = \int_{\Omega^*} W^+(x) f(u) \psi,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{\partial\Omega^*} u \frac{\partial \psi}{\partial \eta} dS = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_{\Omega^*} u\psi + \int_{\Omega^*} W^+(x) f(u) \psi.$$

Suponha, por absurdo, que $\lambda \geq \overline{\lambda}$. Então, lembrando que $f(s) > 0$ para $s > 0$ e que $\psi > 0$ em Ω^*, concluímos, desta última igualdade, que

$$\int_{\partial\Omega^*} u \frac{\partial \psi}{\partial \eta} dS > 0.$$

Mas por outro lado, como $\partial\Omega^*$ satisfaz a propriedade da esfera interior e

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \overline{\lambda}\psi > 0 & \text{em } \Omega^*, \\ \psi > 0 & \text{em } \Omega^*, \\ \psi = 0 & \text{em } \partial\Omega^*, \end{cases}$$

segue do Lema de Hopf (cf. Teorema 1.9) que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}(x) < 0$, para todo $x \in \partial\Omega^*$, donde

$$\int_{\partial\Omega^*} u \frac{\partial \psi}{\partial \eta} dS < 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, não pode existir uma solução positiva para o problema (P_λ) com $\lambda \geq \overline{\lambda}$ e o Lema está demonstrado. $\square$

De posse do Lema 3.2, podemos afirmar que o conjunto dos valores de λ para os quais o problema (P_λ) admite solução é limitado superiormente. Sendo assim, se definimos

$$\Lambda = \sup\{\lambda \geq \lambda_1;\ \text{o problema } (P_\lambda) \text{ admite solução}\},$$

vemos que o conjunto sobre o qual Λ está definido é não vazio, uma vez que λ_1 a ele pertence, e além disso Λ é finito.

O lema a seguir nos garantirá que $\Lambda > \lambda_1$, o que, em particular, implicará na existência de solução positiva para (P_λ), para algum $\lambda > \lambda_1$. Tal lema será consequência de um famoso resultado da Teoria da Bifurcação, mais especificamente, o Teorema de Crandall-Rabinowitz (ver Teorema 1.1).

Lema 3.3. *Suponha que f satisfaz* (3.1)*, $f' \in C^\beta([-c,c])$, para algum $c > 0$, e vale* (3.2)*. Nessas condições, tem-se $\Lambda > \lambda_1$.*

Antes de apresentar a prova do Lema 3.3, julgamos necessário fazer a seguinte observação:

Observação 4. *Veja que a hipótese* (3.1) *implica que $f(0) = 0 = f'(0)$, uma vez que,*

$$f(0) = \lim_{s\to 0} f(s) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{f(s)}{s^{q-1}} s^{q-1}\right] = a\cdot 0 = 0$$

e

$$f'(0) = \lim_{s\to 0}\frac{f(s)-f(0)}{s-0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{f(s)}{s^{q-1}} s^{q-2}\right] = a\cdot 0 = 0.$$

Demonstração. Defina o operador $\mathcal{F} : C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R} \to C^\beta(\overline{\Omega})$ como sendo

$$\mathcal{F}(u,\lambda) = -\Delta u - \lambda u - W(x) f(u),$$

e o conjunto $V_0 \subset C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ por

$$V_0 := \{(u,\lambda \in C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}\ ;\ \|u\|_{C^{2,\beta}} + |\lambda - \lambda_1| < \varepsilon\},$$

em que $0 < \varepsilon < c$. Além disso, consideremos a norma em $C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$ dada por

$$\|(u,\lambda)\|_{C^{2,\beta}\times\mathbb{R}} = \|u\|_{C^{2,\beta}} + |\lambda|.$$

Iniciaremos a demonstração verificando que $\mathcal{F}$ satisfaz o item (i) do Teorema 1.1, isto é, $\mathbb{F}(0,\lambda) \equiv 0$, $\mathcal{F} \in C^1(V_0)$ e $\mathcal{F}_{\lambda u} \in C(V_0)$.

Da definição de $\mathcal{F}$, desde que $f(0) = 0$, temos $\mathcal{F}(0,\lambda) \equiv 0$. A seguir, usaremos o Lema C.6 para mostrar que $\mathcal{F} \in C^1(V_0)$. Com efeito, considerando $(u,\lambda),(v,s) \in C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$, com (u,λ) fixado, por definição temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}'(u,\lambda)(v,s) &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}((u,\lambda)+t(v,s)) - \mathcal{F}(u,\lambda)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\Delta v - \lambda t v - tsu - t^2 sv - W(x)[f(u+tv) - f(u)])}{t} \\
&= -\Delta v - \lambda v - su - \lim_{t\to 0} \frac{W(x)[f(u+tv) - f(u)])}{t}.
\end{aligned}
$$

Desde que

$$
\lim_{t\to 0} \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} = f'(u)v,
$$

obtemos,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}'(u,\lambda)(v,s) &= (-\Delta v - \lambda v - W(x) f'(u) v) - su \\
&= \mathcal{F}_u(u,\lambda)(v,0) + \mathcal{F}_\lambda(u,\lambda)(0,s).
\end{aligned}
$$

Note que a hipótese de que $f' \in C^\beta([-c,c])$ implica que $\mathcal{F}'(u,\lambda)(v,s) \in C^\beta(\overline{\Omega})$ para cada $(v,s) \in V_0$.

Podemos então definir o operador derivada de Gâteaux, $\mathcal{F}' : V_0 \to L(V_0, C^\beta(\overline{\Omega}))$, que associa a cada par $(u,\lambda) \in V_0$, o elemento $\mathcal{F}'(u,\lambda) \in L(V_0, C^\beta(\overline{\Omega}))$. Para ver que $\mathcal{F}'$ é contínua, tome $(v,s) \in C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$ com $\|(v,s)\|_{C^{2,\beta}\times\mathbb{R}} \leq 1$. Seja (u_k,λ_k) uma sequência em V_0 arbitrária convergindo para um par $(u_0,\lambda_0) \in V_0$. Então,

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}'(u_k,\lambda_k)(v,s) - \mathcal{F}'(u_0,\lambda_0)(v,s)\|_{C^\beta} \\
=&\| -(\lambda_k - \lambda_0)v - W(x)[f'(u_k) - f'(u_0)]v - s(u_k - u_0)\|_{C^\beta} \\
\leq&|\lambda_k - \lambda_0|\|v\|_{C^\beta} + \|W\|_{C^\beta}|f'(u_k) - f'(u_0)|\|v\|_{C^\beta} + |s|\|u_k - u_0\|_{C^\beta} \\
\leq&|\lambda_k - \lambda_0| + \|W\|_{C^\beta}|f'(u_k) - f'(u_0)| + \|u_k - u_0\|_{C^\beta}.
\end{aligned}
$$

Desde que $\|(u_k,\lambda_k) - (u_0,\lambda_0)\|_{C^{2,\beta}\times\mathbb{R}} \to 0$ quando $k \to +\infty$, temos que $\|u_k - u_0\|_{C^{2,\beta}} \to 0$ e $|\lambda_k - \lambda_0| \to 0$ quando $k \to +\infty$. Além disso, como $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $u_k \to u_0$ uniformemente, vale que $|f'(u_k) - f'(u_0)| \to 0$, quando $k \to +\infty$. Daí, segue que

$$\sup_{\|(u,\lambda)\|_{C^{2,\beta}\times\mathbb{R}}\leq 1} \|\mathcal{F}'(u_k,\lambda_k)(v,s) - \mathcal{F}'(u_0,\lambda_0)(v,s)\|_{C^\beta} \to 0, \text{ quando } k \to +\infty,$$

ou seja,

$$\|\mathcal{F}'(u_k,\lambda_k) - \mathcal{F}'(u_0,\lambda_0)\|_{L(V_0,C^\beta(\overline{\Omega}))} \to 0, \text{ quando } k \to +\infty,$$

o que mostra que $\mathcal{F} \in C^1(V_0)$.

Resta verificar que $F_{\lambda u} \in C(V_0)$. Desde que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\lambda u}(u,\lambda)v &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}_u(u,\lambda+t)v - \mathcal{F}_u(0,\lambda)v}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-\Delta v - (\lambda+t)v + \Delta v + \lambda v}{t} = -v,\end{aligned}$$

temos também $\mathcal{F}_{\lambda u} \in C(V_0)$.

A seguir, verificaremos o item (ii) do Teorema 1.1, isto é, que $\mathcal{F}_u(0,\lambda_1) \in \mathrm{Fred}_0$ e $N[F_u(0,\lambda_1)] = \langle \varphi_1 \rangle$.

Como $f'(0) = 0$, temos que

$$\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)v = -\Delta v - \lambda_1 v, \;\; \forall\, v \in C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}),$$

o que nos permite concluir que $\dim N[\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)] = \dim\langle\varphi_1\rangle = 1$. Agora resta somente checarmos que

$$\operatorname{codim} R[\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)] = 1,$$

pois desta forma teremos $\operatorname{ind}[\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)] = 0$. Para tanto, vamos lançar mão da Alternativa de Fredholm (Teorema C.4). Uma vez que o operador

$$(-\Delta)^{-1} : C^\beta(\overline{\Omega}) \to C^\beta(\overline{\Omega})$$

é compacto (ver Proposição 1.5), pela Alternativa de Fredholm

$$R[I - \lambda_1(-\Delta)^{-1}] = N[I - \lambda_1((-\Delta)^{-1})^*]^\perp.$$

Ainda pela alternativa de Fredholm, segue que

$$\begin{aligned}\text{codim } R[I-\lambda_1(-\Delta)^{-1}] &= \text{codim } N[I-\lambda_1((-\Delta)^{-1})^*]^{\perp}\\ &= \dim N[I-\lambda_1((-\Delta)^{-1})^*] = \dim N[I-\lambda_1(-\Delta)^{-1}] = 1.\end{aligned}$$

Dado $w \in R[I-\lambda_1(-\Delta)^{-1}]$, existe $v \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$ tal que $w = v - \lambda_1(-\Delta)^{-1}v$. Escrevendo $u = (-\Delta)^{-1}v$, concluímos que $w = -\Delta u - \lambda_1 u \in R[-\Delta - \lambda_1 I]$. Em outras palavras,

$$R[I-\lambda_1(-\Delta)^{-1}] \subset R[-\Delta-\lambda_1 I],$$

o que em particular implica que

$$1 = \text{codim } R[I-\lambda_1(-\Delta)^{-1}] \geq \text{ codim } R[-\Delta-\lambda_1 I] \geq 0.$$

Se tivéssemos codim $R[-\Delta-\lambda_1 I] = 0$, então $R[\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)] = R[-\Delta-\lambda_1 I] = C^{\beta}(\overline{\Omega})$. Daí, como $\varphi_1 \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$, existiria $w \in C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ tal que $-\Delta w - \lambda_1 w = \varphi_1$. Assim, depois de multiplicar ambos os membros dessa igualdade por φ_1 e integrar, chegaríamos ao absurdo

$$0 = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi_1 - \lambda_1 \int_{\Omega} w\varphi_1 = \int_{\Omega} \varphi_1^2 > 0.$$

Sendo assim, devemos ter codim $R[\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)]$ =codim $R[-\Delta-\lambda_1 I] = 1$, e o item (ii) está provado. Resta apenas verificar a validade do item (iii) do Teorema 1.1, a saber, $\mathcal{F}_{\lambda u}(0,\lambda_1)\varphi_1 \notin \mathrm{R}[\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)]$. Para tanto, lembremos que

$$\mathcal{F}_{\lambda,u}(0,\lambda_1)v = -v, \ \ \forall\, v \in C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}).$$

Com base no argumento utilizado ao final da prova do item (ii), é evidente que qualquer elemento $w \in R[F_u(0,\lambda_1)]$ verifica

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 - \lambda_1 \int_{\Omega} u\varphi_1 = \int_{\Omega} w\varphi_1, \text{ para algum } u \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega}).$$

Dessa forma, se $\mathcal{F}_{\lambda u}(0,\lambda_1)\varphi_1 = -\varphi_1$ pertencesse a $R[\mathcal{F}_u(0,\lambda_1)]$ seriamos levados a concluir que

$$-\int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1 = 0,$$

o que é impossível uma vez que φ_1 tem sinal definido em Ω. Com isto, o item (iii) está checado.

Pelo Teorema de Bifurcação de Crandall-Rabinowitz (Teorema 1.1), $(0,\lambda_1)$ é um ponto de bifurcação para a curva de soluções triviais $(0,\lambda)$. Considerando então $Z = \langle\varphi_1\rangle^{\perp}$, e escrevendo

$$C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}) = \langle\varphi_1\rangle \oplus Z,$$

existem uma vizinhança U de $(0,\lambda_1)$ em $C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}$ e funções contínuas $\varphi : (-b,b) \to \mathbb{R}$, $\psi : (-b,b) \to Z$ com $\varphi(0) = \lambda_1$ e $\psi(0) = 0$ tais que, denotando $u_\alpha = \alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha)$, tem-se

$$\mathcal{F}^{-1}(0) \cap U = \{(u_\alpha, \varphi(\alpha)) : \alpha \in (-a,a)\} \cup \{(0,\lambda); (0,\lambda) \in U)\}.$$

A esta altura devemos ter em mente o seguinte fato: O Teorema da Bifurcação de Crandall-Rabinowitz nos garantiu "apenas" que o conjunto $\mathcal{F}^{-1}(0) \cap U$ constitui uma curva de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + W(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue, vamos mostrar que para todo $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, a função u_α é positiva em Ω. Mais do que isso, mostraremos que $\varphi(\alpha) > \lambda_1$ para estes mesmos valores, de onde seguirá que $\Lambda \geq \varphi(\alpha) > \lambda_1$. Começamos com a seguinte afirmação:

Afirmação 1: $\|\psi(\alpha)\|_{C^{1,\beta}} \to 0$, quando $\alpha \to 0$.

Desde que u_α satisfaz $\mathcal{F}(u_\alpha, \varphi(\alpha)) = 0$, temos

$$-\Delta u_\alpha - \varphi(\alpha)u_\alpha - W(x)f(u_\alpha) = 0,$$

ou ainda,

$$-\Delta(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha)) - \varphi(\alpha)(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha)) - W(x)f(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha)) = 0.$$

Veja que se, $\alpha = 0$, então $u_0 = 0$ e $\varphi(0) = \lambda_1$, o que nos leva à solução trivial $(0,\lambda_1)$. Se porém $\alpha \neq 0$, dividimos esta última equação por α e usamos a linearidade do operador laplaciano para obter

$$-\Delta\varphi_1 - \Delta\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)\varphi_1 + \varphi(\alpha)\psi(\alpha) + W(x)\frac{f(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha}. \tag{3.3}$$

Como só nos interessa α próximo de zero, sem perda de generalidade, vamos considerar $\alpha \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$. Segue da continuidade de φ e de ψ neste compacto, que existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |\varphi(\alpha)\varphi_1(x)| &\leq |\varphi(\alpha)||\varphi_1|_\infty < c_1, \\ |\varphi(\alpha)\psi(\alpha)(x)| &\leq |\varphi(\alpha)|\|\psi(\alpha)\|_{C^{2,\beta}} < c_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sendo $u_\alpha = \alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha)$, existe $R > 0$ tal que $|u_\alpha|_\infty \leq R$, $\alpha \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$. Afirmamos agora que existe $M > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq M|s|^{q-1}, \forall\ |s| \leq R. \tag{3.5}$$

Se isto for verdade, então

$$\begin{aligned} \frac{|W(x)f(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))|}{|\alpha|} &\leq |W|_\infty M\frac{|\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha)|^{q-1}}{|\alpha|} \\ &= |W|_\infty M|\alpha|^{q-2}|\varphi_1 + \psi(\alpha)| \\ &\leq C|\alpha|^{q-2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

e além disso, pelas desigualdades em (3.4) e o fato de que $|W|_\infty < +\infty$, a relação (3.3) nos permite concluir que

$$-\Delta\psi(\alpha) = g_\alpha \in L^\infty(\Omega),$$

em que

$$g_\alpha = -\lambda_1\varphi_1 + \varphi(\alpha)\varphi_1 + \psi(\alpha)\varphi(\alpha) + W(x)\frac{f(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha}.$$

Mais do que isso, a continuidade das funções φ e ψ, juntamente com (3.6), fornece

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0} g_\alpha = \lim_{\alpha\to 0}\left[\varphi_1(-\lambda_1+\varphi(\alpha))+\psi(\alpha)\varphi(\alpha)+W(x)\frac{f(\alpha\varphi_1+\alpha\psi(\alpha))}{\alpha}\right] \\ = \varphi_1(-\lambda_1+\varphi(0))+\psi(0)\varphi(0) = \varphi_1(-\lambda_1+\lambda_1)+0\cdot\lambda_1 = 0,\end{aligned}$$

uniformemente para $x\in\Omega$. Em outras palavras, $g_\alpha \to 0$ em $L^\infty(\Omega)$, quando $\alpha\to 0$.

Observando que $\psi(\alpha)\in Z\subset C_0^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, temos $\psi(\alpha)=0$ em $\partial\Omega$, o que nos diz, em particular, que $\psi(\alpha)\in H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$\begin{cases} -\Delta\psi(\alpha) = g_\alpha & \text{em } \Omega, \\ \psi(\alpha) = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como Ω é suave e limitado, e $g_\alpha\in L^\infty(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1<p<+\infty$, estamos nas condições do Teorema de Agmon, Douglis, Nirenberg (cf. Teorema B.3). Podemos admitir então que, para cada $1<p<+\infty$, existe uma constante $C=C(\Omega,p)>0$ tal que

$$\|\psi(\alpha)\|_{W^{2,p}} \le C|g_\alpha|_p.$$

Lembrando que $g_\alpha\to 0$ em $L^\infty(\Omega)$, segue desta última desigualdade que $\|\psi(\alpha)\|_{W^{2,p}}\to 0$, quando $\alpha\to 0$. Finalmente, como para p suficientemente grande tem-se que $W^{2,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, para todo $0<\beta\le 1-\dfrac{N}{p}$, concluímos que

$$\|\psi(\alpha)\|_{C^{1,\beta}}\to 0$$

quando $\alpha\to 0$, o que demonstra a Afirmação 1. Resta verificar (3.5). Note que, por (3.1) tomando $\varepsilon = a>0$, podemos obter um $\delta>0$ tal que

$$|f(s)|\le 2a|s|^{q-1}\ ,\ \forall\ |s|\le\delta. \tag{3.7}$$

Por outro lado, da continuidade de f em $[-R,R]$ existe $K>0$ tal que $|f(s)|\le K$, para todo $|s|\le R$, de modo que

$$|f(s)|\le K\le \frac{K}{\delta^{q-1}}|s|^{q-1},\ \forall\ \delta\le|s|\le R.$$

Tomando $M=\max\left\{2a,\dfrac{K}{\delta^{q-1}}\right\}$, obtemos (3.5).

Para a prova da afirmação seguinte, nos baseamos em um argumento que se encontra em [36], pág. 42.

Afirmação 2: $u_\alpha > 0$ em Ω, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

A fim de provar esta afirmação, vamos utilizar o resultado dado pela Proposição 1.4, que afirma que existe $K > 0$ tal que

$$\varphi_1(x) \geq K d(x, \partial\Omega)$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, em que $d(x, \partial\Omega)$ é a função distância de x até a fronteira $\partial\Omega$. Em posse desse resultado, afirmamos que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{|\psi(\alpha)(x)|}{d(x, \partial\Omega)} = 0 \tag{3.8}$$

uniformemente em Ω. Admitindo (3.8), podemos encontrar $\delta_0 > 0$ tal que

$$\frac{\psi(\alpha)(x)}{d(x, \partial\Omega)} \geq -\frac{K}{2}, \text{ para todos } 0 < \alpha < \delta_0 \text{ e } x \in \Omega.$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \frac{u_\alpha(x)}{d(x, \partial\Omega)} &= \frac{\alpha\varphi_1(x) + \alpha\psi(\alpha)(x)}{d(x, \partial\Omega)} \geq \frac{\alpha K d(x, \partial\Omega) + \alpha\psi(\alpha)(x)}{d(x, \partial\Omega)} \\ &= \alpha K - \frac{\alpha K}{2} = \frac{\alpha K}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u_\alpha(x) \geq \frac{\alpha K}{2} d(x, \partial\Omega) > 0 \text{ em } \Omega.$$

Suponhamos, por absurdo, que (3.8) não ocorre, isto é, suponha que existe $\varepsilon_0 > 0$, e sequências $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}$ e $(x_k) \subset \Omega$ tais que

$$\frac{|\psi_{\alpha_k}(x_k)|}{d(x_k, \partial\Omega)} \geq \varepsilon_0 > 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, com $\alpha_k \to 0$ quando $k \to +\infty$. Observe que como $\psi(\alpha) \to 0$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, tem-se em particular que $|\psi(\alpha_k)|_\infty, |\nabla\psi(\alpha_k)|_\infty \to 0$, quando $k \to +\infty$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $y_k \in \partial\Omega$ tal que $d(x_k, \partial\Omega) = |x_k - y_k|$ e $[x_k, y_k) \subset \Omega$. Como $\psi(\alpha_k)(y_k) = 0$, usando o Teorema do Valor Médio, obtemos $\theta \in (0,1)$ tal que

$$0 < \varepsilon_0 \leq \left| \frac{\psi(\alpha_k)(x_k)}{d(x_k, \partial\Omega)} \right| = \frac{|\psi(\alpha_k)(x_k) - \psi(\alpha_k)(y_k)|}{|x_k - y_k|}$$
$$= \left| \left\langle \nabla\psi(\alpha_k)(x_k + \theta(y_k - x_k)), \frac{y_k - x_k}{|y_k - x_k|} \right\rangle \right| \leq |\nabla\psi(\alpha_k)|_\infty \to 0,$$

quando $k \to +\infty$, o que configura uma contradição. A verificação da Afirmação 2 está concluída.

Para concluir a demonstração do Lema 3.3, resta apenas mostrar a

Afirmação 3: $\varphi(\alpha) > \lambda_1$, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

Para verificá-la, vamos precisar do seguinte fato:

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_\alpha)}{\alpha^{q-1}} \varphi_1 = a \int_\Omega W(x) \varphi_1^q. \tag{3.9}$$

Para ver que isto ocorre, lembre que $\|\psi(\alpha)\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \to 0$ com $\alpha \to 0$ e portanto $\psi(\alpha) \to 0$ e $\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha) \to 0$ uniformemente em Ω quando $\alpha \to 0$. Daí, por (3.1) vale que

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} W(x) \frac{f(u_\alpha)\varphi_1}{\alpha^{q-1}} &= \lim_{\alpha\to 0} W(x) \frac{f(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha^{q-1}} \varphi_1 \\
&= \lim_{\alpha\to 0} W(x) \frac{f(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha^{q-1}(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))^{q-1}} (\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))^{q-1} \varphi_1 \\
&= \lim_{\alpha\to 0} W(x) \frac{f(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{(\alpha\varphi_1 + \alpha\psi(\alpha))^{q-1}} (\varphi_1 + \psi(\alpha))^{q-1} \varphi_1 \\
&= aW(x)\varphi_1^q
\end{aligned}$$

uniformemente em Ω. Levando isto em conta, juntamente com o fato de que o conjunto Ω é limitado, obtemos

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_\Omega W(x) \frac{f(u_\alpha)\varphi_1}{\alpha^{q-1}} = a \int_\Omega W(x) \varphi_1^q,$$

o que verifica (3.9).

Suponha agora que não tenhamos $\varphi(\alpha) > \lambda_1$, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno. Se este for o caso, para todo $0 < \varepsilon < b$, seremos capazes de encontrar $\alpha_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tal que $\varphi(\alpha_\varepsilon) \leq \lambda_1$. Tomando $\varepsilon = b/n > 0$, obteremos uma sequência $\alpha_n \to 0^+$ tal que $\varphi(\alpha_n) \leq \lambda_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Denote por $u_n = u_{\alpha_n}$ a sequência de soluções positivas do problema (P_λ) associadas a $\lambda = \varphi(\alpha_n)$. Então, como u_n é solução, podemos multiplicar a primeira equação em (P_λ) por φ_1 e usar integração por partes para obter

$$-\int_\Omega \Delta u_n \varphi_1 - \varphi(\alpha_n)\int_\Omega u_n\varphi_1 = [\lambda_1 - \varphi(\alpha_n)]\int_\Omega u_n\varphi_1 = \int_\Omega W(x)f(u_n)\varphi_1.$$

Por outro lado, tendo em vista a positividade de u_n, podemos utilizar (3.9) para concluir que, ao dividir esta última igualdade por α_n^{q-1} e fazer $n \to +\infty$, ter-se-á em vista de (3.2) a seguinte conclusão

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{[\lambda_1 - \varphi(\alpha_n)]}{\alpha_n^{q-1}} \int_\Omega u_n\varphi_1 = a\int_\Omega W(x)\varphi_1^q < 0,$$

o que é absurdo. Sendo assim, a desigualdade $\varphi(\alpha) > \lambda_1$ deve valer para todo $\alpha > 0$ suficientemente pequeno. Agora basta tomar um intervalo $(0,\varepsilon)$ de comprimento pequeno o suficiente para que se tenha simultaneamente $u_\alpha > 0$ e $\lambda = \varphi(\alpha) > \lambda_1$ para todo $\alpha \in (0,\varepsilon)$. Isto conclui a demonstração do Lema 3.3. □

Observação 5. *Analisando a prova do Lema 3.3, vemos que o problema (P_λ) admite soluções de classe $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, pois como vimos, para cada $\alpha \in (0,\varepsilon)$ podemos associar uma função u_α tal que $(u_\alpha, \varphi(\alpha))$ é solução de (P_λ) ($\lambda = \varphi(\alpha)$). Por sua vez, pela definição de $\mathcal{F}$, estas funções u_α pertencem ao espaço $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$.*

O Lema 3.3 nos forneceu uma solução positiva para o problema (P_λ), para algum $\lambda \in (\lambda_1,\Lambda)$. No que segue, mostraremos que, na verdade, (P_λ) possui solução para cada $\lambda \in (\lambda_1,\Lambda)$. Tal solução será obtida como um mínimo local do funcional associado ao problema (P_λ) e será chamada de 1ª solução. Posteriormente, obteremos uma 2ª solução para (P_λ) utilizando o Teorema do Passo da Montanha.

3.1 Determinação da primeira solução

Em [3], p. 458, Alama e Tarantello comentam a respeito da possibilidade de se fazer uso do Teorema de Brezis-Nirenberg (Teorema 1.10) para se determinar uma solução de (P_λ) que é um mínimo local para o funcional associado. Seguindo essa ideia, mostraremos que uma tal solução será de fato uma solução positiva, pois como veremos, ela se encontrará localizada entre uma sub e uma supersolução do problema (P_λ), obtidas no seguinte resultado:

Lema 3.4. *Sob as hipóteses do Lema 3.3 e (2.2), o problema (P_λ) admite uma supersolução u_+ e uma subsolução u_-, para cada $\lambda \in (\lambda_1,\Lambda)$. Além disso, $0 < u_- < u^+$ em Ω.*

Demonstração. A subsolução é obtida a partir do Lema 3.1, após utilizarmos a relação (3.5), a qual é consequência da hipótese (3.1). Para ver que existe uma supersolução, seja $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$. Pela definição de Λ devemos ser capazes de encontrar um $\lambda_0 \in (\lambda, \Lambda)$ tal que o problema (P_{λ_0}) admite solução positiva, a qual denotaremos por $u^+ = u_+(\lambda_0)$.

Desde que u_+ é solução de (P_{λ_0}), vale a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla u_+ \cdot \nabla \varphi = \lambda_0 \int_\Omega u_+ \varphi + \int_\Omega W(x) f(u_+) \varphi, \ \ \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Afirmamos que u_+ é uma supersolução para (P_λ). Com efeito, escolhendo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ em Ω, desta última igualdade, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u_+ \cdot \nabla \varphi - \lambda \int_\Omega u_+ \varphi - \int_\Omega W(x) f(u_+) \varphi \\
&= \lambda_0 \int_\Omega u_+ \varphi + \int_\Omega W(x) f(u_+) \varphi - \lambda \int_\Omega u_+ \varphi - \int_\Omega W(x) f(u_+) \varphi \\
&= (\lambda_0 - \lambda) \int_\Omega u_+ \varphi \geq 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que u_+ é uma supersolução, como queríamos.

Vamos agora verificar que, para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, $u_- = t\varphi_1 < u_+$ em Ω.

Afirmação: $-\Delta u^+ \geq 0$ em $N_r(\partial\Omega) = \{x \in \Omega \ ; \ d(x, \partial\Omega) < r\}$, para algum $r > 0$.

É consequência da hipótese (3.1), como visto em (3.7), que $|f(s)| \leq 2as^{q-1}$, se $0 < s < \delta$. Como u_+ é contínua e $u^+ = 0$ em $\partial\Omega$, encontramos $r > 0$ tal que $0 < u_+(x) < \delta$, para todo $x \in N_r(\partial\Omega)$. Consequentemente,

$$|W(x) f(u_+(x))| \leq 2a|W|_\infty u_+^{q-2}(x) u_+(x), \ \ x \in N_r(\partial\Omega).$$

Tomando r menor, se necessário, podemos supor que $2a|W|_\infty u_+^{q-2}(x) < \lambda_0$, para todo $x \in N_r(\partial\Omega)$. Portanto,

$$|W(x) f(u_+(x))| < \lambda_0 u_+(x), \ \ \forall\, x \in N_r(\partial\Omega).$$

Disto segue que

$$-\Delta u_+ = \lambda_0 u_+ + W(x) f(u_+) \geq 0, \ \ \forall\, x \in N_r(\partial\Omega),$$

o que verifica a afirmação.

Em virtude da afirmação acima, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_+ \geq 0 & \text{em } N_r(\partial\Omega), \\ u_+ = 0 & \text{em } \partial\Omega \subset \partial N_r(\partial\Omega). \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.8, temos que $\dfrac{\partial u_+}{\partial \eta}(x) < 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. De acordo com a Proposição 1.4, existe $K_1 > 0$ tal que

$$u_+(x) \geq K_1 d(x, \partial\Omega), \ \ \forall\, x \in \Omega.$$

Sendo $\varphi_1 > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(x) < 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, o mesmo resultado nos garante que existe $K_2 > 0$ tal que

$$\varphi_1(x) \geq K_2 d(x, \partial\Omega), \ \ \forall\, x \in \Omega.$$

Tomando $t > 0$ tal que $t\varphi_1$ seja uma subsolução do problema (P_λ) e $tK_2 < K_1$, temos

$$u_-(x) = t\varphi_1(x) \leq tK_2 d(x, \partial\Omega) < Kd(x, \partial\Omega) \leq u_+(x),$$

para todo $x \in \Omega$. Isto conclui a demonstração do Lema 3.4. $\square$

Convém observar que o Lema 3.4 já nos fornece uma solução $\tilde{u}$ de (P_λ) tal que $u_- \leq \tilde{u} \leq u_+$, para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$. Além disso, como já foi observado por Alama e Tarantello em [3], pode-se provar que essa solução é um mínimo local para o funcional correspondente associado, mesmo sem o auxílio do Teorema 1.10. O problema com essa abordagem é que ela traz uma série de dificuldades adicionais, fazendo com que os argumentos alcancem um nível de sofisticação elevado. Pensando nisso, decidimos prosseguir com nosso estudo utilizando o Teorema 1.10.

No que segue, baseados em [31], daremos a demonstração do Teorema 3.1.

Demonstração. Fixado $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, considere o seguinte truncamento da função $h(x,s) := \lambda s + W(x)f(s)$

$$\tilde{h}(x,s) = \begin{cases} \lambda u_-(x) + W(x)f(u_-(x)), & \text{se } s < u_-(x), \\ \lambda s + W(x)f(s), & \text{se } u_-(x) \leq s \leq u_+(x), \\ \lambda u_+(x) + W(x)f(u_+(x)), & \text{se } s > u_+(x). \end{cases}$$

Para mostrar que a função $\tilde{h}$ é contínua, vamos considerar apenas o caso em que $s < u_-(x)$, pois os demais casos podem ser tratados de forma semelhante.

Começaremos mostrando que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|(y,t) - (x,s)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} < \delta_1 \implies t < u_-(y). \tag{1}$$

Tome $\varepsilon_1 = \dfrac{u_-(x) - s}{2} > 0$. Sendo u_- contínua, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|y - x\|_{\mathbb{R}^N} < \delta_2 \implies |u_-(y) - u_-(x)| < \varepsilon_1.$$

Disto segue que

$$u_-(y) - u_-(x) > \varepsilon_1 \implies u_-(y) > u_-(x) - \frac{u_-(x) - s}{2} \implies u_-(y) > \frac{u_-(x) + s}{2} = s + \varepsilon_1. \tag{2}$$

Considere $0 < \delta < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Então,

$$\|(y,t) - (x,s)\|_{\mathbb{R}^{N+1}} < \varepsilon_1 \implies \|y - x\|_{\mathbb{R}^N} < \delta_2 \text{ e } |t - s| < \varepsilon_1.$$

Por (2), $u_-(y) > s + \varepsilon_1$. Além disso, $t < s + \varepsilon_1$. Portanto, $t < u_-(y)$, o que verifica (1). Desta forma, $\tilde{h}(y,t) = \lambda u_-(y) + W(y)f(u_-(y))$, o que nos dá

$$\tilde{h}(y,t) - \tilde{h}(x,s) = \lambda[u_-(y) - u_-(x)] + W(y)f(u_-(y)) - W(s)f(u_-(x)).$$

A continuidade de u_-, W e f implicam que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\|y - x\|_{\mathbb{R}^N} < \delta_3 \implies |\tilde{h}(y,t) - \tilde{h}(x,s)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Em virtude de (1) e (3), tomando $\delta = \{\delta_1, \delta_3\}$, obtemos

$$\|(y,t)-(x,s)\|_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \leq \delta \implies |\tilde{h}(x,y)-\tilde{h}(a,b)| < \varepsilon.$$

Observe que se $u_-(x) \leq s \leq u_+(x)$, uma vez que $s \in [\min u_-, \max u_+]$ e as funções W e f são contínuas, obtemos $K > 0$ tal que $|\tilde{h}(x,s)| \leq K$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $s \in [\min u_-, \max u_+]$.

Esta estimativa e a definição de $\tilde{h}$ nos permite afirmar que

$$|\tilde{h}(x,s)| \leq K, \text{ para todos } x \in \overline{\Omega} \text{ e } s \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Vamos agora considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{h}(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\tilde{P}_\lambda$}$$

e o funcional associado

$$\tilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \tilde{H}(x,u), \;\; u \in H_0^1(\Omega),$$

no qual $\tilde{H}(x,s) = \displaystyle\int_0^s \tilde{h}(x,s)\, ds$.

Tendo em vista que $\tilde{h}$ é contínua e limitada, o funcional $\tilde{I}_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, os pontos críticos de $\tilde{I}_\lambda$ são soluções fracas de $(\tilde{P}_\lambda)$, conforme Teorema 1.3.

De (3.10) segue que

$$\left|\int_\Omega \tilde{H}(x,u)\right| \leq \int_\Omega |\tilde{H}(x,u)| \leq K \int_\Omega |u| \leq K_1 |u|_2 \leq K_2\|u\|,$$

em que as constantes K_4 e K_5 foram obtidas usando a continuidade da imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e a Desigualdade de Poincaré. Em virtude dessa estimativa, resulta que

$$\tilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \tilde{H}(x,u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - K_2\|u\|,$$

o que mostra que $\tilde{I}_\lambda$ é coercivo. Vejamos agora que $\tilde{I}_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente. Com efeito, sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2.$$

Por outro lado, a compacidade da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ nos permite supor que, a menos de subsequência, tem-se $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω quando $n \to +\infty$, e $|u_n(x)| \leq \psi$ q.t.p. em Ω, para alguma função $\psi \in L^1(\Omega)$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuidade da função $\tilde{H}$ nos garante a convergência $\tilde{H}(x,u_n(x)) \to \tilde{H}(x,u(x))$ q.t.p. em Ω. Temos também a desigualdade $|\tilde{H}(x,u_n(x))| \leq K\psi$, a qual conta-nos que a sequência de funções $\tilde{H}(x,u_n(x))$, em módulo, é majorada por uma função de $L^1(\Omega)$ q.t.p em Ω. Podemos então utilizar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \tilde{H}(x,u_n(x)) = \int_\Omega \tilde{H}(x,u(x)).$$

Estes argumentos nos permitem mostrar que o funcional $\tilde{I}_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente, pois

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \tilde{H}(x,u) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \tilde{H}(x,u_n(x)) \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega \tilde{H}(x,u_n(x))\right] \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \tilde{I}_\lambda(u_n).
\end{aligned}$$

A coercividade e a semicontinuidade inferior fraca implicam que $\tilde{I}_\lambda$ é limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$ e seu ínfimo é atingido, conforme Teorema 1.2. Seja então $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\tilde{I}_\lambda(u_1) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \tilde{I}(u) = \min_{u\in H_0^1(\Omega)} \tilde{I}(u).$$

Desde que u_1 é ponto crítico de $\tilde{I}_\lambda$, temos que u_1 é solução fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$. Além disso, como $|\tilde{h}(x,x)| \leq K$, para todo $(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, temos que $\tilde{h}(x,u_1(x)) \in L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p \leq +\infty$. Dessa forma, por Agmon, Douglis e Nirenberg (ver Teorema B.3), concluímos que $u_1 \in W^{2,p}(\Omega)$, para todo $1 < p < +\infty$. Em particular, para p suficientemente grande, temos $u_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, em que $0 < \alpha < 1 - N/p$ (cf. Teorema B.2).

Vamos provar agora que $u_- \leq u_1$. Para ver isso, lembre-se que

$$\int_\Omega \nabla u_- \nabla \varphi \leq \int_\Omega h(x,u_-)\varphi,$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, tal que $\varphi \geq 0$ em Ω. Em particular, sendo u_1 solução fraca de $(\tilde{P}_\lambda)$, para $\varphi = (u_- - u_1)^+$, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_- - u_1)^+ &= \int_\Omega \tilde{h}(x,u_1)(u_- - u_1)^+ \\ &= \int_\Omega h(x,u_-)(u_- - u_1)^+ \geq \int_\Omega \nabla u_- \nabla (u_- - u_1)^+\end{aligned}$$

pois, pela escolha de φ, o integrando $h(x,u_1)(u_- - u_1)^+$ sobrevive apenas no conjunto $\{x \in \Omega \mid u_1(x) \leq u_-(x)\}$, o que, pela definição de $\tilde{h}$, nos dá $h(x,u_-) = \tilde{h}(x,u_1)$. Esta desigualdade implica ainda que

$$\begin{aligned}0 \geq \int_\Omega \nabla(u_- - u_1)\nabla(u_- - u_1)^+ &= \int_\Omega \nabla(u_- - u_1)^+ \nabla(u_- - u_1)^+ \\ &= \int_\Omega |\nabla(u_- - u_1)^+|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

de sorte que $(u_- - u_1)^+ \equiv 0$, e portanto $u_-(x) \leq u_1(x)$ para todo $x \in \Omega$.

A fim de mostrar que $u_1(x) \leq u_+(x)$ para todo $x \in \Omega$, tome $\varphi = (u_1 - u_+)^+$. Repetindo os argumentos anteriores obteremos $(u_1 - u_+)^+ \equiv 0$ em Ω, e consequentemente $u_1(x) \leq u_+(x)$ para todo $x \in \Omega$, como desejado.

As estimativas obtidas acima nos permitem concluir que $u_-(x) \leq u_1(x) \leq u_+(x)$, para todo $x \in \Omega$. Sendo assim, segue da definição de $\tilde{h}$ que $\tilde{h}(x,u_1(x)) = h(x,u_1(x))$, o que nos garante que u_1 é, de fato, uma solução fraca do problema (P_λ).

Nesse momento, gostaríamos de chamar a atenção do leitor para o seguinte fato: da hipótese (2.2) resulta que I_λ não é limitado inferiormente, pois o mesmo argumento utilizado na demonstração do Lema 2.2 permanece válido, qualquer que seja $\lambda > 0$. Entretanto, como foi provado acima, ao fazer o truncamento da função h, tornou-se possível encontrar uma solução para (P_λ), a qual é positiva, uma vez que $0 < u_- \leq u_1$.

Nosso objetivo agora será provar que a solução u_1 que acabamos de obter é de fato um mínimo local para o funcional I_λ, algo que será de extrema importância para que possamos encontrar uma segunda solução de (P_λ). Para este fim, utilizaremos o Teorema de Brezis-Nirenberg, como anunciado anteriormente, verificando inicialmente que u_1 é um mínimo local para I_λ em $C_0^1(\Omega)$ - veja Teorema 1.10.

Para tanto, precisaremos do seguinte resultado.

Afirmação 1: Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ satisfaz $\|u - u_1\| \leq \varepsilon_0$, então $u_-(x) < u(x) < u_+(x)$, para todo $x \in \Omega$.

Admitindo a validade da afirmação, segue da definição de $\tilde{h}$ que

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(x,u) - H(x,u) &= \int_0^u \tilde{h}(x,t)\,dt - \int_0^u h(x,t)\,dt \\
&= \int_0^{u_-} \tilde{h}(x,t)\,dt + \int_{u_-}^u \tilde{h}(x,t)\,dt - \int_0^{u_-} h(x,t)\,dt - \int_{u_-}^u h(x,t)\,dt \\
&= \int_0^{u_-} h(x,u_-)\,dt + \int_{u_-}^u h(x,t)\,dt - \int_0^{u_-} h(x,t)\,dt - \int_{u_-}^u h(x,t)\,dt \\
&= \int_0^{u_-} [h(x,u_-) - h(x,t)]\,dt.
\end{aligned}$$

Isso mostra que a diferença $\tilde{H}(x,u) - H(x,u)$ na verdade não depende de u. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) - \tilde{I}_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(x,u) - \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_\Omega \tilde{F}(x,u) \\
&= \int_\Omega [\tilde{H}(x,u) - H(x,u)] = d,
\end{aligned}$$

em que $d \in \mathbb{R}$ é uma constante. Assim, desde que u_1 é mínimo (global) em $H_0^1(\Omega)$ para $\tilde{I}_\lambda$, segue que

$$I_\lambda(u_1) = d + \tilde{I}_\lambda(u_1) \leq d + \tilde{I}_\lambda(u) = I_\lambda(u),$$

para qualquer $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $u_- \leq u \leq u_+$, e portanto, u_1 é um mínimo local para I_λ na topologia C^1. Pelo Teorema de Brezis e Nirenberg, u_1 é também um mínimo local para I_λ em $H_0^1(\Omega)$. Pela arbitrariedade da escolha de $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, o Teorema 3.1 está demonstrado.

Resta provar a Afirmação 1. Para tanto, inicialmente, verificaremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$u_-(x) + \varepsilon d(x,\partial\Omega) \leq u_1(x) \leq u_+(x) - \varepsilon d(x,\partial\Omega), \;\; \forall\, x \in \Omega. \tag{3.11}$$

Observe que existe $K > 0$ tal que a função $g(x,s) := h(x,s) + Ks = \lambda s + W(x)f(s) + Ks$ é não-decrescente para $s \in [0, |u_+|_\infty]$, para todo $x \in \Omega$. De fato, derivando g com relação a s, obtemos

$$g_s(x,s) := \lambda + W(x)f'(s) + K > m + K > 0,$$

em que m é o menor valor assumido pela função contínua $W(x)f'(s)$ no compacto $\overline{\Omega} \times [\min_{\overline{\Omega}} u_-, \max_{\overline{\Omega}} u_+]$ e $K > 0$ é escolhido de tal modo que se tenha $m + K > 0$.

Assim, desde que u_1 e u_- são solução e subsolução de (P_λ), respectivamente, com $u_- \leq u_1 \leq u_+$, para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(u_1 - u_-) \cdot \nabla\varphi + k(u_1 - u_-)\varphi &\geq \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla\varphi + ku_1\varphi + h(x,u_-)\varphi - ku_-\varphi \\
&= \int_\Omega h(x,u_1)\varphi + ku_1\varphi + h(x,u_-)\varphi - ku_-\varphi \\
&= \int_\Omega [g(x,u_1) - g(x,u_-)]\varphi \geq 0,
\end{aligned}$$

esta desigualdade representando a caracterização fraca de $-\Delta(u_1 - u_-) + k(u_1 - u_-) \geq 0$, q.t.p. em Ω. Como também $u_1 - u_- \geq 0 = \inf_{\Omega}(u_1 - u_-)$, pelo Lema de Hopf fraco (Teorema 1.8), concluímos que

$$\frac{\partial(u_1 - u_-)}{\partial\eta}(x) < 0, \ \ \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Agora, podemos usar a Proposição 1.4 para obter um $c_1 > 0$ tal que

$$u_1(x) - u_-(x) \geq c_1 d(x, \partial\Omega),$$

para todo $x \in \Omega$. Por sua vez, uma argumento análogo fornece a existência de um $c_2 > 0$ tal que

$$u_+(x) - u_1(x) \geq c_2 d(x, \partial\Omega),$$

de sorte que, tomando $\varepsilon = \min\{c_1, c_2\} > 0$, obteremos (3.11).

Vamos agora utilizar as desigualdades fornecidas por (3.11) para demonstrar a Afirmação 1. Com efeito, uma vez que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, fixado $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon/2$, existe $0 < \delta_1 < 1$ tal que

$$y_1, y_2 \in \overline{\Omega}, \|y_2 - y_1\|_{\mathbb{R}^N} < \delta_1 \text{ e } \|\nabla u_1(y_2) - \nabla u_1(y_1)\|_{\mathbb{R}^N} < \varepsilon_1. \tag{3.12}$$

Note ainda que, para todo $u \in C^1(\overline{\Omega})$, temos

$$\|\nabla u(z) - \nabla u_1(z)\|_{\mathbb{R}^N} = \left[\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z) - \frac{\partial u_1}{\partial x_i}(z)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \|u - u_1\|_{C^1}, \quad z \in \overline{\Omega}. \tag{3.13}$$

A seguir, considere $x \in N_{\delta_1}(\partial\Omega) := \{x \in \Omega \,;\, d(x, \partial\Omega) < \delta_1\}$ e tome $x_1 \in \partial\Omega$ tal que $d(x, \partial\Omega) = \|x - x_1\|_{\mathbb{R}^N}$. Como $u_1 \in C^1(\overline{\Omega})$, existe $\xi_1 \in (x, x_1) \subset \Omega$ tal que

$$u_1(x) = u_1(x_1) + \nabla u_1(\xi_1) \cdot (x - x_1) = \nabla(\xi_1) \cdot (x - x_1). \tag{3.14}$$

De maneira análoga, dado $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, encontramos $\xi \in (x, x_1)$ tal que

$$u(x) = u(x_1) + \nabla u(\xi) \cdot (x - x_1) = \nabla u(\xi) \cdot (x - x_1). \tag{3.15}$$

Tendo em vista (3.14) e (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_1(x)| &= |[\nabla u(\xi) - \nabla u_1(\xi_1)] \cdot (x - x_1)| \\
&\leq \|[\nabla u(\xi) - \nabla u_1(\xi)] + [\nabla u_1(\xi) - \nabla u_1(\xi_1)]\|_{\mathbb{R}^N} \|x - x_1\|_{\mathbb{R}^N} \\
&\leq [\|[\nabla u(\xi) - \nabla u_1(\xi)\|_{\mathbb{R}^N} + \|\nabla u_1(\xi) - \nabla u_1(\xi_1)]\|_{\mathbb{R}^N}] \cdot \|x - x_1\|_{\mathbb{R}^N},
\end{aligned}$$

o que em virtude de (3.13) fornece

$$|u(x) - u_1(x)| \leq \|u - u_1\|_{C^1} \|x - x_1\|_{\mathbb{R}^N} + \|\nabla u_1(\xi) - \nabla u_1(\xi_1)]\|_{\mathbb{R}^N} \cdot \|x - x_1\|_{\mathbb{R}^N}.$$

Como $\xi, \xi_1 \in (x, x_1)$, temos que $\|\xi - \xi_1\|_{\mathbb{R}}^N < \|x - x_1\|_{\mathbb{R}^N} = d(x, \partial\Omega) < \delta_1$, uma vez que $x \in N_{\delta_1}(\partial\Omega)$. Consequentemente, por (3.12) e a desigualdade acima, para todo $x \in N_{\delta_1}(\partial\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_1(x)| &\leq [\|u - u_1\|_{C^1} + \varepsilon_1] \cdot \|x - x_1\|_{\mathbb{R}^N} \\
&= [\|u - u_1\|_{C^1} + \varepsilon_1] \cdot d(x, \partial\Omega).
\end{aligned}$$

Portanto, se $\|u - u_1\|_{C^1} < \varepsilon_0$, com $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$,

$$u_1(x) - 2\varepsilon_1 d(x, \partial\Omega) \leq u(x) \leq u_1(x) + 2\varepsilon_1 d(x, \partial\Omega),$$

para todo $x \in N_{\delta_1}(\partial\Omega)$.

A seguir, utilizando (3.11) temos, para todo $x \in N_{\delta_1}(\partial\Omega)$,

$$u_-(x) + (\varepsilon - 2\varepsilon_1)d(x,\partial\Omega) \leq u(x) \leq u_+(x) - (\varepsilon - 2\varepsilon_1)d(x,\partial\Omega).$$

Uma vez que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon/2$, concluímos que

$$u_-(x) < u(x) < u_+(x), \ \ \forall\, x \in N_{\delta_1}(\partial\Omega). \tag{3.16}$$

Por outro lado, se $x \in \Omega \setminus N_{\delta_1}(\partial\Omega)$, então $d(x,\partial\Omega) > \delta_1$ e, como

$$\|u - u_1\|_{C^1} \leq \varepsilon_0 \implies u_1(y) - \varepsilon_0 \leq u(y) \leq u_1(y) + \varepsilon_0, \ \ \forall\, y \in \Omega,$$

segue de (3.11) que

$$u_-(x) + \varepsilon\delta_1 - \varepsilon_0 \leq u(x) \leq u_+(x) - \varepsilon\delta_1 + \varepsilon_0.$$

Tomando $\varepsilon_0 < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon\delta_1\}$, vemos que

$$u_-(x) < u(x) < u_+(x), \ \ \forall\, y \in \Omega, \tag{3.17}$$

o que conclui a demonstração da Afirmação 1. □

3.2 Determinação da segunda solução

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema 3.2 enunciado no início do Capítulo 3. Para fazer isso, nos baseamos em [29], onde os autores obtêm uma solução positiva do problema (Q_λ) utilizando o Teorema do Passo da Montanha.

Com o intuito de aplicar o Teorema do Passo da Montanha, para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, vamos associar ao problema (Q_λ) um funcional J_λ e mostrar que o mesmo está bem definido, é de classe C^1, satisfaz as condições geométricas e verifica a condição de Palais-Smale.

Fixado $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, o funcional associado a (Q_λ) é dado por

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega G(x,v), \ \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

em que $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s [h(x,u_1(x) + t^+) - h(x,u_1(x))]dt$. Uma vez que h tem crescimento subcrítico, existem constantes $A, B > 0$ tais que $|h(x,s)| \leq A + B|s|^{p-1}$, $2 < p < 2^*$ (ver

Teorema B.5). Assim, denotando por $m_0 = \max\limits_{\overline{\Omega}} u_1$, vemos que

$$\begin{aligned}
|h(x,u_1(x)+t^+) - h(x,u_1(x))| &\leq 2A + B|u_1(x)+t^+|^{p-1} + B|u_1(x)|^{p-1} \\
&\leq 2A + 2^{p-1}B|u_1(x)|^{p-1} + 2^{p-1}B|t|^{p-1} + B|u_1(x)|^{p-1} \\
&\leq 2A + B(2^{p-1}+1)m_0^{p-1} + 2^{p-1}B|t|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, de acordo com o Teorema 1.3, J_λ está bem definido e é de classe C^1. Podemos ainda reescrever $G(x,s)$ como

$$\begin{aligned}
G(x,s) &= \int_0^s [h(x,u_1(x)+t^+) - h(x,u_1(x))]dt \\
&= H(x,u_1(x)+s^+) - H(x,u_1(x)) - h(x,u_1(x))s^+,
\end{aligned}$$

uma vez que $G(x,s) = 0$, se $s \leq 0$.

Sendo u_1 solução fraca de (P_λ), segue que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega H(x,u_1+v^+) + \int_\Omega H(x,u_1) + \int_\Omega h(x,u_1)v^+ \\
&= \frac{1}{2}\|v^+\|^2 + \frac{1}{2}\|v^-\|^2 + \frac{1}{2}\|u_1\|^2 - \frac{1}{2}\|u_1\|^2 \\
&\quad - \int_\Omega H(x,u_1+v^+) + \int_\Omega H(x,u_1) + \int_\Omega h(x,u_1)v^+ \\
&= \frac{1}{2}\|v^-\|^2 + \frac{1}{2}\left[\|u_1\|^2 + 2\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v^+ + \|v^+\|^2\right] - \frac{1}{2}\|u_1\|^2 \\
&\quad - \int_\Omega H(x,u_1+v^+) + \int_\Omega H(x,u_1) \\
&= \frac{1}{2}\|v^-\|^2 + \frac{1}{2}\|u_1+v^+\|^2 - \int_\Omega H(x,u_1+v^+) - \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \int_\Omega H(x,u_1).
\end{aligned}$$

A última igualdade acima é exatamente

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v^-\|^2 + I_\lambda(u_1+v^+) - I_\lambda(u_1).$$

Ora, desta última igualdade temos $J_\lambda(0) = 0$. Além disso, desde que u_1 é um ponto de mínimo local para I_λ em $H_0^1(\Omega)$, podemos encontrar $\rho > 0$ tal que

$$I_\lambda(u_1+v^+) - I_\lambda(u_1) \geq 0, \quad \forall\, v \in B_\rho(u_1) \subset H_0^1(\Omega).$$

De fato, basta lembrar que $\|v\|^2 = \|v^+\|^2 + \|v^-\|^2$ e observar que se $\|v\|^2 \leq \rho^2$ então $\|v^+\|^2 \leq \rho^2$, isto é, se $v \in B_\rho(u_1)$ então $v^+ \in B_\rho(u_1)$ (claramente o mesmo vale para v^-). Por sua vez, desde que $\|v^-\|^2 \geq 0$ vemos também que $J_\lambda(v) \geq 0 = J_\lambda(0)$, o que mostra que J_λ possui a primeira geometria do passo da montanha (condição (i) do Teorema 1.4) - veja a Observação 2 após o Teorema 1.4.

Vamos provar agora que J_λ possui a segunda geometria do passo da montanha (condição (ii) do Teorema 1.4). Para tanto, tome $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^+) \setminus \{0\}$, com $\varphi \geq 0$ em Ω. Com esta escolha, temos

$$\begin{aligned}
J(t\varphi) &= I_\lambda(u_1 + t\varphi) - I(u_1) \\
&= \frac{1}{2}\|u_1 + t\varphi\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u_1 + t\varphi|_2^2 - \int_\Omega W(x)F(u_1 + t\varphi) \\
&\quad - \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{\lambda}{2}|u_1|_2^2 + \int_\Omega W(x)F(u_1) \\
&= \frac{1}{2}(\|u_1\|^2 + 2t\,\langle u_1, \varphi\rangle + \|t\varphi\|^2) - \frac{\lambda}{2}(|u_1|_2^2 + 2t(u_1, \varphi)_2 + |t\varphi|_2^2) \\
&\quad - \int_\Omega W(x)F(u_1 + t\varphi) - \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{\lambda}{2}|u_1|_2^2 + \int_\Omega W(x)F(u_1) \\
&= t(\langle u_1, \varphi\rangle - \lambda(u_1, \varphi)_2) + \frac{t^2}{2}\left(\|\varphi\|^2 - \lambda|\varphi|_2^2\right) \\
&\quad - \int_\Omega W(x)F(u_1 + t\varphi) + \int_\Omega W(x)F(u_1) \\
&= t(\langle u_1, \varphi\rangle - \lambda(u_1, \varphi)_2) + \frac{t^2}{2}\left(\|\varphi\|^2 - \lambda|\varphi|_2^2\right) \\
&\quad - \int_{\Omega^+} W^+(x)F(u_1 + t\varphi) + \int_{\Omega^+} W^+(x)F(u_1),
\end{aligned}$$

pois pela escolha de φ e da hipótese de que $\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset$, tem - se

$$\int_{\Omega^-} W(x)F(u_1 + t\varphi) = \int_{\Omega^-} W^-(x)F(u_1).$$

Como vimos no final da demonstração do Lema 2.2, a condição (ii) do Teorema 3.2 (mesma condição (2.2)) implica que

$$F(s) \geq \frac{1}{2p}s^p - c_0 s, \quad \forall\, s \geq 0,$$

e portanto

$$-\int_{\Omega^+} W^+(x)F(u_1+t\varphi) \leq -\frac{1}{2p}\int_{\Omega^+} W^+(x)|u_1+t\varphi|^p + c_0\int_{\Omega^+} W^+(x)|u_1+t\varphi|.$$

Como estamos interessados em calcular o limite quando $t \to +\infty$, não há perda de generalidade em supor que $t > 0$. Logo, podemos escrever

$$\int_{\Omega^+} W^+(x)|u_1+t\varphi|^p = t^p\int_{\Omega^+} W^+(x)(\frac{u_1}{t}+\varphi)^p.$$

Agora, uma simples aplicação do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue fornece

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\Omega^+} W^+(x)(\frac{u_1}{t}+\varphi)^p = \int_{\Omega^+} W^+(x)\varphi^p > 0. \tag{3.18}$$

Uma vez que, pelas estimativas acima temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\varphi) \leq{}& t[\|u_1\|\|\varphi\| + \lambda|u_1|_2|\varphi|_2] + \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 + \int_{\Omega^+} W^+(x)F(u_1) \\ & - \frac{t^p}{2p}\int_{\Omega^+} W^+(x)\left(\frac{u_1}{t}+\varphi_1\right)^p + c_0 t\int_{\Omega^+} W^+(x)\left(\frac{u_1}{t}+\varphi\right), \end{aligned}$$

a relação (3.18) e o fato de que $p > 2$ nos garantem que $J_\lambda(t\varphi) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$.

Escolhendo $t_1 > 0$ suficientemente grande para que se tenha $\|t_1\varphi\| > \rho$ e $J_\lambda(t_1\varphi) < 0$, a condição (ii) do Teorema do Passo da Montanha fica demonstrada.

Para provar que o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale, vamos precisar do seguinte lema, cuja demonstração é semelhante à que foi feita no Lema 3.2, entretanto nos dará um pouco mais de informação a respeito de quais valores de λ não pertencem a $\sigma(\Omega^0)$.

Lema 3.5. *O problema (P_λ) não admite solução positiva qualquer que seja $\lambda \geq \lambda_1(\Omega^0)$.*

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução positiva para (P_λ). Já sabemos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Considere φ_1^0 uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(\Omega^0)$ e seja $x_0 \in \Omega^0$ tal que $\varphi_1(x_0) > 0$. Tome $\tilde{\Omega}$ a componente conexa de Ω^0 contendo x_0 e $\tilde{\varphi}_1^0 = \varphi_1^0|_{\tilde{\Omega}}$. Observe que $\tilde{\varphi}_1^0 \in H_0^1(\tilde{\Omega})$ (onde consideramos $\varphi_1^0 = 0$ em $\Omega\setminus\tilde{\Omega}$) e que $\tilde{\varphi}_1^0$ é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(\Omega^0)$. Segue que $\tilde{\varphi}_1^0 > 0$ em $\tilde{\Omega}$. Além disso, pelo Teorema de Hopf (Teorema 1.8),

$\dfrac{\partial \tilde{\varphi}_1^0}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$. Daí, resulta que

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi}_1^0 = -\int_{\tilde{\Omega}} u \Delta \tilde{\varphi}_1^0 + \int_{\partial\tilde{\Omega}} u \frac{\partial \tilde{\varphi}_1^0}{\partial \eta}\, dS < \lambda_1(\Omega^0) \int_{\tilde{\Omega}} u \tilde{\varphi}_1^0. \tag{3.19}$$

Usando que u é solução fraca de (P_λ), $W \equiv 0$ em Ω^0 e que $\tilde{\varphi}_1^0 = 0$ em $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$, temos que

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi}_1^0 = \lambda \int_{\tilde{\Omega}} u \tilde{\varphi_1}^0.$$

Utilizando esta igualdade e (3.19), concluímos que

$$(\lambda - \lambda_1(\Omega^0)) \int_{\tilde{\Omega}} u \tilde{\varphi}_1^0 < 0,$$

o que implica, tendo em vista a positividade da integral acima, que $\lambda < \lambda_1(\Omega^0)$. Em outras palavras, se $\lambda \geq \lambda_1(\Omega^0)$, não pode haver solução positiva para o problema (P_λ). $\square$

Em posse do Lema 3.5 podemos afirmar que o número real Λ definido anteriormente satisfaz $\Lambda \leq \lambda_1(\Omega^0)$. Consequentemente, o Lema 2.3 nos garante que I_λ satisfaz a condição (PS), para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$. Observe ainda que se $\Omega^0 = \emptyset$, o mesmo lema nos permite afirmar que I_λ satisfaz a condição (PS), para todo $(\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$.

Considere então $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$ e seja $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que

$$J_\lambda(v_n) \to c \quad \text{e} \quad \|J_\lambda'(v_n)\| \to 0. \tag{3.20}$$

Como

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega G(x,u),$$

o Teorema 1.3 garante que

$$J_\lambda'(v)w = \langle v, w \rangle - \int_\Omega [h(x, u_1 + v^+) - h(x, u_1)]w,$$

o que nos permite concluir que

$$\|v_n^-\|^2 = -J_\lambda'(v_n)v_n^-,$$

pois como $v_n^+ = 0$ ou $v_n^- = 0$ tem-se $[h(x,u_1+v_n^+) - h(x,u_1)]v_n^- = 0$, e além disso, $\langle v_n, v_n^- \rangle = \langle v_n^+ - v_n^-, v_n^- \rangle = -\|v_n^-\|^2$. Sendo assim, desde que

$$0 \leq \|v_n^-\|^2 = -J'_\lambda(v_n)v_n^- \leq \|J'_\lambda(v_n)\|\|v_n^-\|,$$

a relação (3.20) e o Teorema do Confronto nos fornecem $\|v_n^-\| \to 0$ quando $n \to +\infty$. Consequentemente, é suficiente provar que (v_n^+) tem uma subsequência convergente. De fato, suponha que exista um $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n^+ \to v_0$. Como

$$\begin{aligned} \|v_n - v_0\|^2 &= \|v_n\|^2 - 2\langle v_n, v_0\rangle + \|v_0\|^2 \\ &= \|v_n^+\|^2 + \|v_n^-\|^2 - 2\langle v_n^+, v_0\rangle + 2\langle v_n^-, v_0\rangle + \|v_0\|^2, \end{aligned}$$

o fato de $\|v_n^-\| \to 0$ implica que $\|v_n - v_0\|^2 \to 0$, o que quer dizer exatamente que $v_n \to v_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Mostremos então que v_n^+ possui uma subsequência convergente. Com efeito, uma vez que

$$J_\lambda(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n^-\|^2 + I_\lambda(u_1+v_n^+) - I_\lambda(u_1),$$

segue que (v_n) é uma sequência (PS) para J_λ e $\|v_n^-\| \to 0$, esta última igualdade nos permite concluir que

$$I_\lambda(u_1+v_n^+) \to c + I_\lambda(u_1) = d.$$

Por outro lado, desde que

$$\begin{aligned} J'_\lambda(v_n)w &= \langle v_n, w\rangle - \int_\Omega [h(x,u_1+v_n^+) - h(x,u_1)]w \\ &= -\langle v_n^-, w\rangle + \langle v_n^+, w\rangle - \int_\Omega [h(x,u_1+v_n^+) - h(x,u_1)]w, \end{aligned}$$

podemos usar o fato de que u_1 é ponto crítico de I_λ para ver que

$$\begin{aligned} J'_\lambda(v_n)w =& -\langle v_n^-, w\rangle + \langle u_1, w\rangle + \langle v_n^+, w\rangle - \int_\Omega h(x,u_1+v_n^+)w \\ & - \langle u_1, w\rangle + \int_\Omega h(x,u_1)w \\ =& -\langle v_n^-, w\rangle + \langle u_1+v_n^+, w\rangle - \int_\Omega h(x,u_1+v_n^+)w \\ & - \langle u_1, w\rangle + \int_\Omega h(x,u_1)w \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= - \langle v_n^-, w \rangle + I'_\lambda(u_1 + v_n^+)w - I'_\lambda(u_1)w \\
&= - \langle v_n^-, w \rangle + I'_\lambda(u_1 + v_n^+)w,
\end{aligned}
$$

de sorte que escolhendo $w \in H_0^1(\Omega)$ com $\|w\| \leq 1$, usando desigualdades triangular e de Cauchy, obtemos que

$$
|I'_\lambda(u_1 + v_n^+)w| \leq \|v_n^-\| + \|J'_\lambda(v_n)\|, \text{ para qualquer } w \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|w\| \leq 1.
$$

Portanto,

$$
0 \leq \|I'_\lambda(u_1 + v_n^+)\| \leq \|v_n^-\| + \|J'_\lambda(v_n)\|.
$$

Novamente, resulta do Teorema do Confronto que $\|I'_\lambda(u_1 + v_n^+)\| \to 0$. Dessa forma vemos que a sequência $(u_1 + v_n^+) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I_λ, que satisfaz (PS), como observado após a prova do Lema 3.5. Isto implica que existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, tem-se $u_1 + v_n^+ \to u_0$, e já que $v_n^+ = (u_1 + v_n^+) - u_1 \to u_0 - u_1 \in H_0^1(\Omega)$, segue que v_n^+ possui uma subsequência convergente como queríamos. Isto conclui a prova de que o funcional J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Essas considerações nos permitem aplicar o Teorema do Passo da Montanha para encontrar um ponto crítico não trivial v_0 de J_λ. Desde que

$$
\|v_0^-\|^2 = -J'_\lambda(v_0)v_0^- = 0,
$$

segue que v_0 é uma solução não-negativa do problema (Q_λ). Definindo $u_2 := u_1 + v_0$, por (Q_λ), temos

$$
\begin{cases}
-\Delta v_0 = -\Delta u_2 - (-\Delta u_1) = h(x, u_1 + (u_2 - u_1)) - h(x, u_1) & \text{em } \Omega, \\
v_0 = u_2 - u_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

ou equivalentemente,

$$
\begin{cases}
-\Delta u_2 = h(x, u_2) = \lambda u_2 + W(x) f(u_2) & \text{em } \Omega, \\
u_2 = 0 & \text{em } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

visto que $-\Delta u_1 = h(x, u_1)$ em Ω. Como $u_2 = u_1 + v_0 \geq u_1 > 0$, temos que $u_2 > 0$ em Ω.

Afirmamos que $u_2 > u_1$. De fato, seja $K > 0$ tal que $g(x,s) := h(x,s) + Ks$ é não-decrescente em $[0, |u_2|_\infty]$. Então,

$$-\Delta v_0 + K v_0 = -\Delta(u_2 - u_1) + K(u_2 - u_1) \geq h(x,u_2) - h(x,u_1) + Ku_2 - Ku_1 \geq 0.$$

Suponha que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $v_0(x_0) = 0$. Tome $r > 0$ tal que $x_0 \in \partial B_r$. No interior de B_r, temos $u_2 - u_1 \geq 0$. Pelo Lema de Hopf fraco, temos $\dfrac{\partial v_0(x_0)}{\partial \eta} < 0$, contradizendo o fato de que x_0 é um ponto de mínimo de v_0. Logo, devemos ter $v(x) > 0$ em Ω, isto é, $u_2 > u_1$.

Apêndice A

Resultados Auxiliares

A.1 Lemas técnicos

Antes de enunciar o Lema a seguir, vale ressaltar que as soluções do problema (P_λ) são de classe C^1, de acordo com o Teorema B.5.

Lema A.1. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ solução positiva do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = W(x)u^{p-1} & em\ \Omega, \\ u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

com $2 < p < 2^*$, e seja φ_1 a primeira autofunção de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ associada a λ_1. Então,

$$\int_\Omega \Delta u \frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}} = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}} \right).$$

Demonstração. Seja $v = v(\varepsilon) = \dfrac{\varphi_1^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}}$. Note que fixado $\varepsilon > 0$, uma vez que $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$, temos $v(\varepsilon) \leq \dfrac{\varphi_1^p}{\varepsilon^{p-1}} \leq C_1$, $C_1(\varepsilon) > 0$, o que em particular implica que $v \in L^2(\Omega)$. Além disso,

$$\|\nabla v(\varepsilon)\|_{\mathbb{R}^N} \leq \left\| \frac{p\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1}{\varepsilon^{p-1}} - \frac{(p-1)\varphi_1^p \nabla u}{\varepsilon^p} \right\|_{\mathbb{R}^N} \leq C_2,$$

pois $\varphi_1 \in L^\infty(\Omega)$ e $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, o que nos diz que $\nabla v(\varepsilon) \in L^2(\Omega)$. Portanto, $v(\varepsilon) \in H_0^1(\Omega)$.

Usando integração por partes, segue que

$$\int_\Omega v\cdot\Delta u+\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u=\int_{\partial\Omega} v\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}dS=0,$$

pois $v(\varepsilon)\in H_0^1(\Omega)$.

Portanto,

$$\int_\Omega v\cdot\Delta u=-\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u.$$

Vamos mostrar que, quando $\varepsilon\to 0$, tem-se

$$\int_\Omega v\cdot\Delta u\to\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\cdot\Delta u \tag{A.2}$$

e

$$\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\to\int_\Omega\nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\right)\nabla u, \tag{A.3}$$

o que nos fornecerá a igualdade desejada.

Primeiramente verificaremos (A.2). Segue da Proposição 1.4 que existem constantes $c_1,c_2>0$ tais que

$$\begin{aligned}
&c_1 d(x)\le\varphi_1(x)\le c_2 d(x),\ \text{para todo } x\in\overline{\Omega},\\
&c_1 d(x)\le u(x)\le c_2 d(x),\ \text{para todo } x\in\overline{\Omega},
\end{aligned}$$

sendo $d(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$, $x\in\overline{\Omega}$. Denotando $f_\varepsilon(x)=\dfrac{\varphi_1^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}}\Delta u(x)$, temos $f_\varepsilon(x)\to\dfrac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\Delta u(x)$, quando $\varepsilon\to 0$ e $x\in\Omega$.

Além disso, em vista das desigualdades acima, vale que

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)|&=\left|\frac{\varphi_1^p(x)}{(u(x)+\varepsilon)^{p-1}}\Delta u(x)\right|\le\frac{c_2^p d^p(x)|\Delta u(x)|}{c_1^{p-1}d^{p-1}(x)}\\
&=\frac{c_2^p d^p(x)|-\lambda u-W(x)u^{p-1}|}{c_1^{p-1}d^{p-1}(x)}\le\frac{c_2^p d(x)(|\lambda u|+|W(x)u^{p-1}|)}{c_1^{p-1}}\\
&\le\frac{c_2^p d(x)[\lambda c_2 d(x)+|W|_\infty c_2^{p-1}d^{p-1}(x)]}{c_1^{p-1}}=\frac{\lambda c_2^{p+1}}{c_1^{p-1}}d^2(x)+|W|_\infty c_2^{2p-1}d^p(x)\le M_1,
\end{aligned}$$

em que a constante $M_1 > 0$ foi obtida ao usar o fato de que a função $d(x)$ é contínua no compacto $\overline{\Omega}$. Com isto, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obter

$$\int_\Omega f_\varepsilon = \int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}}\Delta u \to \int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\Delta u$$

quando $\varepsilon \to 0$, o que verifica (A.2).

A fim de verificar (A.3), veja que

$$\begin{aligned}\nabla v = \nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}}\right) &= \frac{p\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1(u+\varepsilon)^{p-1} - (p-1)\varphi_1^p(u+\varepsilon)^{p-2}\nabla(u+\varepsilon)}{(u+\varepsilon)^{2(p-1)}}\\ &= \frac{p\varphi_1^{p-1}(u+\varepsilon)^{p-1}\nabla\varphi_1 - (p-1)\varphi_1^p(u+\varepsilon)^{p-2}\nabla u}{(u+\varepsilon)^{2(p-1)}} = \frac{p\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1}{(u+\varepsilon)^{p-1}} - (p-1)\frac{\varphi_1^p\nabla u}{(u+\varepsilon)^p},\end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u = \int_\Omega \frac{p\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1\nabla u}{(u+\varepsilon)^{p-1}} - (p-1)\int_\Omega \frac{\varphi_1^p|\nabla u|^2}{(u+\varepsilon)^p}.$$

Vamos então mostrar que, quando $\varepsilon \to 0$ tem-se

$$p\int_\Omega \frac{\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1\nabla u}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \to p\int_\Omega \frac{\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1\nabla u}{u^{p-1}} \tag{A.4}$$

e

$$(p-1)\int_\Omega \frac{\varphi_1^p|\nabla u|^2}{(u+\varepsilon)^p} \to (p-1)\int_\Omega \frac{\varphi_1^p|\nabla u|^2}{u^p}, \tag{A.5}$$

o que acarretará em

$$\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u \to \int_\Omega \left[\frac{p\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1\nabla u}{u^{p-1}} - \frac{(p-1)\varphi_1^p|\nabla u|^2}{u^p}\right] = \int_\Omega \nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\right)\nabla u,$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Verificaremos somente (A.4), pois o mesmo argumento nos permite obter (A.5). Seja

$$g_\varepsilon(x) = \frac{p\varphi_1^{p-1}(x)\nabla\varphi_1(x)\nabla u(x)}{(u(x)+\varepsilon)^{p-1}}.$$

Observe que, quando $\varepsilon \to 0$, para $x \in \Omega$, temos que

$$g_\varepsilon(x) \to \frac{p\varphi_1^{p-1}(x)\nabla\varphi_1(x)\nabla u(x)}{u(x)^{p-1}},$$

q.t.p. em Ω. Por outro lado, novamente podemos utilizar as inequações dadas pela Proposição 1.4, bem como o fato de que $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para obter uma constante $M_2 > 0$ tal que

$$|g_\varepsilon(x)| = \left|\frac{p\varphi_1^{p-1}(x)\nabla\varphi_1(x)\nabla u(x)}{(u(x)+\varepsilon)^{p-1}}\right| \leq \frac{pc_2^{p-1}d^{p-1}(x)\|\varphi_1\|_{C^1}\|u\|_{C^{1,\beta}}}{c_1^{p-1}d(x)^{p-1}} \leq M_2.$$

Assim, mais uma vez usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que, quando $\varepsilon \to 0$,

$$p\int_\Omega \frac{\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1\nabla u}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \to p\int_\Omega \frac{\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1\nabla u}{u^{p-1}},$$

o que conclui a demonstração do lema. □

Lema A.2. *Se existe uma solução positiva $u \in H_0^1(\Omega)$ para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = W(x)u^{p-1} & em\ \Omega, \\ u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.6}$$

com $p > 2$ e $\lambda \geq \lambda_1$, então $\int_\Omega W(x)\varphi_1^p < 0$, em que φ_1 é uma autofunção do operador laplaciano associada a λ_1.

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução positiva do problema (A.6). Dividindo a primeira igualdade em (A.6) por u^{p-1} e multiplicando por φ_1^p, integramos para obter

$$\int_\Omega W(x)\varphi_1^p = -\int_\Omega \Delta u \frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}} - \lambda_1\int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} - (\lambda - \lambda_1)\int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}.$$

Agora, pelo Lema A.1 temos

$$-\int_\Omega \Delta u \frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\right).$$

Substituindo isto na equação anterior, ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_\Omega W(x)\varphi_1^p &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\right)-\lambda_1\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} \qquad (A.7)\\
&= \int_\Omega \nabla u\cdot\left[p\frac{\varphi_1^{p-1}\nabla\varphi_1}{u^{p-1}}-(p-1)\frac{\varphi_1^p\nabla u}{u^p}\right]-\lambda_1\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{e_1^p}{u^{p-2}}\\
&= p\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi_1\frac{\varphi_1^{p-1}}{u^{p-1}}-(p-1)\int_\Omega|\nabla u|^2\frac{\varphi_1^p}{u^p}-\lambda_1\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}.
\end{aligned}$$

Utilizando integração por partes e argumentos semelhantes aos vistos na demonstração do Lema A.1, obtemos

$$p\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-1}}{u^{p-2}}\Delta\varphi_1=-p\int_\Omega\nabla\varphi_1\cdot\nabla\left(\frac{\varphi_1^{p-1}}{u^{p-2}}\right)=-p\int_\Omega\nabla\varphi_1\left[\frac{(p-1)\varphi_1^{p-2}\nabla\varphi_1}{u^{p-2}}-\frac{(p-2)\varphi_1^{p-1}\nabla u}{u^{p-1}}\right]$$

$$=p(p-2)\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-1}}{u^{p-1}}\nabla\varphi_1\cdot\nabla u-p(p-1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-2}}{u^{p-2}}|\nabla\varphi_1|^2.$$

Logo,

$$p\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-1}}{u^{p-1}}\nabla\varphi_1\cdot\nabla u=\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-2}}{u^{p-2}}|\nabla\varphi_1|^2+\frac{p}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-1}}{u^{p-2}}\Delta\varphi_1.$$

Uma vez que $\Delta\varphi_1=-\lambda_1\varphi_1$, concluímos da última igualdade acima que

$$p\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-1}}{u^{p-1}}\nabla\varphi_1\cdot\nabla u=\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-2}}{u^{p-2}}|\nabla\varphi_1|^2-\frac{p\lambda_1}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}},$$

e portanto, a equação em (A.7) torna-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega W(x)\varphi_1^p=\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-2}}{u^{p-2}}|\nabla\varphi_1|^2-\frac{p\lambda_1}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
-(p-1)\int_\Omega|\nabla u|^2\frac{\varphi_1^p}{u^p}-\lambda_1\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}},
\end{aligned}$$

o que ainda pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\int_\Omega W(x)\varphi_1^p=\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^{p-2}}{u^{p-2}}|\nabla\varphi_1|^2-2\lambda_1\frac{(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
-(p-1)\int_\Omega|\nabla u|^2\frac{\varphi_1^p}{u^p}-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}. \qquad (A.8)
\end{aligned}$$

Com o objetivo de reescrever a relação (A.8) de outra forma, vamos calcular $\Delta(\log\varphi_1)$ e $\Delta(\log u)$. Uma vez que

$$\begin{cases} \partial_i(\log\varphi_1) = \dfrac{1}{\varphi_1}\partial_i(\varphi_1) \implies \nabla\log\varphi_1 = \dfrac{1}{\varphi_1}\nabla\varphi_1, \\ \partial_i(\log u) = \dfrac{1}{u}\partial_i(u) \implies \nabla\log u = \dfrac{1}{u}\nabla u, \end{cases} \tag{A.9}$$

novamente usamos a igualdade $\Delta\varphi_1 = -\lambda_1\varphi_1$ para obter

$$\begin{aligned} \Delta(\log\varphi_1) &= \operatorname{div}(\nabla\log\varphi_1) \implies \Delta(\log\varphi_1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial_i^2(\varphi_1)\varphi_1 - (\partial_i(\varphi_1))^2}{\varphi_1^2} = \frac{\varphi_1\Delta\varphi_1 - |\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2} \\ &= \frac{\varphi_1(-\lambda_1\varphi_1) - |\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2} \implies |\nabla\varphi_1|^2 = -\varphi_1^2\Delta(\log\varphi_1) - \lambda_1\varphi_1^2. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Analogamente, podemos utilizar (A.9) e o fato de que a função u satisfaz a equação dada em (A.6) para concluir que

$$\begin{aligned} \Delta(\log u) &= \operatorname{div}(\nabla\log u) \implies \Delta(\log u) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial_i^2(u)u - (\partial_i(u))^2}{u^2} = \frac{u\Delta u - |\nabla u|^2}{u^2} \\ &= \frac{u(-\lambda u - W(x)u^{p-1}) - |\nabla u|^2}{u^2} = \frac{-\lambda u^2 - W(x)u^p - |\nabla u|^2}{u^2}. \end{aligned}$$

Disto segue que

$$|\nabla u|^2 = -W(x)u^p - u^2\Delta(\log u) - \lambda u^2. \tag{A.11}$$

Agora, substituindo (A.10) e (A.11) em (A.8), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega W(x)\varphi_1^p &= -\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega \Delta(\log\varphi_1)\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} - p\lambda_1\frac{(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} - 2\lambda_1\frac{(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} \\ &+ (p-1)\int_\Omega W(x)\varphi_1^p + (p-1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta(\log u) + (p-1)\lambda\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} - (\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} -(p-2)\int_\Omega W(x)\varphi_1^p &= -\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\Delta(\log\varphi_1)\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} + (p-1)\int_\Omega\Delta(\log u)\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} \\ &- \frac{\lambda_1 p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} - 2\lambda_1\frac{(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} + (p-1)\lambda\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} - (\lambda-\lambda_1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Veja que as quatro últimas parcelas do lado direito da igualdade em (A.12) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{p\lambda_1(p-1)}{p-2}-\frac{2\lambda_1(p-1)}{p-2}+(p-1)\lambda-(\lambda-\lambda_1)\right]\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}\\
&=\left[\frac{(p-1)}{p-2}(-p\lambda_1-2\lambda_1)+(p-1)\lambda-(\lambda-\lambda_1)\right]\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
&=\left[\frac{(p-1)}{p-2}(-p\lambda_1-2\lambda_1)+p\lambda-2\lambda-\lambda_1+2\lambda_1-p\lambda_1+p\lambda_1\right]\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
&=\left[\frac{(p-1)}{p-2}(-p\lambda_1-2\lambda_1)+(\lambda-\lambda_1)(p-2)+\lambda_1(p-1)\right]\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
&=\left[\frac{(p-1)}{p-2}(-p\lambda_1-2\lambda_1)+(\lambda-\lambda_1)(p-2)+\frac{\lambda_1(p-1)(p-2)}{p-2}\right]\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
&=\left[\frac{(p-1)}{p-2}(-p\lambda_1-2\lambda_1+\lambda_1(p-2))+(\lambda-\lambda_1)(p-2)\right]\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
&=\left[\frac{(p-1)}{p-2}(-p\lambda_1-2\lambda_1+p\lambda_1-2\lambda_1)+(\lambda-\lambda_1)(p-2)\right]\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\\
&=-4\lambda_1\frac{(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-1}}+(\lambda-\lambda_1)(p-2)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo isto em (A.12), vê-se que

$$\begin{aligned}
-(p-2)\int_\Omega W(x)\varphi_1^p=&-\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta(\log\varphi_1)+(p-1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta(\log u)\\
&-\frac{4\lambda_1(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}+(\lambda-\lambda_1)(p-2)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}.
\end{aligned}\tag{A.13}$$

Uma vez que $p>2$, $\lambda\geq\lambda_1$, e as funções u e φ_1 são estritamente positivas em Ω, concluímos que

$$(\lambda-\lambda_1)(p-2)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\geq 0.$$

Segue então de (A.13) que

$$\begin{aligned}
&-(p-2)\int_\Omega W(x)\varphi_1^p\geq-\frac{p(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta(\log\varphi_1)+(p-1)\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta(\log u)\\
&-\frac{4\lambda_1(p-1)}{p-2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}=\frac{(p-1)}{p-2}\left[-\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta\left(\log\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)-4\lambda_1\int_\Omega\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right].
\end{aligned}\tag{A.14}$$

Com efeito, por (A.10) e (A.11) temos as seguintes igualdades:

$$-\frac{p(p-1)}{p-2}\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta(\log\varphi_1) = \frac{p(p-1)}{p-2}\frac{\varphi_1^{p-2}}{u^{p-2}}|\nabla\varphi_1|^2 + \frac{p\lambda_1(p-1)}{p-2}\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} \tag{A.15}$$

e

$$(p-1)\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta(\log u) = -(p-1)\frac{\varphi_1^p}{u^p}|\nabla u|^2 - (p-1)W(x)\varphi_1^p - \lambda(p-1)\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}. \tag{A.16}$$

Por outro lado,

$$\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta\left(\log\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = \frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\left[\frac{-p|\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2} + \frac{p\Delta\varphi_1}{\varphi_1} + \frac{(p-2)|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{(p-2)\Delta u}{u}\right].$$

Usando agora que $\Delta\varphi_1 = -\lambda_1\varphi_1$ e que $-\Delta u = \lambda u + W(x)u^{p-1}$, o lado direito da igualdade acima pode ser reescrito como

$$-\frac{p\varphi_1^{p-2}|\nabla\varphi_1|^2}{u^{p-2}} - \frac{p\lambda_1\varphi_1^p}{u^{p-2}} + \frac{(p-2)\varphi_1^p|\nabla u|^2}{u^p} + \frac{(p-2)\lambda\varphi_1^p}{u^{p-2}} + (p-2)W(x)\varphi_1^p.$$

Daí,

$$\begin{aligned}-\frac{(p-1)}{p-2}\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta\left(\log\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = \frac{p\lambda_1(p-1)}{p-2}\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} + \frac{p(p-1)}{p-2}\frac{\varphi_1^{p-2}}{u^{p-2}}|\nabla\varphi_1|^2 - (p-1)\frac{\varphi_1^p}{u^p}|\nabla u|^2 \\ -\lambda(p-1)\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} - (p-1)W(x)\varphi_1^p.\end{aligned}$$

Tendo em vista a última igualdade acima, (A.15) e (A.16), a relação em (A.14) fica demonstrada.

Afirmação: Vale a igualdade $\displaystyle\int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta\left(\log\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = -\int_\Omega \nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)\cdot\nabla\log\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)$.

Assumindo a veracidade da afirmação acima, temos que

$$-\int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta\left(\log\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = \int_\Omega \nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)\cdot\nabla\log\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = \int_\Omega \frac{u^{p-2}}{\varphi_1^p}\left|\nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)\right|^2,$$

onde na última igualdade acima utilizamos o fato de que

$$\nabla \log\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = \frac{u^{p-2}}{\varphi_1^p}\nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right).$$

Por outro lado, como

$$\left|\nabla\left(\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}}\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{2\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}}}\nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\frac{u^{p-2}}{\varphi_1^p}\left|\nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)\right|^2,$$

vemos que

$$-\int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\Delta\left(\log\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = 4\int_\Omega \left|\nabla\left(\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}}\right)\right|^2.$$

Sendo assim, a desigualdade em (A.14) torna-se

$$-(p-2)\int_\Omega W(x)\varphi_1^p \geq 4\frac{(p-1)}{p-2}\int_\Omega \left[\left|\nabla\left(\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}}\right)\right|^2 - \lambda_1\left|\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}}\right|^2\right].$$

Uma vez que

$$\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}} \notin \langle\varphi_1\rangle = \{t\varphi_1 \mid t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\},$$

o lado direito da desigualdade acima é estritamente positivo. Portanto, sendo $p > 2$ concluímos que

$$\int_\Omega W(x)e_1^p < 0.$$

Agora só resta demonstrar a afirmação. Para tanto, note que pelas propriedades de logaritmo, temos

$$\log\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = \log\varphi_1^p - \log u^{p-2} = p\log\varphi_1 - (p-2)\log u.$$

Assim, uma vez que o operador $-\Delta$ é linear, utilizando as relações (A.10) e (A.11), vemos que

$$\Delta \log\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) = p\left[\frac{-\lambda_1\varphi_1^2 - |\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2}\right] + (p-2)\left[\frac{\lambda u^2 + W(x)u^p + |\nabla u|^2}{u^2}\right].$$

Para cada $\varepsilon > 0$ fixado, considere a função $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\varphi_1^p(x)}{(u(x)+\varepsilon)^{p-2}}$. Fazendo isso, a fórmula de integração por partes nos assegura que

$$\int_\Omega f_\varepsilon \Delta(\log f_\varepsilon) = -\int_\Omega \nabla f_\varepsilon \cdot \nabla(\log f_\varepsilon),$$

uma vez que $f_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$.

Usando o fato de que $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e que $\varphi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, a mesma ideia utilizada na prova do Lema A.1 funciona para verificar que quando $\varepsilon \to 0$, tem-se

$$\int_\Omega f_\varepsilon \Delta(\log f_\varepsilon) \to \int_\Omega \frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}} \Delta\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right)$$

e

$$\int_\Omega \nabla f_\varepsilon \cdot \nabla(\log f_\varepsilon) \to \int_\Omega \nabla\left(\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right) \cdot \nabla\left(\log\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}\right),$$

como queremos. O Lema A.2 está provado. □

Observação A.1. Nossa argumentação de que

$$\int_\Omega \left[\left|\nabla\left(\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}}\right)\right|^2 - \lambda_1\left|\sqrt{\frac{\varphi_1^p}{u^{p-2}}}\right|^2\right] > 0$$

está baseada no seguinte fato: Se $\psi \in H_0^1(\Omega)$ é uma λ_1-autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, então vale a igualdade

$$\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\varphi = \lambda_1 \int_\Omega \psi\varphi,$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Escolhendo $\varphi = \psi$, tem-se

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 = \lambda_1 \int_\Omega \psi^2.$$

Em outras palavras, ψ realiza o ínfimo da função $Q : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2},$$

a qual satisfaz $Q(u) \geq \lambda_1$, para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Desse modo, se $\psi \notin \langle \varphi_1 \rangle$, então $Q(\psi) > \lambda_1$, o que justifica a desigualdade acima. A expressão que define a função Q acima é conhecida, na literatura, como quociente de Rayleigh.

Lema A.3. *Suponha que F satisfaz* (2.3). *Então $sf(s) \leq qFq(s)$, para todo $s \geq 0$. Em particular, a função contínua $h(x,s) = \lambda s + W(x)f(s)$ tem crescimento subcrítico.*

Demonstração. Com efeito, para cada $s \in \mathbb{R}$, defina a função $g(r) := F(s+rs)$. Pela regra da cadeia temos, $g'(r) = f(s+rs)s$. Em particular, $g'(0) = f(s)s$. Além disso, pela definição de derivada, vemos que

$$g'(0) = \lim_{r\to 0} \frac{g(r)-g(0)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{F(s+rs)-F(s)}{r} = \lim_{r\to 0^-} \frac{F(s+rs)-F(s)}{r}.$$

Se $r < 0$, temos $t = 1+r < 1$, o que por (2.3), implica em

$$F((1+r)s) \geq (1+r)^q F(s), \quad \text{para todo } r < 0.$$

Consequentemente, $F((1+r)s) - F(s) \geq [(1+r)^q - 1^q]F(s)$, para todo $r < 0$, e portanto,

$$f(s)s = \lim_{r\to 0^-} \frac{F((1+r)s)-F(s)}{r} \leq \lim_{r\to 0^-} \frac{[(1+r)^q - 1^q]F(s)}{r} = qF(s). \tag{A.17}$$

De posse da relação (A.17) e da hipótese (H3) item (iv), observamos que a função $f(s)$ possui crescimento subcrítico. De fato, por (A.17), para todo $s \geq 1$, temos

$$f(s) \leq q\frac{F(s)}{s} \leq q\left(\frac{A}{s} + Bs^{p-1}\right) \leq qA + qBs^{p-1}.$$

Por outro lado, se $0 \leq s \leq 1$, a continuidade de f no compacto $[0,1]$ nos assegura a existência de uma constante $M > 0$ tal que $|f(s)| \leq M$, para todo $s \in [0,1]$. Dessa forma, tem-se $f(s) \leq (A+M) + Bs^{p-1}$, para todo $s \geq 0$, o que por sua vez, garante a existência de uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que $|h(x,s)| \leq \tilde{C}(1+s^{p-1})$, para todo $s \geq 0$, dado que $W \in C^\beta(\overline{\Omega})$. Segue que $v_{\mu^*} \in W^{2,l}(\Omega)$, $l > N$.

□

A.2 Demonstrações do Capítulo 1

Nesta seção, daremos a demonstração de alguns dos teoremas e proposições enunciados no Capítulo 1.

Ideia da demonstração do Teorema 1.6. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 < \varepsilon < c - c_1$. Seja $f \in M$ satisfazendo

$$\max_{s\in K} \varphi(f(s)) \leq c + \varepsilon,$$

e defina a função $\phi : M \to \mathbb{R}$ por $\phi(g) = \max\limits_{s\in K} \varphi(g(s))$. Com essa definição, fica claro que $c = \inf\limits_{M} \phi > c_1$. Além disso, usando a continuidade uniforme de φ em $g(K)$, verifica-se que ϕ é contínua (e portanto semicontínua inferiormente). Logo, podemos utilizar o Princípio Variacional de Ekeland para obter $h \in M$ tal que

$$\begin{aligned}
&\phi(h) \leq \phi(f) \leq c + \varepsilon,\\
&\max_{s\in K} |h(s) - f(s)| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}},\\
&\phi(g) > \phi(h) - \varepsilon^{\frac{1}{2}} d(h,g),
\end{aligned}$$

sempre que $g \in M$ e $g \neq h$. O restante da demonstração consiste em provar a existência de um elemento $s_0 \in K$ tal que

$$c - \varepsilon \leq \varphi(h(s_0)) \quad \text{e} \quad \|\varphi'(h(s_0))\|_{X'} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

o que é feito supondo que um tal elemento $s_0 \in K$ não existe e usando o fato de que $\phi(g) > \phi(h) - \varepsilon^{\frac{1}{2}} d(h,g)$ para chegar a uma contradição. O elemento $s_0 \in K$ obtido irá satisfazer as condições requeridas, uma vez que $h(s_0) \in X$ e $c - \varepsilon \leq \varphi(h(s_0)) \leq \phi(h) \leq \phi(f)$.

Demonstração da Proposição 1.1. Vamos provar primeiro que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \lambda_{k-1} \int_\Omega |v|^2, \quad \forall\, v \in V.$$

Ora, dado $v \in V$, existem escalares $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ tais que

$$v = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_k\varphi_{k-1}.$$

Lembrando que as autofunções $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ são ortogonais em $H_0^1(\Omega)$ e satisfazem

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_j|^2 = \lambda_j \int_\Omega |\varphi_j|^2, \ \ \forall\, j\in\mathbb{N},$$

temos em particular que, para $1\le i\le k-1$,

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = \int_\Omega \left|\nabla\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\varphi_i\right)\right|^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \int_\Omega |\nabla\varphi_i|^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i\lambda_i \int_\Omega |\varphi_i|^2.$$

Uma vez que os autovalores $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formam uma sequência crescente em $\mathbb{R}$ e as funções $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ são também ortogonais em $L^2(\Omega)$, infere-se desta última igualdade acima que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^2 &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i\lambda_i \int_\Omega |\varphi_i|^2 \le \lambda_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i \int_\Omega |\varphi_i|^2\\ &= \lambda_{k-1}\int_\Omega |a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_{k-1}\varphi_{k-1}|^2\\ &= \lambda_{k-1}\int_\Omega |v|^2.\end{aligned}$$

A outra desigualdade é uma consequência imediata da caracterização variacional dos autovalores, a saber

$$\lambda_k = \inf_{w\in W\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2}{\displaystyle\int_\Omega w^2}.$$

Demonstração da Proposição 1.2. Seja $(u_k)\subset H_0^1(\Omega)$ limitada tal que

$$\sup_k |I(u_k)| < +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} I'(u_k) = 0.$$

Vamos provar que existe uma subsequência de (u_k) que converge fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Com efeito, desde que $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo e (u_k) é limitada, podemos supor que existe $u\in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, tem-se

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega),\\ u_k(x)\to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,\\ \text{Existe } h\in L^p(\Omega) \text{ tal que } |u(x)|,|u_k(x)|\le h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \forall k\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{A.18}$$

Como por hipótese, $I'(u_k) \to 0$ quando $k \to +\infty$ e (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{k\to+\infty} I'(u_k)(u_k - u) = I'(u_k)u_k - I'(u_k)u \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left[\|u_k\|^2 - \int_\Omega f(x,u_k)u_k - \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla u + \int_\Omega f(x,u_k)u \right]. \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}
$$

Uma vez que a convergência fraca da sequência (u_k) em $H_0^1(\Omega)$ fornece

$$
\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla u = \|u\|^2,
$$

retomando (A.19), concluímos que

$$
\lim_{k\to+\infty} \left[\|u_k\|^2 - \int_\Omega f(x,u_k)u_k + \int_\Omega f(x,u_k)u \right] = \|u\|^2. \qquad \text{(A.20)}
$$

Tendo isso em vista, é suficiente mostrar que

$$
\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f(x,u_k)u = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f(x,u_k)u_k,
$$

pois uma vez feito isto, ao passar o limite quando $k \to +\infty$ em (A.20), iremos obter

$$
\lim_{k\to+\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2,
$$

de onde seguirá que

$$
\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|^2 = \|u_k\|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla u + \|u\|^2 = 0,
$$

como desejamos mostrar. Para fazer isso, note que a continuidade da função f dada pela condição (i) e (A.18) nos fornecem

$$
\begin{cases}
f(x,u_k(x))u_k(x) \to f(x,u(x))u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \\
f(x,u_k(x))u(x) \to f(x,u(x))u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.
\end{cases}
$$

Por outro lado, usando a condição (ii) e (A.18), vemos que

$$
\begin{cases}
|f(x,u_k(x)||u_k(x)| \le c_1|u_k(x)| + c_2|u_k(x)|^p \le c_1 h + c_2 h^p(x) \in L^1(\Omega), \\
|f(x,u_k(x)||u(x)| \le c_1|u(x)| + c_2|u_k(x)|^{p-1}|u(x)| \le c_1 h + c_2 h^p(x) \in L^1(\Omega).
\end{cases}
$$

Podemos então nos valer do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega f(x,u_k)u = \int_\Omega f(x,u)u = \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega f(x,u_k)u_k,$$

o que pelas considerações anteriores finaliza a demonstração da Proposição 1.2. $\square$

Demonstração da Proposição 1.3. Notemos que se $\Omega^0 \subset \Omega$, então $C_0^\infty(\Omega^0) \subset C_0^\infty(\Omega)$, o que por sua vez implica que $H_0^1(\Omega^0) = \overline{C_0^\infty(\Omega^0)} \subset H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$. Levando isso em conta, segue facilmente das propriedades de ínfimo que

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\|u\|}{|u|_2^2} \leq \inf_{u\in H_0^1(\Omega^0)} \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2} = \lambda_1(\Omega^0).$$

Para a prova da desigualdade estrita, sejam $\Omega^0 \subset \Omega$ um subconjunto próprio, φ_1^0 uma $\lambda_1(\Omega^0)$-autofunção de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e considere a função $\tilde{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi_1^0(x), & \text{se } x \in \Omega^0, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^0. \end{cases}$$

Se tivessemos $\lambda_1(\Omega^0) = \lambda_1(\Omega)$, a função $\tilde{\varphi}$ assim definida seria uma $\lambda_1(\Omega)$-autofunção do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, o que não pode ocorrer, visto que a primeira autofunção é estritamente positiva (negativa) em Ω. $\square$

Demonstração da Proposição 1.5. Podemos enxergar S como $(-\Delta)^{-1}|_{C^\beta(\overline{\Omega})}$. Dessa forma, faz-se necessário mostrar que S está bem definido, no sentido de que $\mathrm{R}[S] \subset C^\beta(\overline{\Omega})$.

Como $C^\beta(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, faz sentido considerar sua restrição ao conjunto $C^\beta(\overline{\Omega})$, de sorte que, dado $u_g = S(g) \in R(S)$, pela construção de $(-\Delta)^{-1}$ temos

$$\int_\Omega \nabla u_g \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega g\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

o que mostra que u_g é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, como $g \in C(\overline{\Omega})$, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in \Omega$. Logo, podemos usar a teoria de regularidade e as imersões dos espaços de Hölder, para concluir que $u_g \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ (cf. Teorema 5.17 de [22]). Em particular, $u_g \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$, de modo que, pela arbitrariedade da escolha de u_g, conclui-se que $\mathrm{R}[S] \subset C^{\beta}(\Omega)$, e portanto S está bem definido.

Vejamos que S é compacto. Com efeito, pelo que foi discutido no parágrafo anterior, temos que

$$\begin{aligned} S : C^{\beta}(\overline{\Omega}) &\to C^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \\ g &\longmapsto S(g) = u_g, \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua, visto que é a restrição da aplicação $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ao subespaço $C^{\beta}(\overline{\Omega})$. Por outro lado, sendo a imersão $i : C^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{\beta}(\overline{\Omega})$ compacta, segue que a composição

$$C^{\beta}(\overline{\Omega}) \xrightarrow{S} C^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \xhookrightarrow{i} C^{\beta}(\Omega)$$

é uma aplicação compacta. Consequentemente, $S = i \circ S$ é compacta. $\square$

Apêndice B

Regularidade das soluções

B.1 Resultados de regularidade elíptica

Teorema B.1. *(Rellich-Krondrachov, [22]) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^1 então as seguintes imersões são compactas:*

(i) se $1 \leq p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < p^*$;

(ii) se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$;

(iii) se $N > p$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \gamma < 1 - N/p$.

Além disso, as imersões de $W_0^{1,p}(\Omega)$ nos espaços acima são sempre compactas, independentemente da regularidade de Ω.

Teorema B.2. *(Imersão dos espaços $W^{k,p}(\Omega)$, [22]) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

(i) Se $kp < N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq \dfrac{Np}{N-kp}$;

(ii) Se $kp = N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$;

(iii) Se $kp > N$, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-[\frac{N}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, em que

$$\gamma = \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}, & se\ \dfrac{N}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{qualquer número pertencente a } (0,1), & se\ \dfrac{N}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Teorema B.3. *(Agmon, Douglis, Nirenberg, [22]) Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio e $u \in H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = g & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se Ω é de classe C^2, com fronteira $\partial\Omega$ limitada, e $g \in L^p(\Omega)$, para algum $1 < p < \infty$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C|g|_p.$$

Teorema B.4. *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $|g(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}$, onde $1 < p < 2^*$ e $c_1, c_2 > 0 \in \mathbb{R}$ são constantes. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de classe C^2 e $u \in H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1 - N/p$.

A demonstração do teorema acima é feita com base em um argumento conhecido como "bootstrap", e pode ser encontrada na referência [22], Teorema 5.17. Vale observar que a hipótese de crescimento subcrítico, descrita no Teorema 5.17, é suficiente para garantir que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Se supormos ainda que $g \in C^{\gamma}(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$, podemos garantir, através do Teorema de Schauder, que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Baseados neste último teorema, podemos usar a hipótese (2.2) para concluir que as soluções do problema (P_λ) pertencem ao espaço $C^1(\overline{\Omega})$.

Teorema B.5. *Se f satisfaz a condição* (2.2)*, isto é,*

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{q-2}s} = 1,$$

as soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = W(x) f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_λ}$$

são de classe $C^1(\overline{\Omega})$.

Demonstração. De fato, por (2.2), dado $\varepsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq (\varepsilon + 1)|s|^{p-1},$$

sempre que $|s| > s_0 > 0$. E da continuidade de f em $[-s_0, s_0]$ podemos encontrar $C > 0$ tal que $|f(s)| \leq C$, para todo $|s| \leq s_0$. Logo, fixando $\varepsilon > 0$, vemos que existem constantes $C, D > 0$ tais que

$$|f(s)| \leq C + D|s|^{p-1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Sendo $h(x,s) = \lambda s + W(x)f(s)$, podemos utilizar o fato de que $W \in C^\beta(\overline{\Omega})$ para obter

$$|h(x,s)| \leq \lambda|s| + |W|_\infty |f(s)| \leq C_1 + \lambda|s| + D_1|s|^{p-1}.$$

Se $|s| \leq 1$, então $h(x,s) \leq (C_1 + \lambda) + D_1|s|^{p-1}$. Caso contrário, tem-se $|s| \geq 1$, donde $|s| \leq |s|^{p-1}$ e portanto $|h(x,s)| \leq C_1 + (\lambda_1 + D_1)|s|^{p-1}$. Tomando $\tilde{C} > 0$ como sendo o máximo dentre todas as constantes envolvidas no processo, obtemos

$$|h(x,s)| \leq \tilde{C}(1 + |s|^{p-1}) \tag{CS}$$

o que, de acordo com o Teorema B.4, garante que as soluções do problema (P_λ) estão em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1 - N/p$. Em particular, $u \in C^1(\overline{\Omega})$. □

Observação 6. *Note que durante a argumentação obtivemos - embora tenhamos omitido este fato - algumas contantes que dependiam do* $\varepsilon > 0$ *fixado previamente e também da escolha de* λ. *Sendo assim, para cada* $\lambda > 0$, *pode-se mostrar que a função* $h(x,s)$ *tem crescimento subcrítico, desde que o* $\varepsilon > 0$ *esteja fixado.*

Um outro resultado de extrema utilidade para nós é o seguinte:

Teorema B.6. *Se* f *satisfaz* (2.2) *e* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é uma solução não-negativa e não-trivial do problema* (P_λ), $\lambda > 0$, *então* $u > 0$ *em* Ω *e* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ *em* $\partial\Omega$.

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\overline{\Omega})$, $p > N$, uma solução não-negativa e não-trivial do problema (P_λ), $\lambda > 0$ e considere a função $g(x,s) := \lambda s + W(x)f(s) + Ks$, em que $K > 0$ é uma constante. A função contínua $W(x)f'(s)$ assume um mínimo no compacto $\overline{\Omega} \times [0, |u|_\infty]$, digamos m. Assim, podemos escolher $K > 0$ de modo que

$$g_s(x,s) = \lambda + W(x)f'(s) + K > m + K > 0.$$

Em outras palavras, podemos escolher $K > 0$ de tal modo que, no compacto $\overline{\Omega} \times [0, |u|_\infty]$, a função $g(x,s)$ se torne crescente em s. Como $g(x,0) = 0$, segue que, em $\overline{\Omega} \times [0, |u|_\infty]$, temos $g(x,s) \geq 0$. Consequentemente, tem-se $-\Delta u + Ku = g(x,u) = \lambda u + W(x)f(u) + Ku \geq 0$, q.t.p em Ω. Considerando então o operador $L = -\Delta + K$, podemos usar o Princípio do Máximo (cf. Teorema 1.7) e o Lema da fronteira de Hopf (cf. Teorema 1.8) para concluir que $u > 0$ em Ω e que $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$, como queríamos. $\square$

Apêndice C

Análise Funcional e Teoria da Medida

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach reais.

C.1 Alguns Resultados Clássicos

Definição C.1 ([21]). *Dizemos que uma sequência $(u_k) \subset X$ converge para $u \in X$, e escrevemos $u_k \to u$, se*

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_X = 0.$$

Definição C.2 ([21]). *Dizemos que uma sequência $(u_k) \subset X$ converge fracamente a $u \in X$, e escrevemos $u_k \rightharpoonup u$, se*

$$\psi(u_k) \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} \psi(u)$$

para todo funcional linear limitado $\psi \in X'$.

A notação X' representa o dual do espaço de Banach X, isto é,

$$X' = \{\psi : X \to \mathbb{R} \mid \psi \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Definição C.3 ([21]). *Um operador linear limitado $K : X \to Y$ chama-se compacto se, para cada sequência limitada $(u_k) \subset X$, a sequência (Ku_k) é pré-compacta em Y; isto é, existe uma subsequência (u_{k_j}) tal que (Ku_{k_j}) converge em Y.*

Uma propriedade interessante dos operadores compactos é dada pelo teorema a seguir:

Teorema C.1. *([10]) Sejam E e F espaços normados e $T \in L(E,F)$ um operador compacto.*

(a) Se T é compacto, então vale a implicação

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E \implies T(x_n) \to T(x) \text{ em } F. \tag{C.1}$$

(b) Se E é reflexivo, então T é compacto se, e somente, se vale (C.1)*.*

De fato o teorema acima é muito útil no contexto de métodos variacionais, pois ao mostrar que uma sequência (u_n) converge fracamente a $u \in H_0^1(\Omega)$, a combinação deste resultado com o Teorema B.1 nos garante que $u_n \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, 2^*)$, intervalo esse onde se ganha a compacidade da aplicação $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, a qual é chamada comumente na literatura de imersão.

O resultado que enunciamos a seguir é realmente útil em muitos contextos. Sua prova pode ser encontrada na referência [11], Corolário 4.24.

Teorema C.2 (Lema Fundamental do Cálculo das Variações, [11])**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi = 0, \ \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então $u = 0$, q.t.p. em Ω.

Demonstração. Para uma prova deste resultado, veja Corolário 4.24 de [11]. □

Teorema C.3 (Projeção Ortogonal, [10])**.** *Seja E um espaço com produto interno e $M \subset E$ um subespaço completo. Então $E = M \oplus M^\perp$.*

O Teorema a seguir fornece, para a classe dos operadores compactos, um resultado análogo ao que ocorre em dimensão finita.

Teorema C.4 (Alternativa de Fredholm, [11])**.** *Seja $K : X \to X$ um operador compacto. Então,*

(i) $N[I-K]$ tem dimensão finita,

(ii) $R[I-K]$ é fechado,

(iii) $R[I-K] = N[I-K^*]^\perp$,

(iv) $N[I-K] = \{0\} \iff R[I-K] = X$,

(v) $\dim N[I-K] = \dim N[I-K^*]$,

em que K^* é o operador adjunto de K e $I : X \to X$ o operador identidade.

Teorema C.5. *([11]) Suponha que X é um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em X. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca $\sigma(X,X')$.*

C.2 Aplicações Fréchet e Gâteaux-diferenciáveis

Seja U um subconjunto aberto de X e $F : U \to Y$ uma aplicação.

Definição C.4. *([6]) Seja $u \in U$. Dizemos que F é Fréchet-diferenciável em u, se existe $F \in L(X,Y)$ tal que, definindo*

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A(h), \tag{C.2}$$

tem-se $R(h) = o(\|h\|_X)$, isto é, $\lim \dfrac{R(h)}{\|h\|_X} \to 0$, quando $\|h\|_X \to 0$.

A aplicação A é chamada diferencial de Fréchet de F em $u \in U$.

Para espaços de Banach em geral, existe um conceito análogo ao de Derivada Direcional visto nos cursos de Análise no $\mathbb{R}^N$.

Definição C.5. *([6]) Seja $F : U \to Y$ e $u \in U$. Dizemos que F é Gâteaux-diferenciável em u, se existe $B \in L(X,Y)$ tal que, para todo $h \in X$, tem-se*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+th) - F(u)}{t} = Bh. \tag{C.3}$$

A aplicação B é chamada a diferencial de Gâteaux de F em $u \in U$.

Pode-se mostrar que A e B são unicamente determinadas. Dessa forma, iremos escrever $A = F'(u)$ e $B = F'_G(u)$, para nos referir às diferenciais de Fréchet e Gâteaux de F em $u \in U$, respectivamente.

Quando F é Fréchet-diferenciável em todos os pontos de U, dizemos simplesmente que F é Fréchet-diferenciável. Analogamente, se F é Gâteaux-diferenciável em todos os pontos de U, diz-se que F é Gâteaux-diferenciável. Quando isso ocorre, podemos considerar as aplicações

$$F'_G : U \to L(X,Y) \quad \text{e} \quad F' : U \to L(X,Y),$$

que associam cada elemento $u \in U$ aos elementos $F'_G(u)$ e $F'(u)$. As aplicações F'_G e F' são denominadas derivada de Gâteaux e de Fréchet de F, respectivamente.

Evidentemente, se F é Fréchet-diferenciável, então F é Gâteaux-Diferenciável. A recíproca nem sempre é verdadeira, mas com a hipótese de que F'_G é contínua, vale o seguinte resultado:

Teorema C.6. *([6]) Suponha que $F : U \to Y$ é uma aplicação Gâteaux diferenciável em U, e seja*

$$F'_G : U \to L(X,Y)$$

contínua em u^*. Então, F é Fréchet-diferenciável em u^* e $F'(u^*) = F'_G(u^*)$.

Para o leitor interessado em um tratamento mais completo dos conceitos abordados nesta seção, recomendamos a referência [6].

C.3 Espaços $L^P(\Omega)$

Teorema C.7 ([11])**.** *Seja (f_k) uma sequência em L^p e seja $f \in L^p$ tal que $|f_k - f| \to 0$, quando $k \to +\infty$. Então existem uma subsequência (f_{k_j}) e uma função $h \in L^p$ tais que*

(i) $f_{k_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω, *quando* $j \to +\infty$,

(ii) $|f_{k_j}(x)| \leq h(x)$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$, *q.t.p em* Ω.

Teorema C.8 (Imersão, [1])**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado e que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se $u \in L^q$, então $u \in L^p$ e existe $C = C(\Omega, p, q) > 0$ tal que*

$$|u|_p \leq C|u|_q.$$

Consequentemente, a imersão $L^q \hookrightarrow L^p$ é contínua.

C.4 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

Teorema C.9 ([11])**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e (f_k) uma sequência de funções em L^1 satisfazendo:*

(i) $f_k(x) \to f(x)$, *q.t.p. em* Ω;

(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se $|f_k(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em Ω.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $|f_k - f|_p \to 0$, quando $k \to +\infty$.

C.5 Desigualdades de Hölder e Young

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por p' o expoente conjugado de p, isto é, o número real p' satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Quando $p = 1$, tomamos $p' = \infty$.

Teorema C.10 (Desigualdade de Hölder, [11])**.** *Suponha que $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq |f|_p |g|_q.$$

Teorema C.11 (Desigualdade de Hölder generalizada, [11])**.** *Suponha que $f_1, f_2, \cdots, f_n$ são funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}, 1 \leq i \leq n, \text{ com } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então, o produto $f = f_1 f_2 \cdots f_n \in L^p$ e

$$|f|_p \leq |f_1|_{p_1} |f_2|_{p_2} \cdots |f_n|_{p_n}.$$

Teorema C.12 (Desigualdade de Young com ε, [21])**.** *Sejam a, b, ε números reais positivos. Então, $ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^{p'}$, para $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-p'/p} (p')^{-1}$.*

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] AFROUZI, G. Existence of positive solutions on indefinite superlinear elliptic equations. *Appl. Math. Comput. 157*, no. 3 (2004), 841–848.

[3] ALAMA, S.; TARANTELLO, G. On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities. *Calc. Var. Partial Differential Equations 1*, no. 4 (1993), 439–475.

[4] ALAMA, S.; DEL PINO, M. Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via morse theory and linking. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire 13*, no. 1 (1996), 95–115.

[5] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] AMBROSETTI, A.; PRODI, G. *A primer of nonlinear analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 34. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[7] BADIALE, M.; SERRA, E. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach*. Universitext. Springer, London, 2011.

[8] BERESTYCKI, H.; CAPPUZO-DOCETTA, I., AND NIRENBERG, L. Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear liouville theorems. *Topol. Meth. Nonlinear. Anal. 4*, no. 4 (1994), 59–78.

[9] BERESTYCKI, H.; CAPPUZO-DOCETTA, I., AND NIRENBERG, L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 2*, no. 4 (1995), 553–572.

[10] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D., AND TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, 2012.

[11] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[12] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. H^1 versus C^1 local minimizers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 317*, no. 5 (1993), 465–472.

[13] BREZIS, H.; TURNER, R. E. On a class of superlinear elliptic problems. *Comm. Partial Differential Equations 2*, no. 6 (1997), 601–614.

[14] CHANG, K.-C; JIANG, M. Dirichlet problem with indefinite nonlinearities. *Calc. Var. Partial Differential Equations 20*, no. 3 (2004), 257–282.

[15] CINTRA, W. NOTAS DE AULA - TÓPICOS EM ANÁLISE: Métodos não-variacionais para EDP's Elípticas. Brasília-DF, 2022.

[16] COSTA, D. G. *An invitation to variational methods in differential equations*. Birkhöuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[17] COSTA, D. G.; TEHRANI, H. Existence of positive solutions for a class of indefinite elliptic problems in $\mathbb{R}^N$. *Calc. Var. Partial Differential Equations 13*, no. 2 (2001), 159–189.

[18] COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of mathematical physics: partial differential equations. Vol II: Partial differential equations*. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1962.

[19] CRANDALL, G.; RABINOWITZ, P. H. Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Functional Analysis 8* (1971), 321–340.

[20] DEIMLING, K. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1989.

[21] EVANS, L. C. *Partial differential equations*. Second Edition. Graduate Studies in Mathematics 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[22] FURTADO, M. Notas de aula do curso de EDP 2 (versão 1.2). Disponível em: https://www.mat.unb.br/ furtado/. Acesso em: 01 set. 2022.

[23] FURTADO, M. Notas de aula do curso de métodos variacionais (versão 1.1). Disponível em: https://www.mat.unb.br/ furtado/. Acesso em: 01 set. 2022.

[24] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 2001.

[25] HESS, P.; KATO, T. On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function. *Comm. Partial Differential Equations 5*, no. 10 (1980), 999–1030.

[26] LÓPEZ-GOMEZ, J. *Spectral theory and nonlinear functional analysis*. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 426. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

[27] LÓPEZ-GOMEZ, J. *The strong maximum principle*. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009.

[28] MAWHIN, J.; WILLEM, M. *Critical point theory and Hamiltonian systems*, vol. 74. Applied Mathematical Sciences, 74. Springer-Verlag, New York, 1989.

[29] MEDEIROS, E. S.; SEVERO, U. B., AND SILVA, E. A. B. On a class of elliptic problems with indefinite nonlinearities. *Calc. Var. Partial Differential Equations 50*, no. 3-4 (2013), 751–777.

[30] MIRONESCU, P.; RĂDULESCU, V. D. The study of a bifurcation problem associated to an asymptotically linear function. *Nonlinear Anal. 26*, no. 4 (1996), 857–875.

[31] MOREIRA NETO, SANDRA IMACULADA. Mínimos locais em C1 versus H1 com aplicações a problemas elípticos semilineares. 2005. 79 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2005.

[32] OUYANG, T. On the positive solutions of semilinear equations $-\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ on compact manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc. 331*, no. 2 (1992), 503–527.

[33] RABINOWITZ, P. H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986*.

[34] SILVA, E. A. B.; SILVA, M. L. Continuous dependence of solutions for indefinite semilinear elliptic problems. *Electron. J. Differential Equations*, no. 239, 17 pp (2013).

[35] STRUWE, M. *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[36] SÁNCHEZ AGUILAR, PEDRO MANUEL. A landesman-lazer local condition for nonlinear elliptic problems. 2017. 83 f. Tese (Doutorado) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2017.