
MECÂNICA DE SUSPENSÕES MAGNÉTICAS DILUÍDAS

HUGO LEONNARDO GOMIDES DO COUTO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MECÂNICA DE SUSPENSÕES MAGNÉTICAS DILUÍDAS

HUGO LEONNARDO GOMIDES DO COUTO

ORIENTADOR: FRANCISCO RICARDO DA CUNHA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
CIÊNCIAS MECÂNICAS**

PUBLICAÇÃO: ENM.DM-130A/09

BRASÍLIA/DF: abril - 2009.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MECÂNICA DE SUSPENSÕES MAGNÉTICAS DILUÍDAS

HUGO LEONNARDO GOMIDES DO COUTO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, PhD. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. Paulo César Moraes, DSc. (FIS-UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Márcio da Silveira Carvalho, PhD. (DEM-PUC-Rio)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 17 DE ABRIL DE 2009.

FICHA CATALOGRÁFICA

COUTO, HUGO LEONNARDO GOMIDES DO

Mecânica de Suspensões Magnéticas Diluídas.

[Distrito Federal] 2009.

xix, 114p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2009).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 1. Difusão hidrodinâmica | 2. Interações hidrodinâmicas |
| 3. Partículas magnéticas | 4. Suspensões |
| I. ENM/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

COUTO, H. L. G. (2009). Mecânica de Suspensões Magnéticas Diluídas. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM-130A/09, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 114p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Hugo Leonnardo Gomides do Couto.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Mecânica de Suspensões Magnéticas Diluídas.

GRAU / ANO: Mestre / 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Hugo Leonnardo Gomides do Couto
Avenida 10, Quadra 02, Lote 10, Vila Leonor
76630 - 000 Itaberaí - GO - Brasil.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado aos meus pais
Goiás do Couto Sobrinho e
Abadia Lucilene Gomides do Couto
pelo amor, pela amizade e pela vida.

AGRADECIMENTOS

Faço a Deus meu primeiro agradecimento. Por sua providência, foi possível superar as dificuldades advindas da elaboração deste trabalho. Foi Ele quem me deu condições mais que suficientes para alcançar um momento tão marcante como esse em minha vida. Graças à Ele, posso agradecer às seguintes pessoas.

Aos meus queridos pais Goiás e Abadia Lucilene, sempre desejosos de minha presença, e às minhas irmãs Sonara e Karine, por estarem ao meu lado sempre, concordando ou não com minhas decisões, portando-se sempre como verdadeiras amigas. Ao meu cunhado Benedito por ter me acolhido sempre em sua casa, durante minhas viagens. Todos eles sempre desejaram somente o melhor para o meu futuro. Espero não tê-los decepcionado. Lembro-me ainda, de meus afilhados Gabriely, Victor Hugo e Ana Júlia, sempre dispostos a me fazer sorrir e cujo carinho sincero julgo-me incapaz de recompensar a altura, apesar de meus esforços. Infelizmente, perdi a doce inocência dos mesmos.

À minha amada esposa Marília, fonte de minhas mais sinceras alegrias. Devo a ela a preocupação e o carinho incansáveis que tiravam da minha cabeça a pressão do trabalho e a irritação com as exaustivas viagens para visitá-la. Fico sempre impressionado com sua destreza pra lidar com as dificuldades que vivenciamos juntos. É ao seu lado que me sinto seguro e confiante para trilhar os caminhos e descaminhos da vida . . . De toda minha vida. Somos um só e, assim sendo, buscarei sempre vê-la feliz para, portanto, alcançar minha própria felicidade.

Faço questão também de mencionar a insaciável vontade de trabalhar do meu orientador Francisco Ricardo da Cunha. Agradeço por todas as horas dispensadas durante minha orientação e pelo tempo dispendido nas nossas longas conversas sobre a academia e sobre a vida. Às disciplinas ministradas com tamanha habilidade, ao desejo contínuo de nos preparar para a vida acadêmica, envolvendo-nos com a publicação de artigos, à participação em conferências e seminários e ao envolvimento com atividades de ensino.

Aos estimados amigos do Grupo VORTEX: Gustavo Abade, pelas enriquecedoras discussões no café e pela simpatia quase inocente que sempre cativou a todos nós do grupo; Yuri Sobral, por suas fortes convicções acerca da academia e da vida que sempre me inspiraram; Taygoara Oliveira, pela habilidade de se desdobrar em mil para conseguir seguir sempre em frente,

apesar das dificuldades - considero-o um grande vencedor; Douglas Ramos, pela amizade e pela sinceridade com que sempre conduziu o trato com os colegas; Jonas Carvalho, pela incansável vontade de ajudar a todos; Farith Salas, Marcelo Andreotti e Rodrigo Carrijo, pelo inesgotável bom humor; e ao demais membros do grupo.

Aos amigos da República Goiás é Mais e da Colina/UnB, pelas longas discussões sobre a vida e sobre as contas a pagar. Foram essas as pessoas com as quais passei oito anos em Brasília e que ajudaram a moldar meu caráter e minha personalidade.

RESUMO

MECÂNICA DE SUSPENSÕES MAGNÉTICAS DILUÍDAS

Autor: Hugo Leonnardo Gomides do Couto

Orientador: Prof. Francisco Ricardo da Cunha

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, abril de 2009

Este trabalho destina-se a investigar a hidrodinâmica de suspensões diluídas formadas por partículas magnéticas, avaliando os aspectos microestruturais e macroscópicos destes sistemas particulados.

Do ponto de vista microestrutural, sabe-se que a atração magnetostática pode levar à formação de agregados em suspensões magnéticas. Neste intuito, foram desenvolvidas simulações numéricas baseadas nas trajetórias relativas de partículas magnéticas em uma suspensão diluída sob ação da gravidade, calculando-se a taxa de formação de agregados. As interações hidrodinâmicas exibem uma forte influência no processo de agregação de partículas. Além disso, as colisões podem resultar simplesmente na quebra da reversibilidade no tempo da trajetória relativa das partículas. Avaliando as trajetórias que produzem tal efeito difusivo, os coeficientes transversais de auto-difusão e de difusão devido a gradientes de concentração, que descrevem a migração lateral das partículas, são calculados. Foi obtida ainda uma formulação integral de contorno tridimensional para o movimento de uma superfície magnética livre em escoamentos de Stokes. Combinando o teorema recíproco para o escoamento de um fluido magnético e a solução fundamental para um escoamento de Stokes, obtém-se uma representação integral em termos dos potenciais hidrodinâmicos e magnéticos, o que permite investigar o movimento tridimensional de uma gota de fluido magnético sob a ação de campos de escoamento e magnético impostos e a reologia de emulsões magnéticas.

Do ponto de vista macroscópico, uma suspensão magnética diluída é considerada estável, ou seja, não ocorre a formação de agregados irreversíveis, sendo, então, tratada como um meio contínuo. Considerando-se isso, faz-se uma análise teórica dimensional acerca do movimento termoconvectivo de um fluido magnético sob ação de um campo magnético aplicado em uma cavidade retangular delgada. Para isso foram utilizadas análises de escalas das equações de balanço da quantidade de movimento e de energia para um fluido magnético não-isotérmico, a fim de determinar como se relacionam as taxas de transferência de calor do sistema com os parâmetros governantes do fenômeno convectivo magnético.

ABSTRACT

MECHANICS OF DILUTE MAGNETIC SUSPENSIONS

Author: Hugo Leonnardo Gomides do Couto

Supervisor: Prof. Francisco Ricardo da Cunha

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, april of 2009

This work concerns with an investigation of the dynamics of dilute suspensions composed by magnetic particles, considering microstructural and macroscopic aspects of this particulate systems.

From the microstructure, it is known that magnetostatic attraction may lead to formation of aggregates in magnetic suspensions. In this way, numerical simulations have been developed, based on the relative trajectories of magnetic particles in a dilute sedimenting suspension for computing the dimensionless rate at which aggregates are formed. The numerical results show that hydrodynamic interactions exhibit a strong influence in the process of magnetic particle aggregation. Furthermore, the collisions may result simply in a break of particle relative trajectory time-reversibility. After summing over all possible encounters, the transverse self-diffusion and down-gradient diffusion coefficients that describe the cross-flow migration of the particles are calculated. Within the same context, a general three-dimensional boundary integral formulation for magnetic free surface in viscous flows at low Reynolds numbers has been developed. Combining the reciprocal theorem for a magnetic fluid and the fundamental solution of a creeping flow we obtain the integral representation of the flow in terms of hydrodynamic and magnetic potentials. The proposed boundary integral equations has been developed in order to simulate the full time-dependent low Reynolds number distortion and orientation of a three-dimensional ferrofluid droplet under action of shearing motions and magnetic fields and, consequently, the rheology of magnetic emulsions.

In a macroscopic point of view, a dilute magnetic suspension is said to be stable, i.e. particle-doublets do not evolve in time, being treated as homogeneous continuum material. Considering this assumption, a theoretical analysis is developed in order to investigate the thermoconvective motion of a magnetic fluid under an applied magnetic field in a narrow rectangular cavity. A scaling analysis of the momentum and energy equations have been performed, in order to relate the heat transfer taxes with the key parameters of the thermomagnetic phenomenon.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO	6
1.3.1	Objetivos gerais	6
1.3.2	Objetivos específicos	6
2	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DE SUSPENSÕES E EMULSÕES MAGNÉTICAS	8
2.1	SUSPENSÕES DE PARTÍCULAS MAGNÉTICAS	8
2.1.1	Suspensões magneto-reológicas	8
2.1.2	Fluidos magnéticos	10
2.2	MAGNETISMO	11
2.2.1	Campo magnético e indução magnética	11
2.2.2	Equações da Magnetostática	12
2.2.3	Força magnética num material dipolar	14
2.2.4	Campo externo a um material dipolar	16
2.2.5	Interação de partículas magnéticas	17
2.3	HIDRODINÂMICA	19
2.3.1	Equações governantes da Mecânica dos Meios Contínuos	19
2.3.1.1	Equação constitutiva para fluidos Newtonianos	19
2.3.1.2	Equação constitutiva para fluidos magnéticos	21
2.3.1.3	Equação de conservação da massa	22
2.3.1.4	Equação de conservação da quantidade de movimento	23
2.3.1.5	Equação de conservação do momento angular	24
2.3.1.6	Equação de conservação da energia	26
2.3.1.7	Equações de conservação para fluidos magnéticos	27
2.3.1.8	Equação de conservação para fluidos Newtonianos	28
2.3.2	Microhidrodinâmica	29
2.3.2.1	Teorema da reciprocidade de Lorentz	30

2.3.2.2	Solução fundamental do escoamento de Stokes	30
2.3.3	Relações de mobilidade e resistência	35
2.3.3.1	Regime de longo alcance	37
2.3.3.2	Regime de curto alcance	38
2.3.3.3	Mobilidades para duas partículas livres de torque . . .	38
2.4	FORÇAS COLOIDAIIS	41
2.4.1	Forças de van der Waals	42
2.4.2	Repulsão Eletrostática	44
2.4.3	Movimento Browniano	45
2.4.4	Força Browniana	46
3	AGREGAÇÃO E DIFUSÃO HIDRODINÂMICA DE PARTÍCULAS	
	MAGNÉTICAS INTERAGINDO HIDRODINAMICAMENTE	50
3.1	Formulação Teórica	50
3.2	Formulação mobilidade	52
3.2.1	Trajectoria relativa de partículas	53
3.2.2	Forças interpartícula	54
3.3	Resultados numéricos	55
3.3.1	Trajectorias relativas típicas	56
3.3.2	Eficiência de colisão	57
3.3.3	Diagramas de reversibilidade e irreversibilidade (DRI)	61
3.3.4	Coeficientes de dispersão hidrodinâmica	62
3.3.5	Coeficientes de dispersão para suspensões diluídas bidispersas .	64
4	FORMULAÇÃO DO MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA	
	FLUIDOS MAGNÉTICOS	69
4.1	Formulação Teórica	69
4.1.1	Magnetostática	69
4.1.2	Hidrodinâmica	70
4.2	Condições de contorno	71
4.3	Formulação integral de contorno magnética	72
4.3.1	Teorema recíproco para o potencial magnético	72
4.3.2	Representação integral para o potencial magnético	73
4.3.3	Representação integral em termos das condições de salto	75
4.3.4	Representação integral na interface para o potencial magnético .	76
4.4	Formulação integral de contorno hidrodinâmica	77
4.4.1	Teorema recíproco para o escoamento de um fluido magnético .	77

4.4.2	Representação integral para o escoamento de Stokes de um fluido magnético	80
4.4.3	Representação integral em termos da condição de salto	84
4.4.4	Representação integral para a interface	86
4.4.5	Representação integral adimensional	86
5	UMA ANÁLISE DIMENSIONAL DA CONVECÇÃO TERMOMAGNÉTICA EM CAVIDADES RETANGULARES DELGADAS	89
5.1	Formulação Teórica	89
5.1.1	Magnetostática	90
5.1.2	Termoconvecção gravitacional e magnética	90
5.1.3	Hidrodinâmica	91
5.2	Propriedades dos fluidos magnéticos	93
5.3	Análises de escala	94
5.3.1	Balanço entre forças magnéticas e viscosas	95
5.3.2	Balanço entre forças gravitacionais e viscosas	96
5.4	Coefficiente de eficácia térmica	97
5.4.1	Aplicação a transformadores elétricos	99
6	CONCLUSÕES	101
7	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	104
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	106

LISTA DE TABELAS

2.1	As funções $f_n(\lambda)$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$	39
2.2	As funções $f_n(\lambda)$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$	40
2.3	As funções $d_{\alpha\beta}$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$	40
2.4	As funções $f_{\alpha\beta}$ e $e(\lambda)$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$	41
3.1	Sumário das principais pesquisas relacionadas à dispersão hidrodinâmica de partículas.	67

LISTA DE FIGURAS

2.1	Esquema da composição de uma suspensão magneto-reológica. Volume representativo de uma suspensão contendo um número significativo de partículas magnéticas.	9
2.2	Partículas em um fluido magnético surfactado.	10
2.3	Determinação da força em um pequeno elemento de material magnético.	15
2.4	Interação de dois dipolos com vetores de momento magnético orientados arbitrariamente.	18
2.5	Tipos de configurações geométricas para partículas que interagem hidrodinamicamente.	36
3.1	Evolução típica de uma suspensão magnética diluída.	50
3.2	Esquema do sistema de coordenadas utilizado para o movimento relativo em uma suspensão diluída bidispersa de partículas magnéticas.	51
3.3	Efeito da orientação da magnetização nas trajetórias relativas para $\mathcal{Q}_M = 10^2$, $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 2,0$ e $M_{12} = 1,0$. (a) $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 0)$; (b) $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$; (c) $\hat{\mathbf{d}}_1 = -\hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 0)$; e (d) $\hat{\mathbf{d}}_1 = -\hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$	56
3.4	Trajetoórias relativas para o par de partículas interagindo hidrodinamicamente. Valores dos parâmetros: $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 1,5$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$, $\alpha_m = 1,0$ e $Q_E = 0$	57
3.5	Trajetoórias relativas das partículas interagentes, avaliando a presença da repulsão eletrostática. Valores dos parâmetros: $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 2,0$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$ e $\mathcal{Q}_M = 50$	57
3.6	Eficiência de colisão para o par de partículas magnéticas interagindo como função de \mathcal{Q}_M . Valores dos parâmetros: $Q_E = 0$, $\gamma = 1,0$, $M_{12} = 1,0$ e $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$	59
3.7	Influência das interações hidrodinâmicas na eficiência de colisão de partículas magnéticas. Valores dos parâmetros: $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$	60
3.8	DRI para $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 0)$ e $M_{12} = 1,0$. (a) $\mathcal{Q}_M = 1$, (b) $\mathcal{Q}_M = 10$ e (c) $\mathcal{Q}_M = 10^2$	61

3.9	Esquema de uma suspensão diluída bidispersa que possui um pequeno gradiente de concentração de uma de suas espécies.	62
3.10	Coeficiente de difusão coletiva adimensional da partícula incidente 1 em uma suspensão de partículas para $\gamma = 1,0$, $M_{12} = 0,8$, e $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$	66
4.1	Desenho esquemático de uma gota de fluido magnético em uma emulsão submetido a campos externos impostos de velocidade e magnético.	69
4.2	Domínio fluido V limitado pela superfície S dividido em V_ε e $V - V_\varepsilon$	74
5.1	Formação de correntes convectivas devido a gradientes de susceptibilidade magnética em uma suspensão diluída de partículas de ferrita em óleo mineral.	89
5.2	Representação esquemática da geometria da cavidade retangular, mostrando as paredes quente e fria.	94
5.3	Coeficiente de eficácia para um fluido magnético típico composto por partículas de ferrita imersas em óleo mineral.	99

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

$\mathcal{A}_{\alpha\beta}$	funções mobilidade na direção perpendicular
A	constante de Hamaker
a_α, a_β	raio das partículas α e β
$\mathcal{B}_{\alpha\beta}$	funções mobilidade na direção longitudinal
B	indução magnética
$b_{\alpha\beta}$	funções mobilidade globais
b	campo vetorial de força externa ao fluido
\mathcal{C}	função de Green associada ao monopolo magnético
c	concentração de partículas na suspensão
Ca	número de capilaridade
Ca_m	número de capilaridade magnético
c_e	calor específico do fluido
D	tensor taxa de deformação
\mathcal{D}	difusividade
$\mathcal{D} ^s$	coeficiente de autodispersão
$\mathcal{D} ^c$	coeficiente de dispersão devido a gradientes de concentração
\mathcal{D}_0	coeficiente de difusão ordinária de Stokes-Einstein
\hat{d}_α	vetor unitário na direção da magnetização da partícula α
dS	elemento de área do material
$d_{\alpha\beta}$	coeficientes das funções mobilidade
E_c	eficiência de colisão
F_α	somatório das forças que atuam sobre uma partícula α
F_m	força magnética
f_m	força magnética por unidade de volume
f_r	força randômica Browniana
$f_{\alpha\beta}$	coeficientes das funções mobilidade
$\mathcal{G}(s)$	função mobilidade
\mathcal{G}	<i>stokeslet</i> de uma partícula
g	aceleração gravitacional
H	campo magnético
H^∞	campo magnético externo imposto
$\mathcal{H}(s)$	função mobilidade
H	intensidade de campo magnético
h	distância de separação entre partículas

h_g	coeficiente de transferência de calor por convecção gravitacional
h_m	coeficiente de transferência de calor por convecção magnética
\mathbf{I}	tensor unitário de segunda ordem
i	imaginário complexo
\mathbf{k}	vetor número de onda
k	número de onda no espaço recíproco
$\mathcal{L}(s)$	função mobilidade
L	escala típica de comprimento
ℓ	altura da cavidade delgada
\mathbf{M}	magnetização do material
\mathbf{M}_d	magnetização intrínseca de um material
\mathcal{M}	matriz mobilidade global
$\mathcal{M}(s)$	função mobilidade
\mathbf{M}^g	tensor mobilidade que opera a força gravitacional
\mathbf{M}^i	tensor mobilidade que opera as forças interpartícula
M	intensidade de magnetização
M_α	intensidade de magnetização da partícula α
M_{12}	intensidade de magnetização relativa
\mathbf{m}	vetor momento de dipolo por unidade de volume
m	massa de uma partícula
N	número de partículas
Nu_g	número de Nusselt gravitacional
Nu_m	número de Nusselt magnético
\mathbf{n}	vetor unitário normal à superfície
n_α	número de densidade da partícula α
P	pressão reduzida ou modificada
\mathcal{P}_{12}	número de Péclet relativo
Pr	número de Prandtl
p	pressão estática do fluido
$p(\mathbf{r})$	função distribuição de pares de partícula
p_h	pressão hidrodinâmica
p_m	pressão magnética
p_α	pólos magnéticos de uma partícula α
\mathcal{Q}_A	parâmetro de interação de van der Waals
\mathcal{Q}_E	parâmetro de interação eletrostática
\mathcal{Q}_M	parâmetro de interação magnética
\mathbf{q}	fluxo de calor
\mathcal{J}	fluxo de partículas

$\mathbf{R}(t - t')$	função autocorrelação de velocidades
\mathcal{R}	matriz resistência global
Ra_g	número de Rayleigh gravitacional
Ra_m	número de Rayleigh magnético
\mathbf{r}	vetor posição relativa
\mathbf{r}_n	vetor randômico de distribuição uniforme [-1:1]
\mathbf{r}_α	posição relativa de uma partícula α
Re	número de Reynolds
S	área de uma superfície simplesmente conexa
\mathbf{s}	vetor distância entre centros adimensional
s	distância entre centros de partícula adimensional
\mathcal{T}	<i>stresslet</i> de uma partícula
T	temperatura do fluido
\mathbf{t}	vetor de tensões
t	tempo
\mathbf{U}_α	velocidade de uma partícula α
$\mathbf{U}_\alpha^{(0)}$	velocidade terminal de uma partícula α
\mathbf{u}	campo de velocidades Euleriano
\mathbf{u}^∞	velocidade do escoamento não-perturbado
\mathbf{u}_α	campo de velocidades para uma partícula α
U	escala típica de velocidade
U_e	energia interna por unidade de massa
V	volume de uma dada porção material
\mathcal{V}	energia potencial associada à difusão
\mathbf{x}	vetor posição
\mathbf{x}_0	vetor posição de uma singularidade
$\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$	vetor posição das partículas α e β
x^c	posição crítica de colisão

Símbolos Gregos

α	permeabilidade relativa do fluido
α_T	difusividade térmica
α_m	parâmetro das interações hidrodinâmicas
β	coeficiente de expansão térmica
β_m	coeficiente pirométrico
χ	susceptibilidade magnética do material
$\Delta \mathbf{Y}_k$	vetor deslocamento lateral da partícula
$\delta(\mathbf{x})$	distribuição delta de Dirac
δ_c	espessura da cavidade delgada
δt	passo de tempo utilizado nas simulações
$\delta \tau$	intervalo de tempo do impulso Browniano
ϵ	parâmetro do regime de lubrificação
ϵ_R	coeficiente de retardação da força de van der Waals
ε	raio de uma pequena região esférica
η	viscosidade dinâmica
Γ	taxa de relaxação da tensão superficial
γ	razão de massas específicas
$\dot{\gamma}$	taxa de cisalhamento do escoamento
κ	condutividade térmica
κ_B	constante de Boltzmann
λ	razão de raios das partículas
λ_η	razão de viscosidades dinâmicas
λ_T	coeficiente de eficácia térmica
λ_ℓ	comprimento de onda de London
μ_0	permeabilidade magnética do vácuo
μ_m	permeabilidade magnética do meio
ν	viscosidade cinemática do fluido
$d\Omega$	ângulo sólido
Φ	potencial magnético
ϕ	fração volumétrica de partículas
ψ_α	potencial de superfície da partícula α
ϖ	parâmetro de razão de energias
ϑ	constante dielétrica do meio
ψ_{12}	razão de potenciais de superfície
ρ	massa específica do fluido
ρ_α	massa específica da partícula α

ρ_s	densidade superficial de pólos magnéticos
ρ_v	densidade volumétrica de pólos magnéticos
σ	campo tensorial de tensões
σ_h	tensor de tensões para um fluido Newtoniano incompressível
σ_m	tensor de tensões magnético
φ_A	potencial de van der Waals adimensional
φ_E	potencial de interação eletrostática adimensional
φ_M	potencial de interação magnética adimensional
$\bar{\rho}$	comprimento de Debye-Hückel adimensional
ξ	distância entre partículas adimensional
ζ	inverso do tempo de relaxação da partícula

Símbolos matemáticos

δ	operador que denota elementos infinitesimais
∂	operador derivada parcial
\mathcal{D}	operador derivada material
\mathcal{F}	transformada de Fourier tridimensional
\mathcal{F}^{-1}	transformada de Fourier tridimensional inversa
∇	operador nabra: $\nabla = \partial/\partial x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$
∇^2	operador laplaciano
∇^s	operador gradiente superficial à interface
\mathcal{O}	ordem de grandeza

Subscritos e sobrescritos

d	denota a parte deviatória do tensor
T	denota a transposição do tensor
$\hat{}$	denota o vetor unitário
$-\infty$	denota a condição inicial do movimento
$+\infty$	denota a condição final do movimento

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O presente trabalho destina-se a estudar sistemas complexos cuja hidrodinâmica está intrinsecamente ligada à sua microestrutura. A dinâmica, nesses sistemas bifásicos fluido-partícula, é governada por interações hidrodinâmicas mediadas por um fluido Newtoniano incompressível e por interações dipolares magnéticas, associadas à magnetização das partículas. Compreender o comportamento macroscópico destes sistemas bifásicos, a partir da física da micro-escala, é um problema chave numa série de aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como Engenharia Química, Engenharia de Petróleo, Mecânica dos Fluidos, Geologia e Biologia.

Quando existem velocidades relativas entre a fase fluida e a fase particulada, o enfoque dado a esses sistemas particulados consiste na utilização de um método de descrição Euleriano-Lagrangeano, em que o fluido carreador é descrito por suas equações de conservação enquanto a fase particulada é estudada através de uma análise de trajetórias das partículas. O desequilíbrio entre as forças atrativas e repulsivas, atuando na micro-escala, podem conduzir à formação de agregados irreversíveis, alterando a configuração do sistema particulado. Nesse contexto, a fase particulada dispersa é separada da fase fluida pela ação da gravidade e a determinação da taxa de separação entre as fases e as taxas de agregação das partículas em função da fração volumétrica da fase dispersa constitui um problema fundamental em estações de tratamento de água e em processos de separação de minérios, contendo fragmentos de rocha de diversos tamanhos.

Se as forças repulsivas dominam a dinâmica da suspensão, esse meio particulado pode agora ser tratado como um meio contínuo que combina as importantes propriedades de fluidez e de magnetismo e sua dinâmica considera o fluido carreador descrito por suas equações de conservação, agora corrigidas pelo termo associado à presença das partículas magnéticas. Com tais propriedades, esses sistemas particulados magnéticos podem ser utilizados para aplicações onde seja necessário um controle não-intrusivo do escoamento, assim como em recuperação de derramamentos de petróleo, aumento da refrigeração em transformadores elétricos e em processos de vetorização de drogas no corpo humano, atuando como uma importante ferramenta para aplicações biomédicas.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O controle tecnológico de suspensões é importante em um grande número de processos industriais. O ponto central acerca desses sistemas consiste em entender e prever o comportamento macroscópico de tais suspensões a partir do conhecimento de sua microestrutura. Para esse controle, em alguns casos, é fundamental que se consiga manter a estabilidade de tais sistemas, por meio de mecanismos intrínsecos à suspensão assim como a diluição de sais na suspensão ou a adsorção de surfactantes na superfície das partículas, a fim de se evitar a formação de agregados irreversíveis (Davis, 1984). Essas estratégias são amplamente utilizadas na produção de tintas ou no recobrimento de superfícies com filmes delgados. Por outro lado, pode-se desejar que a agregação de partículas seja induzida para aumentar a taxa de sedimentação, modificando as propriedades reológicas de uma suspensão. No tratamento de água poluída, o material suspenso precisa ser separado de forma que a água possa ser reciclada ou para reduzir a poluição de rios (Hinch, 1988).

Em uma suspensão diluída, a probabilidade de uma terceira esfera influenciar o movimento relativo de outras duas partículas interagentes é pequena, e então consideram-se somente interações binárias de partículas nesse regime. Assim sendo, quando a agregação de partículas ocorre em uma suspensão diluída, a quantidade de interesse industrial é a taxa de formação de dímeros. O pioneiro em estudos para estimar a taxa de agregação (Smoluchowski, 1917) considerou que as partículas são submetidas a uma força cinética no contato, ou seja, sem interações hidrodinâmicas ou forças interpartícula. Após este trabalho, os efeitos da interação hidrodinâmica e das forças interpartícula foram incluídos por Zeichner e Schowalter (1977), ao computar a taxa de agregação de uma dispersão de esferas de mesmo tamanho submetidas a um cisalhamento simples ou a um escoamento puramente extensional. Além disso, Curtis e Hocking (1970) realizaram um cálculo semelhante para escoamentos cisalhantes e apresentaram resultados experimentais, evidenciando a importância das forças de van der Waals na agregação de partículas. Para o caso de agregação induzida pela gravidade, Davis (1984) desenvolveu um modelo teórico para investigar a influência das forças de van der Waals e do escorregamento de Maxwell sobre a eficiência de colisão, em regimes de rápida agregação. Para números de Péclet arbitrários, usando a solução da equação de Fokker-Planck para a distribuição de pares de partículas, Zinchenko e Davis (1994a) determinaram a taxa de coalescência de gotas viscosas induzidas pela gravidade. Adicionalmente, as taxas de colisão de gotas deformáveis e esféricas foram calculadas (Zinchenko e Davis, 1994b; Loewenberg e Hinch, 1997; Cunha et al., 2003b).

Embora a agregação de partículas seja um problema vastamente estudado, pode-se notar que estudos de agregação de partículas em suspensões magnéticas, considerando as interações hidrodinâmicas, são bastante incipientes. Muitos trabalhos numéricos (Castro et al., 2005a,b; Aoshima e Satoh, 2005; Huang et al., 2005; Ivanov et al., 2006) e teóricos (Zubarev et al., 1999; Elfimova, 2006) têm examinado o processo de agregação de esferas magnéticas em suspensões avaliando a formação de agregados e estruturas encadeadas na suspensão, considerando modelos de energia livre e simulações tipo Monte Carlo. Surpreendentemente, esses pesquisadores têm ignorado a influência das interações hidrodinâmicas em suas simulações, o que tem sido observado experimentalmente na formação de filamentos (Martinez-Pedrero et al., 2008) de acordo com as concentrações de sais na suspensão. Os efeitos associados às interações hidrodinâmicas foram recentemente explorados (Couto e Cunha, 2008b), mostrando que as taxas de agregação podem ser reduzidas sensivelmente.

Dentro do mesmo contexto, se o movimento Browniano, a inércia da fase fluida e as forças interpartícula são desconsideradas, sabe-se que duas partículas esféricas colidem, em uma suspensão diluída sob ação da gravidade, de um modo reversível retornando às suas linhas de corrente iniciais (Batchelor and Green, 1972; Cunha e Hinch, 1996). Entretanto, quando as forças interpartícula são relevantes, assim como o caso aqui explorado, as partículas são submetidas a uma migração lateral e, portanto, as colisões podem resultar tanto em agregação de partículas quanto simplesmente na quebra da reversibilidade no tempo da trajetória relativa. A migração de partículas não-coloidais em uma suspensão dá origem a um processo dispersivo que pode ser caracterizado como uma autodispersão, devido à natureza randômica das colisões entre as partículas suspensas. A primeira investigação experimental deste tema foi desenvolvida por Eckstein et al. (1977), que determinou o coeficiente lateral de autodispersão induzido por cisalhamento de partículas esféricas em um dispositivo de Couette. Um trabalho pioneiro (Adler, 1981b) considerou as interações entre duas esferas rígidas condutoras em escoamentos cisalhantes, avaliando a influência de uma força de longo alcance sobre a migração lateral de partículas. Adicionalmente, Wang et al. (1996) apresentaram expressões para a autodispersão e para a dispersão devido a gradientes de concentração induzidas por cisalhamento de uma partícula de referência e de uma partícula teste nas duas direções perpendiculares à velocidade do fluido e Cunha e Hinch (1996) apresentaram os resultados para a difusividade transversal induzida por cisalhamento devido à presença de gradientes de concentração para uma suspensão diluída de partículas rugosas. A teoria de Cunha e Hinch foi aplicada, em seguida, ao estudo da autodispersão de gotas deformáveis, utilizando uma

formulação integral de contorno (Loewenberg e Hinch, 1997). Para suspensões em que o movimento é induzido pela ação da gravidade sobre as partículas, a difusividade hidrodinâmica tem sido determinada para uma partícula rugosa e/ou lisa sedimentando lentamente através de uma suspensão de partículas livres da ação da gravidade (Davis e Hill, 1992; Davis, 1992). As propriedades difusionais e viscoelásticas em suspensões mais concentradas de partículas não-Brownianas têm sido objeto de estudo (Banchio et al., 1999; Sierou e Brady, 2004; Leshansky e Brady, 2005; Banchio et al., 2006) utilizando simulações do tipo Dinâmica Stokesiana acelerada.

Até este momento consideramos somente sistemas particulados sólido-fluido. Porém, nos últimos anos, a deformação de interfaces fluidas sob ação de um campo aplicado tem sido objeto de várias investigações (Bashtovoi et al., 2005; Paz y Puente et al., 2007). As aplicações vão desde a quebra de gotas de chuva em tempestades, o comportamento de jatos e gotas em impressoras à jato de tinta. Uma extensa revisão acerca da deformação de gotas em escoamentos cisalhantes arbitrários é dada por Rallison (1984) e Stone (1994). A deformação de gotas magnéticas foi inicialmente estudada por Arkhipenko et al. (1978), e por Drozdova et al. (1979). Os experimentos desenvolvidos por Bacri et al. (1982), Bacri e Salin (1982, 1983) mostraram que, quando o campo magnético é aumentado e subsequentemente reduzido, pode-se observar uma histerese na deformação da gota. Um problema relacionado a esse, estudando o colapso de uma bolha em um fluido magnético foi avaliado por Cunha et al. (2002). A formulação integral de contorno para um escoamento de Stokes foi inicialmente descrita, analiticamente, por Ladyzhenskaya (1969) dentro do contexto de potenciais hidrodinâmicos. O método integral de contorno foi então desenvolvido e implementado numericamente por Youngreen e Acrivos (1975) em um problema hidrodinâmico do escoamento ao redor de uma partícula rígida de forma arbitrária. Além disso, Rallison (1978, 1981) aplicou esta técnica para estudar a deformação e a quebra de gotas não-magnéticas em escoamentos extensionais e lineares gerais. Muitos aspectos relacionados aos métodos integrais de contorno para problemas de superfície livre são descritos em um livro por Pozrikidis (1992). Os métodos integrais de contorno têm sido utilizados com sucesso para simulações do escoamento potencial ao redor de corpos tridimensionais (Alvarenga e Cunha, 2006), deformação e quebra de gotas não-magnéticas (Cristini et al., 1998, 2001), interações entre gotas (Loewenberg e Hinch, 1996; Guido e Simeone, 1998; Cunha et al., 2003b), caracterização da reologia de emulsões não-magnéticas (Loewenberg e Hinch, 1997; Zinchenko e Davis, 2002; Oliveira, 2007) e expansão de emulsões e dinâmica de espumas (Kraynik et al., 1991; Cunha et al., 2003a; Cunha et al., 2003b). A maioria dos trabalhos tem focado sobre formulações bidimensionais para o estudo de gotas magnéticas axissimétricas

em campos elétricos ou magnéticos, o que requer somente o tratamento numérico de integrais de linha (e.g. Sherwood, 1988; Bacri et al., 1995; Bacri et al., 1996). Nesse intuito, Bacri et al. (1995) recomenda que somente uma formulação integral de contorno tridimensional seria capaz de avaliar a deformação e a orientação de gotas magnéticas, quando submetidas a campos de velocidade e magnéticos gerais em baixos números de Reynolds, o que foi desenvolvido para problemas em que a susceptibilidade magnética dos materiais pode ser considerada constante (Couto e Cunha, 2008a).

Sob outro enfoque, a suspensão de partículas pode ser considerada no regime estável, ou seja, as partículas estão estabilizadas devido à ação de forças repulsivas, assim como a repulsão eletrostática ou a repulsão estérica - originada pela adsorção de surfactantes na superfície das partículas. Nessas condições, o material magnético, comumente denominado fluido magnético, pode ser descrito como um meio contínuo com suas equações de conservação apresentando termos associados à ação do campo magnético aplicado (Rosensweig, 1985). Particularmente, neste trabalho, daremos ênfase ao estudo da formação de correntes convectivas devido à presença de gradientes de susceptibilidade do fluido magnético. Os gradientes térmicos produzem uma estratificação de densidades no meio (Bejan, 1984) e, conseqüentemente as forças gravitacionais passam a atuar sobre o fluido gerando correntes convectivas. Entretanto, se o fluido encontra-se num ambiente de microgravidade, assim como na refrigeração de componentes eletrônicos em naves espaciais e satélites artificiais, as forças de empuxo não são suficientemente fortes para promover um movimento significativo do fluido. Nesse sentido, é necessário elevar as taxas de transferência de calor substituindo o fluido refrigerante por fluidos magnéticos, tal que a convecção natural seja intensificada pelas forças magnéticas, fenômeno denominado como convecção termomagnética. Assim sendo, torna-se fundamental compreender a relação entre a transferência de calor e o campo magnético aplicado, a fim de se realizar o projeto de dispositivos termomagnéticos. Uma visão geral sobre a pesquisa relacionada a transferência de calor em fluidos magnéticos é dada por Ganguly et al. (2004) e uma análise de estabilidade linear foi desenvolvida para examinar a influência dos gradientes de temperatura sobre a convecção termomagnética (Auernhammer e Brand, 2000). Além disso, numa análise de escalas Mukhopadhyay et al. (2005) investigou o fenômeno de convecção em uma cavidade quadrada sob ação de um campo magnético criado por um dipolo. Na literatura, podem ser encontrados uma série de trabalhos que investigam, via simulações numéricas, as instabilidades geradas pela convecção magnética (Tangthieng et al., 1999; Yamaguchi et al., 2002; Snyder et al., 2003; Bednarz et al., 2005; Jue, 2006). Particularmente, Krakov e Nikiforov (2002) avaliaram como o ângulo entre as direções do gradiente de temperatura e do campo

magnético uniforme influencia os modos de convecção. Usando uma metodologia experimental, Odenbach (1995) considerou as instabilidades termomagnéticas em uma cavidade cilíndrica em um ambiente de microgravidade. Adicionalmente, um estudo relevante sobre o comportamento de fluidos magnéticos em transformadores elétricos foi apresentado por Segal et al. (2000), focado sobre as alterações na resistividade elétrica devido à presença das nanopartículas magnéticas. Por sua vez, Yamaguchi et al. (1999) apresentou resultados experimentais e numéricos acerca da convecção natural de um fluido magnético em cavidades quadradas. A partir de uma análise de escalas, Couto et al. (2007) investigaram a relevância dos fenômenos de convecção natural e magnética em uma cavidade retangular delgada, para um fluido magnético comercial típico.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivos gerais

O presente trabalho tem como escopo geral a realização de um estudo fundamental acerca da dinâmica de suspensões diluídas compostas de partículas magnéticas esféricas. As partículas estão imersas em um fluido Newtoniano sob ação da gravidade escoando em baixos números de Reynolds, considerando-se a escala da partícula. Na presente análise, são utilizadas duas abordagens. Inicialmente, as fases fluida e particulada são tratadas separadamente, tal que as partículas interagem por meio da ação viscosa do fluido carreador e pela ação das forças magnéticas de longo alcance, devido à magnetização permanente das partículas. Desta forma, pretende-se obter estimativas para propriedades de transporte globais da suspensão, assim como taxas de agregação de partículas e coeficientes de dispersão hidrodinâmica. Ainda nesse contexto, procura-se determinar uma formulação integral de contorno capaz de possibilitar o estudo do movimento de gotas magnéticas sob ação de campos de escoamento e magnético aplicados. Na segunda abordagem, as partículas encontram-se numa configuração de equilíbrio dinâmico, tal que o material é considerado um meio contínuo magnético. Nesse contexto, objetiva-se prever o comportamento das correntes convectivas induzidas por diferenças de magnetização e de densidade do material, estimando-se as taxas de transferência de calor por convecção termomagnética.

1.3.2 Objetivos específicos

O desenvolvimento deste trabalho cumpriu as seguintes etapas:

1. Desenvolvimento de um programa computacional para o cálculo das interações hidrodinâmicas entre partículas numa suspensão diluída para os regimes de curto

e longo alcances.

2. Tabelamento das funções mobilidade hidrodinâmica para os regimes de curto e longo alcances, com a calibração dos coeficientes para o colapso das duas curvas. Tal metodologia teve o objetivo de reduzir o esforço computacional necessário para os cálculos das propriedades de transporte.
3. Implementação de um programa computacional para o cômputo das trajetórias relativas de partículas em uma suspensão diluída, incluindo os termos de forças interpartícula, assim como as forças dipolares magnéticas.
4. Implementação de um esquema numérico para determinar as trajetórias limites, que definem as taxas de formação de agregados.
5. Determinação de uma formulação geral para o cálculo dos coeficientes de autodispersão e de dispersão devido a gradientes de concentração para suspensões polidispersas e para quaisquer regimes de escoamento.
6. Implementação de uma metodologia numérica para o cálculo dos coeficientes transversais de dispersão hidrodinâmica, por meio do cômputo de integrais sobre todas as configurações possíveis de trajetórias.
7. Estabelecimento de uma extensão do Teorema da Reciprocidade de Lorentz para o caso de escoamentos de líquidos magnéticos.
8. Determinação de uma formulação integral de contorno para superfícies livres magnéticas em baixos números de Reynolds. Os campos magnético e de velocidade são obtidos por meio de equações integrais aplicadas no contorno da região ocupada pelo fluido magnético.
9. Determinação das taxas de transferência de calor, geradas pelo movimento convectivo de um fluido magnético quando submetido a um campo magnético aplicado, por meio de uma análise de escalas das equações governantes.
10. Obtenção do coeficiente de eficácia termomagnética, permitindo a comparação da relevância dos processos de convecção natural e magnética em sistemas onde o fluido magnético atua como refrigerante.

2 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DE SUSPENSÕES E EMULSÕES MAGNÉTICAS

2.1 SUSPENSÕES DE PARTÍCULAS MAGNÉTICAS

Os fluidos que respondem a campos, *field-responsive fluids*, podem ser caracterizados como os materiais que sofrem grandes alterações em suas propriedades reológicas em resposta a campos magnéticos ou elétricos. A maior vantagem destes fluidos sobre o controle de interfaces mecânicas é sua habilidade de adquirir uma grande faixa de viscosidades em uma fração de milissegundos. Isso propicia uma maneira eficiente de se controlar vibrações e amortecimentos (Bossis et al., 2002). Assim sendo, suas aplicações típicas incluem absorvedores de choques, embreagens, freios, atuadores e juntas artificiais (Klingenberg, 2001), ou seja, situações onde se deseja alterar as características do escoamento de forma não-intrusiva. As suspensões compostas por partículas magnéticas se inserem nesse grupo, estando suscetíveis às variações do campo magnético aplicado. Serão explorados neste trabalho dois tipos de suspensões magnéticas: as suspensões magneto-reológicas e os fluidos magnéticos. A diferença básica entre estes dois tipos se refere ao tamanho das partículas magnéticas dispersas no fluido carreador sendo da ordem de $10 \mu m$ e $10 nm$, respectivamente.

2.1.1 Suspensões magneto-reológicas

Suspensões magneto-reológicas são suspensões de partículas magnéticas micrométricas que exibem a habilidade de passar de uma estrutura líquida para uma estrutura de gel quando o campo magnético é elevado (Volkova et al., 1999). Devido ao tamanho micrométrico das partículas, nesses sistemas, a força magnética sempre domina o movimento Browniano, ao contrário do que acontece com os fluidos magnéticos (Bossis et al., 2002). As primeiras aplicações dessas suspensões foram apresentadas por Rabinow (1948).

Quando um campo magnético é aplicado, as partículas magnéticas exibem um momento de dipolo e tendem a se alinhar com o campo externo formando cadeias longas ou agregados. Essas cadeias podem ser deformadas ou quebradas durante o escoamento da suspensão, conferindo à ela propriedades reológicas não-Newtonianas, assim como a presença de uma tensão de aplicação ou *yield stress* (Klingenberg, 2001).

De outra forma, a agregação de partículas pode induzir ou aumentar a taxa de sedimentação, promovendo a deposição de sedimentos, o que também altera sensivelmente as propriedades mecânicas destes materiais. Existem dois tipos de suspensões magneto-reológicas: partículas magnéticas dispersas em um líquido quimicamente inerte e não-volátil; e partículas não-magnéticas (sílica, fibras de poliestireno) dispersas em um meio líquido magnético, tipicamente um fluido magnético (Bombard et al., 2002).

Neste trabalho, estamos particularmente interessados nas suspensões magneto-reológicas ou compósitos magnéticos, cujas partículas magnéticas, na escala macroscópica da suspensão, correspondem a cápsulas poliméricas onde estão incrustadas nanopartículas magnéticas coloidais surfactadas, o que é esquematizado na Fig. (2.1).

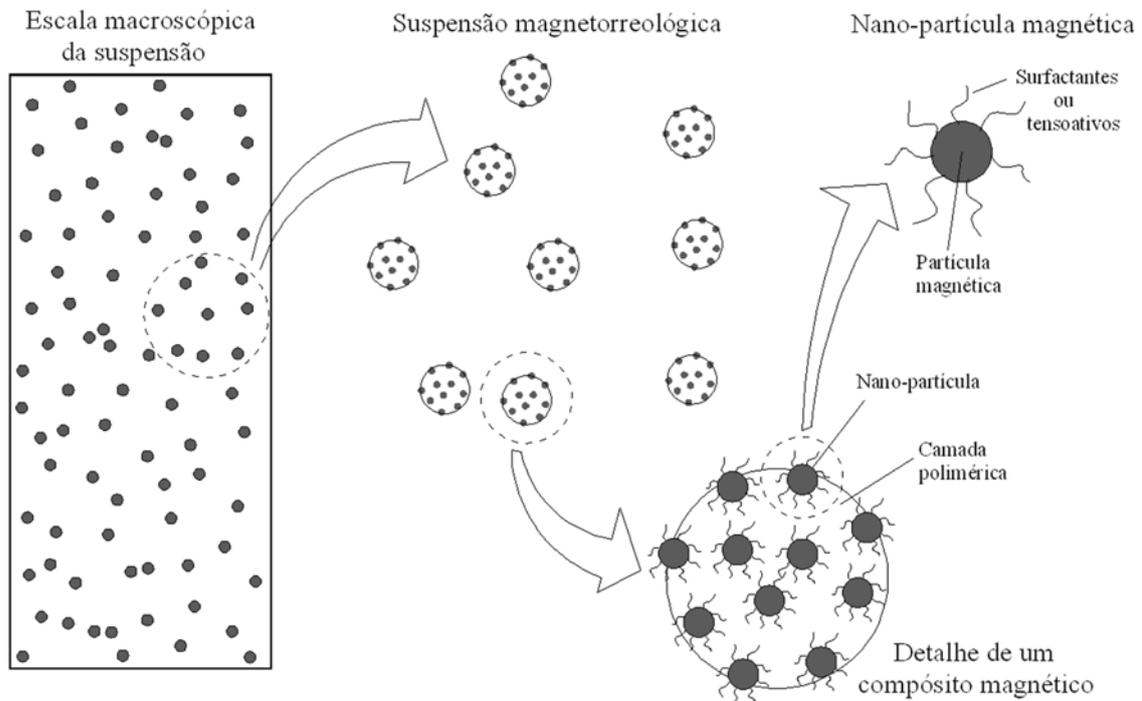


Figura 2.1: Esquema da composição de uma suspensão magneto-reológica. Volume representativo de uma suspensão contendo um número significativo de partículas magnéticas.

Esse tipo de suspensão magneto-reológica foi primeiramente anunciada pelo trabalho de Morais et al. (2001). As nanopartículas magnéticas incrustadas idênticas possuem uma magnetização intrínseca M_d . Na ausência de um campo aplicado, as nanopartículas estão aleatoriamente orientadas, e o fluido não tem magnetização líquida. Quando um campo é aplicado, a magnetização de cada uma das nano-partículas incrustadas M_d tende a se alinhar com a direção do campo, à medida que a intensidade do campo se eleva. Para campos aplicados extremamente intensos, as nanopartículas podem estar completamente alinhadas e a magnetização do compósito atinge seu valor de saturação.

2.1.2 Fluidos magnéticos

Fluidos magnéticos, também denominados ferrofluidos, são suspensões coloidais de um fluido carreador não-magnético, tipicamente água ou óleo, contendo partículas magnetizadas permanentemente, tipicamente magnetita, com diâmetros da ordem $5 - 15 \text{ nm}$ e frações volumétricas de até 10% (Rosensweig, 1985; Odenbach, 2002). O movimento Browniano mantém as nanopartículas livres da ação da gravidade e uma camada de surfactantes e/ou uma dupla camada elétrica sobre a superfície das partículas mantém uma repulsão de curto alcance estérica e/ou eletrostática, respectivamente. Tais coberturas evitam a agregação de partículas e definem o tipo de fluido magnético sintetizado como sendo iônico, surfactado ou iônico-surfactado (Rosensweig, 1985). Um fluido magnético surfactado é representado na Fig. (2.2).

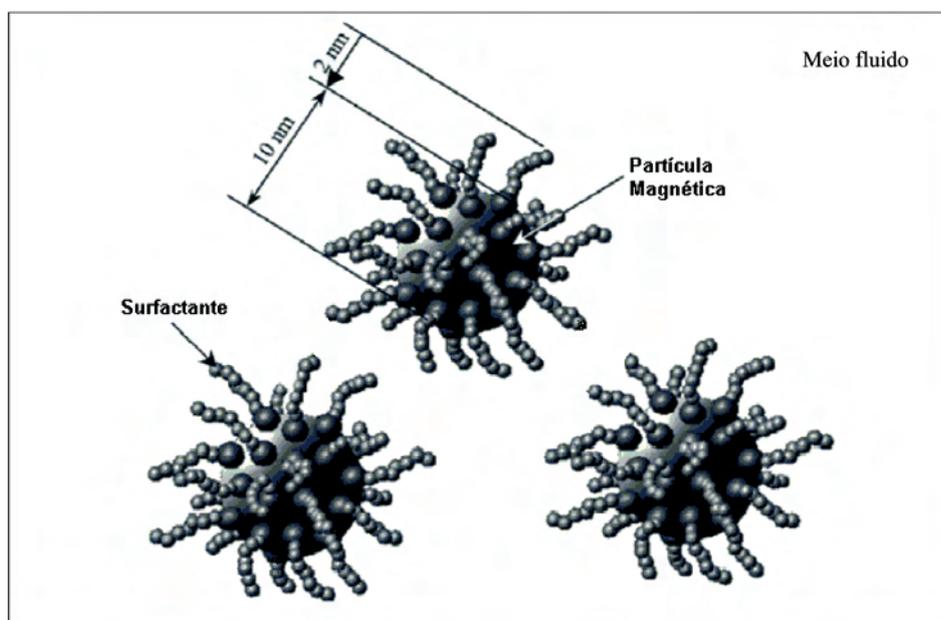


Figura 2.2: Partículas em um fluido magnético surfactado (Odenbach, 2002).

Essa cobertura permite aos fluidos magnéticos manter a fluidez mesmo quando submetidos a elevados gradientes de campo magnético (Charles, 2002; Bolshakova et al., 2005), ao contrário das suspensões magneto-reológicas que se solidificam sob campos magnéticos intensos (Odenbach, 2002). Devido ao pequeno tamanho das partículas magnéticas, os fluidos magnéticos estão envolvidos em uma série de aplicações relacionadas à nanociência. As pesquisas atuais se destinam a sintetizar fluidos magnéticos funcionais, tal que as nanopartículas possam ter propriedades magnéticas ou de superfície a fim de que possam ser considerados para aplicações em microsensores e atuadores (Rinaldi et al., 2004) e para aplicações biomédicas como nanobiossensores (Rinaldi et al., 2004; Müller et al., 2004), na vetorização de fármacos e na citólise de células cancerosas.

2.2 MAGNETISMO

Somente nas últimas décadas, as aplicações da mecânica dos fluidos vêm abrangendo sistemas nos quais campos elétricos e magnéticos são importantes, assim como o estudo de suspensões magnéticas. A hidrodinâmica de suspensões compostas de partículas magnetizadas requer a determinação da força magnética resultante do potencial de interação entre as partículas imersas num fluido Newtoniano incompressível. Dessa forma, torna-se relevante determinar o potencial de interação magnética entre duas partículas. Com este fim, é instrutivo que alguns fundamentos acerca do magnetismo para esse tipo de dispersões sejam apresentados.

A força de interação magnética entre partículas polarizadas possui uma importante particularidade: a possibilidade de ser atrativa ou repulsiva. Para isso, é necessário controlar, apenas, a direção das magnetizações das partículas. Essa característica nos permite avaliar o comportamento dessas partículas tanto para estabilizar a suspensão, a fim evitar a formação de agregados, quanto para desestabilizar a suspensão, favorecendo uma rápida formação de agregados irreversíveis.

2.2.1 Campo magnético e indução magnética

Charles Coulomb, em 1785, determinou, como resultado de observações experimentais com ímas permanentes, que pólos iguais se repelem e pólos opostos se atraem com uma força que é proporcional ao produto das magnitudes dos pólos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Para pólos magnéticos de magnitude p_1 e p_2 separados por uma distância r , a magnitude da força é dada por $p_1 p_2 / 4\pi\mu_0 r^2$, orientada na direção da linha que une os pólos. Dessa forma, considerando o pólo p_1 como fonte, tem-se que o campo magnético \mathbf{H} atuando sobre o pólo p_2 é dado por

$$\mathbf{H} = \frac{p_1 \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2} = \frac{p_1 \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3}, \quad (2.1)$$

em que \mathbf{r} é o vetor posição orientado de p_1 para p_2 , $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário na direção de \mathbf{r} e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo ($4\pi \times 10^{-7}$ H · m⁻¹).

A indução magnética \mathbf{B} é um campo vetorial expresso em termos do campo magnético \mathbf{H} e da magnetização \mathbf{M} , sendo definida por

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (2.2)$$

em que $\mu_0 \mathbf{M}$ é a contribuição associada com a magnetização do material e $\mu_0 \mathbf{H}$ é a contribuição resultante de um campo de Lorentz aplicado por meio de corrente elétrica em eletroímãs ou solenóides (efeitos magnéticos).

Em um meio contínuo, a magnetização pode ser expressa como função do campo magnético, dado por $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, em que χ é a susceptibilidade do material. Para materiais paramagnéticos, de baixa magnetização, a relação entre a magnetização \mathbf{M} e o vetor campo magnético é linear desde que a susceptibilidade desses materiais não seja função do campo \mathbf{H} . Por outro lado, no caso de materiais ferromagnéticos (materiais com memória magnética) ou superparamagnéticos (sem memória magnética), a relação entre \mathbf{M} e \mathbf{H} é não-linear, uma vez que a susceptibilidade é função de $|\mathbf{H}|$. No contexto de materiais não-lineares ou fortemente anisotrópicos é importante expressar a susceptibilidade em termos da relação μ_m/μ_0 , em que μ_m é a permeabilidade magnética do meio. Por definição,

$$\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}. \quad (2.3)$$

Usando (2.2) e a relação $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ pode-se escrever que

$$\mu_m \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}. \quad (2.4)$$

Portanto,

$$\frac{\mu_m}{\mu_0} = (1 + \chi). \quad (2.5)$$

A partir da Eq. (2.5), pode-se avaliar o tipo de material que está sendo analisado. Para um material não-magnético tem-se $\chi = 0$ e $\mu_m = \mu_0$. No caso de um material paramagnético linear, $\mu_m = \vartheta \mu_0$, em que $\vartheta = (1 + \chi)$ é uma constante. Por sua vez, para um material ferromagnético ou superparamagnético, tem-se que $\chi = \chi(|\mathbf{H}|)$ e $\mu_m/\mu_0 = f(|\mathbf{H}|)$.

2.2.2 Equações da Magnetostática

A Lei de Coulomb foi previamente descrita na Eq. (2.1). Como o campo magnético \mathbf{H} representa a densidade das linhas de campo, o fluxo de linhas de campo através de uma superfície de área $d\mathbf{S}$ é dado por

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{p}{4\pi\mu_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \frac{p}{4\pi\mu_0} d\Omega, \quad (2.6)$$

em que $d\Omega = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}/r^3$ é o ângulo sólido em $d\mathbf{S}$. Observe que o último termo da Eq. (2.6) depende somente do ângulo sólido, portanto a superfície pode ser de qualquer forma. Dessa maneira, o fluxo de linhas de campo que atravessam uma superfície fechada S pode ser descrito por

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{4\pi} \frac{p}{4\pi\mu_0} d\Omega = \frac{p}{\mu_0}, \quad (2.7)$$

para o caso em que S representa a superfície de uma esfera. Caso existam N pólos interiores à superfície S , a Eq. (2.7) passa a ser

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{p_\alpha}{\mu_0}, \quad (2.8)$$

ou ainda, generalizando-se para o caso de uma distribuição contínua de pólos, caracterizada por uma densidade volumétrica de pólos ρ_v , obtém-se que

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\rho_v}{\mu_0} dV, \quad (2.9)$$

em que V é o volume englobado pela superfície S . Em seguida, aplicando o Teorema da Divergência ao lado esquerdo da Eq. (2.9) e o Teorema da Localização, para um meio contínuo, determina-se a seguinte equação diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_v}{\mu_0}. \quad (2.10)$$

De acordo com Rosensweig (1985) sabe-se que a densidade volumétrica de pólos é dada por $\rho_v = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$. Assim sendo, conclui-se que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (2.11)$$

Agora, considerando a Eq. (2.2), chega-se à Lei de Maxwell para a indução magnética no regime magnetostático

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.12)$$

A Eq. (2.12) pode ser interpretada da seguinte forma: o fluxo de linhas de campo que adentra o volume V é idêntico àquele que sai do mesmo volume, ou seja, nada se acumula (a taxa líquida associada ao vetor indução magnética se anula no volume V).

Por meio da Lei de Coulomb, pode-se determinar outro resultado. A partir desta lei, vê-se que o campo magnético em uma posição \mathbf{r} devido a um conjunto de pólos magnéticos p_α localizado nas posições \mathbf{r}_α pode ser escrito como

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{p_\alpha}{4\pi\mu_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^3}, \quad (2.13)$$

mostrando que $|\mathbf{H}|$ decai com $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^2$. E, ao tomarmos o rotacional do campo \mathbf{H} , nota-se que o mesmo envolve a soma de termos do tipo

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^3} \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) + \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^3} \right) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha), \quad (2.14)$$

em que

$$\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) = \mathbf{0} \quad e \quad \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^3} \right) = -3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^5}. \quad (2.15)$$

E, considerando-se que o produto vetorial de dois vetores paralelos é nulo, segue-se que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

que representa a Lei de Ampère no regime magnetostático.

2.2.3 Força magnética num material dipolar

Inicialmente, considere um pequeno volume cilíndrico de um material magnetizado com o eixo geométrico $\delta\mathbf{r}$ alinhado com o vetor magnetização \mathbf{M} , conforme mostrado na Fig. (2.3).

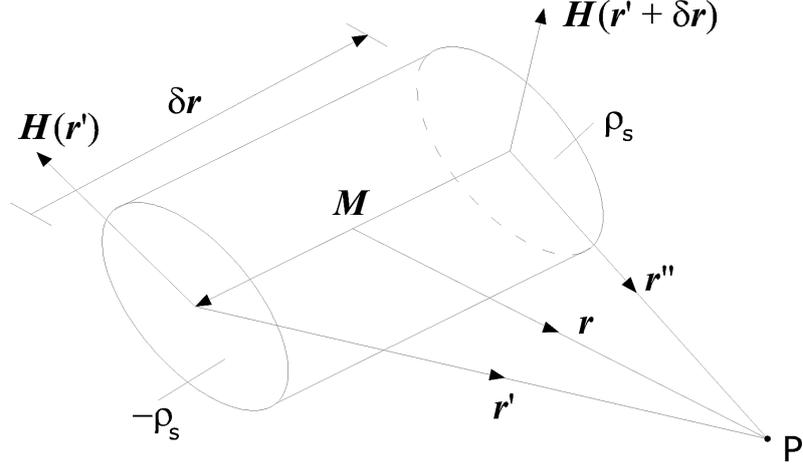


Figura 2.3: Determinação da força em um pequeno elemento de material magnético.

O material é submetido a um campo aplicado \mathbf{H} e pólos de densidade $\rho_s = \mu_0 M$ aparecem nas duas extremidades de área S do íma. Um volume δV do elemento é $S|\delta\mathbf{r}|$. Nesse caso, a força líquida a qual o elemento de volume do material magnético está submetido é

$$\mathbf{F}_m = -\mathbf{H}(\mathbf{r}')\rho_s S + [\mathbf{H}(\mathbf{r}' + \delta\mathbf{r})\rho_s S], \quad (2.17)$$

em que $\delta\mathbf{H}$ é a variação em \mathbf{H} na direção de $\delta\mathbf{r}$. Usando uma expansão em série de Taylor de primeira ordem para $\mathbf{H}(\mathbf{r}' + \delta\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}') + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{H}|_{\mathbf{r}'} + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2)$, obtém-se

$$\mathbf{F}_m = \rho_s S [\delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{H}|_{\mathbf{r}'} + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2)]. \quad (2.18)$$

No limite $|\delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$, a intensidade da força magnética local \mathbf{F}_m associada com gradientes de campo magnético é dada por

$$\mathbf{F}_m = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{H}\rho_s S. \quad (2.19)$$

Mas, como $\delta\mathbf{r}$ está alinhado na mesma direção de \mathbf{M} , tem-se que $\delta\mathbf{r} = (\mathbf{M}/M)|\delta\mathbf{r}|$ e $\rho_s = \mu_0 M$. Dessa forma, a Eq. (2.19) torna-se

$$\mathbf{F}_m = \mu_0 M |\delta\mathbf{r}| S \cdot \nabla\mathbf{H} = \mu_0 \delta V \mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}. \quad (2.20)$$

Então, determina-se que a força magnética \mathbf{f}_m por unidade de volume do material magnetizado é dada por

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}, \quad (2.21)$$

em que $\mathbf{m} = \mu_0 \mathbf{M}$ representa o vetor momento de dipolo médio por unidade de volume.

2.2.4 Campo externo a um material dipolar

Assim como mostrado na Fig. (2.3), dois pólos idênticos e opostos por uma pequena distância formam um dipolo magnético, no qual aparecem duas superfícies com densidades de pólo ρ_s e $-\rho_s$. Mais uma vez considere que a orientação do volume será dada pelo vetor $\delta \mathbf{r}$ e que $\delta r = |\delta \mathbf{r}|$.

O campo magnético originado pelo material dipolar, em um ponto arbitrário P , pode ser encontrado pela aplicação da Lei de Coulomb e assumindo a superposição dos campos (Rosensweig, 1985). O resultado é

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s S}{4\pi\mu_0} \left[-\frac{\mathbf{r}'}{(r')^3} + \frac{\mathbf{r}''}{(r'')^3} \right], \quad (2.22)$$

em que $\mathbf{r}' = (1/2)\delta \mathbf{r} + \mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'' = -(1/2)\delta \mathbf{r} + \mathbf{r}$. Embora esta relação seja válida para qualquer separação entre os pólos, interessa-se aqui pelo campo quando a separação $|\delta \mathbf{r}|$ é pequena quando comparada com $|\mathbf{r}|$. Quando $|\delta \mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}|$, r' e r'' podem ser aproximados por

$$r' \sim r + \frac{\delta r}{2} \cos \theta \quad e \quad r'' \sim r - \frac{\delta r}{2} \cos \theta. \quad (2.23)$$

E, pelo Teorema Binomial, determina-se a expansão de r' e, analogamente, de r'' como sendo

$$(r')^{-3} \sim \left(r + \frac{\delta r}{2} \cos \theta \right)^{-3} \sim r^{-3} \left(1 - \frac{3\delta r}{2r} \cos \theta \right). \quad (2.24)$$

A partir deste resultado, determina-se que a expressão para o campo \mathbf{H} , dada na Eq. (2.22), pode ser reescrita, após algumas manipulações algébricas, como

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \frac{\rho_s S \delta r}{4\pi\mu_0 r^3} [-\delta\hat{\mathbf{r}} + 3\cos\theta \hat{\mathbf{r}}], \quad (2.25)$$

em que $\delta\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário $\delta\hat{\mathbf{r}}/\delta r$. Além disso, sabe-se que $\delta\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \cos\theta$, $\rho_s = \mu_0 M$ e $V = S\delta r$, logo obtém-se

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \frac{MV}{4\pi r^3} [-\delta\hat{\mathbf{r}} + 3(\delta\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}], \quad (2.26)$$

que representa o campo magnético produzido por uma esfera uniformemente magnetizada. Assim, conclui-se que o campo magnético gerado por um dipolo possui decaimento de ordem $\mathcal{O}(1/r^3)$ e, portanto, de menor alcance que o decaimento de ordem $\mathcal{O}(1/r^2)$ da Lei de Coulomb.

2.2.5 Interação de partículas magnéticas

Como demonstrado em (2.21), a força por unidade de volume agindo em um elemento de material dipolar em um campo magnético externo aplicado \mathbf{H} é dada por $\mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}$, ou, da definição de \mathbf{m} , a força magnética é expressa como

$$\mathbf{f}_m = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{H}. \quad (2.27)$$

Usando uma identidade vetorial conhecida¹, $\mathbf{m} \cdot \nabla\mathbf{H}$ pode ser reescrita, para o caso em que \mathbf{m} é constante, como

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{H} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (2.28)$$

Na ausência de corrente elétrica, de acordo com a Eq. (2.16), $\nabla \times \mathbf{H}$ é identicamente nulo e, assim, para um dipolo de momento \mathbf{m} constante a força \mathbf{f}_m pode ser obtida pelo potencial de energia magnética φ_m , ou seja, $\mathbf{f}_m = -\nabla\varphi_m$, em que

$$\varphi_m = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}). \quad (2.29)$$

¹ $\mathbf{m} \cdot \nabla\mathbf{H} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \nabla\mathbf{m} - \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{m})$

No presente trabalho, objetiva-se investigar o potencial de interação magnética de dois dipolos. Nesse intuito, avalia-se o caso ilustrado na Fig. (2.4).

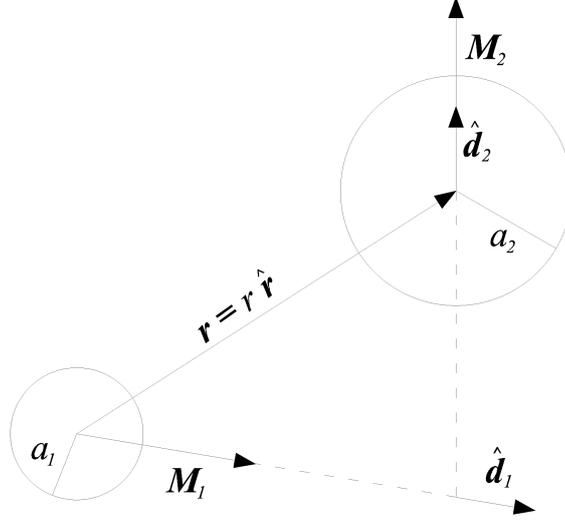


Figura 2.4: Interação de dois dipolos com vetores de momento magnético orientados arbitrariamente.

Considere um dipolo, de magnetização \mathbf{M}_1 , cuja orientação da mesma encontra-se na direção $\hat{\mathbf{d}}_1$ e volume V_1 como a fonte do campo magnético ao qual um outro dipolo, de magnetização \mathbf{M}_2 na direção $\hat{\mathbf{d}}_2$ e volume V_2 , é submetido. Nesse sentido, de acordo com a Eq. (2.26), determina-se que esse campo é dado por

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{M_1 V_1}{4\pi r^3} \left[-\hat{\mathbf{d}}_1 + 3(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \right], \quad (2.30)$$

em que r é a distância entre as partículas. O vetor posição relativa \mathbf{r} é dado por $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, em que $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário na direção que une os centros das partículas. Agora, usando a Eq. (2.30) e a relação para o momento de dipolo por unidade de volume para o segundo dipolo, $\mathbf{m}_2 V_2 = \mu_0 M_2 V_2 \hat{\mathbf{d}}_2$, em (2.29) obtém-se a expressão para o potencial de interação magnética de dois dipolos φ_m , em sua forma dimensional,

$$\varphi_m = \frac{\mu_0 (M_1 V_1)(M_2 V_2)}{4\pi r^3} \left[\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2 - 3(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{d}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right]. \quad (2.31)$$

A energia de interação magnética φ_m , em (2.31) é adimensionalizada por $\mu_0 M_1^2 V_1$. Dessa forma, o potencial de interação magnética, na forma adimensional é dado por

$$\varphi_M = \frac{M_{12}}{3r^3} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^3 \left[\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2 - 3(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{d}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right]. \quad (2.32)$$

em que $M_{12} = M_2/M_1$ é a intensidade de magnetização relativa e $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$ representa a razão de raios das partículas magnéticas.

2.3 HIDRODINÂMICA

Nesta seção serão apresentados os fundamentos da teoria hidrodinâmica aplicada ao estudo de suspensões e emulsões magnéticas. Inicialmente, apresentam-se as equações gerais de balanço da Mecânica dos Meios Contínuos, onde serão realizadas as devidas simplificações para o estudo da microhidrodinâmica de suspensões e para a descrição contínua de escoamentos de fluidos magnéticos ou ferrohídrodinâmica. Para o estudo da hidrodinâmica em baixos números de Reynolds serão então abordados o Teorema da Reciprocidade de Lorentz e a solução fundamental dos escoamentos em baixos números de Reynolds, a partir da Teoria do Potencial Hidrodinâmico de Ladyzhenskaya (1969). Além disso, será dado enfoque à determinação das funções mobilidade hidrodinâmica para os regimes de curto alcance, onde se considera a teoria da lubrificação, e longo alcance, onde as interações hidrodinâmicas são obtidas a partir do método das reflexões. No estudo da hidrodinâmica de fluidos magnéticos, as equações gerais de balanço serão extendidas para incorporar os termos associados à influência do campo magnético sobre a dinâmica do sistema, a fim de avaliar o fenômeno de convecção termomagnética.

2.3.1 Equações governantes da Mecânica dos Meios Contínuos

As equações que governam os escoamentos de fluidos são obtidas considerando-se a conservação de massa, de quantidade de movimento e energia. Estas equações envolvem certas quantidades, em particular o tensor de tensões, que precisa ser especificado por meio de equações constitutivas que descrevam o comportamento do fluido em movimento. As equações de conservação serão apresentadas segundo uma descrição Euleriana ou espacial, envolvendo, portanto, quantidades definidas localmente e com relação a um sistema de referência inercial.

2.3.1.1 Equação constitutiva para fluidos Newtonianos

A determinação do tensor de tensões trata-se de um problema complexo, uma vez que esta quantidade representa a manifestação das reações internas no fluido, com origem nas flutuações moleculares e forças potenciais intermoleculares, e depende do movimento do fluido. Em outras palavras, determinar o tensor de tensões significa estabelecer um

modelo para a relação entre as tensões no fluido e seu estado de movimento, o que constitui o problema de fechamento constitutivo da equação do movimento.

Um fluido em repouso está sujeito somente a tensões normais, que são independentes da direção normal à superfície do elemento fluido na qual a mesma age. Nessas condições, o tensor de tensões é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}, \quad (2.33)$$

em que p é a pressão estática do fluido, que pode ser uma função da posição no fluido, e \mathbf{I} é o tensor unitário de segunda ordem.

Por sua vez, para um fluido em movimento em geral, tensões tangenciais estão presentes e a componente normal das tensões agindo sobre a superfície do elemento depende da direção do vetor normal unitário ao elemento. Torna-se conveniente considerar o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ como a soma de uma parte isotrópica $-p\mathbf{I}$, com a mesma forma daquele apresentado para um fluido em repouso na Eq. (2.33), e uma parte deviatórica $\boldsymbol{\sigma}^d$ ($\boldsymbol{\sigma}^d : \mathbf{I} = 0$) que associa-se à existência de movimento do fluido.

Uma simples relação constitutiva para o fluido é baseada na hipótese de que a tensão é linear com relação ao tensor taxa de deformação \mathbf{D} (Batchelor, 1967; Landau e Lifshitz, 1987), definido por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T] - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (2.34)$$

em que o sobrescrito T denota a transposição do tensor $\nabla\mathbf{u}$. Utilizando-se a condição de incompressibilidade (2.46), obtém-se a seguinte relação constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma}_h = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D}, \quad (2.35)$$

conhecida como a equação constitutiva para fluido Newtoniano e, nesse caso, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_h$. Os fluidos reais que obedecem a Eq. (2.35) são chamados fluidos Newtonianos incompressíveis. A quantidade material η é chamada viscosidade dinâmica e também é uma constante material do fluido Newtoniano.

2.3.1.2 Equação constitutiva para fluidos magnéticos

A hidrodinâmica de fluidos magnéticos não deveria ser confundida com a eletrohidrodinâmica e com a magnetohidrodinâmica. A eletrohidrodinâmica se ocupa do estudo de forças de campo elétrico atuando sobre o fluido, enquanto a magnetohidrodinâmica descreve o movimento de fluidos na presença de forças de Lorentz, provenientes de correntes elétricas circulando pelo fluido condutor (plasma, metal líquido) sob ação de um campo magnético externo. A hidrodinâmica de fluidos magnéticos visa a compreensão e a determinação de forças magnéticas associadas com gradientes de campo que surgem internamente nos escoamentos fluidos na presença de campos magnéticos (Rosensweig, 1985). Nesses casos, a dinâmica do fluido magnético está condicionada à sua microestrutura, o que pode ser traduzido como uma mudança no tensor de tensões, associada à contribuição extra devido à presença das partículas magnéticas dispersas no fluido carreador.

Para se determinar essa contribuição extra, deve-se ter em mente que não é necessário que exista um meio material para que as tensões magnéticas sejam transmitidas. De acordo com o Teorema de Brown (Rosensweig, 1985), uma nuvem de dipolos magnéticos é equivalente a uma distribuição de monopolos com densidade ρ_v . Uma vez que \mathbf{H} é a força por pólo, a densidade de força magnética local é dada por

$$\mathbf{f}_m = \rho_v \mathbf{H}. \quad (2.36)$$

Uma vez que a densidade de pólos por unidade de volume é dada por $\rho_v = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}$ e, da magnetostática, de acordo com a Eq. (2.12), temos que $-\nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot \mathbf{H}$. Assim, a Eq. (2.36) torna-se

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{H}). \quad (2.37)$$

E, considerando-se a identidade tensorial $\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) = \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}$, a Eq. (2.37) pode ser reescrita como

$$\mathbf{f}_m = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}) - \mu_0 \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (2.38)$$

Entretanto, $\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \nabla(H^2/2) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ e, considerando o regime magnetostático, em que $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$, a Eq. (2.38) pode ser reescrita como

$$\mathbf{f}_m = \nabla \cdot \left[\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \left(\frac{1}{2} \right) \mu_0 H^2 \mathbf{I} \right], \quad (2.39)$$

em que a quantidade dentro dos colchetes é o tensor de tensões de Maxwell $\boldsymbol{\sigma}_m$, desde que a força magnética no fluido seja dada por $\mathbf{f}_m = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_m$. Assim, temos

$$\boldsymbol{\sigma}_m = -\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H}, \quad (2.40)$$

que é válido no vácuo, em que $\mu_m = \mu_0$. Quando existe um meio onde se propagam essas tensões magnéticas, o segundo termo da Eq. (2.40) torna-se $\mu_m \mathbf{H}\mathbf{H} = \mathbf{B}\mathbf{H}$. Assim sendo, podemos combinar as contribuições hidrodinâmica (2.35) e magnética (2.40) para compor o tensor de tensões para um fluido magnético

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}, \quad (2.41)$$

em que P é a pressão total, dada pela soma da pressão hidrodinâmica p_h e do termo de pressão magnética $p_m = (1/2)\mu_0 H^2$.

2.3.1.3 Equação de conservação da massa

A equação diferencial para a conservação de massa ou equação da continuidade é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.42)$$

em que $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a massa específica e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é o campo de velocidades Euleriano do fluido. Estas variáveis são avaliadas como funções contínuas do espaço \mathbf{x} e do tempo t . O operador derivada material, definido como

$$\frac{\mathcal{D}(\cdot)}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\cdot), \quad (2.43)$$

designa a diferenciação de uma certa quantidade em relação ao tempo, seguindo a trajetória da partícula fluida. A equação de conservação de massa, quando escrita em termos do operador derivada material, torna-se

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (2.44)$$

Para uma taxa de variação da massa específica ρ nula quando se segue o movimento de uma partícula fluida, tem-se

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}t} = 0. \quad (2.45)$$

Portanto, a equação de conservação de massa reduz-se à condição em que o campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ é solenoidal, ou seja

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.46)$$

Isto significa que as partículas materiais de fluido sofrem uma transformação isovolumétrica durante o movimento.

2.3.1.4 Equação de conservação da quantidade de movimento

A equação da conservação do momento linear ou quantidade de movimento, em sua forma mais fundamental, representa a relação entre a taxa de variação da quantidade de movimento de uma dada porção fluida e a soma de todas as forças que atuam naquela porção de fluido. Na forma diferencial, o balanço de força sobre uma partícula de um meio contínuo é dada por

$$\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}. \quad (2.47)$$

Aqui, localmente, $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo tensorial de tensões e \mathbf{b} é a força de campo externa por unidade de massa. A equação diferencial (2.47) fornece a aceleração do fluido em termos da força de campo \mathbf{b} e do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e é conhecida no contexto da Mecânica dos Meios Contínuos também como equação de Cauchy (Aris, 1962).

A Eq. (2.47) é utilizada para a determinação do campo de velocidades \mathbf{u} desde que se conheça a força externa \mathbf{b} e o campo tensorial de tensões $\boldsymbol{\sigma}$. A força de volume agindo sobre o fluido é, em muitos casos, devido simplesmente à força gravitacional, em que

$\mathbf{b} = \mathbf{g}$; em outros casos a expressão apropriada para \mathbf{b} torna-se evidente a partir da proposição do problema.

Para materiais magnéticos polares, ou seja, onde estão presentes os torques magnéticos internos, pode-se combinar a equação constitutiva (2.41) com a Eq. (2.47), obtendo-se a equação de conservação da quantidade de movimento para um fluido polar, como sendo

$$\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \rho \mathbf{b}. \quad (2.48)$$

2.3.1.5 Equação de conservação do momento angular

A equação da conservação do momento angular ou do momento da quantidade de movimento, representa a relação entre a taxa de variação do momento angular de uma dada porção fluida e a soma de todos os torques aos quais aquela porção fluida está submetida. A taxa de variação do momento angular \mathbf{L} , seguindo um determinado volume de fluido V , é dada por

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{L}}{\mathcal{D}t} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \int_V \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_V \rho \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV. \quad (2.49)$$

Porém, do último termo da Eq. (2.49), podemos obter

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) = \mathbf{x} \times \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} + \underbrace{\mathbf{u} \times \frac{\mathcal{D}\mathbf{x}}{\mathcal{D}t}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{x} \times \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t}, \quad (2.50)$$

o que permite reescrever a Eq. (2.49) da seguinte forma

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{L}}{\mathcal{D}t} = \int_V \rho \mathbf{x} \times \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} dV. \quad (2.51)$$

E, finalmente,

$$\frac{\mathcal{D}\mathbf{L}}{\mathcal{D}t} = \int_V \rho \mathbf{x} \times \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} dV = \sum \mathbf{T}, \quad (2.52)$$

em que $\sum \mathbf{T}$ representa a soma de todos os torques que atuam sobre a porção fluida considerada. Notadamente, o termo $\sum \mathbf{T}$ engloba o torque devido às forças de superfície \mathbf{T}_s , o torque devido às forças de campo \mathbf{T}_c e os torques internos presentes no fluido gerados por ação magnética \mathbf{T}_m .

Particularmente, a contribuição associada à ação magnética resulta do fato de que o momento de dipolo magnético, para partículas com momento magnético não-nulo, está vinculado à orientação das partículas. Então, se a orientação do campo magnético \mathbf{H} é alterada, a magnetização \mathbf{M} responde executando um movimento de rotação das partículas, o que é resistido pela viscosidade do fluido. O resultado é que o produto $\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$ acopla o movimento do fluido à presença do material magnetizável (Rosensweig, 1985). Assim sendo, a Eq. (2.52) pode ser reescrita agora, em termos de cada uma destas contribuições, como sendo

$$\int_V \rho \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \underbrace{\int_S \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS}_{\mathbf{T}_s} + \underbrace{\int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV}_{\mathbf{T}_c} + \underbrace{\int_V \mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) dV}_{\mathbf{T}_m}. \quad (2.53)$$

E, considerando uma identidade tensorial conhecida² (Aris, 1962), determina-se que,

$$\int_S \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \int_V 2\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV, \quad (2.54)$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor dual da parte antissimétrica de $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}$. E, da definição de vetor dual, obtém-se que

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}_{(AS)}, \quad (2.55)$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ é o tensor antissimétrico de terceira ordem denominado permutador de Levi-Civita e $\boldsymbol{\sigma}_{(AS)}$ é a parte antissimétrica de $\boldsymbol{\sigma}$. Evidentemente, o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser dividido em duas partes: uma simétrica $\boldsymbol{\sigma}_{(S)}$ e outra antissimétrica $\boldsymbol{\sigma}_{(AS)}$, tal que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{(S)} + \boldsymbol{\sigma}_{(AS)}$. E, como o produto entre um tensor antissimétrico e um tensor simétrico é nulo, a Eq. (2.55) torna-se

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.56)$$

²Seja S uma superfície regular limitando a região de volume V . Para um vetor arbitrário \mathbf{v} e um campo tensorial \mathbf{A} definidos em V e sobre S , mostra-se que $\int_S \mathbf{v} \times (\mathbf{A}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \int_V [2\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v} \times (\nabla \cdot \mathbf{A})] dV$, em que $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor dual da parte antissimétrica de $\mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{v})^T$.

E, conseqüentemente, a Eq. (2.54) pode ser reescrita como sendo

$$\int_S \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \int_V [\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}] dV. \quad (2.57)$$

Dessa forma, substituindo o resultado obtido em (2.57) na Eq. (2.53), obtém-se que

$$\int_V \rho \mathbf{x} \times \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} dV = \int_V [\mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}] dV + \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_V \mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) dV. \quad (2.58)$$

Assim, após algumas manipulações algébricas, determina-se

$$\int_V \left[\mathbf{x} \times \left(\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{b} \right) \right] + \int_V [\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} - \mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H})] dV = \mathbf{0}. \quad (2.59)$$

A primeira integral da Eq. (2.59) é nula, como consequência direta da Equação de Cauchy (2.47). Por fim, aplicando o Teorema da Localização à Eq. (2.59), mostra-se que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} = \mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad (2.60)$$

comprovando que, na ausência de torques internos no fluido (assim como ocorre em um fluido magnético, por ser um material superparamagnético), $\mu_0 (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) = \mathbf{0}$. Dessa forma, para materiais superparamagnéticos, obtém-se que

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.61)$$

Logo, o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico, ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.62)$$

2.3.1.6 Equação de conservação da energia

Considerando agora o balanço de energia no material fluido, pode-se obter uma expressão para a taxa de variação da energia total no volume fluido, como sendo

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho U_e \right) = \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (2.63)$$

em que o termo $(1/2)\rho u^2$ representa a energia cinética por unidade de volume e U_e é a energia interna por unidade de massa. Aqui, o fluxo de calor \mathbf{q} é dado pela lei de Fourier para um material isotrópico como sendo $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$, em que κ é a condutividade térmica do fluido, e T é a temperatura.

Uma expressão para a taxa de variação da energia cinética pode ser obtida a partir da equação do momento (2.72) na sua forma dimensional, tomando-se o produto de tal equação com a velocidade \mathbf{u} e, quando subtraída do balanço de energia (2.63), obtém-se que

$$\rho \frac{\mathcal{D}U_e}{\mathcal{D}t} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (2.64)$$

em que \mathbf{W} é o tensor vorticidade. Além disso, utilizando relações termodinâmicas, pode-se reescrever a Eq. (2.64) somente em termos da temperatura, o que resulta em

$$\rho c_e \frac{\mathcal{D}T}{\mathcal{D}t} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W} + \kappa \nabla^2 T, \quad (2.65)$$

Aqui, α_T é a difusividade térmica do fluido, $\alpha_T = \kappa/(\rho c_e)$, em que c_e é o calor específico do fluido. O segundo e o terceiro termos no lado direito da Eq. (2.65) representam as taxas de produção de energia interna devido à dissipação de energia.

Considera-se, agora, o caso de líquidos magnéticos polares. Nestes materiais, o tensor de tensões é assimétrico, ou seja, os torques internos devido à ação magnética não são desprezados. A fim de determinar a equação de balanço da energia para tais materiais, basta substituir a equação constitutiva (2.41) na Eq. (2.65), o que resulta em

$$\rho c_e \frac{\mathcal{D}T}{\mathcal{D}t} = 2\eta \mathbf{D} : \mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B} : \mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B} : \mathbf{W} + \kappa \nabla^2 T. \quad (2.66)$$

2.3.1.7 Equações de conservação para fluidos magnéticos

Agora, para que se possa obter as equações de balanço para um fluido magnético, basta substituímos a expressão para o tensor de tensões de um fluido magnético, dado pela Eq. (2.41), nas Eqs. (2.47) e (2.65). Note que, como o fluido magnético é um material superparamagnético, os torques internos devido à ação magnética estão ausentes. Dessa forma, podemos considerar a simetria do tensor de tensões (2.62). Realizando-se as

manipulações algébricas necessárias, obtém-se as equações de conservação do momento linear e da energia como função da temperatura, dadas a seguir

$$\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad \text{e} \quad (2.67)$$

$$\frac{\mathcal{D}T}{\mathcal{D}t} = \alpha_T \nabla^2 T + 2\eta(\mathbf{D} : \mathbf{D}) + \frac{\mu_m}{c_e \rho} \mathbf{H} \mathbf{H} : \mathbf{D}. \quad (2.68)$$

Os dois novos termos que surgiram devido à contribuição das partículas magnéticas na suspensão significam, respectivamente, a força magnética por unidade de volume agindo nas partículas magnéticas ($\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$) e a produção de energia interna devido às tensões magnéticas ($\mu_m c_e^{-1} \rho^{-1} \mathbf{H} \mathbf{H} : \mathbf{D}$).

2.3.1.8 Equação de conservação para fluidos Newtonianos

Resumidamente, para obtermos as equações de conservação do momento linear e da energia para um fluido Newtoniano basta subtrairmos das Eqs. (2.67) e (2.68) os termos associados à contribuição extra devido à presença das partículas magnéticas. Dessa forma, determina-se que

$$\rho \frac{\mathcal{D}\mathbf{u}}{\mathcal{D}t} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} \quad \text{e} \quad (2.69)$$

$$\frac{\mathcal{D}T}{\mathcal{D}t} = \alpha_T \nabla^2 T + 2\eta(\mathbf{D} : \mathbf{D}). \quad (2.70)$$

Em escoamentos em regime permanente, a ordem de magnitude do termo de inércia da equação de movimento é $\rho U^2/L$, enquanto a magnitude do termo de forças viscosas é $\eta U/L^2$, em que U e L são escalas características do problema para velocidade e comprimento, respectivamente. A razão entre os termos inerciais e viscosos de um escoamento fluido definem o número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}, \quad (2.71)$$

que também pode ser interpretado como a razão entre o tempo de difusão da quantidade de movimento ou vorticidade $t_\eta = \rho L^2/\eta$ e o tempo convectivo do escoamento $t_U = L/U$.

Combinando a equação constitutiva (2.35) com a equação de conservação da quantidade de movimento (2.47), obtém-se as equações de Navier-Stokes de um fluido Newtoniano incompressível com viscosidade constante na forma adimensional

$$\begin{aligned} Re \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\nabla P^* + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2.72)$$

em que $P^* = p - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ é uma pressão reduzida ou modificada pelo efeito gravitacional ou hidrostático.

2.3.2 Microhidrodinâmica

A equação de Navier-Stokes, Eq. (2.72), não é uma equação diferencial parcial linear uma vez que a derivada material contém um termo não-linear de segunda ordem em \mathbf{u} , $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, que representa a aceleração convectiva de um elemento material de fluido. Devido a essa não-linearidade, as equações de Navier-Stokes não possuem soluções fechadas em regimes de escoamento em que a inércia e os efeitos viscosos são da mesma ordem de magnitude.

No caso em que a inércia convectiva pode ser desprezada, a gama de problemas que possuem uma solução fechada aumenta consideravelmente. As equações de Navier-Stokes no limite de baixos números de Reynolds ($Re \ll 1$) para escoamentos permanentes são conhecidas como equações de Stokes. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.73)$$

É importante ressaltar que a ausência da derivada temporal Euleriana na equação do movimento, não implica, necessariamente, que o escoamento é permanente, mas reflete o fato que as forças atuando nos pequenos elementos contínuos de fluido encontram-se num estado de equilíbrio dinâmico, conseqüentemente, a estrutura instantânea do escoamento depende apenas da configuração do contorno e das condições de contorno instantâneas. Em outras palavras, essa aproximação quasi-permanente significa dizer que o fluido se ajusta instantaneamente às mudanças no contorno, devido à rápida difusão de vorticidade. Isso justifica porque, ainda que uma dependência temporal

não apareça, explicitamente, nas equações de Stokes é possível estudar o problema de deformação ou movimento de partículas neste escoamento.

2.3.2.1 Teorema da reciprocidade de Lorentz

Sejam $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$ e $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ os campos de velocidade e tensão de dois escoamentos quaisquer do mesmo fluido numa região Ω , regular, com contorno $\partial\Omega$. Ambos os escoamentos satisfazem às equações de Stokes. O Teorema da Reciprocidade de Lorentz (Happel e Brenner, 1965; Kim e Karrila, 2005) postula que

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dS - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \, dS - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \, dV, \quad (2.74)$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal unitário ao contorno $\partial\Omega$.

Na ausência de forças de campo, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$. Nestas condições (2.74) reduz-se a

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \, dS. \quad (2.75)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, pode-se obter o Teorema da Reciprocidade numa forma diferencial

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = 0. \quad (2.76)$$

O resultado postulado pelo Teorema da Reciprocidade possui aplicações de grande importância em escoamentos de Stokes como a demonstração das propriedades de simetria dos tensores mobilidade e resistência, que serão apresentados em §3.2. Além disso, o Teorema da Reciprocidade permite obter informações sobre um dado escoamento de Stokes sem a necessidade de resolver o problema explicitamente, utilizando-se a solução fundamental do escoamento de Stokes, que será apresentada em §2.3.2.2, para se obter uma representação integral do escoamento (Cunha et al., 2003b).

2.3.2.2 Solução fundamental do escoamento de Stokes

Nesta seção, a solução fundamental das equações de Stokes será obtida por meio de uma metodologia comumente empregada na solução de equações diferenciais parciais

lineares que governam sistemas físicos modelados segundo a Teoria Potencial. Para este caso, utiliza-se a Teoria do Potencial Hidrodinâmico (Ladyzhenskaya, 1969) que consiste em representar a presença das partículas no escoamento como uma distribuição de forças e momentos localizados no centro da partícula \mathbf{x}_o . A fim de simplificar os cálculos incorpora-se o efeito da força de campo \mathbf{g} na pressão modificada $P^* = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$.

A fim de se obter a solução fundamental do escoamento de Stokes considera-se o escoamento induzido por um ponto de força de intensidade \mathbf{F} , localizado em $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$. As equações de Stokes assumem, portanto, a forma a seguir

$$\begin{aligned} -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} &= \mathbf{F} \delta(\mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

em que o termo de fonte $\mathbf{F} \delta(\mathbf{x})$ representa a singularidade ou monopolo no domínio fluido e $\delta(\mathbf{x})$ é a distribuição delta de Dirac tridimensional, a qual pode ser definida no espaço livre por

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (2.78)$$

que satisfaz às seguintes propriedades

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_o). \quad (2.79)$$

Aqui, \mathbf{k} é o vetor número de onda e k é o número de onda. Além disso, é importante notar que a integral representa uma soma sobre todo o espaço tridimensional, físico ou recíproco, a título de simplificação da notação.

Para determinação da solução de singularidade das equações de Stokes no espaço livre, utiliza-se a transformada de Fourier tridimensional de uma função $f(\mathbf{x})$, definida como segue

$$\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}(\mathbf{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (2.80)$$

em que a integral é avaliada sobre todo o espaço (espaço livre). A transformação inversa, por sua vez, é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} = f(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (2.81)$$

em que, mais uma vez, a integral tripla foi substituída por uma integral simples a título de simplificação da notação. Notemos que o operador $\nabla = \mathbf{e}_\alpha \partial / \partial x_\alpha$ no espaço físico assume a forma simples $-i\mathbf{k}$ no espaço de Fourier. Por conseqüência, o operador Laplaciano ∇^2 no espaço recíproco é dado por $-k^2$.

Tomando-se a transformada de Fourier da equação da continuidade, obtém-se

$$\mathcal{F}\{\nabla \cdot \mathbf{u}\} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = 0. \quad (2.82)$$

Analogamente, realizando-se a mesma transformação para a equação da conservação da quantidade de movimento, segue

$$-\mathcal{F}\{\eta \nabla^2 \mathbf{u}\} + \mathcal{F}\{\nabla p\} = \mathbf{F} \mathcal{F}\{\delta(\mathbf{x})\}, \quad \eta k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) - i\mathbf{k} \hat{p} = \mathbf{F} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (2.83)$$

Multiplicando-se a Eq. (2.83) escalarmente por \mathbf{k} e utilizando a equação da continuidade, determina-se a distribuição de pressão no espaço de número de onda ou espaço de Fourier

$$\hat{p}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})}{k^2}. \quad (2.84)$$

Determinando-se a transformação inversa da Eq. (2.84), obtém-se o campo de pressão no espaço físico por

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (2.85)$$

Mas, considerando as propriedades da distribuição $\delta(\mathbf{x})$, segue que

$$\mathbf{F} = \int_R \mathbf{F} \delta(\mathbf{x}) dV = - \int_R \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.86)$$

E, conseqüentemente, obtém-se

$$p(\mathbf{x}) = \frac{-\mathbf{F}}{8\pi^3} \cdot \nabla \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} d\mathbf{k}. \quad (2.87)$$

Agora, utilizando-se coordenadas esféricas no espaço recíproco para se obter a transformada inversa, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} = 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2} \text{sen} \theta \, d\theta k^2 \, dk = \frac{2\pi^2}{r}, \quad (2.88)$$

em que $r = |\mathbf{x}|$. Assim sendo, a pressão é dada por

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}}{8\pi} \cdot \frac{2\mathbf{x}}{r^3}. \quad (2.89)$$

Note ainda que, se o pólo não está localizado na origem $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$, então o campo de pressão é representado por

$$p(\mathbf{x}; \mathbf{x}_o) = \frac{\mathbf{F}}{8\pi} \cdot \frac{2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3}. \quad (2.90)$$

O campo de velocidade no espaço de fase pode ser obtido substituindo-se a Eq. (2.84) na Eq. (2.83). Resolvendo a equação resultante para $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$, obtém-se

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\eta} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{I}}{k^2} - \frac{\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}}{k^4} \right) \quad (2.91)$$

em que $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. Aplicando-se a transformada inversa à Eq. (2.91), determina-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi^3\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} [\mathbf{F} \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{8\pi^3\eta} \left[\frac{2\pi^2}{r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{I}) + \mathbf{F} \cdot \nabla \nabla \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k} \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

E, utilizando coordenadas polares esféricas, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \, d\mathbf{k} = -\pi^2 |\mathbf{x}| \quad (2.93)$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi^3\eta} \left[\frac{2\pi^2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{F} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{F} \cdot \nabla \nabla (-\pi^2 |\mathbf{x}|) \right] \\
&= \frac{\mathbf{F}}{8\pi\eta} \left[\frac{2\mathbf{I}}{r} - \nabla \nabla |\mathbf{x}| \right].
\end{aligned} \tag{2.94}$$

E, uma vez que,

$$\nabla \nabla |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{x}|} - \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \tag{2.95}$$

o campo de velocidades no espaço físico $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ pode ser representado na forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}}{8\pi\eta} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{x}), \tag{2.96}$$

em que a função de Green do espaço livre, associada ao campo de velocidade induzido pelo ponto de partícula é denominado tensor de Oseen-Burgeois ou tensor de interação hidrodinâmica ou “*stokeslet*” de uma partícula.

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right). \tag{2.97}$$

O tensor \mathcal{G} é simétrico e positivo definido e pode ser entendido como o propagador do distúrbio hidrodinâmico, de natureza puramente geométrica e, portanto, independente das propriedades do fluido e do escoamento. Este tensor constitui o elemento central sobre o qual está associada a noção de mobilidade hidrodinâmica de uma partícula, que será explorada em seções posteriores. E, se o pólo não está localizado na origem $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$, o campo de pressão é representado por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_o) = \frac{\mathbf{F}}{8\pi\eta} \cdot \left[\frac{\mathbf{I}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} \right]. \tag{2.98}$$

Vale comentar que as interações hidrodinâmicas entre partículas em suspensão são resultado de um transporte de quantidade de movimento em escala molecular via difusão de vorticidade por ação da viscosidade. A vorticidade gerada na superfície de uma partícula teste, transladando em um fluido viscoso, é responsável por uma redistribuição de tensões hidrodinâmicas ao longo da superfície de partículas vizinhas. Estas tensões hidrodinâmicas induzem forças e torques que levam uma dada partícula

a descrever trajetórias estocásticas, o que pode ser quantificado pela determinação de um coeficiente de dispersão hidrodinâmica. No caso de suspensões diluídas em que pode-se usar interações hidrodinâmicas com aproximação de ponto de força, se $\mathbf{U}_\alpha^{(0)}$ é a velocidade terminal de uma partícula isolada então a velocidade da partícula α considerando-se a influência das outras vizinhas β é

$$\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha^{(0)} + \frac{1}{8\pi\eta} \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}_\beta \cdot \mathcal{G}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta). \quad (2.99)$$

2.3.3 Relações de mobilidade e resistência

Nos estudos relacionados às propriedades de suspensões, é necessário considerar o efeito das interações hidrodinâmicas entre as partículas, tendo em vista que tais interações existem até mesmo em suspensões muito diluídas. Nesta seção, serão considerados dois métodos para calcular as interações hidrodinâmicas entre partículas. Nossa tarefa será compreender como o escoamento induz ou é induzido pelo movimento das partículas.

Quando duas partículas suspensas em um fluido viscoso se aproximam, o movimento de cada partícula é influenciado pela outra, até mesmo na ausência de interações interpartícula, assim como forças de van der Waals, forças eletrostáticas e forças magnéticas. O campo de velocidade gerado pelo movimento de uma partícula é transmitido através do fluido carreador por meio da rápida difusão viscosa com escala de tempo da ordem de a^2/ν , em que a é o raio da partícula e ν é a viscosidade cinemática ou coeficiente de difusão molecular, e influencia o movimento de outra partícula. Conseqüentemente, este campo de velocidade altera a força hidrodinâmica, o torque e a distribuição de tensões da outra partícula.

Cabe observar que, quando duas partículas estão próximas umas das outras, caso em que as forças atrativas coloidais são significativas, as interações hidrodinâmicas entre as partículas retardam o movimento. Dessa forma, as interações hidrodinâmicas podem subestimar a taxa de agregação em uma suspensão diluída (Kim e Karrila, 2005).

Os estudos acerca da determinação das relações de mobilidade e resistência se subdividem em dois tipos: interações partícula-partícula e interações parede-partícula. Como este trabalho está direcionado ao estudo de interações entre partículas, será dado maior ênfase a esse tipo de interação. Para cada caso, o método mais eficiente depende da separação entre as superfícies. Para o caso de partículas distantes (a distância entre os pontos mais próximos entre as duas superfícies é bem maior que o tamanho da

partícula) um método assintótico conhecido como método das reflexões, descrito em Happel e Brenner (1965) e (Kim e Karrila, 2005), é aplicado.

No caso em que as superfícies encontram-se próximas ao contato, enfrenta-se um problema complexo do ponto de vista analítico e computacional. Para superfícies rígidas em movimento relativo, o escoamento na região entre as partículas é descrito pela teoria de lubrificação, que fornece uma expansão assintótica da solução (Kim e Karrila, 2005).

As funções mobilidade e resistência provém de relações entre as forças atuantes e os parâmetros que governam o movimento da partícula e a mecânica microestrutural do sistema particulado como um todo. As matrizes mobilidade e resistência dependem somente de parâmetros da configuração geométrica das partículas. De acordo com essa configuração, a Fig. (2.5) apresenta os tipos de geometria e o tipo de interação que existe entre partículas em suspensão.

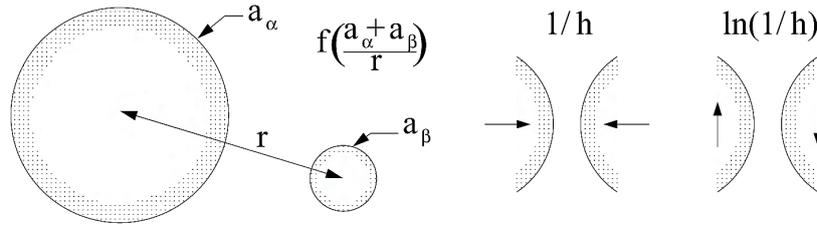


Figura 2.5: Tipos de configurações geométricas para partículas que interagem hidrodinamicamente.

Na Fig. (2.5), o pequeno parâmetro h é a distância de separação entre as partículas $h = r - (a_\alpha + a_\beta)$. Para partículas que comprimem o fluido interveniente, o termo dominante da interação hidrodinâmica é $\mathcal{O}(h^{-1})$. Por outro lado, para escoamentos cisalhantes (superfícies curvas passando uma pela outra) o termo dominante é $\mathcal{O}(\ln h^{-1})$.

Em problemas do tipo mobilidade, pretende-se determinar o movimento de uma partícula teste a partir de forças e torques hidrodinâmicos conhecidos. Uma matriz mobilidade \mathcal{M} , originada da solução fundamental do escoamento de Stokes para o fluido carreador, constitui o elemento central na determinação das interações hidrodinâmicas interpartícula. A matriz mobilidade é simétrica e positiva definida, conforme demonstrado por (Kim e Karrila, 2005).

Quando as condições de contorno do problema especificam as velocidades do fluido e da partícula, pode-se obter as forças e torques hidrodinâmicos utilizando-se uma formulação do tipo resistência. Uma matriz resistência \mathcal{R} , simétrica e positiva definida,

fornecerá a relação entre força e torque hidrodinâmicos sobre as partículas e suas velocidades translacional e rotacional, em relação ao fluido. As relações de mobilidade e resistência possuem uma importante propriedade:

$$\mathcal{R} \cdot \mathcal{M} = I. \quad (2.100)$$

Esta propriedade permite a migração de um tipo de problema para o outro, desde que se considere ou não a inércia da fase particulada. Em princípio, quando se deseja resolver um problema de mobilidades, pode-se resolver o problema de resistência para os quais os movimentos da partícula são prescritos e então utiliza-se a relação dada em (2.100) a fim de obter as funções mobilidade. Para problemas de muitos corpos, esta abordagem é aplicável em princípio, mas na prática os custos computacionais $\mathcal{O}(N^2)$ das simulações, dependendo do número N de partículas, tornam-se inviáveis. Além disso, as funções resistência são singulares, no que diz respeito à distância de separação, quando o contato está próximo. Em virtude disso, recomenda-se que os problemas que consideram a inércia da partícula devam ser resolvidos por meio da inversão da matriz mobilidade a cada passo de tempo.

2.3.3.1 Regime de longo alcance

O método das reflexões é baseado na idéia de que o escoamento ambiente sobre cada partícula consiste do escoamento ambiente original adicionado ao distúrbio produzido pelas outras partículas no escoamento. O método é iterativo, uma vez que a correção do escoamento ambiente sobre uma dada partícula gera uma nova solução perturbada para aquela partícula, que similarmente modifica o escoamento ambiente para outra partícula. O processo de se incorporar o efeito de um escoamento ambiente com um novo campo de distúrbio é chamado de reflexão, daí vem o nome método das reflexões. O escoamento ambiente usado na reflexão é denominado de campo incidente e a solução perturbada, campo refletido.

Para o problema de duas partículas, considere \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 como as posições de referência para cada partícula e tome \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 como os campos de velocidade das partículas isoladas. Assim sendo, sobre as superfícies S_1 e S_2 de cada partícula, aplicam-se as seguintes condições de contorno

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \mathbf{u}^\infty, \quad \mathbf{x} \in S_1 \quad (2.101)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{U}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) - \mathbf{u}^\infty, \quad \mathbf{x} \in S_2 \quad (2.102)$$

e então, ao se definir $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, nota-se que os erros na condição de contorno aparecem para $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$ para um ponto \mathbf{x} na superfície da partícula 1 e $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ para um ponto sobre a partícula 2. Este erro será menor para $a/r \ll 1$, uma vez que os decaimentos de \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 são aqueles dados para um monopólo de Stokes ou *stokeslet* que possui um decaimento $1/r$. Para reduzir esses erros deve-se considerar mais reflexões sobre o campo incidente.

As próximas reflexões serão obtidas de maneira análoga. Por exemplo, as próximas reflexões serão obtidas com \mathbf{u}_{12} e \mathbf{u}_{21} usando o mesmo procedimento utilizado para a obtenção de \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 . Os campos refletidos em seguida serão denotados por \mathbf{u}_{121} e \mathbf{u}_{212} . Em geral, mantém-se a trajetória de reflexões de todos os campos designando subscritos únicos formados pela união dos subscritos do escoamento incidente e do subscrito correspondente à partícula na qual a reflexão é tomada. O erro na condição de contorno é dado pelos valores tomados pelos campos de mais alta ordem refletidos, sendo estes avaliados na superfície da outra partícula, o que também é um campo de longo alcance.

Finalmente, a forma mais natural dos campos refletidos é a expansão multipolo, com os momentos sendo determinados pela aplicação das Leis de Fáxen (sobre os campos incidentes). Para formas simples, como esferas, expressões analíticas das Leis de Fáxen são conhecidas (Russel et al., 1989), e o método das reflexões possui solução analítica.

2.3.3.2 Regime de curto alcance

Compreender as interações entre partículas no regime em que as partículas estão próximas do contato é fundamental para se entender o comportamento macroscópico de suspensões. Para duas partículas rígidas em movimento relativo, as contribuições dominantes para a força e o torque podem ser determinadas pelos métodos da teoria da lubrificação (Kim e Karrila, 2005). Em particular, obtém-se que as equações de lubrificação produzirão termos na força e no torque que são singulares em $1/\epsilon$ e $\ln(1/\epsilon)$ para pequenos $\epsilon = r/a$. Nesta análise, $\epsilon \ll 1$ representa a razão entre a separação entre partículas e um comprimento característico das partículas.

2.3.3.3 Mobilidades para duas partículas livres de torque

Considere duas partículas de raios a_1 e a_2 , livres da ação de torques externos e submetidas à ação gravitacional. Aqui a razão de raios é dada por $\lambda = a_2/a_1$. Seguindo-

se o procedimento descrito por Kim e Karrila (2005) e por Jeffrey e Onishi (1984), determina-se as funções mobilidades nas direções perpendiculares $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ e longitudinais $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ à linha que une o centro das partículas. Aqui $\xi = h/(a_1 + a_2)$ é definida como a distância adimensional entre as partículas e $s = r/(a_1 + a_2)$ é definida como a distância entre centros adimensional.

Regime de longo alcance ($\xi \gg 2$)

$$\mathcal{A}_{11} = \mathcal{B}_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(\lambda)(1 + \lambda)^{-2k} s^{-2k} \quad (2.103)$$

$$\mathcal{A}_{12} = -\frac{1}{2}(1 + \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(\lambda)(1 + \lambda)^{-2k-1} s^{-2k-1} \quad (2.104)$$

$$\mathcal{B}_{12} = \frac{1}{2}(1 + \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(\lambda)(1 + \lambda)^{-2k-1} s^{-2k-1} \quad (2.105)$$

Tabela 2.1: As funções $f_n(\lambda)$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ (Kim e Karrila, 2005).

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
1	1	-3		4								
λ			0									
λ^2				4		0						
λ^3					-60		480	-2400	-960	1920		-15360
λ^4												
λ^5							-128		4224	1920	-17920	231936
λ^6											-96000	
λ^7									-576		30720	-15360
λ^8												
λ^9											-2304	

Do ponto de vista prático, as formas de longo alcance para as funções mobilidade, comparadas com os resultados apresentados por Adler (1981a) e seguindo a recomendação de (Jeffrey e Onishi, 1984), serão utilizadas no limite $\xi > 0,02$. Para $0 < \xi \leq 0,02$, as formas de curto alcance, descritas a seguir, serão utilizadas.

Tabela 2.2: As funções $f_n(\lambda)$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ (Kim e Karrila, 2005).

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
1	1	3/2		2								
λ			0		0							
λ^2				2		0						
λ^3								0	-320			8960
λ^4										0		
λ^5							-64		288		-6720	-8848
λ^6												
λ^7									-288		3456	8960
λ^8												
λ^9											-1152	

Regime de curto alcance ($\xi \rightarrow 2$)

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}^{(1)}(\lambda) + d_{\alpha\beta}^{(2)}(\lambda)s + d_{\alpha\beta}^{(3)}(\lambda)s^2 \ln s + d_{\alpha\beta}^{(4)}(\lambda)s^2 \quad (2.106)$$

$$\mathcal{B}_{\alpha\beta} = \frac{f_{\alpha\beta}^{(1)}(\ln s^{-1})^2 + f_{\alpha\beta}^{(2)} \ln s^{-1} + f_{\alpha\beta}^{(3)}}{(\ln s^{-1})^2 + e^{(1)} \ln s^{-1} + e^{(2)}} \quad (2.107)$$

em que as funções $d_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$ e $e(\lambda)$ encontram-se nas tabelas 2.3 e 2.4.

Tabela 2.3: As funções $d_{\alpha\beta}$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{A}_{\alpha\beta}$ (Kim e Karrila, 2005).

λ	$d_{11}^{(1)}$	$d_{11}^{(2)}$	$d_{11}^{(3)}$	$d_{11}^{(4)}$	$d_{12}^{(1)}$	$d_{12}^{(2)}$	$d_{12}^{(3)}$	$d_{12}^{(4)}$
0,125	0,9997	-0,0002	0,003	0,008	0,5623	-0,170	-0,256	-0,114
0,25	0,9951	0,009	0,026	0,013	0,6219	-0,372	-0,408	0,360
0,5	0,9537	0,152	0,194	-0,322	0,7152	-0,766	-0,691	1,566
1,0	0,7750	0,930	0,900	-2,685	0,7750	-1,070	-0,900	2,697
2,0	0,4768	2,277	2,188	-6,236	0,5623	-0,170	-0,256	-0,114
4,0	0,2488	3,610	4,061	-9,165	0,6219	-0,372	-0,408	0,360
8,0	0,1250	5,620	8,500	-16,26	0,7152	-0,766	-0,691	1,566

Ressalta-se ainda que os coeficientes $d_{\alpha\beta}^{(4)}$ foram calibrados para que as formas de curto e longo alcances para as funções mobilidades fossem coincidentes para $\xi = 0,02$.

Tabela 2.4: As funções $f_{\alpha\beta}$ e $e(\lambda)$ que aparecem na expressão assintótica para os tensores mobilidade $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ (Kim e Karrila, 2005).

λ	$f_{11}^{(1)}$	$f_{11}^{(2)}$	$f_{11}^{(3)}$	$f_{12}^{(1)}$	$f_{12}^{(2)}$	$f_{12}^{(3)}$	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$
0,125	0,9942	1,5336	-1,5485	0,5531	0,4572	-0,6473	1,5157	-1,5401
0,25	0,9729	3,8420	0,3394	0,5708	1,5328	-0,0641	3,7949	0,3201
0,5	0,9273	5,6105	4,4022	0,5348	2,5022	1,2396	5,5991	4,1770
1,0	0,8906	5,7719	7,0689	0,4895	2,8054	1,9817	6,0452	6,3255
2,0	0,7643	5,0198	5,6014	0,5348	2,5022	1,2396	5,5991	4,1770
4,0	0,4734	3,7102	1,8892	0,5708	1,5328	-0,0641	3,7949	0,3201
8,0	0,2377	2,7034	-0,8474	0,5531	0,4572	-0,6473	1,5157	-1,5401

2.4 FORÇAS COLOIDAIIS

A hidrodinâmica de suspensões coloidais avalia toda a faixa das forças individuais que atuam sobre e entre partículas pequenas (raio $a \sim 1\mu m$) imersas em um fluido Newtoniano incompressível. As forças relevantes incluem força Browniana, repulsão eletrostática, atração devido a forças dispersivas, atração e repulsão causada por polímeros solúveis, e forças viscosas que surgem em virtude do movimento relativo das partículas no fluido carreador. Neste capítulo, objetiva-se apresentar os principais efeitos associados às suspensões estudadas neste trabalho.

Os dois tipos mais familiares de interações entre partículas coloidais são as forças atrativas de van der Waals e a repulsão eletrostática, devido a cargas de mesmo sinal na superfície das partículas. Essas forças formam a base da teoria DLVO, que avalia a estabilidade de colóides, desenvolvida por trabalhos de Derjaguin e Landau e de Verwey e Overbeek, (Schenkel e Kitchener, 1960). As forças de repulsão tendem a estabilizar a suspensão dificultando a formação de agregados, enquanto as forças atrativas desestabilizam a suspensão, promovendo a agregação irreversível de partículas. Dessa forma, no presente contexto avaliam-se tanto os regimes nos quais as forças atrativas dominam, favorecendo uma rápida coagulação das partículas, quanto os regimes estáveis, em que as forças repulsivas dominam e não ocorre a formação de dímeros. Interações com essas características serão discutidas a seguir, com especial atenção aos aspectos em que esta possui interface com os fenômenos de agregação e dispersão hidrodinâmica de partículas.

2.4.1 Forças de van der Waals

Uma compreensão detalhada acerca das forças atrativas que existem entre partículas de mesmo material foi obtida por Israelachvili (1992). Esta atração entre duas partículas próximas é, geralmente, chamada de força de London-van der Waals. Essa força surge a partir de polarizações magnéticas e elétricas das partículas dando origem a um campo eletromagnético flutuante no fluido interveniente.

Essencialmente existem duas abordagens para a atração de London-van der Waals. Na abordagem clássica ou microscópica, devido a Hamaker (1937), a interação entre dois corpos macroscópicos é obtida pela adição de pares de todas as relevantes interações moleculares. As expressões obtidas dessa forma possuem uma parte que depende da geometria do problema e uma constante A , a constante de Hamaker, que está relacionada somente às propriedades das superfícies interagentes e o meio na qual as mesmas estão imersas. Tipicamente, A assume valores entre $10^{-21} J$ e $10^{-19} J$.

A consideração de adição das interações pode ser substituída pelo uso de uma abordagem macroscópica, sugerida por Lifshitz (1956), na qual a interação é obtida a partir de considerações acerca das propriedades eletromagnéticas do meio. Porém esta abordagem têm sérias dificuldades, principalmente, pelo fato de se restringir às aplicações para interações entre placas planas. Portanto, para as aplicações de interesse neste trabalho, é mais conveniente considerar as expressões que provém da análise de Hamaker (1937) com correções para avaliar o efeito de retardação eletromagnética.

Este trabalho visa o estudo de suspensões em que a força atrativa de van der Waals é significativa relativa à força da gravidade, tal que o fenômeno de agregação de partículas possa ser observado durante o processo de sedimentação de uma suspensão em baixos números de Reynolds. O potencial φ_a determinado por Hamaker (1937) para esferas diferentes em função da distância entre os centros das partículas adimensionalizada, $s = 2r/(a_\alpha + a_\beta)$, é expresso como

$$\varphi_a = \frac{-A}{6} \left\{ \frac{8\lambda}{(s^2 - 4)(1 + \lambda)^2} + \frac{8\lambda}{s^2(1 + \lambda)^2 - 4(1 - \lambda)^2} \right\} + \frac{-A}{6} \left\{ \ln \left[\frac{(s^2 - 4)(1 + \lambda)^2}{s^2(1 + \lambda)^2 - 4(1 - \lambda)^2} \right] \right\}, \quad (2.108)$$

em que λ é a razão de raios das partículas e $\xi = s - 2$ é a distância entre as partículas adimensional, para $\xi = 2h/(a_\alpha + a_\beta)$. Para o caso limite em que as partículas esféricas

encontram-se muito próximas, com $h \ll a_\beta$, em que a_β é o raio da menor partícula, a Eq. (2.108) reduz-se a

$$\varphi_a = -\frac{A\lambda}{3(1+\lambda)^2h}. \quad (2.109)$$

O cálculo de Hamaker ignora a retardação eletromagnética e desta maneira, é válida somente para separações menores que o comprimento de onda λ_ℓ de London ($\lambda_\ell \approx 0,1\mu m$). Uma vez que as forças de dispersão são de origem eletromagnética, as mesmas estão sujeitas a um efeito de retardação. A propagação através do meio causa uma redução na correlação entre as oscilações nos corpos que estão interagindo e, conseqüentemente uma menor interação. O efeito de retardação foi considerado por Schenkel e Kitchener (1960), o qual propõe as seguintes equações aproximadas que podem ser usadas no desenvolvimento de cálculos numéricos. Adotando-se ξ como sendo a distância entre as partículas adimensional, obtém-se

$$\varphi_a = -\frac{A}{12\xi(1+11,2h/\lambda_\ell)} \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}, \quad (2.110)$$

para $h/\lambda_\ell \ll \pi$; e

$$\varphi_a = -\frac{10^{-3}A}{\xi} \left\{ \frac{6,5}{h/\lambda_\ell} - \frac{0,305}{(h/\lambda_\ell)^2} + \frac{0,0057}{(h/\lambda_\ell)^3} \right\} \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}, \quad (2.111)$$

para $h/\lambda_\ell > \pi$.

Cabe observar que mesmo partículas não-coloidais estão suscetíveis à força atrativa de van der Waals, desde que estas estejam suficientemente próximas. Além disso, é importante notar que o potencial de van der Waals φ_a é adimensionalizado, em nossas simulações, pela constante de Hamaker A . Dessa forma, o potencial der Waals adimensionalizado pode ser escrito como $\varphi_A = \varphi_a/A$. Das Eqs. (2.110) e (3.16), o termo h/λ_ℓ não está bem definido. Dessa forma, apresenta-se como tal termo foi tratado em nossas simulações

$$\frac{h}{\lambda_\ell} = \left(\frac{2h}{a_\alpha + a_\beta} \right) \left(\frac{a_\alpha + a_\beta}{2\lambda_\ell} \right) = \xi \left(\frac{a_\alpha + a_\beta}{2\lambda_\ell} \right). \quad (2.112)$$

Como deseja-se investigar o comportamento de suspensões coloidais, em que o raio de uma partícula é $a_\alpha \sim 1\mu m$, adota-se que

$$\epsilon_R = \frac{a_\alpha}{\lambda_\ell} \sim \frac{1\mu m}{0,1\mu m} = 10 \quad (2.113)$$

em que ϵ_R é chamado de coeficiente de retardação. Por fim, obtém-se que

$$\frac{h}{\lambda_\ell} = \xi \frac{(1 + \lambda)}{2} \epsilon_R. \quad (2.114)$$

2.4.2 Repulsão Eletrostática

Assim como visto em §2.4.1, as forças dispersivas de van der Waals, que atuam entre partículas suspensas em um líquido quimicamente diferente, são inevitavelmente atrativas, dando origem a uma força que induz a separação de fases. Portanto, a manutenção de um estado disperso requer uma repulsão interpartícula, mais comumente alcançada por meio de forças eletrostáticas em dispersões aquosas ou pela adsorção de polímeros solúveis em meios aquosos ou oléicos (Russel et al., 1989). Seguindo Adler (1981b), aqui assume-se que a espessura da dupla camada elétrica é pequena, o que geralmente é o caso para partículas maiores que $1 \mu m$. Considera-se aqui o potencial eletrostático entre duas partículas com potenciais de superfície constantes, o que é escrito como

$$\varphi_e = \frac{\vartheta a_1 a_2}{4(a_1 + a_2)} \left\{ 2\psi_1 \psi_2 \ln \left[\frac{1 + e^{-\varrho h}}{1 - e^{-\varrho h}} \right] + (\psi_1^2 + \psi_2^2) \ln [1 - e^{-2\varrho h}] \right\}, \quad (2.115)$$

em que ϑ é a constante dielétrica do meio interveniente, ψ_α é o potencial de superfície da esfera α e ϱ^{-1} o comprimento de Debye-Hückel. E, considerando $a_1 \psi_1^2 \vartheta$ como uma escala típica para o potencial eletrostático (Zeichner e Schowalter, 1977), em que ϑ é a constante dielétrica do fluido carreador e ψ_1 é o potencial de superfície da esfera 1, pode-se obter

$$\varphi_E = \frac{\lambda}{4(1 + \lambda)} \left\{ 2\psi_{12} \ln \left[\frac{1 + e^{-\bar{\varrho}\xi}}{1 - e^{-\bar{\varrho}\xi}} \right] + (1 + \psi_{12}^2) \ln [1 - e^{-2\bar{\varrho}\xi}] \right\}, \quad (2.116)$$

em que $\psi_{12} = \psi_2/\psi_1$ é a razão de potenciais de superfície, $\bar{\varrho} = \varrho(a_1 + a_2)/2$ é o comprimento de Debye-Hückel adimensional e $\xi = s - 2$. Além disso, φ_E representa o potencial eletrostático em termos de quantidades adimensionais.

2.4.3 Movimento Browniano

O movimento caótico, ou Browniano, de partículas coloidais é um resultado direto das colisões entre as partículas suspensas e as moléculas de fluido ao seu redor. A trajetória de uma partícula coloidal que experimenta impulsos Brownianos é de natureza estocástica ou randômica e preserva a similaridade de escalas. Em outras palavras, se uma parte de uma dada trajetória Browniana é ampliada (o intervalo de tempo de amostragem é diminuído), a trajetória ampliada será quantitativamente similar à original. Assim, uma trajetória Browniana não é descrita matematicamente por uma curva monotônica, e a velocidade de uma partícula Browniana obtida a partir da análise de trajetórias não representa uma velocidade determinística da partícula, definida fisicamente. Por esta razão, a variância do deslocamento da partícula é geralmente utilizada para descrever o movimento de partículas Brownianas.

O movimento Browniano é um fenômeno puramente difusivo. A difusividade \mathcal{D} determina a eficiência de um movimento Browniano em produzir difusão. Em situações anisotrópicas esta mesma difusividade assume um caráter tensorial de segunda ordem. A difusividade é determinada pela força das agitações térmicas moleculares e pela facilidade na qual uma partícula pode se deslocar através do meio fluido, medidos respectivamente pela energia de Boltzmann $\kappa_B T$ e pela mobilidade $\mathcal{M} = \mathbf{I}/6\pi\eta a$ da partícula avaliada, em que κ_B é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}$) e T é a temperatura absoluta da mesma. Dessa forma, encontra-se a relação de Stokes-Einstein, dada por

$$\mathcal{D} = \kappa_B T \mathcal{M}. \quad (2.117)$$

O cálculo mais simples e direto para a difusividade foi realizado por Einstein (1956). Einstein considerou uma força potencial $-\nabla\mathcal{V}$ com energia potencial $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ agindo sobre uma partícula esférica em uma suspensão infinitamente diluída. Balanceando esta força permanente com o arrasto de Stokes $6\pi\eta a \mathbf{u}$ encontra-se que a velocidade da partícula é dada por $-\nabla\mathcal{V}/6\pi\eta a$. Associada a um campo de concentração de partículas $c(\mathbf{x}, t)$ existe um fluxo convectivo de partículas, dado por $\mathcal{J}_c = -c\nabla\mathcal{V}/6\pi\eta a$, e, no equilíbrio termodinâmico, a concentração de partículas c pode ser representada por uma distribuição de Maxwell-Boltzmann $c(\mathbf{x}) = c_0 \exp(-\mathcal{V}(\mathbf{x})/\kappa_B T)$. Nesse equilíbrio, um fluxo difusivo $\mathcal{J}_d = -\mathcal{D}\nabla c$ balanceia o fluxo de partículas \mathcal{J}_c . Assim deduz-se que o valor do coeficiente de difusão Browniana ordinário de Stokes-Einstein para uma partícula isolada é dado por

$$\mathcal{D}_o = \frac{\kappa_B T}{6\pi\eta a}. \quad (2.118)$$

Quando as interações hidrodinâmicas tornam-se relevantes nessa análise, o processo difusivo pode ser caracterizado como uma difusão anômala ou não-Browniana, que é função da fração volumétrica de partículas na suspensão ϕ . Matematicamente, temos

$$\mathcal{D} = D_o \mathbf{I} + \mathcal{D}^c(\phi) + \mathcal{O}(\phi^2), \quad (2.119)$$

em que $D_o \mathbf{I}$ é o termo difusivo associado às flutuações de velocidade geradas devido à difusão Browniana. O termo de difusão anômala \mathcal{D}^c , por sua vez, avalia as flutuações de velocidade associadas às interações hidrodinâmicas das partículas, também chamada de difusão coletiva. Quando as partículas são magnéticas, o coeficiente de difusão \mathcal{D} possui mais um termo de $\mathcal{O}(\phi)$ associado às interações magnéticas das partículas.

2.4.4 Força Browniana

Nesta seção, descreve-se a metodologia utilizada para resolver a equação diferencial estocástica que governa o movimento de uma partícula isolada em suspensões coloidais. Note que a força Browniana independe da concentração volumétrica de partículas, ou seja, independe da presença de outras partículas na suspensão. Para o estudo de sistemas que possuem termos associados a forças randômicas utiliza-se a equação de Langevin que representa o balanço de quantidade de movimento para a partícula.

A equação de Langevin é uma equação de balanço de forças correspondente ao postulado da segunda lei de Newton para uma partícula em uma suspensão, dada por Russel et al. (1989)

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \zeta \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{f}_r(t)}{m}, \quad (2.120)$$

em que $\zeta = 6\pi\eta a/m$ é o inverso do tempo de relaxação da partícula avaliada e m é a massa da partícula. Os termos da Eq. (2.120) representam, respectivamente, as contribuições devido à inércia, o arrasto viscoso e a força randômica devido às flutuações Brownianas. A formulação separa, implicitamente, as forças que as moléculas do fluido exercem sobre a partícula com rápidas flutuações $\mathbf{f}_r(t)$, em escalas de tempo correspondentes aos movimentos moleculares, do arrasto viscoso, que é um processo

mais lento (Russel et al., 1989). A solução de (2.120) é obtida pelo método do fator integrante

$$\mathbf{u}(t) = \frac{e^{-\zeta t}}{m} \int_0^t e^{\zeta\alpha} \mathbf{f}_r(\alpha) d\alpha. \quad (2.121)$$

Para determinação da difusividade e da correlação de velocidades considera-se o termo de força randômica $\mathbf{f}_r(t)$ como sendo um ruído branco estacionário. Isso significa que as forças Brownianas são consideradas randômicas em direção e magnitude (i.e. isotropia das flutuações) e não-correlacionadas na escala do movimento da partícula. Matematicamente, esta condição pode ser expressa na forma

$$\begin{cases} \langle \mathbf{f}_r(t) \rangle = \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{f}_r(t) \mathbf{f}_r(t') \rangle = \mathbf{F} \delta(t - t'). \end{cases} \quad (2.122)$$

Dessa maneira, tomando-se uma média sobre a Eq. (2.121), obtém-se

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = \frac{e^{-\zeta t}}{m} \int_0^t e^{\zeta\alpha} \langle \mathbf{f}_r(\alpha) \rangle d\alpha. \quad (2.123)$$

Conseqüentemente, a autocorrelação de velocidades para uma partícula em movimento estocástico é dada por

$$\langle \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t') \rangle = \frac{e^{-2\zeta t}}{m^2} \int_0^t \int_0^{t'} e^{\zeta\alpha} e^{\zeta\alpha'} \langle \mathbf{f}_r(\alpha) \mathbf{f}_r(\alpha') \rangle d\alpha d\alpha', \quad (2.124)$$

em que $t - t'$ é um intervalo no qual $\mathbf{f}_r(t)$ sofre muitas flutuações, mas é curto o suficiente para que $\mathbf{u}(t)$ não varie de forma significativa, o que representa a condição de regime de Stokes quasi-permanente. Usando a condição de ruído branco dada pelas equações em (2.122), obtém-se

$$\mathbf{R}(t - t') = \langle \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t') \rangle = e^{-\zeta(t-t')} \frac{\mathbf{F}}{12 m \pi \eta a}, \quad (2.125)$$

em que \mathbf{F} é a intensidade da força Browniana e $\mathbf{R}(t - t')$ é a função de autocorrelação das velocidades. Note que a autocorrelação depende apenas de $t - t'$, uma característica de processos estacionários, também conhecida como *falta de memória*.

A partir do princípio de equipartição de energia sabe-se que a energia cinética da partícula é dividida igualmente entre os três modos de translação da partícula (Russel et al., 1989), o que é dado por

$$\frac{m}{2} \langle \mathbf{u}(t) \mathbf{u}(t') \rangle = \frac{\kappa_B T}{2} \boldsymbol{\delta}. \quad (2.126)$$

Comparando-se as equações (2.125) e (2.126) para o intervalo $t - t' = 0$, determina-se que $\mathbf{F} = 12 \pi \eta a \kappa_B T \boldsymbol{\delta}$, que relaciona a intensidade da força Browniana com a força de fricção que dissipa a energia das flutuações. Ambas se originam da interação entre a partícula e o fluido carreador, mas diferem substancialmente nas escalas de tempo.

Vale a pena notar ainda que, enquanto a força peso escala com a^3 , a força Browniana escala com a . Isto indica que agregados maiores são inteiramente dominados pela ação da sedimentação diferencial. Já os menores agregados ainda respondem às flutuações Brownianas.

Tomando-se o traço da Eq. (2.122), obtém-se o Teorema da Flutuação-Dissipação (McQuarrie, 1976)

$$\langle \mathbf{f}_r(t) \cdot \mathbf{f}_r(t') \rangle = 36 \pi \eta a \kappa_B T \delta(t - t') = (6 \pi \eta a)(6 \kappa_B T) \delta(t - t'), \quad (2.127)$$

em que o termo $6 \pi \eta a$ é responsável pela dissipação de energia do sistema, enquanto o termo $6 \kappa_B T$, associado à agitação térmica do fluido solvente, induz às flutuações de velocidade na partícula. Assim, pode-se determinar o vetor de força randômica $\mathbf{f}_r(t)$

$$\mathbf{f}_r(t) = \sqrt{\frac{(6 \pi \eta a)(6 \kappa_B T)}{\delta \tau}} \mathbf{r}_n, \quad (2.128)$$

em que \mathbf{r}_n é o vetor randômico que apresenta uma distribuição uniforme [-1:1] e $\delta \tau$ é um tempo associado ao impulso do movimento Browniano. Assim, a equação de Langevin (2.120) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \zeta \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sqrt{\frac{(6 \pi \eta a)(6 \kappa_B T)}{\delta \tau}} \mathbf{r}_n. \quad (2.129)$$

Por fim, pode-se obter agora uma expressão para a difusividade \mathcal{D} para uma partícula coloidal isolada. A taxa de variação da variância da posição segue da função de auto-correlação de velocidades, dada por

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t) \rangle = 2 \int_0^t \mathbf{R}(\tau) d\tau, \quad (2.130)$$

ou seja, o coeficiente de difusão é dado por

$$\langle \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t) \rangle = 2\mathcal{D}\delta\tau. \quad (2.131)$$

Tomando-se o traço da Eq. (2.131) e sabendo-se que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_o\mathbf{I}$ para uma partícula que não interage hidrodinamicamente (Russel et al., 1989), obtém-se

$$\langle \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \rangle = 2\mathcal{D}_o(\mathbf{I} : \mathbf{I})\delta\tau = 6\mathcal{D}_o\delta\tau. \quad (2.132)$$

3 AGREGAÇÃO E DIFUSÃO HIDRODINÂMICA DE PARTÍCULAS MAGNÉTICAS INTERAGINDO HIDRODINAMICAMENTE

3.1 Formulação Teórica

Nesta análise, deseja-se investigar o comportamento dinâmico de suspensões diluídas compostas por partículas magnetizadas previamente. Na Fig. (3.1), apresenta-se a evolução típica de uma suspensão diluída magnética. Nota-se que os dímeros inicialmente formados evoluem para longas cadeias de partículas, em virtude da magnetização prévia das partículas magnéticas. Essa visualização foi realizada com esferas de aço com raio $0,7 \pm 0,1 \text{ mm}$ e densidade $7,58 \pm 0,05 \text{ g/cm}^3$. O fluido ambiente utilizado foi o óleo de silicone com viscosidade $97,7 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ e densidade de 977 kg/m^3 . As partículas foram magnetizadas por contato com ímas permanentes.

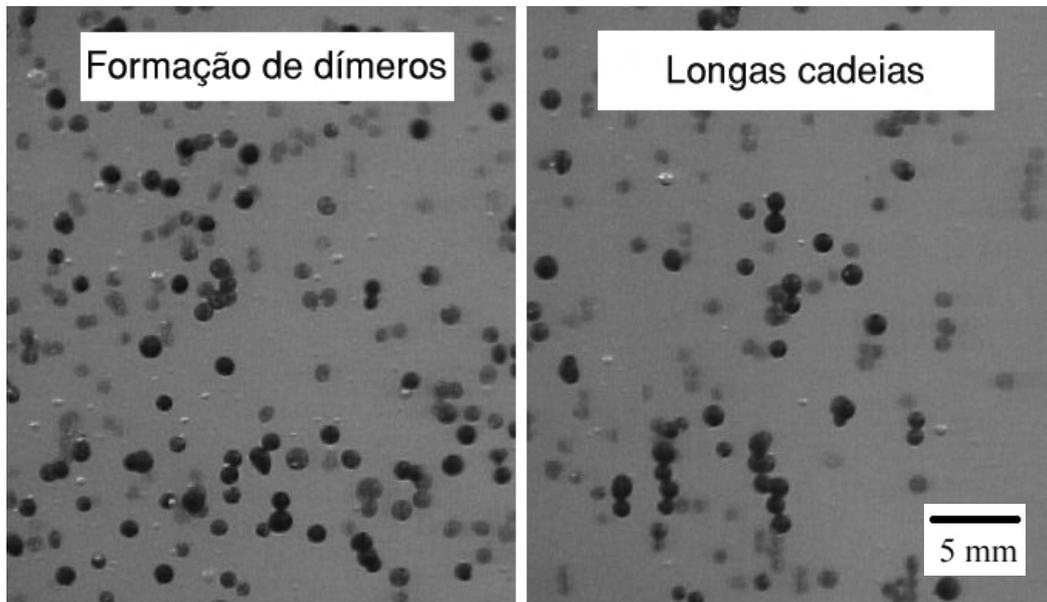


Figura 3.1: Evolução típica de uma suspensão magnética diluída.

Para investigar o fenômeno de agregação de partículas magnéticas, considere uma suspensão diluída composta por duas espécies de partículas rígidas lisas magnéticas de raios a_1 e a_2 , massas específicas ρ_1 e ρ_2 e magnetizações $\mathbf{M}_1 = M_1 \hat{\mathbf{d}}_1$ e $\mathbf{M}_2 = M_2 \hat{\mathbf{d}}_2$ suspensas em um fluido Newtoniano de massa específica ρ e viscosidade η . Aqui, os efeitos de inércia são considerados pequenos, assumindo um pequeno número de

Reynolds de partícula. Assim, as equações de Stokes podem ser aplicadas na escala do movimento da partícula. A suspensão é submetida a um movimento de sedimentação diferencial tal que a força gravitacional por unidade de massa é dada por $\mathbf{g} = -g\hat{e}_2$. A Fig. (3.2) ilustra o esquema da configuração de pares de partículas.

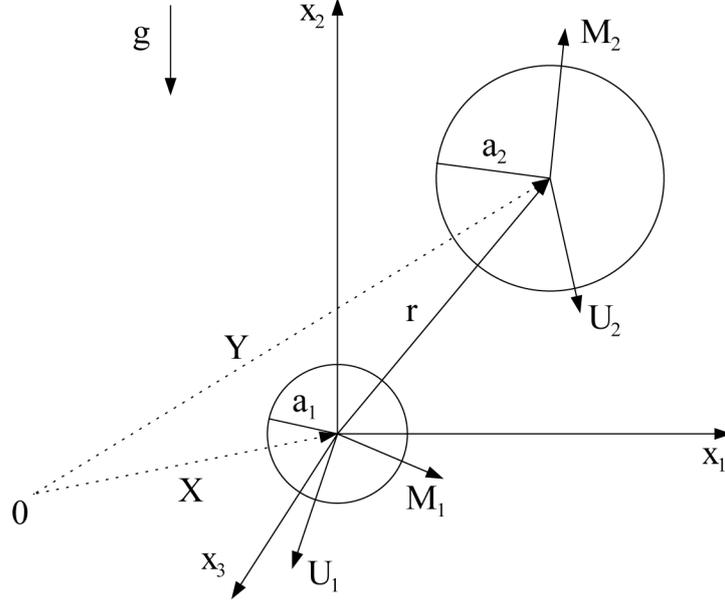


Figura 3.2: Esquema do sistema de coordenadas utilizado para o movimento relativo em uma suspensão diluída bidispersa de partículas magnéticas.

A colisão de partículas é induzida pela gravidade devido aos raios e massas específicas diferentes, o que é caracterizado pela razão de raios e pela razão de massas específicas, respectivamente,

$$\lambda = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_1 - \rho}. \quad (3.1)$$

Os centros das partículas 1 e 2 são localizados em \mathbf{X} e \mathbf{Y} , respectivamente, em que $\mathbf{r} = \mathbf{Y} - \mathbf{X} = r\hat{\mathbf{r}}$ representa o vetor posição relativa alinhado com a direção da linha de centro que une as duas partículas. Além disso, a distância adimensional entre as partículas é denotada por $s = 2r/(a_1 + a_2)$. A velocidade de sedimentação de uma partícula isolada da espécie α corresponde à velocidade terminal de Stokes

$$\mathbf{U}_\alpha^{(0)} = \frac{2}{9\eta} a_\alpha^2 (\rho_\alpha - \rho) \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{U}_2^{(0)} = \gamma\lambda^2\mathbf{U}_1^{(0)}$ e a velocidade relativa é dada por $\mathbf{U}_{12}^{(0)} = \mathbf{U}_2^{(0)} - \mathbf{U}_1^{(0)}$. O valor absoluto da velocidade relativa das partículas isoladas $U_{12}^{(0)}$ será usada no presente

contexto como uma escala de velocidade do movimento. Neste trabalho, a atenção ficará restrita às dispersões em que o número de Péclet \mathcal{P}_{12} é grande, i.e. as flutuações térmicas Brownianas não são relevantes para o movimento da partícula. Essa condição é representada por

$$\mathcal{P}_{12} = \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{U_{12}^{(0)}}{\mathcal{D}_{12}} \gg 1, \quad (3.3)$$

em que $\mathcal{D}_{12} = (k_B T / 6\pi\eta)(1/a_1 + 1/a_2)$ denota a difusividade relativa devido ao movimento Browniano.

3.2 Formulação mobilidade

Sendo as equações de Stokes lineares e quasi-permanentes, a velocidade de cada esfera depende somente da localização relativa instantânea das duas esferas, e é linear em relação às forças aplicadas, \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 . Assim, as velocidades de translação \mathbf{U}_1 e \mathbf{U}_2 são determinadas pelas seguintes relações de mobilidade (Kim e Karrila, 2005)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11}\mathbf{F}_1 + \mathbf{b}_{12}\mathbf{F}_2 \\ \mathbf{b}_{21}\mathbf{F}_1 + \mathbf{b}_{22}\mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

em que os tensores de segunda ordem $\mathbf{b}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) são definidos como sendo

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta} = \frac{1}{3\pi\mu(a_\alpha + a_\beta)} \left[\mathcal{A}_{\alpha\beta} \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right) + \mathcal{B}_{\alpha\beta} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right) \right]. \quad (3.5)$$

As funções de mobilidade para duas esferas $\mathcal{A}_{\alpha\beta}(s, \lambda)$ e $\mathcal{B}_{\alpha\beta}(s, \lambda)$ dependem somente de λ e da distância adimensional s , cujos valores numéricos são disponibilizados para as configuração de curto e longo alcances (Jeffrey e Onishi, 1984; Kim e Karrila, 2005). Agindo nas partículas, a força \mathbf{F}_α inclui o efeito líquido da gravidade, a força eletrostática e a força de interação magnética, sendo expressa como

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{4}{3}\pi a_\alpha^3 (\rho_\alpha - \rho) \mathbf{g} + (2\alpha - 3)(\nabla\varphi_m + \nabla\varphi_a + \nabla\varphi_e), \quad (3.6)$$

para $\alpha = 1, 2$, em que φ_m , φ_a e φ_e são as formas dimensionais para os potenciais magnético, de van der Waals e eletrostático, respectivamente.

3.2.1 Trajetória relativa de partículas

Considerando o balanço entre a força hidrodinâmica e a força aplicada \mathbf{F}_α , pode-se determinar a equação governante para o movimento relativo, i.e. a evolução temporal do vetor \mathbf{s} , o que é dada pela equação diferencial $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{U}_{12} \equiv \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1$. E, substituindo a expressão para \mathbf{F}_α nas relações de mobilidade, dadas na §(3.2), pode-se obter uma expressão para a velocidade relativa entre as duas partículas \mathbf{U}_{12} , dada em termos adimensionais por

$$\mathbf{U}_{12} = \hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{M}^g - (\mathcal{Q}_M \nabla \varphi_M + \mathcal{Q}_A \nabla \varphi_A + \mathcal{Q}_E \nabla \varphi_E) \cdot \mathbf{M}^i \quad (3.7)$$

com

$$\mathbf{M}^g = \left[\frac{\mathbf{s}\mathbf{s}}{s^2} \mathcal{L} + \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}}{s^2} \right) \mathcal{M} \right] \quad \text{and} \quad \mathbf{M}^i = \left[\frac{\mathbf{s}\mathbf{s}}{s^2} \mathcal{G} + \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}}{s^2} \right) \mathcal{H} \right], \quad (3.8)$$

em que \mathbf{M}^g e \mathbf{M}^i são dois tensores mobilidade de segunda ordem que operam as forças gravitacionais e as forças interpartícula, respectivamente, e $\hat{\mathbf{g}}$ é o vetor unitário na direção da aceleração gravitacional. Além disso, \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{G} e \mathcal{H} são funções escalares de s dadas por (Batchelor and Green, 1972; Jeffrey e Onishi, 1984)

$$\mathcal{L}(s) = \frac{\gamma \lambda^2 \mathcal{A}_{22} - \mathcal{A}_{11}}{\gamma \lambda^2 - 1} + \frac{2(1 - \gamma \lambda^3) \mathcal{A}_{12}}{(\gamma \lambda^2 - 1)(1 + \lambda)}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{M}(s) = \frac{\gamma \lambda^2 \mathcal{B}_{22} - \mathcal{B}_{11}}{\gamma \lambda^2 - 1} + \frac{2(1 - \gamma \lambda^3) \mathcal{B}_{12}}{(\gamma \lambda^2 - 1)(1 + \lambda)}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{G}(s) = \frac{\lambda \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22}}{(1 + \lambda)} - \frac{4\lambda \mathcal{A}_{12}}{(1 + \lambda)^2}, \quad (3.11)$$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\lambda \mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{22}}{(1 + \lambda)} - \frac{4\lambda \mathcal{B}_{12}}{(1 + \lambda)^2}. \quad (3.12)$$

Os dois termos do lado direito da Eq. (3.7) representam as contribuições da gravidade e das forças interpartícula para o movimento relativo da partícula, respectivamente. Sua importância relativa pode ser medida pelos parâmetros adimensionais físicos

$$\mathcal{Q}_M = \frac{\mu_0 M_1^2 V_1}{6\pi\eta a_1 a_2 U_{12}^{(0)}}, \quad \mathcal{Q}_A = \frac{A}{6\pi\eta a_1 a_2 U_{12}^{(0)}} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_E = \frac{\epsilon a_1 \psi^2}{6\pi\eta a_1 a_2 U_{12}^{(0)}}, \quad (3.13)$$

que podem ser interpretados como sendo a razão entre o trabalho feito pela força interpartícula (respectivamente, as forças magnética, de van der Waals e de repulsão

eletrostática) e aquela feita pelas forças viscosas. Além disso, introduz-se nos cálculos presentes um parâmetro α_m que nos permite desligar as componentes dos tensores mobilidade M^g e M^i que não se encontram na diagonal principal, o que retorna o problema para o caso de duas partículas sedimentando, em que a única contribuição hidrodinâmica deve-se ao arrasto de Stokes. Sob essas condições, $\alpha_m = 0$. Em contraste, se todas as componentes do tensor mobilidade são consideradas, $\alpha_m = 1$ e a influência das interações hidrodinâmicas viscosas podem ser determinadas.

3.2.2 Forças interpartícula

As expressões para os potenciais de interação devido às forças interpartícula serão aquelas enunciadas nas §2.2.5 e 2.4, em suas formas adimensionais.

Potencial de interação magnética de longo alcance:

$$\varphi_M = \frac{M_{12}}{3s^3} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^3 \left[\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2 - 3(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{d}}_2 \cdot \hat{\mathbf{s}}) \right], \quad (3.14)$$

Atração de van der Waals de curto alcance:

$$\varphi_A = -\frac{1}{12\xi(1+11,2h/\lambda_\ell)} \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}, \quad (3.15)$$

para $h/\lambda_\ell \ll \pi$; e

$$\varphi_A = -\frac{10^{-3}}{\xi} \left\{ \frac{6,5}{h/\lambda_\ell} - \frac{0,305}{(h/\lambda_\ell)^2} + \frac{0,0057}{(h/\lambda_\ell)^3} \right\} \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}, \quad (3.16)$$

para $h/\lambda_\ell > \pi$.

Repulsão eletrostática de curto alcance:

$$\varphi_E = \frac{\lambda}{4(1+\lambda)} \left\{ 2\psi_{12} \ln \left[\frac{1+e^{-\bar{\alpha}\xi}}{1-e^{-\bar{\alpha}\xi}} \right] + (1+\psi_{12}^2) \ln [1-e^{-2\bar{\alpha}\xi}] \right\}. \quad (3.17)$$

3.3 Resultados numéricos

A fim de realizar a integração do sistema de equações diferenciais que governam o movimento relativo, Eq. (3.7), é usado um método de Runge-Kutta de quarta ordem, ou seja, um método preditor-corretor com quatro passos de cálculo da função velocidade U_{12} em cada passo de tempo. Seria importante notar que as formas assintóticas das funções mobilidade para esferas totalmente separadas (Kim e Karrila, 2005) foram usadas para $s > 2,3$. De outro lado, as mobilidades de curto alcance dadas pelos mesmos autores foi considerada.

A fim de se evitar a interpenetração das partículas nas simulações, deve-se considerar as múltiplas escalas de tempo envolvidas nessas simulações. Utiliza-se, então, um passo de tempo adaptativo que leva em conta a distância relativa das partículas e a intensidade da força interpartícula. Para se estimar os menores passos de tempo, considera-se o balanço entre a lubrificação e as forças atrativas interpartícula próximo ao contato. De acordo com Kim e Karrila (Kim e Karrila, 2005), as escalas típicas para a lubrificação e para a força de interação magnética são dadas, respectivamente, por $6\pi\eta\bar{a}^2U_\ell/h$ e $\mu_0M^2V\bar{a}/h^2$. Aqui, U_ℓ é uma escala típica de velocidade associada com a lubrificação e $\bar{a} = (a_1 + a_2)/2$ é uma escala de comprimento típica do movimento relativo. Portanto, obtém-se o seguinte balanço de forças na região próxima ao contato entre partículas

$$\frac{6\pi\eta\bar{a}^2U_\ell}{h} \sim \frac{\mu_0M^2V\bar{a}}{h^2}. \quad (3.18)$$

Considerando-se $t_\ell \sim \bar{a}/U_\ell$ uma escala de tempo associada com a lubrificação e adimensionalizando t_ℓ usando uma escala típica associada à sedimentação $t_s \sim \bar{a}/U_{12}^{(0)}$, obtém-se o passo de tempo típico usado nas simulações numéricas

$$\delta t = 0,1 \min \left\{ 10^{-2}, \xi^2 \mathcal{Q}_M^{-1} \right\}. \quad (3.19)$$

Devido à reversibilidade das equações de Stokes sabe-se que a diferença entre os deslocamentos laterais inicial e final de uma partícula teste, $\Delta Y_k = |Y_k^{+\infty} - Y_k^{-\infty}|$, na ausência das forças interpartícula é nulo. Nesse sentido, utilizando-se diferentes configurações iniciais, determinou-se que o erro máximo que implica desta integração numérica são da ordem de $\Delta Y_k \sim \mathcal{O}(10^{-3})$.

3.3.1 Trajetórias relativas típicas

Nesse ponto, apresentam-se algumas trajetórias relativas típicas. A direção da gravidade é indicada em todas as figuras pelo vetor \mathbf{g} . O círculo plotado com as trajetórias relativas representa a superfície de colisão, cujo raio é a soma dos raios da partícula, ou seja $a_1 + a_2$. Como já foi visto, a força magnética, dependendo da orientação dos vetores magnetização, pode ser tanto atrativa quanto repulsiva.

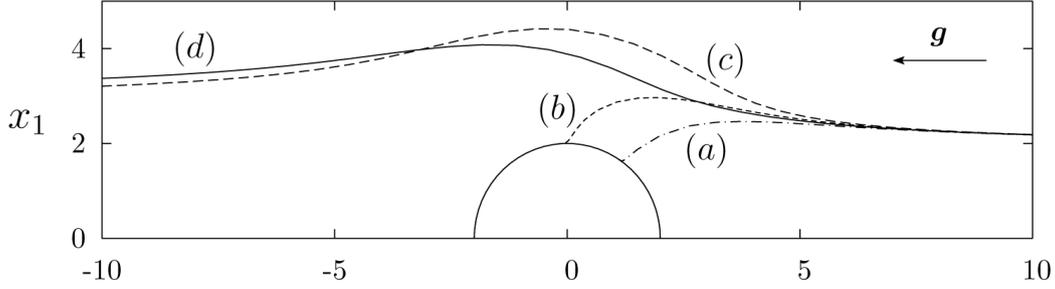


Figura 3.3: Efeito da orientação da magnetização nas trajetórias relativas para $\mathcal{Q}_M = 10^2$, $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 2,0$ e $M_{12} = 1,0$. (a) $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 0)$; (b) $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$; (c) $\hat{\mathbf{d}}_1 = -\hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 0)$; e (d) $\hat{\mathbf{d}}_1 = -\hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$.

Os resultados apresentados na Fig. (3.3) da simulação mostram o efeito da orientação das magnetizações nos encontros entre as duas partículas para diferentes configurações. Nota-se que o caso (a) $\mathcal{Q}_M = 10^2$, $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 2,0$, $M_{12} = 0,5$ e $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 0)$ é a situação crítica para a formação de dímeros. Nesta configuração o ponto de colisão ocorre em um ângulo menor (partindo do eixo das abcissas) sobre a superfície da partícula. Isso significa trajetórias mais curtas antes da colisão, implicando em menores tempos até que as partículas colidam. Seria importante notar que existe uma trajetória limite $x_k = x_k^c$ com $k = 1, 3$ que é a interface definida entre as trajetórias fechadas e abertas.

Em adição, a Fig. (3.4) apresenta os resultados da influência do potencial de interação magnética \mathcal{Q}_M sobre as interações hidrodinâmicas e sobre a gravidade.

Por sua vez, a Fig. (3.4) mostra, ainda, que para a condição $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 1,5$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$, com o valor $\mathcal{Q}_M = 10$ as trajetórias mesmo não sendo agregativas são fortemente irreversíveis como pode ser identificada pelos deslocamentos transversais não-nulos, resultando num processo de difusão anômala no qual as interações de pares dominam. Em contraste, para maiores valores de \mathcal{Q}_M (ou seja, $\mathcal{Q}_M = 10^2$) a trajetória relativa é agregativa, enquanto que para valores pequenos de \mathcal{Q}_M (i.e. $\mathcal{Q}_M = 1$) as trajetórias relativas são reversíveis.

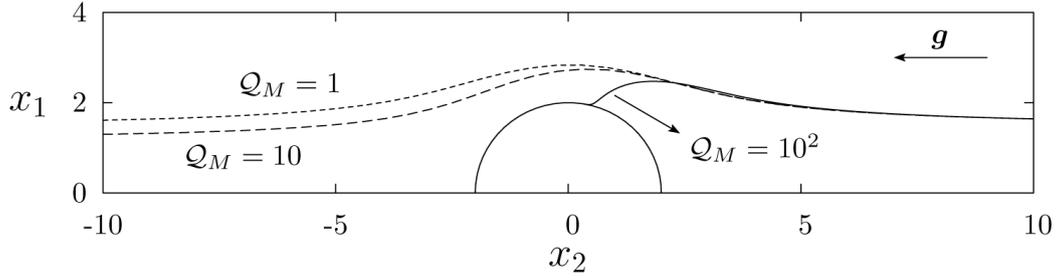


Figura 3.4: Trajetórias relativas para o par de partículas interagindo hidrodinamicamente. Valores dos parâmetros: $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 1,5$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$, $\alpha_m = 1,0$ e $Q_E = 0$.

Da Fig. (3.5) pode ser avaliada a influência da força eletrostática repulsiva no movimento relativo das partículas magnéticas. Para $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 2,0$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$ e $Q_M = 50$, pode ser visto que, mesmo em uma condição de extrema influência da interação magnética como aquela vista na Fig. (3.5), as interações hidrodinâmicas (IH) foram as responsáveis por evitar a agregação partícula-partícula.

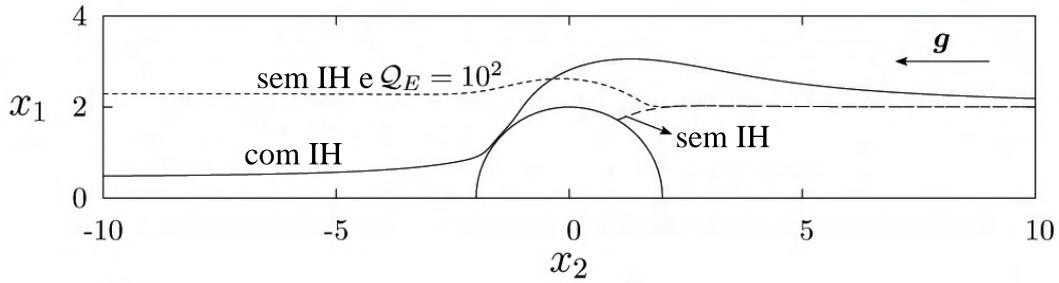


Figura 3.5: Trajetórias relativas das partículas interagentes, avaliando a presença da repulsão eletrostática. Valores dos parâmetros: $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $x_1^{-\infty} = 2,0$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 0, 0)$ e $Q_M = 50$.

Esse resultado indica que, para compreender o fenômeno da agregação de partículas magnéticas, as interações hidrodinâmicas não podem ser desconsideradas. Em adição, foi incluída uma trajetória que experimenta, próxima ao contato, o efeito da repulsão eletrostática. Obviamente, como a força magnética é uma interação de longo alcance, a mesma é dominada pelo mecanismo repulsivo de curto alcance. O quase contato que aparece na trajetória apresentada pela linha sólida na Fig. (3.5) corresponde ao regime em que a força de lubrificação evita a agregação de partículas. A trajetória parece ser agregativa, entretanto existe um pequeno *gap* de lubrificação de $2 \times 10^{-2}\bar{a}$.

3.3.2 Eficiência de colisão

A taxa de colisão \mathcal{J}_{12} é o fluxo de pares de partículas que atravessam a superfície de colisão $a_1 + a_2$ (Davis, 1984; Zinchenko e Davis, 1994b) dado por

$$\mathcal{J}_{12} = -n_1 n_2 \int_{r=a_1+a_2} p(\mathbf{r}) \mathbf{U}_{12} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (3.20)$$

em que n_α é o número de densidade da partícula α , \mathbf{n} denota o vetor unitário normal à superfície de colisão e $p(\mathbf{r})$ é a função distribuição de pares que satisfaz, no regime diluído, a equação de Fokker-Planck quasi-permanente $\nabla \cdot (p(\mathbf{r})\mathbf{U}_{12}) = 0$. Na primeira condição de contorno, assume-se que as esferas em colisão se agregam após o contato (não ocorrem separações subsequentes) e a ausência de correlações de longo alcance satisfazem a condição de contorno exterior. Matematicamente, essas condições são expressas como

$$p(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{para} \quad r = a_1 + a_2 \quad \text{e} \quad p(\mathbf{r}) \rightarrow 1 \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

A integral na Eq. (3.20) é tomada sobre a superfície que envolve o volume ocupado por todas as trajetórias que se originam em $r = \infty$ e terminam com as partículas entrando em contato. A seção transversal deste volume em $r = \infty$ é um círculo com raio x_k^c ($k = 1, 3$), e, uma vez que, $p = 1$ e $\mathbf{U}_{12} = \mathbf{U}_{12}^{(0)}$ em $r = \infty$, a taxa de formação de dímeros é então

$$\mathcal{J}_{12} = n_1 n_2 U_{12}^o \pi (a_1 + a_2)^2 E_c, \quad (3.22)$$

em que $E_c = x_k^c / (a_1 + a_2)^2$ é a eficiência de colisão. O problema aqui é reduzido àquele de se determinar o parâmetro x_k^c o qual representa o maior deslocamento horizontal, em relação ao eixo vertical de simetria (\mathbf{g} está na direção vertical), possível para que duas partículas totalmente separadas eventualmente colidam.

Esta dificuldade é superada utilizando um procedimento numérico iterativo. O esquema de atualização é iniciado quando uma primeira estimativa de x_k^c é dada. A primeira estimativa precisa ser não-agregativa. Denominemos essa trajetória como $x_c^0 = x_{nagg}$. No segundo passo, x_c^0 é diminuído por um decremento Δx^c para um passo intermediário, e a integração numérica da Eq. (3.7) é realizada novamente. Agora, se a separação mínima (*cut-off*) é alcançada h_{cut} , considera-se a condição de agregação de partícula. Esse procedimento é repetido até que se obtenha uma trajetória agregativa. Nesse passo, considere essa trajetória como sendo x_{agg} . No fim deste esquema de atualização, a estimativa para o próximo valor é $x_c^{n+1} = (x_{agg}^n + x_{nagg}^n) / 2$, em que os subscritos $n + 1$ e n representam os passos próximo e o atual, respectivamente. Para a nova condição

x_c^{n+1} realiza-se a integração numérica definindo se a trajetória é agregativa ou não. Então, um novo intervalo de busca é definido. Tal procedimento é repetido até que o resíduo r^{n+1} alcance o critério de convergência $r^{n+1} \leq 10^{-6}$. O vetor resíduo é definido como sendo $r^{n+1} = (x_c^{n+1} - x_c^n)/x_c^n$.

A Fig. (3.6) apresenta os resultados para a eficiência de colisão E_c do par de partículas magnéticas interagindo para mostrar a influência do parâmetro de polidispersidade λ no processo de agregação. Neste caso, as interações hidrodinâmicas estão presentes.

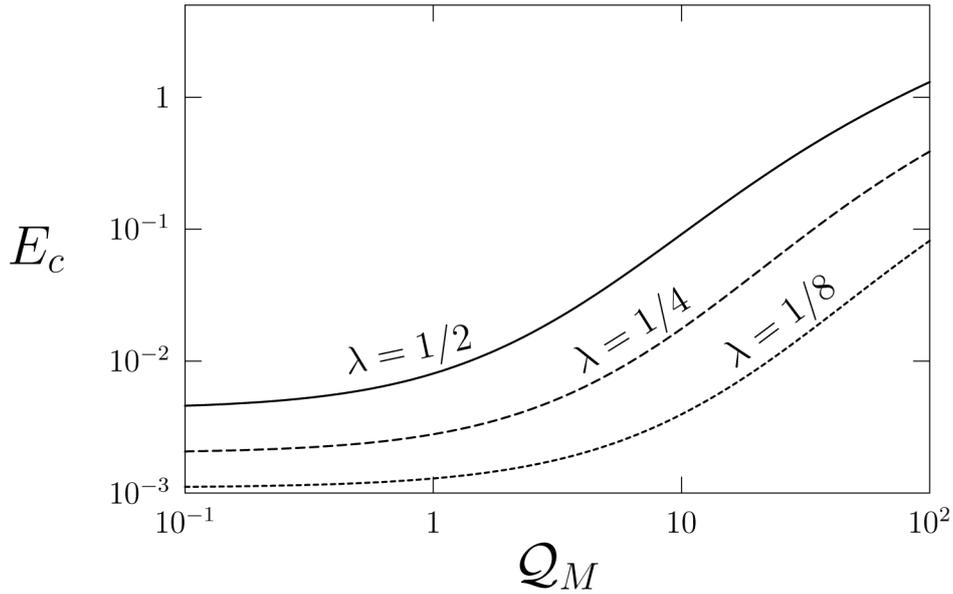


Figura 3.6: Eficiência de colisão para o par de partículas magnéticas interagindo como função de Q_M . Valores dos parâmetros: $Q_E = 0$, $\gamma = 1,0$, $M_{12} = 1,0$ e $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$.

A notável diferença entre os valores de E_c para diferentes λ foi primeiro observada por Adler (1981a) para agregação em escoamentos cisalhantes e por Davis (1984) em suspensões em sedimentação, para suspensões não-magnéticas submetidas somente às forças de van der Waals. Na Fig. (3.6), para $Q_M = 10^{-1}$, a eficiência de colisão para $\lambda = 1/2$ é cerca de oito vezes maior que o valor correspondente de E_c para $\lambda = 1/8$. Este resultado mostra que a eficiência de colisão para partículas magnéticas é mais dependente em relação às mudanças em λ que aquelas não-magnéticas, em que somente atuam as forças de van der Waals. De acordo com Davis (1984), para a configuração de partículas não-magnéticas similar a esta, a eficiência de colisão para $\lambda = 1/2$ é cerca de três vezes maior que E_c para $\lambda = 1/8$.

Em uma suspensão, quando a força repulsiva domina, as partículas permanecem dispersas, e a suspensão é dita estável. Nas situações em que as forças atrativas dominam,

a suspensão é instável e as partículas floculam (Davis, 1984). Como observado previamente, tanto a repulsão eletrostática quanto as interações hidrodinâmicas viscosas podem ser consideradas forças repulsivas a fim de promover a estabilização da suspensão, evitando a formação de dímeros. De acordo com a Fig. (3.7), esse efeito pode ser significativo.

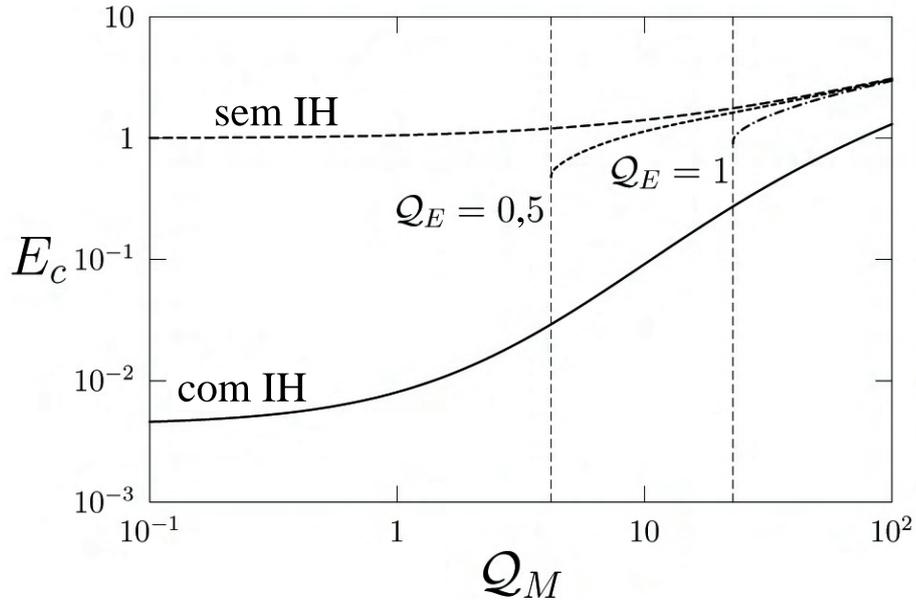


Figura 3.7: Influência das interações hidrodinâmicas na eficiência de colisão de partículas magnéticas. Valores dos parâmetros: $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$.

Aqui pode-se notar que a eficiência de colisão é drasticamente reduzida se as interações hidrodinâmicas (IH) são consideradas em nossa análise. Para $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $M_{12} = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$ e considerando as interações hidrodinâmicas, pode-se reduzir a eficiência de colisão para $Q_M = 10^{-1}$ em cerca de cem vezes, comparando com o caso em que as IH são desprezadas. Para maiores valores de Q_M a análise é similar, porém a diferença é menos pronunciada. Além disso, é visto da Fig. (3.7) a influência da repulsão eletrostática sobre E_c . As linhas tracejadas verticais correspondem aos valores críticos de Q_M nos quais nenhuma agregação ocorre. Da Fig. (3.7) observa-se que as interações hidrodinâmicas aparecem como um mecanismo fundamental para evitar a formação de agregados, em contraste com trabalhos recentes (Castro et al., 2005a,b; Aoshima e Satoh, 2005), que desprezaram a influência dessa importante contribuição na dinâmica de agregação de partículas. Esta descoberta é de elevado interesse para estudos em processos de separação magnética, em que partículas não-magnéticas são capturadas usando carreadores magnéticos (Stratulat et al., 2000), ou em processos ambientais que utilizam partículas magnéticas para a recuperação de áreas atingidas

por derramamento de óleos pesados (Sobral e Cunha, 2005).

3.3.3 Diagramas de reversibilidade e irreversibilidade (DRI)

Muitos fenômenos pode ser responsáveis pela quebra da reversibilidade no tempo das equações de Stokes. Dentre esses, tem-se: a rugosidade das partículas (Cunha e Hinch, 1996; Davis, 1992), a deformação da partícula viscosa (Loewenberg e Hinch, 1997), a inércia da fase particulada e a presença de forças interpartícula (Adler, 1981b; Wang et al., 1998). Nesta seção, estamos interessados no deslocamento líquido através das linhas de corrente causado por uma colisão. A fim de representar esses deslocamentos líquidos transversais, apresenta-se na Fig. (3.8) as coordenadas absolutas finais em uma forma adimensional ($Y_1^{+\infty}, Y_3^{+\infty}$) da esfera incidente com posições iniciais ($Y_1^{-\infty}, Y_3^{-\infty}$) em uma grade regular de $[0, 3, 5] \times [0, 3, 5]$.

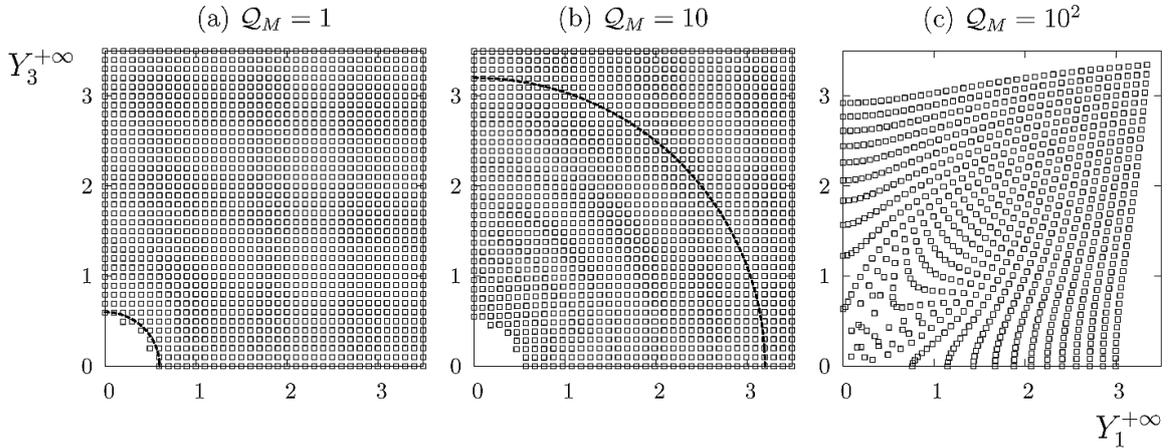


Figura 3.8: Diagramas de reversibilidade e irreversibilidade para $\lambda = 0,5$, $\gamma = 1,0$, $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 0)$ e $M_{12} = 1,0$. (a) $\mathcal{Q}_M = 1$, (b) $\mathcal{Q}_M = 10$ e (c) $\mathcal{Q}_M = 10^2$.

As linhas pontilhadas nas Figs. (3.8.a) e (3.8.b) mostram o limite entre as trajetórias reversíveis e irreversíveis. Essa interface é definida pelas posições limite nas quais a diferença entre as distâncias transversais são dadas por $\Delta Y_k = |Y_k^{+\infty} - Y_k^{-\infty}| \leq 10^{-3}$, com ($k = 1, 3$). Essa escolha é baseada no erro numérico obtido nas simulações $\mathcal{O}(10^{-3})$. As regiões de vazio das grades iniciais nas Figs. (3.8.a) e (3.8.b) representam aquelas trajetórias que resultaram em agregação. A distribuição heterogênea de pontos na Fig. (3.8.b) mostram um DRI em que a região de agregação e as trajetórias difusivas são mais evidentes, correspondentes à quebra da reversibilidade no tempo das trajetórias. Além disso, a Fig. (3.8.c) representa uma configuração extrema de mistura de trajetórias, em que as trajetórias difusivas dominam. Valores mais altos de \mathcal{Q}_M , levam a maiores densidades de trajetórias abertas irreversíveis e a uma maior probabilidade de formação de dímeros.

3.3.4 Coeficientes de dispersão hidrodinâmica

Embora as equações de Stokes sejam lineares, as equações do movimento das partículas são não-lineares tal que uma partícula teste pode exibir um movimento aleatório em uma suspensão sob ação de forças puramente determinísticas (Leshansky e Brady, 2005). O interesse do presente trabalho nesta seção é apresentar o caso em que as interações hidrodinâmicas e magnéticas entre as partículas em uma suspensão são significantes. Este processo dispersivo pode ser caracterizado como uma difusividade não-Browniana que depende da fração volumétrica de partículas e, conseqüentemente, de sua configuração instantânea, em contraste com as suspensões Brownianas ordinárias.

Agora, a fim de obter a difusividade hidrodinâmica coletiva $\mathbf{D}^c(\phi)$, considera-se uma dispersão que possui um pequeno gradiente na concentração de m espécies transversais às linhas de corrente, assim como mostrado pela Fig. (3.9),

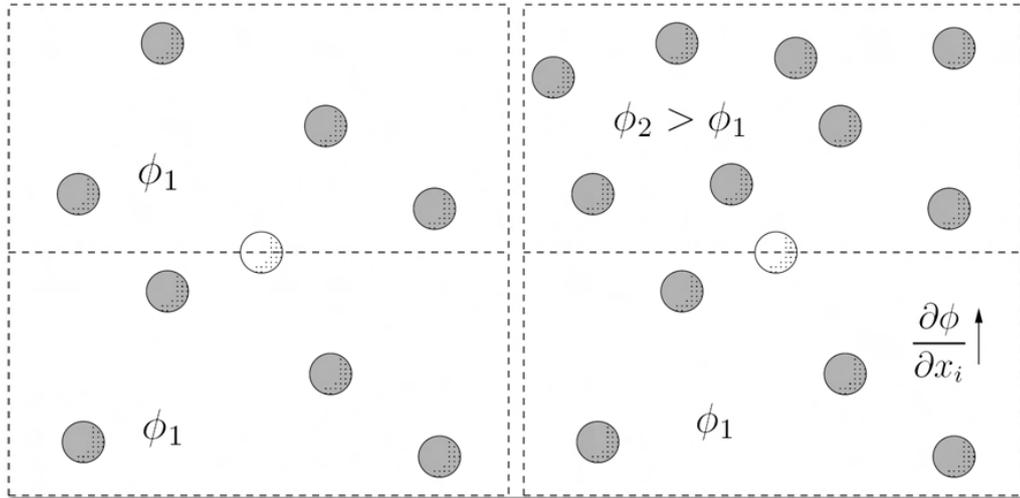


Figura 3.9: Esquema de uma suspensão diluída bidispersa que possui um pequeno gradiente de concentração de uma de suas espécies.

$$n_j(\mathbf{r}) = n_0^j + x_k \frac{\partial n_j}{\partial x_k}, \quad \text{with } j = 1, \dots, m \quad \text{and } k = 1, 3. \quad (3.23)$$

Seguindo isso, é necessário calcular a taxa na qual as partículas atravessam uma área unitária de um plano perpendicular ao gradiente de concentração, $x_k = 0$ para $k = 1$ ou 3 , devido aos deslocamentos líquidos transversais às linhas de corrente.

Considere uma esfera teste localizada inicialmente em $\mathbf{Y}_k^{-\infty}$ sendo deslocada $\Delta \mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_k^{\infty} - \mathbf{Y}_k^{-\infty}$ transversalmente às linhas de corrente, como resultado de uma colisão com uma segunda esfera, inicialmente localizada em $\mathbf{X}^{-\infty}$. Sendo a relativa separação entre as esferas dada por, $\mathbf{x}_k = \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_k$, a taxa na qual essas colisões ocorrem

é $n_j(\mathbf{X}^{-\infty}) U_{ij}^{(0)}$. Para uma dada separação inicial entre as partículas $\mathbf{x}^{-\infty} = \mathbf{Y}^{-\infty} - \mathbf{X}^{-\infty}$, e sendo o deslocamento lateral, transversal às linhas de corrente, dado por ΔY_k , qualquer esfera teste que inicie sua trajetória em $Y_k^{-\infty}$, dentro da faixa $-\Delta Y_k < Y_k^{-\infty} < 0$ atravessará o plano perpendicular ao gradiente de concentração, $x_k = 0$, pelo lado negativo. Consequentemente, existe uma faixa similar para o lado positivo quando $\Delta Y_k < 0$. Portanto, o fluxo líquido de partícula que atravessa o plano, associado à i -ésima espécie, é dado por

$$\mathcal{J}_i^k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\Delta Y_k}^0 n_i(X_k^{-\infty}) n_j(Y_k^{-\infty}) U_{ij}^{(0)} dY_k^{-\infty} \right] dx_1^{-\infty} dx_3^{-\infty}, \quad (3.24)$$

levando em conta ambos os casos $\Delta Y_k > e < 0$. Em (3.24), $i, j = 1, \dots, m$ and $k = 1, 3$. Substituindo $X_k^{-\infty} = Y_k^{-\infty} - x_k^{-\infty}$ e a variação linear do gradiente de concentração, dado pela Eq. (3.23), obtém-se a seguinte expressão para a integral

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta Y_k}^0 \left[n_0^i + (Y_k^{-\infty} - x_k^{-\infty}) \frac{\partial n_i}{\partial x_k} \right] \left[n_0^j + Y_k^{-\infty} \frac{\partial n_j}{\partial x_k} \right] U_{ij}^{(0)} dY_k^{-\infty} = \\ = \int_{-\Delta Y_k}^0 \left[n_0^i n_0^j + n_0^i \frac{\partial n_j}{\partial x_k} Y_k^{-\infty} + n_0^j \frac{\partial n_i}{\partial x_k} (Y_k^{-\infty} - x_k^{-\infty}) + \right. \\ \left. + Y_k^{-\infty} (Y_k^{-\infty} - x_k^{-\infty}) \frac{\partial n_i}{\partial x_k} \frac{\partial n_j}{\partial x_k} \right] U_{ij}^{(0)} dY_k^{-\infty}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Agora, desprezando os termos de segunda ordem relacionados ao gradiente de concentração na Eq.(3.25) e integrando, encontra-se que o fluxo da i -ésima espécie é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i^k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[n_0^i n_0^j (\Delta Y_k)_{ij} + \frac{1}{2} \left(n_0^i \frac{\partial n_j}{\partial x_k} + n_0^j \frac{\partial n_i}{\partial x_k} \right) (\Delta Y_k)_{ij}^2 + \right. \\ \left. + n_0^j \frac{\partial n_i}{\partial x_k} x_k^{-\infty} (\Delta Y_k)_{ij} \right] U_{ij}^{(0)} dx_1^{-\infty} dx_3^{-\infty}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

com $i, j = 1 \dots m$ e $k = 1$ ou 3 . O primeiro termo dentro dos colchetes desaparece, já que avalia a média sobre as colisões onde não existem deslocamentos líquidos. Portanto o fluxo é proporcional ao gradiente de concentração, com o coeficiente de proporcionalidade sendo uma difusividade. Após algumas manipulações algébricas, a Eq. (3.26) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i^k &= \sum_{j=1}^m \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_i^0 \left[\frac{1}{2} (\Delta Y_k)_{ij}^2 + x_k^{-\infty} (\Delta Y_k)_{ij} \right] U_{ij} dS^{-\infty} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{n'_i}{n'_j} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_j^0 \left[\frac{1}{2} (\Delta Y_k)_{ij}^2 \right] U_{ij} dS^{-\infty} \right\} \frac{\partial n_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m D_{ij}^k |^c \frac{\partial n_j}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

em que $dS^{-\infty} = dx_1^{-\infty} dx_3^{-\infty}$ e $n'_i = \partial n_i / \partial x_k$. Em particular, note que o primeiro termo da Eq. (3.27) representa a metade da taxa de variação temporal do deslocamento quadrático médio de um movimento aleatório de uma partícula, ou seja uma contribuição da auto-difusão

$$D_{ij}^k |^s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_i^0 \left[\frac{1}{2} (\Delta Y_k)_{ij}^2 \right] U_{ij} dS^{-\infty} \quad (3.28)$$

e o termo

$$F_{ij}^k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_i^0 \left[x_k^{-\infty} (\Delta Y_k)_{ij} \right] U_{ij} dS^{-\infty} \quad (3.29)$$

é aquele relacionado ao fluxo líquido produzido pelo gradiente de concentração. Em uma forma mais compacta, a expressão obtida em (3.27) pode ser expressa como

$$D_{ij}^k |^c = \left(D_{ij}^k |^s + F_{ij}^k \right) + \delta_{ij} \sum_{p=1}^m \left(\frac{n_p^0}{n_i^0} \right) D_{ip}^k |^s. \quad (3.30)$$

Uma das duas contribuições $D_{ij}^k |^s$ é a contribuição padrão do movimento aleatório para um fluxo atravessando um gradiente de concentração. A segunda, por sua vez, é devido à concentração levemente maior de partículas colidindo de um lado da esfera teste em relação ao outro lado, movendo-a transversalmente em direção à região de menor concentração e existe somente se as duas partículas interagentes são do mesmo tipo.

3.3.5 Coeficientes de dispersão para suspensões diluídas bidispersas

Agora, aplica-se a teoria generalizada desenvolvida na seção anterior para uma suspensão diluída bidispersa. Da Eq. (3.27), pode-se escrever as expressões para os fluxos de partículas 1 e 2 na direção x (transversal à gravidade) como sendo

$$\mathcal{J}_1 = D_{11}|^c \frac{\partial n_1}{\partial x} + D_{12}|^c \frac{\partial n_2}{\partial x} \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_2 = D_{21}|^c \frac{\partial n_1}{\partial x} + D_{22}|^c \frac{\partial n_2}{\partial x}, \quad (3.31)$$

em que os coeficientes de dispesão coletivos $D_{ij}|^c$ são dados por

$$\begin{aligned} D_{11}|^c &= 2D_{11}|^s + F_{11} + \left(\frac{n_2^0}{n_1^0}\right) D_{12}|^s; & D_{12}|^c &= D_{12}|^s + F_{12}; \\ D_{21}|^c &= D_{21}|^s + F_{21}; & D_{22}|^c &= 2D_{22}|^s + F_{22} + \left(\frac{n_1^0}{n_2^0}\right) D_{21}|^s. \end{aligned} \quad (3.32)$$

A Eq. (3.32) explicita os termos adicionais de auto-difusão que estão relacionados à concentração não-uniforme das partículas colidindo em um dos lados da partícula teste. Em particular, para suspensões em sedimentação, os termos $D_{11}|^s$, F_{11} , $D_{22}|^s$ e F_{22} são todos nulos. Então, é necessário determinar as difusividades $D_{12}|^c$ e $D_{21}|^c$.

Cabe mencionar que, para o caso de suspensões monodispersas, o sistema de equações mostrado em (3.32) reduz-se, simplesmente a

$$D_{11}|^c = 2D_{11}|^s + F_{11}, \quad D_{12}|^c = D_{21}|^c = D_{22}|^c = 0. \quad (3.33)$$

Agora, fazendo adimensionais os comprimentos do integrando de (3.28) e (3.29) usando o raio efetivo $\bar{a} = (a_1 + a_2)/2$ pode-se escrever os coeficientes de difusão em uma forma adimensional. Por exemplo, tem-se as seguintes expressões adimensionais para $D_{12}|^s$ e F_{12}

$$D_{12}|^s = \frac{D_{12}|^s}{U_{12} \bar{a} \phi_1^0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{3}{8\pi} \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^3 (\Delta Y_k)_{12}^2 \right] dS^{-\infty} \quad (3.34)$$

e

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{F_{12}}{U_{12} \bar{a} \phi_1^0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{3}{4\pi} \left(\frac{1+\lambda}{2} \right)^3 x_k^{-\infty} (\Delta Y_k)_{12} \right] dS^{-\infty} \quad (3.35)$$

A Fig. (3.10) apresenta os resultados para o coeficiente de difusão coletiva $D_{12}|^c$ da partícula incidente, para diferentes valores do parâmetro de polidispersidade λ . Para

$\gamma = 1,0$, $M_{12} = 0,8$, e $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$, é visto que maiores valores de λ levam a maiores coeficientes de difusão. Esta é uma consequência direta do aumento do efeito da gravidade comparado com a força interpartícula para valores menores de λ . Então, como a dispersão é produzida devido a uma fonte intrínseca de irreversibilidade da suspensão (no presente caso, a interação magnética), para $\lambda = 0,5$ o coeficiente coletivo de difusão é cerca de 20 vezes maior que aquele obtido para $\lambda = 0,25$.

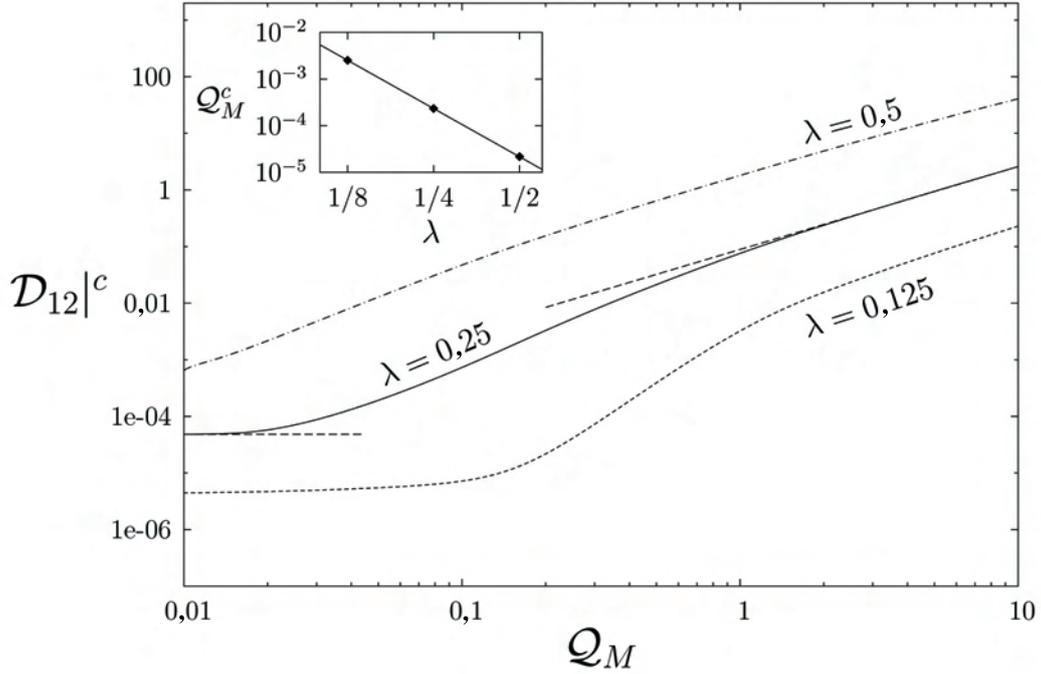


Figura 3.10: Coeficiente de difusão coletiva adimensional da partícula incidente 1 em uma suspensão de partículas para $\gamma = 1,0$, $M_{12} = 0,8$, e $\hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mathbf{d}}_2 = (1, 1, 1)$.

Ainda na Fig. (3.10), é visto que para o caso em que $\lambda \ll 1$ (i.e. $\lambda = 0,25$) e $\mathcal{Q}_M \ll 1$ o coeficiente $\mathcal{D}_{12}|^c$ tende a $4,7 \times 10^{-5}$. Menores valores de λ requerem um valor mínimo de \mathcal{Q}_M^c (valor crítico) a fim de produzir uma substancial mudança em $\mathcal{D}_{12}|^c$. O encarte na Fig. (3.10) mostra a dependência de \mathcal{Q}_M^c com λ . Os resultados revelam um comportamento de lei de potência com $\mathcal{Q}_M^c \cong (2 \times 10^{-6}) \lambda^{-17/5}$.

Além disso, para $\mathcal{Q}_M \gg 1$, é claro que o coeficiente de difusão $\mathcal{D}_{12}|^c$ tem um comportamento tipo lei de potência. Mostra-se esse limite assintótico para $\lambda = 0,25$ obtendo a expressão $\mathcal{D}_{12}|^c \cong (9/100) \mathcal{Q}_M^{73/50}$. A potência de \mathcal{Q}_M na expressão de $\mathcal{D}_{12}|^c$ é independente do parâmetro de polidispersidade, tal que para todo valor de λ pode ser proposta uma expressão mais geral para esse limite assintótico como sendo $\mathcal{D}_{12}|^c \cong c_0(\lambda) \mathcal{Q}_M^{73/50}$ sendo a mesma para as condições $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 0,125$. Em adição, a Fig. (3.10) apresenta a magnitude do coeficiente de dispersão produzido pela interação de duas

partículas magnéticas em comparação com aqueles calculados baseados na quebra de simetria de trajetória examinada por Davis (1992). Pode-se notar que o máximo valor da difusividade transversal obtida para partículas rugosas (Davis, 1992) é cerca de 70 vezes maior que aquele obtido para o caso $\lambda = 0,5$ e $Q_M = 10^2$, que confirma a forte influência das forças magnéticas no processo difusivo. Os resultados mais relevantes dessa análise foram publicados recentemente (Cunha e Couto, 2008b).

Neste ponto, cabe ressaltar que vários autores se dedicaram a compreender quais seriam as contribuições mais relevantes para os coeficientes de autodispersão \mathcal{D}^s e de dispersão coletiva \mathcal{D}^c , como funções da fração volumétrica ϕ . Enquanto alguns autores (Davis, 1992; Cunha e Hinch, 1996) se destinaram a investigar a influência da rugosidade sobre o processo de migração lateral de partículas, outros analisaram a influência da deformação (para o caso de partículas deformáveis) sobre tais coeficientes (Loewenberg e Hinch, 1997). Em particular, este trabalho ampliou esse quadro, mostrando a importante contribuição que a magnetização das partículas pode ter sobre estes processos difusivos. Assim sendo, apresentam-se na Tab. (3.3.5) os resultados mais relevantes, que compõem o estado da arte dos estudos de dispersão hidrodinâmica em suspensões diluídas.

Tabela 3.1: Sumário das principais pesquisas relacionadas à dispersão hidrodinâmica de partículas.

Trabalho anterior	Resumo	Principais resultados
(Eckstein et al., 1977)	Medição do coeficiente de autodispersão para partículas esféricas em suspensões monodispersas.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx 0,02 \phi \dot{\gamma} a^2$
(Leighton e Acrivos, 1987)	Determinação do coeficiente de autodispersão para partículas esféricas em um dispositivo de Couette.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx 0,5 \phi^2 \dot{\gamma} a^2$
(Davis e Hill, 1992)	Autodispersão longitudinal de uma partícula sedimentando através de uma suspensão de partículas neutras da ação da gravidade.	$\mathcal{D}_{\parallel}^s \approx 1,9 \lambda^3 \ln \lambda^{-1} \phi a U^{(0)}$ para $\lambda \ll 1$
(Acrivos et al., 1992)	Coefficiente de autodispersão longitudinal de esferas em uma suspensão diluída sujeita a um cisalhamento simples.	$\mathcal{D}_{\parallel}^s \approx 0,27 \phi \ln \phi^{-1} \dot{\gamma} a^2$
(Davis, 1992)	Efeito da rugosidade (ϵ) sobre o coeficiente transversal de autodispersão de partículas sob ação da gravidade.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx 2,0 \times 10^{-5}$ para $\epsilon = 10^{-2}$ e $\lambda = 0,25$

(Biemfohr et al., 1993)	Medição do coeficiente de autodispersão transversal em suspensões diluídas sujeitas a cisalhamento simples.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx 2,3 \times 10^{-2} \phi \dot{\gamma} a^2$
(Cunha e Hinch, 1996)	Determinação dos coeficientes transversais de autodispersão e de dispersão coletiva em suspensões diluídas de partículas rugosas.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx \phi \dot{\gamma} a^2 f(\epsilon)$, $\epsilon \ll 1$, e $f(\epsilon) \approx \epsilon^{0,44} (\ln(1/\epsilon) + 1,35)^{-0,7}$
(Wang et al., 1996)	Influência de uma terceira partícula $\mathcal{O}(\phi^2)$ sobre a autodispersão transversal de partículas esféricas, sujeitas a um cisalhamento simples em uma suspensão diluída.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx 0,11 \phi^2 \dot{\gamma} a^2$
(Loewenberg e Hinch, 1997)	Coeficientes de autodispersão transversal para gotas deformáveis em uma emulsão diluída, sujeitas a cisalhamento simples.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx \phi \dot{\gamma} a^2 f_{\alpha}(\lambda)$ para $\lambda \gg 1$, com $f_z \approx \lambda^{-2/3}$ and $f_y \approx \lambda^{-0,29} (1,35 + 2/3(\ln \lambda))^{-0,7}$
(Wang et al., 1998)	Determinação do coeficiente de dispersão transversal devido a gradientes de concentração em uma suspensão diluída, considerando interações de três corpos.	$\mathcal{D}_{\perp}^c \approx 0,077 \phi^2 \dot{\gamma} a^2$
(Breedveld e Levine, 2003)	Autodispersão transversal, induzida por cisalhamento simples, de partículas carregadas eletricamente em uma suspensão diluída.	$\mathcal{D}_{\perp}^s \approx \phi \dot{\gamma}^{0,7} a^2$ for $\dot{\gamma} \ll 1$
(Cunha e Couto, 2008b)	Determinação dos coeficientes de autodispersão e de dispersão devido a gradientes de concentração para partículas magnéticas sujeitas à sedimentação diferencial.	$\mathcal{D}_{\perp}^c \approx f(\lambda) \mathcal{Q}_M^{73/50} \phi a U^{(0)}$

4 FORMULAÇÃO DO MÉTODO INTEGRAL DE CONTORNO PARA FLUIDOS MAGNÉTICOS

4.1 Formulação Teórica

A formulação teórica desenvolvida nesta seção pode ser aplicada para a modelagem do movimento geral de gotas de fluido magnético em uma emulsão composta por gotas de viscosidade η' , permeabilidade magnética μ' e raio inicial (não-deformado) a imerso em um segundo fluido imiscível de viscosidade η , permeabilidade magnética μ submetidos a campos externos impostos de velocidade \mathbf{u}^∞ e magnético \mathbf{H}^∞ , assim como descrito na Fig. (4.1). Tais emulsões são denominadas magneto-reológicas.

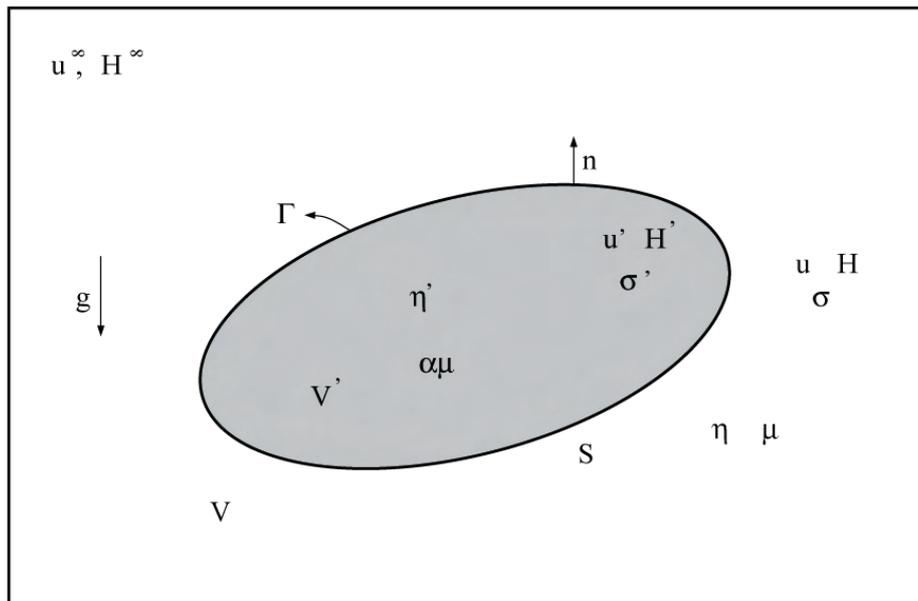


Figura 4.1: Desenho esquemático de uma gota de fluido magnético em uma emulsão submetido a campos externos impostos de velocidade e magnético ($\mathbf{u}^\infty, \mathbf{H}^\infty$).

Aqui, $\lambda_\eta = \eta'/\eta$ e $\alpha = \mu'/\mu$ representam, respectivamente, a razão de viscosidade e a razão de permeabilidades, ambas entre os fluidos interno e externo. Este problema é não-linear e dele surgem efeitos não-Newtonianos associados às tensões magnéticas e ao acoplamento entre o magnetismo e a hidrodinâmica.

4.1.1 Magnetostática

Na ausência de um campo elétrico e se o campo magnético é permanente, as equações de Maxwell (Grant e Philips, 1990; Rosensweig, 1985) se reduzem ao limite mag-

netostático, em que a indução magnética e o campo magnético são descritos pelas seguintes equações

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

em que ∇ representa o operador derivada parcial, \mathbf{B} é a indução magnética e \mathbf{H} é o vetor campo magnético. Além disso, a relação

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (4.2)$$

é válida em todos os pontos do material. Aqui, \mathbf{M} define localmente a magnetização do material, que revela o estado intrínseco de polarização do material contínuo promovida pelo campo magnético e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ é a permeabilidade do espaço livre.

Este trabalho está focado no estudo de materiais magnéticos diluídos, ou seja, materiais superparamagnéticos, que possuem uma memória muito curta resultando em um instantâneo alinhamento das partículas com o campo \mathbf{H} . Em outras palavras, o líquido magnetizável obedece à relação $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, com χ sendo a susceptibilidade magnética. Sob essa condição, a Eq. (4.2) reduz-se a $\mathbf{B} = (K - 1)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$, em que $\mu = \mu_0(1 + \chi)$ denota a permeabilidade magnética do fluido e $\alpha = \mu/\mu_0 = 1 + \chi$ é a permeabilidade relativa do fluido magnético. Deve-se notar ainda que, nessa formulação, considera-se a permeabilidade magnética como sendo uma constante material. Nesse caso \mathbf{H} é um campo solenoidal, ou seja, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Além disso, como \mathbf{H} é um campo irrotacional, então \mathbf{H} pode ser escrito como o gradiente de um potencial magnético Φ , $\mathbf{H} = \nabla\Phi$. Portanto, o problema aqui estudado é governado pela equação de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$.

4.1.2 Hidrodinâmica

Como mencionado anteriormente, estuda-se aqui um problema acoplado entre hidrodinâmica e magnetismo. Portanto, além das equações da magnetostática, é necessário descrever as equações de balanço da hidrodinâmica. Nesse sentido, considerando a inércia e a incompressibilidade do fluido, as equações de balanço da hidrodinâmica reduzem-se às equações de Stokes descritas por Happel e Brenner (1965) e Kim e Karrila (2005)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

em que \mathbf{u} e $\boldsymbol{\sigma}$ representam o campo de velocidades e o tensor de tensões do fluido. No contexto da ferrohodinâmica, assim como aquele explorado neste trabalho, o acoplamento entre o magnetismo e a hidrodinâmica é dado pelo tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ que considera efeitos magnéticos no escoamento (Rosensweig, 1985), dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}, \quad (4.4)$$

em que a notação $\mathbf{B}\mathbf{H}$ corresponde ao produto diádico ou tensorial entre os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} usualmente escrito como $\mathbf{B} \otimes \mathbf{H}$, η denota a viscosidade de cisalhamento do fluido, \mathbf{I} é o tensor identidade, P é a pressão total, descrita como

$$P = p_h + p_m, \quad (4.5)$$

em que p_h é a pressão hidrodinâmica e $p_m = \mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})/2$ é a pressão magnética. Além disso, $\mathbf{D} = [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]/2$ representa o tensor taxa de deformação e $(\nabla\mathbf{u})^T$ corresponde ao tensor transposto de $\nabla\mathbf{u}$.

4.2 Condições de contorno

Em uma interface de uma gota S com tensão superficial Γ , as condições de contorno requerem uma velocidade contínua através da interface e um balanço entre o resultado líquido da soma dos vetores de tensão e as forças superficiais, que expressam a descontinuidade na interface. Ademais, o regime magnetostático estabelece que as componentes normais de \mathbf{B} e as componentes tangenciais de \mathbf{H} são contínuas na interface entre dois meios diferentes (em todos os pontos através da interface). Matematicamente, essas condições são expressas por

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^\infty \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (4.6)$$

e

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}'(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S, \quad (4.7)$$

em que \mathbf{u}' , \mathbf{H}' e \mathbf{B}' representam, respectivamente, o escoamento, o campo magnético e o campo de indução magnética dentro da gota e \mathbf{n} é o vetor unitário normal a S .

Considerando uma interface livre de viscosidade superficial, elasticidade superficial, módulo superficial de flexão ou dilatação, a equação constitutiva para o salto no vetor de tensões $\Delta \mathbf{t} = [[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}]]$ é escrita assim como enunciado por Pozrikidis (1992)

$$\Delta \mathbf{t} = [[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}]] = \Gamma(\nabla^S \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \nabla \Gamma. \quad (4.8)$$

A notação $[[\]]$ representa um salto nas quantidades do escoamento, $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ é o vetor de tensões na superfície, $\nabla^S = (\mathbf{I} - \mathbf{nn})$ corresponde ao gradiente superficial à interface, conseqüentemente $\nabla^S \cdot \mathbf{n}$ denotam duas vezes a curvatura média $\bar{\kappa}$ da interface. O salto do vetor de tensões dado pela Eq. (4.8) poderia ser visto como a soma de um salto do vetor de tensões normal $\mathbf{nn} \cdot \Delta \mathbf{t}$ e um salto do vetor de tensões tangencial $(\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \Delta \mathbf{t}$. A componente normal inclui o efeito promovido pela tensão superficial Γ enquanto que a componente tangencial é aquele devido aos gradientes de tensão superficial, associados com a presença de surfactantes (tensoativos) no fluido, denominado efeito Marangoni. Para interfaces limpas, ou seja, sem surfactantes, as tensões de Marangoni podem ser desprezadas.

Além disso, usando uma representação Lagrangeana para a evolução da interface de uma gota, obtém-se uma condição cinemática relacionando as mudanças de posição na interface com a velocidade local

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S, \quad (4.9)$$

em que D/Dt denota a derivada material ou substantiva.

4.3 Formulação integral de contorno magnética

Nesta seção é apresentada a representação integral de contorno tridimensional para a equação de Laplace, resultante das condições magnetostática dadas na Eq. (4.1), em termos de singularidades na interface entre os dois fluidos magnéticos.

4.3.1 Teorema recíproco para o potencial magnético

Considere uma região fluida fechada V limitada por uma superfície S . Seguindo essa consideração, considere dois campos potenciais magnéticos Φ e Φ_i agindo, respectivamente, sobre dois diferentes fluidos magnéticos. De acordo com a segunda identidade de Green (Jaswon e Symm, 1977; Kellogg, 1954), encontra-se que

$$\int_S (\Phi \nabla \Phi_i - \Phi_i \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\Phi \nabla^2 \Phi_i - \Phi_i \nabla^2 \Phi) dV, \quad (4.10)$$

em que Φ e Φ_i são duas funções escalares da posição. Sendo Φ e Φ_i funções harmônicas, assim como o potencial magnético, o lado direito da Eq. (4.10) é nulo, levando ao teorema recíproco para funções harmônicas

$$\int_S \Phi \nabla \Phi_i \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \Phi_i \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.11)$$

A Eq. (4.11) expressa que, se a solução fundamental para o campo potencial magnético Φ_i é conhecido, qualquer campo de interesse Φ pode ser determinada em termos de distribuições de singularidade na interface S .

4.3.2 Representação integral para o potencial magnético

Agora, objetiva-se determinar a representação integral para o potencial magnético Φ . Aqui, o potencial magnético conhecido Φ_i corresponde à solução fundamental de $\nabla^2 \Phi_i = h\delta(\mathbf{r})$, o que é dado por

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{h}{4\pi\mu_0 r} = \frac{h}{4\pi\mu_0} \mathcal{C}(\mathbf{r}), \quad (4.12)$$

e, conseqüentemente,

$$\nabla \Phi_i(\mathbf{r}) = -\frac{h \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^3} = \frac{h}{4\pi\mu_0} \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}), \quad (4.13)$$

em que $\mathcal{C}(\mathbf{r}) = 1/r$ é a função de Green do espaço livre correspondente a uma fonte singular (monopolo) e $\nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}/r^3$ denota um dipolo potencial. A solução apresentada na Eq. (4.12) corresponde ao potencial magnético devido a uma fonte singular com intensidade h . Aqui, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ com \mathbf{x} sendo um ponto arbitrário do domínio V e \mathbf{x}_0 a localização do dipolo magnético (singularidade) e $r = |\mathbf{r}|$.

Então, aplica-se a solução fundamental dada em (4.12) ao teorema recíproco dado pela Eq. (4.11). Aqui, Φ é um potencial desconhecido no domínio V e Φ_i é o potencial de uma fonte, que é singular quando $r \rightarrow 0$. Duas possibilidades, referentes à localização da singularidade no domínio fluido, devem ser consideradas a seguir.

Singularidade fora de V : Neste caso, $\delta(\mathbf{r}) = 0$ dentro de V . Após descartar a constante arbitrária $h \neq 0$, o teorema recíproco na Eq. (4.11) reduz-se a

$$\int_S [\Phi(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) - \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.14)$$

Aqui, o potencial Φ não é singular dentro de V , tendo em vista que \mathbf{x}_0 está fora do domínio V .

Singularidade dentro de V : Considere agora o caso em que a singularidade é colocada em \mathbf{x}_0 dentro de V . A singularidade precisa ser excluída da região de integração. A fim de superar essa dificuldade, considera-se um pequeno contorno esférico de raio ε e V_ε , centralizado em \mathbf{x}_0 , envolvendo a singularidade, assim como ilustrado na Fig. (4.2). Aqui, \mathbf{n}_i e \mathbf{n} significam, respectivamente, os vetores unitários normais a S direcionados para dentro e para fora da interface, tal que $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_i$. Então, fora da pequena esfera, ao longo do volume restante $V - V_\varepsilon$ as funções dentro dos colchetes na Eq. (4.11) são contínuas. Neste caso, descartando novamente a constante arbitrária h , o teorema recíproco (4.11), aplicado a superfície $S - S_\varepsilon$ que limita o volume $V - V_\varepsilon$, torna-se

$$\int_S [\mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}_i dS + \int_{S_\varepsilon} [\mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n}_i dS = 0. \quad (4.15)$$

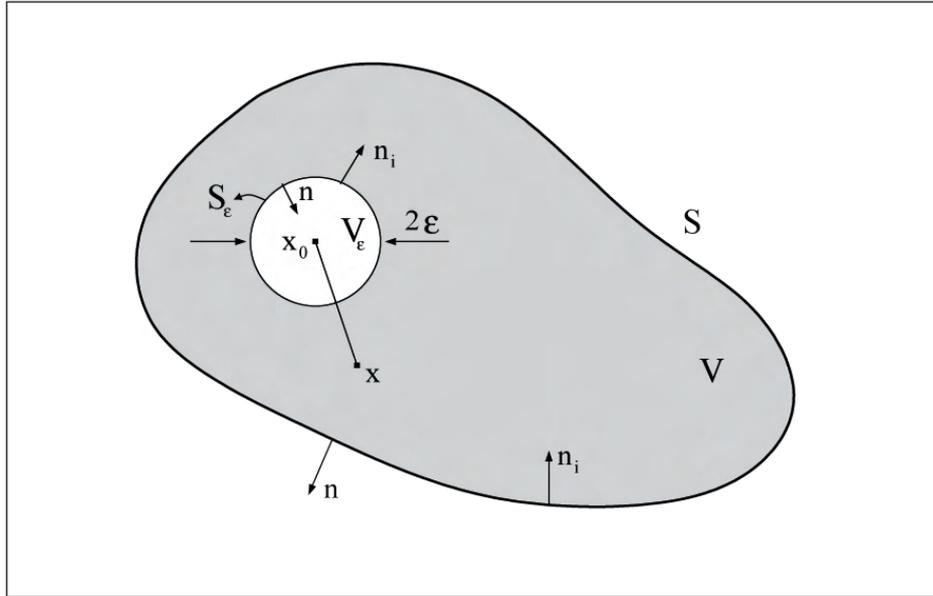


Figura 4.2: Domínio fluido V limitado pela superfície S dividido em V_ε e $V - V_\varepsilon$.

Agora considere a integral sobre S_ε contendo a singularidade \mathbf{x}_0 , com $dS_\varepsilon = \varepsilon^2 d\Omega$ e $d\Omega$ sendo o ângulo sólido infinitesimal. Baseado na solução fundamental dada em

(4.12) e (4.13), as expressões para o monopólo potencial $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ e para o dipolo potencial $\nabla\mathcal{C}(\mathbf{r})$ dentro de S_ε , com o vetor normal unitário direcionado para dentro de S_ε sendo $\mathbf{n}_i = \mathbf{r}/\varepsilon$, são dados por

$$\mathcal{C}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \nabla\mathcal{C}(\mathbf{r}) \approx -\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon^3} = -\frac{\mathbf{n}_i}{\varepsilon^2}. \quad (4.16)$$

Portanto, para o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla\Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \nabla\Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i \varepsilon^2 d\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \Phi(\mathbf{x}) \nabla\mathcal{C}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_i dS = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \Phi(\mathbf{x}) \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 d\Omega = -\Phi(\mathbf{x}_0). \quad (4.18)$$

Com os resultados dados pelas Eqs. (4.17) e (4.18), a Eq. (4.15) reduz-se a

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = -\int_S [\Phi(\mathbf{x}) \nabla\mathcal{C}(\mathbf{r}) - \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla\Phi(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.19)$$

Por analogia com resultados similares na teoria eletrostática (Pozrikidis, 1992) e elastostática (Jaswon e Symm, 1977), as duas integrais no lado direito da Eq. (4.19) são denominadas os potenciais de camada simples e de dupla camada. Eles representam, respectivamente, uma distribuição de funções de Green $\mathcal{C}(\mathbf{r})$ e $\nabla\mathcal{C}(\mathbf{r})$ na interface, ou seja uma distribuição na interface de fontes e dipolos magnéticos.

4.3.3 Representação integral em termos das condições de salto

Nesse ponto, deseja-se obter a representação integral para o potencial magnético em termos das condições de salto na interface. Esta representação é apropriada para aqueles problemas que possuem superfícies livres, assim como a deformação de gotas magnéticas suspensas em um fluido carreador viscoso. Para este fim, consideram-se duas situações. Aqui, \mathbf{n} é o vetor normal unitário a S direcionado para fora da superfície e $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$.

Singularidade dentro do domínio do fluido externo V : De acordo com o teorema recíproco dado em (4.14), para o fluido interno Φ' (dentro da gota) com o ponto \mathbf{x}_0 externo à gota, obtém-se

$$\int_S [\Phi'(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) - \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi'(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (4.20)$$

Agora, aplicando a Eq. (4.19) para o fluido externo sob um campo imposto $\Phi^\infty(\mathbf{x}_0)$, pode-se determinar

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = - \int_S [\Phi(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) - \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}' dS + \Phi^\infty(\mathbf{x}_0) \quad (4.21)$$

e, subtraindo a Eq. (4.20) da Eq. (4.21), determina-se, em termos das condições de salto $\Phi(\mathbf{x}) - \Phi'(\mathbf{x})$ e $\nabla[\Phi(\mathbf{x}) - \Phi'(\mathbf{x})]$, a seguinte representação integral

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}_0) = \Phi^\infty(\mathbf{x}_0) + & \int_S [\Phi(\mathbf{x}) - \Phi'(\mathbf{x})] \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS - \\ & \int_S \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla [\Phi(\mathbf{x}) - \Phi'(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Singularidade dentro do domínio do fluido interno V' : Por analogia com o procedimento usado para se obter a representação integral para o fluido externo, determina-se a representação integral para o fluido interno aplicando a Eq. (4.19) como sendo,

$$\Phi'(\mathbf{x}_0) = - \int_S [\Phi'(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) - \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi'(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.23)$$

Além disso, usando a identidade recíproca (4.14) para o fluido externo Φ (fora da gota fluida) com um ponto \mathbf{x}_0 que está localizado no interior da gota pode-se obter

$$\int_S [\Phi(\mathbf{x}) \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) - \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}' dS - \Phi^\infty(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (4.24)$$

e, subtraindo este resultado da Eq. (4.23), conclui-se que

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathbf{x}_0) = \Phi^\infty(\mathbf{x}_0) + & \int_S [\Phi(\mathbf{x}) - \Phi'(\mathbf{x})] \nabla \mathcal{C}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS - \\ & \int_S \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla [\Phi(\mathbf{x}) - \Phi'(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.3.4 Representação integral na interface para o potencial magnético

Finalmente, pode-se agora determinar a solução do potencial magnético na interface S que pode ser encontrado pela aplicação da condição de salto $[\Phi(\mathbf{x}_0) + \Phi'(\mathbf{x}_0)]/2$ utilizando as Eqs. (4.22) e (4.25). Tomando o limite em que \mathbf{x}_0 encontra-se na interface

e levando-se em conta as condições de contorno $\Phi(\mathbf{x}_0) = \Phi'(\mathbf{x}_0)$, $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi'(\mathbf{x})$ e $\mu \nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mu' \nabla \Phi'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$, a representação integral para o potencial magnético na interface S de dois fluidos magnéticos é dada por

$$\Phi(\mathbf{x}_0) = \Phi^\infty(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \int_S \mathcal{C}(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.26)$$

A Eq. (4.26) apresenta o potencial magnético para cada ponto \mathbf{x}_0 na interface em termos de uma distribuição de singularidades (isto é, monopolos e dipolos), representando o distúrbio sobre o potencial magnético induzido pelos pontos vizinhos da superfície, localizados em \mathbf{x} .

4.4 Formulação integral de contorno hidrodinâmica

Nesta seção, uma formulação integral de contorno para determinar o escoamento de Stokes de um fluido magnético é obtido pela solução de equações integrais que são avaliadas sobre os contornos do problema, em nosso caso a interface entre os dois fluidos. Esta formulação acopla as equações integrais para os campos magnético e de velocidades.

4.4.1 Teorema recíproco para o escoamento de um fluido magnético

Considere uma região fechada de fluido V limitada por uma superfície S . Então considere dois escoamentos incompressíveis distintos de dois fluidos magnéticos diferentes com densidades ρ e ρ_i , viscosidades η e η_i , permeabilidades magnéticas μ e μ_i e campos de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}_i$, respectivamente.

Escoamento 1: \mathbf{u} , \mathbf{H} , $\boldsymbol{\sigma}$ (ρ , η , μ). As equações de balanço para a massa e o momento linear (ou quantidade de movimento) em condição de baixos Reynolds (livre de inércia) e na ausência de forças de campo, são, respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (4.27)$$

Aqui, localmente, \mathbf{u} é a velocidade Euleriana, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e \mathbf{H} é o campo magnético. Como mencionado anteriormente, a equação constitutiva para a suspensão coloidal magnética diluída com baixa memória magnética é descrita, com boa aproximação, por

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} + \mu\mathbf{H}\mathbf{H}, \quad (4.28)$$

em que \mathbf{I} é o tensor identidade e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação.

Escoamento 2: \mathbf{u}_i , \mathbf{H}_i , $\boldsymbol{\sigma}_i$ (ρ_i , η_i , μ_i). No mesmo sentido mostrado na Eq. (4.27), as equações de balanço para a massa e o momento linear (ou quantidade de movimento) e a equação constitutiva da suspensão, para este escoamento, são, respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} = -P_i\mathbf{I} + 2\eta_i\mathbf{D}_i + \mu_i\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i, \quad (4.30)$$

em que $\mathbf{D}_i = [\nabla\mathbf{u}_i + (\nabla\mathbf{u}_i)^T]/2$ e P_i são o tensor taxa de deformação e a pressão total, respectivamente. Além disso, lembrando-se que a seguinte operação é válida para um fluido incompressível $\mathbf{I} : \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{I} : \mathbf{D}_i = \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0$, pode-se obter

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}_i = 2\eta\mathbf{D} : \mathbf{D}_i + \mu\mathbf{H}\mathbf{H} : \mathbf{D}_i \quad (4.31)$$

e, similarmente,

$$\boldsymbol{\sigma}_i : \mathbf{D} = 2\eta_i\mathbf{D}_i : \mathbf{D} + \mu_i\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i : \mathbf{D}. \quad (4.32)$$

A simetria tanto de \mathbf{D} quanto de \mathbf{D}_i requer que $\mathbf{D} : \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i : \mathbf{D}$. Usando esse argumento, a Eq. (4.31) torna-se

$$\mathbf{D} : \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i : \mathbf{D} = \frac{1}{2\eta}(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}_i - \mu\mathbf{H}\mathbf{H} : \mathbf{D}_i), \quad (4.33)$$

e, substituindo o resultado (4.33) na Eq. (4.32), leva ao seguinte resultado

$$\boldsymbol{\sigma}_i : \mathbf{D} = \frac{\eta_i}{\eta}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}_i - \mu\left(\frac{\eta_i}{\eta}\mathbf{H}\mathbf{H} : \mathbf{D}_i - \frac{\mu_i}{\mu}\mathbf{H}_i\mathbf{H}_i : \mathbf{D}\right). \quad (4.34)$$

Seria importante notar que, para fluidos superparamagnéticos pode-se supor que $\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$, ou seja torques internos não estão presentes no fluido e o tensor de tensões é simétrico. Consequentemente,

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}_i = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}_i = \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{u}_i \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (4.35)$$

Aplicando a equação de Cauchy (4.27) ao último termo no lado direito da Eq. (4.35), obtém-se que a Eq. (4.35) reduz-se a

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}_i = \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (4.36)$$

Similarmente, determina-se que

$$\boldsymbol{\sigma}_i : \mathbf{D} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i). \quad (4.37)$$

Portanto, pode-se assim avaliar o termo $\mathbf{H}\mathbf{H} : \mathbf{D}_i$. Note que $\mathbf{H}\mathbf{H}$ é um tensor de segunda ordem simétrico. Assim sendo,

$$\mathbf{H}\mathbf{H} : \mathbf{D}_i = \mathbf{H}\mathbf{H} : \nabla \mathbf{u}_i = \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{u}_i \cdot \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}), \quad (4.38)$$

mas, usando uma identidade vetorial conhecida juntamente com a equação de balanço do regime magnetostático $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ e, considerando-se que a susceptibilidade magnética é uma constante, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, pode-se, dessa forma, obter

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) \\ &= \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) = \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Então, substituindo (4.39) em (4.38), resulta em

$$\mathbf{H}\mathbf{H} : \mathbf{D}_i = \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{u}_i \cdot \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right). \quad (4.40)$$

E, de maneira análoga, determina-se que o termo $\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i : \mathbf{D}$, reduz-se a

$$\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i : \mathbf{D} = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i) - \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{H_i^2}{2} \right). \quad (4.41)$$

Agora, substituindo as Eqs. (4.36), (4.37), (4.40) e (4.41) na Eq. (4.34), encontra-se que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) &= \frac{\eta_i}{\eta} \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \mu \left\{ \frac{\eta_i}{\eta} \left[\nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{u}_i \cdot \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu_i}{\mu} \left[\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i) - \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{H_i^2}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Finalmente, após algumas manipulações algébricas, obtém-se a expressão para o teorema recíproco de Lorentz para o escoamento de Stokes de um fluido magnético

$$\begin{aligned} \eta \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) - \eta_i \nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= \mu_i \eta \left[\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i) - \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{H_i^2}{2} \right) \right] - \\ &\quad \mu \eta_i \left[\nabla \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{H}\mathbf{H}) - \mathbf{u}_i \cdot \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.4.2 Representação integral para o escoamento de Stokes de um fluido magnético

Considere um escoamento particular de interesse com velocidade \mathbf{u} , campo magnético \mathbf{H} e tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$. O escoamento conhecido é aquele devido a um ponto de força \mathbf{f} localizado em um ponto \mathbf{x}_0 do escoamento. Suponha que em ambos fluidos a inércia possua uma desprezível influência no movimento dos elementos fluidos e, por conveniência, adote $\eta = \eta_i$, $\rho = \rho_i$, $\mu = \mu_i$ e $\mathbf{H}_i = \mathbf{0}$. Para esta particular situação, obtém-se

Escoamento 1: \mathbf{u} , \mathbf{H} , $\boldsymbol{\sigma}$. Sob a condição descrita acima, as equações para a conservação de massa e momento linear e a equação constitutiva para um fluido magnético, tornam-se, respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} + \mu\mathbf{H}\mathbf{H}. \quad (4.45)$$

Escoamento 2: \mathbf{u}_i , $\boldsymbol{\sigma}_i$. A solução fundamental para as equações de Stokes corresponde aos campos de velocidades e tensões no ponto \mathbf{x} produzido por um ponto de força \mathbf{h} localizado em \mathbf{x}_0

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = -\mathbf{h}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (4.46)$$

com $|\mathbf{u}_i| \rightarrow 0$ e $|\boldsymbol{\sigma}_i| \rightarrow 0$ quando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. A solução fundamental, assim como anteriormente obtida, pode ser determinada utilizando transformadas de Fourier tridimensionais

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}}{8\pi\eta} \cdot \mathcal{G}(\mathbf{r}); \quad \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}) = -\frac{3\mathbf{f}}{4\pi} \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}), \quad (4.47)$$

em que o “*stokeslet*” \mathcal{G} (monopolo hidrodinâmico) e o “*stresslet*” \mathcal{T} (dipolo hidrodinâmico) são definidos, respectivamente, pelas seguintes expressões

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3}; \quad \mathcal{T}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5}. \quad (4.48)$$

As funções acima são as funções de Green do espaço livre que mapeiam a força \mathbf{f} em \mathbf{x}_0 para os campos em \mathbf{x} em um domínio infinito tridimensional. Aqui $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, e $r = |\mathbf{r}|$. Fisicamente, $\mathbf{u} = \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}$ expressa o campo de velocidades devido a um ponto de força concentrado $\mathbf{f}\delta(\mathbf{r})$ posicionado em um ponto \mathbf{x}_0 , e pode ser visto como o escoamento produzido pela sedimentação lenta de um ponto de partícula. Em adição, \mathcal{T}_{ijk} é o tensor associado com a função de Green \mathcal{G}_{ij} e $\sigma_{ik}(\mathbf{x}) = \mathcal{T}_{ijk}f_j$ é uma solução fundamental do escoamento de Stokes produzida pelo dipolo hidrodinâmico $\mathcal{D} \cdot \nabla\delta(\mathbf{r})$. Além disso, $\mathcal{T}_{ijk} = \mathcal{T}_{kji}$, como requerido pela simetria do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$. Como antes, note que a notação $\mathbf{r}\mathbf{r}$ corresponde ao produto diádico ou tensorial entre os vetores \mathbf{r} e \mathbf{r} .

Nesse ponto, substituindo as expressões da solução de ponto de força (4.47) em (4.43) e descartando a constante arbitrária \mathbf{f} pode-se determinar que

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4\pi} \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r})] - \frac{1}{8\pi\eta} \nabla \cdot [\mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})] = \\ & -\frac{\mu}{8\pi\eta} \left\{ \nabla \cdot [\mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x})] - \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Agora, a Eq. (4.49) pode ainda ser simplificada considerando-se o resultado da condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathcal{G} = \mathbf{0}$ e a simetria de \mathcal{G} , tal que $\mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \nabla(H^2/2) = \nabla \cdot [\mathcal{G}(\mathbf{r})(H^2/2)]$. Sob essas condições, a Eq. (4.49) torna-se

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4\pi} \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r})] - \frac{1}{8\pi\eta} \nabla \cdot [\mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})] = \\
& -\frac{\mu}{8\pi\eta} \nabla \cdot \left\{ \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Seria importante notar que a Eq. (4.50) acima é válida em qualquer ponto do domínio, exceto no ponto singular \mathbf{x}_0 . Agora, considere um volume material de fluido V envolvido por uma superfície simplesmente ou multiplamente conexa S a fim de avaliar a integração da Eq. (4.50). A superfície S pode ser composta de superfícies fluidas, interfaces fluidas ou sólidas. Como antes, existem duas situações a serem consideradas.

Singularidade fora de V : Para este caso, seleciona-se o ponto singular \mathbf{x}_0 fora de V . Então, todos os termos do teorema recíproco são regulares ao longo de V , e assim, após a integração da Eq. (4.50) a representação integral do teorema recíproco assume a forma

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4\pi} \int_V \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r})] dV - \frac{1}{8\pi\eta} \int_V \nabla \cdot [\mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})] dV = \\
& -\frac{\mu}{8\pi\eta} \int_V \nabla \cdot \left\{ \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \right\} dV.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Além disso, as integrais de volume na Eq. (4.51) são convertidas a integrais de superfície sobre S , utilizando o teorema da divergência. Então,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8\pi\eta} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS - \frac{3}{4\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \\
& \frac{\mu}{8\pi\eta} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{4.52}$$

em que \mathbf{n} é o vetor unitário normal a S direcionado para a parte exterior de S . A Eq. (4.52) é a representação integral do escoamento se o ponto singular encontra-se localizado fora de V .

Singularidade dentro de V : Similar à análise apresentada em §4.3.2, se existe uma singularidade localizada em \mathbf{x}_0 dentro de V , é necessário que a mesma seja excluída da integração sobre V . Assim sendo, repete-se o procedimento anterior definindo uma pequena região esférica V_ε (i.e. um “*cut-off*” da singularidade) de raio ε centralizada em \mathbf{x}_0 , assim como ilustrado na Fig. (4.2). Além disso, as funções na Eq. (4.11) são regulares ao longo do volume reduzido $V - V_\varepsilon$. Então, integrando a Eq. (4.11) sobre

$V - V_\varepsilon$ e convertendo as integrais de volume em integrais de superfície usando o teorema da divergência, determina-se

$$-\frac{1}{8\pi\eta} \int_{S, S_\varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) dS - \frac{3}{4\pi} \int_{S, S_\varepsilon} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) dS + \frac{\mu}{8\pi\eta} \int_{S, S_\varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) dS = \mathbf{0}, \quad (4.53)$$

em que S_ε é uma superfície esférica envolvendo V_ε , assim como indicado na Fig. (4.2). Fazendo o raio ε tendendo a zero, obtém-se as seguintes expressões para os termos dominantes em ε para os tensores \mathbf{G} e \mathcal{T} , lembrando que $\mathbf{n}_i = \mathbf{r}/\varepsilon$,

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{I}}{\varepsilon} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{\varepsilon^3} = \frac{\mathbf{I}}{\varepsilon} + \frac{\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i}{\varepsilon}; \quad \mathcal{T}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{\varepsilon^5} = \frac{\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i}{\varepsilon^2}. \quad (4.54)$$

Sobre S_ε , $dS = \varepsilon^2 d\Omega$, em que, como antes, Ω é o ângulo sólido. Substituindo essas expressões na Eq. (4.53) e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\mathbf{I}}{\varepsilon} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{\varepsilon^3} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) \varepsilon^2 d\Omega = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\mathbf{I}}{\varepsilon} + \frac{\mathbf{n}_i\mathbf{n}_i}{\varepsilon} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) \varepsilon^2 d\Omega &= \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, os valores de \mathbf{u} , \mathbf{H} e $\boldsymbol{\sigma}$ se aproximam de seus valores correspondentes quando avaliados no centro de V_ε , i.e. a $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ e $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_0)$, respectivamente. Devido à mesma dependência linear em ε , o seguinte termo também tende a zero no limite $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) \varepsilon^2 d\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0. \quad (4.56)$$

Também a contribuição integral do “*stresslet*” para o escoamento é determinada. No limite $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{\varepsilon^5} \right) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) dS = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{n}_i\varepsilon}{\varepsilon^5} \right) \cdot \mathbf{n}_i(\mathbf{x}) dS &= \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\varepsilon^4} \cdot \int_{S_\varepsilon} \mathbf{r}\mathbf{r} dS. \end{aligned} \quad (4.57)$$

E, usando o teorema da divergência,

$$\int_{S_\varepsilon} \mathbf{r} \mathbf{r} dS = \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \mathbf{r} \mathbf{n}_i dS = \varepsilon \int_{V_\varepsilon} \nabla \mathbf{r} dV = \frac{4\pi}{3} \mathbf{I} \varepsilon^4. \quad (4.58)$$

Portanto, substituindo (4.55-4.57) na Eq. (4.53), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = & \frac{1}{8\pi\eta} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \frac{3}{4\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS - \\ & \frac{\mu}{8\pi\eta} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS, \end{aligned} \quad (4.59)$$

A Eq. (4.59) é a representação integral para o escoamento de Stokes de um fluido magnético em termos de distribuições de singularidades sobre a superfície, envolvendo as funções de Green \mathbf{G} e \mathcal{T} . A primeira distribuição no lado direito da Eq. (4.59) é designado de potencial de simples camada, a segunda distribuição é denominado potencial de camada dupla. Ambas as integrais já estão presentes na formulação integral de contorno tridimensional para fluidos não-magnéticos. A última integral, entretanto, representa uma contribuição extra ao potencial de camada simples pelo fato de que o fluido é polar.

4.4.3 Representação integral em termos da condição de salto

Singularidade dentro do domínio do fluido externo V : Usando a identidade recíproca (4.52) para o escoamento interno \mathbf{u}' (dentro da gota) com o ponto \mathbf{x}_0 localizado externamente à gota, resulta em

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi\eta} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS - \frac{3\lambda_\eta}{4\pi} \int_S \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \\ \frac{\alpha\mu}{8\pi\eta} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}'\mathbf{H}'(\mathbf{x}) - \left(\frac{H'^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

em que, como definido anteriormente, $\lambda_\eta = \eta'/\eta$ e $\alpha = \mu'/\mu$. Agora, aplicando a Eq. (4.59) para o escoamento externo submetido a um escoamento externo imposto $\mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_0)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = & \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{8\pi\eta} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS + \\ & \frac{3\lambda_\eta}{4\pi} \int_S \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS - \\ & \frac{\alpha\mu}{8\pi\eta} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}'\mathbf{H}'(\mathbf{x}) - \left(\frac{H'^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS, \end{aligned} \quad (4.61)$$

e combinando o resultado com a Eq. (4.60), a representação integral é obtida em termos do salto do vetor de tensões $\Delta \mathbf{t}(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = & \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{8\pi\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{t}(\mathbf{x}) dS - \\ & \frac{3}{4\pi} \int_S [\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \lambda_\eta \mathbf{u}'(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \\ & \frac{\mu}{8\pi\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] - \right. \\ & \left. \alpha \left[\mathbf{H}'\mathbf{H}'(\mathbf{x}) - \left(\frac{H'^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \right\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Singularidade dentro do domínio do fluido interno V' : Repete-se o cálculo acima para o escoamento interno. Portanto, a representação integral para este escoamento é obtida quando a Eq. (4.59) é aplicada,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\mathbf{x}_0) = & \frac{1}{8\pi\lambda_\eta\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \frac{3}{4\pi} \int_S \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS - \\ & \frac{\alpha\mu}{8\pi\lambda_\eta\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}'\mathbf{H}'(\mathbf{x}) - \left(\frac{H'^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS, \end{aligned} \quad (4.63)$$

Novamente, usando a identidade recíproca (4.50) para o escoamento externo \mathbf{u} (fora da gota) com um ponto \mathbf{x}_0 localizado no interior da gota, pode-se determinar que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{8\pi\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS - \frac{3}{4\pi} \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS + \\ & \frac{\mu}{8\pi\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}) dS - \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

A representação integral do escoamento interno como função da condição de salto é obtida combinando as Eqs. (4.63) e (4.64). Uma manipulação algébrica similar conduz ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \lambda_\eta \mathbf{u}'(\mathbf{x}_0) = & \mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{8\pi\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS - \\ & \frac{3}{4\pi} \int_S [\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \lambda_\eta \mathbf{u}'(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \\ & \frac{\mu}{8\pi\eta} \int_S \boldsymbol{\mathcal{G}}(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \left[\mathbf{H}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \left(\frac{H^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] - \right. \\ & \left. \alpha \left[\mathbf{H}'\mathbf{H}'(\mathbf{x}) - \left(\frac{H'^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \right\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS. \end{aligned} \quad (4.65)$$

4.4.4 Representação integral para a interface

A representação integral para a solução do escoamento na interface é obtida pela aplicação da condição de salto $[\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \lambda_\eta \mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)]/2$ às Eqs. (4.62) e (4.65). No limite quando \mathbf{x}_0 tende para a interface, as condições de contorno devem ser aplicadas; $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}_0)$ (continuidade da velocidade através da interface), $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}'_t$ (continuidade da componente tangencial do campo magnético), $\mu \mathbf{H}_n = \mu' \mathbf{H}'_n$ (continuidade da componente normal da indução magnética) e a descontinuidade no salto do vetor de tensões $\Delta \mathbf{t}$, que é dado pela Eq. (4.8). Sob essas condições, somente a representação integral para a interface fluido-fluido S precisa ser considerado, portanto

$$\begin{aligned}
 (1 + \lambda_\eta) \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = & 2\mathbf{u}^\infty(\mathbf{x}_0) - \frac{1}{4\pi\eta} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \Gamma(\nabla^s \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS - \\
 & \frac{3}{2\pi} (1 - \lambda_\eta) \int_S \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{T}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \\
 & \frac{\mu(1 - \alpha)}{4\pi\eta} \int_S \mathcal{G}(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \left[\mathbf{H}_t \mathbf{H}_t(\mathbf{x}) - \left(\frac{H_t^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] - \right. \\
 & \left. \frac{1}{\alpha} \left[\mathbf{H}_n \mathbf{H}_n(\mathbf{x}) - \left(\frac{H_n^2(\mathbf{x})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \right\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS,
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

em que as componentes normal e tangencial do vetor campo magnético são, respectivamente, $\mathbf{H}_n = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ e $\mathbf{H}_t = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n})$.

4.4.5 Representação integral adimensional

Todas as quantidades acima podem ser adimensionalizadas em um contexto de deformação de uma gota de ferrofluido, utilizando o raio da gota não-deformada a , a taxa de relaxação da tensão interfacial $\Gamma/\mu a$ e a intensidade do campo magnético aplicado H^∞ . Neste caso, pode-se definir as seguintes quantidades adimensionais

$$\tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\mathbf{r}}) = a\mathcal{G}(\mathbf{r}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\eta}{\Gamma} \mathbf{u}, \quad \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{\mathbf{r}}) = a^2 \mathcal{T}(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H}}{H^\infty}, \tag{4.67}$$

e, assim, escrever a Eq. (4.66) em termos adimensionais. Então, obtém-se que a representação integral adimensional para a solução do escoamento na interface é dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}_0) = & \frac{2\tilde{\mathbf{u}}^\infty(\tilde{\mathbf{x}}_0)}{(1 + \lambda_\eta)} - \frac{1}{4\pi(1 + \lambda_\eta)} \int_S (\tilde{\nabla}^s \cdot \mathbf{n}) \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{S} - \\
& \frac{3(1 - \lambda_\eta)}{2\pi(1 + \lambda_\eta)} \int_S \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \tilde{\mathcal{T}}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{S} + \\
& \frac{Ca_m(1 - \alpha)}{4\pi(1 + \lambda_\eta)} \int_S \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \left\{ \left[\tilde{\mathbf{H}}_t \tilde{\mathbf{H}}_t(\tilde{\mathbf{x}}) - \left(\frac{\tilde{H}_t^2(\tilde{\mathbf{x}})}{2} \right) \mathbf{I} \right] - \right. \\
& \left. \frac{1}{\alpha} \left[\tilde{\mathbf{H}}_n \tilde{\mathbf{H}}_n(\tilde{\mathbf{x}}) - \left(\frac{\tilde{H}_n^2(\tilde{\mathbf{x}})}{2} \right) \mathbf{I} \right] \right\} \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{S},
\end{aligned} \tag{4.68}$$

em que $\tilde{\mathbf{u}}^\infty(\tilde{\mathbf{x}}_0) = Ca(\tilde{\mathbf{D}}^\infty + \tilde{\mathbf{W}}^\infty) \cdot \tilde{\mathbf{x}}$. Aqui $\tilde{\mathbf{D}}^\infty$ e $\tilde{\mathbf{W}}^\infty$ denotam os tensores taxa de deformação e vorticidade do escoamento cisalhante linear imposto, respectivamente. Além disso, $Ca = \dot{\gamma}\eta a/\Gamma$ é o número de capilaridade, que representa a razão entre as tensões viscosas e a tensão superficial, $Ca_m = \mu_0(1 + \chi)(H^\infty)^2 a/\Gamma$ é o número de capilaridade magnético baseado nas propriedades da gota, que representa a razão entre as tensões magnéticas e a tensão superficial.

De maneira similar, pode-se adimensionalizar a Eq. (4.26). A irrotacionalidade de $\tilde{\mathbf{H}}$ implica que $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\nabla}\tilde{\Phi}$. Definindo o potencial adimensional como sendo $\tilde{\Phi} = \Phi/aH^\infty$, pode-se escrever que

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}_0) = \tilde{\Phi}^\infty(\tilde{\mathbf{x}}_0) + \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \int_S \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathbf{r}}) \tilde{\nabla}\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{S}. \tag{4.69}$$

As Eq. (4.68) e (4.69) são consideradas o principal resultado da formulação integral de contorno magneto-hidrodinâmica apresentada aqui. A análise descrita nesta seção poderá ser utilizada em trabalhos futuros a fim de investigar, por simulações numéricas, o problema tridimensional da deformação e orientação de uma gota de fluido magnético quando submetido à ação de um campo de velocidades e/ou magnético impostos. A partir daí, portanto, poderão ser determinadas algumas propriedades macroscópicas do escoamento de emulsões magnéticas, quando a razão de viscosidade e a permeabilidade magnética das duas fases não são necessariamente iguais. A representação integral para o campo de velocidades acoplada com a representação para o potencial magnético irá determinar a evolução da forma da gota. A formulação matemática descrita aqui pode ser estendida ao caso de emulsões polidispersas, para o caso de escoamentos gerais na presença de campo magnético, onde nenhum resultado experimental acerca da evolução da forma da gota é atualmente disponível.

Cabe discutir, neste momento, sobre as dificuldades inerentes à implementação do

método integral de contorno para o problema aqui avaliado. A primeira delas, discutida em detalhes por Oliveira (2007), refere-se ao fato de que, neste tipo de simulação numérica, a história do escoamento deve estar desacoplada da topologia da malha, a ser construída para discretizar a superfície. Isso significa que, a cada evolução (passo de tempo) do sistema para se determinar a deformação e a orientação da gota, deve-se promover a relaxação da malha, a fim de garantir que os elementos da malha sejam aproximadamente equiláteros. Outro ponto que merece destaque refere-se à elevada não linearidade presente nesses sistemas. Espera-se que, devido à influência do campo magnético, as gotas magnéticas devem evoluir para formas que possuam extremidades pontiagudas, ou seja, com pequenos raios de curvatura. Nesse sentido, é necessário que seja implementada uma metodologia de redistribuição de pontos sobre a superfície da malha da superfície que privilegie, inclusive com o aumento da resolução global da malha, essas regiões de pequenos raios de curvatura, assim como discutido por Cristini et al. (2001). Isso requer, então, que seja considerada uma malha de discretização do domínio computacional com topologia variável.

5 UMA ANÁLISE DIMENSIONAL DA CONVECÇÃO TERMOMAGNÉTICA EM CAVIDADES RETANGULARES DELGADAS

5.1 Formulação Teórica

O tratamento teórico apresentado nesta seção se destina a modelar o movimento das correntes convectivas geradas devido aos gradientes de densidade ou de susceptibilidade magnética em um fluido magnético.

A Fig. (5.1) apresenta uma situação onde ocorre a formação de correntes convectivas em uma suspensão magnética diluída de partículas de ferrita suspensas em óleo mineral, sob ação de um campo magnético externo. Tais correntes convectivas são geradas devido aos gradientes de susceptibilidade magnética presentes na suspensão. Na Fig. (5.1) as setas de linha cheia representam as linhas de campo e as setas de linha pontilhada representam as linhas de corrente.

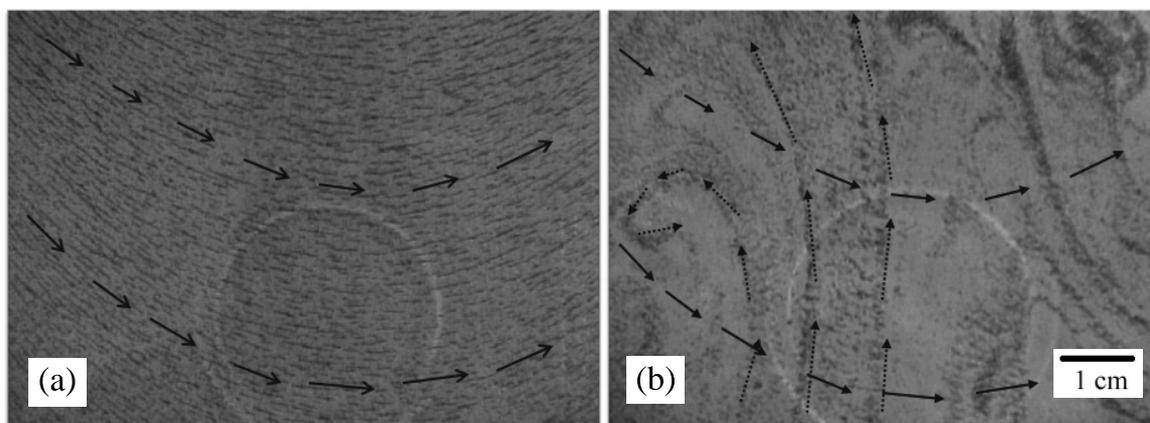


Figura 5.1: Formação de correntes convectivas devido a gradientes de susceptibilidade magnética em uma suspensão diluída de partículas de ferrita em óleo mineral.

Na Fig. (5.1.a), a concentração de partículas é praticamente uniforme, o que indica a ausência de correntes convectivas. Entretanto, na Fig. (5.1.b), existem gradientes de concentração de partículas e, conseqüentemente, gradientes de susceptibilidade magnética. Tais gradientes, sob ação de um campo magnético induzirão a formação de correntes convectivas magnéticas. Note que, neste caso, temos a formação de correntes

convectivas mesmo sem a presença de gradientes de temperatura, tendo em vista que essa visualização foi realizada à temperatura constante.

Cabe mencionar que essa formação de correntes convectivas devido à ação de um campo magnético pode ser combinada à convecção natural (induzida por gradientes de densidade), gerando um processo de convecção termomagnética que pode resultar em aumento da eficiência de refrigeração de dispositivos eletrônicos. Nesse sentido, esse trabalho se insere no intuito de determinar, via análises de escalas das equações do movimento, como se relacionam as taxas de transferência de calor e o campo magnético aplicado, para um fluido magnético confinado em uma cavidade retangular delgada.

5.1.1 Magnetostática

Na ausência de campos elétrico, e considerando-se que os campos magnéticos não variam com o tempo, as equações de Maxwell (Rosensweig, 1985; Grant e Philips, 1990) se reduzem ao limite magnetostático com a indução magnética \mathbf{B} e o campo magnético \mathbf{H} descritos por

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

em que a relação magnética $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H})$ é válida em qualquer ponto do material. Aqui, \mathbf{M} é a magnetização local e μ_0 é a permeabilidade do espaço livre. O líquido magnetizável obedece a relação superparamagnética $\mathbf{M} = \bar{\chi}(\mathbf{T})\mathbf{H}$, com $\bar{\chi}$ sendo a susceptibilidade magnética e T é a temperatura.

5.1.2 Termoconvecção gravitacional e magnética

Considera-se nesse trabalho, um fluido magnético incompressível estratificado no qual as variações de massa específica $\Delta\bar{\rho}$ e de susceptibilidade magnética $\Delta\bar{\chi}$ com a temperatura no escoamento são ambas pequenas, quando comparadas com a massa específica ρ e a susceptibilidade magnética χ (correspondentes aos valores das quantidades em uma temperatura de referência T_0), ou seja, $\Delta\bar{\rho}/\rho \ll 1$ e $\Delta\bar{\chi}/\chi \ll 1$. Aqui,

$$\bar{\rho} = \rho + \Delta\bar{\rho} \quad \text{e} \quad \bar{\chi} = \chi + \Delta\bar{\chi} \quad (5.2)$$

dependem somente das variações de temperatura. Portanto, podemos escrever tais propriedades como expansões em séries de Taylor de primeira ordem em torno do valor de referência em T_0 (ρ, χ). Assim sendo, encontra-se que

$$\bar{\rho} = \rho - \underbrace{\left(\frac{d\bar{\rho}}{dT} \right)_{T=T_0} \Delta T}_{\Delta\bar{\rho}} \quad (5.3)$$

e

$$\bar{\chi} = \chi - \underbrace{\left(\frac{d\bar{\chi}}{dT} \right)_{T=T_0} \Delta T}_{\Delta\bar{\chi}}. \quad (5.4)$$

Agora, da aproximação de Boussinesq, assume-se que a intensidade da força de empuxo por unidade de volume f_b agindo sobre um fluido de massa específica ρ é dada por

$$f_b = \rho\beta g\Delta T, \quad (5.5)$$

em que $\beta = -(1/\rho)d\bar{\rho}/dT$ denota o coeficiente de expansão térmica, $\Delta T = T - T_0$ representa as variações de temperatura em termos de uma temperatura de referência T_0 e g é a aceleração da gravidade local. Similarmente, a equivalente aproximação de Boussinesq para a intensidade da força magnética (por unidade de volume) induzindo a convecção magnética no fluido pode ser escrita como

$$f_m = \mu_0\chi\beta_m\Delta T \frac{d}{dy} \left(\frac{H^2}{2} \right), \quad (5.6)$$

em que $\beta_m = -(1/\chi)d\bar{\chi}/dT$ é o coeficiente pirométrico.

5.1.3 Hidrodinâmica

As equações de balanço hidrodinâmica são necessárias para a solução deste problema acoplado. A equação da continuidade para um fluido incompressível é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.7)$$

em que \mathbf{u} é o campo de velocidade Euleriana. Assim como descrito por (Rosensweig, 1985; Cunha e Sobral, 2004) o acoplamento entre magnetismo e hidrodinâmica é dado pelo tensor de tensões local $\boldsymbol{\sigma}$ que considera os efeitos hidrodinâmicos e magnéticos no escoamento; $\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}$. Aqui a notação $\mathbf{B}\mathbf{H}$ representa o produto diádico entre \mathbf{B} e \mathbf{H} , η denota a viscosidade de cisalhamento efetiva da suspensão coloidal, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\mathbf{D} = (1/2)(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$ é o tensor taxa de deformação, em que o superscrito T denota a transposição do tensor. Além disso, $P = p_h + p_m$ é a pressão

total, em que p_h é a pressão hidrodinâmica e $p_m = \mu_0(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})/2$ é a pressão magnética (pressão de Maxwell).

Quando torques internos são ausentes no escoamento, ou seja $\mathbf{M} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$, o tensor de tensões é simétrico, resultando no seguinte balanço de forças por unidade de volume para um fluido magnético incompressível viscoso

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \bar{\rho}(T) \mathbf{g} + \mu_0 \bar{\chi}(T) \nabla \left(\frac{H^2}{2} \right), \quad (5.8)$$

em que, novamente η é a viscosidade efetiva do fluido magnético. O último termo do lado direito da Eq. (5.8) é uma força por unidade de volume representando a força magnética agindo sobre as partículas da suspensão.

Agora, uma vez que $\bar{\rho} = \bar{\rho}(T)$ e $\bar{\chi} = \bar{\chi}(T)$ e, após a utilização das aproximações de Boussinesq mencionadas acima para as forças gravitacionais e magnética, a Eq. (5.8) pode ser aproximada por

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \beta \Delta T \mathbf{g} + \mu_0 \chi \beta_m \Delta T \frac{d}{dy} \left(\frac{H^2}{2} \right). \quad (5.9)$$

E, finalmente obtém-se a equação de balanço da energia, expressa pela primeira lei da Termodinâmica

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha_T \nabla^2 T + 2\eta(\mathbf{D} : \mathbf{D}) + \frac{\mu_0(1 + \chi)}{c_e \rho} \mathbf{H} \mathbf{H} : \mathbf{D}, \quad (5.10)$$

em que c_e é o calor específico do fluido. Os últimos dois termos na Eq. (5.10) são, respectivamente, a dissipação viscosa (produção de energia interna devido às tensões cisalhantes) e a dissipação de energia devido às forças magnéticas. Cabe mencionar que, na presente aproximação, estes termos representam contribuições de segunda ordem $\mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)$ tal que esses termos dissipativos podem ser desprezados quando comparado com os termos de difusão molecular de energia $\alpha_T \nabla^2 T$ e de convecção de energia $\mathbf{u} \cdot \nabla T$. Os detalhes de como o último termo da Eq. (5.10) pode ser considerado um termo de segunda ordem $\mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)$ serão explicitados em §5.3.1. Portanto, a equação de balanço da energia reduz-se, nessa condição, a

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha_T \nabla^2 T. \quad (5.11)$$

5.2 Propriedades dos fluidos magnéticos

Fluidos magnéticos são suspensões coloidais estáveis, compostas por nanopartículas de material ferromagnético ou ferrimagnético sólido que possui elevadas susceptibilidades magnéticas. Os fluidos magnéticos padrões possuem pequenas frações volumétricas de partícula ϕ , portanto, em geral, suas propriedades podem ser expressas como uma função linear de ϕ . Em particular, para um fluido magnético, o coeficiente de expansão volumétrica, a difusividade térmica, a condutividade térmica, a densidade, a viscosidade e a magnetização de saturação podem ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 f_\beta(\phi), & \alpha_T &= \alpha_0 f_\alpha(\phi), & \kappa &= \kappa_0 f_\kappa(\phi), \\ \rho &= \rho_0 f_\rho(\phi), & \eta &= \eta_0 f_\eta(\phi), & \text{e } M_s &= \phi M_d, \end{aligned} \quad (5.12)$$

em que o subscrito “0” indica as propriedades do fluido carreador e M_d representa a magnetização intrínseca da partícula que compõe o fluido magnético.

De acordo com a teoria de Sangani e Acrivos para suspensões diluídas (Sangani e Acrivos, 1983),

$$f_\kappa = 1 + \frac{3\phi(\hat{\kappa} - 1)}{(\hat{\kappa} + 2)}, \quad (5.13)$$

em que $\hat{\kappa} = \kappa_f/\kappa_0$ é a razão de condutividade térmica entre a partícula e o fluido carreador. Além disso, Cunha e Sobral propõem (Cunha e Sobral, 2004)

$$f_\eta = 1 + \phi \left[\frac{5}{2} + \frac{3}{2} G(\varpi) \right], \quad (5.14)$$

em que $G(\varpi) = \varpi \mathcal{L}(\varpi)/(4 + 2\varpi \mathcal{L}(\varpi))$, com a função de Langevin de primeira ordem $\mathcal{L}(\varpi) = \coth \varpi - \varpi^{-1}$ e $\varpi = mH/\kappa_B T$ (Rosensweig, 1985). Aqui m denota o momento de dipolo magnético das partículas, $\kappa_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ é a constante de Boltzmann e T é a temperatura absoluta. O parâmetro ϖ , usualmente chamado de parâmetro de razão de energias representa a relação entre a energia magnética mH e a energia térmica $\kappa_B T$ associada ao movimento Browniano das partículas magnéticas. Por meio de uma média volumétrica, determina-se que a densidade do fluido magnético pode ser escrita como $\rho = 1 + \phi(\hat{\rho} - 1)$, em que $\hat{\rho} = \rho_f/\rho_0$ é a razão de densidade entre a partícula e o fluido carreador. Como pode ser observado, as diferenças entre β e β_0 ; α_T e α_0

são tão pequenas para os regimes diluídos explorados aqui, tal que serão considerados na presente análise $f_\beta = f_\alpha \approx 1$. Deve-se ressaltar que o coeficiente pirométrico $\beta_m = -(1/\chi)d\bar{\chi}/dT$ pode ser determinado a partir da obtenção do gráfico da susceptibilidade magnética como função da temperatura do material magnético. Em termos práticos, considera-se para tal os valores correspondentes à condição de saturação. Neste caso, o coeficiente pirométrico seria dado por $\beta_m^s = -(1/\chi^s)d\bar{\chi}^s/dT = \beta_m^s(T, \phi)$.

5.3 Análises de escala

A razão de aspecto da cavidade retangular delgada, mostrada na Fig. (5.2), é definida como $\delta_c/\ell \ll 1$, em que δ_c é a espessura e ℓ é a altura da cavidade.

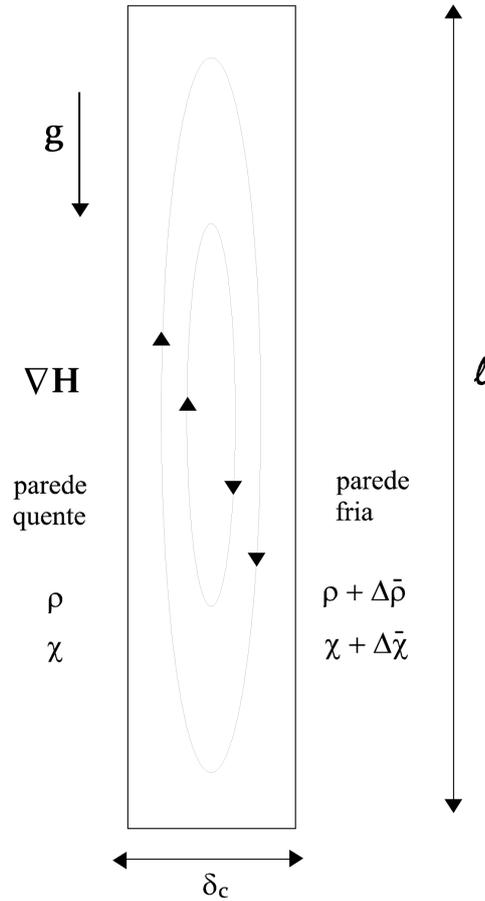


Figura 5.2: Representação esquemática da geometria da cavidade retangular, mostrando as paredes quente e fria.

Com esta consideração, as escalas apropriadas para o problema são $x \sim \ell$, $y \sim \delta_c$, $u \sim U$, $v \sim U(\delta_c/\ell)$, $|\Delta T| \sim \Delta\Theta$ e $|\nabla(H^2/2)| \sim \Delta(H^2/2)_0/\delta_c$, em que $\Delta\Theta$ é uma escala típica para diferenças de temperatura e $\Delta(H^2/2)_0/\delta_c$ é uma escala típica para as variações do quadrado da intensidade do campo magnético. Agora, é necessário avaliar o balanço entre as forças relevantes presentes nas equações governantes a fim

de definir uma escala para o número de Nusselt para o estudo do escoamento complexo envolvendo a convecção termomagnética.

A partir deste ponto, faz-se uma importante consideração fixando que as forças inerciais são muito menores que as forças viscosas. Desse modo, a partir da equação do momento linear (5.9) para um escoamento laminar em regime permanente tem-se que $|\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})| \ll |\eta \nabla^2 \mathbf{u}|$. E, em termos das escalas típicas apresentadas, $U^2/\ell \ll \nu U/\delta_c^2$, em que $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido. Além disso, lembrando-se que os termos da equação de energia (5.10) referentes à produção de energia interna devido às tensões viscosas $2\eta(\mathbf{D} : \mathbf{D})$ e aos efeitos magnéticos $\mu_0 c_e^{-1} \rho^{-1} (1 + \chi) \mathbf{H} \mathbf{H} : \mathbf{D}$ são termos de segunda ordem, $\mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)$, o balanço de energia reduz-se a $|\mathbf{u} \cdot \nabla T| \sim |\alpha_T \nabla^2 T|$. Portanto, uma escala para δ_c como função de U , pode ser

$$\frac{U \Delta \Theta}{\ell} \sim \frac{\alpha_T \Delta \Theta}{\delta_c^2} \Rightarrow \delta_c \sim \left(\frac{\alpha_T \ell}{U} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.15)$$

Neste momento, usando a equação de balanço e (5.15) determina-se que o número de Prandtl $Pr = \nu/\alpha_T$ deve obedecer à condição $Pr \gg 1$, que é uma condição típica encontrada para fluidos viscosos, assim como os óleos minerais utilizados em transformadores elétricos.

5.3.1 Balanço entre forças magnéticas e viscosas

Considerando que as forças magnéticas e viscosas são da mesma ordem na Eq. (5.8) e observando que os maiores gradientes de temperatura ocorrem na direção y , pode-se considerar que $|\eta \nabla^2 \mathbf{u}| \sim |\mu_0 \chi \beta_m \Delta \Theta \nabla(H^2/2)|$ o que resulta em

$$\frac{\eta U}{\delta_c^2} \sim \frac{\mu_0 \chi \beta_m \Delta \Theta \nabla(H^2/2)_0}{\delta_c} \Rightarrow U \sim \frac{\mu_0 \chi \beta_m \Delta \Theta \nabla(H^2/2)_0 \delta_c}{\eta}, \quad (5.16)$$

em que U é uma escala típica de velocidade na direção x . Cabe mencionar, a partir da Eq. (5.16), que $H \sim U$. Nesse sentido, justifica-se a consideração de que o termo $\mathbf{H} \mathbf{H} : \mathbf{D}$ da Eq. (5.10) é um termo de segunda ordem $\mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)$ e, portanto, desprezado nessa análise de escalas. Substituindo a Eq. (5.15) em (5.16) e fazendo algumas manipulações algébricas, a escala U pode ser reescrita como

$$U \sim (Ra_m)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\alpha_T}{\ell} \right) \quad \text{com} \quad Ra_m = \frac{\mu_0 \chi \beta_m \Delta \Theta \nabla(H^2/2)_0 \ell^2}{\alpha_T \eta} \quad (5.17)$$

definido como o número de Rayleigh magnético Ra_m . O número de Rayleigh é um importante parâmetro físico associado com os transportes convectivos em escoamentos não-isotérmicos, definido como a razão entre as forças que induzem o escoamento e as forças que surgem dos efeitos viscosos, cuja escala típica é $\alpha_T \eta$. A definição de Ra_m na Eq. (5.17) pode ser expressa em termos das propriedades do fluido carreador, de acordo com as expressões dadas na Eq. (5.12). Portanto, $Ra_m = \mathcal{F}(\phi) Ra_m^{(0)}$, em que

$$\mathcal{F}(\phi) = \frac{\phi}{f_\alpha(\phi) f_\eta(\phi)} \quad (5.18)$$

é uma função apenas da fração volumétrica de partículas, e

$$Ra_m^{(0)} = \frac{\mu_0 \chi \beta_m \Delta \Theta \Delta (H^2/2)_0 \ell^2}{\alpha_0 \eta_0} \quad (5.19)$$

é o número de Rayleigh magnético baseado somente nas propriedades do fluido ambiente.

Além disso, substituindo a Eq. (5.17) na Eq. (5.15) obtém-se a escala de comprimento transversal como sendo $\delta_c \sim \ell (Ra_m)^{-\frac{1}{3}}$. O coeficiente de transferência de calor por convecção magnética h_m pode ser expresso em termos da condutividade térmica do fluido κ e da escala de comprimento transversal δ_c tal que $h_m \sim (\kappa/\delta_c) \sim (\kappa/\ell) (Ra_m)^{\frac{1}{3}}$. Assim, o número de Nusselt magnético é determinado como sendo

$$Nu_m = \frac{h_m \ell}{\kappa} \Rightarrow Nu_m = \mathcal{C}_1 (Ra_m)^{\frac{1}{3}}, \quad (5.20)$$

em que \mathcal{C}_1 é uma constante de calibração que pode ser encontrada experimentalmente.

5.3.2 Balanço entre forças gravitacionais e viscosas

Na ausência de forças magnéticas, se a força gravitacional produz efeitos significantes em escoamentos, o balanço de força deve ser $|\rho \beta \Delta T \mathbf{g}| \sim |\eta \nabla^2 \mathbf{u}|$. Uma condição de contorno de fluxo de calor constante em uma das paredes não-adiabáticas da cavidade $\dot{q} = -\kappa(\partial T/\partial y)$ é considerada, com \dot{q} sendo o fluxo de calor que atravessa a parede, sendo o mesmo transferido para as camadas do fluido em contato por meio da condução de calor. Sob essas condições, foi estabelecido por Bejan (1984) que o número de Nusselt

escala com $Nu_g \sim (Ra_g)^{\frac{1}{5}}$, em que o número de Rayleigh gravitacional Ra_g é definido como sendo

$$Ra_g = \frac{\rho \beta g \dot{q} \ell^4}{\alpha_T \eta \kappa}. \quad (5.21)$$

Em termos das propriedades do fluido carreador, considerando as expressões definidas na Eq. (5.12), Ra_g pode ser reescrito como $Ra_g = \mathcal{G}(\phi) Ra_g^{(0)}$, em que

$$\mathcal{G}(\phi) = \frac{f_\rho(\phi) f_\beta(\phi)}{f_\alpha(\phi) f_\eta(\phi) f_\kappa(\phi)} \quad (5.22)$$

e

$$Ra_g^{(0)} = \frac{\rho_0 \beta_0 g \dot{q} \ell^4}{\alpha_0 \eta_0 \kappa_0} \quad (5.23)$$

é o número de Rayleigh gravitacional baseado somente nas propriedades do fluido carreador. O número de Nusselt gravitacional é dado por

$$Nu_g = \mathcal{C}_2 (Ra_g)^{\frac{1}{5}}, \quad (5.24)$$

em que, como antes, \mathcal{C}_2 é uma constante de calibração determinada experimentalmente. É importante notar que Ra_g é calculado utilizando-se propriedades da mistura (densidade, coeficiente volumétrico de expansão térmica, difusividade térmica e viscosidade) do fluido magnético até mesmo se nenhum campo magnético foi aplicado.

5.4 Coeficiente de eficácia térmica

Nesta seção, aplica-se a análise de escalas desenvolvida aqui para investigar o aumento das taxas de transferência de calor (ou seja, de refrigeração) em transformadores elétricos utilizando uma suspensão diluída de partículas magnéticas dispersas em óleo mineral. Se os coeficientes de transferência de calor por convecção são conhecidos (ou seja, gravitacional e magnético), o fluxo de calor total \dot{q}_t pode ser calculado em termos das duas contribuições,

$$\dot{q}_t = \dot{q}_m + \dot{q}_g = (h_m + h_g) (T_w - T_\infty), \quad (5.25)$$

em que T_w e T_∞ são, respectivamente, as temperaturas médias da parede e do fluido carreador. Define-se a eficácia térmica como sendo a razão entre o fluxo de calor total combinando os efeitos gravitacionais e magnéticos \dot{q}_t , e o fluxo de calor considerando somente a convecção gravitacional do fluido carreador (sem partículas magnéticas) \dot{q}_0 . Uma escala típica para o fluxo de calor total transferido da parede vertical aquecida para o fluido magnético é dada por

$$\dot{q}_t \sim \frac{\kappa \Delta T}{\ell} \left[(Ra_m)^{\frac{1}{3}} + (Ra_g)^{\frac{1}{5}} \right]. \quad (5.26)$$

Por outro lado, o fluxo de calor equivalente entre a parede e o fluido carreador puro \dot{q}_0 , é expresso por

$$\dot{q}_0 = h_0 (T_w - T_0) = \frac{\kappa_0 \Delta T}{\ell} Nu_g^{(0)} \sim \frac{\kappa_0 \Delta T}{\ell} \left(Ra_g^{(0)} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad (5.27)$$

em que h_0 é o coeficiente de transferência por convecção, κ_0 é a condutividade térmica do fluido carreador e $Nu_g^{(0)}$ e $Ra_g^{(0)}$ são os números de Nusselt e Rayleigh gravitacionais baseados no fluido carreador, respectivamente. Portanto, após algumas manipulações algébricas, o coeficiente de eficácia $\lambda_T = \dot{q}_t/\dot{q}_0$ é definido como segue

$$\lambda_T = \mathcal{C}_0 \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \right) \left(\frac{Ra_g}{Ra_g^{(0)}} \right)^{\frac{1}{5}} \left[1 + (Ra_m)^{\frac{1}{3}} (Ra_g)^{-\frac{1}{5}} \right], \quad (5.28)$$

em que \mathcal{C}_0 é uma constante determinada no limite assintótico de $\phi \rightarrow 0$ e $\lambda_T \rightarrow 1$, como mostrado abaixo. A Eq. (5.28) pode se reescrita em uma forma mais adequada em termos das propriedades do fluido carreador, ou seja,

$$\lambda_T = \mathcal{C}_0 f_\kappa(\phi) \left[\mathcal{G}(\phi)^{\frac{1}{5}} + \mathcal{F}(\phi)^{\frac{1}{3}} \left(Ra_m^{(0)} \right)^{\frac{1}{3}} \left(Ra_g^{(0)} \right)^{-\frac{1}{5}} \right]. \quad (5.29)$$

A Eq. (5.29) é o resultado-chave da presente análise de escalas. Esta predição teórica mostra que, se nenhum campo magnético é imposto sobre o fluido, $Ra_m = 0$, as variações do coeficiente de eficácia são devidas somente às mudanças das propriedades do fluido magnético, i.e. o efeito produzido pela presença das partículas. Note que, no limite assintótico $\phi \rightarrow 0$ e $\lambda_T \rightarrow 1$, $\mathcal{C}_0 = 1$.

Baseado em resultados experimentais (Jarjays et al., 1994; Caizer, 2002), obtém-se que $\Delta M \sim (\Delta\Theta)^{\frac{3}{2}}$, e, conseqüentemente, $\beta_m \sim (\Delta\Theta)^{\frac{1}{2}}$. Usando esta predição, argue-se que $h_m \sim (\Delta\Theta)^{\frac{1}{2}}$, enquanto que $h_g \sim (\Delta\Theta)^{\frac{1}{5}}$. Isso revela que a convecção produzida pelos gradientes de susceptibilidade (convecção magnética) tem uma dependência muito mais efetiva, em relação às variações de temperatura, que aquela produzida pelos gradientes de densidade, o que confirma investigações anteriores acerca do aumento da transferência de calor usando as convecções magnética e natural associadas.

5.4.1 Aplicação a transformadores elétricos

De acordo com a análise dimensional obtida neste trabalho, valores numéricos típicos para o coeficiente de eficácia podem ser estimados. Para esses cálculos, são estimadas as propriedades termomagnéticas típicas das duas fases de um fluido magnético de base lipofílica composto por partículas esféricas de ferrita. A dependência do coeficiente de eficácia com o número de Rayleigh magnético é mostrada na Fig. (5.3) para um fluido magnético típico composto por partículas de ferrita imersas em óleo mineral.

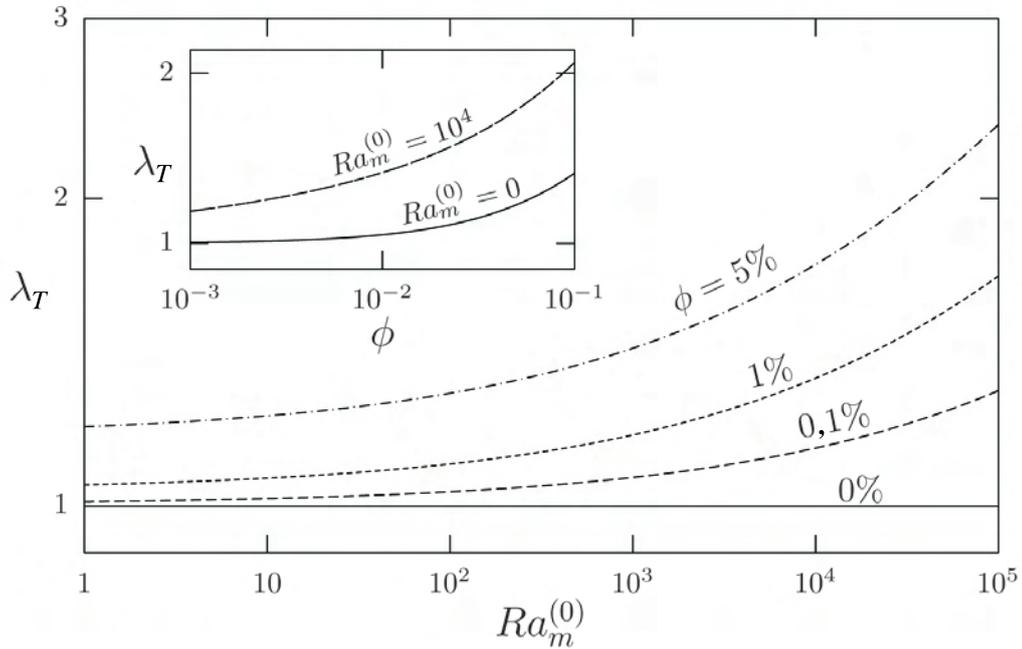


Figura 5.3: Coeficiente de eficácia para um fluido magnético típico composto por partículas de ferrita imersas em óleo mineral.

Para as partículas de ferrita, temos $M_d = 1,71 \times 10^6 A/m$, $\rho_f = 0,954 \times 10^3 kg/m^3$ e $\kappa_f = 0,802 \times 10^2 W/m \cdot K$; e para o óleo mineral $\rho_0 = 0,844 \times 10^3 kg/m^3$, $\beta_0 = 0,7 \times 10^{-3} K^{-1}$, $\eta_0 = 0,486 N \cdot s/m^2$, $\alpha_0 = 8,6 \times 10^{-8} m^2/s$ e $\kappa_0 = 0,145 W/m \cdot K$. Assim, um valor típico $Ra_m^{(0)} = 10^6$ pode ser determinado.

A Fig. (5.3) apresenta os resultados do coeficiente de eficácia como função do número de Rayleigh magnético baseado nas propriedades do fluido carreador $Ra_m^{(0)}$ para valores típicos da fração volumétrica ϕ encontradas em ferrofluidos produzidos comercialmente. Na ausência de nanopartículas o coeficiente de eficácia é sempre igual à unidade, como esperado. Quando a concentração de partículas é elevada, o coeficiente de eficácia é sensivelmente alterado. Por exemplo, para $Ra_m^{(0)} = 10^3$, que é um valor típico utilizado em aplicações de fluidos magnéticos para melhorar a refrigeração em transformadores elétricos, o coeficiente de eficácia para $\phi = 5\%$ é cerca de uma vez e meia maior que o coeficiente de eficácia para $\phi = 0,1\%$. Além disso, a partir do encarte da Fig. (5.3), é visto que até mesmo na ausência de campos magnéticos, $Ra_m^{(0)} = 0$, o coeficiente de eficácia é afetado pela presença das partículas, sendo seu efeito considerável (cerca de duas vezes e meia menor que o valor do coeficiente de eficácia obtido para $Ra_m^{(0)} = 10^4$, no caso de uma suspensão com concentração $\phi = 10\%$). Entretanto, deve-se notar que, para as condições práticas de aplicação em transformadores elétricos – $\phi = 0,1\%$, conforme discutido por Segal et al. (2000) – o efeito associado somente à presença das partículas ($Ra_m^{(0)} = 0$) é extremamente pequeno, justificando a necessidade da imposição de campos magnéticos sobre o material magnético.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho destinou-se a investigar as suspensões diluídas compostas por partículas magnéticas, cuja hidrodinâmica está intrinsecamente ligada à sua microestrutura. A dinâmica desses sistemas é governada pelas interações hidrodinâmicas, produzidas pelo fluido interveniente, e por interações dipolares magnéticas, geradas devido à magnetização das partículas.

Em particular, desenvolveu-se um código numérico para o cálculo de propriedades transporte de suspensões magnéticas diluídas, assim como as taxas de agregação e os coeficientes de autodispersão e de dispersão devido a gradientes de concentração, sob a condição de baixos números de Reynolds. Como etapa preliminar, implementou-se um código para o cômputo das interações hidrodinâmicas entre partículas magnéticas numa suspensão diluída. Dado o esforço computacional para a determinação das propriedades transporte, que exige diversas realizações, apresentou-se uma metodologia para o tabelamento das funções mobilidade para os regimes de curto e longo alcances. Para o cômputo das funções mobilidade, utilizou-se os coeficientes propostos por (Jeffrey e Onishi, 1984). Atestada a fidelidade do código, passou-se à introdução dos termos associados às forças interpartícula, em particular da força magnética.

Em seguida, implementou-se ao código numérico uma metodologia para se determinar as trajetórias limites de agregação, que definem as taxas de formação de agregados. Notou-se uma acentuada diferença entre os valores da taxa de colisão adimensional E_c para diferentes razões de aspecto λ , o que já havia sido pronunciado por Davis (1984), quando investigou o efeito das forças de van der Waals sobre a agregação de partículas. Enquanto Davis (1984) obteve que a eficiência de colisão para $\lambda = 1/2$ é cerca de três vezes maior que o valor correspondente de E_c para $\lambda = 1/8$, encontrou-se que, para partículas magnéticas a mesma propriedade é cerca de oito vezes maior, o que mostrou que as forças de interação magnética produzem maiores deslocamentos transversais das partículas que o efeito da rugosidade. Tal resultado já era esperado, considerando-se que a força de atração magnética gera um efeito de longo alcance.

Além disso, observou-se que a eficiência de colisão é drasticamente reduzida se as

interações hidrodinâmicas são consideradas. Mostrou-se que, para uma dada configuração das partículas na suspensão, a eficiência de colisão pode ser reduzida em até cem vezes, comparando-se ao caso em que as interações hidrodinâmicas são desprezadas. Esse resultado prova, claramente, que as interações hidrodinâmicas, apesar de acrescentarem um elevado esforço computacional ao problema, não podem ser desprezadas, o que tem sido comumente considerado por outros autores (Castro et al., 2005a,b; Aoshima e Satoh, 2005).

Como etapa seguinte, determinou-se uma formulação geral para o cálculo dos coeficientes de autodispersão e de dispersão devido a gradientes de concentração. A formulação aqui desenvolvida pode avaliar os mais variados regimes de escoamentos, assim como considerar a hipótese de se estudar suspensões polidispersas. A partir dessa formulação, fez-se sua implementação junto ao código numérico. Em adição, apresentou-se uma comparação do coeficiente de dispersão produzido pela interação de duas partículas magnéticas com aqueles calculados com base na quebra de simetria de trajetória examinada por Davis (1992). Notou-se que as difusividades associadas às partículas magnéticas são extremamente maiores que aquelas associadas à rugosidade de partícula. Adicionalmente, determinou-se como se comporta o coeficiente $\mathcal{D}_{12}|^c$ como função de \mathcal{Q}_M , observando-se que o mesmo é independente do parâmetro de polidispersidade, tal que para todo valor de λ pode ser proposta uma expressão mais geral para esse limite assintótico como sendo $\mathcal{D}_{12}|^c \cong c_0(\lambda)\mathcal{Q}_M^{73/50}$.

No que se refere ao estudo do movimento complexo de uma gota magnética tridimensional, a maioria dos trabalhos tem focado somente sobre formulações bidimensionais (e.g. Sherwood, 1988; Bacri et al., 1995; Bacri et al., 1996). Nesse intuito, seguindo a recomendação de Bacri et al. (1995), foi desenvolvida uma formulação integral de contorno tridimensional. Como etapa preliminar, determinou-se o Teorema da Reciprocidade de Lorentz para fluidos magnéticos e, acoplando-o à solução fundamental dos escoamentos de Stokes, determinou-se a formulação tridimensional. A representação integral para o campo de velocidades acoplada com a representação para o potencial magnético determinam a evolução da forma da gota, quando submetidas a campos de velocidade e magnéticos impostos, em baixos números de Reynolds.

Além disso, investigou-se o fenômeno da convecção termomagnética em cavidades delgadas. Neste trabalho, em particular, determinou-se, por meio de uma análise dimensional, a expressão assintótica para o coeficiente de eficácia térmica, que revelou, assim como apresentado em resultados experimentais (Jarjays et al., 1994; Caizer, 2002),

que a convecção produzida pelos gradientes de susceptibilidade (convecção magnética) tem uma dependência muito mais efetiva, em relação às variações de temperatura, que aquela produzida pelos gradientes de densidade, o que confirma seu potencial para aplicação em transformadores elétricos. Como exemplo disso, para $Ra_m^{(0)} = 10^3$, que é um valor típico utilizado em aplicações de fluidos magnéticos para melhorar a refrigeração em transformadores elétricos, o coeficiente de eficácia para $\phi = 5\%$ é cerca de uma vez e meia maior que o coeficiente de eficácia para $\phi = 0,1\%$, ou seja, evidenciando uma sensível melhoria na refrigeração do transformador elétrico com um pequeno aumento da fração volumétrica de partículas.

Por fim, observou-se que o estudo da hidrodinâmica de suspensões magnéticas é ainda incipiente. Nesse sentido, a presente dissertação contribui para estimular novos estudos nessa área, na qual as aplicações tecnológicas são diversas, configurando-se como um campo aberto a ser explorado.

7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Considerando que o trabalho desenvolvido ao longo dessa dissertação focou-se na obtenção de modelos matemáticos para alguns dos problemas mais atuais da mecânica de suspensões magnéticas, abordando, inclusive, diferentes escalas e contextos de aplicações desses materiais, é notório que as formulações aqui obtidas podem ser usadas como ponto inicial para uma série de estudos futuros. Nesse sentido, propõe-se as seguintes sugestões:

1. Implementar um código numérico para avaliar o movimento relativo de duas partículas magnéticas em cisalhamento simples, considerando as equações de translação e rotação das partículas.
2. Simulações de muitos corpos, utilizando a metodologia numérica da Dinâmica Stokesiana, de suspensões magnéticas observando os aspectos microestruturais intrínsecos a essas suspensões e determinando propriedades transportes relevantes, assim como taxas de sedimentação e agregação de partículas e coeficientes de autodispersão e de dispersão devido a gradientes de concentração.
3. Considerar, nas simulações numéricas, o efeito da contribuição de segunda ordem da magnetização $M = \mathcal{O}(\phi^2)$, permitindo cálculos mais precisos na região de contato entre partículas.
4. Desenvolver formulações teóricas explorando a dinâmica de fluidos magnéticos polares, ou seja, onde sejam relevantes os torque internos produzidos pela ação do campo magnético sobre as partículas ou gotas magnéticas. Neste caso existe uma assimetria do tensor de tensões e a relação superparamagnética entre \mathbf{M} e \mathbf{H} não se aplica.
5. Implementação do método integral de contorno para investigar o movimento de gotas magnéticas deformáveis, explorando a ruptura e a coalescência dessas gotas na emulsão. Além disso, podem ser determinados propriedades reológicas dessas emulsões, assim como a magnetoviscosidade.

6. Implementar simulações de fluidos magnéticos em cavidades, usando diferenças finitas, volumes finitos ou elementos finitos, a fim de investigar modos mais complexos da convecção termomagnética.
7. Realizar experimentos para se determinar, com base nos resultados da análise dimensional descrita neste trabalho, propriedades de interesse industrial acerca dos fluidos magnéticos, como exemplo o coeficiente de eficácia térmica de um dado fluido magnético.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acrivos, A., Batchelor, G.K., Hinch, E.J., Kock, D.L., Mauri, R., 1992, Longitudinal shear-induced diffusion of spheres in a dilute suspension, *J. Fluid Mech.*, **240**, 651.
- Adler, P.M., 1981, Interaction of unequal spheres: I. Hydrodynamic interaction: colloidal forces, *J. Colloid Interface Sci.*, **83**, 461.
- Adler, P.M., 1981, Interaction of unequal spheres: II. Conducting spheres, *J. Colloid Interface Sci.*, **83**, 475.
- Alvarenga, R.C., Cunha, F.R., 2006, Boundary integral simulations of three-dimensional inviscid flows, *Lat. Am. J. Sol. Struc.*, **3**, 161.
- Aris, R., 1962, *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Auernhammer, G.K., Brand, H.R., 2000, Thermal convection in a rotating layer of a magnetic fluid, *Eur. Phys. J. B*, **16**, 157.
- Aoshima, M., Satoh, A., 2005, Two-dimensional Monte Carlo simulations of a colloidal dispersion composed of polydisperse ferromagnetic particles in an applied magnetic field, *J. Colloid Interface Sci.*, **288**, 475.
- Arhipenko, V.I., Barkov, Y.D., Bashtovoi, V.G., 1978, Shape of a drop of a magnetized fluid in a homogeneous magnetic field, *Magnetohydrodynamics*, **14**, 373.
- Bacri, J.C., Salin, D., 1982, Instability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field, *J. Phy. Lett.*, **43**, L649.
- Bacri, J.C., Salin, D., 1983, Dynamic of the shape transition of a magnetic ferrofluid, *J. Phy. Lett.*, **44**, L415.
- Bacri, J.C., Salin, D. Massart, R., 1982, Shape of the deformation of ferrofluid droplets in a magnetic fluid, *J. Phy. Lett.* **43**, L179.

- Bacri, J.C., Cēbers, A., Lācis, S., Perzynski, R., 1995, Shapes of 2D magnetic fluid droplets in a rotating magnetic field, *Magnetohydrodynamics* **31**, 48.
- Bacri, J.C., Cēbers, A., Lācis, S., Perzynski, R., 1996, Numerical simulation of the transient stages of a 2D magnetic fluid droplet in high-frequency rotating magnetic fields, *Magnetohydrodynamics*, **32**, 22.
- Banchio, A.J., Nägele, G., Bergenholtz, J., 1999, Viscoelasticity and generalized Stokes-Einstein relations of colloidal dispersions, *J. Chem. Phys.*, **111**, 8721.
- Banchio, A.J., Gapinski, J., Patkowski, A., Haüssler, W., Fluerasu, A., Sacanna, S., Holmqvist, P., Meier, G., Lettinga, M.P., Nägele, G., 2006, Many-body hydrodynamic interactions in charge-stabilized suspensions, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 138303.
- Bashtovoi, V., Kuzhir, P., Reks, A., 2002, Capillary ascension of magnetic fluids, *J. Magn. Magn. Mater.*, **252**, 265.
- Batchelor, G.K., Green, J.T., The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field, *J. Fluid Mech.*, **56**, 375.
- Bednarz, T., Fornalik, E., Tagawa, T., Ozoe, H., Szmyd, J.S., 2005, Experimental and numerical analyses of magnetic convection of paramagnetic fluid in a cube heated and cooled from opposing verticals walls, *Int. J. Thermal Sci.*, **44**, 933.
- Bejan, A., 1984, *Convective Heat Transfer*, Wiley, New York, USA.
- Biemfohr, S., Looby, T. Biemfohr, S. and Leighton, D. T., 1993. Measurement of shear-induced coefficient of self-diffusion in dilute suspensions. *Proc. DOE/NSF Workshop on Flow of Particles and Fluids, Ithaca, NY.*
- Bolshakova, I., Bolshakov, M., Zaichenko, A., Egorov, A., 2005, The investigation of the magnetic fluid stability using the devices with magnetic field microsensors, *J. Magn. Magn. Mater.*, **289**, 108.
- Bombard, A.J.F., Knobel, M., Alcantara, M.R., Joekes, I., 2002, Evaluation of magnetorheological suspensions based on carbonyl iron powder, *J. Int. Mater. Syst. Struc.*, **13**, 471.
- Bossis, G., Lācis, S., Meunier, A., Volkova, O., 2002, Magnetorheological fluids, *J. Magn. Magn. Mater.*, **252**, 224.
- Breedveld, V. and Levine, J., 2003. Shear-induced diffusion in dilute suspensions of charged colloids, *Soft Materials*, **1**, 235.

- Caizer, C., 2002, Thermal dependence of the saturation magnetisation of $\text{Mn}_{0.6}\text{Fe}_{0.4}\text{Fe}_2\text{O}_4$ nanoparticles in a ferrofluid, *Solid State Communications*, **124**, 53.
- Castro, L. L., Silva M.F., Bakuzis, A. F. and Miotto R., 2005, Mono-disperse ferrofluids clusterization: a Monte Carlo study, *J. Magn. Magn. Mater.* **293** 553
- Castro, L. L., Silva, M. F., Bakuzis, A. F., and Miotto, R., 2005, Aggregate formation on polydisperse ferrofluids: a Monte Carlo study, *J. Magn. Magn. Mater.* **293** 553
- Charles, S.W., 2002, *The preparation of magnetic fluids*, in: S. Odenbach (Ed.), *Ferrofluids, Magnetically Controllable Fluids and Their Applications*, Springer, Berlin, pp. 3-18.
- Couto, H.L.G., Marcelino, N.B., Cunha, F.R., 2007, A study on magnetic convection in a narrow rectangular cavity, *Magnetohydrodynamics*, **43**, 421.
- Couto, H.L.G., Cunha, F.R., 2008, On the application of a three-dimensional boundary integral method to compute distortion of magnetic drops, *Magnetohydrodynamics*, **44**, 45.
- Couto, H.L.G., Cunha, F.R., 2008, On the influence of the hydrodynamic interactions on the aggregation rate of magnetic spheres in a dilute suspension, *J. Magn. Magn. Mater.* (in revision by the authors)
- Cristini, V., Blawdziewicz, J., Loewenberg, M., 1998, Drop breakup in three-dimensional viscous flows, *Phys. Fluids*, **10**, 1781.
- Cristini, V., Blawdziewicz, J., Loewenberg, M., 2001, An adaptive mesh algorithm for evolving surfaces: simulations of drop breakup and coalescence, *J. Comput. Phys.*, **168**, 445.
- Cunha, F.R., Hinch, E.J., 1996, Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres, *J. Fluid Mech.*, **309**, 211.
- Cunha, F.R., Souza, A.J., Morais, P.C., 2002, The dynamic behaviour of a collapsing bubble in a magnetic field, *J. Magn. Magn. Mater.*, **252**, 271.
- Cunha, F.R., Almeida, M.H., Loewenberg, M., 2003, Direct numerical simulation of emulsion flows, *J. Braz. Soc. Mec. Sci. Eng.*, **25**, 30.
- Cunha, F.R., Souza, A.J. Loewenberg, M., 2003, A mathematical formulation of the boundary integral equations for compressible Stokes flow, *Comp. App. Math.*, **22**, 53.

- Cunha, F.R., Sobral, Y.D., 2004, Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid, *Physica A*, **343**, 36.
- Cunha, F.R., Couto, H.L.G., 2008, A new boundary integral formulation to describe three-dimensional motions of interfaces between magnetic fluids, *App. Math. Comp.*, **199**, 70.
- Cunha, F.R., Couto, H.L.G., 2008, Transverse gradient diffusion in a polydisperse dilute suspension of magnetic spheres during sedimentation, *J. Phys.: Condens. Matter*, **20**, 204129.
- Curtis, A.S.G., Hocking, L.M., 1970, Collision efficiency of equal spherical particles in a shear flow, *Trans. Faraday Soc.*, **66**, 1381.
- Davis, R.H., 1984, The rate of coagulation of a dilute polydisperse system of sedimenting spheres, *J. Fluid Mech.*, **145**, 179.
- Davis, R.H., Hill, N.A., 1992, Hydrodynamic diffusion of a sphere sedimenting through a dilute suspension of neutrally buoyant spheres, *J. Fluid Mech.*, **236**, 513.
- Davis, R.H., 1992, Effects of surface roughness on a sphere sedimenting through a dilute suspension of neutrally buoyant spheres, *Phys. Fluids A*, **4**, 2607.
- Drozdova, V.I., Skrobotova, T.V., Chekanov, V.V., 1979, Experimental study of the hydrostatics characterizing the interphase boundary in a ferrofluid, *Magnetohydrodynamics* **15**, 12.
- Eckstein, E.C., Bailey, D.G., Shapiro, A.H., 1977, Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension, *J. Fluid Mech.*, **79**, 191.
- Einstein, A., 1956, *Investigations on the theory of the Brownian movement*, Dover, New York.
- Elfimova, E., 2006, Homogeneous aggregation in magnetic fluids: theoretical model of fractal-like cluster formation, *J. Magn. Magn. Mater.*, **300**, e203.
- Ganguly, R., Swarnendu, S., Puri, I.K., 2004, Heat transfer augmentation using a magnetic fluid under the influence of a line dipole, *J. Magn. Magn. Mater.*, **271**, 63.
- Grant I.S., Philips, W.R., 1990, *Electromagnetism*, Wiley, West Sussex.

- Guido, S., Simeone, M., 1998, Binary collision of drops in simple shear flow by computer-assisted video optical microscopy, *J. Fluid Mech.*, **357**, 1.
- Hamaker, H.C., 1937, The London-van der Waals attraction between spherical particles, *Physica*, **4**, 1058.
- Happel, J., Brenner, H., 1965, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice Hall.
- Hinch, E.J., 1988, *Disorder and Mixing*, Dordrecht, Kluwer.
- Huang, J.P., Wang, Z.W., Holm, C., 2005, Structure and magnetic properties of mono- and bi-dispersed ferrofluids as revealed by simulations, *J. Magn. Magn. Mater.*, **289**, 234.
- Israelachvili, J. N., 1992, *Intermolecular and Surface Forces*, Academic Press, London.
- Ivanov, A.O., Kantorovich, S.S., Mendeleev, V.S., Pyanzina, E.S., 2006, Ferrofluid aggregation in chains under the influence of a magnetic field, *J. Magn. Magn. Mater.*, **300**, e206.
- Jarjayes, O., Fries, P.H., Bidan, G., 1994, Magnetic properties of fine maghemite particles in an electroconducting polymer matrix, *J. Magn. Magn. Mater.*, **137**, 205.
- Jaswon, M.A., Symm, G.T., 1977, *Integral equation methods in potential theory and elastostatics*, Academic Press, New York, USA.
- Jeffrey, D.J., Onishi, Y., 1984, Calculation of the resistance and mobility functions for two unequal rigid spheres in low-Reynolds-number flow, *J. Fluid Mech.*, **139**, 261.
- Jue, T. C., 2006, Analysis of combined thermal and magnetic convection ferrofluid flow in a cavity, *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, **33**, 846.
- Kellogg, O.D., 1954, *Foundations of potential theory*, Dover, New York.
- Kim, S., Karrila, S. J., 2005, *Microhydrodynamics*, Dover, New York.
- Klingenberg, D.J., 2001, Magnetorheology: Applications and challenges, *AIChE J.* **47**, 246.
- Krakov, M.S., Nikiforov, I.V., 2002, The influence of uniform magnetic field on thermomagnetic convection in square cavity, *J. Magn. Magn. Mater.*, **252**, 209.
- Kraynik, A.M., Reinelt, D.A., Princen, H.M., 1991, The nonlinear elastic behavior of polydisperse hexagonal foams and concentrated emulsions, *J. Rheol.*, **35**, 1235.

- Ladyzhenskaya, O.A., 1969, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon & Breach, New York.
- Leighton, D. T. and Acrivos A., 1987. Measurement of shear-induced self-diffusion in concentrated suspensions of spheres, *J. Fluid Mech.*, **177**, 109.
- Leshansky, A.M., Brady, J.F., 2005, Dynamic structure factor study of diffusion in strongly sheared suspensions, *J. Fluid Mech.*, **527**, 141.
- Lifshitz, E.M., 1956, Theory of molecular attractive forces, *Soviet Phys. JETP.*, **2**, 73.
- Loewenberg, M., Hinch, E.J., 1996, Numerical simulation of a concentrated emulsion in shear flow, *J. Fluid Mech.*, **321**, 395.
- Loewenberg, M., Hinch, E.J., 1997, Collision of two deformable drops in shear flow, *J. Fluid Mech.*, **338**, 299.
- Martinez-Pedrero, F., Tirado-Miranda, M., Schmitt, A., Callejas-Fernández, J., 2008, Controlling the magnetic filaments length by tuning the particle interactions, *J. Colloid Interface Sci.*, **318**, 23.
- McQuarrie, D.A., 1976, *Statistical Mechanics*, Harper & Row.
- Morais, P.C, Azevedo, R.B., Silva, L.P., Rabelo, D., Lima, E.C.D., 2001, Electron microscopy investigation of magnetite nanoparticles immersed in a polymer template, *Phys. Stat. Sol.*, **187**, 203.
- Müller, R., Hergt, R., Zeisberger, M., Gawalek, W., 2004, Magnetic nanoparticle design for medical diagnosis and therapy, *J. Mater. Chem.*, **14**, 2161.
- Mukhopadhyay, A., Ganguly, R., Swarnendu, S., Puri, I.K., 2005, A scaling analysis to characterize thermomagnetic convection, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **48**, 3485.
- Odenbach, S., 1995, Microgravity experiments on thermomagnetic convection in magnetic fluids, *J. Magn. Magn. Mater.*, **149**, 155.
- Odenbach, S., 2002, *Magnetoviscous Effects in Ferrofluids*, Springer, Berlin, 2002.
- Oliveira, T.F., 2007, *Microhidrodinâmica e Reologia de Emulsões*. Tese de Doutorado, PUC-RJ, pp. 189.

- Paz y Puente, O.R.E., Couto, H.L.G., Zenit, R., Cunha, F.R., A theoretical study of magnetic pressure driven flow in a narrow channel, *In: 60th Annual Meeting of the Division of Fluid Dynamics, American Physical Society - APS, 2007*, abstract #EN. 006.
- Pozrikidis, C., 1992, *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Rabinow, J., 1948, The Magnetic Fluid Clutch, *AIEE Trans.*, **67**, 1308.
- Rallison, J.M., 1978, A numerical study of deformation and burst of a viscous drop in extensional flow, *J. Fluid Mech.*, **89**, 191.
- Rallison, J.M., 1981, A numerical study of deformation and burst of a viscous drop in general shear flow, *J. Fluid Mech.*, **109**, 465.
- Rallison, J.M., 1984, The deformation of small viscous drops and bubbles in shear flows, *J. Fluid Mech.*, **16**, 45.
- Rinaldi, C., Franklin, T., Zahn, M., Cader, T., *Magnetic nanoparticles in fluid suspension: ferrofluid applications*, Dekker Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology, Marcel Dekker, New York, 2004, pp. 1731-1748.
- Rosensweig, R.E., 1985. *Ferrohydrodynamics*, Dover, New York.
- Russel, W.B., Saville, D.A., Schowalter, W.R., 1989, *Colloidal Dispersions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Sangani, A.S., Acrivos, A., 1983, The effective conductivity of a periodic array of spheres, *Proc R Soc London Series A*, **386**, 263.
- Schenkel, J.H., Kitchener, J.A., 1960, A test of the Derjaguin-Verwey-Overbeek Theory with a colloidal suspension, *Trans. Faraday Soc.*, **56**, 161.
- Segal, V., Rabinovich, A., Nattrass, D., Raj, K., Nunes, A., 2000, Experimental study of magnetic colloidal fluids behavior in power transformers, *J. Magn. Magn. Mater.*, **215**, 513.
- Sherwood, J.D., 1988, Breakup of fluid droplets in electric and magnetic fields, *J. Fluid Mech.*, **188**, 133.
- Sierou, A., Brady, J.F., 2004, Shear-induced self-diffusion in non-colloidal suspensions, *J. Fluid Mech.*, **506**, 285.

- Smoluchowski, M. von, 1917, Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetik kolloider Lösungen, *Z. Phys. Chem.*, **92**, 129.
- Snyder, S.M., Cader, T., Finlayson, B.A., 2003, Finite element model of magnetoconvection of a ferrofluid, *J. Magn. Magn. Mater.*, **262**, 269.
- Stone, H.A., 1994, Dynamics of drop deformation and breakup in viscous fluids, *J. Fluid Mech.*, **26**, 65.
- Sobral, Y.D., Cunha, F.R., 2005, Drift velocity and deformation of polarized drops in magnetic fields, *J. Magn. Magn. Mater.*, **289**, 318.
- Stratulat, R., Calugaru, G., Badescu, V., 2000, Magnetic carriers particles for selective separation in environmental and industrial processes, *Analele Stiintifice Ale Universitatii, Tomul XLV-XLVJ*, 45.
- Tangthieng, C., Finlayson, B.A., Maulbetsch, J., Cader, T., 1999, Heat transfer enhancement in ferrofluids subjected to steady magnetic fields, *J. Magn. Magn. Mater.*, **201**, 252.
- Volkova, O., Cutillas, S., Carletto, P., Bossis, G., Cebers, A., Meunier, A., 1999, Flow-induced structures in magnetorheological suspensions, *J. Magn. Magn. Mater.*, **201**, 66.
- Wang, Y., Mauri, R., Acrivos, A., 1996, The transverse shear-induced liquid and particle tracer diffusivities of a dilute suspension of spheres undergoing a simple shear flow, *J. Fluid Mech.*, **327**, 255.
- Wang, Y., Mauri, R., Acrivos, A., 1998, Transverse shear-induced gradient diffusion in a dilute suspension of spheres, *J. Fluid Mech.*, **357**, 279.
- Wang, Y. and Mauri, R., 1999. The longitudinal drift velocity of a sheared dilute suspension of spheres, *Int. J. Multiphase Flow*, **25**, 875.
- Yamaguchi, H., Kobori, I., Uehata, Y., Shimada, 1999, Natural convection of magnetic fluid in a rectangular box, *J. Magn. Magn. Mater.*, **201**, 264.
- Yamaguchi, H., Zhang, Z., Shuchi, S., Shimada, K., 2002, Heat transfer characteristics of magnetic fluid in a partitioned rectangular box, *J. Magn. Magn. Mater.*, **252**, 203.
- Youngreen, G.K., Acrivos, A., 1975, Stokes flow past a particle of a arbitrary shape: a numerical method of solution, *J. Fluid Mech.*, **69**, 377, Corrigenda: *J. Fluid Mech.*, **69**, (1975) 813.

- Zeichner, G.R., Schowalter, W.R., 1977, Use of trajectory analysis to study stability of colloidal dispersions in flow fields, *AIChE J.*, **23**, 243.
- Zinchenko, A.Z., Davis, R.H., 1994a, Gravity-induced coalescence of drops at arbitrary Péclet numbers, *J. Fluid Mech.*, **280**, 119.
- Zinchenko, A.Z., Davis, R.H., 1994b, Collision rates of spherical drops or particles in a shear flow at arbitrary Péclet numbers, *Phys. Fluids*, **7**, 2310.
- Zinchenko, A., Davis, R., 2002, Shear flow of highly concentrated emulsions of deformable drops by numerical simulations, *J. Fluid Mech.*, **69**, 377, Corrigenda: *J. Fluid Mech.*, **455**, (1975) 21.
- Zubarev, A.Y., Ishakova, L.Y., Yushkov, A.V., 1999, Dynamical properties of dense magnetic suspensions, *J. Magn. Magn. Mater.*, **201**, 226.