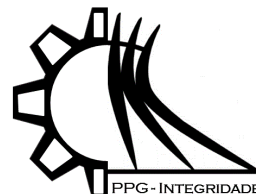




ISSN 2447-6102



Article

## Análise numérica de vibrações em um pórtico com e sem protensão: Estudo de caso Grua treliçada

### Numerical vibration analysis of a gantry with and without prestress: Case study Trussed Crane

Souza, B.F.<sup>1\*</sup>, Fernandes, D.O.<sup>2</sup>, Anflor, C.T.M.<sup>3</sup>

- 1 Grupo de Mecânica Experimental e Computacional, Universidade de Brasília; bfesouza@gmail.com
- 2 Grupo de Mecânica Experimental e Computacional, Universidade de Brasília; danieldeoliveirafernandes@gmail.com
- 3 Grupo de Mecânica Experimental e Computacional, Universidade de Brasília; anflorgoulart@gmail.com

\* Correspondence: bfesouza@gmail.com

Received: 27/08/2020; Accepted: 31/08/2020; Published: 02/09/2020

**Resumo:** Este trabalho apresenta a análise dinâmica de uma grua ascensional através do Método dos Elementos Finitos (MEF). A análise das vibrações nesse tipo de estrutura é de suma importância, pois possibilita a verificação da segurança e estabilidade durante toda a sua vida útil. O objetivo do estudo é verificar as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura através de diferentes simulações de um modelo simplificado (2D). A abordagem é feita em dois estudos de caso: grua com a) cabos não protendidos e b) cabos protendidos. A metodologia propôs o desenvolvimento de implementação em MATLAB e simulações em softwares comerciais (ANSYS/Abaqus) que utilizam MEF na resolução de problemas modais. Os resultados mostram que os modos de vibração obtidos em todas as simulações coincidem entre si e que as frequências obtidas são muito próximas, principalmente no caso de cabos sem protensão, atingindo erros menores a 0.05%. No caso da grua com cabos protendidos, os erros obtidos são pontuais e bem maiores em algumas frequências, mas apesar disso, os resultados são satisfatórios, confirmando a adequação da metodologia proposta no presente estudo.

**Palavras chave:** Análise dinâmica, Método dos Elementos Finitos, Grua treliçada.

**Abstract:** This work presents the dynamic analysis of an ascending crane using the Finite Element Method (MEF). The analysis of vibrations in this type of structure is of paramount importance, as it allows the verification of safety and stability throughout its useful life. The objective of the study is to verify the natural frequencies and the vibration modes of the structure through different simulations of a simplified model (2D). The approach is made in two case studies: crane with a) non-prestressed cables and b) prestressed cables. The methodology proposed the development of implementation in MATLAB and simulations in commercial software (ANSYS / Abaqus) that use MEF to solve modal problems. The results show that the vibration modes obtained in all simulations coincide with each other and that the frequencies obtained are very close, especially in the case of cables without prestressing, reaching errors below 0.05%. In the case of the crane with prestressed cables, the errors obtained are punctual and much higher in some frequencies, but despite this, the results are satisfactory, confirming the adequacy of the methodology proposed in the present study.

**Keywords:** Dynamic Analysis, Finite Element Method, Tower Crane.

## 1. Introdução

O método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica que utiliza interpolação e cálculo variacional na modelagem e resolução de problemas de contorno. O MEF é bastante utilizado na análise de estruturas complexas e com geometrias não usuais para as quais não existe solução exata analítica (Inman, 2008). A utilização do MEF consiste na modelação de um problema genérico que envolve meios contínuos através da análise de partes discretas desses meios, sendo que para essas partes é possível obter uma descrição matemática do seu comportamento. A cada elemento discreto dá-se o nome de “elemento finito”. Existem vários tipos de elementos, mas em geral são baseados em formulações paramétricas e obtidos a partir do campo de deslocamento como graus de liberdade nodais (Cruz et al., 2007).

Gruas e guindastes são estruturas bastante utilizadas na construção civil, sendo relativamente leves e flexíveis em comparação com a estrutura principal a ser construída (Li-Jeng e Hong-Jie, 2014). Quando essas estruturas são sujeitas a cargas de vento, terremotos ou grandes deslocamentos, as tensões nos elementos estruturais podem levar a falhas repentinas ou falhas por fadiga a longo prazo. A análise das vibrações nesse tipo de estrutura possibilita a verificação da segurança e estabilidade durante a vida útil, portanto muitos trabalhos fornecem diferentes abordagens da análise estática e dinâmica de guias e guindastes (Deng et al., 2016; Ju e Choo, 2005; Kaloop et al., 2014; Li-Jeng e Hong-Jie, 2014; Masoud et al., 2001; Nayfeh e Rahman, 2001; Zhang e Liu, 2015).

Geralmente, as guias são simuladas por elementos de cabos e vigas carregadas axialmente (treliças). Na literatura, esses elementos são bastante abordados pois aparecem na maioria das estruturas de engenharia. Ni et al. (2002) utilizaram MEF na análise de vibrações em cabos flangeados de pontes e estudaram a tensão nos cabos através da medição de frequências multimodo. Spak et al. (2015) modelaram a resposta de vibração em cabos estruturais através do Método da função de transferência distribuída. Treysse (2018) utilizou MEF para investigar os efeitos de cargas térmicas na dinâmica linear de estruturas com múltiplos cabos. Foti e Martinelli (2018) estudaram a dinâmica não linear em estruturas de cabos sujeitas a cargas de vento através do MEF. Banerjee e Kennedy (1985) estudaram a resposta da viga de Timoshenko carregada axialmente sujeita a cargas aleatórias simplesmente apoiada. Yesilce (2012) estudou as frequências naturais de vigas descontínuas de Timoshenko sujeitas a carregamentos axiais e suportes elásticos. Carvalho et al. (2013) avaliaram o efeito do carregamento axial e excitação harmônica lateral na amplitude da frequência, bifurcações e instabilidades de vigas engastadas. Carpinteri et al. (2014) avaliaram a influência de cargas axiais da frequência de vibração fundamental e estabilidade de vigas delgadas. Talic et al. (2015) verificaram o desempenho e a estabilidade de vigas carregadas axialmente através da análise de vibrações transversais pelo Método das Diferenças Finitas. Fritzkowski (2017) usou o Princípio de Hamilton para analisar as vibrações transversais de treliças triangulares composta por vigas sujeitas a excitação axial dinâmica.

O objetivo deste trabalho é realizar a análise dinâmica de uma grua utilizando o MEF. São abordados 2 estudos de caso, a) cabos não protendidos e b) cabos protendidos, sendo avaliados os modos de vibrar e as frequências naturais da estrutura. O presente artigo está organizado da seguinte maneira: a seção 2 apresenta o problema proposto e demonstra a modelagem matemática utilizada na análise de vibração dos cabos e treliças; a seção 3 explica a modelagem numérica desenvolvida pelos softwares de MEF (ANSYS e ABAQUS); na seção 4 os resultados obtidos são mostrados e discutidos, finalmente, na seção 5 são feitas as considerações finais.

## 2. Material e Métodos

### 2.1. Descrição do problema

A grua utilizada no problema foi adaptada da grua ascensional da marca Bauscher com capacidade de carga de 1000 kg. A mini grua torre do tipo ascensional é um equipamento de elevação e transportes de cargas, sendo bastante utilizada em obras por ser uma alternativa prática, segura e econômica. A estrutura definida para a análise e suas dimensões é mostrada na Figura 1 (a), a condição de contorno adotada foi simplesmente apoiada no encontro entre cabos e barras e na base da treliça conforme o diagrama de corpo livre da Figura 1 (b). Na modelagem da estrutura foram utilizados 2 tipos de elementos: cabos e barras. A tração sofrida pelos cabos foi considerada igual a 9810 N. Os dados dos materiais utilizados na modelagem da estrutura estão expostos na Tabela 1, em que  $\rho$  é a massa específica do material,  $I_z$  é o momento de inércia em torno do eixo Z,  $A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

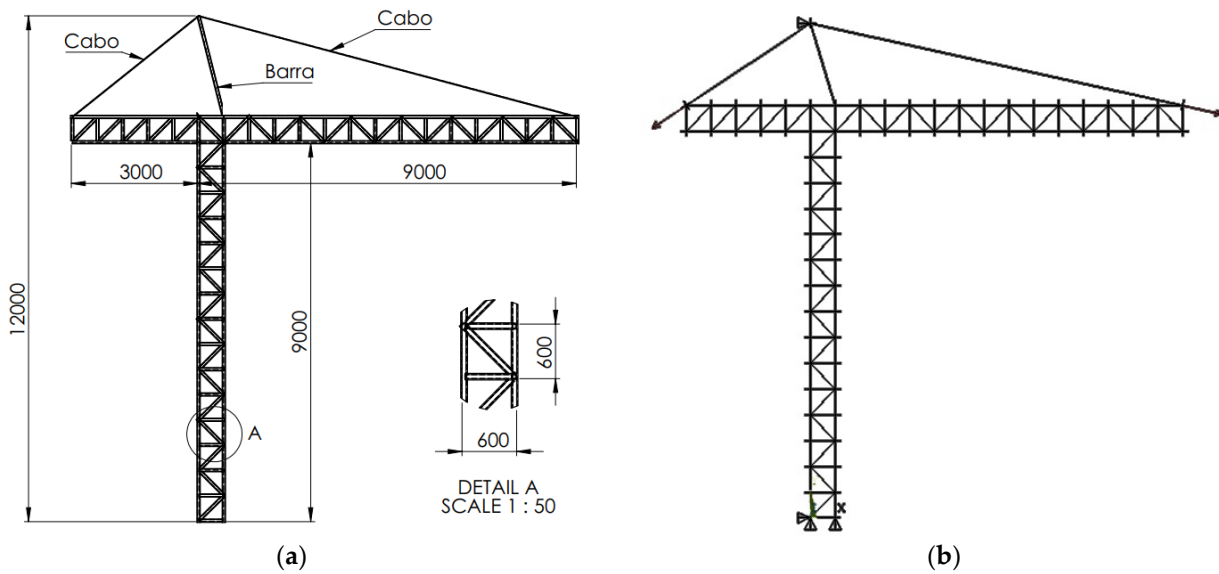


Figura 1. (a) Estrutura mini grua (b) Diagrama de corpo livre da estrutura

Tabela 1. Propriedades dos materiais.

	Cabos	Treliça
Seção:	Circular maciça	Quadrada vazada
Dimensões (m)	$R = 0,00397$	$0.15 \times 0.15 \times 0.01$
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	7800	7870
$I_z$ (m <sup>4</sup> )	$1,9510e - 10$	$1,65e - 05$
$A$ (m <sup>2</sup> )	$4,9514e - 05$	$5,58e - 03$
$E$ (GPa)	195	200

2.2. Análise de Vibração em Treliças

De acordo com Petyt (2010), a energia cinética do sistema pode ser escrita na seguinte forma:

$$Te = \frac{1}{2} \{\hat{u}\}_e^T [m]_e \{\hat{u}\}_e \tag{1}$$

Sendo que:

$$[m]_e = \rho A l \int_{-1}^{+1} N(\xi)^T \cdot N(\xi) d\xi \tag{2}$$

Considerando que:

$$N(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi j \xi) \tag{3}$$

Sendo:

$$\xi j = \text{coordenada do nó } j \text{ (}\xi 1 = -1 \text{ e } \xi 2 = +1\text{)} \tag{4}$$

Substituindo as funções de forma  $N(\xi)$  da eq. (3) na eq. (2) temos:

$$[m]_e = \frac{\rho A l}{6} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Na implementação realizada, a matriz de massa do elemento foi expandida, conforme mostrada na eq. (6), para acoplar todos os graus de liberdade considerados no problema.

$$M_{ele} = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Onde:

$M_{ele}$  = matriz de massa do elemento

$\rho$  = massa específica do material;

$A$  = Área da seção transversal;

$l$  = comprimento do elemento.

A energia potencial do sistema pode então ser expressa como:

$$Ue = \frac{1}{2} \{u\}_e^t [k]_e \{u\}_e \quad (7)$$

Em que:

$$K_e = \frac{EA}{l} \int_{-1}^{+1} N'(\xi)^T N'(\xi) d\xi \quad (8)$$

Substituindo as funções de forma na eq. (8) temos:

$$[K]_e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

A matriz de rigidez foi expandida, conforme mostrada na eq. (10).

$$K_{ele} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Sendo:

$K_{ele}$  = matriz de rigidez do elemento

$E$  = Módulo de Elasticidade do material;

$A$  = Área da seção transversal;

$l$  = comprimento do elemento.

Como é comum na maioria das treliças, alguns elementos precisam ser rotacionados, ou seja, o vetor é decomposto nos eixos  $x$  e  $y$  considerados. Para rotacionar os elementos, foi utilizada a matriz de rotação mostrada na eq. (11).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \end{bmatrix} \quad (11)$$

Sendo:

$u_1, v_1, u_2$  e  $v_2$  = coordenadas locais de deslocamento;

$u_1', v_1', u_2'$  e  $v_2'$  = coordenadas globais de deslocamento;

$\beta$  = ângulo de inclinação do elemento.

### 2.3 Análise de Vibração em Cabos

Seguindo o mesmo procedimento, as matrizes de rigidez e de massa para o elemento de cabo podem ser definidas, apenas deve-se adicionar mais um grau de liberdade do tipo rotação em cada nó. Deste modo, a matriz de massa para o elemento tipo cabo pode ser definida conforme mostrado na eq. (12).

$$M_{ele} = \frac{\rho \cdot A \cdot l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Em que:

$\rho$ = massa específica do material;

$A$ = Área da seção transversal;

$l$ = comprimento do elemento.

Para a definição da matriz de rigidez alguns parâmetros devem ser adicionados devido à força de tração no cabo. Deste modo, a matriz de rigidez do elemento tipo cabo pode ser expressa a partir da eq. (13).

$$K_{ele} = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2 & 0 & 0 & -Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I_z \cdot s_1 & 6I_z \cdot l \cdot s_2 & 0 & -12I_z \cdot s_1 & 6I_z \cdot l \cdot s_2 \\ 0 & 6I_z \cdot l \cdot s_2 & 4I_z \cdot l^2 \cdot s_3 & 0 & -6I_z \cdot l \cdot s_2 & 2I_z \cdot l^2 \cdot s_4 \\ -Al^2 & 0 & 0 & Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_z \cdot s_1 & -6I_z \cdot s_2 & 0 & 12I_z \cdot s_1 & -6I_z \cdot l \cdot s_2 \\ 0 & 6I_z \cdot l \cdot s_2 & 2I_z \cdot l^2 \cdot s_4 & 0 & -6I_z \cdot l \cdot s_2 & 4l^2 \cdot I_z \cdot s_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Onde:

$E$ = Módulo de Elasticidade do material;

$A$ = Área da seção transversal;

$l$ = comprimento do elemento.

$I_z$ = momento de Inércia da seção

$s_1, s_2, s_3$  e  $s_4$ = coeficientes da Tabela 2.

**Tabela 2.** Coeficientes para montagem da matriz de rigidez.

Função	Condição de Força Axial		
	Compressão	Neutro	Tração
$s_1$	$\frac{(kL)^3 \text{sen}(kL)}{12\phi_c}$	1	$\frac{(kL)^3 \text{senh}(kL)}{12\phi_T}$
$s_2$	$\frac{(kL)^3 [1 - \cos(kL)]}{6\phi_c}$	1	$\frac{(kL)^3 [\cos h(kL) - 1]}{6\phi_T}$
$s_3$	$\frac{(kL)^2 [\text{sen}(kL) - kL \cos(kL)]}{4\phi_c}$	1	$\frac{(kL)^2 [kL \cosh(kL) - \text{senh}(kL)]}{4\phi_T}$
$s_4$	$\frac{kL [kL - \text{sen}(kL)]}{2\phi_c}$	1	$\frac{kL [\text{senh}(kL) - kL]}{2\phi_T}$
	$\phi_c = 2 - 2 \cos(kL) - kL \text{sen}(kL)$		$\phi_T = 2 - 2 \cos h(kL) + kL \text{senh}(kL)$

Para rotacionar os elementos (cabos), foi utilizada a matriz de rotação mostrada na eq. (14).

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ \theta_1' \\ u_2' \\ v_2' \\ \theta_2' \end{bmatrix} \quad (14)$$

Em que:

$u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2$  e  $\theta_2$  são coordenadas locais de deslocamento e rotação;

$u_1', v_1', \theta_1', u_2', v_2'$  e  $\theta_2$  são coordenadas globais de deslocamento e rotação;

$\beta$ = ângulo de inclinação do elemento.

Para a montagem das matrizes globais da estrutura utilizou-se a relação exposta na eq. (15).

$$\{u\}_e = [a]_e \{u\} \quad (15)$$

Onde:

$[a]_e$  = matriz de transformação do elemento

$\{u\}_e$  = vetor que representa os graus de liberdade do elemento

$\{u\}$  = vetor que representa os graus de liberdade da estrutura

Para realizar o acoplamento dos graus de liberdade de diferentes elementos (treliça e cabo) que se encontram num mesmo nó, cada grau de liberdade foi somado com o respectivo grau de liberdade do elemento concorrente conforme mostrado nas eq. (16), (17) e (18).

$$u_{global} = u_{cabo} + u_{treliça} \quad (16)$$

$$v_{global} = v_{cabo} + v_{treliça} \quad (17)$$

$$\theta_{global} = \theta_{cabo} \quad (18)$$

Onde:

$u$  = deslocamento na direção x

$v$  = deslocamento na direção y

$\theta$  = rotação na direção z

De acordo com as equações mostradas, pode-se perceber que os deslocamentos globais na direção x e y são o resultado do somatório dos deslocamentos locais num mesmo nó da treliça e do cabo nos pontos de acoplamento. Como na treliça não existe rotação, a rotação global no ponto de acoplamento é igual a rotação no cabo.

#### 2.4. Modelagem Numérica

A metodologia proposta nas seções 2.2 e 2.3 foi utilizada na implementação em MATLAB utilizando MEF. Inicialmente foram definidas as propriedades do elemento (rigidez e massa), com todo o conjunto de nós e graus de liberdade assumidos, foi determinado o vetor de deslocamento global e o vetor de força global, assim como um vetor de matriz de massa e rigidez. Para a solução das matrizes de rigidez e de massa foi utilizado o comando "eig" do programa para obtenção dos autovalores e autovetores das matrizes depois foram reorganizados a fim de obter as frequências naturais e os modos de vibrar. É importante destacar que para a análise de elementos inclinados, simplificações foram adotadas, como a não interação entre a força externa axial e os esforços internos axial do elemento. Para considerar a influência dessas forças no elemento é necessário a adoção de processos iterativos, uma vez que a rigidez é dependente dos esforços internos e vice-versa. A validação do modelo foi realizada através dos softwares ANSYS APDL e ABAQUS/CAE.

Para a modelagem em ANSYS, o elemento LINK180 foi utilizado na seção treliçada da grua e o elemento BEAM188 para os cabos. O elemento de barra LINK180 tem uma vasta aplicação em problemas de engenharia, sendo possível utilizar em cabos, molas e modelos de treliça. É um elemento de tensão e compressão que possui três graus de liberdade em cada nó: translação nas direções X, Y e Z. O elemento BEAM188 é bastante adequado para analisar estruturas de vigas desde mais finas até as mais grossas. Esse elemento é baseado na viga de Timoshenko e possui seis graus de liberdade: translação nas direções X, Y e Z, e rotação sobre os eixos X, Y e Z (ANSYS Inc, 2007). Para adequação do modelo proposto o elemento BEAM188 está sujeito somente a uma força de protensão, sendo então utilizado como cabo. As condições de contorno utilizadas foram de apoio simples, conforme mostradas na Figura 1 (b). Algumas restrições foram impostas na estrutura para que os resultados sejam apenas no plano XY. Em toda a estrutura, deslocamentos na direção Z foram restringidos. Além disso, nos cabos, foram impedidas as rotações nas direções X e Y. A análise estática foi realizada e após a obtenção dos resultados, uma análise modal foi desenvolvida através do solucionador Block Lanczos, disponível no ANSYS APDL, que calcula blocos de vetores e os armazena durante as iterações (ANSYS Inc, 2013).

A modelagem utilizando o software comercial ABAQUS é bastante similar à metodologia aplicada ao ANSYS. Para configurar a estrutura na treliça da grua foi aplicado o elemento de treliça T2D2, esse elemento possui duas dimensões com dois nós disponíveis, usa interpolação linear para posição e deslocamento e tem tensão constante. O cabo foi caracterizado com o elemento de viga B21, esse elemento é baseado na teoria de viga de Timoshenko, permite deformação transversal ao cisalhamento e pode ser usado para vigas espessas ou delgadas, esse tipo de elemento usa funções de interpolação linear e são indicados para casos que envolvam contato ou para simulações de problemas dinâmicos. No problema proposto como a seção transversal é insignificante em relação ao comprimento

do cabo, o programa ignora a inércia rotativa da seção transversal do elemento de viga de Timoshenko na flexão (Dassault Systemes, 2013).

A obtenção dos modos e das frequências naturais foi realizada através de duas etapas de cálculos sucessivos e acumulativos, no primeiro passo a carga de tração foi aplicada aos cabos com a condição de contorno proposta, permitindo somente rotação em torno do eixo Z, e foi realizada a análise estática. No segundo passo foi desenvolvida a análise modal utilizando como referência os resultados da análise anterior que considerava a carga estática de tração aplicada ao elemento de viga que caracteriza os cabos da estrutura. Os resultados obtidos através da implementação em MATLAB foram então comparados com os resultados obtidos nos softwares (ANSYS / ABAQUS) e apresentados na seção 3.

### 3. Resultados

#### 3.1 Caso 1: Grua com cabos sem protensão

A Figura 2 mostra o resultado da Função de Resposta em Frequência (FRF) da estrutura sem carregamento de protensão nos cabos obtida através da implementação em MATLAB. O gráfico é plotado em Receptância ( $dB.m/N$ ) versus frequência ( $Hz$ ). Pode-se observar que as primeiras quatro frequências naturais encontram-se num intervalo de 0 a 2  $Hz$ . A Figura 3 apresenta os quatro primeiros modos de vibrar da estrutura, referentes a cada frequência obtida.

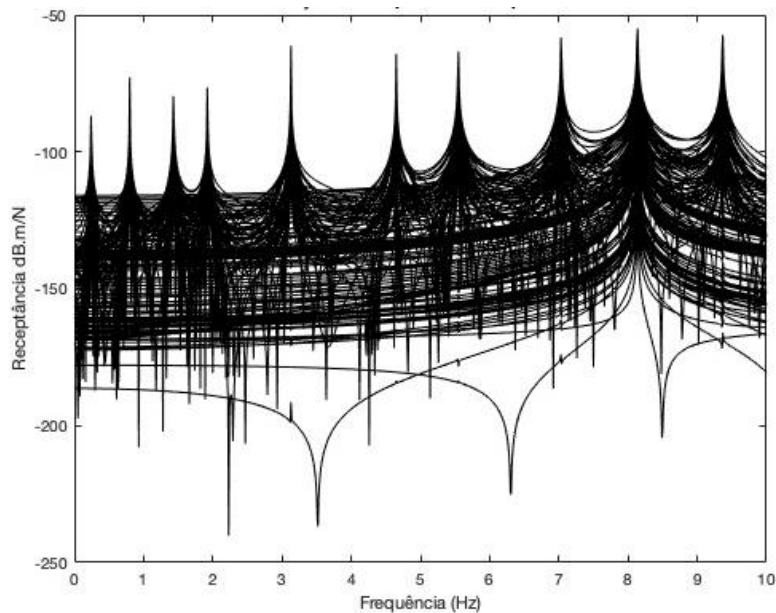
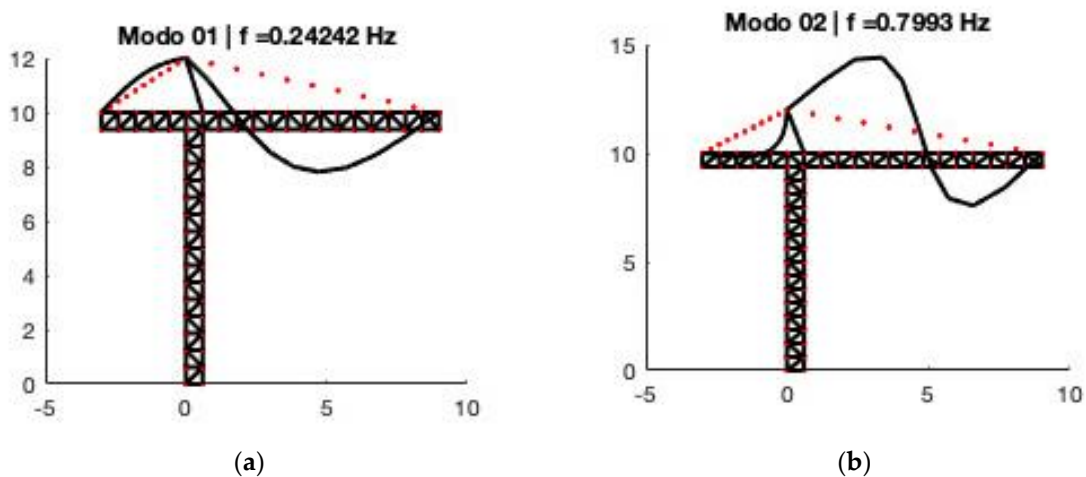
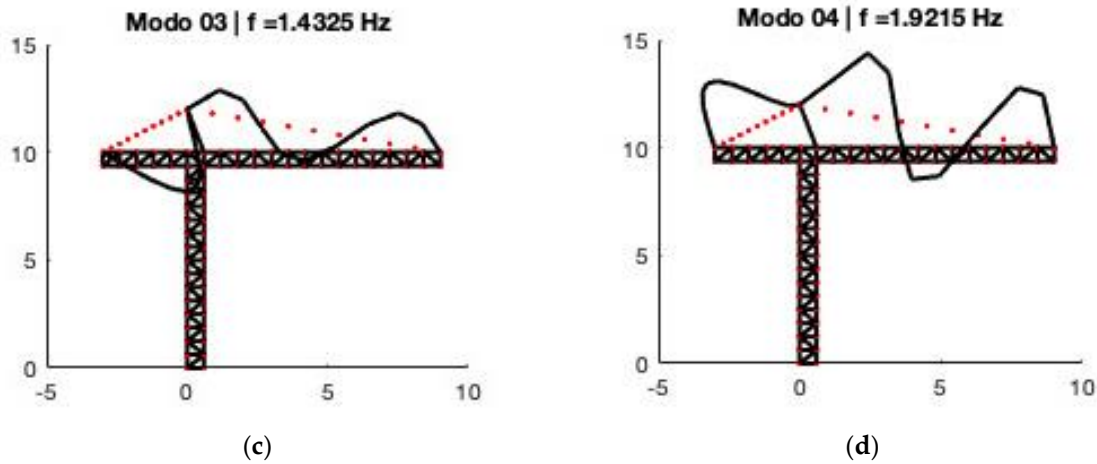


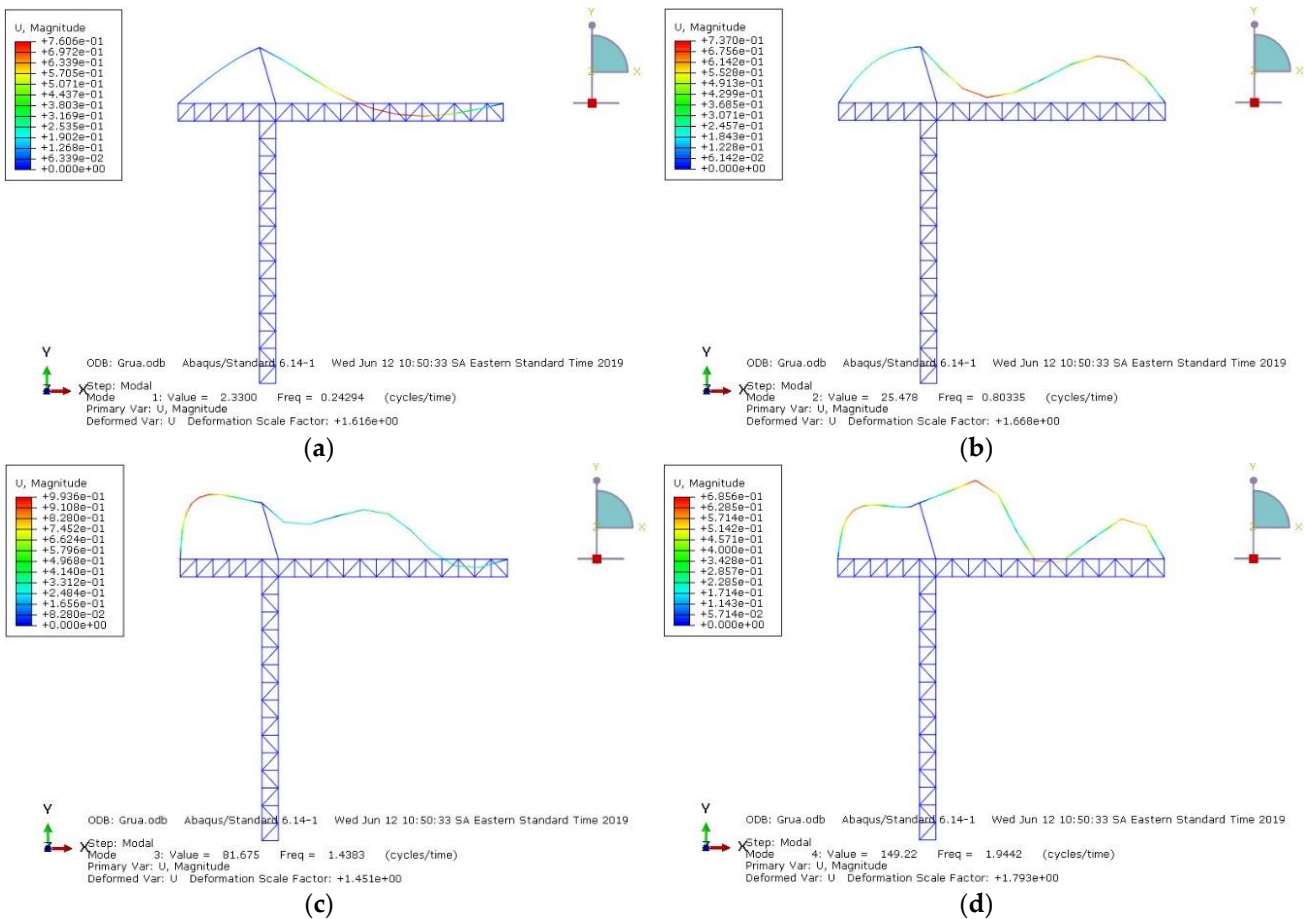
Figura 2. FRF da grua sem carga de protensão (MatLab).





**Figura 3.** Quatro primeiros modos de vibrar da grua sem carga de protensão análise realizada através do MatLab. (a) 1º modo. (b) 2º modo. (c) 3º modo. (d) 4º modo.

Para validação dos resultados obtidos em MATLAB, a grua também foi simulada em softwares comerciais consagrados de MEF. A Figura 4 e a Figura 5 mostram os 4 primeiros modos de vibrar e suas frequências naturais obtidas através dos softwares ABAQUS e ANSYS, respectivamente.



**Figura 4.** Quatro primeiros modos de vibrar grua sem carga de protensão análise realizada através do ABAQUS. (a) 1º modo. (b) 2º modo. (c) 3º modo. (d) 4º modo.



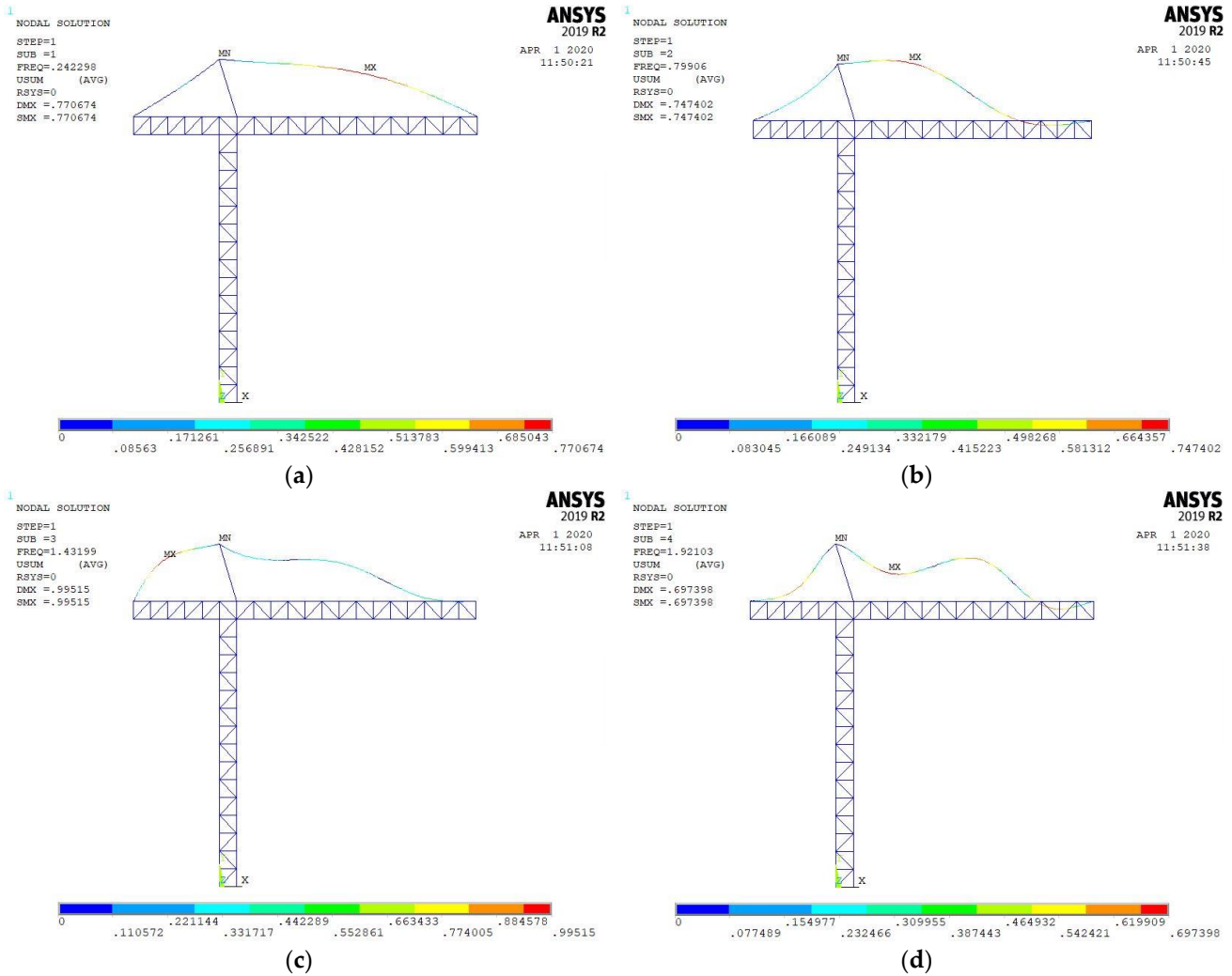


Figura 5. Quatro primeiros modos de vibrar da grua sem carga de protensão análise realizada através do ANSYS. (a) 1<sup>o</sup> modo. (b) 2<sup>o</sup> modo. (c) 3<sup>o</sup> modo. (d) 4<sup>o</sup> modo.

Os resultados mostram que os modos de vibrar da estrutura em MATLAB, ABAQUS E ANSYS possuem grande similaridade em todas as simulações apresentadas. Pode-se verificar que os primeiros modos de vibrar ocorrem apenas no cabo e não no restante da estrutura, isso ocorre porque a massa do cabo é muito menor em relação a massa do restante da estrutura e o elemento possui elevada esbeltez. Não aparecem nos resultados, mas em frequências maiores ( $\geq 6^a$ ), os modos de vibrar já tendem a aparecer na parcela da estrutura que é treliçada.

A Tabela 3, mostra um comparativo entre os resultados obtidos de frequência natural da estrutura sem protensão. Pode-se perceber que os resultados possuem precisão relativamente satisfatória. Os melhores resultados são obtidos da comparação entre simulações em MATLAB e ANSYS, atingindo erro abaixo de 0.05%.

Tabela 3. Comparativo das frequências naturais da estrutura sem protensão.

MatLab (Hz)	Abaqus (Hz)	ANSYS (Hz)	$\epsilon$  MatLab – Abaqus  (%)	$\epsilon$  MatLab – ANSYS  (%)	$\epsilon$  Abaqus – ANSYS  (%)
0,2424	0,2429	0,2423	0,2140	0,0495	0,2634
0,7993	0,8033	0,7991	0,5041	0,0300	0,5340
1,4325	1,4383	1,4320	0,4032	0,0349	0,4380
1,9215	1,9442	1,9210	1,1676	0,0260	1,1932

3.2 Caso 2: Grua com cabos protendidos

Os resultados a seguir mostram como a estrutura vibra e suas frequências naturais em serviço, ou seja, quando o cabo está tensionado. A Figura 6 mostra a FRF da estrutura com carga de tensão no cabo obtida através de implementação em MATLAB. Na Figura 7, são ilustrados os quatro primeiros modos da estrutura em serviço.

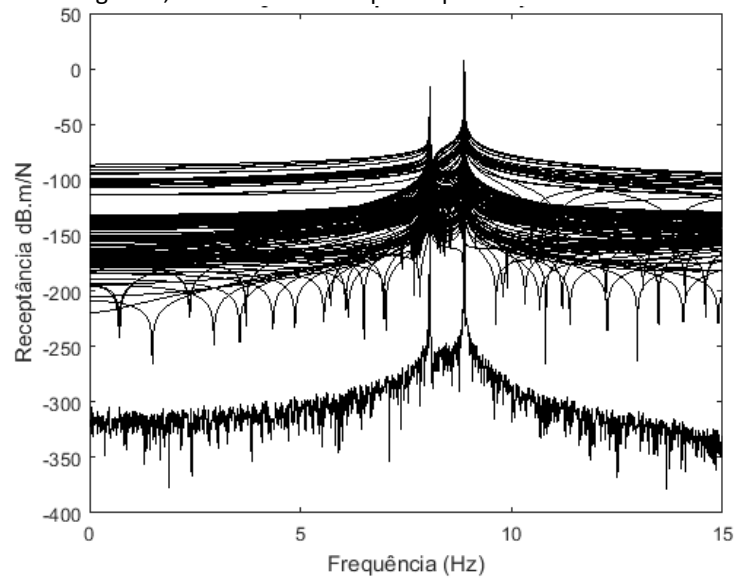


Figura 6. FRF da grua com carga de protensão (Matlab).

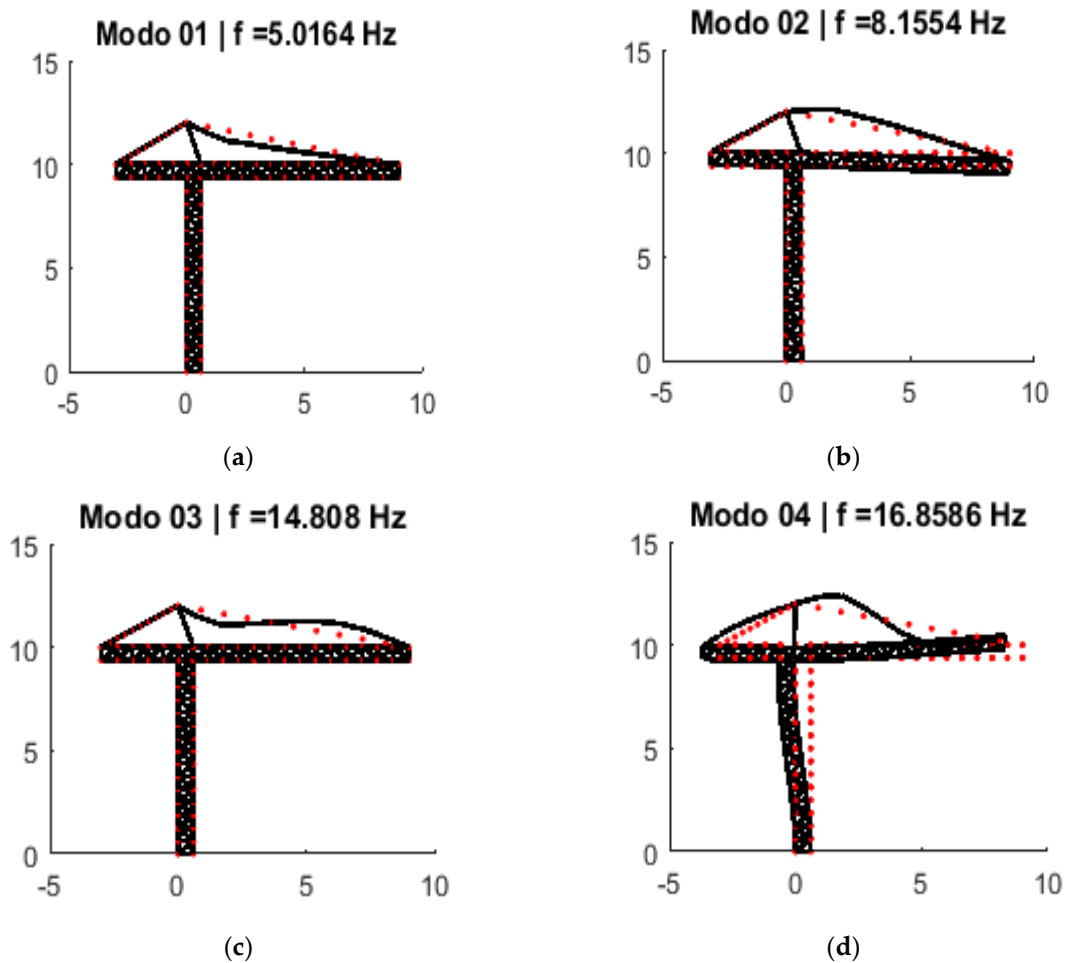


Figura 7. Quatro primeiros modos de vibrar da grua com protensão análise realizada através do MatLab. (a) 1º modo. (b) 2º modo. (c) 3º modo. (d) 4º modo.

A Figura 8 e a Figura 9 mostram os 4 primeiros modos de vibrar obtidos pelos software de elementos finitos ABAQUS e ANSYS, respectivamente. Na Tabela 4 é realizado um comparativo entre as frequências naturais obtidas para a estrutura protendida. Os resultados mostram que os modos de vibrar encontrados durante as simulações coincidem, entretanto, as frequências naturais são um pouco divergentes, atingindo erros percentuais maiores do que aquelas obtidas no caso 1.

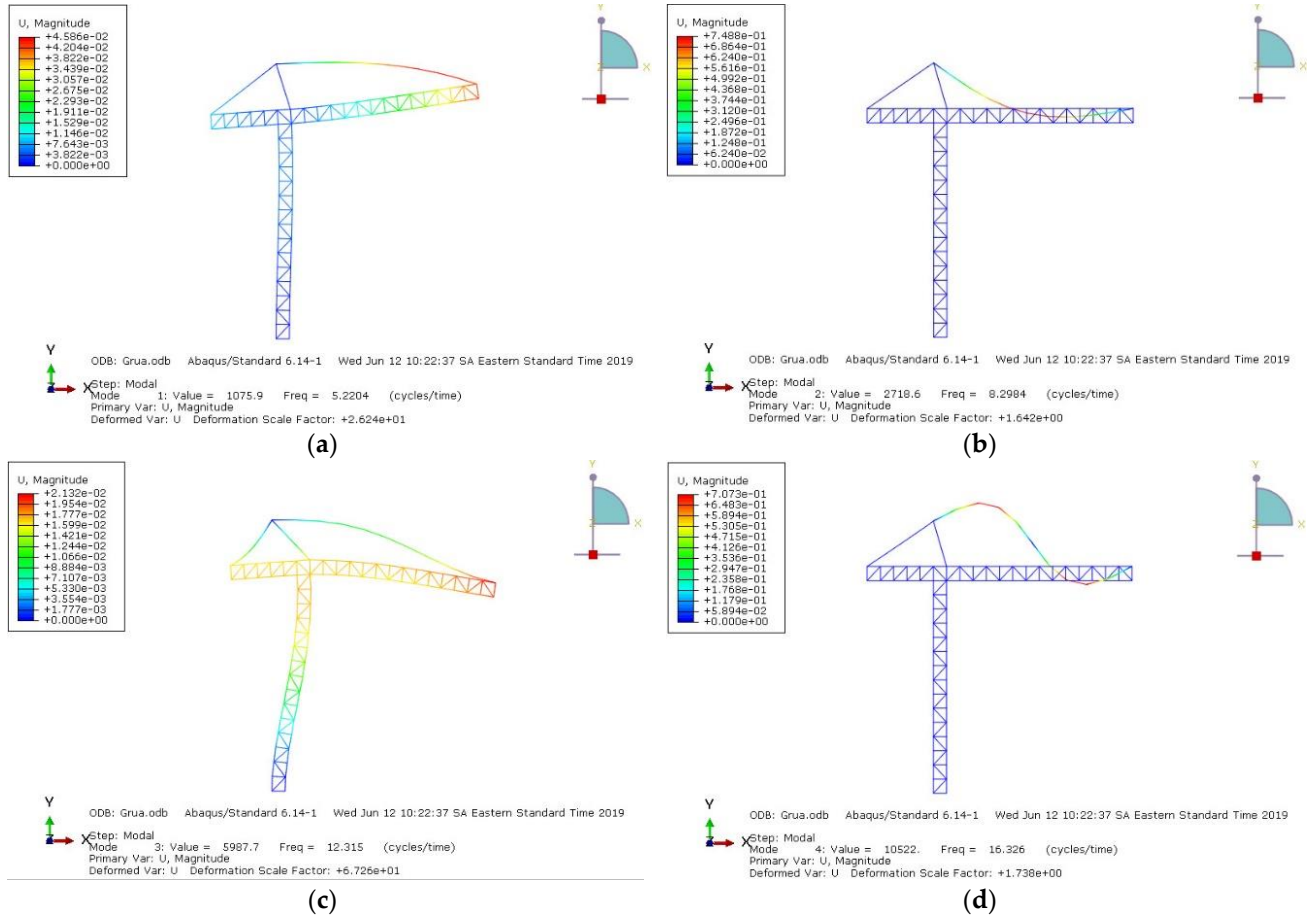
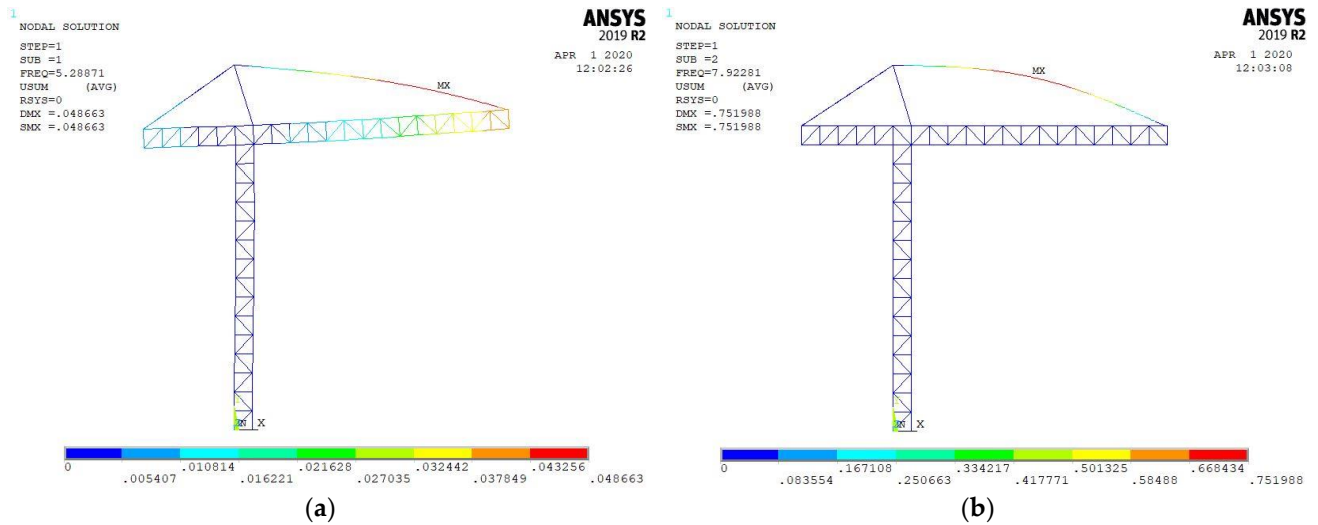


Figura 8. Quatro primeiros modos de vibrar da grua com protensão análise realizada através do ABAQUS. (a) 1º modo. (b) 2º modo. (c) 3º modo. (d) 4º modo.



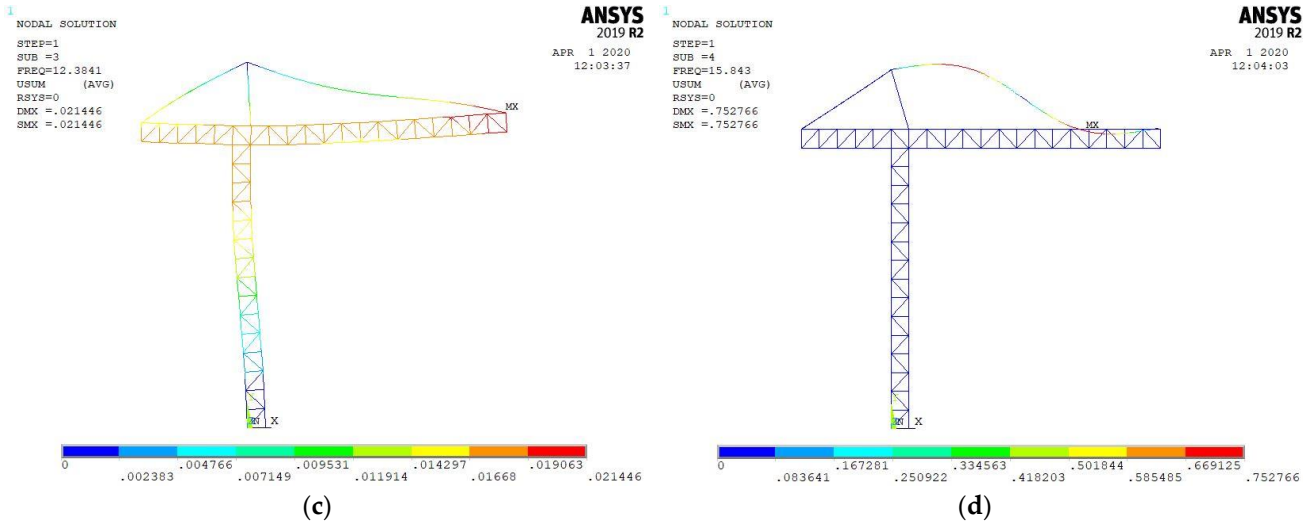


Figura 9. Primeiros modos de vibrar da grua com protensão análise realizada através do ANSYS. (a) 1º modo. (b) 2º modo. (c) 3º modo. (d) 4º modo.

Os resultados para o problema da grua com carga de protensão aplicada demonstrou a compatibilidade entre os resultados através dos diferentes métodos abordados. Uma pequena diferença entre os resultados obtidos no modelo implementado em comparação com a análise realizada nos softwares comerciais pode ser observada na Tabela 4, exclusivamente na frequência natural do terceiro modo de vibrar da estrutura. Essa diferença pode ter sido ocasionada pelas simplificações feitas no modelo implementado, no entanto os modos se comportaram de maneira bastante semelhante em todos os casos estudados, dando confiabilidade ao resultado no que confere ao modelo implementado em MatLab.

Tabela 4. Comparativo das frequências naturais da estrutura com protensão.

MatLab (Hz)	Abaqus (Hz)	Ansys (Hz)	ε  MatLab – Abaqus  (%)	ε  MatLab – Ansys  (%)	ε  Abaqus -Ansys  (%)
5,0164	5,2204	5,2887	3,9077	5,1487	1,3083
8,1554	8,2984	7,9228	1,7232	2,9358	4,5261
14,8080	12,3150	12,3840	20,2436	20,0258	0,5602
16,8586	16,3260	15,8430	3,2623	6,4104	2,9584

#### 4. Conclusão

O presente trabalho realizou uma análise dinâmica de um modelo simplificado (2D) do MEF de uma mini grua ascensional. A análise de vibrações foi feita através de elementos de barra (treliça) e viga com carga axial (cabos). Foram analisados dois casos: a) cabos não protendidos e b) cabos protendidos, sendo avaliados parâmetros como frequências naturais e modos de vibrar. Foram realizadas simulações em MATLAB, ANSYS e ABAQUS. Pode-se inferir que os resultados entre as simulações foram satisfatórios, principalmente para o caso em que os cabos não possuem protensão, atingindo erros menores a 0.05% quando comparadas simulações entre ANSYS e MATLAB. De modo, geral, os resultados para o caso da grua com cabos protendidos também foi satisfatória, entretanto os erros encontrados foram consideráveis em algumas frequências específicas. Apesar das simplificações consideradas no modelo implementado em MATLAB, o código se mostrou robusto e a consideração da não interação de cargas trativas externas em elementos de baixa rigidez axial apresentou pouca influência no exemplo analisado, entretanto para cargas externas de compressão este efeito pode não ser desprezível, tendo que ser considerado.

A tentativa de melhores resultados, nesse caso, pode ser abordada ao se utilizar outros tipos de elementos na modelagem, outras formas de discretização, outras condições de contorno e um novo modelo na protensão. Apesar disso, a metodologia proposta no presente trabalho alcançou os resultados esperados e contribui para o entendimento da análise dinâmica em estruturas de engenharia.

## 5. Agradecimentos

Este estudo foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAP-DF). Os autores agradecem ao Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (UnB-FGA / GMEC) por fornecer recursos experimentais e computacionais e assim tornar possível o desenvolvimento deste trabalho.

## Referencial Bibliográfico

1. ANSYS Inc. (2007). *Elements Reference ANSYS Release 11.0*. Retrieved from <http://www.ansys.com>
2. ANSYS Inc. (2013). *ANSYS Mechanical APDL Performance Guide* (Vol. 15317).
3. Banerjee, J. R., & Kennedy, D. (1985). *Response of a axially loaded Timoshenko beam to random loads*. 101, 481–487.
4. Carpinteri, A., Malvano, R., Manuello, A., & Piana, G. (2014). Fundamental frequency evolution in slender beams subjected to imposed axial displacements. *Journal of Sound and Vibration*, 333(11), 2390–2403. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.01.018>
5. Carvalho, E. C., Gonçalves, P. B., Rega, G., & Del Prado, Z. J. G. N. (2013). Influence of axial loads on the nonplanar vibrations of cantilever beams. *Shock and Vibration*, 20(6), 1073–1092. <https://doi.org/10.3233/SAV-130823>
6. Cruz, J. P., Valente, R. A. F., & Sousa, R. J. A. (2007). *Metodo dos Elementos Finitos Tecnicas de Simulacao Numerica em Engenharia*. 489.
7. Dassault systemes. (2013). 6.13 Documentation (Abaqus), 2013. In *Abaqus User's Guide*.
8. Deng, X., Guo, Z., Jiang, A., & He, S. (2016). *Research of Portal Crane Vibration Modal Analysis*. 93(Ismems), 277–282. <https://doi.org/10.2991/ismems-16.2016.47>
9. Foti, F., & Martinelli, L. (2018). Finite element modeling of cable galloping vibrations—Part I: Formulation of mechanical and aerodynamic co-rotational elements. *Archive of Applied Mechanics*, 88(5), 645–670. <https://doi.org/10.1007/s00419-017-1333-y>
10. Fritzkowski, P. (2017). Transverse vibrations of a beam under an axial load: minimal model of a triangular frame. *Archive of Applied Mechanics*, 87(5), 881–892. <https://doi.org/10.1007/s00419-016-1156-2>
11. Inman, D. J. (2008). *Engineering Vibration - Inman D.J..pdf*. Pearson Education, Inc., p. 668.
12. Ju, F., & Choo, Y. S. (2005). *Dynamic Analysis of Tower Cranes*. 131(1), 88–96. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2005\)131](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131)
13. Kaloop, M. R., Sayed, M. A., Kim, D., & Kim, E. (2014). Movement identification model of port container crane based on structural health monitoring system. *Structural Engineering and Mechanics*, 50(1), 105–119. <https://doi.org/10.12989/sem.2014.50.1.105>
14. Li-jeng, H., & Hong-jie, S. (2014). *ScienceDirect Seismic Response Analysis of Tower Crane Using SAP2000*. 79(1st ICM), 513–522. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.06.374>
15. Masoud, Z. N., Nayfeh, A. H., & Rahman, E. M. A. (2001). *Dynamics and Control of Cranes : A Review*. 863–908. <https://doi.org/10.1177/107754603031852>
16. Nayfeh, A. H., & Rahman, E. M. A. (2001). Nonlinear Dynamics of a Boom Crane. *Journal of Vibration and Control*, (7), 199–220.
17. Ni, Y. Q., Ko, J. M., & Zheng, G. (2002). Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity. *Journal of Sound and Vibration*, 257(2), 301–319. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5060>
18. Petyt, M. (2010). *Introduction to Finite Element Vibration Analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press.
19. Spak, K. S., Agnes, G. S., & Inman, D. J. (2015). Modeling vibration response and damping of cables and cabled structures. *Journal of Sound and Vibration*, 336, 240–256. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.10.009>
20. Talic, E., Schirrer, A., Kozek, M., & Jakubek, S. (2015). Multi-objective parameter identification of Euler-Bernoulli beams under axial load. *Journal of Sound and Vibration*, 341, 86–99. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.12.012>
21. Treysède, F. (2018). Finite element modeling of temperature load effects on the vibration of local modes in multi-cable structures. *Journal of Sound and Vibration*, 413, 191–204. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.10.022>
22. Yesilce, Y. (2012). *Free Vibration Analysis of the Axial-Loaded Timoshenko Multiple-Step Beam Carrying Multiple Elastic-Supported Rigid Bars Çok Sayıda Elastik Mesnetli Rijit Çubuk Taşıyan Eksenel Yüklü Çok Kademeli Timoshenko Kirişinin Serbest Titreşim Analizi*. 183–197.
23. Zhang, W., & Liu, Y. (2015). Main Factor Sensitivity Analysis Based on Response Surface Model Updating of Port Crane Structure. *Journal of Coastal Research*, 73, 166–172. <https://doi.org/10.2112/si73-029.1>