

**AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO DE CONTORNO SEM MALHA  
POR MEIO DE OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO EM PROBLEMAS  
DA ELASTICIDADE**

**FERNANDO MARTINS RIBEIRO FILHO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO DE CONTORNO  
SEM MALHA POR MEIO DE OTIMIZAÇÃO  
MULTIOBJETIVO EM PROBLEMAS DA  
ELASTICIDADE**

**FERNANDO MARTINS RIBEIRO FILHO**

**ORIENTADOR: ARTUR PORTELA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ESTRUTURAS E  
CONSTRUÇÃO CIVIL**

**PUBLICAÇÃO: E.DM – 6A/21**  
**BRASÍLIA/DF: 21 DE MAIO DE 2021**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO DE CONTORNO  
SEM MALHA POR MEIO DE OTIMIZAÇÃO  
MULTIOBJETIVO EM PROBLEMAS DA  
ELASTICIDADE**

**FERNANDO MARTINS RIBEIRO FILHO**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E  
AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE  
BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.**

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Artur António de Almeida Portela, PhD (ENC-UnB)  
(Orientador)**

---

**Prof. Gilberto Gomes, DSc (ENC-UnB)  
(Examinador interno)**

---

**Prof. Luis Alejandro Perez Peña, PhD. (FAU-UnB)  
(Examinador externo)**

**BRASÍLIA/DF, 21 DE MAIO DE 2021**

## FICHA CATALOGRÁFICA

RIBEIRO FILHO, FERNANDO MARTINS

Automatização do Método de Contorno Sem Malha Por Meio de Otimização Multiobjetivo em Problemas da Elasticidade. [Distrito Federal] 2021.

xv, 78 p., 210 x 279 mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Estruturas e Construção Civil, 2021)

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| 1. Método de Contorno Sem Malha | 4. Função Objetivo de Equilíbrio                           |
| 2. Métodos Sem Malha            | 5. Função Objetivo de Condicionamento                      |
| 3. Otimização de Modelagem      | 6. Função Objetivo de Diferença de Deslocamento nos Cantos |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

RIBEIRO FILHO, F.M. (2021). Automatização do Método de Contorno Sem Malha Por Meio de Otimização Multiobjetivo em Problemas da Elasticidade. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-6A/21, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 94 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Fernando Martins Ribeiro Filho

TÍTULO: Automatização do Método de Contorno Sem Malha Por Meio de Otimização Multiobjetivo em Problemas da Elasticidade.

GRAU: Mestre ANO: 2021

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Fernando Martins Ribeiro Filho  
SGAN 911 COND. GREEN PARK BL J APTO 112  
70.790-110 – Brasília/DF - Brasil  
fernandofilho337@gmail.com

## **AGRADECIMENTOS**

Aqui agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram no desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu orientador, Artur Portela, pela paciência e dedicação durante o desenvolvimento da pesquisa;

Aos meus professores, por todo o apoio prestado durante o meu mestrado;

Aos meus familiares e amigos, em especial à Amanda Araújo, minha colega de mestrado, por terem tornado essa trajetória mais leve e prazerosa;

À CAPES, pelo auxílio financeiro prestado à pesquisa.

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma proposta de análise numérica automática, com aplicação em problemas bidimensionais da elasticidade linear, por meio de um novo método sem malha, que utiliza discretizações ótimas geradas automaticamente a partir de um processo de otimização multiobjetivo.

O método de modelagem numérica proposto, denominado Método de Contorno Sem Malha (MCSM), é baseado nas equações integrais de contorno de deslocamentos. A discretização é realizada por meio da separação do contorno em segmentos lineares de integração, sendo esses segmentos discretizados a partir de uma distribuição nodal arbitrária, sem que haja nós no encontro entre segmentos. O Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM), utilizado para aproximar as variáveis localmente, é aplicado independentemente em cada segmento, de forma que se torna possível representar de forma mais fiel descontinuidades nos campos de deslocamento e tensões.

Apesar da proposta de uma nova formulação numérica, a principal inovação apresentada por este trabalho é o uso de discretizações ótimas, geradas automaticamente por um robusto processo de otimização multiobjetivo utilizando Algoritmos Genéticos (AG) com base em três funções objetivo eficientes: a Função Objetivo de Equilíbrio (TE), a Função Objetivo de Condicionamento (CN) e a Função Objetivo de Diferença de Deslocamento nos Cantos (CDD). A estratégia de modelagem foi aplicada a problemas *benchmark*. Em todos os espaços objetivos testados, o método levou à obtenção de soluções ótimas que possuem um erro baixo frente às soluções analíticas esperadas. Além disso, foi observada uma correlação linear inversa entre as funções objetivo TE e CDD e o erro dos deslocamentos, o que mostra que a minimização dessas funções objetivo corresponde à obtenção de soluções numéricas próximas à solução analítica, de forma que a qualidade das soluções ótimas obtidas no espaço biobjetivo (TE, CDD) é particularmente alta e consistente.

**Palavras-chave:** Método de Contorno Sem Malha, Métodos Sem Malha, Otimização de Modelagem, Função Objetivo de Equilíbrio, Função Objetivo de Condicionamento, Função Objetivo de Diferença de Deslocamento nos Cantos.

## **ABSTRACT**

The present work proposes an automatic mesh-free numerical analysis, with applications to two-dimensional linear elasticity problems, which uses optimal nodal discretizations generated automatically by a multi-objective optimization process.

The proposed numerical model, denominated Boundary Mesh-Free Method (BMFM), is based on the boundary integral equation of displacements. The boundary is discretized by linear integration segments, and each segment is discretized by an arbitrary nodal distribution with node-free ends. The Moving Least Squares (MLS) method, which is used to approximate the variables locally, is applied independently in each segment, allowing for a better representation of discontinuities in the fields of displacement and stresses.

Despite the proposition of a new numerical formulation, the leading innovation of this work is the use of optimal mesh-free nodal arrangements and discretization parameters, generated automatically by a robust evolutionary multi-objective optimization process using Genetic Algorithms (GA), with three efficient objective functions: the traction-equilibrium objective function (TE); the condition-number objective function (CN); and the corner displacement difference objective function (CDD). The modelling strategy was applied to benchmark problems. In all of the analyzed objective spaces, the method led to low error optimal solutions when compared to the analytical solutions expected. In addition, an inverse correlation was observed between the TE and CDD objective functions and the displacement error, which shows that the minimization of these two functions leads to numerical solutions similar to the analytical one, thus the quality of the optimal solutions obtained through the two-objective (TE, CDD) space is particularly high and consistent.

**Keywords:** Mesh-free boundary model, Mesh-free Methods, Discretization Optimization, Traction-Equilibrium Objective Function, Condition-Number Objective Function, Corner Displacement-Difference Objective Function.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Objetivos.....	4
1.1.1. <i>Geral</i> .....	4
1.1.2. <i>Específicos</i> .....	5
1.2. Metodologia.....	5
1.3. Organização da dissertação .....	5
2. REFERENCIAL TEÓRICO .....	6
2.1. Modelagem Matemática de Sistemas Físicos.....	6
2.2. Métodos de aproximação.....	7
2.3. Discretização indireta com funções globais .....	8
2.4. Métodos Sem Malha.....	8
2.4.1. <i>Definição</i> .....	9
2.4.2. <i>Suporte Compacto</i> .....	9
2.4.3. <i>Domínio de Definição</i> .....	10
2.4.4. <i>Avaliação das Integrais</i> .....	10
2.4.5. <i>Funções de Forma</i> .....	11
2.4.6. <i>Funções Ponderadoras</i> .....	13
2.4.7. <i>Condições de Contorno Essenciais</i> .....	13
2.5. Método dos Mínimos Quadrados Móveis .....	14
2.5.1. <i>Aproximação</i> .....	14
2.5.2. <i>Funções de Ponderação</i> .....	15
2.5.3. <i>Funções de Forma</i> .....	15
2.6. Equação Integral de Contorno .....	17
2.6.1. <i>Solução Fundamental</i> .....	17
2.6.2. <i>Integral de Contorno</i> .....	18
2.6.3. <i>Pontos no Contorno</i> .....	20
2.7. Otimização de Funções.....	20
2.7.1. <i>Classificação dos Métodos de Otimização</i> .....	21
2.7.2. <i>Otimização dos Métodos Sem Malha</i> .....	22
3. MÉTODO DE CONTORNO SEM MALHA .....	23
4. OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO.....	27
4.1. Conceitos Iniciais .....	27
4.1.1. <i>Formulação Matemática da Otimização Multiobjetivo</i> .....	28
4.1.2. <i>Solução Viável</i> .....	29
4.1.3. <i>Dominância de Pareto</i> .....	29

4.1.4.	<i>Otimidade de Pareto</i> .....	29
4.2.	Algoritmos Genéticos .....	30
4.2.1.	<i>Variáveis de Decisão</i> .....	32
4.2.2.	<i>Funções Objetivo</i> .....	32
4.2.3.	<i>Restrições</i> .....	35
4.2.4.	<i>Formulação Matemática da Otimização do Método de Contorno Sem Malha</i> .....	35
5.	RESULTADOS NUMÉRICOS .....	37
5.1.	<i>Patch Test</i> .....	38
5.2.	Viga em Balanço .....	40
5.2.1.	<i>Otimização mono-objetivo – minimização de 1 função</i> .....	41
5.2.2.	<i>Otimização multiobjetivo – minimização simultânea de 2 funções</i> .....	45
5.2.3.	<i>Otimização multiobjetivo – minimização simultânea de 3 funções</i> .....	57
5.3.	Placa com Furo Circular Centralizado.....	61
6.	CONCLUSÕES.....	69
6.1.	Conclusões Gerais .....	69
6.2.	Sugestões para Futuros Trabalhos .....	70
	REFERÊNCIAS .....	72
	APÊNDICES .....	77

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas da modelação matemática do problema físico. Fonte: Oliveira (2016). .....	7
Figura 2 - Métodos de aproximação e discretização. Fonte: Oliveira (2016). .....	8
Figura 3 - Uso de background cells (malha de fundo) em métodos sem malha baseados na forma fraca global. Fonte: Oliveira (2016). .....	10
Figura 4 - Domínio local $\Omega_s$ de um nó $x$ . Fonte: Oliveira (2016). .....	11
Figura 5 - Funções peso $w(x)$ de suporte compacto $r$ , dadas por splines de quarta ordem. O domínio de definição que contém a coordenada $x_Q$ é gerada por meio da interseção dos suportes compactos dos nós $i-1$ , $i$ e $i+1$ . .....	15
Figura 6 - Funções de forma $\phi x$ e da $uh(x)$ do MMQM unidimensional. As funções de forma do não são interpolantes nodais, logo, $uh(xi) \neq ui$ . .....	17
Figura 7 - Interpretação geométrica das componentes da solução fundamental. Adaptado de Brebbia e Dominguez (1992). .....	19
Figura 8 - Corpo bidimensional com o contorno $\Gamma$ discretizado em $N$ segmentos de integração $\Gamma_j$ , com cada segmento contendo $n_j$ nós e sem forças de corpo. .....	23
Figura 9 - Soluções geradas em um processo de otimização multiobjetivo com duas funções objetivo $f_1$ e $f_2$ . As soluções ótimas de Pareto são soluções não dominadas, ou seja, não há solução viável que seja melhor que elas quando consideradas as duas funções objetivo simultaneamente. Observa-se que não é possível identificar uma única solução ótima, havendo um trade-off entre as soluções de Pareto. .....	30
Figura 10 - Fluxograma do processo de otimização multiobjetivo utilizado na automatização da obtenção da discretização ótima do Método de Contorno Sem Malha. .....	31
Figura 11 - Patch Test. .....	38
Figura 12 - Distribuição nodal irregular utilizada na verificação do MCSM por meio do patch test. .....	39
Figura 13 – Deslocamentos (a) horizontais $u_1$ , em $x_2=0$ (b) verticais $u_2$ , em $x_1=0,5$ . .....	39
Figura 14 - Tensão vertical $\sigma_{22}$ em $x_2=0$ . .....	40
Figura 15 - Viga engastada de largura unitária em estado plano de tensão. Fonte: Oliveira, 2016. .....	40
Figura 16 – Erro do deslocamento $\epsilon_u$ e número de nós da discretização $N$ em função dos valores mínimos de CDD obtidos a partir de múltiplas rodadas da otimização mono-objetivo. .....	42
Figura 17 – Erro do deslocamento $\epsilon_u$ e número de nós da discretização $N$ em função dos valores mínimos de TE obtidos a partir de múltiplas rodadas da otimização mono-objetivo. .....	43
Figura 18 – Erro do deslocamento $\epsilon_u$ e número de nós da discretização $N$ em função dos valores mínimos de CN obtidos a partir de múltiplas rodadas da otimização mono-objetivo. .....	44
Figura 19 – Espaço objetivo CDD-TE e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento $\epsilon_u$ e do número total de nós $N$ da discretização nodal gerada. .....	46
Figura 20 – Espaço objetivo CDD-CN e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento $\epsilon_u$ e do número total de nós $N$ da discretização nodal gerada. .....	46
Figura 21 – Espaço objetivo CN-TE e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento $\epsilon_u$ e do número total de nós $N$ da discretização nodal gerada. .....	47
Figura 22 – Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-TE, obtida por meio da otimização do MCSM. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de $N$ para análise. .....	47

<b>Figura 23 –Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-CN, obtida por meio da otimização do MCSM. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de N para análise. ....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 24 –Frente de Pareto do espaço objetivo CN-TE, obtida por meio da otimização do MCSM. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de N para análise. ....</b>	<b>48</b>
<b>Figura 25 – Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE) como função do número de nós N. Para atingir um melhor resultado no objetivo CDD, o objetivo TE se deteriora, como consequência da otimalidade de Pareto. ....</b>	<b>50</b>
<b>Figura 26 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo. ....</b>	<b>51</b>
<b>Figura 27 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, CN), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo. ....</b>	<b>52</b>
<b>Figura 28 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CN, TE), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo. ....</b>	<b>53</b>
<b>Figura 29 – Deslocamento e tensões na seção <math>x_2=0</math> para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, TE). ....</b>	<b>54</b>
<b>Figura 30 – Deslocamento e tensões na seção <math>x_2=0</math> para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, CN). ....</b>	<b>55</b>
<b>Figura 31 – Deslocamento e tensões na seção <math>x_2=0</math> para as soluções ótimas selecionadas do espaço (TE, CDD). ....</b>	<b>56</b>
<b>Figura 32 – Erros relativos das correspondentes soluções ótimas de Pareto nos espaços objetivo (CDD, TE), (CDD, CN) e (CN, TE) da otimização multiobjetivo. ....</b>	<b>57</b>
<b>Figura 33 – Espaço objetivo CDD-TE-CN e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento <math>\epsilon_u</math> e do número total de nós N da discretização nodal gerada. ....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 34 –Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-TE-CN, obtida por meio da otimização do MCSM. As soluções não-dominadas, que formam a frente de Pareto, satisfazem claramente o critério de otimalidade de Pareto. Foram selecionadas oito soluções ótimas com diferentes valores de N para serem comparadas com os resultados dos espaços objetivo 2D. ....</b>	<b>58</b>
<b>Figura 35 – Erros relativos <math>\epsilon_u</math> das correspondentes soluções ótimas de Pareto nos espaços objetivo 2D e 3D da otimização multiobjetivo. Como as distribuições nodais geradas possuem praticamente a mesma quantidade de nós, os erros obtidos são praticamente da mesma ordem de grandeza. Esse aspecto valida a utilização da análise com dois objetivos ao invés da otimização completa com três objetivos. ....</b>	<b>59</b>
<b>Figura 36 – Mapa de calor das correlações lineares obtido a partir das soluções ótimas de Pareto do espaço objetivo (CDD, TE, CN), da variável de decisão do número de nós N e os erros relativos do deslocamento <math>\epsilon_u</math> das discretizações obtidas de forma automática. ....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 37 - Placa circular infinita com furo centralizado. Adaptado de Oliveira Jr. (2015). ....</b>	<b>61</b>
<b>Figura 38 – Espaço objetivo CDD-TE e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento <math>\epsilon_u</math> e do número total de nós N da discretização nodal gerada. Soluções com um maior número de nós e menores erros convergem para a região mais próxima da origem. ....</b>	<b>63</b>

<b>Figura 39 – Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-TE, obtida por meio da otimização do MCSM. As soluções não-dominadas, que formam a frente de Pareto, satisfazem claramente o critério de otimalidade de Pareto. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de N para análise. ....</b>	<b>63</b>
<b>Figura 40 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo. ....</b>	<b>65</b>
<b>Figura 41 – Deslocamentos <math>u_1</math> e <math>u_2</math> na seção <math>\theta=45^\circ</math> para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, TE). ....</b>	<b>66</b>
<b>Figura 42 – Tensões <math>\sigma_{11}</math>, <math>\sigma_{22}</math> e <math>\sigma_{12}</math> na seção <math>\theta=45^\circ</math> para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, TE). ....</b>	<b>67</b>
<b>Figura 43 - Erros relativos das soluções ótimas de Pareto no espaço objetivo (CDD, TE). ....</b>	<b>68</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Métodos sem malha. Fonte: Adaptado de Liu e Gu (2005). .....	9
Tabela 2 – Métodos sem malha. Fonte: Adaptado de Liu e Gu (2005).....	12
Tabela 3 - Soluções ótimas obtido por meio da otimização mono-objetivo para cada espaço objetivo. ....	45
Tabela 4- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE).....	49
Tabela 5- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, CN). ....	49
Tabela 6- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CN, TE). ....	50
Tabela 7- Erros relativos $\epsilon_u$ e $\epsilon_p$ das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo 2D (CDD, TE) e os correspondentes erros do espaço objetivo 3D (CDD, TE, CN), obtidas com um valor similar do número de nós da discretização. ....	59
Tabela 8- Erros relativos $\epsilon_u$ e $\epsilon_p$ das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo 2D (CDD, CN) e os correspondentes erros do espaço objetivo 3D (CDD, TE, CN), obtidas com um valor similar do número de nós da discretização. ....	59
Tabela 9- Erros relativos $\epsilon_u$ e $\epsilon_p$ das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo 2D (CN, TE) e os correspondentes erros do espaço objetivo 3D (CDD, TE, CN), obtidas com um valor similar do número de nós da discretização. ....	59
Tabela 10- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE) para o problema da Placa com Furo Circular Centralizado.....	64

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

AG – Algoritmos Genéticos

BMFM – *Boundary Mesh-Free Method*

GA – *Genetic Algorithms*

MCSM – Método de Contorno Sem Malha

MEF – Método dos Elementos Finitos

MLS – *Moving Least Squares*

MMQM – Método dos Mínimos Quadrados Móveis

MDF – Método das Diferenças Finitas

MVF – Método dos Volumes Finitos

GFEM - *Generalized Finite Element Method*

XFEM - *Extendend Finite Element Method*

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MSM – Métodos Sem Malha

SPH – *Smoothed Particle Hydrodynamics*

EFG – *Element-Free Galerkin*

RKPM – *Reproducing Kernel Particle Methods*

MLPG – *Meshless Local Petrov-Galerkin*

LPIM - *Local Point Interpolation Method*

LRPIM - *Local Radial Point Interpolation Method*

RBDMF – *Rigid-Body Displacement Mesh-Free Formulation*

*GSMF - Generalized-Strain Mesh-Free Formulation*

MECD - Método dos Elementos de Contorno Dual

BND – *Boundary Node Method*

MLBIE - *Meshless Local Boundary Integral Equation*

BCM - *Boundary Cloud Method*

BEFM - *Boundary Element-Free Method*

TE – função objetivo do equilíbrio das forças

CDD – função objetivo da diferença de deslocamento nos cantos

CN – função objetivo do número de condicionamento da matriz de coeficientes do sistema de equações final do MCSM

$\mathbf{b}$  – vetor de forças de corpo

$\phi_i$  – função de forma do MMQM associada ao nó  $i$

$\mathbf{x}$  – vetor de coordenadas bidimensional  $\mathbf{x}=[x,y]$

$\mathbf{X}$  -  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  é o vetor de variáveis de decisão da posição dos nós

$\alpha_s$  – parâmetro de discretização arbitrário do Método de Contorno Sem Malha, que define o tamanho do suporte compacto; é uma das variáveis de decisão do processo de otimização

$\alpha_q$  – parâmetro de discretização arbitrário de métodos sem malha locais de domínio, associado ao tamanho do domínio de definição

$\Gamma$  – contorno do problema

$\Omega$  – domínio do problema

$\Omega_s$  – suporte compacto

$r_{\Omega_s}$  – raio do suporte compacto

$w_i$  – função peso do MMQM associada ao nó  $i$

$u$  – variável de deslocamento

$p$  – variável de força de tração

$\hat{u}$  – parâmetro nodal

$\sigma$  – tensão

$\theta$  – ângulo em relação à horizontal

$\mathbf{x}$  – vetor de coordenadas bidimensional  $\mathbf{x}=[x,y]$

$m$  – ordem da base polinomial do MMQM (base linear  $m=2$ , base quadrática  $m=3$  e base cúbica  $m=4$ )

$N$  – número de nós total da discretização

$\mathbf{N}$  – vetor  $(N_1, N_2, \dots, N_n)$  que contém o número de nós de cada segmento; é um dos conjuntos de variáveis de decisão do processo de otimização

$\mathbf{c}_n$  – vetor  $(c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nP})$  que contém a irregularidade de cada nó; é um dos conjuntos de variáveis de decisão do processo de otimização

$\Gamma_j$  – segmento de integração

$\epsilon_u$  – erro do deslocamento

# 1. INTRODUÇÃO

Devido à alta complexidade das estruturas em engenharia civil, torna-se difícil ou até mesmo impossível obter a solução analítica de problemas de esforços para as estruturas, sendo conhecida a solução exata apenas para problemas simples, como no caso de vigas isoladas. Logo, a modelagem computacional se torna extremamente útil, pois, apesar de obter resultados aproximados, ela é facilmente aplicável a estruturas mais complexas.

Atualmente, o método mais popular de modelagem computacional é o Método dos Elementos Finitos (MEF), amplamente aplicado tanto em âmbito acadêmico quanto comercial. Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), desde os anos 1940, o MEF vem se mostrando eficiente na obtenção de soluções aproximadas por meio da discretização do domínio de problemas de mecânica dos sólidos.

Apesar de amplamente utilizado, o MEF possui algumas limitações, como por exemplo: dificuldade com problemas geometricamente não lineares, com grandes deformações; considerável perda de acurácia na recuperação das tensões quando considerada continuidade  $C^0$  na interface dos elementos; dificuldade em análise de propagação de fraturas; difícil implementação de malhas adaptativas em problemas 3-D, pois geralmente é necessário o re-malhamento, sendo que a geração de malha demanda um alto custo computacional. Estas são algumas das limitações e problemas dos MEF segundo Andújar et al. (2011), Oliveira Jr (2015) e Oliveira (2016).

Em geral, as limitações do MEF se repetem em outros métodos, tais como o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF). Desse modo, procurou-se desenvolver alternativas para contornar esses problemas, sendo algumas delas: o *Generalized Finite Element Method* (GFEM), apresentado por Strouboulis et al. (2000); o *Extendend Finite Element Method* (XFEM), apresentado por Belytschko e Black (1999); o Método dos Elementos de Contorno (MEC); e os Métodos Sem Malha (MSM). Dentre esses métodos se destacam aqueles que reduzem o uso de malha, como o MEC; ou que até mesmo eliminam a necessidade da malha para a aproximação, como os MSM.

Nos MSM, o corpo é discretizado através de uma nuvem de pontos distribuídos em seu domínio e contorno. Dessa forma, estes métodos não necessitam de uma malha para aproximar as variáveis. Além disso, eles lidam mais facilmente com as condições de contorno

quando comparados ao MDF tradicional (Onate et al., 1996). A formulação desses métodos em geral é baseada no método dos resíduos ponderados e nos princípios variacionais (Finlayson, 1972).

Um dos MSM baseados na forma forte dos resíduos ponderados, concebido inicialmente para o estudo de fenômenos da astrofísica, é o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), desenvolvido por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977). Este método é creditado por Sladek et al. (2013) como a ideia originária dos MSM. O SPH foi aplicado à mecânica dos sólidos por Libersky et al. (1993). No entanto, foi verificado que o método apresenta instabilidade nas soluções dos valores do contorno e nas tensões, como mostrado por Sweigle et al. (1995).

Outro método baseado na forma forte é o método de colocação sem malha, estudado por Kansa (1990), Zongmin (1992), Zhang et al. (2001), Liu et al. (2002b), Onate et al. (1996), Lee e Yoon (2004), Jamil e Ng (2013) e Chen (2003). Contudo, apesar deles se destacarem pela eficiência computacional e por terem algoritmos de fácil implementação, eles são numericamente instáveis, gerando um sistema algébrico mal condicionado e de difícil imposição de condições de contorno natural de Neumann em distribuições nodais irregulares (Liu e Gu, 2005).

Alguns dos MSM baseados na forma fraca global aplicados à mecânica dos sólidos foram o *Element-Free Galerkin* (EFG, por Belytschko et al., 1994) e o *Reproducing Kernel Particle Methods* (RKPM, por Liu et al., 1995), baseados na aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM) concebido por Lancaster e Salkauskas (1981). Estes métodos necessitavam de uma malha de fundo para integração do sistema algébrico de equações, o que faz com que eles não sejam considerados métodos verdadeiramente sem malha.

Há também métodos baseados na forma fraca local, como o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG), concebido por Atluri e Zhu (1998); o *Local Point Interpolation Method* (LPIM), apresentado por Liu e Gu (2001); e o *Local Radial Point Interpolation Method* (LRPIM), apresentado por Liu et al. (2002a). Esses métodos possuem como principal vantagem a não necessidade da utilização de uma malha de fundo para a realizar a integração numérica, sendo assim verdadeiramente sem malha. Técnicas de integração local podem ser

realizadas de maneira acurada e livre de instabilidades numéricas, conforme afirma Chen et al. (2017).

Mais recentemente, foram apresentados novos MSM baseados na formulação da forma local do teorema do trabalho, desenvolvidos por Oliveira e Portela (2016): o *Rigid-Body Displacement Mesh-Free Formulation* (RBDMF), no qual a forma local do teorema do trabalho resulta em uma forma fraca apenas com termos de contorno (na ausência de forças de corpo); e o *Generalized-Strain Mesh-Free Formulation* (GSMF), no qual a forma local do teorema do trabalho resulta em uma forma fraca completamente livre de integração numérica, o que resulta em uma importante diminuição do esforço computacional.

Por último, existem os MSM de formulação mista, que procuram combinar as formulações acima para usufruir das principais vantagens de cada uma. Atluri et al. (2004) propôs o *Meshless Finite Volume Method*, por meio de uma abordagem mista com o MLPG para a resolução de problemas elastoestáticos. Outros trabalhos nesse sentido foram propostos por Atluri et al. (2006a), Atluri et al. (2006b) e Liu e Gu (2003).

Por sua vez, o MEC consiste em um método no qual se discretiza apenas o contorno do corpo, o que reduz significativamente o uso de malha e simplifica a discretização do corpo. É uma técnica bem conhecida no meio da engenharia, como mostrado por Brebbia e Dominguez (1992) e Brebbia et al. (1984). O MEC consiste na utilização das soluções fundamentais das equações diferenciais que se deseja resolver em conjunto com a técnica dos resíduos ponderados para se obter a integral de contorno. Esta equação descreve o deslocamento em qualquer ponto do corpo a partir de uma integral no contorno, desde que conhecidas as condições de deslocamento e de forças de tração no contorno do corpo.

O MEC apresenta resultados melhores do que o MEF em problemas de concentração de tensões, como mostrado por Brebbia e Trevelyan (1986); permite a modelagem de domínios infinitos, o que é impossível em métodos de domínio; e tem a vantagem de permitir o uso de elementos descontínuos, o que facilita a discretização, além de ser muito útil em casos em que existam singularidades.

O Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), pioneiramente apresentado na elasticidade por Portela et al. (1992), é uma variação do MEC, que é amplamente utilizada na mecânica da fratura para modelar contornos degenerados (fronteiras sobrepostas).

Existem também métodos sem malha que combinam as equações integrais de contorno com funções de aproximação local, dessa forma unindo as vantagens do MEC com as do MSM. Estes métodos são classificados como métodos de forma transposta. Destacam-se nessa linha de pesquisa o *Boundary Node Method* (BNM), apresentado por Kothnur et al. (1999); o *Meshless Local Boundary Integral Equation* (MLBIE), apresentado por Zhu et al. (1998); o *Boundary Cloud Method* (BCM, por Li e Aluru, 2002); e mais recente o *Boundary Element-Free Method* (BEFM), concebido por Liew et al. (2006).

Apesar, entretanto, da vasta quantidade de estudos realizados sobre métodos sem malha locais, estes ainda são muito questionados por dependerem de parâmetros arbitrários de discretização. Estes parâmetros variam conforme o problema e a acurácia dos métodos depende fortemente da escolha do melhor valor para uma dada distribuição nodal. Além disso, as distribuições nodais utilizadas nos estudos ainda são determinadas de forma heurística. Logo, a calibração dos métodos ainda demanda uma alta intervenção humana.

Portanto, visando obter os benefícios dos MSM, que dispensam a utilização de malhas, e das equações integrais de contorno, que limitam a necessidade de discretização ao contorno, o presente trabalho se propõe a implementar as funções de forma do MMQM nas integrais de contorno, gerando assim o Método de Contorno Sem Malha (MCSM). Visando superar as atuais limitações intrínsecas aos métodos sem malha, o MCSM será associado a um processo de otimização multiobjetivo, realizado por meio de Algoritmos Genéticos. Por meio da otimização da modelagem, serão obtidas de forma automática valores ótimos de parâmetros de discretização, do número de nós e da irregularidade nodal, ou seja, a obtenção da discretização sem malha será completamente automatizada.

## **1.1. Objetivos**

### *1.1.1. Geral*

O objetivo dessa pesquisa é a implementação da aproximação das funções de forma geradas pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM) nas equações integrais de contorno, assim gerando o Método de Contorno Sem Malha (MCSM). A obtenção da discretização ótima será automatizada por meio da associação do MCSM a um processo de otimização multiobjetivo utilizando Algoritmos Genéticos, através do qual serão otimizados o

parâmetro de discretização, o número de nós e a irregularidade nodal. A formulação será desenvolvida e aplicada para problemas bidimensionais da elasticidade linear.

### 1.1.2. *Específicos*

- Avaliar a performance do MCSM proposto por meio de problemas *benchmark* de elasticidade linear;
- Avaliar a performance das discretizações obtidas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo;
- Propor avanços computacionais na linha de pesquisa de métodos sem malhas do PECC.

## 1.2 Metodologia

A metodologia do trabalho foi separada nas seguintes fases:

- Implementação do MCSM utilizando algoritmos programados em MATLAB;
- Validação do MCSM proposto por meio da análise de um problema *benchmark*;
- Implementação do Algoritmo Genético a ser utilizado no processo de otimização em MATLAB;
- Validação da proposta de modelagem automática a partir de dois problemas *benchmark*.

## 1.3. Organização da dissertação

A divisão da dissertação foi feita em 6 capítulos. O Capítulo 1 apresentou uma introdução ao trabalho, bem como os objetivos e metodologia do mesmo. O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico utilizado como base para a modelagem numérica proposta. O Capítulo 3 apresenta a formulação proposta do MCSM. O Capítulo 4 apresenta a formulação da otimização multiobjetivo utilizada na automatização do MCSM. O Capítulo 5 apresenta os resultados numéricos obtidos. No Capítulo 6, encontram-se as conclusões finais do trabalho. Ao final do trabalho, são apresentadas as referências utilizadas. Os algoritmos de otimização implementados encontram-se nos apêndices do trabalho.

## **2. REFERENCIAL TEÓRICO**

Neste capítulo serão apresentados os conceitos fundamentais e formulações necessárias para o desenvolvimento da pesquisa.

### **2.1. Modelagem Matemática de Sistemas Físicos**

A modelagem matemática de sistemas físicos é um processo no qual se procura descrever o comportamento de um problema físico qualquer da natureza. Tal processo é iterativo, pois é feita uma simplificação do problema, escolhendo-se apenas alguns dos infinitos parâmetros mais relevantes para serem considerados. Ao final do processo, são comparados os resultados matemáticos obtidos com os esperados observados na realidade. Caso o erro esteja superior ao permitido, deve-se selecionar mais parâmetros ou usar outros parâmetros, surgindo então a iteratividade do processo.

Assim, o primeiro passo da modelagem é a definição dos parâmetros relevantes para o fenômeno em estudo, para que se possa representar o problema físico por meio de um sistema equivalente com um número finito de parâmetros.

Com o sistema equivalente definido, aplicam-se as equações das leis físicas obtidas matematicamente através dos princípios fundamentais da mecânica dos meios contínuos. Em problemas de engenharia, o sistema equivalente se torna um sistema de equações diferenciais, definidas apenas no domínio do problema e delimitadas pelo seu contorno com condições iniciais e de contorno específicas. Esse sistema possui infinitos graus de liberdade, pois as equações diferenciais são válidas em qualquer ponto do domínio do problema, assim se tornando um modelo de meio contínuo que possui solução exata matematicamente. Esse modelo de meio contínuo pode ser descrito por modelos matemáticos de equilíbrio, de propagação ou vibração e de difusão (Portela e Charafi, 2002).

Os modelos de meio contínuos possuem solução exata matemática. Porém, como são descritos por um sistema de equações diferenciais, a solução analítica por vezes é de difícil obtenção ou até mesmo desconhecida. Para contornar tal problema, são utilizados métodos de aproximação, que resolvem o problema de forma aproximada sem recorrer a ferramentas matemáticas mais complexas.

O método de aproximação mais utilizado é o método dos resíduos ponderados em conjunto com uma discretização do corpo, pois dessa forma é possível substituir as equações diferenciais por um sistema finito de equação algébricas. Dessa forma, o problema passa a ter um número finito de graus de liberdade, possibilitando sua resolução com ferramentas de análise numérica (Portela e Charafi, 2002). Na Figura 1, encontra-se esquematizado as etapas da modelagem matemática de sistemas físicos.

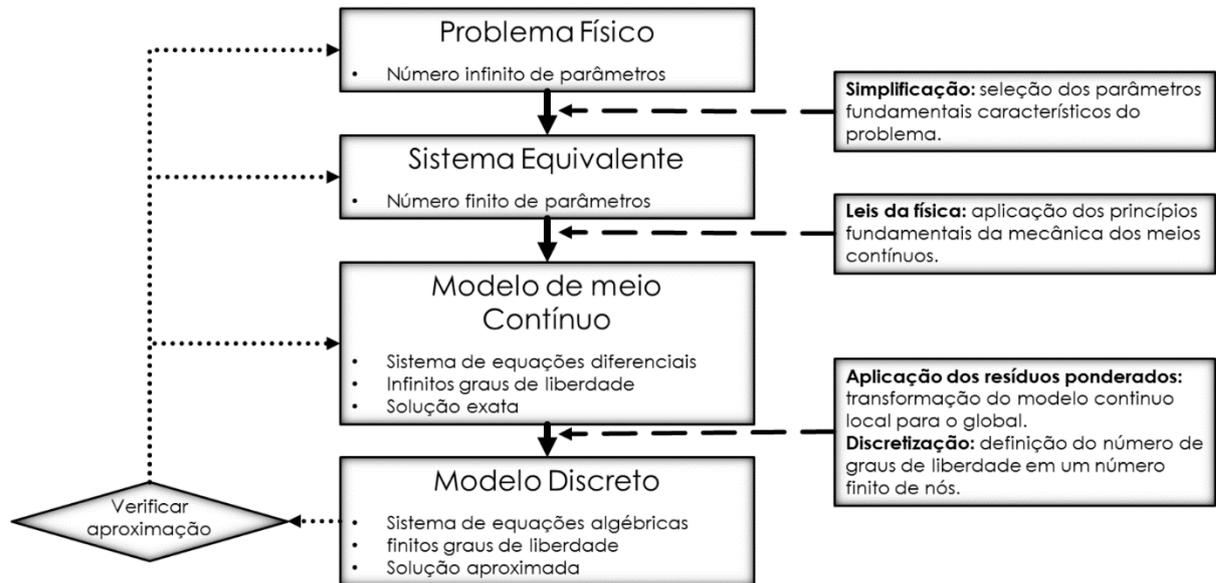


Figura 1 - Etapas da modelação matemática do problema físico. Fonte: Oliveira (2016).

## 2.2. Métodos de aproximação

Utilizando a Teoria dos Resíduos Ponderados, é possível definir diversos tipos de aproximação, pois é possível usar funções de aproximação indiretas ou diretas em sua formulação. Além disso, também existe a variação das formas dos resíduos ponderados, como a forma forte, a forma fraca e a forma transposta.

A forma forte trabalha com termos do domínio, ao passo que a forma fraca trabalha com termos do domínio e, através da integração por partes, são introduzidos termos do contorno. Por último, através de sucessivas integrais por partes, a forma transposta trabalha apenas com integrais de contorno.

Pode-se ainda definir as funções pesos das mais diversas formas, sendo os métodos mais conhecidos o Método de Galerkin, o Método da Colocação e o Método dos Mínimos Quadrados.

Oliveira (2016) apresenta um diagrama com a relação entre as diferentes abordagens de aproximação, ilustrado na Figura 2.

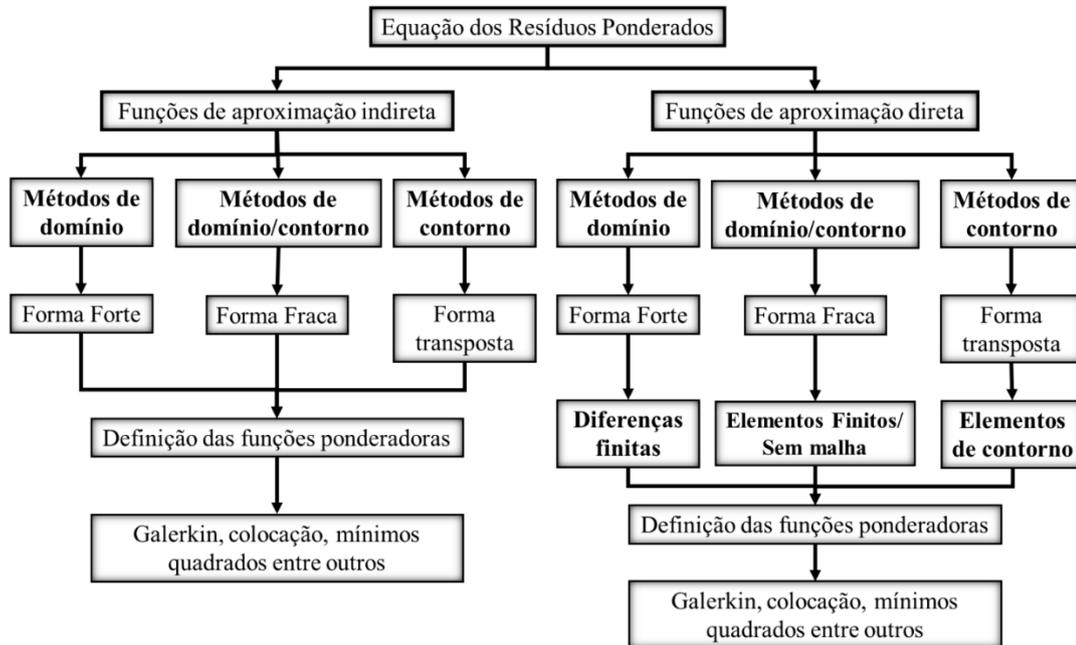


Figura 2 - Métodos de aproximação e discretização. Fonte: Oliveira (2016).

### 2.3. Discretização indireta com funções globais

Nas funções de aproximação indireta, a variável  $u$  aproximada é expressa por

$$u = \alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \quad 2.1$$

onde  $\{\alpha_i\}_{i=1\dots n}$  são as incógnitas a serem determinadas na solução do problema. Elas representam um conjunto de coeficientes generalizados das funções de forma  $\{\phi_i\}_{i=1\dots n}$ . Já as funções de forma são um conjunto de  $n$  funções linearmente independentes definidas globalmente no domínio do problema. Como a aproximação é realizada de forma global e indireta, os coeficientes  $\{\alpha_i\}_{i=1\dots n}$  não coincidem com os valores da variável  $u$  do problema. Dessa forma, os coeficientes  $\{\alpha_i\}_{i=1\dots n}$  não possuem significado físico, diferentemente das aproximações diretas.

### 2.4. Métodos Sem Malha

Nesse item, serão definidos os principais conceitos e termos necessários para a utilização dos métodos sem malha.

### 2.4.1. Definição

Os Métodos Sem Malha (MSM) recebem esse nome devido ao fato deles dependerem apenas de uma distribuição de nós no domínio e no contorno do problema para realizar a discretização. Ou seja, diferentemente de métodos que utilizam malhas, não é necessária uma conectividade entre os nós pré-estabelecida para a realização da aproximação das variáveis. Assim sendo, necessita-se apenas da posição dos nós no domínio e na fronteira do problema, sem que seja necessária a formação de uma malha. Essa distribuição da nuvem de pontos nodal não necessariamente precisa ser uniforme, podendo ser utilizadas diferentes densidades de pontos ao longo do corpo (Atluri e Zhu, 1998). Por não precisarem gerar a conectividade nodal, os MSM apresentam um menor custo computacional. Eles também possuem uma melhor precisão na recuperação de tensões, além de terem aplicação mais simples em problemas adaptativos e de grandes deslocamentos, uma vez que nesses casos é necessário apenas mudar a posição dos nós sem restrição de posição ou deslocamento, o que não é possível ao utilizar o MEF. Além disso, eles são mais convenientes em aplicações da mecânica da fratura.

Quanto a sua formulação, os métodos sem malha podem ser classificados como métodos de forma fraca, forte, mista ou transposta. Podem também ser classificados quanto ao tipo de função de aproximação utilizada e quanto à representação do domínio do problema. Alguns métodos e suas respectivas classificações quanto a cada quesito se encontram na Tabela 1.

**Tabela 1 - Métodos sem malha. Fonte: Adaptado de Liu e Gu (2005).**

Classificação	Categoria	Métodos
Formulações Utilizadas	Forma Forte Forma Fraca Combinação de ambas Forma Transposta	Colocação, FPM, etc. EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc. MWS, etc. BNM, MLBIE, BCM, BEFM, etc.
Interpolação/Aproximação	MMQM Representação Integral PIM Outros	EFG, MLPG, etc. SPH, etc. RPIM, LRPIM, etc. PUFEM, HP-CLOUD, etc.
Representação do domínio	Domínio Contorno	SPH, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM, etc. BNM, LBIE, BPIM, BRPIM, HBRPIM, etc.

### 2.4.2. Suporte Compacto

O suporte compacto é o domínio de influência de um nó  $X_i$ . Ele determina a região na qual o nó terá influência sobre a aproximação. Assim, a definição correta do suporte compacto é de extrema importância para se obter uma boa aproximação. Se o suporte for

grande demais, a aproximação perde a característica local; se ele for muito pequeno, o método torna-se local demais, não aproximando o entorno corretamente.

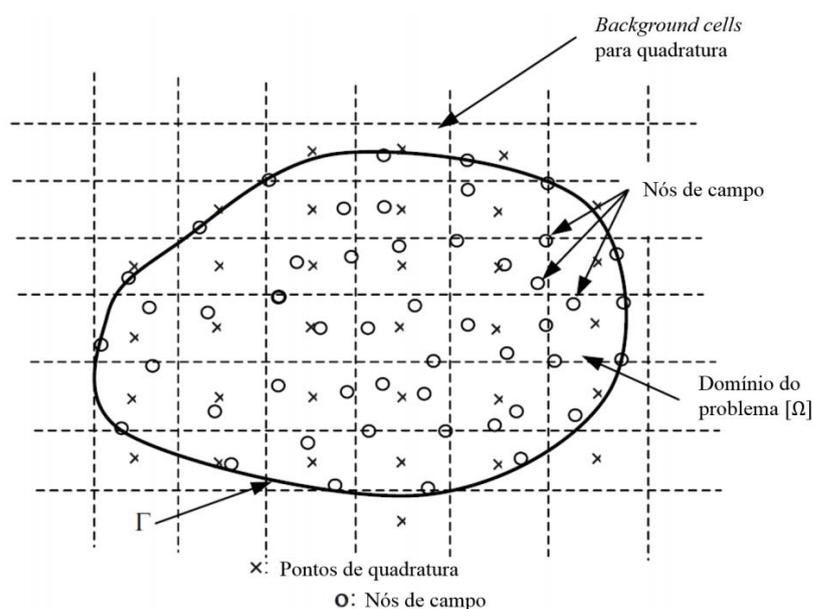
O tamanho do suporte compacto é controlado por um parâmetro adimensional  $\alpha_s$  que multiplica a maior distância entre dois nós vizinhos. Geralmente valores de  $\alpha_s$  entre 2,0 e 3,0 costumam levar a bons resultados no caso de bases lineares, como visto em Liu e Gu (2005) e Atluri e Zhu (2000). No entanto, para cada problema existe um valor ótimo de  $\alpha_s$  específico.

### 2.4.3. Domínio de Definição

O domínio de definição de um ponto  $x_Q$  qualquer é definido como a interseção dos suportes compactos nodais que contêm esse ponto  $x_Q$  onde se deseja aproximar a variável. Logo, os nós cujos parâmetros nodais são considerados na aproximação em uma coordenada  $x_Q$  são aqueles cujo suporte compacto contém  $x_Q$ .

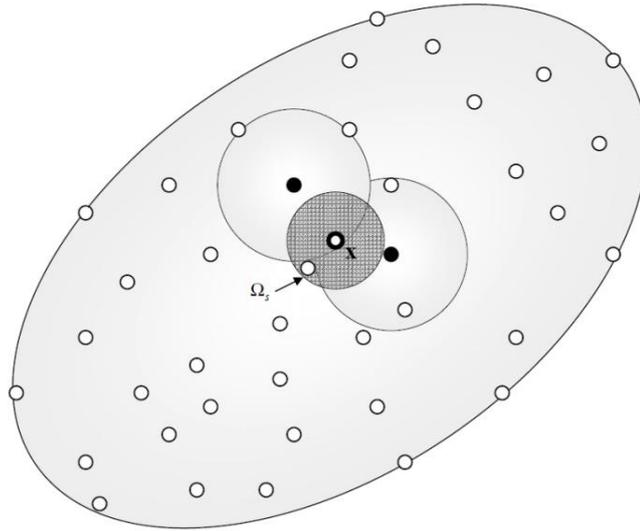
### 2.4.4. Avaliação das Integrais

Os Métodos Sem Malha em geral possuem duas formas de realizar a integração numérica, a depender de sua formulação. Os métodos que utilizam a formulação de forma fraca global utilizam uma malha de fundo, ou *background cells*, para realizar a quadratura de Gauss. A malha pode ser regular ou similar as do MEF, discretizando o domínio global em células, como pode ser observado na Figura 3.



**Figura 3 - Uso de background cells (malha de fundo) em métodos sem malha baseados na forma fraca global. Fonte: Oliveira (2016).**

Já os métodos que utilizam a forma fraca local, realizam a integração em um domínio de quadratura local predefinida para cada nó, também chamado de domínio local de integração da forma fraca. O domínio local é o subdomínio onde a forma fraca local é definida. Na Figura 4, pode-se ver o domínio local  $\Omega_s$  do nó para o caso de um método sem malha de domínio.



**Figura 4 - Domínio local  $\Omega_s$  de um nó  $x$ . Fonte: Oliveira (2016).**

O tamanho do domínio local é controlado por um parâmetro adimensional  $\alpha_q$  que multiplica a maior distância entre dois nós vizinhos, semelhantemente ao  $\alpha_s$  do suporte compacto. O parâmetro  $\alpha_q$  encontra-se presente em métodos sem malha de domínio.

Conforme mostrado por Liu e Gu (2005) e Atluri e Zhu (2000), o valor de  $\alpha_q$  geralmente varia entre 0,4 e 0,6 para a maioria dos problemas de engenharia. Oliveira et. al. (2019) utilizou Algoritmos Genéticos multiobjetivo para a otimização e definição do parâmetro  $\alpha_q$  e  $\alpha_s$  automaticamente para cada problema, representando um avanço no método.

#### 2.4.5. Funções de Forma

As funções de forma são utilizadas para aproximar o campo de deslocamento  $u$  em qualquer coordenada  $\mathbf{x}$  dentro do domínio. Além delas, são utilizados os parâmetros nodais, como pode ser observado na Equação 2.2.

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}, \quad 2.2$$

onde  $\hat{u}_i$  é o parâmetro nodal do nó  $i$ ;  $\hat{\mathbf{u}}$  é o vetor que contém os parâmetros nodais dos  $n$  nós,  $\phi_i(\mathbf{x})$  é a função de forma do nó  $i$  e  $\Phi$  é a matriz que contém as funções de forma dos  $n$  nós. Os  $n$  nós que participam da aproximação são aqueles que possuem o ponto  $\mathbf{x}$  em seus suportes compactos, ou os nós que fazem parte do domínio de definição do ponto  $\mathbf{x}$ , conforme definido anteriormente.

Segundo Liu (2002), é desejável que as funções de forma atendam as seguintes características:

- Devem ser robustas o bastante para interpolar distribuições nodais irregulares;
- Possuir estabilidade numérica;
- Ser diferenciáveis quantas vezes necessário para o problema;
- Possuir suporte compacto, ou seja, valor 0 fora do mesmo;
- Devem ser eficientes computacionalmente;
- Possuir propriedades de delta de Kroenecker, se possível;

As funções de forma utilizadas nesse trabalho, advindas da aproximação do Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM), ou em inglês *Moving Least Squares (MLS) method*, atendem a todos os requisitos, menos o de possuir propriedades de delta de Kroenecker, sendo, portanto, uma função de forma eficiente.

As funções de forma são parte importante da aproximação. Logo, uma das áreas mais pesquisadas é a de criação de novas funções de forma para os métodos sem malha. As principais funções de forma e suas classificações estão resumidos esquematicamente na Tabela 2.

**Tabela 2 – Métodos sem malha. Fonte: Adaptado de Liu e Gu (2005)**

Categoria	Técnica de Aproximação
Representação Integral	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)</i> <i>Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)</i>
Representação em Séries	<i>Moving Least Squares (MLS)</i> <i>Orthogonalized Moving Least Squares (OMLS)</i> <i>Point Interpolation Method (PIM, RPIM)</i> <i>Partition of Unity (PoU)</i>
Representação Diferencial	<i>Generalized Finite Difference Method (GFDM)</i>

Os métodos de representação das funções de forma em séries é o mais conhecido e utilizado, pois eles possuem um longo histórico de desenvolvimento desde o Método dos Elementos Finitos. Dentre os métodos mais utilizados na geração de funções de forma para os MSM, os mais conhecidos são o MMQM, o PIM e o RPIM, sendo este último o mesmo do PIM, porém utilizando bases radiais.

#### 2.4.6. *Funções Ponderadoras*

As funções ponderadoras, ou funções peso, entram na construção das funções de forma, tendo um papel muito importante de ponderar a importância de um nó para a aproximação em um ponto  $x$  qualquer do domínio. Geralmente, quanto mais perto o ponto  $x$  de um nó, mais importante é esse nó para aproximação nesse ponto. Além disso, é a continuidade da função peso que garante a continuidade da aproximação.

As funções peso possuem suporte compacto, de forma que possuem um valor diferente de zero apenas dentro desse suporte, garantindo assim a localidade da aproximação. Dentre suas principais características, está a de decrescer monotonicamente à medida que se afasta do nó de interesse; e a primeira e segunda derivada serem equivalentes a zero no contorno do suporte compacto.

Dessa forma existem diversas funções que podem ser usadas, desde que atendam as características listadas acima com a ordem de continuidade desejada. Geralmente, são utilizadas as funções exponenciais e do tipo spline. As exponenciais, apesar de serem mais custosas, são menos sensíveis ao tamanho do suporte compacto.

#### 2.4.7. *Condições de Contorno Essenciais*

Como os métodos sem malha geralmente são indiretos, isto é, seus parâmetros nodais são diferentes dos valores da aproximação no nó, as condições de contorno não podem ser diretamente impostas no sistema algébrico final. Assim, nos métodos sem malha é necessária a imposição delas através da adição de equações de aproximação ou por meio dos multiplicadores de Lagrange. Este último método é o mais utilizado, porém é mais custoso computacionalmente (Chen et al., 2006).

## 2.5. Método dos Mínimos Quadrados Móveis

O Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM) foi criado por Lancaster e Salkauskas (1981) com o objetivo de construir superfícies e de ajustar dados pontuais dispersos arbitrariamente. Mais tarde, Nayroles et al. (1992) utilizou o MMQM para a construção de funções de forma para a resolução de problemas da mecânica dos sólidos deformáveis.

Assim, o MMQM se mostrou uma poderosa ferramenta de aproximação. O método é composto de três componentes: a função peso com o suporte compacto associada a cada nó, a base polinomial escolhida e os coeficientes nodais dados em função das coordenadas espaciais, conforme apresentado por Atluri e Zhu (1998).

É importante ressaltar que para o método proposto nesse trabalho, a formulação utilizada do MMQM é unidimensional. Isto porque, apesar de se tratarem de domínios bidimensionais, como apenas o contorno é discretizado, pode-se considerar um espaço unidimensional ao tratar do contorno parametrizado. Assim, a formulação apresentada abaixo é a do MMQM unidimensional.

### 2.5.1. Aproximação

A aproximação da variável  $u^h(\mathbf{x})$  em uma coordenada  $\mathbf{x}$  qualquer do corpo é dada por

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad 2.3$$

onde  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  são os coeficientes nodais em função das coordenadas espaciais e  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$  é o vetor das bases polinomiais. Para uma base linear ( $m=2$ ), o vetor é dado por

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x]. \quad 2.4$$

Já para bases quadráticas ( $m=3$ ), o vetor é dado por

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ x^2], \quad 2.5$$

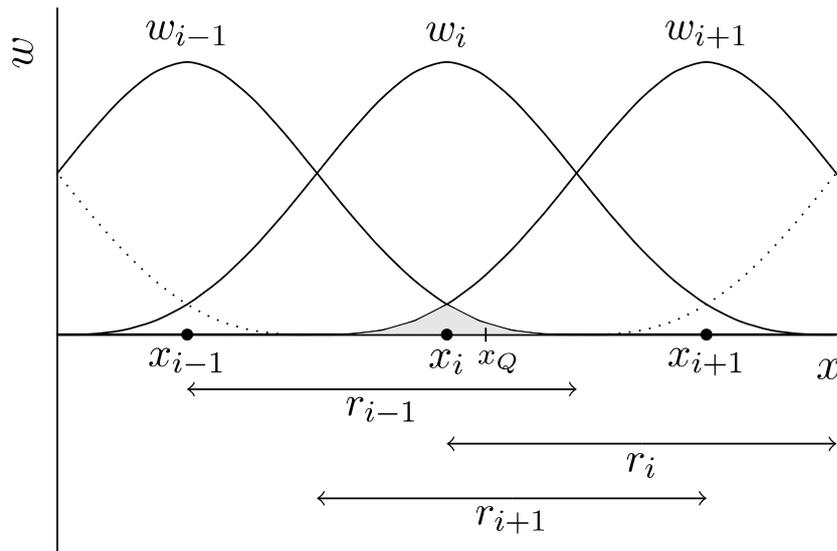
e assim sucessivamente para bases superiores.

### 2.5.2. Funções de Ponderação

As funções peso  $w_i(\mathbf{x})$  utilizadas para ponderar a influência dos nós com relação a distância são descritas por splines de quarta ordem, dadas por

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_{ix}}{r_{ix}}\right)^2 + 8\left(\frac{d_{ix}}{r_{ix}}\right)^3 - 3\left(\frac{d_{ix}}{r_{ix}}\right)^4 & 0 \leq d_{ix} \leq r_{ix} \\ 0 & d_{ix} > r_{ix} \end{cases}, \quad 2.6$$

onde  $d_{ix} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$  é as distâncias entre a coordenadas de interesse  $[x, y]$  e a dos nós  $[x_i, y_i]$ , e  $r_{ix}$  é o raio do suporte compacto nodal da função peso  $w_i(\mathbf{x})$ , dado por um parâmetro adimensional  $\alpha_s$  que multiplica a maior distância entre dois nós vizinhos. Na Figura 5, pode-se observar a função peso  $w_i(\mathbf{x})$  para um caso unidimensional. Na figura, encontra-se também ilustrado o domínio de definição que contém uma coordenada  $x_Q$  qualquer, formado por meio da interseção das funções peso dos nós  $x_{i-1}, x_i$  e  $x_{i+1}$ .



**Figura 5 - Funções peso  $w(x)$  de suporte compacto  $r$ , dadas por splines de quarta ordem. O domínio de definição que contém a coordenada  $x_Q$  é gerada por meio da interseção dos suportes compactos dos nós  $i-1, i$  e  $i+1$ .**

### 2.5.3. Funções de Forma

Seja  $J(\mathbf{x})$  uma norma ponderada discreta igual a

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}_i) - \hat{u}_i]^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_i]^2, \quad 2.7$$

onde  $w_i(\mathbf{x})$  é a função peso associada ao nó  $i$ ,  $\hat{u}_i$  é o parâmetro nodal  $i$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  é vetor de coeficientes nodais,  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$  é o vetor das bases polinomiais e  $u^h(\mathbf{x}_i)$  é a aproximação no nó  $i$ .

O vetor de coeficientes  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  da Equação 2.7 é determinado a partir da minimização da norma ponderada discreta  $J(\mathbf{x})$  com respeito a cada termo de  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , o que resulta em

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}, \quad 2.8$$

onde

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \quad 2.9$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)], \quad 2.10$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]. \quad 2.11$$

Resolvendo a Equação 2.8 para  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , tem-se

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}}. \quad 2.12$$

As funções de forma então podem ser escritas na forma

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad 2.13$$

e as funções de aproximação do MMQM poderão finalmente ser dadas pela Equação 2.14.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})\hat{u}_i \quad 2.14$$

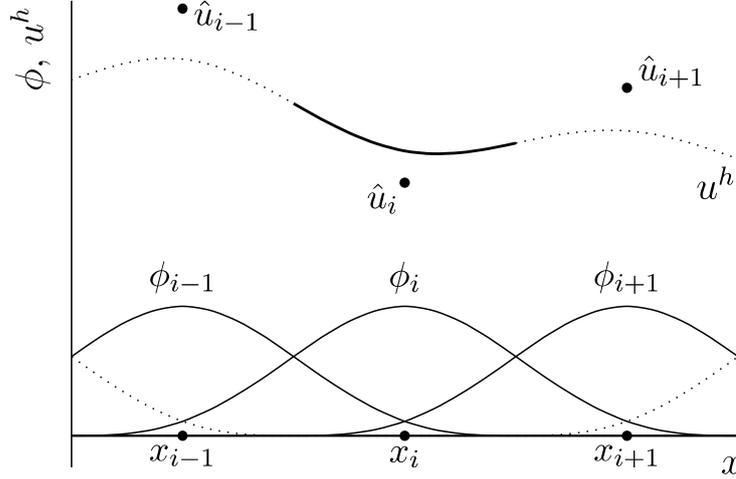
É necessário que  $n \geq m$ , para cada ponto qualquer  $\mathbf{x}$ , para que se obtenha uma aproximação bem definida, pois para cada base é necessária uma quantidade mínima de nós para realizar a aproximação. No caso da base linear, a quantidade mínima é de 2 nós e na quadrática, 3 e assim por diante.

A Figura 6 ilustra as funções de forma e também mostra uma aproximação do MMQM para um caso unidimensional. Pode-se observar que  $u^h(\mathbf{x}_i) \neq \hat{u}_i$ , ou seja, o parâmetro nodal  $\hat{u}_i$  tem valor diferente da aproximação no nó  $u^h(\mathbf{x}_i)$ . Logo, diz-se que a aproximação gerada pelo MMQM não é interpolante nodal.

As derivadas espaciais da função de forma  $\phi_i(\mathbf{x})$  são obtidas por

$$\phi_{i,k} = \sum_{j=1}^m \left[ p_{j,k} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{ji} + p_j (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,k} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,k} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{ji} \right], \quad 2.15$$

onde  $(\cdot)_{,k} = \partial(\cdot)/\partial x_k$ .



**Figura 6 - Funções de forma  $\phi(x)$  e aproximação  $u^h(x)$  do MMQM unidimensional. As funções de forma do MMQM não são interpolantes nodais, logo,  $u^h(x_i) \neq \hat{u}_i$ .**

## 2.6. Equação Integral de Contorno

### 2.6.1. Solução Fundamental

A solução fundamental da elasticidade em meios contínuos é a solução do problema de Kelvin, que consiste na obtenção dos deslocamentos e das forças de tração de um ponto qualquer de um meio contínuo infinito de propriedades homogêneas, devido à aplicação de uma carga unitária pontual concentrada. Assim a solução fundamental da elasticidade para problemas bidimensionais, no estado plano de deformação é dada por

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right], \quad 2.16$$

onde  $u_{lk}^*$  é a componente do deslocamento na direção  $k$  devido à aplicação da carga pontual unitária no ponto  $i$  na direção  $l$ ,  $\mu$  é o módulo de cisalhamento,  $\nu$  é o Poisson,  $r$  é o raio entre a aplicação da carga pontual unitária até o ponto que se deseja o deslocamento,  $\mathbf{x}_l$  é o vetor unitário da direção  $l$  e  $\delta_{lk}$  é o delta de Kronecker ( $\delta_{lk} = 1$  quando  $l = k$  e  $\delta_{lk} = 0$  quando  $l \neq k$ ).

Para se obter as forças de tração, aplicam-se as relações constitutivas do material na Equação 2.16, levando a

$$p_{lk}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{n}} \left[ (1-2\nu)\delta_{lk} + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \right] + (1-2\nu) \left( n_l \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} - n_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_l} \right) \right], \quad 2.17$$

onde  $p_{lk}^*$  é a componente da força de tração na direção  $k$  devido à aplicação da carga pontual unitária no ponto  $i$  na direção  $l$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a superfície do corpo.

Na Figura 7, tem-se a interpretação geométrica das componentes da solução fundamental, mostrando o deslocamento e a força de tração de um ponto qualquer quando o corpo é submetido ao carregamento de uma carga unitária pontual.

### 2.6.2. Integral de Contorno

Para dedução da integral de contorno será utilizado o método dos resíduos ponderados. Parte-se da equação de equilíbrio estático de um corpo

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0, \quad 2.18$$

onde  $\sigma_{kj}$  são as componentes do tensor de tensão e  $b_k$  são as componentes da força de corpo.

As condições de contorno são dadas por

- Condições essenciais ou de deslocamento:

$$u_k = \bar{u}_k \text{ no contorno } \Gamma_u, \quad 2.19$$

- Condições naturais ou de forças de superfície:

$$p_k = \sigma_{kj}n_j = \bar{p}_k \text{ no contorno } \Gamma_t, \quad 2.20$$

onde  $n_j$  são as componentes do vetor normal da superfície,  $p_k$  as componentes das forças de superfície,  $u_k$  as componentes do deslocamento,  $\bar{(\cdot)}$  são os valores prescritos ou conhecidos e  $\Gamma = \Gamma_t + \Gamma_u$  sendo  $\Gamma$  o contorno do corpo.

Aplicando os resíduos ponderados na Equação 2.18, sendo o peso a solução fundamental da elasticidade, tem-se

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_{lk}^* d\Omega = 0. \quad 2.21$$

Integrando por partes duas vezes e usando as relações constitutivas do material, assim como as propriedades da solução fundamental, obtém-se

$$u_k^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega. \quad 2.22$$

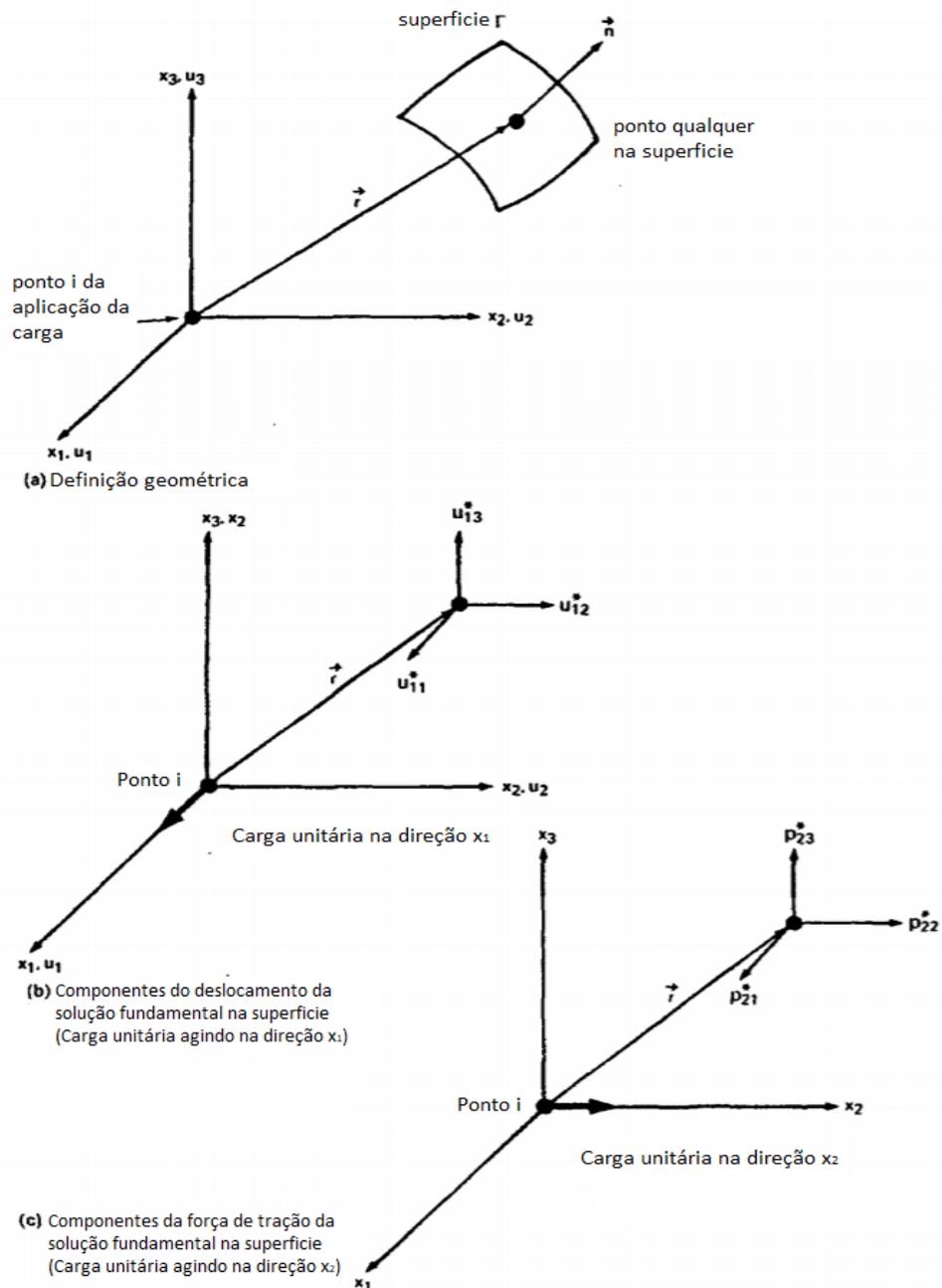


Figura 7 - Interpretação geométrica das componentes da solução fundamental. Adaptado de Brebbia e Dominguez (1992).

Essa equação, denominada de identidade Somigliana, permite obter o valor do deslocamento de qualquer ponto interno  $i$  do corpo em função apenas das forças de corpo, da solução fundamental da elasticidade e condições de contorno de  $u_k$  e  $p_k$ .

### 2.6.3. Pontos no Contorno

A identidade Somigliana dá os valores de deslocamento de qualquer ponto interno do corpo tendo conhecidos todos os valores de  $u_k$  e  $p_k$  do contorno. Logo, primeiro se resolve o problema de valores de contorno e depois se calcula os deslocamentos em pontos internos.

Portanto, a fim de se resolver o problema de contorno, aplica-se a identidade Somigliana no contorno em diferentes pontos, obtendo assim um sistema de equações capaz de levar aos valores de contorno desejados. No entanto, quando se aplica a identidade Somigliana nos pontos de contorno, a integral apresenta uma singularidade, que deve ser analisada para cada tipo de contorno. No caso de uma superfície de contorno suave, obtém-se, depois de tratada a singularidade da integral,

$$c_{ik}^i u_k^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* b_k d\Omega, \quad 2.23$$

onde  $c_{ik}^i = \frac{1}{2} \delta_{ik}$  para superfícies suaves. No entanto, para um ponto  $i$  do contorno não suave,  $c_{ik}^i$  assume outros valores, que frequentemente são de difícil dedução. No entanto, é possível calcular os valores de  $c_{ik}^i$  de forma implícita através do movimento de corpo rígido.

## 2.7. Otimização de Funções

Segundo Rao (2009), otimizar é o ato de obter o melhor resultado dadas certas circunstâncias. Dentro do contexto da engenharia, o objetivo seria minimizar esforços ou maximizar os benefícios desejados. Dado que seja possível escrever o problema a ser resolvido em forma de função, a otimização seria o processo de busca pelos valores extremos de máximos e mínimos.

Em casos simples, nos quais se tratam de funções triviais, a obtenção dos valores extremos pode ser feita de forma direta, derivando a função e a igualando a zero. Entretanto, esta forma matemática exata não é facilmente aplicável para a maioria das funções. Logo, surge a necessidade do desenvolvimento de métodos de otimização.

Inicialmente, foram desenvolvidos métodos baseados no gradiente da função, como o método de Newton, Quasi-Newton e método da secante. Estes métodos permitem obter os valores extremos a partir de um chute inicial, desde que seja conhecido o valor da derivada da função em um dado ponto. Entretanto, quando se tratam de problemas descritos por um conjunto de funções complexas, dependentes de muitas variáveis, estes métodos clássicos de otimização não se aplicam, já que a obtenção do gradiente da função é praticamente impossível.

Nesse contexto, surgem os chamados métodos modernos de otimização. Estes métodos têm como principal vantagem a capacidade de lidar com espaços de buscas vastos e a não dependência do gradiente da função. Dentro desta classe de métodos, destacam-se os algoritmos evolutivos. Estes algoritmos trabalham com uma população, a qual é modificada a cada iteração por meio de um conjunto de operações, chamadas de operadores genéticos.

### *2.7.1. Classificação dos Métodos de Otimização*

Dada a vasta quantidade de métodos de otimização, é interessante que os métodos sejam separados em diferentes classes. Neste trabalho, três classificações tornam-se importante para o entendimento do método utilizado: a classificação com base na existência de restrições, com base no número de funções objetivo, e a com base na natureza das variáveis de projeto.

Uma otimização é dita com restrições quando existe um conjunto de restrições aplicado sobre os valores que as variáveis podem assumir. Estas restrições podem ser lineares ou não lineares. Caso não existam restrições sobre as variáveis, a otimização é dita sem restrições.

Quanto ao número de funções objetivo, caso busque-se minimizar apenas uma função, a otimização é dita mono-objetivo. Caso o processo de otimização busque minimizar simultaneamente diversas funções, a otimização é dita multiobjetivo.

Por fim, uma otimização é dita determinística quando a passagem de uma iteração para outra é realizada por meio de um conjunto rígido de regras, de forma que a partir de um mesmo chute inicial, sempre se obtém o mesmo valor final. Caso a alteração das variáveis entre iterações seja feita de forma probabilística, a otimização é dita estocástica.

### 2.7.2. *Otimização dos Métodos Sem Malha*

Conforme apontado anteriormente, os métodos sem malha locais ainda possuem uma forte limitação: a alta intervenção humana necessária no processo de discretização, tanto por conta dos parâmetros de discretização arbitrários, como também devido à determinação da melhor distribuição nodal ser heurística. Visando superar esse problema, surgem estudos que associam formulações sem malha a um processo de otimização, de forma que a obtenção dos parâmetros ótimos seja automatizada.

Baradaran e Mahmoodabadi (2009), Bagheri et al. (2011) e Ebrahimnejad et al. (2015) apresentaram esforços iniciais no sentido da obtenção automática dos parâmetros de discretização de métodos sem malha de domínio locais. Entretanto, apesar de obterem bons resultados, as otimizações propostas por esses autores dependiam de um conhecimento prévio da solução analítica, de forma que elas não são eficientes.

Mais recentemente, Santana et al. (2020) e Oliveira et al. (2019) apresentaram propostas mais robustas de otimização de métodos sem malha de domínio, permitindo a obtenção automática do tamanho do suporte compacto e do domínio de integração para dadas distribuições nodais.

Gómez (2019) apresentou uma proposta de otimização que permitisse a completa automatização do método, obtendo valores ótimos não só dos parâmetros de discretização, mas também da quantidade de nós e da própria irregularidade nodal, tendo sido um importante passo no sentido da completa automatização dos métodos sem malha.

Araújo et al. (2020) realizaram a automatização do chamado Método de Contorno Sem Malha para problemas de potencial regidos pela equação de Laplace. A otimização foi realizada por meio de Algoritmos Genéticos e as variáveis de decisão utilizadas foram as mesmas apresentadas por Gómez (2019).

Dessa forma, fica claro que ainda há espaço para estudos dentro da linha de pesquisa da otimização dos métodos sem malha, que ainda é relativamente nova e pouco explorada. Em especial, com exceção do trabalho de Araújo et al. (2020), nota-se a ausência de estudos que considerem a otimização de métodos sem malha de contorno, bem como de propostas que permitam a real otimização do posicionamento nodal ao longo do contorno.

### 3. MÉTODO DE CONTORNO SEM MALHA

Neste capítulo, será apresentada a formulação proposta do Método de Contorno Sem Malha (MCSM), que se baseia no *Boundary Node Method* (BNM). Em ambos, aplicam-se as funções de forma geradas pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM) nas equações integrais de contorno. No entanto, elas diferem nos seguintes pontos: o modo como o sistema de equações lineares em conjunto com a imposição das condições é resolvido; a função peso utilizada; o modo como é empregado o MMQM, pois no BNM ele é empregado apenas uma vez em todo o contorno, já no MCSM ele é empregado isoladamente em cada segmento de integração, permitindo dessa forma a representação mais fiel de discontinuidades nas aproximações. A seguir, será apresentada a formulação do MCSM para problemas bidimensionais de elasticidade linear.

A partir da Equação 2.23, é possível formular o MCSM. Primeiramente, divide-se o contorno  $\Gamma$  do corpo em  $N$  segmentos lineares de integração  $\Gamma_j$  para se realizar a integral numérica, conforme a Equação 3.1. Cada segmento de integração  $\Gamma_j$  pode conter quantos  $n_j$  nós se desejar. A Figura 8 ilustra a discretização proposta para um corpo bidimensional de domínio qualquer para problemas em que haja ausência de forças de corpo. Para que fossem consideradas forças de corpo, tornaria-se necessário realizar a discretização do domínio por meio de  $M$  células internas. Porém, este assunto não será tratado neste trabalho e será tratado em trabalhos posteriores.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j \quad 3.1$$

- Contorno real
- Contorno discretizado
- × Delimitação dos segmentos  $\Gamma_j$
- Nó

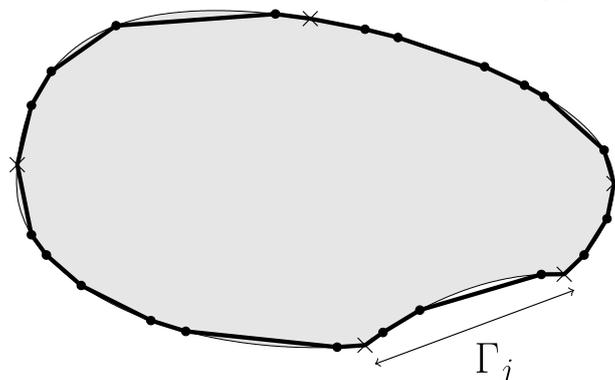


Figura 8 - Corpo bidimensional com o contorno  $\Gamma$  discretizado em  $N$  segmentos de integração  $\Gamma_j$ , com cada segmento contendo  $n_j$  nós e sem forças de corpo.

Os deslocamentos e as forças de tração são interpolados dentro de cada segmento de integração  $\Gamma_j$  através do MMQM de acordo com os parâmetros nodais, utilizando, respectivamente, as equações

$$\mathbf{u} = \Phi_j \hat{\mathbf{u}}^j, \quad 3.2$$

$$\mathbf{p} = \Phi_j \hat{\mathbf{p}}^j, \quad 3.3$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}^j$  e  $\hat{\mathbf{p}}^j$  são os valores dos parâmetros nodais dos deslocamentos e das forças de tração dos  $n_j$  nós do segmento de integração  $\Gamma_j$ . A dimensão desses vetores é de  $2n_j$ . Os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  são os valores de deslocamento e de forças de tração em qualquer ponto dentro do segmento de integração  $\Gamma_j$ , sendo eles dados por

$$\mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2] \quad 3.4$$

$$\mathbf{p}^T = [p_1 \quad p_2] \quad 3.5$$

Por fim, a matriz  $\Phi_j$  é a matriz de interpolação, a qual armazena as funções de forma do MMQM para cada segmento de integração  $\Gamma_j$ , tendo as dimensões de 2 linhas por  $2n_j$  colunas, podendo ser representada como

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_{n_j} & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_{n_j} \end{bmatrix}, \quad 3.6$$

onde  $\phi_i$  é a função de forma de cada nó  $i$  do segmento de integração  $\Gamma_j$ , dada pela Equação 2.13.

As demais componentes da Equação 2.23 podem ser representadas de forma matricial conforme apresentado a seguir.

As forças de corpo são representadas como um vetor de acordo com a Equação 3.8.

$$\mathbf{b}^T = [b_1 \quad b_2] \quad 3.8$$

Já os coeficientes das soluções fundamentais podem ser representados pelas Equações 3.9 e 3.10.

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad 3.9$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad 3.10$$

Logo, a Equação 2.23 na forma matricial se torna a Equação 3.11.

$$\mathbf{c}^i \Phi_j^i \hat{\mathbf{u}}^j + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \quad 3.11$$

Com o contorno discretizado em N segmento de integração  $\Gamma_j$  e o domínio em M células internas para poder se calcular as integrais, a Equação 3.11 se torna a Equação 3.12 abaixo para cada ponto nodal.

$$\mathbf{c}^i \Phi_j^i \hat{\mathbf{u}}^j + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi_j d\Gamma \right\} \hat{\mathbf{u}}^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi_j d\Gamma \right\} \hat{\mathbf{p}}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \right\} \quad 3.12$$

A Equação 3.12 pode ser representada da seguinte forma matricial como

$$(\mathbf{C}^i + \mathbf{H}^i) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{G}^i \hat{\mathbf{P}} + \mathbf{B}^i, \quad 3.13$$

onde  $\hat{\mathbf{U}}$  e  $\hat{\mathbf{P}}$  são as matrizes dos parâmetros nodais dos deslocamentos e das forças de tração,  $\mathbf{B}^i$  é o vetor das forças de corpo para o nó  $i$  e as matrizes  $\mathbf{H}^i$ ,  $\mathbf{C}^i$  e  $\mathbf{G}^i$  são as matrizes dos coeficientes de influência do nó  $i$  que são obtidas de acordo com as Equações 3.14, 3.15 e 3.16, respectivamente.

$$\mathbf{H}^i = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi_j d\Gamma \right\} \quad 3.14$$

$$\mathbf{C}^i = \mathbf{c}^i \Phi_j^i \quad 3.15$$

$$\mathbf{G}^i = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi_j d\Gamma \right\} \quad 3.16$$

Finalmente,  $\mathbf{B}^i$  é dado por

$$\mathbf{B}^i = \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \right\}. \quad 3.17$$

Dessa forma, quando a Equação 3.13 é aplicada a todos os  $i$  nós do contorno, e se realiza a integração numericamente (com a quadratura de Gauss normal para pontos longe da singularidade e com a quadratura de Gauss-Logarítmica para pontos perto da singularidade), pode-se organizar o sistema global resultante na forma

$$(\mathbf{C} + \mathbf{H})\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{P}} + \mathbf{B} \quad 3.18$$

onde os vetores  $\hat{\mathbf{U}}$  e  $\hat{\mathbf{P}}$  representam todos os valores dos parâmetros nodais de deslocamento e de forças de tração presentes nos nós do contorno. As matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{G}$  são as matrizes dos coeficientes globais.

Como os vetores  $\hat{\mathbf{U}}$  e  $\hat{\mathbf{P}}$  não representam os valores nodais, a imposição das condições de contorno é realizada rearranjando a Equação 3.18, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{C} + \mathbf{H}) & -\mathbf{G} \\ \Phi_{\hat{\mathbf{U}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{\hat{\mathbf{P}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad 3.19$$

onde  $\Phi_{\hat{\mathbf{U}}}$  e  $\Phi_{\hat{\mathbf{P}}}$  são respectivamente as matrizes das funções de forma do MMQM dos nós que possuem valores prescritos de deslocamentos  $\mathbf{U}$  e das forças de tração  $\mathbf{P}$ , respectivamente. Uma vez organizado o sistema, ele pode ser facilmente resolvido, encontrando-se assim os valores de  $\hat{\mathbf{U}}$  e  $\hat{\mathbf{P}}$ . Obtidos tais valores, torna-se possível aproximar os valores dos deslocamentos e das forças de tração desconhecidos em qualquer ponto do contorno através das Equações 3.2 e 3.3. A identidade Somigliana, Equação 2.22, permite o cálculo dos valores de deslocamentos internos. Depois de obtido o deslocamento de um ponto qualquer, as tensões podem ser obtidas através da aplicação da lei de Hooke.

## **4. OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO**

Neste capítulo, será apresentada a formulação do processo de otimização multiobjetivo aplicado no processo de automatização da discretização do Método de Contorno Sem Malha (MCSM).

O campo de métodos de otimização está em constante crescimento, e a escolha do algoritmo mais indicado é fortemente dependente do problema a ser resolvido, conforme apontado por Zingg et al. (2008). A otimização multiobjetivo do modelo numérico sem malha lida com duas principais dificuldades. Enquanto a primeira diz respeito ao número de soluções ótimas de Pareto geradas a partir de objetivos conflitantes, ao invés de apenas uma única solução ótima, a segunda é relacionada ao amplo e complexo espaço de busca, que não pode ser explorado eficientemente com métodos clássicos de otimização. Consequentemente, para superar essas dificuldades, devem ser utilizadas técnicas de otimização não baseadas no gradiente da função. Dentre essas técnicas, podem-se apontar os métodos modernos, como os Algoritmos Genéticos, Colônia de Formigas, Algoritmos Meméticos, Enxame de Partículas, Busca de Vizinhança Variável, Busca por Organismos Simbióticos, dentre outros.

Os algoritmos evolutivos são métodos não dependentes de gradiente, bastante robustos em localizar valores ótimos locais e globais, que não requerem continuidade e nem previsibilidade sobre o espaço de busca de projeto. Este trabalho considera o uso de Algoritmos Genéticos (AG), método evolutivo, para o processo de otimização multiobjetivo da discretização do MCSM.

Os conceitos e terminologias associado ao campo de otimização multiobjetivo podem ser encontrados em Hwang e Masud (1979), Sawaragi et al. (1985), Steuer (1986), Ringuest (1992), Haupt e Haupt (2004), Kelner e Leonard (2004), McCall (2005), Caramia e Dell’Ommo (2008) e Rao (2009).

### **4.1. Conceitos Iniciais**

A otimização multiobjetivo da discretização do MCSM é realizada por meio de um processo automático de modificação das variáveis de projeto. Mais especificamente, o processo de otimização atualiza as variáveis de decisão, executa a análise numérica a partir do modelo sem malha e checa os resultados para verificar se o critério de parada foi atingido. A otimização combina análise (por meio da avaliação de funções objetivo e simulações

numéricas) e síntese (geração de novas discretizações sem malha a partir dos AG). Enquanto as funções objetivo definem o objetivo da otimização, as restrições mantêm as variáveis dentro de limites pré-determinados. A meta do processo é minimizar as funções objetivos a partir da obtenção de soluções viáveis, que são as discretizações sem malha que satisfazem as restrições.

O papel do projetista é, ao final do processo, selecionar dentre as soluções ótimas um conjunto de soluções interessantes. Para permitir a melhor escolha de soluções por parte do projetista, critérios devem ser definidos. Os critérios de seleção são baseados em duas métricas, que são o custo (número de nós total da discretização) e performance (erro associado ao método sem malha). Note que essas métricas não são implementadas no processo de otimização. Elas são critérios utilizados como base da escolha de soluções ótimas interessantes para o projetista na fase de pós-processamento.

Abaixo, os conceitos básicos necessários para o completo entendimento do processo de otimização são apresentados formalmente em linguagem matemática.

#### 4.1.1. *Formulação Matemática da Otimização Multiobjetivo*

Considere um problema de minimização, no qual se busca minimizar simultaneamente um conjunto de  $f_i$  funções,  $i = 1, 2, \dots, k$ , que dependem de um conjunto de  $x_j$  variáveis,  $j = 1, 2, \dots, n$ , sujeitas a um conjunto de restrições  $e_l$ , onde  $l = 1, 2, \dots, m$ . O problema pode ser formulado matematicamente como

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) \\ & \text{sujeito a } \mathbf{e}(\mathbf{x}) = (e_1(\mathbf{x}), e_2(\mathbf{x}), \dots, e_m(\mathbf{x})) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\text{onde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$$

$$\text{e } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in Y,$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis de decisão,  $\mathbf{y}$  é o vetor de funções objetivo,  $X$  é o espaço das variáveis de decisão,  $Y$  é o espaço objetivo e  $\mathbf{e}$  representa o conjunto de restrições.

#### 4.1.2. Solução Viável

Uma solução  $\mathbf{x}_f$  é dita viável (ou feasible) se ela respeita todas as restrições, ou seja,

$$\mathbf{x}_f \in x \mid \mathbf{e}(\mathbf{x}_f) \leq \mathbf{0}. \quad 4.2$$

#### 4.1.3. Dominância de Pareto

Devido à complexidade das funções envolvidas, é raro que exista um vetor de solução viável  $\mathbf{x}_f$  que minimize simultaneamente todas as  $k$  funções objetivos. Logo, a definição de um novo conceito de solução ótima torna-se necessário.

Inicialmente, define-se a ideia de dominância de Pareto. Dado dois vetores de variáveis de projeto  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , diz-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} < \mathbf{b} \text{ (a domina b)} & \quad \text{se } \mathbf{f}(\mathbf{a}) < \mathbf{f}(\mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \text{ (a domina levemente b)} & \quad \text{se } \mathbf{f}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \sim \mathbf{b} \text{ (a é indiferente a b)} & \quad \text{se } \mathbf{f}(\mathbf{a}) \not\leq \mathbf{f}(\mathbf{b}) \text{ e } \mathbf{f}(\mathbf{b}) \not\leq \mathbf{f}(\mathbf{a}) \end{aligned} \quad 4.3$$

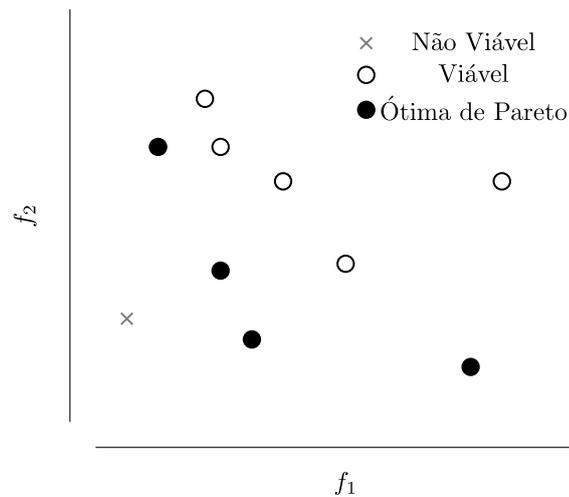
#### 4.1.4. Otimalidade de Pareto

Um vetor solução  $\mathbf{x}_p$  viável é dito não-dominado se

$$\nexists \mathbf{x} \in \mathbf{x}_f : \mathbf{x} < \mathbf{x}_p. \quad 4.4$$

As soluções não-dominadas são ditas soluções ótimas de Pareto. A imagem  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_p)$  das soluções ótimas formam a chamada frente de Pareto.

A Figura 9 ilustra um exemplo de frente de Pareto em um espaço objetivo bidimensional. É possível observar que as soluções que formam a frente são indiferentes umas às outras, de forma que não é possível identificar uma única solução ótima.



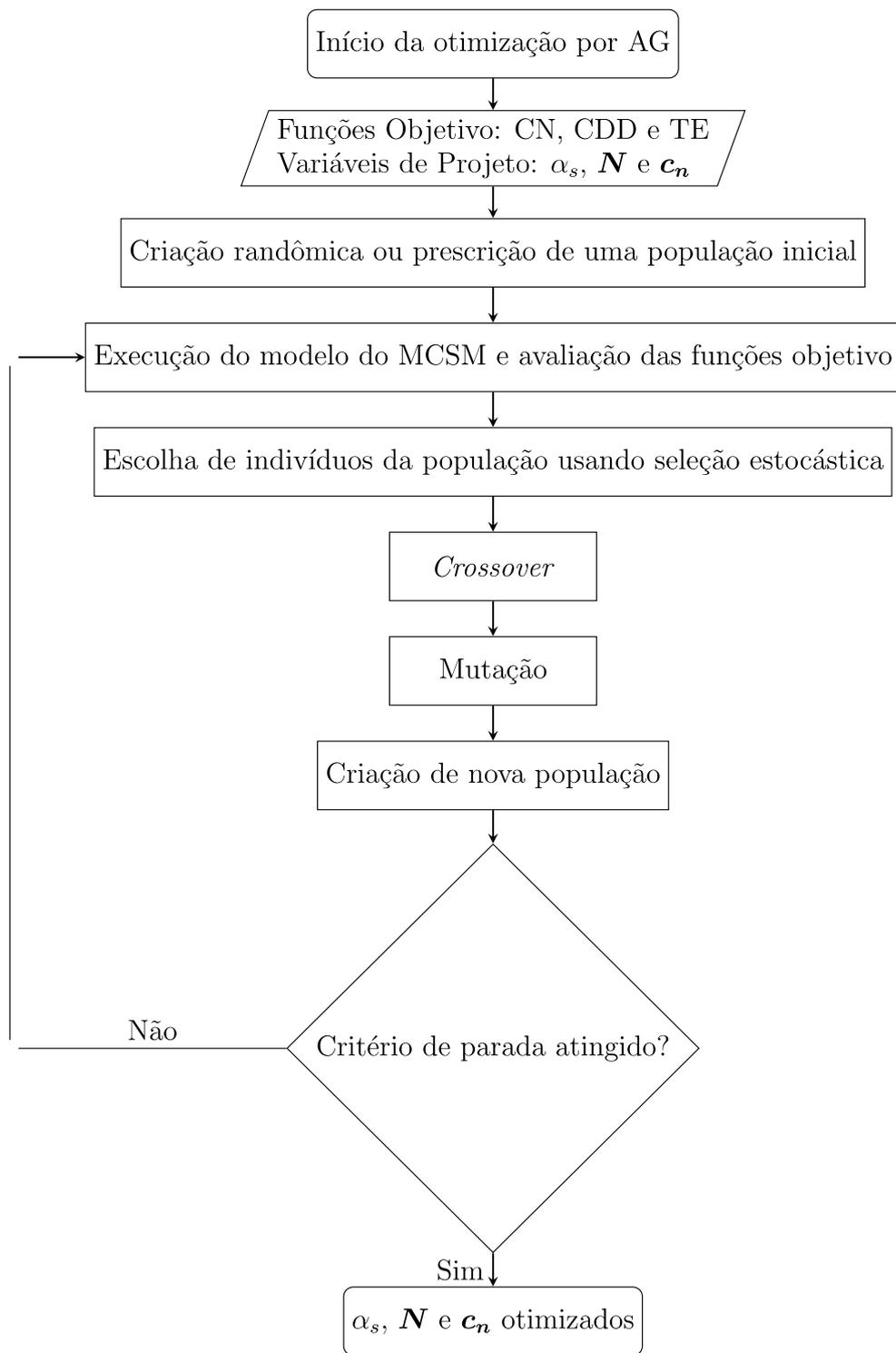
**Figura 9 - Soluções geradas em um processo de otimização multiobjetivo com duas funções objetivo  $f_1$  e  $f_2$ . As soluções ótimas de Pareto são soluções não dominadas, ou seja, não há solução viável que seja melhor que elas quando consideradas as duas funções objetivo simultaneamente. Observa-se que não é possível identificar uma única solução ótima, havendo um trade-off entre as soluções de Pareto.**

#### 4.2. Algoritmos Genéticos

Algoritmos evolutivos, em geral, e Algoritmos Genéticos, em particular, são técnicas de otimização, não dependentes do gradiente da função, que simulam o processo natural de evolução. Partindo de um conjunto (população) de candidatos à solução (indivíduos), no espaço potencial de solução específico do problema de discretização do MCSM, os AG modificam esse conjunto utilizando operadores que simulam os princípios naturais da evolução (seleção e reprodução), permitindo que a população evolua de geração em geração, até que o critério de parada seja atingido. Enquanto a seleção simula a competição da população por recursos, a reprodução imita sua capacidade de criar novos membros, por meio do *crossover* e da mutação. Ao passo que o *crossover* gera novos indivíduos a partir da combinação de genes (variáveis) de dois outros indivíduos, a mutação gera novos indivíduos a partir de modificações arbitrárias em um único indivíduo.

Inicialmente apresentado por Holland (1975), o processo de busca e otimização por AG é flexível e robusto, podendo ser aplicado a uma vasta quantidade de problemas, conforme apresentado por Ebrahimnejad et al. (2015) e McCall (2005).

A Figura 10 apresenta o fluxograma do processo de otimização multiobjetivo por AG utilizado para a automatização da obtenção da discretização ótima do MCSM. Os detalhes de implementação no MATLAB 2015a encontram-se no Apêndice A.



**Figura 10 - Fluxograma do processo de otimização multiobjetivo utilizado na automatização da obtenção da discretização ótima do Método de Contorno Sem Malha.**

#### 4.2.1. Variáveis de Decisão

Em uma discretização sem malha, o raio do suporte compacto no qual as funções de forma são definidas é definido a partir de um parâmetro arbitrário, que deve ser definido de forma correta para qualquer aplicação, pois seu valor afeta consideravelmente a solução numérica. Logo, para que se garanta a acurácia do MCSM, é essencial que o raio do suporte compacto  $r_{\Omega_s}$  seja otimizado. Para um dado nó  $i$ , esse valor é definido como

$$r_{\Omega_s} = \alpha_s c_i, \quad 4.5$$

no qual  $c_i$  é a máxima distância entre o nó  $i$  e os nós da vizinhança próxima; e  $\alpha_s$  é a constante arbitrária que deve ser definida para qualquer aplicação.

Para melhorar a acurácia da solução, um refinamento de  $r_{\Omega_s}$  é necessário por meio da otimização do parâmetro  $\alpha_s$ . Logo, o parâmetro  $\alpha_s$  é considerado como uma variável de decisão do MCSM de modo que seu valor ótimo seja definido de forma automática.

Visando a completa automatização do MCSM, o número de nós  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_N)$  também é incluído como um conjunto de variáveis de decisão, onde  $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , é o número de nós de cada um dos  $N$  segmentos de integração  $\Gamma_j$ .

A irregularidade nodal, denotada por meio do conjunto de parâmetros  $\mathbf{c}_n = (c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_p})$ , é gerada de forma randômica, modificando a posição nodal de um arranjo originalmente regular, mantendo cada nó dentro de uma região local artificial. A região local é definida como a distância entre o nó e seu nó vizinho considerado um arranjo regular. Em um segmento, a irregularidade é implementada a partir de um parâmetro arbitrário  $c_n$ , definido por meio de valores mínimos e máximos simétricos, cujo módulo é prescrito em um intervalo  $[0, 1[$ , no qual o valor máximo representa a irregularidade máxima.

Em resumo, as variáveis de decisão são o parâmetro de discretização  $\alpha_s$ , o número de nós  $\mathbf{N}$  e a irregularidade nodal  $\mathbf{c}_n$ .

#### 4.2.2. Funções Objetivo

A performance da otimização multiobjetivo do MCSM é condicionada ao uso de funções objetivo eficientes. As funções objetivo utilizadas forçam a continuidade do

deslocamento no encontro entre segmentos, o equilíbrio estático das forças no corpo e o condicionamento do sistema de equações numérico. É muito importante ressaltar que o erro da solução não está incluído nas funções objetivos, de forma que essas funções objetivo propostas são gerais e não dependem do conhecimento da solução analítica.

A primeira função objetivo é a do **equilíbrio de forças (ou, em inglês, Traction Equilibrium – TE)**. Quando se leva em consideração o significado físico do problema de elasticidade, a solução exata do problema deve garantir o equilíbrio das forças ao longo do contorno, escrito matematicamente como

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) = 0. \quad 4.6$$

Em geral, soluções numéricas, computadas a partir do sistema de equações aproximado gerado pelo MCSM, não satisfazem perfeitamente o equilíbrio. Essa característica é compartilhada com o Método dos Elementos de Contorno clássico, conforme reportado por Brebbia et al. (1984). Esse comportamento da solução motivou o trabalho de Telles et al (1991), que desenvolveu uma formulação de contorno cuja solução numérica satisfaz o equilíbrio ao longo do contorno. Procedimentos alternativos que enforçam o equilíbrio em um problema de contorno podem ser baseados em multiplicadores de Lagrange.

Longe de considerar essa característica como um inconveniente, este trabalho utiliza esse comportamento em sua vantagem para o controle do processo de otimização. Quando a integral das forças de contorno é utilizada para definir a função objetivo TE como

$$TE = \left| \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \right| = \left| \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \mathbf{t}(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \right|, \quad 4.7$$

o processo de otimização minimiza TE, logo levando a uma solução numérica que satisfaça o equilíbrio estático.

A segunda função objetivo é a **diferença de deslocamento nos cantos (ou, em inglês, Corner Displacement Differences - CDD)**. O modelo de discretização do MCSM considera que a aproximação do MMQM é realizada de forma independente em cada segmento. Além disso, o modelo assume que o encontro dos segmentos é livre de nós, conforme apresentado na Figura 3.1. No que diz respeito ao significado físico do problema de elasticidade, é sabido

que o deslocamento deve ser único em cada um desses cantos. Entretanto, como uma consequência da modelagem numérica, o valor de deslocamento computado nesses cantos em geral não é único. De fato, a aproximação do MMQM usada em cada um dos segmentos que contém aquele canto leva a um novo valor de deslocamento no mesmo ponto. Para garantir a acurácia do método, a diferença entre esses valores calculados nos cantos deve ser minimizada. Logo, ao invés de considerar essa característica como uma limitação, a condição de não haver um valor único de deslocamento é uma vantagem a ser explorada pelo processo de otimização. Assim, a soma da diferença absoluta do valor dos deslocamentos, computada nos cantos gerados pelo encontro dos segmentos, é utilizada como a função objetivo CDD. Ao minimizar esse valor, o processo de otimização garante a continuidade do deslocamento ao longo do contorno.

A última função objetivo é o **número de condicionamento (ou, em inglês, Condition Number – CN)**. Ao lidar com métodos numéricos, é muito importante garantir que a matriz de coeficientes do sistema de equações final seja bem condicionada, o que implica que ela não leva à amplificação de erros quando ocorrem pequenas variações em propriedades ou carregamentos. O condicionamento da matriz pode ser avaliado por meio do cálculo do respectivo número de condicionamento, um limite superior da amplificação de erros. Gómez (2019) utilizou a função objetivo CN na otimização de métodos sem malha de domínio e obteve bons resultados. Desta forma, essa função foi considerada neste trabalho para analisar se em problemas de contorno CN continua sendo uma boa função objetivo

Solucionar um sistema de equações  $Ku = f$ , no qual  $K$  é a matriz de coeficientes, envolve aproximar as entradas de  $K$  por meio de valores do tipo *float*, o que introduz um erro  $\Delta K$  no sistema. Levando em consideração esse erro e a correspondente variação no vetor  $u$ , denotado por  $\Delta u$ , a equação de primeira ordem pode ser resolvida, sem perda de generalidade,

$$(K + \Delta K)(u + \Delta u) = f. \quad 4.8$$

Por meio de um rearranjo da Equação 4.8 e desprezando termos de segunda ordem, é possível obter a desigualdade

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq k(K) \frac{\|\Delta K\|}{\|K\|}, \quad 4.9$$

onde  $k(K) = \|\Delta K\| \|K^{-1}\|$  é o número de condicionamento de  $K$ . Por meio da Equação 4.9, pode-se ver claramente que o erro relativo de  $u$  é limitado por meio do erro relativo de  $K$  multiplicado por meio do número de condicionamento  $k(K)$ . Assim, o número de condicionamento CN é utilizado como a última função objetivo, de modo que sua minimização leve à obtenção de um sistema final bem condicionado.

#### 4.2.3. Restrições

Foram utilizados dois tipos de restrições na formulação do processo de otimização do MCSM.

O primeiro tipo visa restringir o espaço de busca do algoritmo por meio da definição de valores mínimos e máximos para as variáveis de decisão.

O segundo é um tipo de restrição indireta relacionada à posição nodal. Esta restrição é necessária porque, a depender do valor de irregularidade prescrito para os nós, é possível ocorrer a sobreposição nodal, tornando o sistema de equações singular e impedindo sua resolução. Desta forma, foi implementada uma restrição por meio da qual soluções que levavam a matrizes singulares eram descartadas. O descarte era feito por meio da alteração do valor das funções objetivo para valores extremamente altos, de forma que o processo de otimização identificava esta solução como ruim. Esta restrição foi implementada no código do MCSM, não no código da otimização.

#### 4.2.4. Formulação Matemática da Otimização do Método de Contorno Sem Malha

A formulação matemática da otimização multiobjetivo do Método de Contorno Sem Malha envolve três funções objetivo, 3 conjuntos de variáveis de decisão e 3 conjuntos de restrições aplicados diretamente no processo de otimização. O objetivo da otimização é

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \mathbf{y} = (TE(\alpha_s, \mathbf{N}, \mathbf{c}_n), CN(\alpha_s, \mathbf{N}, \mathbf{c}_n), CDD(\alpha_s, \mathbf{N}, \mathbf{c}_n)) \\ & \text{sujeito a } e(\alpha_s) = \alpha_s^{\min} \leq \alpha_s \leq \alpha_s^{\max}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$e(\mathbf{N}) = N^{\min} \leq N \leq N^{\max},$$

$$e(\mathbf{c}_n) = \mathbf{c}_n^{\min} \leq \mathbf{c}_n \leq \mathbf{c}_n^{\max},$$

$$\text{onde } \alpha_s = (\alpha_s) \in \alpha'_s,$$

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_N) \in \mathbf{N}',$$

$$\mathbf{c}_n = (c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_n}) \in \mathbf{c}_n',$$

$$e \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{Y}',$$

onde TE, CN e CDD representam as funções objetivo;  $\alpha_s, \mathbf{N}$  e  $\mathbf{c}_n$  representam as variáveis de decisão,  $\alpha'_s, \mathbf{N}'$  e  $\mathbf{c}_n'$  representam os espaços de busca ou de decisão;  $e(\alpha_s), e(\mathbf{N})$  e  $e(\mathbf{c}_n)$  representam os conjuntos de restrições;  $\mathbf{y}$  é o vetor das funções objetivo e  $\mathbf{Y}'$  é o espaço objetivo. Por fim,  $(.)^{\min}$  e  $(.)^{\max}$  representam, respectivamente, os valores mínimos e máximos permitidos para as variáveis de decisão.

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados numéricos obtidos através da estratégia de modelagem numérica proposta para que se possa verificar a acurácia do método. Foram utilizados problemas *benchmark* da elasticidade bidimensional, cujas soluções analíticas fossem conhecidas.

A seguinte norma de deslocamento definida como

$$\|\mathbf{u}\| = \left[ \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{u} d\Gamma \right]^{1/2} \quad 5.1$$

é usada para estimar o erro. O erro relativo dos deslocamentos ( $\epsilon_u$ ) é então definido como

$$\epsilon_u = \frac{\|\mathbf{u}_{num} - \mathbf{u}_{analítico}\|}{\|\mathbf{u}_{analítico}\|}. \quad 5.2$$

Ressalta-se que os erros calculados são estimados a partir de integrais ao longo do contorno. Logo, o erro inclui não apenas valores nodais, mas também valores aproximados ao longo dos segmentos, permitindo assim que se tenha uma ideia melhor da qualidade da aproximação.

Note que o projetista não lida com os erros da solução durante a otimização, já que eles não são nem uma função objetivo e nem uma variável de decisão. O cálculo do erro é uma etapa do pós-processamento, que ocorre uma vez obtidos as soluções ótimas de Pareto.

Por se tratar de um método estocástico de otimização, torna-se necessário considerar múltiplas rodadas dos AG para que seja obtida uma boa diversidade de soluções. Neste trabalho, foram consideradas 4 rodadas para cada espaço objetivo. Cada rodada considerou uma população de 150 indivíduos e 7 gerações (iterações). Os parâmetros foram ajustados de forma a se garantir, simultaneamente, um Pareto diversificado e formado por soluções com boa qualidade. A implementação dos AG utilizados pode ser verificada no Apêndice A.

### 5.1. Patch Test

O primeiro *benchmark* verificado foi um *patch test* padrão. Este exemplo considera uma placa retangular com apoios simples no contorno de baixo, submetida a cargas uniformemente distribuídas verticais em seu topo, conforme ilustrado na Figura 11.

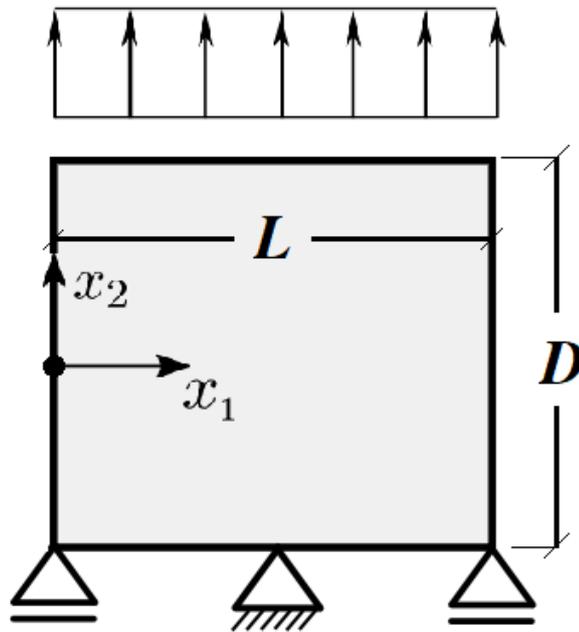


Figura 11 - Patch Test.

As soluções analíticas para o deslocamento e as tensões, respectivamente, são dadas por

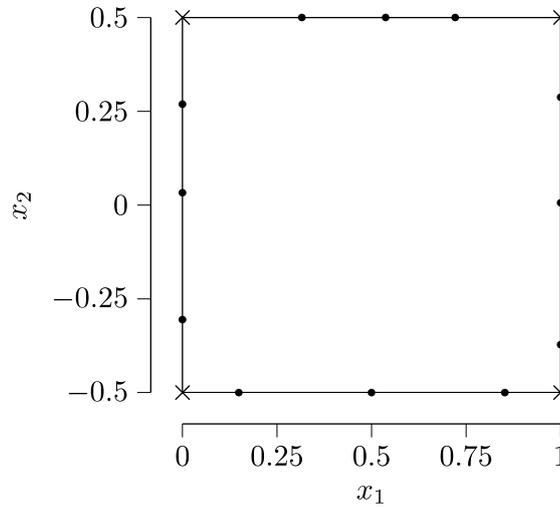
$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \nu \frac{PD}{E} (0,5 - x_1), \\ u_2(x_1, x_2) &= \frac{PD}{E} (x_2 + 0,5); \end{aligned} \quad 5.3$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x_1, x_2) &= 0, \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -30E + 06, \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) &= 0, \end{aligned} \quad 5.4$$

onde D é a altura da placa e  $P = -30E + 06$ .

A placa encontra-se em estado plano de tensão. Foram consideradas as seguintes propriedades: módulo de elasticidade  $E = 27E + 09$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,20$ . Por se tratar de um exemplo inicial mais simples, este foi utilizado apenas para a verificação da

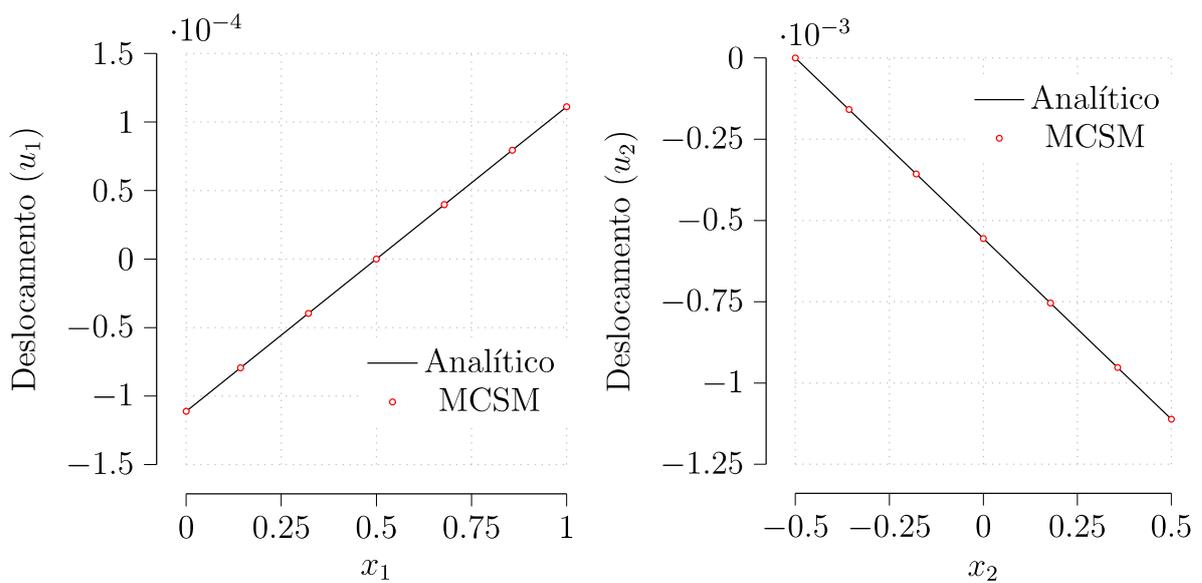
acurácia do MCSM proposto. Para tanto, foi utilizada uma distribuição irregular de 12 nós, conforme ilustrado na Figura 12. Foi considerada uma base quadrática ( $m=3$ ) e um  $\alpha_s$  de 3,8.



**Figura 12 - Distribuição nodal irregular utilizada na verificação do MCSM por meio do *patch test*.**

Os erros obtidos a partir do MCSM utilizando a discretização apresentada foram muito baixos, iguais a  $\epsilon_u = 4,48E-10$  para o erro dos deslocamentos e  $\epsilon_P = 2,31E-10$  para o erro da energia, o que mostra a acurácia do método sem malha proposto.

Para ilustrar a acurácia do método, os resultados obtidos de deslocamentos horizontais e verticais, calculados, respectivamente, em  $x_2 = 0$  e em  $x_1 = 0,5$ , podem ser observados na Figura 13. A Figura 14 apresenta os resultados de tensões verticais em  $x_2 = 0$ .



**Figura 13 – Deslocamentos (a) horizontais  $u_1$ , em  $x_2=0$  (b) verticais  $u_2$ , em  $x_1=0,5$ .**

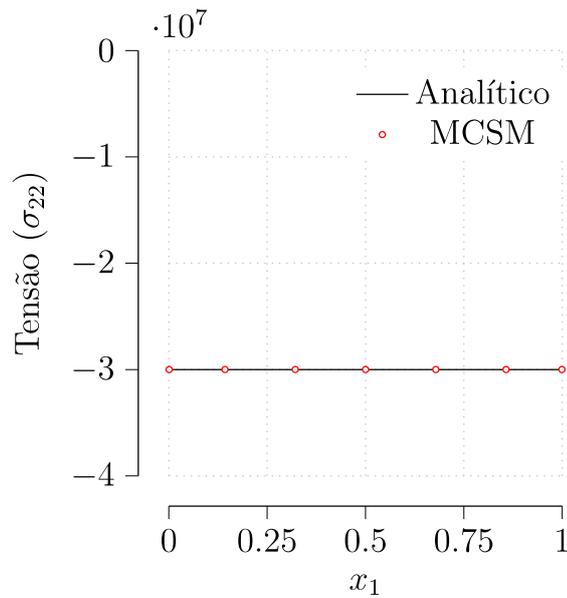


Figura 14 - Tensão vertical  $\sigma_{22}$  em  $x_2=0$ .

## 5.2. Viga em Balanço

O segundo *benchmark* considerado foi uma viga em balanço de profundidade unitária, com uma carga distribuída parabólica em sua ponta livre, sem forças de corpo atuando, como ilustrado na Figura 15. A viga encontra-se em estado plano de tensão.

A carga parabólica aplicada é dada por

$$t_2(x_2) = \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - x_2^2 \right). \quad 5.5$$

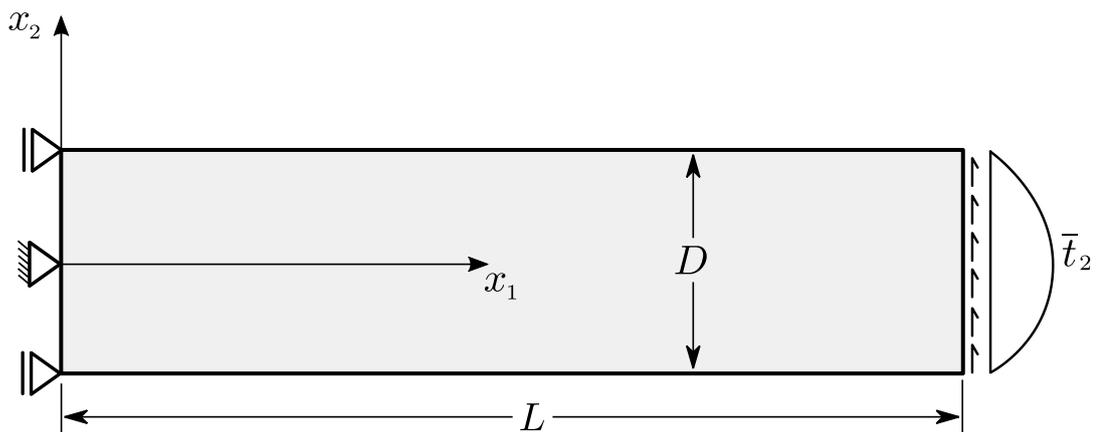


Figura 15 - Viga engastada de largura unitária em estado plano de tensão. Fonte: Oliveira, 2016.

As soluções analíticas para o deslocamento e as tensões, respectivamente, são dadas por

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) &= -\frac{Px_2}{6EI} \left( (6L - 3x_1)x_1 + (2 + \nu) \left( x_2^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right), \\
u_2(x_1, x_2) &= \frac{P}{6EI} \left( 3\nu x_2^2 (L - x_1) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x_1}{4} + (3L - x_1)x_1^2 \right);
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{P(L - x_1)x_2}{I}, \\
\sigma_{22}(x_1, x_2) &= 0, \\
\sigma_{12}(x_1, x_2) &= \frac{P}{2I} \left( \frac{D^2}{4} - x_2^2 \right),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde  $L=48$  é a largura,  $D=12$  é a altura,  $I$  é o momento de inércia da viga;  $P=-1E+03$ ,  $\nu=0.3$  é o coeficiente de Poisson e  $E=3E+07$  é o módulo de elasticidade.

As discretizações foram obtidas por meio do processo automático utilizando Algoritmos Genéticos. Em todos os espaços verificados, foi utilizada base quadrática ( $m=3$ ) para a aproximação pelo MMQM. As funções objetivo são o equilíbrio estático TE, o número de condicionamento CN e a diferença de deslocamento dos cantos CDD, sendo todas elas dependentes das variáveis de decisão: o número de nós dos segmentos  $N$ , o parâmetro de discretização  $\alpha_s$  e a irregularidade nodal  $c_n$ . O número de nós de cada segmento foi limitado ao intervalo  $[4, 24]$ , a irregularidade foi limitada ao intervalo de  $[-0.7, 0.7]$  e o parâmetro de discretização  $\alpha_s$  foi limitado ao intervalo  $[3.05, 48]$ . Os limites de  $\alpha_s$  foram definidos da seguinte forma: o limite inferior é igual ao tamanho da base polinomial  $m$  adicionada de 0.05, visando garantir o mínimo de nós necessário para a aproximação dentro do suporte compacto. Já o limite superior é igual a duas vezes o maior número de nós permitido por segmento.

Os valores mínimos ( $lb$ ) e máximos ( $ub$ ) impostos às variáveis também podem ser encontrados no Apêndice A.1.

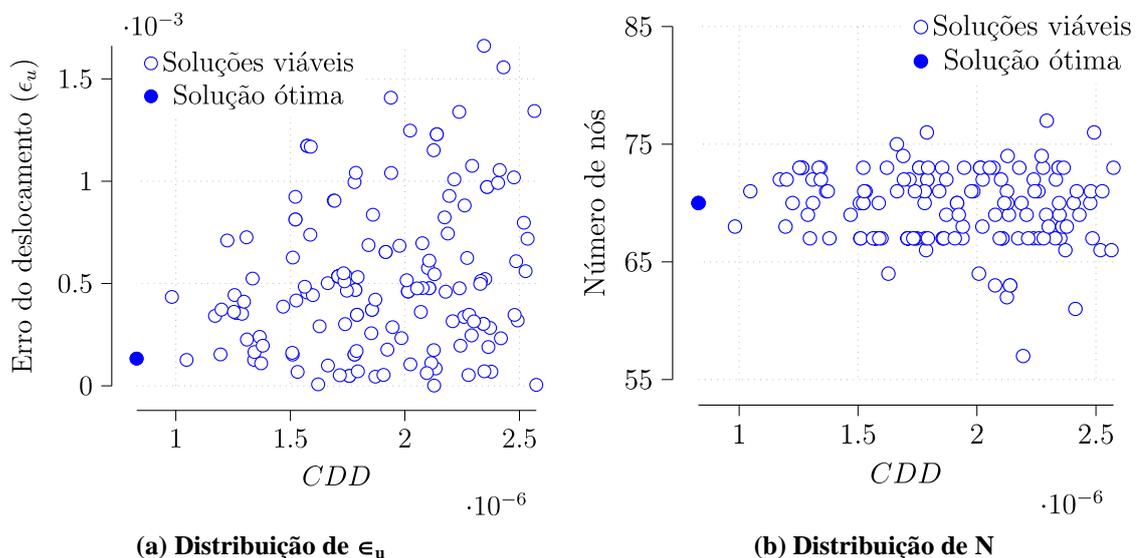
### 5.2.1. Otimização mono-objetivo – minimização de 1 função

Para garantir o funcionamento correto do processo de otimização, é imprescindível que sejam utilizadas boas funções objetivo, cujas minimizações reflitam claramente algum comportamento interessante no problema. Assim, visando verificar a eficiência das funções objetivo propostas, faz-se inicialmente a verificação do espaço mono-objetivo, tendo como foco observar o que ocorre com o erro e com o número total de nós conforme a função objetivo em questão é minimizada.

Vale ressaltar que no espaço mono-objetivo, por se minimizar cada função individualmente, a definição de solução ótima é mais simples: a discretização que levar ao menor valor da função objetivo é consequentemente a discretização ótima.

As Figuras de 16 a 18 apresentam o erro relativo  $\epsilon_u$  e o número de nós total  $N$  das soluções viáveis geradas em cada espaço, bem como da solução ótima. A Tabela 3 apresenta os parâmetros da solução ótima de cada espaço objetivo.

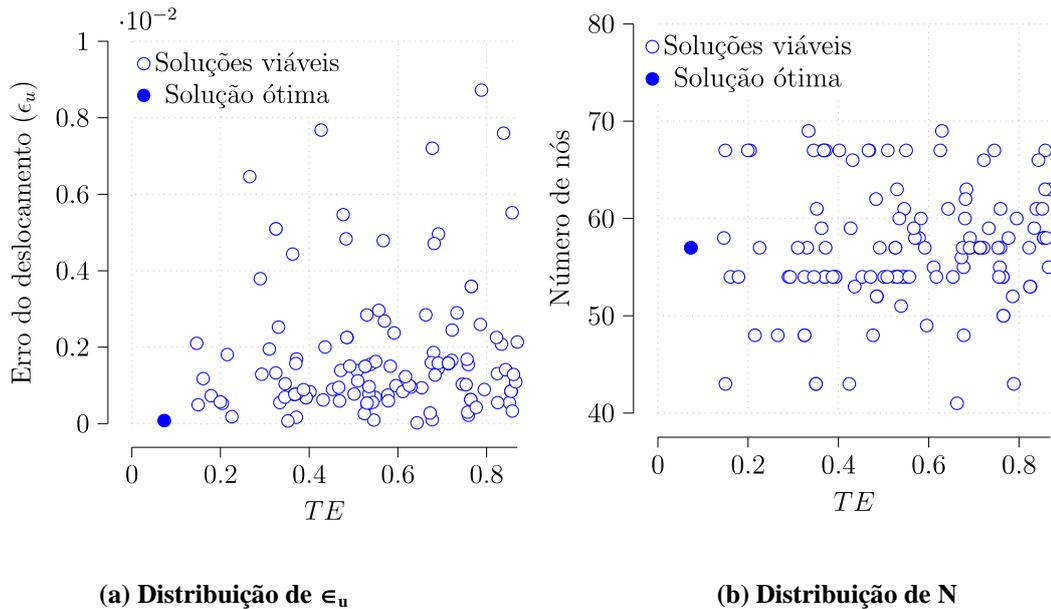
A Figura 16 mostra a distribuição das soluções viáveis geradas por meio da otimização mono-objetivo considerando CDD como a função a ser minimizada. Observa-se que, nesse espaço objetivo, a solução ótima levou a um valor de  $\epsilon_u$  menor que o da maior parte das demais soluções viáveis, demonstrando assim a eficiência da função objetivo. Com relação ao número de nós, observa-se que foram obtidas soluções com baixa variabilidade do número total de nós, estando a solução ótima em um valor médio de  $N$  em relação à população. Apesar da baixa variabilidade do número total de nós, observa-se que para um dado valor de  $N$ , foram obtidas diferentes soluções. Isto demonstra que nesse espaço, além de uma variação do número total de nós, ocorre também um processo de modificação da irregularidade (posição) dos nós. Este espaço de variação de posição foi predominante no espaço CDD.



**Figura 16 – Erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e número de nós da discretização  $N$  em função dos valores mínimos de CDD obtidos a partir do processo de otimização mono-objetivo.**

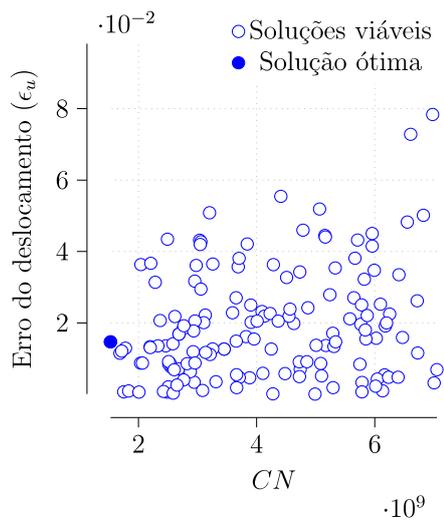
A Figura 17 mostra a distribuição das soluções viáveis geradas por meio da otimização mono-objetivo considerando TE como a função a ser minimizada. Observa-se que, nesse espaço objetivo, a solução ótima levou a um valor de  $\epsilon_u$  menor que o da maior parte das

demais soluções viáveis, demonstrando assim a eficiência da função objetivo. Com relação ao número de nós, observa-se que o espaço objetivo TE gerou uma maior variabilidade do número total de nós do que o espaço CDD e que novamente a solução ótima apresentou um valor médio de N em relação à população. Neste espaço, também foi observado um considerável processo de mudança da irregularidade nodal em torno da solução ótima, porém o processo de variação do número de nós é predominante.

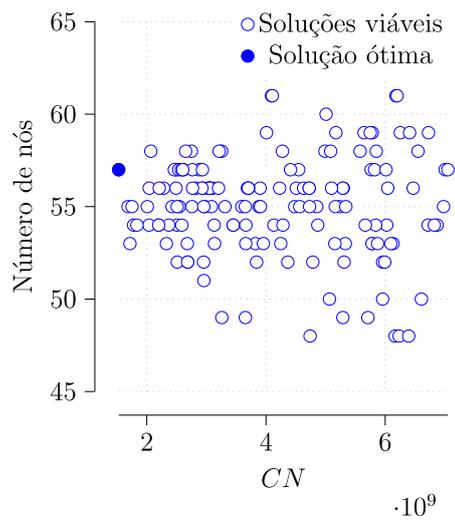


**Figura 17 – Erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e número de nós da discretização N em função dos valores mínimos de TE obtidos a partir do processo de otimização mono-objetivo.**

Por fim, a Figura 18 mostra a distribuição das soluções viáveis geradas por meio da otimização mono-objetivo considerando CN como a função a ser minimizada. Observa-se que, nesse espaço objetivo, a solução ótima apresentou valor de  $\epsilon_u$  mais elevado do que uma parcela considerável da população. Quanto ao número de nós, foi observado um comportamento intermediário entre o obtido nos espaços CDD e TE, sendo obtido um bom equilíbrio entre a variação do número de nós total e da irregularidade nodal.



(a) Distribuição de  $\epsilon_u$



(b) Distribuição de N

**Figura 18 – Erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e número de nós da discretização N em função dos valores mínimos de CN obtidos a partir do processo de otimização mono-objetivo.**

A Tabela 3 permite concluir que a minimização de CDD levou à solução ótima com o maior número de nós, ao passo que as minimizações de CN e TE levaram a soluções mais leves. Em relação aos erros, observa-se que a utilização da função objetivo TE levou à solução com o menor erro. Os resultados da tabela permitem observar que a minimização de apenas uma função objetivo não é suficiente para refletir um valor baixo das demais funções objetivo do modelo. Por exemplo, a solução ótima que se aproxima do equilíbrio de forças de tração (baixo TE) não apresentou um baixo valor de CDD, de forma que a continuidade do campo de deslocamentos ao longo do contorno não foi garantida, o que pode ser visto como uma forma de erro numérico em si.

É importante ressaltar que, apesar de terem sido obtidas soluções com erros muito baixos em alguns espaços, em nenhum dos espaços a solução ótima foi necessariamente a solução com os menores erros dentro da população, conforme observados nas Figuras de 16 a 18. Assim, para tentar diminuir a deficiência individual de cada função objetivo, serão realizadas otimizações multiobjetivo, nas quais busca-se minimizar mais de uma função objetivo simultaneamente. Dessa forma, espera-se obter soluções ótimas que se encontrem de forma mais consistente dentre as melhores soluções da população quando analisados os erros.

**Tabela 3 - Soluções ótimas obtido por meio da otimização mono-objetivo para cada espaço objetivo.**

Função objetivo utilizada na otimização	Valor da função			N	$\alpha_s$	$\epsilon_u$
	CDD	TE	CN			
CDD	8,29E-07	1,84E-01	2,06E+14	70	36,22928	1,33E-04
TE	1,46E-06	7,33E-02	2,26E+13	57	26,47324	7,74E-05
CN	2,97E-05	1,60E+01	1,53E+09	57	3,72783	1,47E-04

### 5.2.2. Otimização multiobjetivo – minimização simultânea de 2 funções

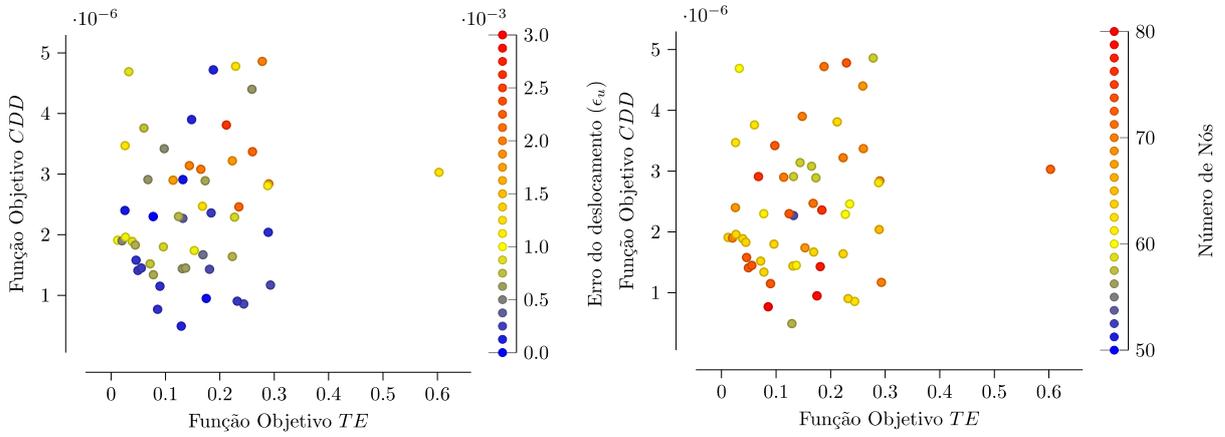
O Modelo de Contorno Sem Malha do problema de benchmark é submetido a um processo de otimização multiobjetivo de minimização, que gera soluções viáveis (arranjos nodais e parâmetro de discretização) no espaço objetivo tridimensional das funções objetivo de equilíbrio de forças estático TE, número de condicionamento CN e diferença de deslocamentos nos cantos CDD.

Neste trabalho, serão analisadas as três funções objetivo e suas diferentes combinações (otimização mono, bi e triobjetivo), visando analisar qual dos espaços geram de forma consistente as melhores soluções ótimas tanto do ponto de vista dos erros do deslocamento quanto do ponto de vista físico do problema. Neste subtópico, será analisada a otimização multiobjetivo biobjetivo, na qual são minimizadas duas funções objetivo de forma simultânea. Assim, serão estudados os espaços (CDD, TE), (CDD, CN) e (CN, TE).

Em qualquer espaço multiobjetivo, a definição da frente de Pareto é um passo essencial. A frente de Pareto é composta por um conjunto de soluções viáveis não-dominadas por quaisquer outras soluções viáveis. O conceito de dominância de Pareto considera que uma solução domina a outra se a primeira não é pior que a segunda em nenhum objetivo e é estritamente melhor que ela em relação a ao menos um objetivo. As Figuras de 19 a 21 apresentam o padrão de convergência das soluções viáveis nos diferentes espaços objetivos. Essas figuras mostram que as soluções viáveis obtidas apresentam uma ótima diversidade e convergem para as frentes de Pareto, apresentadas nas Figuras de 22 a 24, em todos os espaços objetivos, o que torna o processo de otimização aceitável.

Para realizar uma análise completa do processo de otimização, a seleção de 3 soluções ótimas de Pareto em cada espaço objetivo é considerada, com soluções de baixa, média e alta

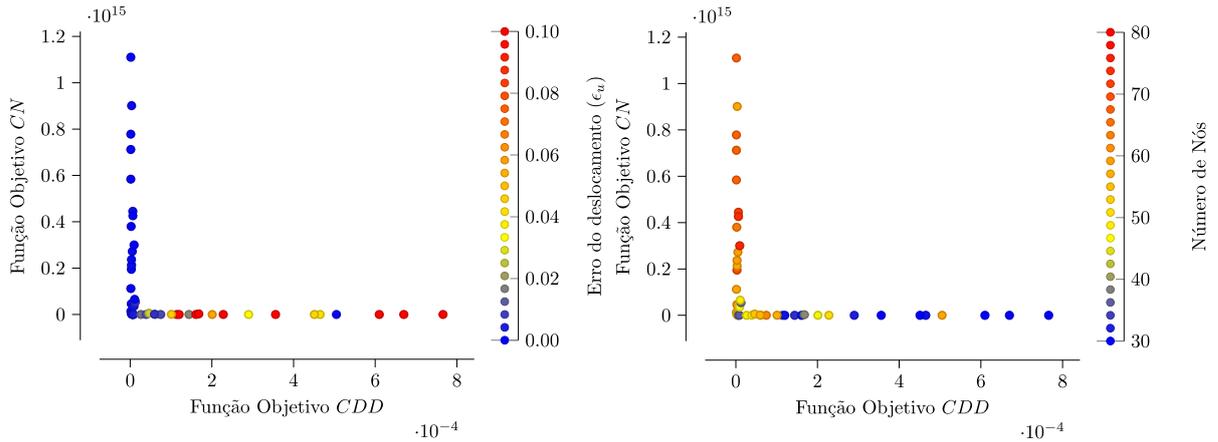
performance (critério do projetista), para estudar os respectivos *trade-off* através da análise do comportamento das funções objetivo e das variáveis de decisão.



(a) Distribuição de  $\epsilon_u$

(b) Distribuição de N

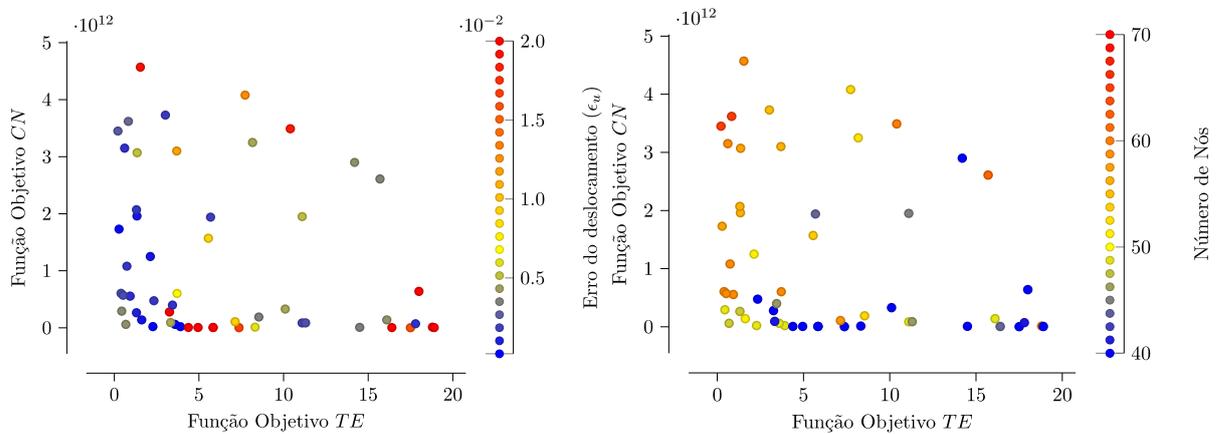
Figura 19 – Espaço objetivo CDD-TE e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e do número total de nós N da discretização nodal gerada.



(a) Distribuição de  $\epsilon_u$

(b) Distribuição de N

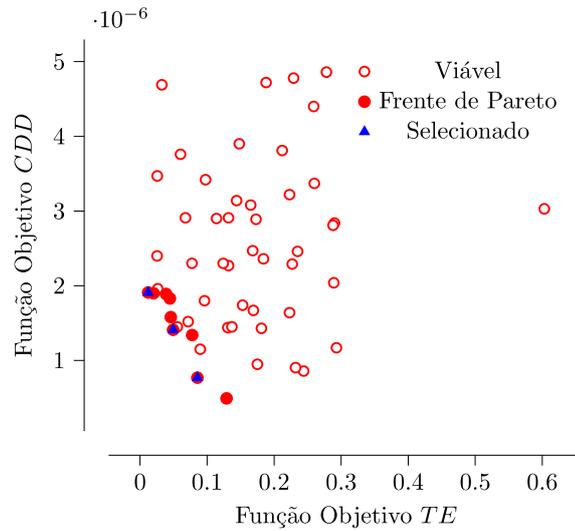
Figura 20 – Espaço objetivo CDD-CN e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e do número total de nós N da discretização nodal gerada.



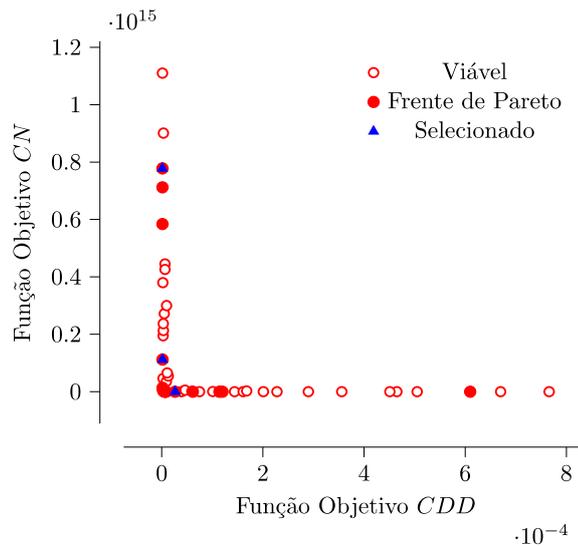
(a) Distribuição de  $\epsilon_u$

(b) Distribuição de N

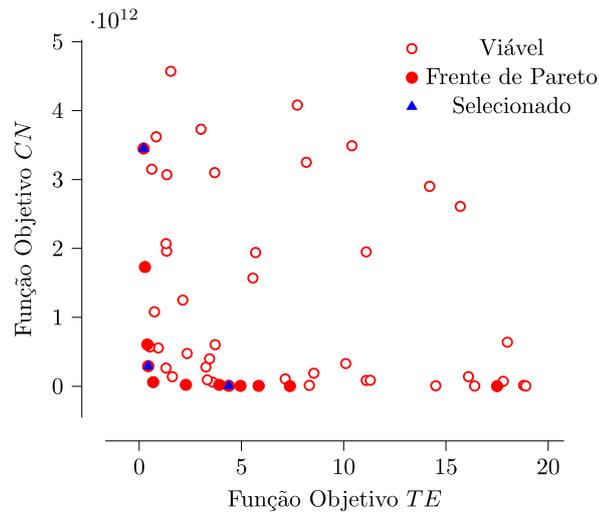
**Figura 21 – Espaço objetivo CN-TE e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e do número total de nós  $N$  da discretização nodal gerada.**



**Figura 22 –Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-TE, obtida por meio da otimização do MCSM. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de  $N$  para análise.**



**Figura 23 –Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-CN, obtida por meio da otimização do MCSM. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de  $N$  para análise.**



**Figura 24 –Frente de Pareto do espaço objetivo CN-TE, obtida por meio da otimização do MCSM. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de N para análise.**

A Figura 19 apresenta as soluções viáveis do espaço objetivo (CDD, TE) como função do erro  $\epsilon_u$  e do número de nós da discretização. Essa figura mostra que soluções com um maior número de nós convergem para a frente de Pareto próxima à origem, onde se concentram soluções com valores de erro mais baixos. Como esperado de um problema de minimização, a frente de Pareto, apresentada na Figura 22, possui o formato geral similar ao de uma função inversa. O *trade-off* observado na frente reflete bem o critério de otimalidade de Pareto, no qual a diminuição de um valor objetivo corresponde ao aumento do valor de outra função. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de N (o menor valor, o maior valor e um valor médio) para que os *trade-off* pudesse ser estudado de forma mais detalhada.

As Figuras 20 e 21 apresentam, respectivamente, o comportamento das soluções viáveis geradas pela otimização dos espaços (CDD, CN) e (CN, TE) em relação aos erros e ao número de nós total. Nesses espaços, nota-se que há uma divisão das soluções viáveis em uma frente vertical e outra horizontal, onde cada frente possui um comportamento distinto. As figuras mostram que as soluções com menores erros e maior número de nós se concentram na região que apresenta valores mais elevados de CN (frente vertical). Já as soluções com erros maiores e menor número de nós se concentram na região que apresenta menores valores de CN (frente horizontal). Assim, conclui-se que este é um comportamento associado à utilização da função objetivo CN. Como esperado de um problema de minimização, as frentes de Pareto, apresentadas nas Figuras 23 e 24, possuem o formato geral similar ao de uma função inversa. Em cada espaço, foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores totais de N para que os *trade-off* pudessem ser estudados de forma mais detalhada.

As Tabelas de 4 a 6 apresentam os atributos das soluções ótimas selecionadas, em cada espaço objetivo. Nessas tabelas, pode-se ver os valores numéricos das funções objetivos e das variáveis de decisão correspondentes a cada solução.

Os resultados apresentados na Tabela 4 mostram que as soluções ótimas obtidas no espaço (CDD, TE) apresentaram erros relativos baixos, da ordem de grandeza de E-04, de forma consistente. Em um primeiro momento, pode-se pensar que esses resultados são inferiores aos obtidos nos espaços monoobjetivo CDD e TE. Entretanto, ao utilizar o espaço biobjetivo, obteve-se um bom equilíbrio entre os valores de CDD e de TE, de forma que ao mesmo tempo que se obtém uma boa aproximação do campo de deslocamentos associada a um valor de CDD baixo, também se observa um resultado mais próximo do equilíbrio associado a um valor de TE baixo. Isto é algo que não é observado no espaço monoobjetivo, no qual a minimização de CDD não garante um valor baixo de TE e vice-versa. Além disso, nesse espaço observa-se que há uma correlação inversa entre o valor de N e o dos erros, ou seja, o aumento do número de nós reflete em uma diminuição dos erros relativo.

**Tabela 4- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE).**

CDD	TE	N	$\alpha_s$	$\epsilon_u$
1,91E-06	1,21E-02	63	39,00141	9,69E-04
1,41E-06	4,93E-02	73	31,27786	2,12E-04
7,69E-07	8,55E-02	80	34,49490	1,95E-04

As Tabelas 5 e 6, por sua vez, apresentam, respectivamente, os resultados obtidos nos espaços (CDD, CN) e (CN, TE). Nota-se que, apesar de os erros das soluções ainda serem baixos, eles já são consideravelmente mais altos do que os obtidos no espaço (CDD, TE), surgindo erros da ordem de grandeza de até E-02. É também possível observar que as soluções ótimas de menor erro estão mais associadas, respectivamente, aos menores valores de CDD e de TE. Isto demonstra que o resultado da otimização parece ser indiferente ao valor de CN, o que pode indicar que esta não é uma função objetivo eficiente.

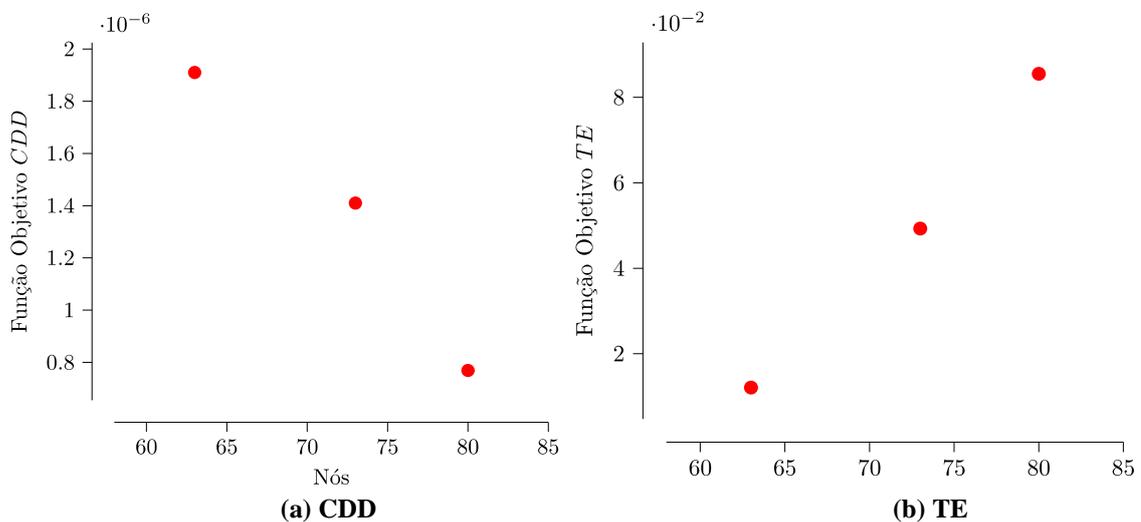
**Tabela 5- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, CN).**

CDD	CN	N	$\alpha_s$	$\epsilon_u$
2,64E-05	1,17E+10	49	8,55406	1,47E-02
1,66E-06	1,12E+14	58	29,1658	4,91E-04
1,48E-06	7,78E+14	67	33,73567	6,84E-04

**Tabela 6- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CN, TE).**

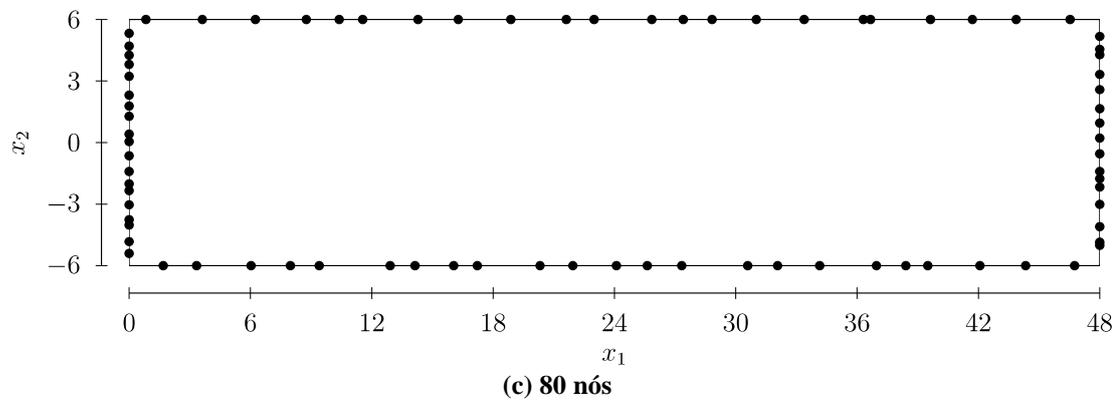
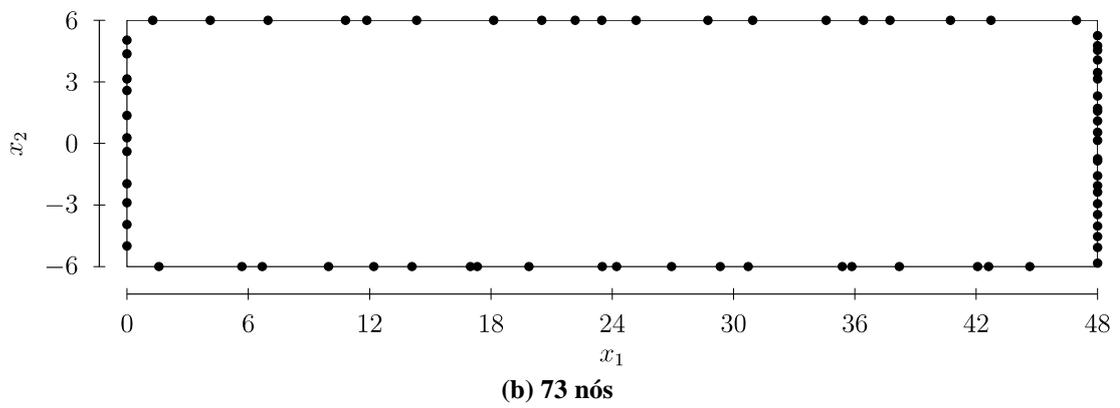
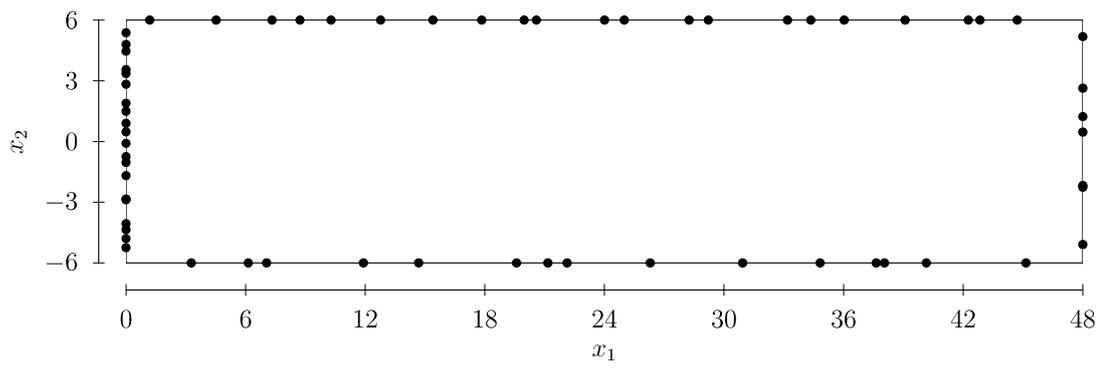
CN	TE	N	$\alpha_s$	$\epsilon_u$
5,68E+09	4,38E+00	27	7,31952	7,03E-02
2,92E+11	4,41E-01	49	18,23339	3,82E-03
3,45E+12	2,14E-01	65	16,86273	2,57E-03

Para permitir uma análise visual do *trade-off* que ocorre entre as soluções ótimas, a Figura 25 ilustra o comportamento das funções objetivo em relação ao número de nós N no espaço (CDD, TE). Nessa figura, o significado da otimalidade de Pareto fica claro para as soluções ótimas, pois nenhuma função objetivo pode ser diminuída sem que haja um aumento na função correspondente.



**Figura 25 – Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE) como função do número de nós N. Para atingir um melhor resultado no objetivo CDD, o objetivo TE se deteriora, como consequência da otimalidade de Pareto.**

As distribuições nodais sem malha geradas automaticamente pelo processo de otimização, correspondentes às soluções ótimas selecionadas, estão apresentadas nas Figuras de 26 a 28. É importante notar que a otimização multiobjetivo lida com três conjuntos de variáveis de decisão: o número de nós, o parâmetro de discretização e a irregularidade nodal, todas as quais impactam no nível de acurácia do MCSM. Como consequência, em cada iteração, o processo pode modificar qualquer uma das variáveis de decisão ou uma combinação delas. Entretanto, como mostrado nas Figuras de 19 a 21, há uma boa correlação entre um número de nós mais alto e um erro mais baixo.



**Figura 26 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo.**

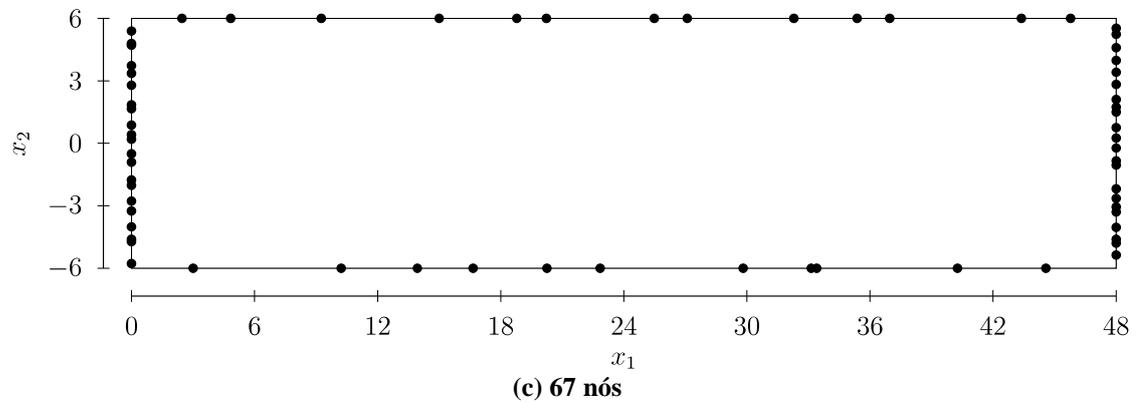
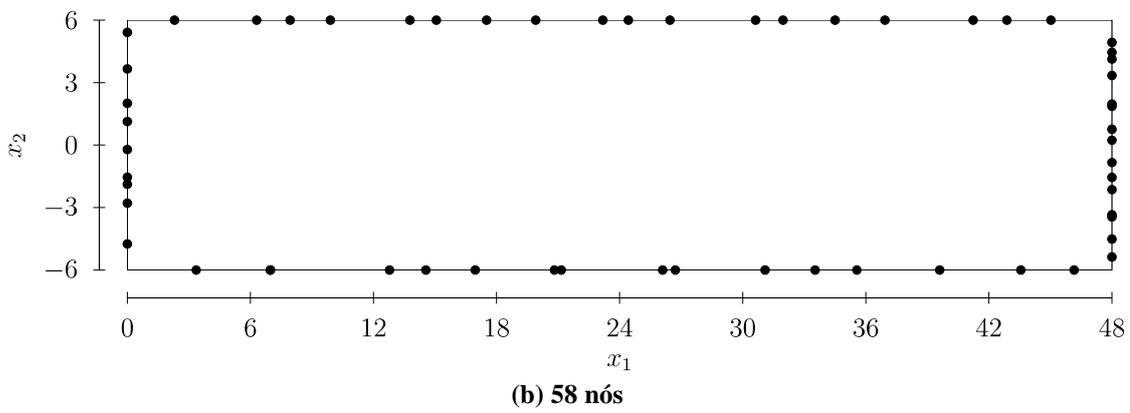
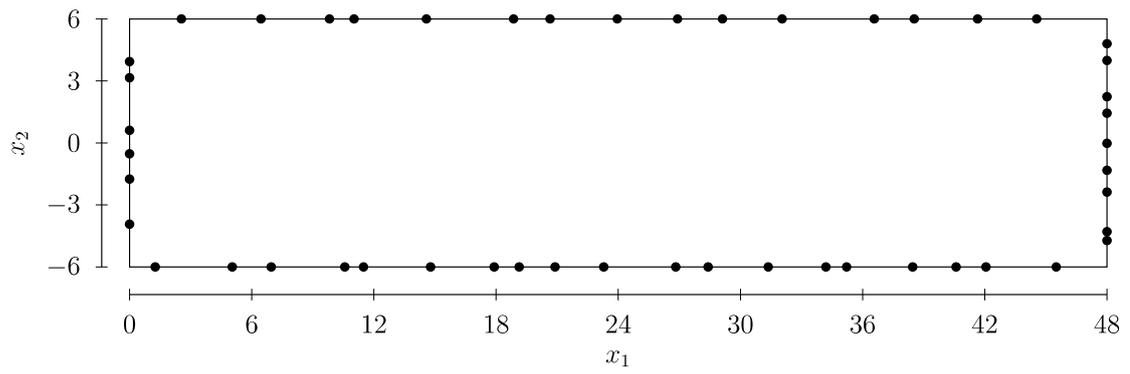
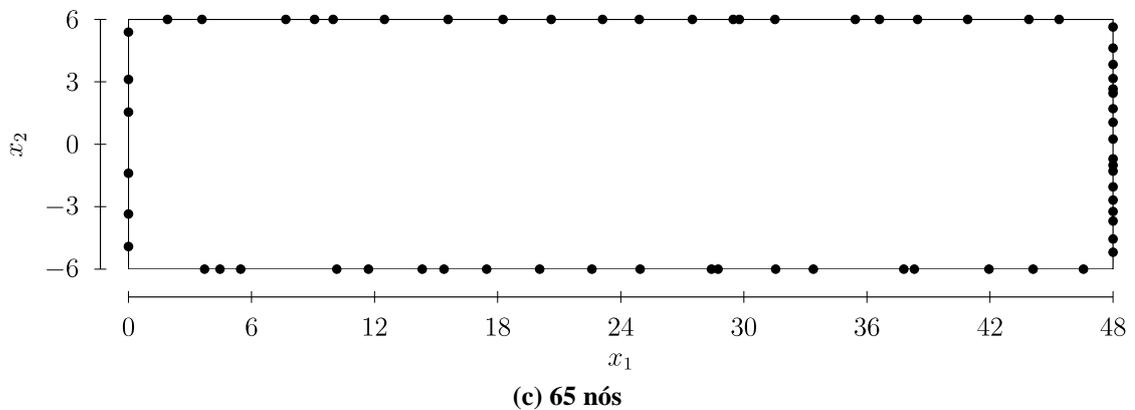
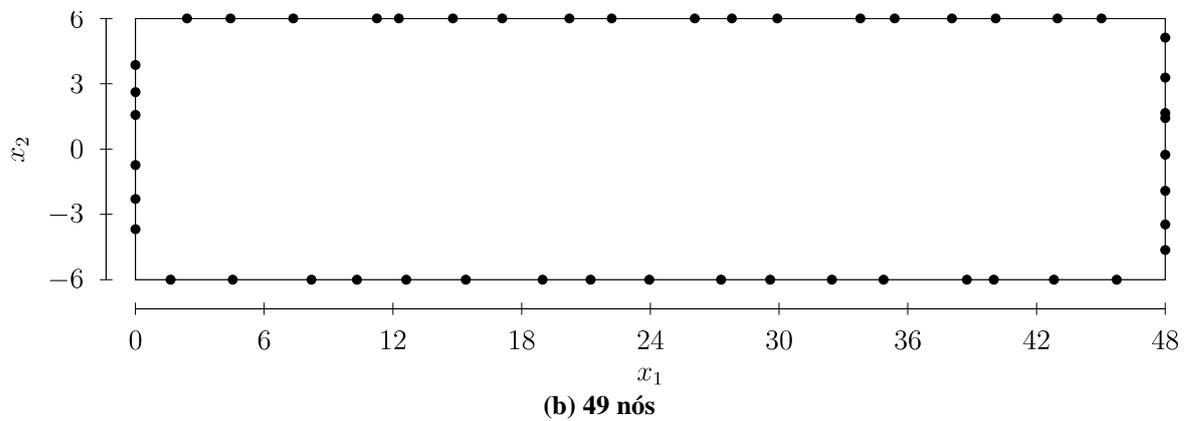
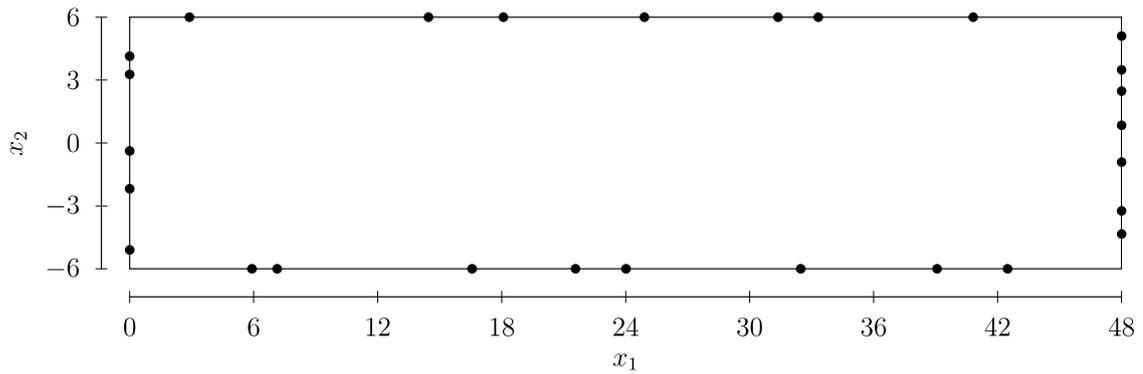


Figura 27 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, CN), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo.



**Figura 28 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CN, TE), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo.**

As Figuras de 29 a 31 apresentam os deslocamentos ao longo do eixo  $x_2 = 0$  e as tensões normal e cisalhante na seção transversal  $x_1 = L/2$  da viga, obtidas através do MCSM, correspondentes às soluções ótimas selecionadas e discretizações apresentadas nas Figuras de 26 a 28. É evidente a qualidade do processo de otimização multiobjetivo do MCSM, o qual leva a valores de deslocamentos e tensões próximos do analítico em todos os espaços, com destaque especial para os resultados obtidos no espaço (CDD, TE), que se encontram em

perfeita concordância com a solução analítica independentemente da quantidade de nós da discretização.

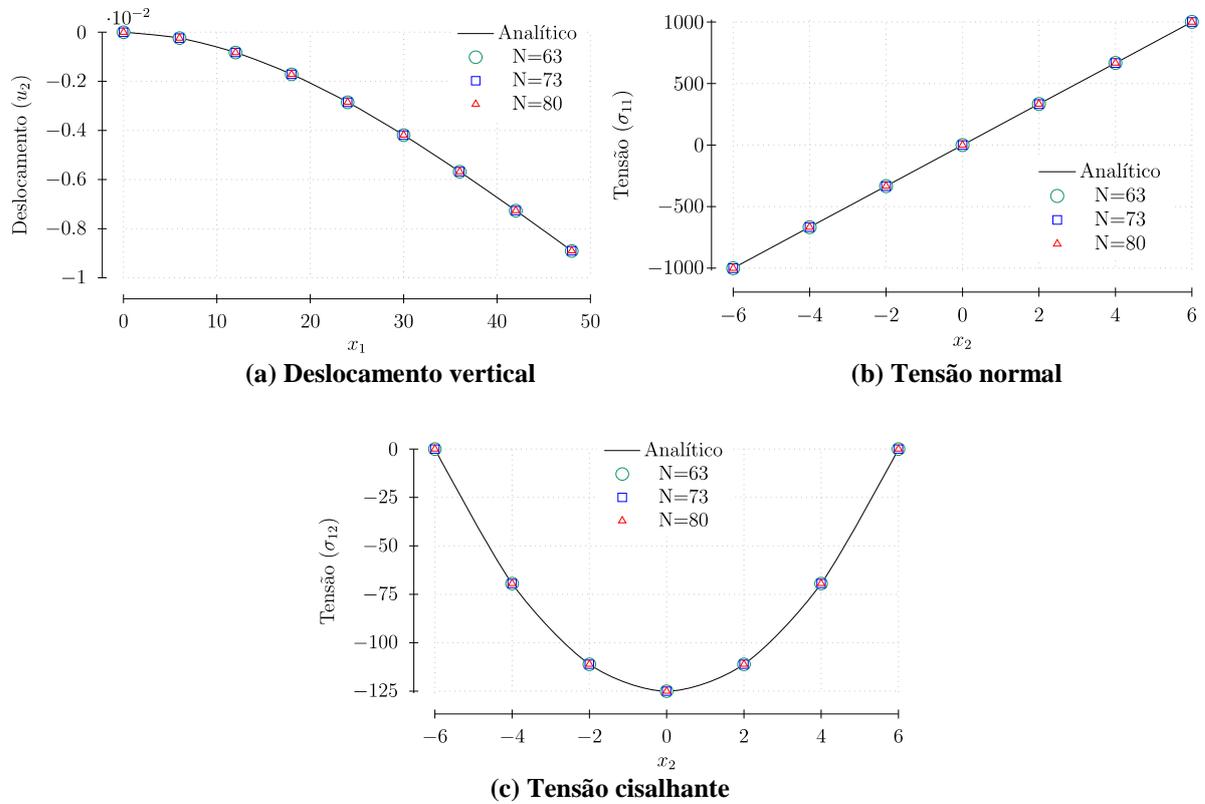
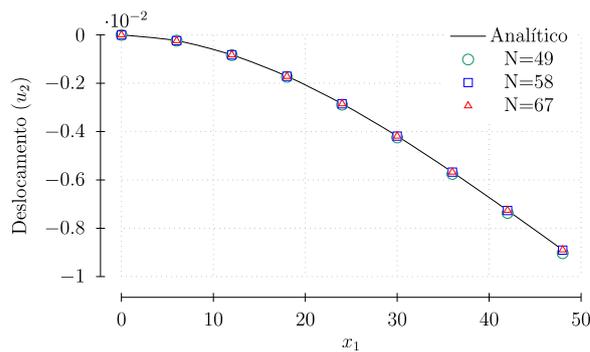
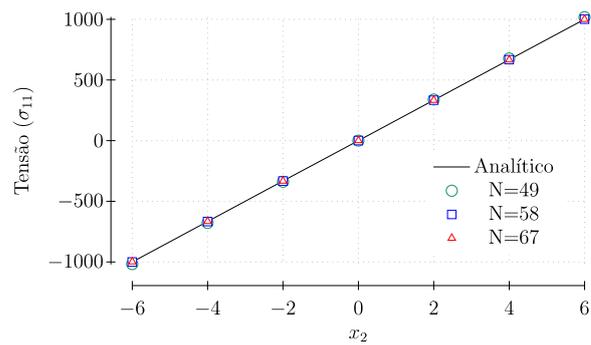


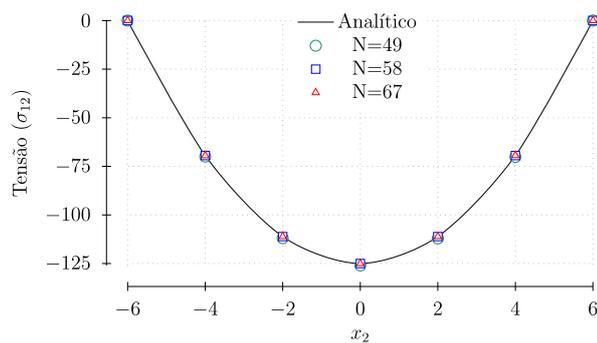
Figura 29 – Deslocamento na seção  $x_2=0$  e tensões na seção  $x_1=L/2$  para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, TE).



(a) Deslocamento vertical

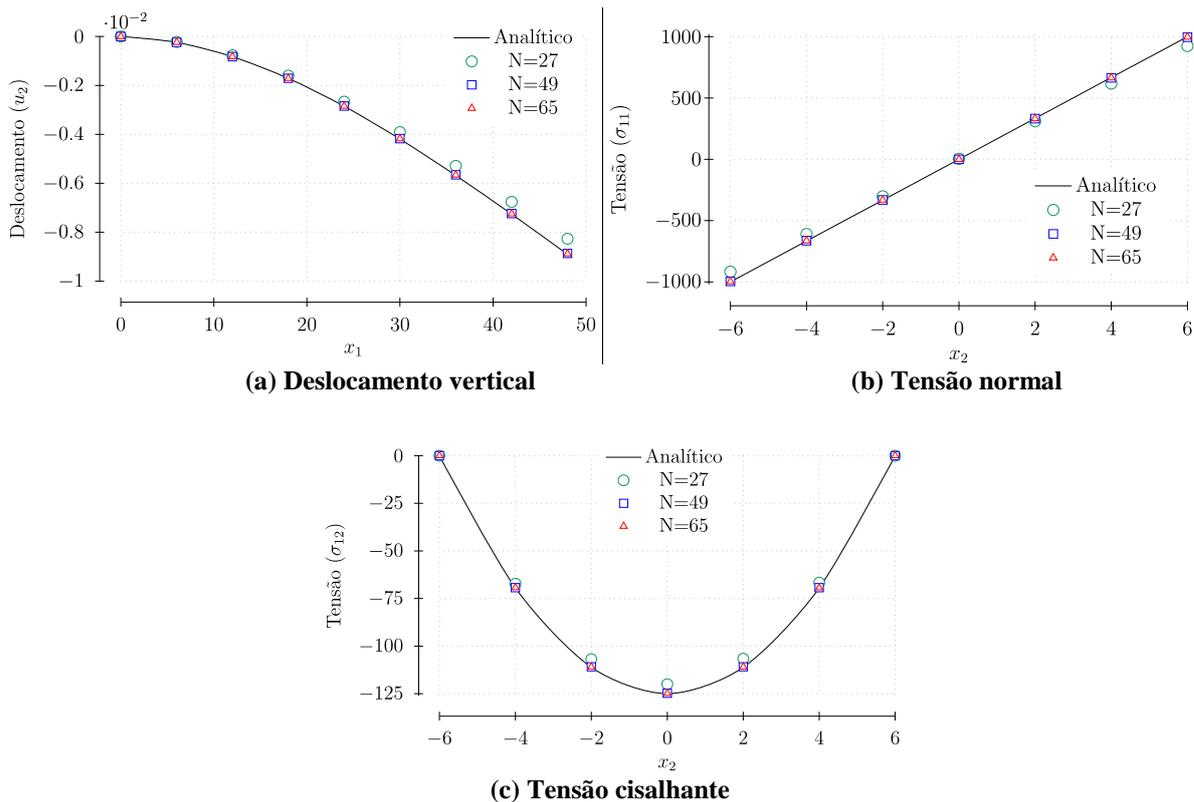


(b) Tensão normal



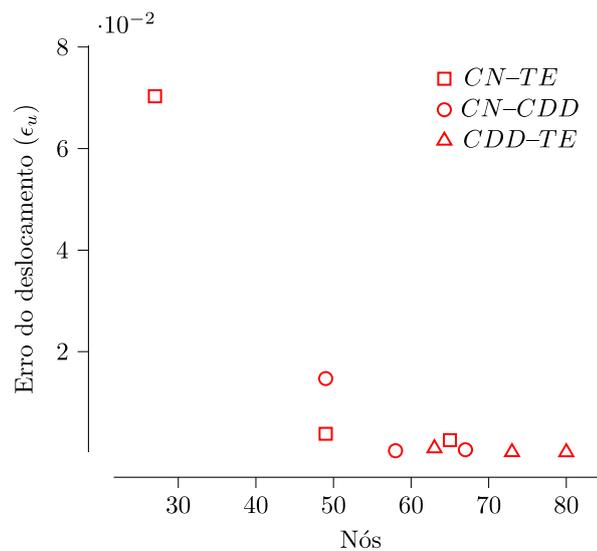
(c) Tensão cisalhante

Figura 30 – Deslocamento na seção  $x_2=0$  e tensões na seção  $x_1=L/2$  para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, CN).



**Figura 31 – Deslocamento na seção  $x_2=0$  e tensões na seção  $x_1=L/2$  para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CN, TE).**

A acurácia dos resultados pode ser verificada através dos erros relativos apresentados nas Tabelas de 4 a 6, também apresentados na Figura 32. Por meio desta figura, torna-se claro que o espaço (CDD, TE) é o que obtém mais consistentemente soluções de melhor qualidade. Além disso, neste espaço obteve-se uma correlação inversa entre o número de nós e os erros relativos. Esta característica é muito interessante, pois torna o papel do projetista mais simples, já que permite que ele substitua um critério de escolha de soluções baseado nos erros (que é possível apenas em problemas simples, cuja solução analítica é conhecida) por um critério baseado no número de nós. Já os espaços (CDD, CN) e (CN, TE) levaram a soluções ótimas com erros relativos mais elevados. Ademais, nesses espaços a correlação inversa entre os erros e  $N$  não se mostrou consistente, tornando mais difícil o trabalho do projetista de selecionar soluções ótimas interessantes na ausência da solução analítica. Isto provavelmente se deve à presença da função objetivo CN, que não parece estar ajudando de forma ativa na obtenção de boas soluções. Conforme observado na Figura 32 e também nas Figuras de 19 a 21, a minimização de CN parece refletir mais diretamente em uma diminuição do número de nós das discretizações, e não em uma diminuição dos erros relativos.

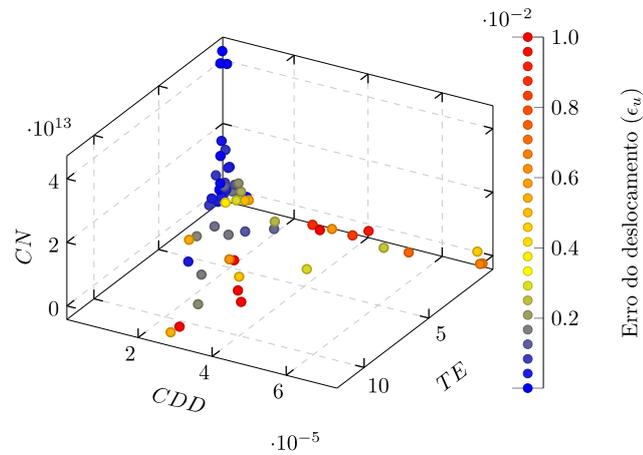


**Figura 32 – Erros relativos das correspondentes soluções ótimas de Pareto nos espaços objetivo (CDD, TE), (CDD, CN) e (CN, TE) da otimização multiobjetivo.**

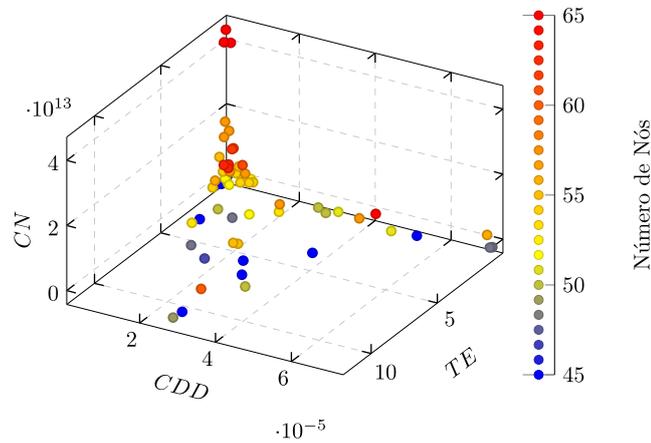
### 5.2.3. Otimização multiobjetivo – minimização simultânea de 3 funções

Para finalizar as possibilidades de espaços objetivo, torna-se necessário agora realizar uma análise completa considerando um espaço de minimização simultânea dos três objetivos. A Figura 33 apresenta as soluções ótimas de Pareto obtidas no espaço objetivo (CDD, TE, CN). Há uma clara tendência de concentração de soluções com erros baixos e número de nós alto na região da origem.

Uma seleção de 9 soluções ótimas do espaço objetivo completo foi realizada, estando as soluções selecionadas destacadas na Figura 34. Por motivos de comparação, as soluções selecionadas possuíam valor total de nós da discretização similar ao das discretizações selecionadas nos espaços biobjetivos. As Tabelas de 7 a 9 apresentam o comparativo entre os erros das soluções obtidas por meio da análise com dois e com três objetivos. A Figura 35 ilustra esses resultados de forma visual. Por meio da análise da figura, torna-se clara a qualidade da simplificação biobjetivo, a qual leva a soluções com erros da mesma ordem de grandeza ou até mesmo inferiores aos obtidos por meio da otimização completa do espaço (CDD, TE, CN).



(a) Distribuição de  $\epsilon_u$



(b) Distribuição de N

Figura 33 – Espaço objetivo CDD-TE-CN e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e do número total de nós N da discretização nodal gerada.

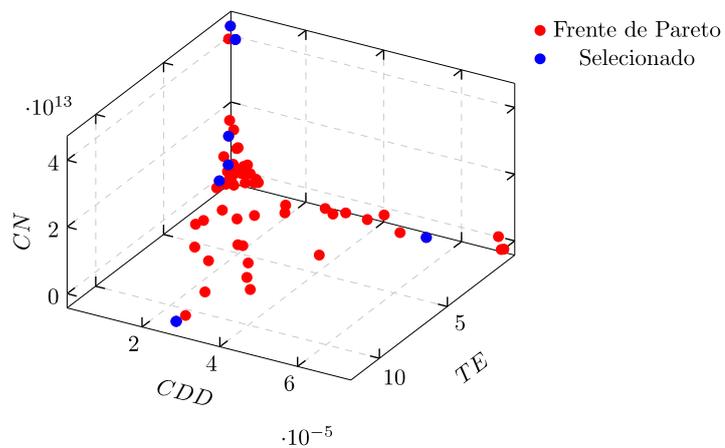


Figura 34 – Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-TE-CN, obtida por meio da otimização do MCSM. As soluções não-dominadas, que formam a frente de Pareto, satisfazem claramente o critério de otimalidade de Pareto. Foram selecionadas oito soluções ótimas com diferentes valores de N para serem comparadas com os resultados dos espaços objetivo 2D.

Tabela 7- Erros relativos  $\epsilon_u$  das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo 2D (CDD, TE) e os correspondentes erros do espaço objetivo 3D (CDD, TE, CN), obtidas com um valor similar do número de nós da discretização.

CDD-TE		CDD-TE-CN	
N	$\epsilon_u$	N	$\epsilon_u$
63	9,69E-04	57	1,40E-04
73	2,12E-04	63	1,34E-04
80	1,95E-04	69	1,22E-05

Tabela 8- Erros relativos  $\epsilon_u$  das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo 2D (CDD, CN) e os correspondentes erros do espaço objetivo 3D (CDD, TE, CN), obtidas com um valor similar do número de nós da discretização.

CDD-CN		CDD-TE-CN	
N	$\epsilon_u$	N	$\epsilon_u$
49	1,47E-02	49	5,33E-03
58	4,91E-04	56	4,02E-04
67	6,84E-04	66	1,31E-04

Tabela 9- Erros relativos  $\epsilon_u$  das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo 2D (CN, TE) e os correspondentes erros do espaço objetivo 3D (CDD, TE, CN), obtidas com um valor similar do número de nós da discretização.

CN-TE		CDD-TE-CN	
N	$\epsilon_u$	N	$\epsilon_u$
27	7,03E-02	30	7,20E-03
49	3,82E-03	49	5,33E-03
65	2,57E-03	66	1,31E-04

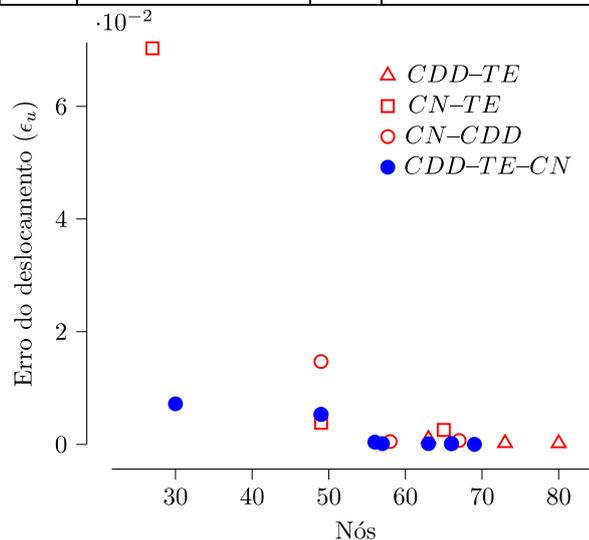


Figura 35 – Erros relativos  $\epsilon_u$  das correspondentes soluções ótimas de Pareto nos espaços objetivo 2D e 3D da otimização multiobjetivo. Como as distribuições nodais geradas possuem praticamente a mesma quantidade de nós, os erros obtidos são praticamente da mesma ordem de grandeza. Esse aspecto valida a utilização da análise com dois objetivos ao invés da otimização completa com três objetivos.

Para permitir uma análise de como os parâmetros envolvidos no processo de otimização interagem entre si, as soluções ótimas do espaço objetivo tridimensional foram utilizadas na montagem de um mapa de correlação linear, apresentado na Figura 36. Em um

mapa de correlação, parâmetros positivamente correlacionados indicam uma tendência de comportamentos similares. Dessa forma, no processo de otimização, a minimização de um dos parâmetros tende a refletir a minimização do outro. Quando dois parâmetros possuem correlação negativa, há uma tendência de comportamentos inversos.

Pode ser notado que o erro relativo  $\epsilon_u$  das soluções numérica ótimas obtidas por meio do MCSM possuem uma forte correlação positiva (maior que 99,5%) com ambas as funções objetivo CDD e TE. Esse resultado possui uma enorme importância, já que ela implica que a minimização das funções CDD e TE a partir do processo de otimização é praticamente equivalente a obter a solução analítica e, conseqüentemente, demonstra a acurácia e eficiência do processo de otimização.

Além disso, o mapa de correlação linear mostra que o erro relativo  $\epsilon_u$  possui forte correlação negativa (-79,7%) com o número de nós total N, o que é esperado, já que N possui também uma forte correlação negativa com ambas as funções objetivo CDD e TE. Essa característica reforça a confiabilidade do processo de otimização multiobjetivo do MCSM.

Finalmente, observa-se que a função objetivo CDD é positivamente correlacionada com TE, o que significa que a diminuição de uma dessas funções tende a refletir em uma diminuição da outra. Entretanto, ambas essas funções objetivo são negativamente correlacionadas com CN, o que é uma consequência do fato de que enquanto CDD e TE tendem a diminuir com o aumento do número de nós N, CN tende a aumentar. Essa relação explica também porque N é negativamente correlacionada com CDD e TE e positivamente correlacionado com CN.

Em resumo, a partir do mapa de correlação linear, fica claramente demonstrada a alta eficiência das funções objetivo CDD e TE, cujas minimizações a partir do processo de otimização multobjetivo são quase equivalentes à obtenção da solução analítica do problema de elasticidade linear. Apesar de demonstrada a eficiência para apenas um exemplo, espera-se que as funções CDD e TE sejam eficientes para a resolução de qualquer problema da elasticidade linear devido a sua formulação teórica. Ademais, também é observada uma forte correlação negativa entre o número de nós total da discretização N e o erro relativo da solução  $\epsilon_u$ . Conseqüentemente, essa estratégia de modelagem, a qual gera de forma automática a discretização nodal do MCSM completa, é robusta e confiável.

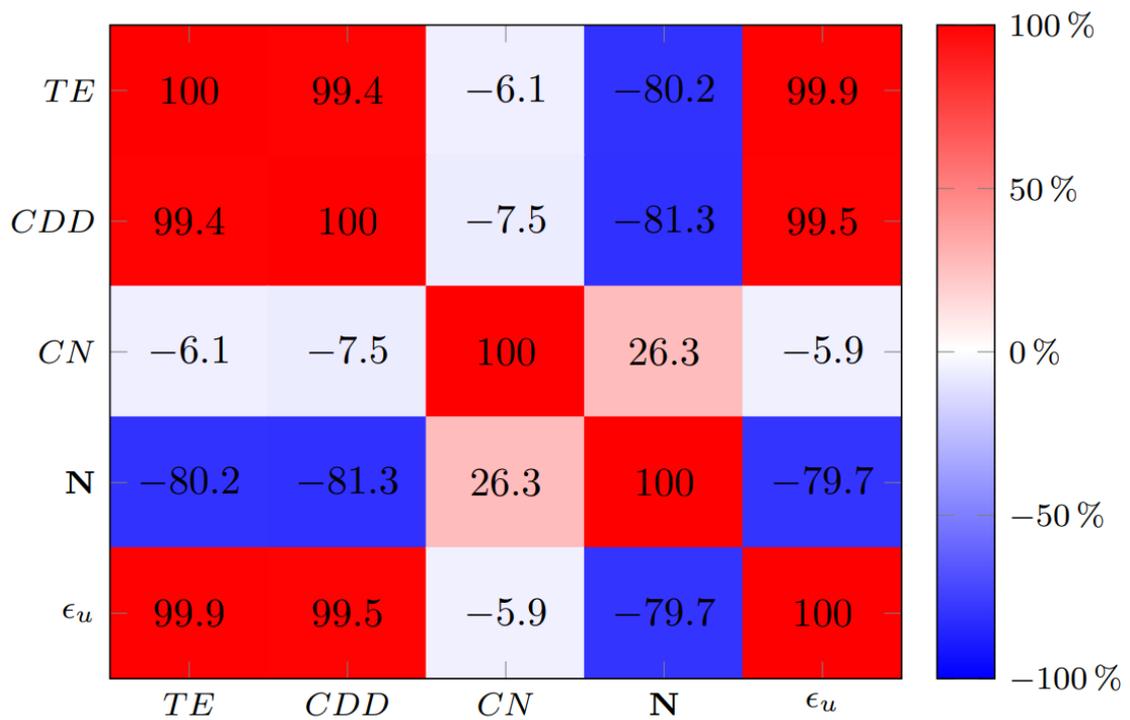


Figura 36 – Mapa de calor das correlações lineares obtido a partir das soluções ótimas de Pareto do espaço objetivo (CDD, TE, CN), da variável de decisão do número de nós N e os erros relativos do deslocamento  $\epsilon_u$  das discretizações obtidas de forma automática.

### 5.3. Placa com Furo Circular Centralizado

O último benchmark considera uma placa infinita com um furo circular no centro sob tensão  $P = 1$  unidirecional, ao longo da direção  $x_1$ , conforme ilustrado na Figura 37. A placa encontra-se em estado plano de tensão e foram adotados coeficiente de Poisson  $\nu=0.25$  e módulo de elasticidade  $E=1E+05$ .

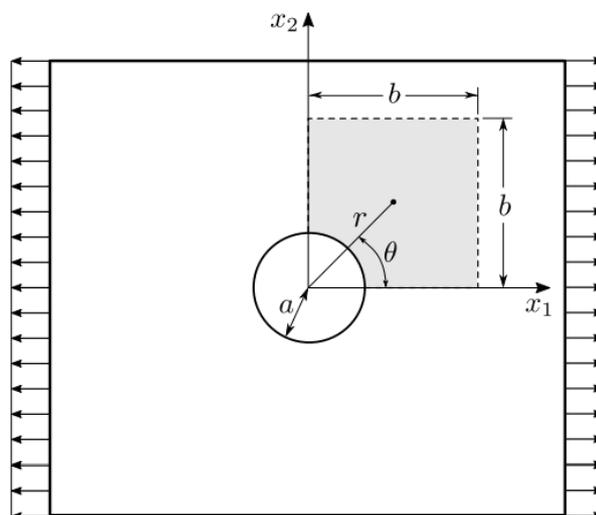


Figura 37 - Placa circular infinita com furo centralizado. Adaptado de Oliveira Jr. (2015).

Devido à simetria do problema, apenas um quadrante foi modelado. O quadrante considerado tem dimensões  $b \times b$ . O raio do círculo foi tomado como  $a = 1$  e  $b = 5a$ .

As soluções analíticas do deslocamento e das tensões, respectivamente, são dadas por

$$\begin{aligned} u_1(r, \theta) &= \frac{1+\nu}{E} P \left( \frac{r \cos \theta}{1+\nu} + \frac{2}{1+\nu} \frac{a^2}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} \cos 3\theta - \frac{1}{2} \frac{a^4}{r^3} \cos 3\theta \right), \\ u_2(r, \theta) &= \frac{1+\nu}{E} P \left( -\frac{\nu}{1+\nu} r \sin \theta - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{a^2}{r} \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r} \sin 3\theta - \frac{1}{2} \frac{a^4}{r^3} \sin 3\theta \right); \end{aligned} \quad 5.8$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= P \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \right), \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= P \left( -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \right), \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= P \left( -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin 4\theta \right), \end{aligned} \quad 5.9$$

As discretizações ótimas para o problema foram obtidas por meio do processo de otimização proposto. A aproximação do MMQM utilizou uma base polinomial cúbica ( $m=4$ ). O número de nós de cada segmento foi limitado ao intervalo  $[4, 21]$ , a irregularidade foi limitada ao intervalo de  $[-0.7, 0.7]$  e o parâmetro de discretização  $\alpha_s$  foi limitado ao intervalo  $[4.05, 42]$ . Os limites de  $\alpha_s$  foram definidos da seguinte forma: o limite inferior é igual ao tamanho da base polinomial  $m$  adicionada de 0.05, visando garantir o mínimo de nós necessário para a aproximação dentro do suporte compacto. Já o limite superior é igual a duas vezes o maior número de nós permitido por segmento.

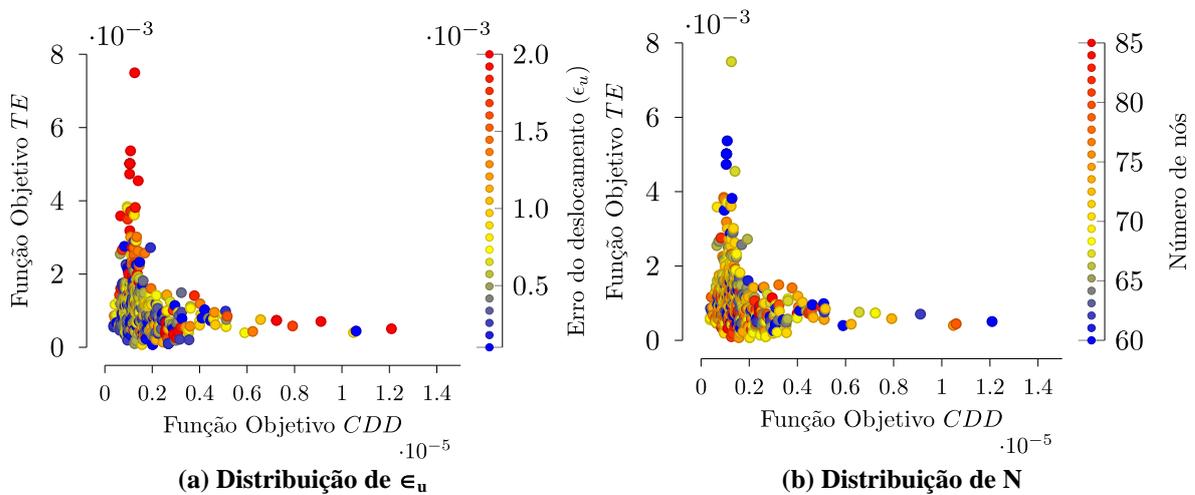
Os valores mínimos ( $lb$ ) e máximos ( $ub$ ) impostos às variáveis podem ser encontrados no Apêndice A.2.

Dadas as conclusões obtidas a partir do mapa de correlação apresentado na Figura 36, que mostrou que as funções objetivo com melhor correlação com os erros foram as funções CDD e TE, o único espaço objetivo estudado para este benchmark foi o espaço (CDD, TE).

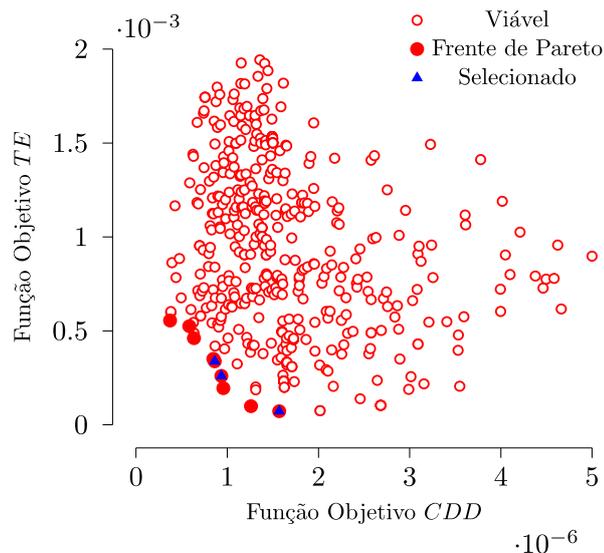
Assim como no exemplo anterior, o processo é iniciado por meio da obtenção e análise das soluções viáveis, as quais estão apresentadas na Figura 38. Observa-se o mesmo comportamento do obtido no *benchmark* anterior: soluções com erros menores e maior número de nós se concentram na região próxima da origem, onde se localiza a frente de Pareto. A Figura 39 apresenta as soluções ótimas de Pareto do espaço. Como esperado em um

problema de minimização, a frente de Pareto apresenta o formato similar ao de uma função inversa.

Novamente, para que fosse realizada uma discussão mais completa dos resultados, foram selecionadas três soluções ótimas distintas para análise (o menor valor, o maior valor e um valor médio). Essas soluções encontram-se destacadas na Figura 39 e seus atributos estão apresentados na Tabela 10. A partir dos dados da tabela, fica clara a qualidade das soluções ótimas obtidas.



**Figura 38 – Espaço objetivo CDD-TE e suas soluções viáveis (ou população) em função do erro do deslocamento  $\epsilon_u$  e do número total de nós  $N$  da discretização nodal gerada. Soluções com um maior número de nós e menores erros convergem para a região mais próxima da origem.**



**Figura 39 – Frente de Pareto do espaço objetivo CDD-TE, obtida por meio da otimização do MCSM. As soluções não-dominadas, que formam a frente de Pareto, satisfazem claramente o critério de otimalidade de Pareto. Foram selecionadas três soluções ótimas com diferentes valores de  $N$  para análise.**

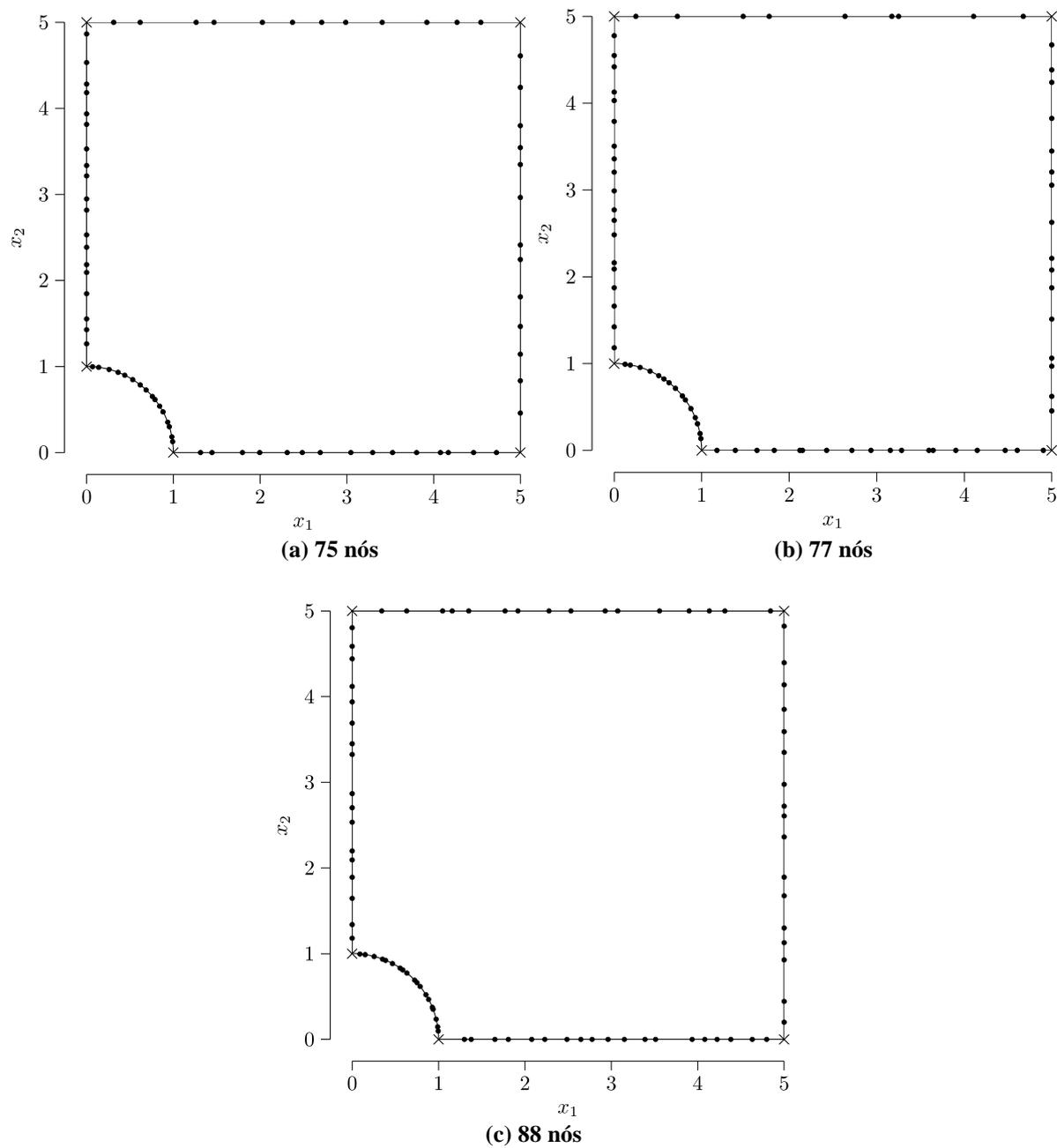
**Tabela 10- Soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE) para o problema da Placa com Furo Circular Centralizado.**

CDD	TE	N	$\alpha_s$	$\epsilon_u$
1,57E-06	7,22E-05	75	15,78303	9,22E-04
9,35E-07	2,60E-04	77	15,39214	5,91E-04
8,62E-07	3,38E-04	88	16,92455	2.25E-04

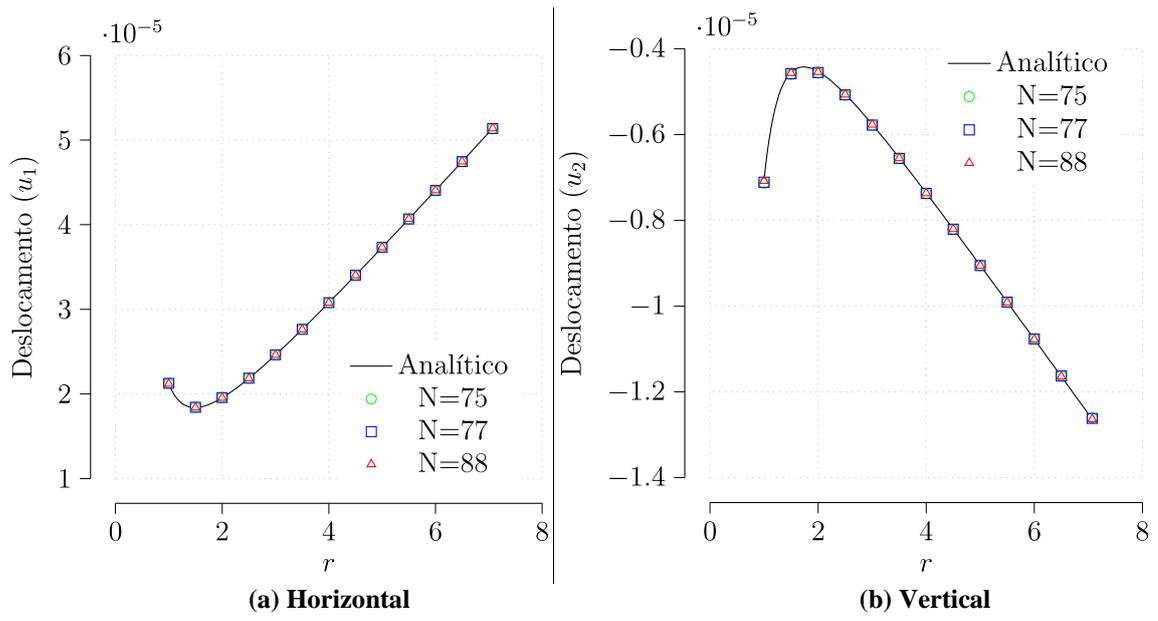
As distribuições nodais sem malha geradas automaticamente pelo processo de otimização, correspondentes às soluções ótimas selecionadas, estão apresentadas na Figura 40.

As Figuras 41 e 42 apresentam os resultados obtidos de deslocamentos e tensões ao longo da diagonal  $\theta=45^\circ$  da placa. É evidente a qualidade do processo de otimização multiobjetivo do MCSM, o qual leva a valores de deslocamentos e tensões em perfeita concordância com a solução analítica independentemente da quantidade de nós da discretização.

Finalmente, a Figura 43 mostra os erros relativos das soluções ótimas selecionadas em função do número de nós da discretização N. Novamente, é observada uma correlação inversa entre  $\epsilon_u$  e N, o que facilita o processo de seleção de soluções ótimas interessantes por parte do projetista.



**Figura 40 – Distribuições nodais das soluções ótimas de Pareto selecionadas do espaço objetivo (CDD, TE), geradas de forma automática por meio do processo de otimização multiobjetivo.**



**Figura 41 – Deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  na seção  $\theta=45^\circ$  para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, TE).**

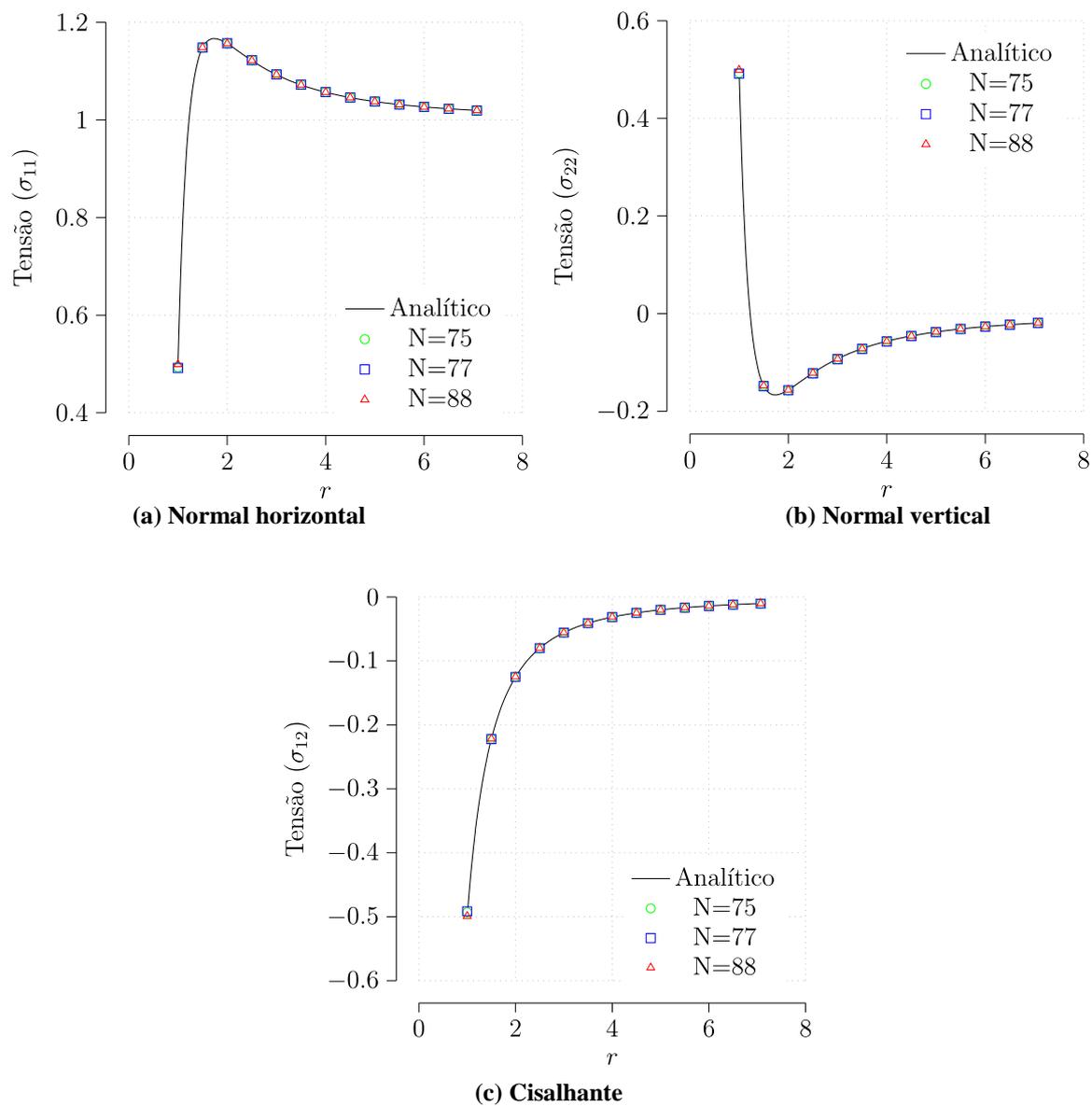
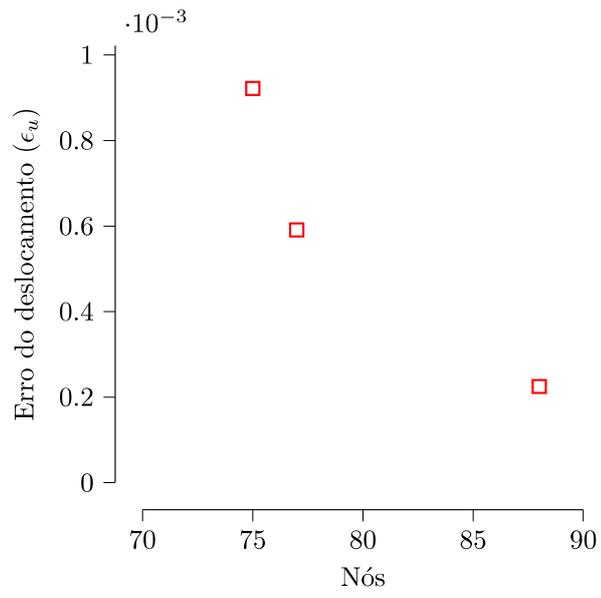


Figura 42 – Tensões  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  na seção  $\theta=45^\circ$  para as soluções ótimas selecionadas do espaço (CDD, TE).



**Figura 43 - Erros relativos das soluções ótimas de Pareto no espaço objetivo (CDD, TE).**

## 6. CONCLUSÕES

### 6.1. Conclusões Gerais

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de automatização do Método de Contorno Sem Malha (MCSM) por meio de um processo de otimização multiobjetivo utilizando Algoritmos Genéticos. A formulação proposta visa solucionar problemas da elasticidade linear. A discretização é realizada por meio de segmentos lineares de discretização  $\Gamma_j$ , os quais são discretizados por um número qualquer  $n_j$  de nós.

Foram propostas três funções objetivo: a diferença de deslocamento dos cantos CDD, o equilíbrio estático TE e o número de condicionamento CN. As funções objetivo são dependentes de três conjuntos de variáveis de decisão: o número de nós dos segmentos  $N$ , o parâmetro de discretização  $\alpha_s$  e a irregularidade dos nós  $c_n$ .

Inicialmente, o MCSM proposto foi testado por meio de um *benchmark* simples, sendo obtidos bons resultados. Em seguida, a eficiência da modelagem automática foi atestada por meio de dois *benchmark*. Foram analisadas otimizações mono, bi e triobjetivo, visando obter a melhor combinação de funções objetivo possível. Ao final da análise, foi possível observar que o espaço que leva às melhores soluções ótimas de forma mais consistente, tanto do ponto de vista dos erros relativos quanto do ponto de vista das funções objetivo, foi o espaço (CDD, TE). Apesar de demonstrada a eficiência para apenas dois exemplos, espera-se que as funções CDD e TE sejam eficientes para a resolução de qualquer problema da elasticidade linear devido a sua formulação teórica. Além disso, nesse espaço, observou-se uma correlação inversa entre o número de nós total  $N$  da solução e os erros relativos. Esta característica é muito interessante, pois torna o papel do projetista mais simples, já que permite que ele substitua um critério de escolha de soluções baseado nos erros (que é possível apenas em problemas simples, cuja solução analítica é conhecida) por um critério baseado no número de nós.

Vale ressaltar que os resultados da modelagem proposta são positivos não só por conta dos baixos erros obtidos, mas também devido à baixa participação do projetista no processo de modelagem. O projetista tem como papel apenas a definição dos limites inferiores e superiores das variáveis e a definição da base a ser utilizada. Ao fim do processo, ele tem

apenas de selecionar soluções interessantes dentre as soluções ótimas, as quais apresentam erros baixos de forma consistente.

É importante comentar sobre a principal desvantagem do método, que é o tempo de processamento. Devido ao tempo computacional associado ao software utilizado (MATLAB 2015a) e o método de otimização (Algoritmos Genéticos), em um primeiro momento a utilização da estratégia de modelagem proposta pode não ser viável para problemas práticos de larga-escala. É interessante notar, entretanto, que o tempo associado ao processo de otimização está mais associado ao tamanho da população do que ao número de gerações, sendo assim altamente escalável por meio de processamento em paralelo. Assim, dado o avanço observado na capacidade de processamento dos computadores domésticos, considera-se que em um futuro próximo o tempo de processamento não será um impeditivo para o método.

Logo, considerando a alta acurácia dos resultados, a baixa participação do projetista no processo automático e a consideração de que, em um futuro próximo, o tempo de processamento não será um grande impeditivo, pode-se concluir que a estratégia de modelagem proposta é extremamente promissora, podendo ter sua aplicação estendida para problemas mais complexos, como problemas não-lineares e da mecânica da fratura.

## **6.2. Sugestões para Futuros Trabalhos**

A partir dos resultados apresentados neste trabalho, são propostas as seguintes ideias para trabalhos futuros:

- Estender a formulação e aplica-la em problemas de grandes deslocamentos;
- Estender a formulação e aplica-la em problemas da mecânica da fratura;
- Estender a formulação e aplica-la em problemas de otimização de forma;
- Estender a formulação e aplica-la em problemas tridimensionais;
- Realizar um estudo de sensibilidade dos parâmetros da otimização;
- Melhorar as funções de otimização dos Algoritmos Genéticos ou testar outros métodos de otimização;

- Implementar a aproximação do contorno por meio do Método dos Mínimos Quadrados Móveis, obtendo uma discretização do contorno mais próxima do real em contornos curvos.

## REFERÊNCIAS

- ANDÚJAR, R.; JAUME, R.; VOJKO, K. *Beyond FEM: overview on physics simulation tools for structural engineers*. Em: *Technics Technologies Education Management* 6.3, pp. 555–571, 2011.
- ARAÚJO, A., MARTINS, F., VÉLEZ, W., PORTELA, A. *Automatic mesh-free boundary analysis: Multi-objective optimization*. Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 125, pp. 264-279, 2021.
- ATLURI, S. N.; HAN, Z. D.; RAJENDRAN, A.M. *A New Implementation of the Meshless Finite Volume Method Through the MLPG “Mixed” Approach*. Em: *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences* 6.1, pp. 491–513, 2004.
- ATLURI, S.N.; LIU, H.T.; HAN, Z.D. *Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) mixed collocation method for elasticity problems*. Em: *Cmc-Tech Science Press-* 4.3, p. 141, 2006a.
- ATLURI, S.N.; LIU, H.T.; HAN, Z.D. *Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) mixed finite difference method for solid mechanics*. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 15.1, p. 1, 2006b.
- ATLURI, S.N.; ZHU, T. *A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics*. Em: *Computational Mechanics* 22.2, pp. 117–127, 1998.
- ATLURI, S.N.; ZHU, T. *New Concepts in Meshless Methods*. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47, pp. 537-556, 2000.
- BAGHERI, A.; EHSANY, R.; MAHMOODABADI, M.J.; BARADARAN, G. H. *Optimization of meshless local petrov-galerkin using genetic algorithm for 3d elasto-static problems*. *International Journal of Engineering*, 24(2):143-153, 2011.
- BARADARAN, G.H.; MAHMOODABADI, M.J. *Optimal pareto parametric analysis of two dimensional steady-state heat conduction problems by mlpg method*. *International Journal of Engineering*, 22(4):387-406, 2009.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. *Elastic Crack Growth In Finite Elements With Minimal Remeshing*. Em: *International journal for numerical methods in engineering* 45.1, 601–620, 1999.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y.Y.; GU, L. *Element-free Galerkin methods*. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37.2, pp. 229–256, 1994.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements An Introductory Course, 2nd Ed.* WIT Press, Ashurst Lodge, UK, 1992.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.; WROBEL, L.C. *Boundary Element Techniques*. Springer, Berlin Heidelberg, 1984.

- BREBBIA, C.A.; TREVELYAN, J. *On The Accuracy And Convergence Of Boundary Element Results For The Floyd Pressure Vessel Problem*. Em: *Computers & Structures* Vol. 24, pp 513-516, 1986.
- CARAMIA, M.; DELL'OLMO, P. *Multi-objective Management in Freight Logistics: Increasing Capacity, Service Level and Safety with Optimization Algorithms*. Springer, 2008.
- CHEN, J.S.; MICHAEL, H.; CHI, S.W. *Meshfree Methods: Progress Made after 20 Years*. Em: *Journal of Engineering Mechanics* 143.5, 2017.
- CHEN, WEN. “*New RBF collocation methods and kernel RBF with applications*”. Em: *Meshfree methods for partial differential equations*. Springer, Berlin Heidelberg, pp. 75–86, 2003.
- CHEN, Y.; LEE, J.D.; ESKANDARIAN, A. *Meshless Methods in Solid Mechanics. Vol. 1*. Springer Science Business Media, New York, NY, USA, 2006.
- EBRAHIMNEJAD, M.; FALLAH, N.; KHOEI, A.R. *Adaptive refinement in the meshless finite volume method for elasticity problems*. *Computers & Mathematics with Applications*, 69(12):1420-1443, 2015.
- FINLAYSON, B.A. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Vol. 87. Academic Press, New York and London, 1972.
- GINGOLD, R.A.; MONAGHAN, J.J. *Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to NonSpherical Stars*. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181, 375-389, 1977.
- GÓMEZ, W. H. V. *Numerical solution of elasticity problems by a local mesh-free multi-objective optimization method*. Tese de doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-14A/19, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 100p, 2019.
- HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. *Practical Genetic Algorithms*. John Wiley & Sons, 2004.
- HWANG, C.L.; MASUD, A. S. M. *Multiple Objectives Decision Making—Methods and Applications*. Springer, 1979.
- JAMIL, M.; Ng, E.Y.K. *Evaluation of Meshless Radial Basis Collocation Method (RBCM) for Heterogeneous Conduction and Simulation of Temperature Inside the Biological Tissues*. Em: *International Journal of Thermal Sciences* 68, pp. 42–52, 2013.
- KANSA, E.J. *Multiquadrics: A Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics*. Em: *Computers Math. Applic.*, 19(8-9), 127–145, 1990.
- KELNER, V.; LEONARD, O. *Application of genetic algorithms to lubrication pump stacking design*. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 168.1, pp. 255–265, 2004.

- KOTHNUR, V.S.; MUKHERJEE, S.K.; MUKHERJEE, Y.X. *Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method*. Em: *International Journal of Solids and Structures*, 36 pp. 1129-1147, 1999.
- LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. *Surfaces generated by moving least squares methods*. Em: *Mathematics of computation* 37.155, pp. 141–158, 1981.
- LEE, S.H.; YOON, Y.C. *Meshfree Point Collocation Method for Elasticity and Crack Problems*. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61, 22—48, 2004.
- LI, G.; ALURU, N.R. *Boundary cloud method: A combined scattered point/boundary integral approach for boundary-only analysis*. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 191. 2337-2370, 2002.
- LIBERSKY, L.D.; PETSCHKE, A.G.; CARNEY, T.C.; HIPPI, J.R.; ALLAHADADI, F.A. *High Strain Lagrangian Hydrodynamics*. Em: *J. Comput. Phys.*, 109, 67-75, 1993.
- LIEW, K.M.; CHENG, Y.; KITIPORNCHAI, S. *Boundary element-free method (BEFM) and its application to two-dimensional elasticity problems*. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 65, n. 8, pp. 1310-1332, 2006.
- LIU, G. R.; GU, Y. T. *A meshfree method: meshfree weak–strong (MWS) form method, for 2-D solids*”. Em: *Computational Mechanics* 33.1, pp. 2–14, 2003.
- LIU, G. R.; GU, Y. T. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer, Dordrecht, Netherlands, 2005.
- LIU, G.R. *Mesh free methods: Moving beyond the finite element method*. CRC press, Boca Raton, USA, 2002.
- LIU, G.R. *MESHFREE METHODS – Moving beyond the Finite Element Method*, 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.
- LIU, G.R.; Y.T. GU. *A Local Point Interpolation Method for Stress Analysis of Two-Dimensional Solids*. Em: *Structural Engineering and Mechanics* 11.2, 221—236, 2001.
- LIU, G.R.; YAN, L; WANG, J.G.; GU, Y.T. *Point Interpolation Method Based on Local Residual Formulation Using Radial Basis Functions*. Em: *Structural Engineering and Mechanics* 14, 713—732, 2002a.
- LIU, W.K.; JUN, S.; ZHANG, Y.F. *Reproducing Kernel Particle Methods*. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20, 1081—1106, 1995.
- LIU, XIN; LIU, G.R.; KANG, TAI; LAM, K.Y. *Radial basis point interpolation collocation method for 2-d solid problem*. Em: *Proceedings of the 1st Asian Workshop on Meshfree Methods*. Vol. 16. World Scientific, p. 18, 2002b.
- LUCY, L.B. *A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis*, Em: *Astronomical Journal*, 82(12), 1013-1024, 1977.
- MCCALL, J. *Genetic Algorithms For Modelling And Optimization*. Journal of

Computational and Applied Mathematics 184.1, pp. 205–222, 2005.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. *Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements*. Em: *Computational Mechanics* 10, 307–318, 1992.

OLIVEIRA JR, V. G. **Formulação Cinemática Local de Métodos sem Malha**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-024A/15, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 74p, 2015.

OLIVEIRA, T. S. **Método sem malha local – Colocação na forma fraca em elasticidade linear**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-010A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 67p, 2016.

OLIVEIRA, T. S.; PORTELA, A. *Weak-Form Collocation - a Local Meshless Method in Linear Elasticity*. Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 73, pp. 144-160, 2016.

OLIVEIRA, T.; VÉLEZ, W.; SANTANA, E.; ARAUJO, T.; MENDONÇA, A.; PORTELA, A. *A local mesh free method for linear elasticity and fracture mechanics*, Em: *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V 101, pp. 221-242, 2019.

ONATE, E.; IDELSOHN, S.; ZIENKIEWICZ, O.Z.; TAYLOR, R.L. *A finite Point Method in Computational Mechanics: Applications to Convective Transport and Fluid Flow*. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 3839–3867, 1996.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. *The dual boundary element method: effective implementation for crack problems*, Em: *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 33:1269–87, 1992.

PORTELA, A.; CHARAFI, A. *Finite elements using Maple: a symbolic programming approach*. 1a ed. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2002.

RAO, S. S. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. John Wiley & Sons, 2009.

REDDY, N. *An introduction to the Finite Element Method*. 3a ed. Vol. 3. McGraw-Hill, p. 761, 2006.

RINGUEST, J. L. *Multiobjective Optimization: Behavioral and Computational Considerations*. Kluwer, 1992.

SANTANA, E.; OLIVEIRA, T.; VÉLEZ, W.; ARAÚJO, A.; MARTINS, F.; PORTELA, A. *A Local Mesh Free Numerical Method with Automatic Parameter Optimization*. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 113, p. 55-71, 2020.

SAWARAGI, Y.; NAKAYAMA, H.; TANINO, T. *Theory of Multiobjective Optimization*. Academic Press, 1985.

SILVA, A.A. (2020). **Otimização multiobjetivo do Método de Contorno Sem Malha em problemas de potencial**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-11A/20, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de

Brasília, Brasília, DF, 75 p.

SLADEK, J.; STANAK, P.; HAN, Z-D; SLADEK, V; ATLURI, S.N; *Applications of the MLPG method in engineering & sciences: a review*. Em: *Comput. Model. Eng. Sci* 92, pp. 423–475, 2013.

STEUER, R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. Wiley, 1986.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. *The design and analysis of the Generalized Finite Element Method*. Em: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 181.1, pp. 43–69, 2000.

SWEGLE, J.W.; HICKS, D.L.; ATTAWAY, S.W.; *Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis*, Em: *Journal of Computational Physics*, 116(1), 123–134, 1995.

ZHANG, X.; LIU, X.H.; SONG, K.Z.; LU, M.W. *Least-Squares Collocation Meshless Method*, Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(9), 1089–1100, 2001.

ZHU, T.; ZHANG, J.; ATLURI, S.N. *A Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization Approach*, Em: *Computational Mechanics*, 21, 223–235, 1998.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. *The Finite Element Method - Volume 1: The Basis*, 5<sup>th</sup> ed. *Butterworth-Heinemann Press*, 2000.

ZINGG, D.; NEMEC, M.; PULLIAM, T. *A comparative evaluation of genetic and gradient-based algorithms applied to aerodynamic optimization*, *European Journal of Computational Mechanics* 17, 103–126, 2008.

ZONGMIN, W.U. *Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions*. Em: *Approximation Theory and its Applications* 8.2, pp. 1–10, 1992.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A – Implementação no MATLAB

### A.1 – Viga em Balanço

```
% OTIMIZAÇÃO DO BENCHMARK da Viga em Balanço

clear all;

% função a ser otimizada (MCSM)
FitnessFunction = @MCSMVIGA;
% número de variáveis de decisão
numberOfVariables=101;

% vetor de irregularidade
Nodal irregularity coefficients
ml(1:(numberOfVariables-5))=[-0.7]; % Limite inferior
mu(1:(numberOfVariables-5))=[0.7]; % Limite superior

lb(1:numberOfVariables) = [04 04 04 04 3.05 ml]; % vetor dos valores
mínimos permitidos para variáveis de decisão [N1 N2 N3 N4 alfas cn1 cn2 ...
cnN]
ub(1:numberOfVariables) = [24 24 24 24 48 mu]; % vetor dos valores máximos
permitidos para variáveis de decisão [N1 N2 N3 N4 alfas cn1 cn2 ... cnN]

A = []; b = [];
Aeq = []; beq = [];
nonlcon = [];

% Definição do tamanho da população, range da população inicial e número de
gerações

options = gaoptimset('PopulationSize',150,'PopInitRange',[lb;ub],...
                    'FitnessScalingFcn',@fitscalingrank,...
                    'SelectionFcn',@selectiontournament,...
                    'Generations',7,'TolFun',1e-6,...
                    'UseParallel',true,...
                    'PlotFcns',{@gaplotpareto,@gaplotstopping});
options.DistanceMeasureFcn = {@distancecrowding,'genotype'};
[x,Fval,exitFlag,Output,population,scores] =
gamultiobj(FitnessFunction,numberOfVariables,A, ...
           b,Aeq,beq,lb,ub,options);
```

## A.2 – Placa com Furo Circular Centralizado

```
% OTIMIZAÇÃO DO BENCHMARK da Placa com Furo Circular Centralizado

clear all;

% função a ser otimizada (MCSM)
FitnessFunction = @MCSMPLACA;
% número de variáveis de decisão
numberOfVariables=101;

% vetor de irregularidade
Nodal irregularity coefficients
ml(1:(numberOfVariables-5))=[-0.7]; % Limite inferior
mu(1:(numberOfVariables-5))=[0.7]; % Limite superior

lb(1:numberOfVariables) = [04 04 04 04 04 4.05 ml]; % vetor dos valores
mínimos permitidos para variáveis de decisão [N1 N2 N3 N4 N5 alfas cn1 cn2
... cnN]
ub(1:numberOfVariables) = [21 21 21 21 21 42 mu]; % vetor dos valores
máximos permitidos para variáveis de decisão [N1 N2 N3 N4 N5 alfas cn1 cn2
... cnN]

A = []; b = [];
Aeq = []; beq = [];
nonlcon = [];

% Definição do tamanho da população, range da população inicial e número de
gerações

options = gaoptimset('PopulationSize',150,'PopInitRange',[lb;ub],...
    'FitnessScalingFcn',@fitscalingrank,...
    'SelectionFcn',@selectiontournament,...
    'Generations',7,'TolFun',1e-6,...
    'UseParallel',true,...
    'PlotFcns',{@gaplotpareto,@gaplotstopping});
options.DistanceMeasureFcn = {@distancecrowding,'genotype'};
[x,Fval,exitFlag,Output,population,scores] =
gamultiobj(FitnessFunction,numberOfVariables,A, ...
    b,Aeq,beq,lb,ub,options);
```