

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DO ENLACE DE DESCIDA COOPERATIVO
EM SISTEMAS CELULARES MIMO-OFDMA**

Edgar Barbosa de Souza

Brasília, agosto de 2009

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ANÁLISE DO ENLACE DE DESCIDA COOPERATIVO
EM SISTEMAS CELULARES MIMO-OFDMA**

Edgar Barbosa de Souza

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Elétrica como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Engenharia Elétrica*

Banca Examinadora

Prof. Dr. Robson Domingos Vieira, ENE/UnB

Orientador

Prof. Dr. Paulo Henrique P. de Carvalho, ENE/UnB

Co-orientador

Prof. Dr. André Noll Barreto, ENE/UnB

Examinador interno

Prof. Dr. Paulo S. R. Diniz, COPPE/UFRJ

Examinador externo

FICHA CATALOGRÁFICA

SOUZA, EDGAR BARBOSA DE

Análise do Enlace de Descida Cooperativo

em Sistemas Celulares MIMO-OFDMA. [Distrito Federal], 2009.

x, 68p., 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre). Dissertação de Mestrado.

Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica.

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| 1. Transmissão cooperativa | 2. Alocação de recursos |
| 3. MIMO | 4. OFDM |
| 5. Capacidade de canal | 6. Otimização |
| I. ENE/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SOUZA, E. B. (2009). Análise do Enlace de Descida Cooperativo em Sistemas Celulares MIMO-OFDMA. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica com ênfase em Telecomunicações, Publicação PPGENE.DM - 388/09, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 68p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Edgar Barbosa de Souza.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Análise do Enlace de Descida Cooperativo em Sistemas Celulares MIMO-OFDMA.

GRAU / ANO: Mestre / 2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Edgar Barbosa de Souza
Departamento de Engenharia Elétrica
Campus Universitário Darcy Ribeiro
Caixa Postal 4386 – CEP: 70919-970
Brasília - Distrito Federal - Brasil

Dedicatória

Aos meus pais, com carinho.

Edgar Barbosa de Souza

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus, pela direção e pela proteção.

À minha família, pelo incentivo durante todo o período em que eu estive envolvido com este trabalho e pelo grande apoio durante o tempo em que eu estive longe.

Ao meu amigo Robson, pelos conselhos, pela dedicação ao trabalho, pela perseverança, pela enorme força de vontade em superar os desafios, com quem eu tive a oportunidade de compartilhar tanto as vitórias quanto os momentos mais difíceis desta caminhada.

Ao Prof. Paulo Portela, por tantos anos de trabalho em equipe.

Ao Prof. Paulo Diniz, por ter contribuído de maneira fundamental na abertura de portas que mudaram o rumo de minha carreira profissional.

Aos amigos do Departamento de Telecomunicações da École Supérieure d'Électricité e da Chaire Alcatel-Lucent, por terem me oferecido um excelente ambiente de pesquisa e colaboração.

Aos amigos do Instituto Nokia de Tecnologia, pelos incontáveis momentos de descontração e pelo enorme apoio na reta final do trabalho.

Meus sinceros agradecimentos a todos!

Edgar Barbosa de Souza

RESUMO

O emprego de múltiplas antenas em sistemas de comunicação sem fio ponto-multiponto pode proporcionar um grande aumento da eficiência espectral. Contudo, esta melhoria não é observada em sistemas celulares com reuso de frequência devido à interferência intercelular. Nestes casos, a cooperação entre as estações base é vista como uma das possíveis soluções para melhorar o desempenho do sistema. Dentro desse contexto, este trabalho apresenta uma análise de desempenho do enlace de descida de um sistema celular com uma única portadora em que múltiplas estações base transmitem, ao mesmo tempo, informações a múltiplos terminais. O modelo de sistema (conhecido na literatura como MIMO Cooperativo) considera que os terminais têm uma única antena e que as estações base têm múltiplas antenas e estão conectadas a uma estação central. São analisadas estratégias para alocação de potência de acordo com o conhecimento que a estação central tem a respeito dos canais sem fio entre as estações base e os terminais (conhecimento de todas as realizações dos canais, conhecimento das estatísticas dos canais e nenhum conhecimento dos canais). Esta análise inicial motiva uma proposta de extensão das estratégias de alocação para sistemas com múltiplas portadoras. A probabilidade de interrupção é adotada como o principal indicador de desempenho do sistema, sendo avaliada ora analiticamente, ora por meio de simulações.

ABSTRACT

The deployment of multiple antennas in point-to-multipoint wireless communication systems may increase the spectral efficiency. However, such gains are not observed in cellular systems with frequency reuse due to the intercell interference. In these situations, cooperation between base stations is considered as a candidate solution to improve system's performance. Within this context, this work presents the performance analysis of the downlink in single-carrier cellular systems where multiple base stations transmit information to multiple terminals at the same time. The system model (known in the literature as Network MIMO) considers single-antenna terminals and multi-antenna base stations which are connected to a central station. We study strategies for power allocation according to the knowledge of the central station regarding the wireless channels between the base stations and the terminals (full channel state information, partial channel state information and no channel state information). These initial studies motivate the proposal of extended resource allocation strategies for multi-carrier systems. The outage probability is adopted as the system performance indicator, being calculated analytically or through simulations.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Ilustração da definição de função convexa	5
3.1	Canal Gaussiano	12
3.2	Capacidade do canal Gaussiano em função da relação sinal-ruído	14
3.3	Canais Gaussianos paralelos	14
3.4	Alocação ótima de potência em canais paralelos	16
3.5	Sistema MIMO.....	18
3.6	Decomposição do canal MIMO em canais paralelos independentes.....	19
3.7	Capacidade em função da probabilidade de interrupção	21
3.8	Caracterização da região de capacidade [1].....	24
4.1	Modelo do sistema	25
4.2	Gráfico de r_k em função de λ_k para potências fixas e capacidade requerida igual a 1 bit por uso do canal (à esquerda) e 2 bits por uso do canal (à direita)	33
4.3	Gráfico de ϕ_{bk} em função de p_{bk} para dois terminais	35
4.4	Probabilidade de interrupção em função da SNR com capacidades simétricas para 2 antenas (à esquerda) e 4 antenas (à direita) por estação base.....	37
4.5	Probabilidade de interrupção em função da SNR com capacidades assimétricas para 2 antenas (à esquerda) e 4 antenas (à direita) por estação base	38
4.6	Probabilidade de interrupção em função da SNR com atenuação nos enlaces para 2 antenas (à esquerda) e 4 antenas (à direita) por estação base.....	39
4.7	Cenário de simulação.....	40
4.8	Probabilidade de interrupção em função da potência de transmissão para $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz (à esquerda) e para $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz (à direita).....	41
4.9	Probabilidade de interrupção em função da potência de transmissão para $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz (à esquerda) e para $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz (à direita).....	41
4.10	Probabilidade de interrupção em função da distância para alguns valores de potência de transmissão	42
4.11	Mapa da probabilidade de interrupção para $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz (à esquerda) e para $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz (à direita).....	43
5.1	Probabilidade de interrupção do sistema em função da SNR por estação base para diferentes quantidades de portadoras	50
5.2	Probabilidade de interrupção do sistema em função número de portadoras para diferentes níveis de relação sinal-ruído	51
5.3	Probabilidade de interrupção do sistema (com 4 antenas por estação) em função da SNR por estação base para diferentes quantidades de portadoras.....	52

5.4	Probabilidade de interrupção do sistema em função número de portadoras para diferentes níveis de relação sinal-ruído	53
5.5	Probabilidade de interrupção em função da SNR com 2 antenas por estação base para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal no cenário com conhecimento das realizações do canal	55
5.6	Probabilidade de interrupção em função da SNR com 2 portadoras para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal	55
5.7	Probabilidade de interrupção em função da SNR com 4 portadoras para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal	56
5.8	Probabilidade de interrupção em função da SNR com 8 portadoras para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal	57
5.9	Probabilidade de interrupção em função da SNR com $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal com otimização do número de portadoras alocadas	58
5.10	θ_1 , θ_2 e N_{opt} em função da SNR com duas antenas por estação base, enlaces simétricos e $\gamma = [1 \ 1]$ bits por uso do canal (à esquerda) e $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal (à direita)	58
5.11	θ_1 , θ_2 e N_{opt} em função da SNR com duas antenas por estação base, enlaces assimétricos e $\gamma = [1 \ 1]$ bits por uso do canal (à esquerda) e $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal (à direita)	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO	2
2	OTIMIZAÇÃO CONVEXA	3
2.1	INTRODUÇÃO	3
2.2	PRINCÍPIOS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA	3
2.3	FUNÇÕES CONVEXAS	4
2.4	PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO CONVEXA	5
2.4.1	PROBLEMAS SEM RESTRIÇÕES	5
2.4.2	PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE	6
2.4.3	PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE	6
2.5	DUALIDADE	7
2.5.1	O PROBLEMA DUAL DE LAGRANGE	7
2.6	DECOMPOSIÇÃO DUAL	9
2.6.1	DECOMPOSIÇÃO DUAL DE PROBLEMAS SEM RESTRIÇÕES	9
2.6.2	DECOMPOSIÇÃO DUAL DE PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES	10
3	CAPACIDADE DE CANAIS SEM FIO	12
3.1	INTRODUÇÃO	12
3.2	CAPACIDADE DE SISTEMAS COM UM ÚNICO USUÁRIO	12
3.2.1	CANAL GAUSSIANO	12
3.2.2	CANAIS GAUSSIANOS PARALELOS	13
3.2.3	CANAIS INVARIANTES NO TEMPO	16
3.2.4	CANAIS COM DESVANECIMENTO	19
3.3	CAPACIDADE DE SISTEMAS MULTI-USUÁRIOS	22
3.3.1	CAPACIDADE TOTAL E CAPACIDADE SIMÉTRICA	23
4	COOPERAÇÃO EM SISTEMAS COM ÚNICA PORTADORA	25
4.1	INTRODUÇÃO	25
4.2	MODELO DO SISTEMA	25
4.2.1	CONHECIMENTO TOTAL DAS REALIZAÇÕES DOS CANAIS	28
4.2.2	CONHECIMENTO DAS ESTATÍSTICAS DOS CANAIS	30
4.2.3	NENHUM CONHECIMENTO DOS CANAIS	35
4.3	RESULTADOS	36
4.3.1	DESEMPENHO DO SISTEMA SOB CONDIÇÕES REALISTAS DE CANAL	38
5	COOPERAÇÃO EM SISTEMAS COM MÚLTIPLAS PORTADORAS	44

5.1	MODELO DO SISTEMA	44
5.1.1	CONHECIMENTO TOTAL DAS REALIZAÇÕES DOS CANAIS.....	45
5.1.2	CONHECIMENTO DAS ESTATÍSTICAS DOS CANAIS	48
5.1.3	NENHUM CONHECIMENTO DOS CANAIS.....	53
5.2	RESULTADOS	54
6	CONCLUSÕES	60
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	62
	ANEXOS.....	65
	A FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE UMA FORMA QUADRÁTICA.....	66

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas MIMO (do inglês, *multiple-input multiple-output*) têm sido um dos temas mais pesquisados no campo das comunicações sem fio durante os últimos anos. Isto se deve ao fato das antenas adicionais proporcionarem um grande aumento da eficiência espectral do sistema quando comparado ao desempenho de um sistema com apenas uma antena [2, 3]. Entretanto, estes impressionantes ganhos são observados apenas em sistemas com um único enlace, numa situação em que não existe nenhum tipo de interferência externa proveniente de outros enlaces. Os resultados de simulação apresentados em [4] mostram que, em um ambiente celular com reuso de frequência, a interferência intercelular pode diminuir bastante a eficiência espectral do sistema com múltiplas antenas.

A solução para o problema descrito anteriormente constitui um grande desafio a ser superado para melhorar o desempenho de sistemas de comunicação sem fio com vários usuários. Este desafio tem atraído cada vez mais atenção, tanto da academia quanto da indústria, à medida em que são definidos os requisitos e especificações técnicas das futuras tecnologias de sistemas móveis celulares. Tecnologias como LTE [5] e WiMAX [6], por exemplo, preveem o emprego de múltiplas antenas e múltiplas portadoras como parte do pacote de soluções técnicas que viabilizem serviços com elevadas taxas de transmissão e baixa latência. Para reduzir a interferência intercelular no enlace de descida, existem diversas propostas baseadas na cooperação entre estações base, também conhecida na literatura como processamento de sinal multicelular [7, 8, 9].

Em linhas gerais, a cooperação permite que o sinal a ser transmitido no enlace de descida seja processado de maneira distribuída nas estações base. Isto é possível graças à infra-estrutura das redes celulares, que consiste em estações base fixas e que, em geral, são conectadas a uma estação central por enlaces de fibra ótica. As altas taxas de transmissão destes enlaces fixos e a enorme capacidade de processamento das estações base abrem a oportunidade para que elas atuem de maneira coordenada. Contudo, conforme citado em [10], o estudo da capacidade de sistemas cooperativos com várias células, vários usuários, múltiplas antenas e, ainda, múltiplas portadoras resulta em problemas matemáticos muito complexos, com soluções difíceis de serem encontradas.

De fato, quando as estações base de uma rede celular operam de maneira cooperativa numa situação ideal (sem erros de estimação de canal, canais de retorno ideais, etc), pode-se aplicar a codificação DPC (do inglês, *dirty paper coding*) para maximizar a capacidade do sistema [11]. Quando a codificação DPC é aplicada ao sinal transmitido de maneira conjunta em todas as estações base, demonstra-se que esta é a solução ótima para altos níveis de relação sinal-ruído. Apesar da utilização desta técnica em sistemas reais ser inviável, os resultados teóricos têm sido analisados como referência de desempenho para técnicas sub-ótimas.

Embora o conhecimento perfeito do canal tanto nos terminais quanto nas estações base e na

estação central seja impossível de se conseguir em sistemas reais, este tem sido um dos requisitos básicos para a maioria dos modelos de cooperação propostos. Dessa forma, seria necessário que as informações a respeito dos canais que, em geral, estão disponíveis nos terminais, sejam enviadas às estações base e, eventualmente, a outros elementos da rede. Em condições reais, tais informações não serão perfeitas devido a erros de estimação, sequências de treinamento não-ideais, atraso no enlace de retorno, etc. Considerando alguns destes efeitos, os autores em [12] fazem um abrangente estudo da otimização do enlace de descida cooperativo e analisam a alocação ótima de recursos em diferentes cenários.

1.1 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho se propõe a analisar estratégias de alocação de recursos que minimizam a probabilidade de interrupção de sistemas celulares cooperativos. Primeiramente, é realizado um estudo detalhado dos algoritmos apresentados em [13] em que os autores propõem estratégias de alocação de recursos para sistemas com uma única portadora. São revistas as estratégias propostas para três cenários distintos, nos quais 1) a estação central tem pleno conhecimento de todas as realizações dos canais, 2) são conhecidas apenas as estatísticas dos canais e, por último, 3) a estação central não tem nenhum conhecimento a respeito dos canais. O cenário em que há apenas o conhecimento das estatísticas dos canais é concebido como um modelo mais realista, pois assume-se que as estatísticas só mudam após um longo período de tempo. Neste caso, a capacidade extra requerida para o canal de retorno é bem pequena. O modelo de sistema apresentado em [13] tem seu desempenho avaliado sob condições de simulação mais realistas e os resultados obtidos em [14] também são apresentados neste trabalho. Os estudos realizados para sistemas de única portadora motivam a proposta de extensão para estratégias de alocação que considerem múltiplas portadoras. O algoritmo proposto e os resultados obtidos em [15] também são reapresentados neste trabalho.

Sendo assim, os Capítulos 2 e 3 se dedicam ao estudo de tópicos em otimização convexa e em capacidade de canais sem fio, respectivamente. O domínio destas ferramentas básicas é fundamental para uma ampla compreensão do modelo de cooperação do enlace de descida estudado no Capítulo 4. O modelo em questão já foi proposto na literatura e são revistas as estratégias de alocação de recursos em sistemas de comunicação com uma única portadora. Ao final deste capítulo é apresentada uma contribuição na análise de desempenho do modelo existente em cenários de simulação realistas. O Capítulo 5 apresenta as contribuições que foram feitas com o objetivo de estender as estratégias de alocação para sistemas com múltiplas portadoras. No Capítulo 6 são feitas as considerações finais deste trabalho e são apresentadas algumas perspectivas futuras para o tema de pesquisa e propostas de extensão deste trabalho.

2 OTIMIZAÇÃO CONVEXA

2.1 INTRODUÇÃO

Nestes capítulos são revistos alguns tópicos em otimização convexa. São estudados a seguir a estrutura padrão dos problemas de otimização matemática, um método de resolução analítica aplicado a problemas de otimização convexas baseado no princípio da dualidade e duas estratégias de decomposição de um problema grande (em termos do número de variáveis) em vários problemas menores.

Este capítulo é bastante relevante para o trabalho, uma vez que ele apresenta fundamentos matemáticos que serão usados na modelagem de sistemas de comunicação cooperativa dos próximos capítulos. As poderosas técnicas de resolução de problemas de otimização que são estudadas aqui são aplicadas nos próximos capítulos e, por isso, é importante conhecê-las para que elas sejam bem compreendidas e usadas de maneira correta.

2.2 PRINCÍPIOS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Um problema de otimização tem a seguinte forma padrão [16]:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f_0(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeito a} && f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{2.1}$$

O problema consiste de:

- um vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ cujos elementos são as variáveis de otimização do problema;
- uma função objetivo $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$;
- $m + p$ funções que representam as restrições do problema.

O vetor \mathbf{x}^{opt} é a solução do problema (2.1) se, dentre todos os vetores que satisfazem às restrições, a função objetivo avaliada em \mathbf{x}^{opt} tiver o menor valor, isto é:

$$f_0(\mathbf{x}^{\text{opt}}) \leq f_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \mid f_1(\mathbf{x}) \leq b_1, \dots, f_i(\mathbf{x}) \leq b_i. \tag{2.2}$$

Os problemas de otimização podem ser classificados de acordo com a forma da função objetivo e das funções de restrição e, usando este critério, podem-se distinguir três tipos básicos de problemas:

- *Problemas lineares*: a função objetivo e as funções de restrição são lineares, isto é, satisfazem à seguinte equação:

$$f_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}), \quad i = 0, \dots, m, \quad (2.3)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

- *Problemas não-lineares*: são todos os problemas que não satisfazem à equação (2.3);
- *Problemas convexos*: a função objetivo e as m desigualdades de restrição satisfazem à seguinte condição de convexidade:

$$f_i(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{y}) \leq \theta f_i(\mathbf{x}) + (1 - \theta) f_i(\mathbf{y}), \quad i = 0, \dots, m, \quad (2.4)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e para todo $\theta \in [0, 1]$, e as p igualdades de restrição são funções afins¹. Este caso pode ser visto como uma generalização dos problemas lineares.

Existe uma teoria matemática bastante sólida que provê soluções de maneira extremamente eficiente para os problemas lineares e o conjunto de aplicações deste caso é muito amplo. Quanto aos problemas convexos, pode-se dizer o mesmo para um grande conjunto de problemas. Também existem diversas aplicações para os problemas não-lineares, embora ainda não haja métodos eficientes para solucionar um problema não-linear genérico sem envolver alguma relação de compromisso.

Na literatura existem diversas referências que trazem uma vasta abordagem acerca destes três tipos de problemas de otimização [16, 17, 18], mas o objetivo principal deste capítulo é analisar algumas características básicas apenas dos problemas convexos.

2.3 FUNÇÕES CONVEXAS

Uma função convexa satisfaz à condição (2.4) e, além disso, seu domínio é um conjunto convexo. Um subconjunto \mathcal{S} de \mathbb{R}^n é dito convexo se:

$$\theta x + (1 - \theta)y \in \mathcal{S}, \quad \forall x, y \in \mathcal{S}, \quad \forall \theta \in [0, 1]. \quad (2.5)$$

O exemplo de uma função convexa é mostrado na Figura 2.1. A desigualdade em (2.4) implica que o segmento de reta entre $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está sempre acima da curva de $f(z)$. A função $f(z)$ é côncava se $-f(z)$ for convexa.

Há um grande número de funções convexas (ou côncavas) que podem exemplificar as definições acima, desde funções mais simples como exponenciais, potências e logaritmos, até funções mais complicadas cuja convexidade não é intuitiva, tais como normas e médias geométricas. A lista de propriedades das funções convexas [16] é bem extensa e não será analisada em detalhes aqui, pois tal análise não é o objetivo principal deste capítulo.

¹Função afim é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela expressão $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$

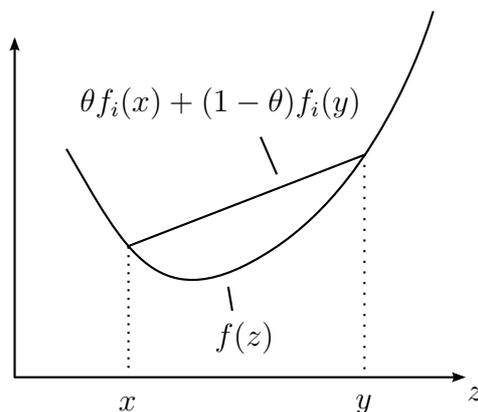


Figura 2.1: Ilustração da definição de função convexa

2.4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO CONVEXA

Conforme dito anteriormente, a característica principal desses problemas é a convexidade da função objetivo e das desigualdades de restrição. Outra característica fundamental é que todo mínimo local é também um mínimo global e a eficiência dos algoritmos de resolução deve-se principalmente a esta propriedade. Esta eficiência, aliada à confiabilidade dos métodos de resolução, é uma das grandes vantagens da formulação de um problema como sendo um problema de otimização convexa. Além disso, criam-se oportunidades para novas interpretações geométricas e possibilidades de implementação de métodos de resolução distribuídos.

2.4.1 Problemas sem restrições

Considere-se o seguinte problema de otimização:

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e continuamente diferenciável. A seguinte condição é necessária e suficiente para que \mathbf{x}^{opt} seja o ponto ótimo do problema:

$$\nabla f_0(\mathbf{x}^{\text{opt}}) = 0. \quad (2.7)$$

Assim, a resolução do problema de otimização se resume a encontrar a solução da equação (2.7) acima, que de fato é o conjunto de n equações com n variáveis. Há casos em que é possível resolver o problema analiticamente, mas na maioria das situações é necessário empregar algum método iterativo. O método empregado deve ser capaz de calcular a sequência minimizadora para o problema (2.6), que é a sequência de pontos $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ pertencentes ao domínio de f tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}^{(k)}) = f(\mathbf{x}^{\text{opt}}). \quad (2.8)$$

Em geral, o método é interrompido quando $f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}^{\text{opt}}) \leq \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ especifica a

precisão desejada para a solução. Exemplos clássicos para este caso são o método do gradiente descendente, método da inclinação descendente e o método de Newton [16].

Por outro lado, quando o problema de otimização consistir na maximização de uma função convexa, então a condição (2.7) não pode ser aplicada. Contudo, é possível mostrar que para uma função convexa f cujo domínio é o conjunto finito, fechado e convexo \mathcal{O} , o valor máximo – se existir – é alcançado num ponto localizado na borda de \mathcal{O} .

2.4.2 Problemas com restrições de igualdade

Um problema de otimização convexa com restrições de igualdade tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a} && \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e continuamente diferenciável, e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Considera-se que existem mais variáveis de otimização do que equações de restrição e que tais equações são mutuamente independentes. Dessa maneira, as seguintes condições são necessárias e suficientes para que \mathbf{x}^{opt} seja a solução do problema (2.9) se e somente se existir $\mathbf{v}^{\text{opt}} \in \mathbb{R}^p$ tal que:

$$\mathbf{Ax}^{\text{opt}} = \mathbf{b}, \tag{2.10}$$

$$\nabla f_0(\mathbf{x}^{\text{opt}}) + \mathbf{A}^T \mathbf{v}^{\text{opt}} = 0. \tag{2.11}$$

Solucionar as equações (2.10) e (2.11) é equivalente a solucionar o problema de otimização original (2.9). Assim como no caso da otimização sem restrições descrita anteriormente, são poucos os problemas que realmente podem ser resolvidos analiticamente. Para os demais problemas, três abordagens distintas podem ser seguidas.

A primeira abordagem consiste em eliminar as equações de restrição e reduzir o problema original em um problema equivalente sem restrições. Esta abordagem permite que os métodos citados na Seção 2.4.1 sejam diretamente empregados. A segunda abordagem baseia-se na resolução do problema dual (que será apresentado adiante neste capítulo). A essência da terceira abordagem está na aplicação de extensões do método de Newton que sejam capazes de lidar diretamente com as equações de restrição. A grande vantagem desta última abordagem é que ela é capaz de explorar a estrutura do problema original, que se perde nas abordagens anteriores.

2.4.3 Problemas com restrições de desigualdade

Considera-se o seguinte problema de otimização com restrições que incluam tanto equações quanto desigualdades:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a} && f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ &&& \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $f_0, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções convexas e continuamente diferenciáveis, e $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times n}$. A solução analítica para este problema será vista na próxima seção e baseia-se no princípio da dualidade. Outra opção é a utilização métodos de ponto interior que se baseiam na aplicação do método de Newton a uma sequência de problemas com restrições de igualdade [16].

2.5 DUALIDADE

Todo problema de otimização tem um problema dual associado a ele. Segundo o Teorema da Dualidade [18], se o problema de otimização original (também chamado de primal) tem uma solução ótima, então o problema dual também tem uma solução ótima e os valores ótimos correspondentes são iguais. Um dos benefícios trazidos por esta teoria é que a resolução do problema dual pode ser mais simples do que a resolução do problema primal.

Esta seção dedica-se à aplicação da teoria dos multiplicadores de Lagrange na formulação do problema dual e à resolução analítica do problema dual.

2.5.1 O problema dual de Lagrange

Considera-se o problema de otimização convexa na forma padrão (2.1). O Lagrangiano $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (2.1) é obtido por meio da modificação da função objetivo original, adicionando a ela uma soma ponderada das funções de restrição:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

onde μ_i é o multiplicador de Lagrange associado à i -ésima desigualdade e ν_i é o multiplicador de Lagrange associado à i -ésima igualdade.

A função dual de Lagrange $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como o mínimo valor do Lagrangiano (2.13) com relação a x :

$$g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(\mathbf{x}) \right). \quad (2.14)$$

Ainda que o problema primal não seja convexo, a função dual é sempre côncava e fornece limites inferiores para a solução ótima \mathbf{x}^{opt} do problema (2.1). Para cada par $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ com $\mu_i \geq 0$ tem-se que $g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \leq \mathbf{x}^{\text{opt}}$ e o melhor limite inferior que pode ser obtido a partir da função dual de Lagrange é encontrado resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && g(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \\ &\text{sujeito a} && \boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Caso o problema primal seja convexo, então o Teorema da Dualidade é válido e o ponto ótimo

do problema dual é o mesmo do problema primal; caso contrário, haverá uma diferença entre os dois pontos e essa diferença é chamada intervalo de dualidade.

O problema dual descrito por (2.15) pode ser interpretado como um problema sem restrições, cuja função objetivo recebe uma penalidade por violar as restrições do problema primal. São os multiplicadores de Lagrange que controlam a intensidade das penalidades e, ao mesmo tempo, atuam como variáveis de otimização no problema dual. Estas variáveis ajudam na busca pela solução ótima e, além disso, fornecem informações a respeito das variações na função objetivo causadas por variações nas restrições do problema.

Qualquer problema de otimização com funções objetivo e restrições diferenciáveis deve satisfazer a algumas condições de otimalidade. Estas são chamadas de condições *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) e devem ser válidas para qualquer conjunto de pontos ótimos dos problemas primal e dual. As condições KKT são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 f_i(\mathbf{x}^{\text{opt}}) &\leq 0, & i = 1, \dots, m \\
 h_i(\mathbf{x}^{\text{opt}}) &= 0, & i = 1, \dots, p \\
 \mu_i^{\text{opt}} &\geq 0, & i = 1, \dots, m \\
 \mu_i^{\text{opt}} f_i(\mathbf{x}^{\text{opt}}) &= 0, & i = 1, \dots, m \\
 \nabla f_0(\mathbf{x}^{\text{opt}}) + \sum_{i=1}^m \mu_i^{\text{opt}} \nabla f_i(\mathbf{x}^{\text{opt}}) + \sum_{i=1}^p \nu_i^{\text{opt}} \nabla h_i(\mathbf{x}^{\text{opt}}) &= 0, & (2.16)
 \end{aligned}$$

As duas primeiras condições indicam que \mathbf{x}^{opt} pertence ao conjunto de soluções possíveis do problema primal. A terceira condição confirma a convexidade do Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ associado ao problema primal em relação a \mathbf{x} . Por fim, as duas últimas condições asseguram que \mathbf{x}^{opt} é o ponto que minimiza $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ em relação a \mathbf{x} , pois o gradiente do Lagrangiano é igual a zero no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\text{opt}}$.

No caso específico dos problemas de otimização convexa com funções diferenciáveis, quaisquer pontos \mathbf{x}^{opt} e $(\boldsymbol{\mu}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\nu}^{\text{opt}})$ que satisfaçam às condições KKT serão os pontos ótimos dos problemas primal e dual, respectivamente. Além disso o intervalo de dualidade entre eles será igual a zero, pois pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 g(\boldsymbol{\mu}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\nu}^{\text{opt}}) &= \mathcal{L}(\mathbf{x}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\mu}^{\text{opt}}, \boldsymbol{\nu}^{\text{opt}}) \\
 &= f_0(\mathbf{x}^{\text{opt}}) + \sum_{i=1}^m \mu_i^{\text{opt}} f_i(\mathbf{x}^{\text{opt}}) + \sum_{i=1}^p \nu_i^{\text{opt}} h_i(\mathbf{x}^{\text{opt}}) \\
 &= f_0(\mathbf{x}^{\text{opt}}). & (2.17)
 \end{aligned}$$

Existem situações em que é possível encontrar o ponto ótimo do problema de otimização solucionando as condições KKT analiticamente. Nos demais casos é necessário aplicar algum método de otimização ao problema ou diretamente às condições de otimalidade.

2.6 DECOMPOSIÇÃO DUAL

O conceito de decomposição refere-se a um conjunto de técnicas que dividem um problema de otimização em vários problemas menores, que são resolvidos separadamente [18, 19]. Inicialmente, a decomposição foi proposta para permitir que um problema computacionalmente complexo, que exigisse uma enorme capacidade de processamento, pudesse ser resolvido por diversos processadores em série ou em paralelo. Posteriormente, novas aplicações foram encontradas para as técnicas de decomposição, que também passaram a ser empregadas para permitir que os métodos de solução pudessem ser implementados em sistemas separados e encontrassem o ponto ótimo de maneira descentralizada.

Apenas uma técnica de decomposição será analisada nesta seção: a decomposição dual, que introduz novas variáveis de otimização para permitir que o problema seja resolvido. Há, ainda, a decomposição primal, que manipula apenas as variáveis do problema original. Esta outra técnica não será estudada aqui, mas pode ser encontrada em [19]. No primeiro momento, a decomposição dual será aplicada a um problema de otimização sem restrições e, posteriormente, a um problema com restrições

2.6.1 Decomposição dual de problemas sem restrições

Para estudar este método de decomposição será estudado a seguir o exemplo que é originalmente apresentado em [19]. Considere-se o seguinte problema de otimização sem restrições:

$$\text{minimizar } f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ e \mathbf{y} são as variáveis de otimização. Analisando-se a estrutura do problema, nota-se que se a variável \mathbf{y} assumisse algum valor constante seria possível separar o problema nas variáveis de otimização \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 e, conseqüentemente, resolver os 2 subproblemas resultantes de maneira independente. É a variável \mathbf{y} que dificulta a decomposição do problema e impede que um algoritmo potencialmente mais simples seja aplicado na resolução do problema; por causa disso, \mathbf{y} é chamada de variável complicadora.

A partir destas observações a respeito do problema, define-se uma estratégia de resolução que será explicada a seguir. Serão introduzidas novas variáveis e restrições de igualdade ao problema original, que será reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \\ \text{sujeito a } & \mathbf{y}_1 = -\mathbf{y}_2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

As novas variáveis de otimização \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 podem ser interpretadas como versões locais da variável complicadora \mathbf{y} e as novas restrições asseguram que todas as versões locais sejam iguais.

O Lagrangiano associado ao novo problema de otimização (2.19) é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}) &= f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \\ &= [f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_1] + [f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_2].\end{aligned}\quad (2.20)$$

Observa-se que (2.20) é separável e pode-se definir os seguintes subproblemas para a variável dual $\boldsymbol{\mu}$ fixa:

$$\text{minimizar} \quad f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_1, \quad (2.21)$$

$$\text{minimizar} \quad f_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_2, \quad (2.22)$$

cujos pontos ótimos são, respectivamente, $g_1(\boldsymbol{\mu})$ e $g_2(\boldsymbol{\mu})$.

Agora, define-se o problema principal equivalente ao problema original em (2.19), em que a variável de otimização é a variável dual e que tem como função objetivo a soma dos valores ótimos de cada um dos subproblemas:

$$\text{maximizar} \quad g(\boldsymbol{\mu}) = g_1(\boldsymbol{\mu}) + g_2(\boldsymbol{\mu}). \quad (2.23)$$

O problema principal (2.23) pode ser solucionado com o emprego de um algoritmo iterativo. A cada iteração, o algoritmo deve resolver o subproblema (2.21), isto é, encontrar $\tilde{\mathbf{x}}_1$ e $\tilde{\mathbf{y}}_1$ que minimizam $f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$, e calcular o subgradiente de g_1 no ponto $\boldsymbol{\mu}$, que é igual a $\tilde{\mathbf{y}}_1$. Um procedimento semelhante deve ser realizado com relação ao subproblema (2.22) e, ao fim da iteração, a variável dual deve ser atualizada com o subgradiente de $g(\boldsymbol{\mu})$, que é a soma dos subgradientes de $g_1(\boldsymbol{\mu})$ e $g_2(\boldsymbol{\mu})$. Dessa maneira, tem-se o seguinte algoritmo de decomposição dual.

Algoritmo 1 Decomposição dual de problemas de otimização sem restrições

- 1: **repetir**
 - 2: **para** cada subproblema **faça**
 - 3: encontrar $\tilde{\mathbf{x}}_k$ e $\tilde{\mathbf{y}}_k$ que minimizam $f_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{y}_k$
 - 4: calcular o subgradiente de $g_k(\boldsymbol{\mu})$, que é $\tilde{\mathbf{y}}_k$
 - 5: **fim para**
 - 6: atualizar a variável dual $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} - \alpha_i(\tilde{\mathbf{y}}_2 + \tilde{\mathbf{y}}_1)$
 - 7: **até** convergir
-

2.6.2 Decomposição dual de problemas com restrições

Considere-se o caso em que os subproblemas estão acoplados por meio das restrições, e não por meio de algumas variáveis de otimização. Um problema nessas condições pode ser represen-

tado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && \sum_{k=1}^K f_k(\mathbf{x}_k) \\
& \text{sujeito a} && \mathbf{x}_k \in \mathcal{C}_k \\
& && \sum_{k=1}^K h_k(\mathbf{x}_k) \preceq \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde \mathcal{C}_k é o conjunto das possíveis soluções do k -ésimo subproblema, $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções convexas. Nesta situação, existem p restrições complicadoras que acoplam os subproblemas e impedem que eles sejam resolvidos separadamente.

Forma-se o Lagrangiano associado ao problema (2.24):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{k=1}^K f_k(\mathbf{x}_k) + \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\mu}_k^T h_k(\mathbf{x}_k) \\
&= \sum_{k=1}^K (f_k(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\mu}_k^T h_k(\mathbf{x}_k))
\end{aligned} \tag{2.25}$$

A inspeção da equação (2.25) revela que ela é separável e que é possível minimizar sobre $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$, e \mathbf{x}_k independentemente. Assim, para a variável dual $\boldsymbol{\mu}$ fixa, deve-se encontrar $g_k(\boldsymbol{\mu})$, que é a solução do k -ésimo subproblema:

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar} && f_k(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\mu}_k^T h_k(\mathbf{x}_k) \\
& \text{sujeito a} && \mathbf{x}_k \in \mathcal{C}_k,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

e, finalmente, encontra-se $g(\boldsymbol{\mu}) = \sum_k g_k(\boldsymbol{\mu})$.

Para calcular o subgradiente de $g_k(\boldsymbol{\mu})$, a sugestão de [19] é usar $h_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$, onde $\tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathcal{C}_k$. Por fim, a atualização da variável dual é realizada com base no subgradiente de $g(\boldsymbol{\mu})$, dado pela soma dos subgradientes de cada um dos subproblemas. O algoritmo de decomposição dual para problemas com restrições é apresentado logo a seguir.

Algoritmo 2 Decomposição dual de problemas de otimização com restrições

- 1: **repetir**
 - 2: **para** cada subproblema **faça**
 - 3: encontrar $\tilde{\mathbf{x}}_k$ que minimiza $f_k(\mathbf{x}_k)$, e calcular $h_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$
 - 4: **fim para**
 - 5: atualizar a variável dual $\boldsymbol{\mu} = \left[\boldsymbol{\mu} - \alpha_l \sum_{k=1}^K h_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) \right]_+$
 - 6: **até** convergir
-

3 CAPACIDADE DE CANAIS SEM FIO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão discutidos alguns tópicos relacionados à capacidade de canais sem fio. As ferramentas básicas utilizadas neste estudo estão fundamentadas nos conceitos de teoria da informação introduzidos por Claude Shannon, segundo os quais capacidade é a taxa máxima de comunicação que pode ser alcançada com uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena utilizando um código teórico [20]. Reciprocamente, Shannon também demonstrou em seu trabalho que não é possível atingir uma taxa de comunicação superior à capacidade e, ao mesmo tempo, manter a probabilidade de erro tão pequena quanto se queira. Uma observação importante a respeito desses resultados é que a demonstração deles não considera restrições, tais como atraso ou complexidade, existentes em sistemas reais e, por causa disso, eles normalmente são usados para determinar um limite superior para a taxa de comunicação que pode ser alcançada em um sistema real.

A maior parte deste capítulo se baseia em [21] e [22]. A primeira seção se dedica ao estudo da capacidade de canais sem fio em sistemas de comunicação com apenas um usuário, analisando primeiramente o canal Gaussiano, que constitui a base para o estudo dos demais casos. Em seguida são estudados separadamente os canais com múltiplas portadoras, com múltiplas antenas e canais com desvanecimento. Por fim, é analisada a capacidade de sistemas com vários usuários.

3.2 CAPACIDADE DE SISTEMAS COM UM ÚNICO USUÁRIO

3.2.1 Canal Gaussiano

O canal Gaussiano é considerado o modelo mais importante por constituir a base para os estudos da capacidade de canais sem fio com desvanecimento, conforme será visto posteriormente. A Figura 3.1 mostra um canal Gaussiano discreto no qual a saída Y num dado instante i é igual à soma da entrada X e do ruído W .

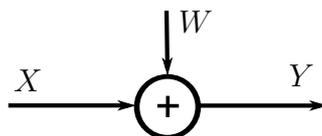


Figura 3.1: Canal Gaussiano

Neste canal, o ruído aditivo W , que é independente do sinal de entrada X , modela o efeito de diversos fenômenos e, pelo teorema do limite central, o efeito cumulativo do ruído pode ser

aproximado por uma distribuição normal. Portanto, a suposição de que W é uma variável aleatória gaussiana de média nula e variância σ^2 é válida e a saída do canal é dada por:

$$Y = X + W. \quad (3.1)$$

Costuma-se impor a este modelo uma restrição na energia (ou na potência) do sinal de entrada. Esta restrição é pertinente e pode, de maneira intuitiva, ser associada à limitação do amplificador de potência do transmissor. Sem esta consideração, a capacidade do canal seria infinita. Sendo assim, para cada conjunto (x_1, x_2, \dots, x_I) de símbolos transmitidos, é necessário que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^I x_i^2 \leq P. \quad (3.2)$$

Por definição [20], capacidade é o máximo da informação mútua¹ entre a entrada e a saída do canal calculado para todas as densidades de probabilidade da entrada que satisfazem a restrição de potência de (3.2). Assim, pode-se demonstrar que a capacidade do canal Gaussiano em bits por transmissão (ou bits por uso do canal) é igual a:

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right), \quad (3.3)$$

onde $I(X; Y)$ é a informação mútua entre a entrada e a saída, e $p(x)$ é a função densidade de probabilidade da entrada. Considerando que um sinal é constituído pelas componentes em fase e em quadratura, e definindo $\text{SNR} = \frac{P}{\sigma^2}$ como sendo a relação entre a potência do sinal e a potência do ruído, pode-se reescrever a equação (3.3) da seguinte maneira:

$$C = \frac{1}{2} \log (1 + \text{SNR}). \quad (3.4)$$

A Figura 3.2 mostra o comportamento da capacidade em função da relação sinal-ruído. Para valores bem pequenos de SNR há um aumento linear da capacidade, pois $\log(1 + \text{SNR}) \approx \text{SNR} \log(e)$; já para valores elevados, a capacidade aumenta logarithmicamente com a potência, uma vez que $\log(1 + \text{SNR}) \approx \log(\text{SNR})$.

3.2.2 Canais Gaussianos paralelos

Sejam os N canais Gaussianos independentes em paralelo conforme mostrados na Figura 3.3.

Considerando que a saída de cada canal é dada pela soma de sua respectiva entrada com ruído Gaussiano e que os ruídos de cada canal são mutualmente independentes, tem-se que para o n -ésimo canal:

$$Y_n = X_n + W_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

¹Informação mútua é a quantidade de informação que uma variável aleatória fornece a respeito de outra variável aleatória [20]

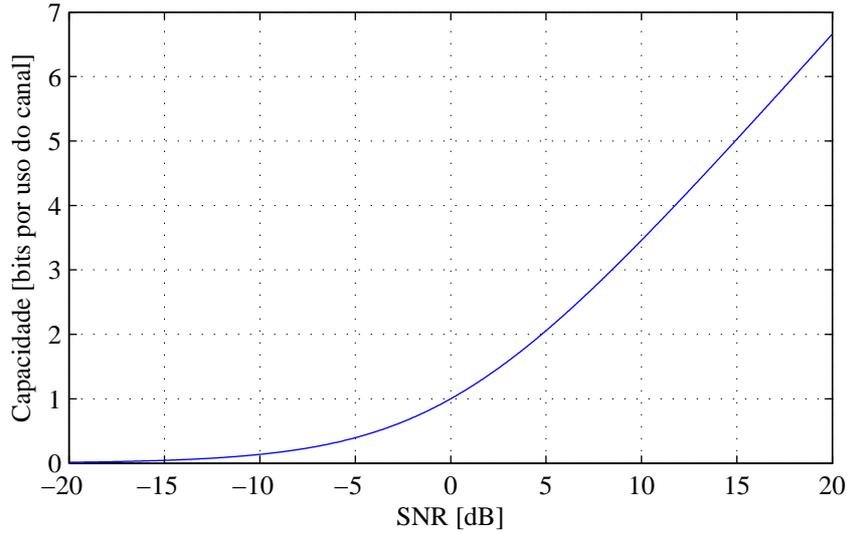


Figura 3.2: Capacidade do canal Gaussiano em função da relação sinal-ruído

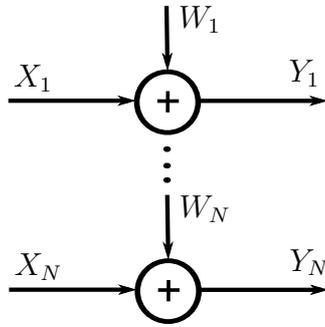


Figura 3.3: Canais Gaussianos paralelos

onde $W_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$. Será aplicada uma restrição à potência total do sinal de entrada de maneira que:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^N X_n^2 \right] \leq P. \quad (3.6)$$

Aplicando-se novamente a definição de capacidade, encontra-se a densidade de probabilidade do sinal de entrada a qual alcança a taxa máxima de comunicação com N canais Gaussianos paralelos. Assim, a capacidade é igual a [20]:

$$C = \max_{p(\mathbf{X})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{p_n}{\sigma_n^2} \right), \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$, $p_n = \mathbb{E}[X_n^2]$ e, além disso, a restrição de potência implica que $\sum_{n=1}^N p_n = P$. A equação (3.7) mostra claramente que a capacidade total é igual à soma das capacidades individuais de cada canal, mas este resultado só é válido quando os elementos de \mathbf{X} são mutualmente independentes e $X_n \sim \mathcal{N}(0, p_n)$.

A análise aqui apresentada é de suma importância para modelos que consistem em canais pa-

rales independentes. É comum encontrar aplicações cujo objetivo seja, por exemplo, distribuir a potência disponível entre os canais de modo a maximizar a capacidade. Este é o caso da alocação de potência em canais seletivos em frequência, conforme será visto posteriormente. Nesta seção será apresentada uma solução genérica para o problema da alocação de potência em canais Gaussianos paralelos e independentes, que é a solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{p_n}{\sigma_n^2} \right) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{n=1}^N p_n \leq P \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pode-se observar que tanto a função objetivo quanto a restrição são funções côncavas em relação às variáveis de otimização p_n e a solução do problema pode ser encontrada de maneira explícita com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange [16]. Sendo assim, o Lagrangiano associado ao problema (3.8) é formado da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}(\mu, P_1, \dots, p_n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{p_n}{\sigma_n^2} \right) - \frac{1}{\mu} \left(\sum_{n=1}^N p_n - P \right). \quad (3.9)$$

Agora, aplicando-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker conforme explicado na seção (2.5) e calculando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_n} = 0$ encontra-se a alocação ótima de potência, que é dada por:

$$p_n = (\mu - \sigma_n^2)_+, \quad (3.10)$$

onde $x_+ \triangleq \max(0, x)$, pois p_n jamais pode assumir valores negativos, e μ deve ser escolhido de modo a satisfazer a restrição de potência:

$$\sum_{n=1}^N (\mu - \sigma_n^2)_+ = P. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) não pode ser resolvida de maneira direta devido à restrição que faz com que os termos do somatório sejam não-negativos. Para contornar este problema, define-se o conjunto \mathcal{S} de índices n tal que n pertence a \mathcal{S} se $\mu \geq \sigma_n^2$. Semelhantemente, define-se $\bar{\mathcal{S}}$ como sendo o conjunto complementar ao conjunto \mathcal{S} . Assim, o somatório de (3.11) pode ser separado em dois somatórios da seguinte maneira:

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} (\mu - \sigma_n^2)_+ + \sum_{n \in \bar{\mathcal{S}}} (\mu - \sigma_n^2)_+ = P. \quad (3.12)$$

Analisando-se (3.12) nota-se que todos os termos do primeiro somatório sempre serão positivos e, portanto, pode-se remover a restrição que foi imposta anteriormente. Além disso, todos os termos do segundo somatório serão sempre nulos justamente devido à restrição. Logo, pode-se reescrever (3.12):

$$\sum_{n \in \mathcal{S}} (\mu - \sigma_n^2) = P. \quad (3.13)$$

Isolando μ , tem-se:

$$\mu = \frac{P + \sum_{n \in \mathcal{S}} \sigma_n^2}{|\mathcal{S}|} \quad (3.14)$$

onde $|\mathcal{S}|$ é a cardinalidade do conjunto \mathcal{S} e representa a quantidade de elementos que o conjunto contém.

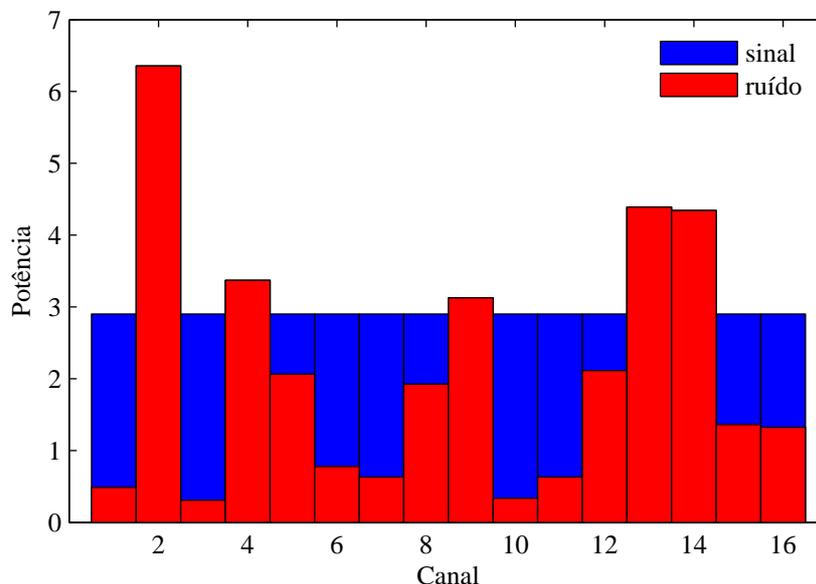


Figura 3.4: Alocação ótima de potência em canais paralelos

A Figura 3.4 mostra um exemplo de alocação ótima de potência em canais paralelos independentes. As barras vermelhas representam a potência do ruído de cada canal e as barras azuis representam a potência de transmissão do sinal em cada canal. A potência é sempre distribuída nos canais de menor ruído e pode ser feita uma analogia entre este processo e o preenchimento de uma vasilha com água. Por causa disto, esta estratégia de alocação é conhecida na literatura como *waterfilling* e o termo μ normalmente é associado ao nível da água [21].

3.2.3 Canais invariantes no tempo

3.2.3.1 Canais seletivos em frequência

Considere-se o canal $H(\omega)$ seletivo em frequência. Se este canal tiver L percursos separáveis e assumindo que a resposta impulsional deste canal não muda com o tempo, então pode-se representar o sinal recebido no instante i da seguinte forma:

$$y[i] = \sum_{l=0}^{L-1} h_l x[i-l] + w[i]. \quad (3.15)$$

Este canal, que tem uma largura de banda W , pode ser dividido em N subcanais independentes, cada um com largura de banda igual a W/N , de modo que a resposta em frequência de cada

subcanal seja constante [22]. Uma maneira eficiente de se fazer isso é aplicando a técnica OFDM [23] (do inglês, *orthogonal frequency division multiplexing*), que irá converter o canal seletivo em frequência num conjunto de canais planos independentes onde a relação sinal-ruído do n -ésimo subcanal é igual a:

$$\text{SNR} = \frac{p_n |H_n|^2}{\sigma_n^2}, \quad (3.16)$$

em que $|H_n|^2$ indica a intensidade da resposta em frequência, σ_n^2 é a potência do ruído e p_n é a potência alocada para o n -ésimo subcanal.

Assim, a capacidade do canal seletivo em frequência é igual à soma das capacidades de cada um dos canais paralelos independentes:

$$C = \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \frac{p_n |H_n|^2}{\sigma_n^2} \right). \quad (3.17)$$

No caso em que o transmissor conhece a resposta em frequência de todos os subcanais, a alocação ótima de potência que maximiza a capacidade é encontrada de maneira semelhante àquela que foi mostrada na Seção 3.2.2 e é a solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \frac{p_n |H_n|^2}{\sigma_n^2} \right) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{n=1}^N p_n \leq P. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A alocação de potência que maximiza a função objetivo e satisfaz à restrição em (3.18) é igual a:

$$p_n = \left(\mu - \frac{\sigma_n^2}{|H_n|^2} \right)_+, \quad (3.19)$$

e o multiplicador de Lagrange deve ser escolhido de modo que:

$$\sum_{n=1}^N \left(\mu - \frac{\sigma_n^2}{|H_n|^2} \right)_+ = P. \quad (3.20)$$

3.2.3.2 Transmissão e recepção com múltiplas antenas

Sistemas que utilizam várias antenas tanto na transmissão quanto na recepção, também chamados de sistemas MIMO (do inglês, *multiple-input multiple-output*), têm constituído o tema principal de muitos trabalhos que vêm sendo realizados nos últimos anos. O interesse crescente em torno destes sistemas deve-se ao fato de que eles podem prover o aumento da capacidade por meio de multiplexação [24, 3] ou o aumento de desempenho através da diversidade [25, 26]. Estes ganhos podem ser obtidos com a aplicação de técnicas de processamento de sinais que, quando empregadas no transmissor e/ou no receptor, exploram os novos graus de liberdade adicionados ao sistema pelas múltiplas antenas.

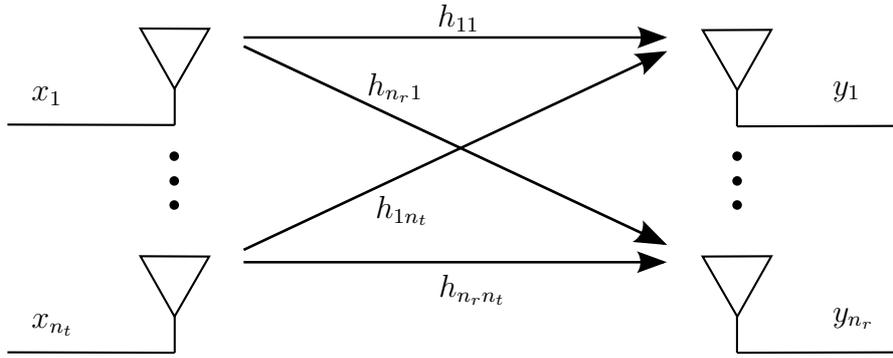


Figura 3.5: Sistema MIMO

Nesta sub-seção será estudada apenas a capacidade de sistemas como este que é apresentado na figura 3.5, com n_t antenas de transmissão, n_r antenas de recepção e canais planos cuja resposta impulsional é dada pela matriz $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{n_r \times n_t}$. Assim, a representação em banda base do sinal recebido pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{nr,1} & \dots & h_{nr,n_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n_r} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \quad (3.22)$$

onde $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n_t}$ é o sinal transmitido, $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_{n_r})$ é o ruído branco Gaussiano e $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n_r}$ é o sinal recebido. Este canal MIMO pode ser decomposto num conjunto de r canais paralelos independentes. O número r representa a quantidade de autovalores não-nulos desta matriz e é igual à quantidade de graus de liberdade espacial por segundo por Hertz [21]. Este número é igual ao posto da matriz \mathbf{H} e representa a dimensão do sinal que foi transmitido e distorcido pelo canal. Se a matriz \mathbf{H} tiver o posto completo, então o canal MIMO provê $r = \min(n_t, n_r)$ graus de liberdade espacial. O ganho de multiplexação é obtido através da multiplexação dos dados nestes canais paralelos e a seguir estão os procedimentos que, conforme [2], podem ser utilizados para se obter um conjunto de canais paralelos a partir de um canal MIMO.

Sabe-se que para qualquer matriz \mathbf{H} é possível obter a decomposição em valores singulares da seguinte maneira [27]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H, \quad (3.23)$$

em que $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n_r \times n_r}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n_t \times n_t}$ são matrizes unitárias² e $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_t}$ é a matriz diagonal dos valores singulares $\{\lambda_i\}$ de \mathbf{H} . Considere-se que o transmissor gera o sinal de entrada \mathbf{x} a partir do sinal original $\tilde{\mathbf{x}}$ por meio de seguinte transformação linear:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}. \quad (3.24)$$

²Se uma matriz \mathbf{M} é unitária, então $\mathbf{M}^H \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^H = \mathbf{I}$

Semelhantemente, o receptor aplica ao sinal recebido uma outra transformação linear, multiplicando a saída do canal \mathbf{y} por \mathbf{U}^H e obtendo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{U}^H \mathbf{y} \\ &= \mathbf{U}^H (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Agora, substituindo (3.23) e (3.24) em (3.25), tem-se:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{U}^H (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{U}^H\mathbf{w} \\ &= \mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}\end{aligned}\quad (3.26)$$

onde $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{U}^H\mathbf{w}$. Portanto, as operações realizadas tanto no transmissor quanto no receptor transformam o canal MIMO em r canais paralelos independentes, em que o i -ésimo canal tem entrada \tilde{x}_i , ganho λ_i , ruído \tilde{w}_i e saída \tilde{y}_i conforme mostrado na figura 3.6.

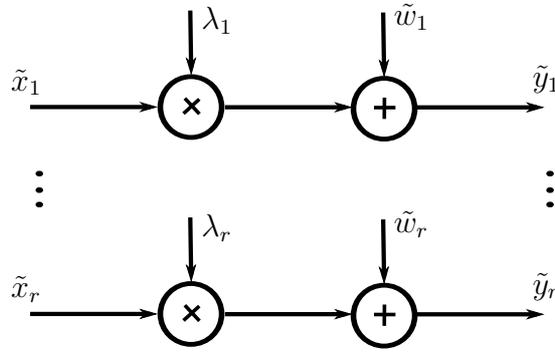


Figura 3.6: Decomposição do canal MIMO em canais paralelos independentes

Após a aplicação do procedimento descrito acima, tem-se um sistema cuja capacidade é muito semelhante aos casos já vistos na seções 3.2.2 e 3.2.3.1 e pode ser calculada pela expressão:

$$C = \sum_{i=1}^r \log \left(1 + \frac{p_i \lambda_i^2}{\sigma_i^2} \right). \quad (3.27)$$

Novamente, o método dos multiplicadores de Lagrange é aplicado para se encontrar o conjunto de potências $\{p_i\}$ que satisfazem à restrição $\sum_{i=1}^r p_i \leq P$ e que maximizam a expressão (3.27). Assim, definindo-se μ como sendo o multiplicador de Lagrange, a alocação ótima de potência para o caso em que tanto o transmissor quanto o receptor têm conhecimento completo do canal é igual a:

$$p_i = \left(\mu - \frac{\sigma_i^2}{\lambda_i^2} \right)_+. \quad (3.28)$$

3.2.4 Canais com desvanecimento

Para analisar a capacidade de canais com desvanecimento será considerado o seguinte modelo:

$$y[m] = h[m]x[m] + w[m], \quad (3.29)$$

em que $x[m]$ é o sinal de entrada, $h[m]$ é a resposta impulsional do canal e $w[m]$ é o ruído branco aditivo Gaussiano com potência σ^2 no instante de tempo m . A resposta impulsional do canal é uma variável aleatória que segue uma dada distribuição $p(h)$ e é independente do sinal de entrada, cuja potência é limitada a P joules/símbolo. Além disso, considera-se que $\mathbb{E}[|h[m]|^2] = 1$ e, nessas condições, a relação sinal-ruído média é definida como $\text{SNR} \triangleq \frac{P}{\sigma^2}$. Considera-se que $h[m]$ é constante durante o período T_c equivalente a um conjunto de símbolos. A capacidade do canal depende da quantidade de informação que o transmissor tem a respeito de $h[m]$ e, também, da taxa de variação da resposta impulsional do canal conforme será visto a seguir.

3.2.4.1 Desvanecimento lento

Esta é a situação em que a resposta do canal é constante durante um conjunto muito grande de símbolos e pode-se fazer $h[m] = h$ para todo índice m . Dessa forma, a informação pode ser enviada com probabilidade de erro arbitrariamente pequena a uma taxa máxima de $\log(1 + |h|^2 \text{SNR})$ bits por uso do canal durante o período T , pois assume-se que T é suficientemente grande para que os códigos que atingem a capacidade do canal possam ser empregados. Obviamente a taxa máxima depende do ganho do canal, uma vez que h é aleatório.

Quando o transmissor conhece $p(h)$, mas não tem conhecimento da realização do canal, ele fixa sua potência de transmissão e envia a informação a uma taxa R bits por uso do canal. Se para uma determinada realização do canal h a taxa R for maior que a capacidade do canal, isto é, $R > \log(1 + |h|^2 \text{SNR})$, então é impossível fazer com que a probabilidade de erro seja tão pequena quanto se queira. Neste caso, diz-se que o sistema está inoperante e utiliza-se o conceito de probabilidade de interrupção para caracterizar a probabilidade de perda da informação [29]:

$$p_{\text{out}} = \Pr \{ \log(1 + |h|^2 \text{SNR}) < R \}. \quad (3.30)$$

A rigor, a capacidade do canal com desvanecimento lento é zero, pois é impossível transmitir com probabilidade de erro arbitrariamente pequena. Isto porque a probabilidade do canal atenuar completamente o sinal é diferente de zero, ou seja, $\Pr \{h = 0\} \neq 0$. Sendo assim, costuma-se utilizar o conceito de *capacidade com interrupção*, que é a maior taxa de transmissão possível tal que a probabilidade de interrupção seja inferior a um dado valor ϵ e pode ser escrita da seguinte maneira [21]:

$$C_\epsilon = \log(1 + F^{-1}(1 - \epsilon) \text{SNR}), \quad (3.31)$$

onde F é a função de distribuição cumulativa complementar de $|h|^2$. O valor de ϵ é um parâmetro de projeto e deve ser escolhido de acordo com a tolerância a interrupções que é aceitável para um dado sistema de comunicação. O gráfico da figura 3.7 mostra a capacidade em função da probabilidade de interrupção para diferentes níveis de relação sinal-ruído no caso em que $p(h)$ segue uma distribuição de Rayleigh. Pode-se observar que a capacidade aumenta de maneira significativa à medida que a probabilidade de interrupção aumenta, embora também aumente a probabilidade de erros na recepção da informação.

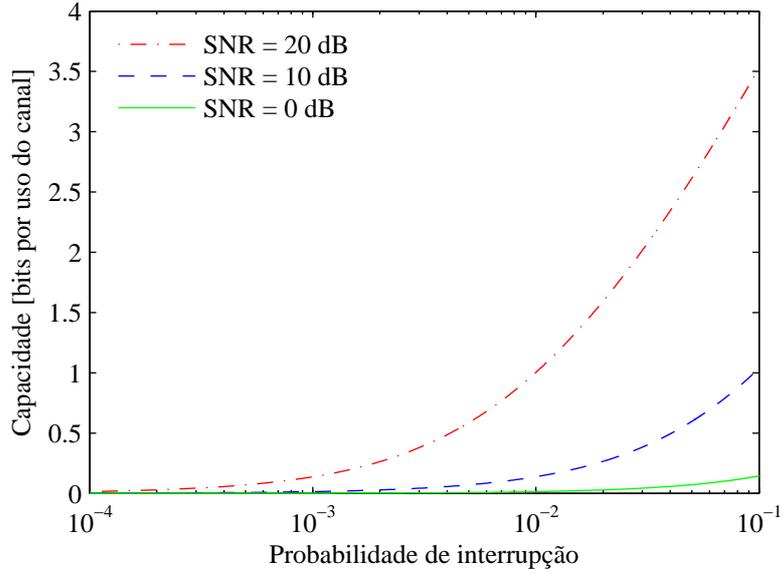


Figura 3.7: Capacidade em função da probabilidade de interrupção

No caso em que o transmissor conhece o canal, ele pode controlar sua potência de transmissão para manter a capacidade constante durante todo o tempo. A aplicação desta estratégia exigiria que, a cada realização do canal, a potência de transmissão fosse inversamente proporcional à atenuação do canal e, num sistema ideal, a probabilidade de interrupção poderia ser arbitrariamente pequena. O problema desta estratégia é que ela consome muita potência e, como a maioria dos sistemas são limitados em potência, não funciona adequadamente quando o desvanecimento do canal é muito severo.

3.2.4.2 Desvanecimento rápido

Nesta situação, a resposta do canal é constante durante a transmissão de um conjunto muito pequeno de símbolos e o comprimento dos códigos é bem maior do que o período de coerência T_c . Assumindo que o código tenha a duração de L períodos de coerência, então pode-se aplicar um modelo com L canais paralelos com desvanecimentos mutuamente independentes e a capacidade normalizada será igual a:

$$C = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \log(1 + |h_l|^2 \text{SNR}). \quad (3.32)$$

Assim como no caso do desvanecimento lento, não é possível aplicar a esta situação o conceito de capacidade como sendo a máxima taxa de comunicação alcançável com probabilidade de erro arbitrariamente pequena. Isto porque $\{h_l\}$ são variáveis aleatórias e a probabilidade da capacidade definida em (3.32) ser inferior a um dado valor R é diferente de zero. Contudo, quando $L \rightarrow \infty$ e o transmissor não conhece as realizações do canal, a expressão (3.32) se aproxima da capacidade ergódica [28]:

$$C_{\text{erg}} = \mathbb{E} [\log(1 + |h|^2 \text{SNR})]. \quad (3.33)$$

Já no caso em que o transmissor conhece as realizações do canal, tem-se uma situação semelhante à descrita na seção 3.2.2 e a capacidade do canal com desvanecimento rápido é igual a:

$$C = \mathbb{E} \left[\log \left(1 + \frac{P_{\text{opt}}(h) |h|^2}{\sigma^2} \right) \right], \quad (3.34)$$

onde a alocação ótima de potência é encontrada via *waterfilling* e é calculada da seguinte maneira:

$$P_{\text{opt}}(h) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{|h|^2} \right)_+, \quad (3.35)$$

respeitando a restrição de potência $\mathbb{E}[P_{\text{opt}}(h)] = P$.

3.3 CAPACIDADE DE SISTEMAS MULTI-USUÁRIOS

No caso em que um sistema deve dividir os recursos disponíveis (potência, tempo, frequência, espaço, etc) entre vários usuários, as idéias de teoria da informação podem ser expandidas para analisar a capacidade de transmissão. Um sistema de comunicação ponto-multiponto, comparado a um sistema ponto-a-ponto, tem uma quantidade enorme de variáveis que podem ser exploradas e por isso o conceito de capacidade apresentado anteriormente é generalizado para o conceito de *região de capacidade*. Neste caso em que os usuários compartilham os recursos, a região de capacidade é uma ferramenta muito útil para compreender o impacto que o aumento da taxa de transmissão de um usuário tem sobre as taxas de transmissão dos demais usuários.

Considerando um cenário com K usuários, a região de capacidade \mathcal{C} é definida pelo conjunto $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_K\}$ das taxas de transmissão que os K usuários podem alcançar simultaneamente com uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena [21]. Então, para uma certa realização do canal \mathbf{h} e potência máxima \mathbf{P} , a região de capacidade pode ser escrita como:

$$\mathcal{C}(\mathbf{h}, \mathbf{P}) = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{F}} \mathcal{R}(\mathbf{h}, \mathbf{p}), \quad (3.36)$$

onde \mathcal{F} é o conjunto de todas as estratégias possíveis de alocação que satisfazem às restrições de potência do sistema, \mathcal{P} representa uma destas estratégias e $\mathcal{R}(\mathbf{h}, \mathbf{p})$ é o conjunto das taxas de transmissão alcançadas por cada um dos usuários, que, por sua vez, pode ser escrito em termos da capacidade de cada usuário:

$$\mathcal{R}(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^K | R_k \leq C_k(h_k, p_k)\}. \quad (3.37)$$

A borda da região de capacidade pode ser encontrada solucionando-se o seguinte problema de otimização [30]:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \sum_{k=1}^K w_k R_k \\ &\text{sujeito a} && \mathbf{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{h}, \mathbf{P}), \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde w_k é o peso da taxa do k -ésimo usuário. Toda a borda da região de capacidade pode ser encontrada se o problema (3.38) for resolvido para todos os possíveis conjuntos de pesos que satisfazem à condição:

$$\sum_{k=1}^K w_k = 1. \quad (3.39)$$

A partir do conceito de região de capacidade, definem-se dois indicadores de desempenho que podem ser muito úteis para um processo de otimização de um determinado sistema de comunicação. Estes indicadores são *capacidade total* e *capacidade simétrica* e serão estudados logo a seguir.

3.3.1 Capacidade total e capacidade simétrica

Capacidade total é a máxima taxa total de transmissão que pode ser alcançada por um sistema de comunicação [31] e é encontrada solucionando-se o problema (3.38) para o caso específico em que os pesos de todos os usuários são iguais, ou seja, $w_k = 1/K$ para $k = 1, 2, \dots, K$:

$$C_{\text{sum}}(\mathbf{h}, \mathbf{P}) \triangleq \max_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{h}, \mathbf{P})} \sum_{k=1}^K R_k. \quad (3.40)$$

Esta métrica é muito utilizada na literatura, ainda que para isso seja necessário adotar uma estratégia injusta de alocação de recursos. Em geral, usuários com boas condições de canal terão taxas de transmissão maiores do que as taxas de usuários com canais piores. Além disso, é possível que usuários em péssimas condições de canal sequer tenham acesso aos recursos do sistema.

Para os sistemas nos quais a situação descrita anteriormente seja indesejável, a saída é adotar uma estratégia que distribua de maneira mais uniforme os recursos disponíveis. Para isso, o indicador adotado pode ser a capacidade simétrica, que é a máxima taxa comum a qual pode ser alcançada por todos os usuários simultaneamente [1]:

$$C_{\text{sym}}(\mathbf{h}, \mathbf{P}) \triangleq \max_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{h}, \mathbf{P})} \min(R_1, \dots, R_K). \quad (3.41)$$

A figura 3.8 mostra exemplos típicos da caracterização da região de capacidade para cenários com dois usuários. Nesta figura estão indicados os pontos que atingem a capacidade total, quando $w_1 = w_2 = 0,5$, e o ponto que atinge a capacidade simétrica, que é a interseção da borda da região de capacidade com o segmento de reta que passa pela origem. Neste exemplo, a inclinação do segmento de reta é de 45° pois $R_1 = R_2$.

Apesar de prover a distribuição justa dos recursos entre os usuários, a capacidade simétrica pode ser menor do que a capacidade total do sistema. A taxa total será reduzida se o ponto de interseção não coincidir com nenhum dos pontos que atingem a capacidade total, conforme ilustrado no gráfico à direita na figura 3.8. Tal redução pode ser interpretada como uma penalidade a

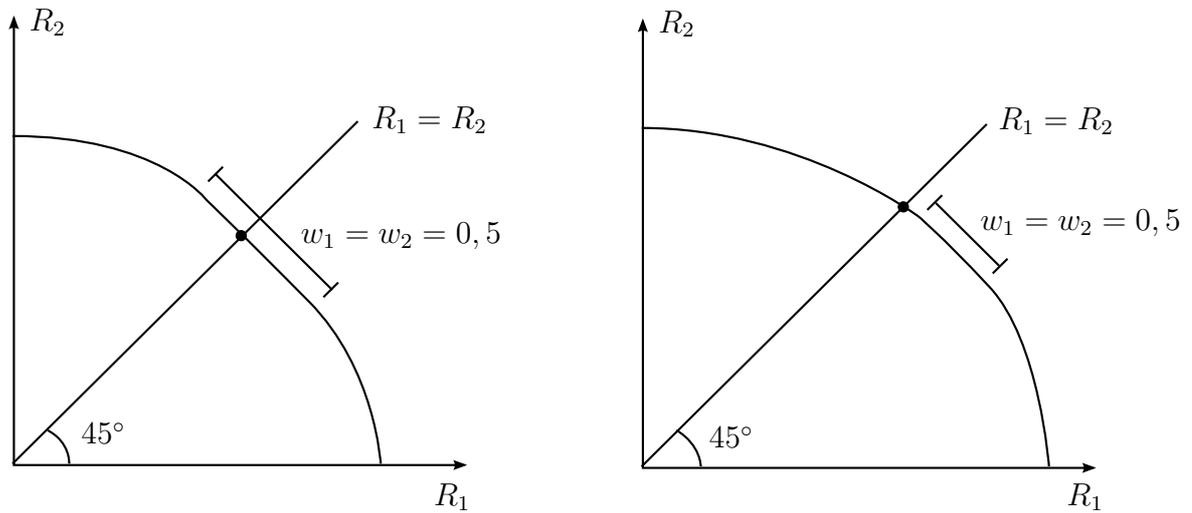


Figura 3.8: Caracterização da região de capacidade [1]

ser paga quando se deseja prover a mesma taxa de transmissão para todos os usuários. Em [1], os autores fazem uma análise deste problema, mostrando que essa diferença pode ser relativamente pequena em enlaces de descida com múltiplas antenas e, além disso, propõem um algoritmo para calcular a capacidade simétrica.

Eventualmente, pode ser necessário prover serviços diferenciados aos usuários. Considerando a hipótese de que um usuário requeira o dobro da taxa de transmissão do outro usuário, por exemplo, o algoritmo em [1] pode perfeitamente ser adaptado para encontrar a interseção da borda da região de capacidade com o segmento de reta em que $R_1 = 2R_2$.

4 COOPERAÇÃO EM SISTEMAS COM ÚNICA PORTADORA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será estudado em detalhes o modelo de enlace de descida cooperativo proposto em [13], que contempla apenas sistemas com uma única portadora.

4.2 MODELO DO SISTEMA

Será considerado o modelo em que B estações base, que estão conectadas a uma estação central, se comunicam simultaneamente com K terminais móveis. Este modelo de enlace de descida está ilustrado na Figura 4.1 para a situação específica na qual há apenas duas estações base e dois terminais.

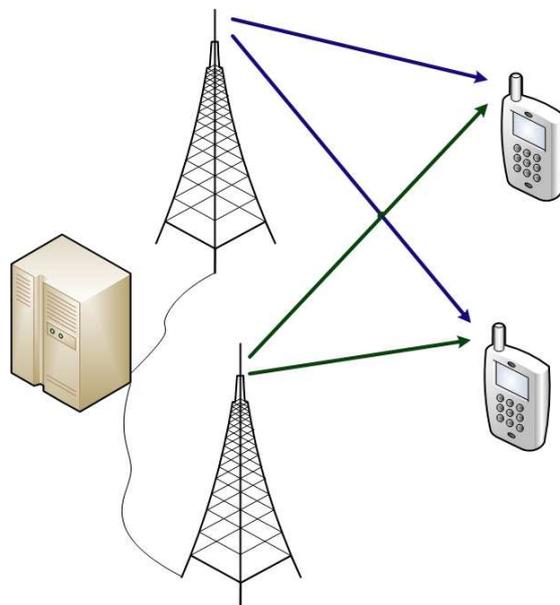


Figura 4.1: Modelo do sistema

A transmissão dos dados da estação central até os terminais é caracterizada por duas etapas básicas:

- 1) A estação central gera as mensagens destinadas aos K terminais e as encaminha para as estações base;

2) Cada estação base codifica as mensagens e as envia aos terminais de acordo com uma estratégia de alocação de recursos pré-definida.

Para este modelo, deseja-se estabelecer um esquema de cooperação entre as estações base para alocar a potência disponível com o objetivo de *minimizar a probabilidade de interrupção do sistema*. Nessas condições, são estudados três cenários que diferem quanto ao conhecimento da estação central sobre os canais dos terminais. Os cenários são os seguintes:

- Conhecimento total das realizações dos canais;
- Conhecimento das estatísticas dos canais;
- Nenhum conhecimento dos canais.

Em todos os cenários apresentados acima, considera-se que os terminais são capazes de estimar os canais de maneira perfeita e que as estações base sempre têm conhecimento total das realizações dos canais de todos os terminais.

Neste modelo, cada estação base tem M antenas e cada terminal tem apenas uma antena. Além disso, não há nenhum enlace direto entre as estações base e, portanto, a comunicação entre elas é feita sempre com o intermédio da estação central. Tal comunicação ocorre através de enlaces ditos perfeitos, isto é, não há nem erros nem atrasos e a capacidade de tais enlaces é muito maior do que a capacidade mínima necessária para que a transmissão dos dados seja realizada com sucesso. Os canais sem fio \mathbf{h}_{bk} entre a estação base b e o terminal móvel k não são seletivos em frequência e são modelados por variáveis aleatórias mutualmente independentes que seguem a distribuição normal complexa $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, \sigma_{bk}\mathbf{I}_M)$.

Nas condições descritas acima, a estação central tem as mensagens m_1, m_2, \dots, m_K que devem ser enviadas aos terminais. Cada mensagem m_k é dividida em B partes $m_{1k}, m_{2k}, \dots, m_{Bk}$ que, por sua vez, são encaminhadas às respectivas estações base. Sendo assim, a estação base b recebe da estação central as mensagens $m_{b1}, m_{b2}, \dots, m_{bK}$. Considerando que a estação base b poderia aplicar alguma técnica de codificação de canal, as mensagens $m_{b1}, m_{b2}, \dots, m_{bK}$ seriam codificadas nos símbolos $s_{b1}, s_{b2}, \dots, s_{bK}$ de maneira independente. Neste modelo, supõe-se que os terminais são capazes de realizar a detecção do tipo SIC (do inglês, *successive interference cancellation*) para receberem corretamente os B símbolos que são enviados simultaneamente pelas estações base.

Assim, a estação base b poderá aplicar alguma técnica de pré-codificação linear, como por exemplo o ZF-BF (do inglês, *zero-forcing beamforming*), nos símbolos $s_{b1}, s_{b2}, \dots, s_{bK}$ com $|s_{bk}|^2 = 1$, criando, dessa maneira, o sinal de transmissão cuja representação em banda base é dada por

$$\mathbf{x}_b = \sum_{k=1}^K \sqrt{p_{bk}} \mathbf{g}_{bk} s_{bk}, \quad (4.1)$$

onde \mathbf{g}_{bk} é o vetor de pré-codificação de dimensão M . Neste modelo será considerada uma restrição de potência tal que o sinal transmitido pela b -ésima estação base tenha potência máxima igual a P_b

$$\text{tr} \left(\mathbb{E}[\mathbf{x}_b \mathbf{x}_b^H] \right) \leq P_b, \quad (4.2)$$

que pode ser simplificada assumindo que os vetores de pré-codificação são unitários, ou seja, $|\mathbf{g}_{bk}|^2 = 1$ para quaisquer b e k :

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\mathbb{E} \left[\mathbf{x}_b \mathbf{x}_b^H \right] \right) &\leq P_b \\ \text{tr} \left(\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^K \sqrt{p_{bk}} \mathbf{g}_{bk} s_{bk} \right) \left(\sum_{k=1}^K \sqrt{p_{bk}} \mathbf{g}_{bk} s_{bk} \right)^H \right] \right) &\leq P_b \\ \text{tr} \left(\sum_{k=1}^K \mathbb{E} \left[p_{bk} |\mathbf{g}_{bk}|^2 |s_{bk}|^2 \right] \right) &\leq P_b \\ \text{tr} \left(\sum_{k=1}^K p_{bk} \right) &\leq P_b \\ \sum_{k=1}^K p_{bk} &\leq P_b. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Seja n_{o_k} o ruído branco Gaussiano de média nula e variância unitária, o sinal recebido pelo k -ésimo terminal pode ser escrito da seguinte maneira:

$$y_k = \underbrace{\sum_{b=1}^B \sqrt{p_{bk}} \mathbf{h}_{bk}^H \mathbf{g}_{bk} s_{bk}}_{\text{sinal}} + \underbrace{\sum_{b=1}^B \mathbf{h}_{bk}^H \sum_{j \neq k} \sqrt{p_{bj}} \mathbf{g}_{bj} s_{bj}}_{\text{interferência}} + n_{o_k}. \quad (4.4)$$

Como o vetor de precodificação \mathbf{g}_{bk} é independente de \mathbf{h}_{bk} e ortogonal a \mathbf{h}_{bj} para $j \neq k$, o termo que representa a interferência na equação (4.4) é eliminado e a expressão que modela o sinal recebido se reduz a:

$$y_k = \sum_{b=1}^B \sqrt{p_{bk}} a_{bk} s_{bk} + n_{o_k}, \quad (4.5)$$

onde $a_{bk} = \mathbf{h}_{bk}^H \mathbf{g}_{bk}$ está associada ao ganho do canal entre a estação base b e o terminal k e $|a_{bk}|^2$ é uma variável aleatória que segue uma distribuição chi-quadrado com $2(M - K + 1)$ graus de liberdade. Como os terminais realizam a detecção SIC, a capacidade do j -ésimo terminal é:

$$R_k = \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk} \right). \quad (4.6)$$

A região de capacidade determinística do sistema para uma dada realização do canal \mathbf{a} e para uma certa alocação de potência \mathbf{p} é dada por:

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}_+^K \mid R_k \leq \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk} \right) \right\} \quad (4.7)$$

e a região de capacidade considerando que as estações base têm as potências máximas limitadas a (P_1, P_2, \dots, P_B) será igual a:

$$\mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P}) = \bigcup_{\sum_{k=1}^K p_{bk} \leq P_b} \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{p}). \quad (4.8)$$

Este é, portanto, o modelo do enlace de descida do sistema. Nas próximas subseções serão apresentados os três cenários principais nos quais se deseja otimizar a alocação dos recursos disponíveis com o intuito de minimizar a probabilidade de interrupção do sistema.

4.2.1 Conhecimento total das realizações dos canais

Considerando que os terminais requeiram os valores de capacidade $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K)$, então a probabilidade de interrupção do sistema é igual à probabilidade de γ estar fora da região de capacidade $\mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})$:

$$P_{\text{out}} = 1 - \Pr(\gamma \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})). \quad (4.9)$$

Para esta situação, uma estratégia de alocação de recursos é realizada de modo a assegurar que todos os terminais tenham a mesma probabilidade individual de interrupção. Isto significa que a capacidade fornecida será proporcional à capacidade requerida:

$$\frac{R_k(\mathbf{p})}{R_1(\mathbf{p})} \propto \frac{\gamma_k}{\gamma_1} \triangleq \alpha_k. \quad (4.10)$$

Para que este objetivo seja alcançado, será aplicado a este modelo com cooperação o algoritmo originalmente proposto em [1] que soluciona o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\sum w_k=1} \max_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})} \sum_{k=1}^K w_k \frac{R_k}{\alpha_k}. \quad (4.11)$$

Será mostrado mais à frente que a alocação ótima de potência que soluciona o problema (4.11) é a mesma que minimiza a probabilidade de interrupção do sistema (4.9).

Nota-se que o problema de otimização interno é um problema de maximização da capacidade total do sistema para o conjunto de pesos $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_K)$ fixo. A solução do problema interno será apresentada na Subseção 4.2.1.1. Por sua vez, o problema externo é um problema convexo e no caso em que há apenas dois terminais ele pode, por exemplo, ser resolvido pelo método da bisseção. Nestas condições, o Algoritmo 3 foi proposto em [13] para solucionar o problema de otimização 4.11 e realizar a alocação de recursos.

Algoritmo 3 Alocação de recursos para o cenário com conhecimento dos canais

- 1: Inicializar $\mathbf{w} \in [0, 1]$
- 2: **repetir**
- 3: Resolver o problema de otimização:

$$R = \arg \max_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})} \sum_{k=1}^K w_k \frac{R_k}{\alpha_k}$$

- 4: Calcular o subgradiente do k -ésimo terminal:

$$\delta_k = \frac{R_k}{\alpha_k} - R_1$$

- 5: Atualizar a variável \mathbf{w} de acordo com o gradiente calculado anteriormente
 - 6: **até** convergir
-

4.2.1.1 Maximização da capacidade total do sistema

O problema de maximização da capacidade total do sistema para $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_K)$ fixo é definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk} \right) \\ & \text{sujeito a} && \sum_{k=1}^K p_{bk} \leq P_b. \end{aligned} \quad (4.12)$$

O problema de otimização (4.12) é convexo pois a função objetivo é côncava em relação às variáveis de otimização $\{p_{bk}\}$ e a restrição é descrita por um conjunto de funções afins. Então, forma-se o Lagrangiano associado ao problema (4.12):

$$\mathcal{L}(\{p_{bk}\}, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk} \right) - \sum_{b=1}^B \mu_b \sum_{k=1}^K p_{bk}, \quad (4.13)$$

onde $\mu_b \geq 0$ é o multiplicador de Lagrange associado à restrição de potência máxima da b -ésima estação base.

Agora, analisam-se as condições KKT de otimalidade do problema e obtêm-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\{p_{bk}\}, \boldsymbol{\mu})}{\partial p_{bk}} &= 0 \\ \frac{w_k |a_{bk}|^2}{1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk}} &= \mu_b. \end{aligned} \quad (4.14)$$

A solução analítica da equação (4.14) é complicada. Contudo, considerando-se o termo $d_{bk} = \sum_{i \neq b} |a_{ik}|^2 p_{ik}$ fixo, é possível encontrar uma expressão fechada para p_{bk} :

$$p_{bk} = \left[\mu_b w_k - \frac{1 + d_{bk}}{|a_{bk}|^2} \right]_+, \quad (4.15)$$

e, posteriormente, calcular o valor μ_b que satisfaça à condição:

$$\sum_{k=1}^K p_{bk} \leq P_b$$

$$\sum_{k=1}^K \left[\mu_b w_k - \frac{1 + d_{bk}}{|a_{bk}|^2} \right]_+ \leq P_b \quad (4.16)$$

Este fato sugere que a solução do problema pode ser encontrada com a aplicação de um método iterativo semelhante ao que foi apresentado em [32]. O método baseia-se no algoritmo de *waterfilling* iterativo e é descrito pelo Algoritmo 4.

Algoritmo 4 *Waterfilling* iterativo para maximização da capacidade do sistema

1: Inicializar $p_{bk} = P_b/K$

2: **repetir**

3: **para** cada estação base **faça**

4: Calcular:

$$d_{bk} = \sum_{i \neq b} |a_{ik}|^2 p_{ik}$$

5: **para** cada terminal **faça**

6: Calcular a potência de transmissão:

$$p_{bk} = \left[\mu_b w_k - \frac{1 + d_{bk}}{|a_{bk}|^2} \right]_+$$

7: **fim para**

8: Determinar μ_b para satisfazer à condição:

$$\sum_{k=1}^K \left[\mu_b w_k - \frac{1 + d_{bk}}{|a_{bk}|^2} \right]_+ \leq P_b$$

9: **fim para**

10: **até** convergir

4.2.2 Conhecimento das estatísticas dos canais

Neste caso a estação central não tem acesso às realizações dos canais, mas tem o conhecimento da função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias $\{a_{bk}\}$ que modelam os canais. Além

disso, as probabilidades individuais de interrupção são consideradas independentes e, portanto, a probabilidade de interrupção do sistema é dada pela expressão:

$$\begin{aligned}
P_{\text{out}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{p}) &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr(R_k > \gamma_k) \\
&= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr\left(\log\left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk}\right) > \gamma_k\right) \\
&= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr(\Delta_k > c_k)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde $\Delta_k = \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk}$ e $c_k = 2^{\gamma_k} - 1$. Dessa forma, deseja-se encontrar a alocação ótima de potência que minimiza a probabilidade de interrupção expressa na equação (4.17). Tal alocação de potência é a solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
&\text{minimizar} && P_{\text{out}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{p}) \\
&\text{sujeito a} && \sum_{k=1}^K p_{bk} \leq P_b.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Uma análise mais cuidadosa da expressão que define Δ_k revela que esta é uma forma Hermitiana quadrática de uma variável aleatória Gaussiana complexa, que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1k}^* & \cdots & a_{Bk}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1k} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & p_{Bk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{Bk} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{M-K+1} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{1k}^H & \cdots & \mathbf{w}_{Bk}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1k} \mathbf{I}_{M-K+1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & p_{Bk} \mathbf{I}_{M-K+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{1k} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{Bk} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{M-K+1} \mathbf{w}_k^H \mathbf{F}_k \mathbf{w}_k.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A expressão acima somente é escrita dessa maneira pois $|a_{bk}|^2$ é uma variável aleatória que segue uma distribuição chi-quadrado com $2(M-K+1)$ graus de liberdade e que pode ser expressa como:

$$|a_{bk}|^2 = \frac{1}{M-K+1} \|\mathbf{w}_{bk}\|^2, \tag{4.20}$$

onde $\mathbf{w}_{bk} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, \sigma_{bk} \mathbf{I}_{M-K+1})$. O comprimento do vetor Gaussiano complexo \mathbf{w}_{bk} é, portanto, $B(M-K+1)$ e a dimensão de \mathbf{F}_k , a matriz da forma Hermitiana, é $B(M-K+1) \times B(M-K+1)$.

A grande vantagem de expressar Δ_k dessa maneira é que a função característica de uma forma Hermitiana quadrática dessa natureza já é conhecida. De acordo com o que está apresentado no

anexo A, a função característica de Δ_k é:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Delta_k}(s) &= \mathbb{E} [e^{-s\Delta_k}] \\
&= \frac{\exp(-s\bar{\mathbf{w}}_k^H \mathbf{F}_k (\mathbf{I} + s\sigma_{bk} \mathbf{F}_k)^{-1} \bar{\mathbf{w}}_k)}{\det(\mathbf{I} + s\sigma_{bk}^2 \mathbf{F}_k)} \\
&= \frac{1}{\det(\mathbf{I} + s\sigma_{bk} \mathbf{F}_k)} \\
&= \frac{1}{\prod_{b=1}^B (1 + s\alpha_{bk} p_{bk})^{M-K+1}}, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

em que $\alpha_{bk} = \sigma_{bk}/(M - K + 1)$. Define-se a variável aleatória $\Omega_k = \Delta_k - c_k$ cuja função característica é dada por:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Omega_k}(s) &= \mathbb{E} [e^{-s\Omega_k}] \\
&= \mathbb{E} [e^{-s(\Delta_k - c_k)}] \\
&= e^{sc_k} \mathbb{E} [e^{-s\Delta_k}] \\
&= e^{sc_k} \Phi_{\Delta_k}(s) \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Agora, a probabilidade de interrupção do k -ésimo terminal pode ser calculada aplicando-se a transformada inversa de Laplace à equação (4.22):

$$\begin{aligned}
\Pr(\Omega_k < 0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \Phi_{\Omega_k}(s) \frac{ds}{s} \\
\Pr(\Delta_k < c_k) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{sc_k} \Phi_{\Delta_k}(s) \frac{ds}{s} \\
&= F_{\Delta_k}(c_k) \tag{4.23}
\end{aligned}$$

A aplicação da transformada inversa de Laplace no cálculo da probabilidade de interrupção individual é um procedimento por si só bastante complicado e ainda resulta em uma expressão numericamente mal condicionada, conforme observado em [33]. Além disso, a expressão resultante constituirá a função objetivo do problema de otimização (4.18). Nessas condições, o problema de otimização se torna inviável devido à complexidade da função objetivo.

A solução proposta para esta situação é a utilização de uma expressão que seja preferencialmente menos complexa e que forneça um limite superior para a probabilidade de interrupção individual. A opção é aplicar o limite superior de Chernoff, dado pela expressão:

$$\Pr(\Delta_k < c_k) \leq \min_{\lambda \geq 0} e^{\lambda c_k} \Phi_{\Delta_k}(\lambda) \triangleq \bar{F}_{\Delta_k}(c_k), \tag{4.24}$$

e, em seguida, reescrever a probabilidade de interrupção do sistema em termos de (4.24):

$$\begin{aligned}
P_{\text{out}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{p}) &= 1 - \prod_{k=1}^K (1 - \Pr(\Delta_k < c_k)) \\
&\leq 1 - \prod_{k=1}^K (1 - \bar{F}_{\Delta_k}(c_k)) \\
&\leq \bar{P}_{\text{out}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{p}). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Assim, a expressão obtida em (4.25) irá substituir a função objetivo do problema (4.18), que, a partir de agora, consiste na otimização do limite superior de Chernoff ao invés da otimização da probabilidade de interrupção exata. Conforme será mostrado mais adiante, a alocação ótima de potência que minimiza o limite superior de Chernoff é a mesma que minimiza a probabilidade de interrupção do sistema.

Primeiramente, define-se a função auxiliar r_k para cada usuário da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r_k(\lambda_k, \mathbf{p}_k) &= e^{\lambda_k c_k} \Phi_{\Delta_k}(\lambda) \\ &= \frac{e^{\lambda_k c_k}}{\prod_{b=1}^B (1 + \lambda_k \alpha_{bk} P_{bk})^{M-K+1}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A Figura 4.2 mostra exemplos de r_k em função de λ_k para valores fixos de SNR por estação base. Nestes exemplos específicos, há duas estações base e a potência disponível em cada uma delas é dividida igualmente entre dois terminais. A capacidade requerida por um dos terminais é de 1 bit por uso do canal e pelo outro é de 2 bits por uso do canal.

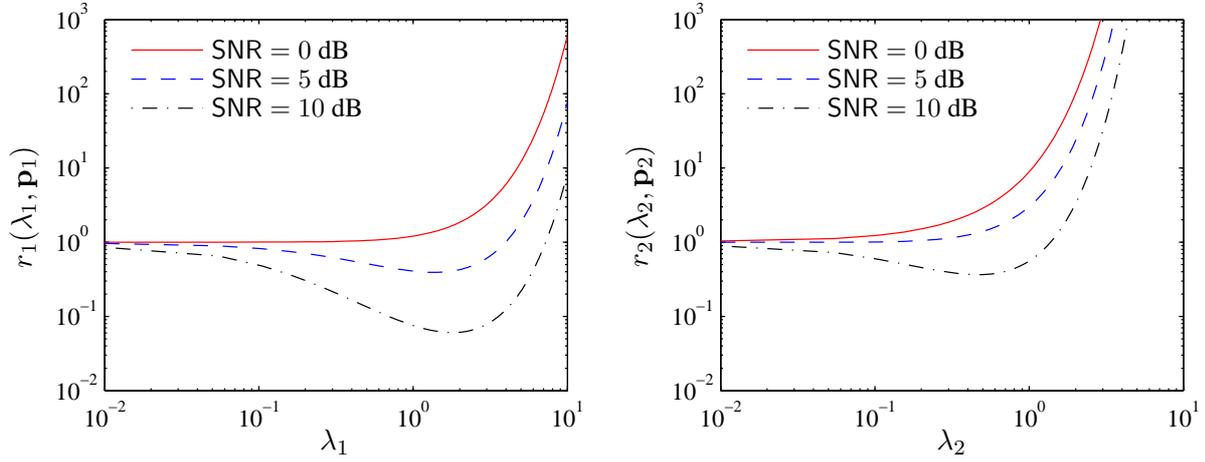


Figura 4.2: Gráfico de r_k em função de λ_k para potências fixas e capacidade requerida igual a 1 bit por uso do canal (à esquerda) e 2 bits por uso do canal (à direita)

Agora, define-se o seguinte problema de otimização cuja solução é a alocação de potência que minimiza o limite superior de Chernoff:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & f(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{p}) \triangleq \prod_{k=1}^K (1 - r_k(\lambda_k, \mathbf{p}_k)) \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{k=1}^K p_{bk} \leq P_b \\ & \lambda_k \geq 0 \\ & p_{ik} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

O problema (4.27) tem uma condição implícita que implica em $0 < r_k < 1$. Isso ocorre porque a função objetivo representa um limite superior para a probabilidade de interrupção do

sistema e, naturalmente, ela deve assumir valores entre 0 e 1. Por definição, a função r_k assume valores positivos, mas nem sempre contidos no intervalo $[0, 1]$ conforme exemplificado na Figura 4.2. Isto viola a condição implícita e o problema não pode ser resolvido. Nestes casos específicos, a estratégia de alocação de recursos adotada baseia-se na distribuição igualitária de toda a potência disponível entre os terminais, ou seja, $p_{bk} = P_b/K$. Nos demais casos, a estratégia de alocação será determinada pelo ponto ótimo do problema (4.27).

A resolução do problema de otimização que minimiza o limite superior de Chernoff é dividida em duas etapas. A primeira delas é a minimização de r_k em relação a λ_k . Observa-se que a função r_k é convexa em relação a λ_k , conforme pode ser observado nos exemplos da Figura 4.2. Logo, considerando potências fixas, basta calcular $\partial r_k / \partial \lambda_k = 0$ e encontrar λ_k^* ótimo. Se $r_k(\lambda_k^*, \mathbf{p}_k) < 1$, então a condição implícita descrita no parágrafo anterior é satisfeita e λ_k^* é dado pela solução do polinômio de grau B abaixo:

$$\frac{c_k}{M - K + 1} = \sum_{b=1}^B \frac{\alpha_{bk} p_{bk}}{1 + \lambda_k^* \alpha_{bk} p_{bk}}. \quad (4.28)$$

A segunda etapa é maximização da função $f(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{p})$ quanto a \mathbf{p} . Forma-se, então, o Lagrangiano associado ao problema de otimização (4.27) e, como a função $f(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{p})$ é côncava em relação às variáveis \mathbf{p} , a solução obtida para o problema dual também será o ponto ótimo do problema primal:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{p}) - \sum_{b=1}^B \mu_b \sum_{k=1}^K p_{bk}. \quad (4.29)$$

Analisando as condições KKT de otimalidade para a equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu})}{\partial p_{bk}} &= 0 \\ \frac{-\partial r_k(\lambda_k^*, \mathbf{p}_k)}{\partial p_{bk}} \prod_{j \neq k} (1 - r_j(\lambda_j^*, \mathbf{p}_j)) - \mu_b &= 0 \\ (M - K + 1) r_k(\lambda_k^*, \mathbf{p}_k) \frac{\alpha_{bk} \lambda_k^*}{1 + \lambda_k^* \alpha_{bk} p_{bk}} \prod_{j \neq k} (1 - r_j(\lambda_j^*, \mathbf{p}_j)) &= \mu_b, \end{aligned} \quad (4.30)$$

e, reorganizando a equação anterior, tem-se a seguinte condição equivalente:

$$\begin{aligned} \frac{r_k(\lambda_k^*, \mathbf{p}_k)}{1 - r_k(\lambda_k^*, \mathbf{p}_k)} \frac{\alpha_{bk} \lambda_k^*}{1 + \lambda_k^* \alpha_{bk} p_{bk}} &= \mu'_b \\ \phi_{bk}(p_{bk}) &= \mu'_b. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Quando os valores $\{p_{ik}\}_{i \neq b}$ são fixos, pode-se observar que a função $\phi_{bk}(p_{bk})$ é sempre positiva e monotonicamente decrescente com relação a p_{bk} . Este fato sugere que os valores ótimos de p_{bk} que satisfazem à restrição $\sum_{k=1}^K p_{bk} \leq P_b$ podem ser encontrados com o auxílio do método de busca por bisseção. O exemplo da figura 4.3 mostra ϕ_{bk} em função de p_{bk} no cenário em que há apenas dois terminais. Neste caso, o método da bisseção deverá encontrar a interseção entre ϕ_{b1} e

μ'_b e, também, entre ϕ_{b2} e μ'_b . Os valores p_{b1} e p_{b2} serão parte do conjunto das possíveis soluções do problema (4.27) se a restrição de potência máxima da estação base for respeitada, isto é, se $p_{b1} + p_{b2} \leq P_b$.

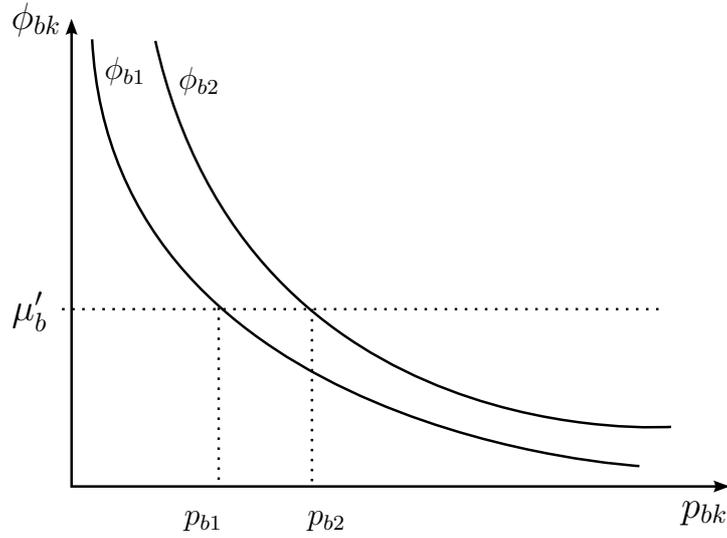


Figura 4.3: Gráfico de ϕ_{bk} em função de p_{bk} para dois terminais

Por fim, para determinar μ'_b também é aplicado o método da bissecção. O algoritmo iterativo que minimiza o limite superior de Chernoff é listado a seguir. Os detalhes da prova da convergência do algoritmo podem ser encontrados em [34].

4.2.3 Nenhum conhecimento dos canais

Nesta situação não há nenhuma informação *a priori* que possa ajudar na alocação dos recursos e a opção é dividir toda a potência disponível igualmente entre os terminais. Assume-se que a potência máxima de cada uma das estações base é igual a P , que $p \triangleq p_{bk} = P/K$ e que $\sigma_{bk} = 1$ para todos os enlaces. Isso implica em:

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk} \\ &= p \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 \triangleq \Delta_k^e, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde Δ_k^e é uma variável aleatória de distribuição chi-quadrado com $4(M - K + 1)$ graus de liberdade e sua função de distribuição cumulativa é dada pela seguinte expressão [35]:

$$F_{\Delta_k^e}(y) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{M - K + 1}{p} y \right) \right] \sum_{k=0}^{2(M-K+1)-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{M - K + 1}{p} y \right)^k. \quad (4.33)$$

Algoritmo 5 Minimização do limite superior de Chernoff

- 1: Inicializar $p_{bk} = P_b/K$
- 2: **repetir**
- 3: **para** cada estação base **faça**
- 4: Calcular λ por meio da resolução do polinômio:

$$\frac{c_k}{M - K + 1} = \sum_{b=1}^B \frac{\alpha_{bk} p_{bk}}{1 + \lambda_k \alpha_{bk} p_{bk}}$$

- 5: Calcular as potências de transmissão resolvendo a equação:

$$\phi_{bk}(p_{bk}) = \mu'_b$$

- 6: Atualizar μ'_b para satisfazer à condição:

$$\sum_{k=1}^K p_{bk} \leq P_b$$

- 7: **fim para**
 - 8: **até** convergir
-

Nessas condições, a probabilidade de interrupção do sistema é igual a:

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}(\gamma, \mathbf{p}) &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr \left(\log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 p_{bk} \right) > \gamma_k \right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr \left(p \sum_{b=1}^B |a_{bk}|^2 > 2^{\gamma_k} - 1 \right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr (\Delta_k^e > c_k) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^K (1 - F_{\Delta_k^e}(c_k)), \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde $c_k = 2^{\gamma_k} - 1$.

4.3 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para o modelo de comunicação apresentado anteriormente. Todos os resultados a seguir se referem à situação em que há apenas duas estações base e dois terminais.

A figura 4.4 mostra a probabilidade de interrupção do sistema em função da relação-sinal ruído (indicada no gráfico como SNR) para o caso em que a capacidade requerida por ambos os terminais é de 1 bit por uso do canal. Neste caso considera-se que a potência do ruído em todos os enlaces é a mesma. Na figura são mostrados os resultados para situações em que há duas ou quatro antenas para cada estação base.

O desempenho do sistema no cenário em que há pleno conhecimento das realizações do canal é um pouco melhor que o dos outros dois cenários, visto que a unidade central pode adaptar sua potência de transmissão para cada nova realização do canal por meio do algoritmo de *waterfilling*. No cenário com conhecimento das estatísticas dos canais a alocação ótima de recursos, que é encontrada pelo algoritmo que minimiza o limite superior de Chernoff, consiste na divisão igualitária da potência disponível entre os terminais, pois a capacidade requerida é a mesma. É por isso que o desempenho deste cenário é, na média, igual ao desempenho do cenário em que não há conhecimento sobre os canais.

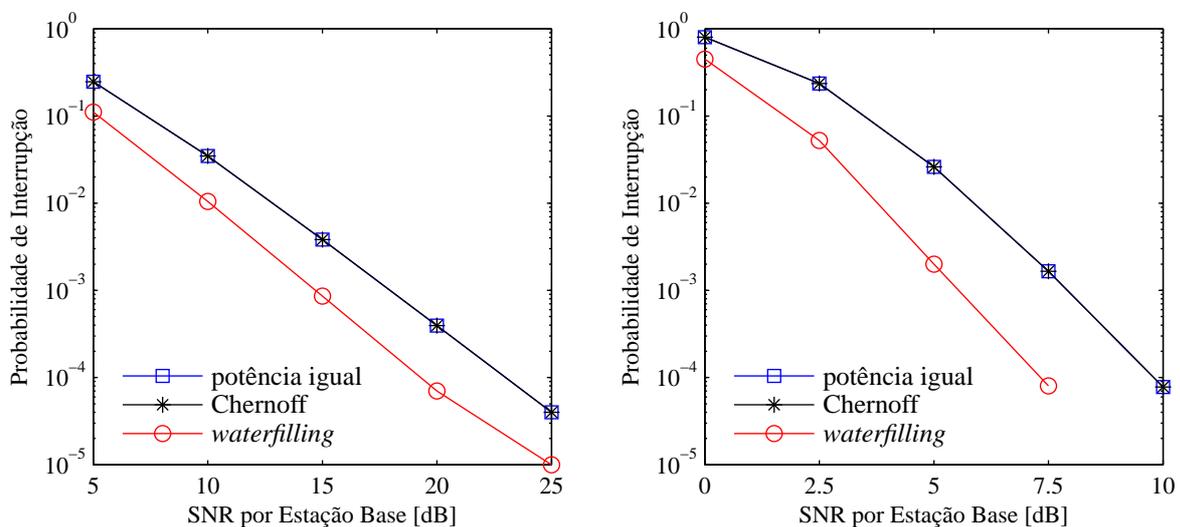


Figura 4.4: Probabilidade de interrupção em função da SNR com capacidades simétricas para 2 antenas (à esquerda) e 4 antenas (à direita) por estação base

A figura 4.5 mostra o desempenho do sistema sob as mesmas condições anteriores, exceto pela capacidade requerida. Agora, um dos terminais requer 1 bit por uso do canal, enquanto que o outro terminal requer 3 bits por uso do canal. Novamente, o desempenho no cenário com conhecimento das realizações do canal é melhor pelos mesmos motivos citados anteriormente. Por sua vez, o cenário otimizado usando o algoritmo de Chernoff tem desempenho melhor que o do cenário em que não há conhecimento dos canais pois, tendo a informação *a priori* a respeito das estatísticas do canal, a potência é alocada de maneira mais eficiente. Além disso, no caso em que há quatro antenas por estação base, os desempenhos dos algoritmos de *waterfilling* e de Chernoff são mais próximos, o que é um indício de que o algoritmo de alocação de potência explora com eficiência os novos graus de liberdade das antenas adicionais no cenário com conhecimento das realizações do canal.

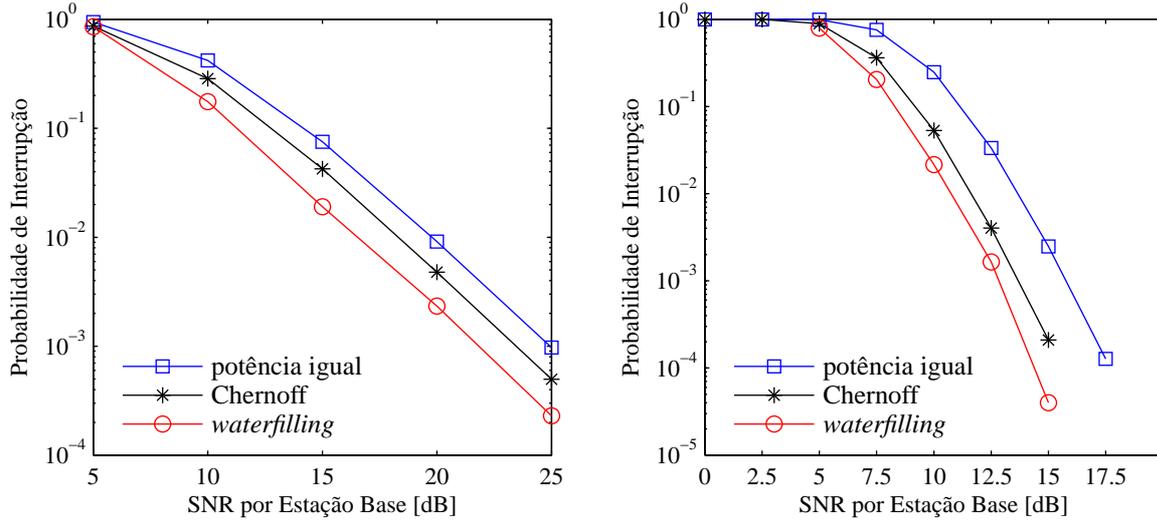


Figura 4.5: Probabilidade de interrupção em função da SNR com capacidades assimétricas para 2 antenas (à esquerda) e 4 antenas (à direita) por estação base

Por último, a Figura 4.6 apresenta o desempenho do sistema quando há conhecimento das realizações dos canais e quando os enlaces estão sujeitos a diferentes níveis de atenuação. Conforme foi apresentado no início deste capítulo, os canais sem fio \mathbf{h}_{bk} entre a estação base b e o terminal móvel k seguem a distribuição normal complexa $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(\mathbf{0}, \sigma_{bk} \mathbf{I}_M)$ e o termo σ_{bk} pode modelar a atenuação no enlace. Neste caso, fez-se $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$ e analisa-se a probabilidade de interrupção do sistema quando $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1, 1/2, 1/4, 1/8$. Esta configuração modela as situações nas quais existe atenuação no enlace entre a estação base 1 e o terminal 2 (e, equivalentemente, entre a estação base 2 e o terminal 1). Conforme esperado, quanto maior a atenuação no enlace pior é o desempenho do sistema. Eventualmente, este tipo de análise poderá fomentar o estudo do modelo de comunicação cooperativa a nível sistêmico, auxiliando na escolha de parâmetros que determinem as condições mais adequadas para a aplicação do modelo.

4.3.1 Desempenho do sistema sob condições realistas de canal

Esta subseção contém os resultados apresentados em [14], onde são realizadas simulações com o intuito de avaliar o comportamento do esquema de cooperação diante de um modelo realista para o canal sem fio. Além disso, são feitas algumas análises para identificar as condições nas quais o esquema provê ganhos mais significativos e o principal critério de avaliação do desempenho do sistema é a probabilidade de interrupção.

O cenário básico adotado nas simulações é constituído por duas células, cada uma delas com uma estação base, e por diversos terminais que estão uniformemente distribuídos no cenário de simulação. As estações base transmitem seus respectivos sinais simultaneamente a apenas dois terminais (um em cada célula), que são escolhidos aleatoriamente. O modelo de canal adotado é baseado na soma de raios e está descrito em [36].

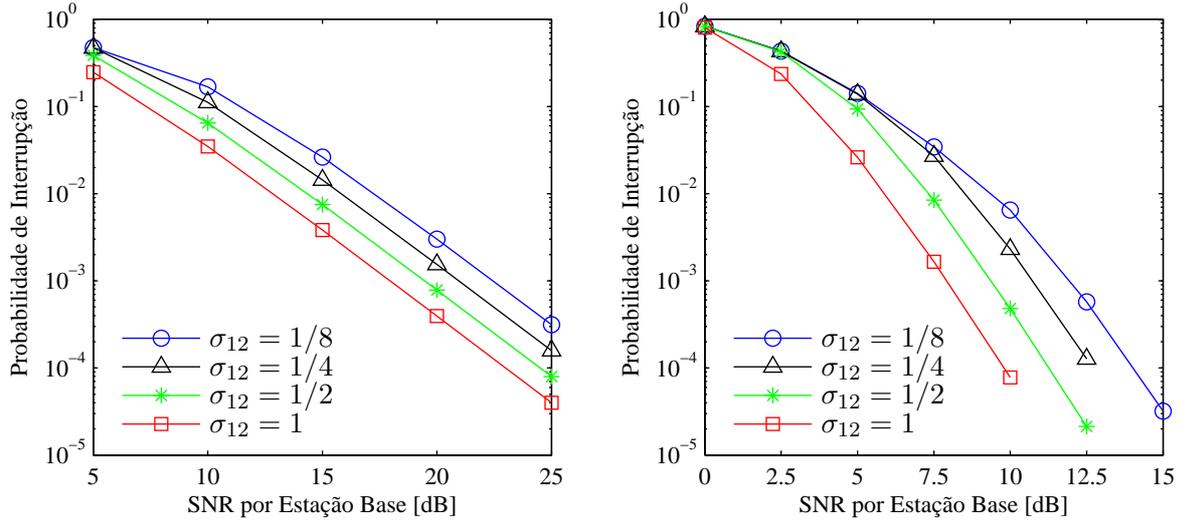


Figura 4.6: Probabilidade de interrupção em função da SNR com atenuação nos enlaces para 2 antenas (à esquerda) e 4 antenas (à direita) por estação base

Existem, basicamente, dois modos de transmissão do sistema. No modo normal, cada estação base transmite sinal para apenas um terminal no modo MISO (do inglês, *multiple-input single-output*) com duas antenas de transmissão e uma de recepção. No modo cooperativo, a transmissão é realizada da maneira descrita na seção 4.2. Para a decisão do modo de transmissão do sistema, define-se a função $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada pela expressão:

$$r(\xi) = (1 - \xi)r_c, \quad (4.35)$$

onde r_c é o raio da célula. As duas estações base operam em modo cooperativo se e somente se os dois terminais selecionados estiverem dentro da região sombreada da Figura 4.7. O tamanho da região sombreada é controlada pela variável ξ da equação (4.35): quando $\xi = 0$ as estações base operam no modo normal; quando $\xi = 1$ as estações base operam no modo cooperativo independentemente da posição dos terminais; para os demais valores de ξ é possível controlar o tamanho da região sombreada para que o modo cooperativo seja habilitado apenas para os terminais que estiverem mais próximos das bordas e, conseqüentemente, para que o modo normal seja habilitado apenas para os demais terminais que estiverem mais próximos do centro da célula.

A simulação do sistema poderia ser descrita da seguinte maneira: a cada passo de simulação são escolhidos dois terminais, um em cada célula. Usando o critério definido no parágrafo anterior, determina-se o modo de transmissão de ambos os terminais. Em seguida, são geradas diversas amostras de canal e o passo de simulação é finalizado com o cálculo da probabilidade de interrupção dos terminais e do sistema. São realizados vários passos de simulação até que o desempenho de todos os terminais seja avaliado e, finalmente, é calculada a probabilidade de interrupção média do sistema.

Os parâmetros utilizados nas simulações são listados na Tabela 4.1. Os parâmetros que não são explicitamente citados, tais como espalhamento angular, distribuição de atrasos, distância de

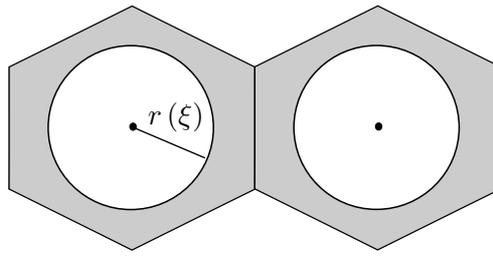


Figura 4.7: Cenário de simulação

correlação e outros, têm seus respectivos valores definidos em [36] e [37].

Tabela 4.1: Parâmetros de Simulação

Parâmetros Gerais	Valor
Número de estações base	2
Distância entre as estações base	1500 metros
Distribuição dos terminais	uniforme
Quantidade de terminais	1000
Frequência central	2.5 GHz
Distância mínima entre estação base e terminal	35 metros
Condição de propagação	sem linha de visada
Desvio-padrão desvanecimento lento	8 dB
Largura de banda	12 kHz
Parâmetros da Estação Base	Valor
Número de setores	1
Altura	35 metros
Tipo de antena	omnidirecional
Número de antenas	2
Espaçamento entre as antenas	5λ
Parâmetros do Terminal	Valor
Altura	1.5 metros
Tipo de antena	omnidirecional
Número de antenas	1
Velocidade	3 km/h
Figura de ruído	7 dB

A Figura 4.8 mostra a probabilidade de interrupção média do sistema e de cada uma das células separadamente em função da potência de transmissão considerando $\xi = 1$. Quando a capacidade requerida pelos terminais é $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz, as células apresentam valores muito próximos para a probabilidade de interrupção. No caso em que $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz, o terminal que requer maior capacidade está sempre na célula 2 e, nesta célula, a probabilidade de interrupção é bem maior que na célula 1. Por isso, o desempenho do sistema é muito próximo do desempenho da célula 2.

Na Figura 4.9 é apresentado o desempenho do sistema para $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz e alguns va-

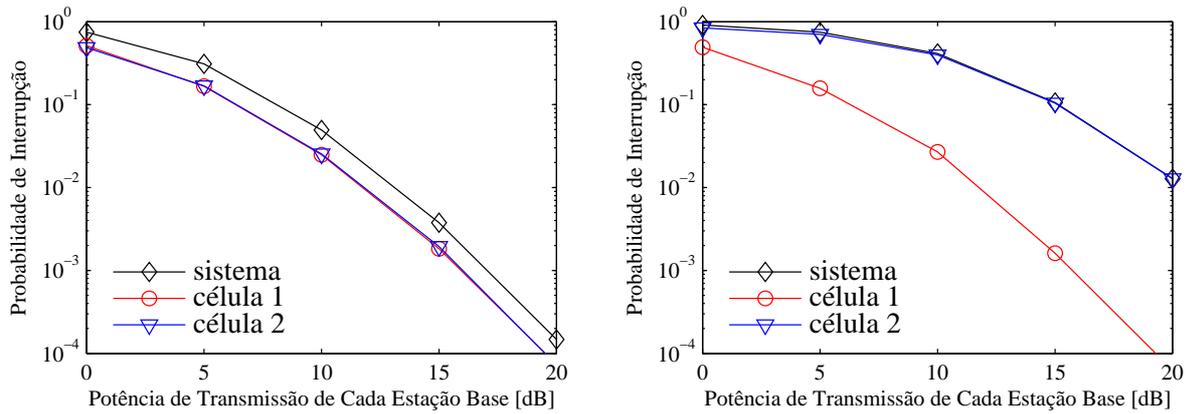


Figura 4.8: Probabilidade de interrupção em função da potência de transmissão para $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz (à esquerda) e para $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz (à direita)

lores de ξ . Nestas simulações considera-se que a capacidade requerida por cada terminal é igual a 1 bit/s/Hz. Observa-se que o melhor desempenho do sistema foi obtido quando $\xi = 1$, pois nesta configuração o modo cooperativo proporciona ganhos mais significativos não apenas para os terminais que estão na região central do cenário, mas também para os que estão nas bordas do cenário. Logo, todos os terminais podem se beneficiar bastante dos ganhos de multiplexação espacial providos pelas duas estações base. Além destes aspectos, observa-se que é melhor que o sistema opere no modo normal quando a potência de transmissão é baixa. Nessas condições, o ganho de multiplexação do esquema de cooperação é insignificante e, dessa maneira, o sistema poderia reduzir a carga dos canais de retorno. Contudo, à medida em que a potência de transmissão aumenta, torna-se mais vantajoso habilitar a cooperação entre as estações base.

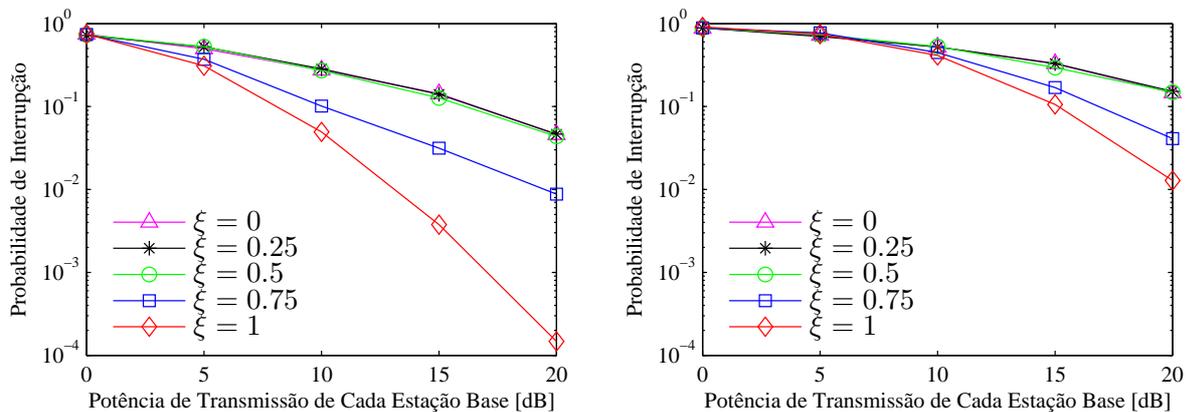


Figura 4.9: Probabilidade de interrupção em função da potência de transmissão para $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz (à esquerda) e para $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz (à direita)

Os resultados da Figura 4.10 mostram como a distância entre as estações base e os terminais influencia na probabilidade de interrupção das células. Nesta figura são apresentados resultados para o modo cooperativo e para o modo normal nos quais consideram-se três valores diferentes para a potência de transmissão das estações base. Observa-se nos três casos que os ganhos do

modo cooperativo em relação ao modo normal diminuem à medida que das distâncias aumentam. Nestes gráficos fica evidente que os terminais que estão nas bordas das células e experimentam condições de propagação ruins se beneficiam menos do esquema de cooperação do que os outros terminais que estão no centro da célula. Por isso, o modo cooperativo não apresenta ganhos expressivos para $\xi < 0.5$ na faixa de potência mostrada na Figura 4.9.

Supondo que os terminais deste sistema de comunicação sejam requisitados a operar com probabilidade de interrupção inferior a, por exemplo, 10^{-3} , então os dados da Figura 4.10 poderiam auxiliar na escolha do modo de operação e da potência de transmissão das estações base. Neste exemplo, seria necessário que a potência de transmissão fosse igual a 20 dB para que o sistema no modo normal atendesse aos requisitos somente dos terminais com distâncias inferiores a 350 metros de suas respectivas estações base. Contudo, no modo cooperativo seria possível atender estes mesmos terminais com a potência de transmissão igual a apenas 10 dB. Por outro lado, se a potência de transmissão fosse mantida em 20 dB, todos os terminais do sistema estariam operando abaixo do limite máximo da probabilidade de interrupção.

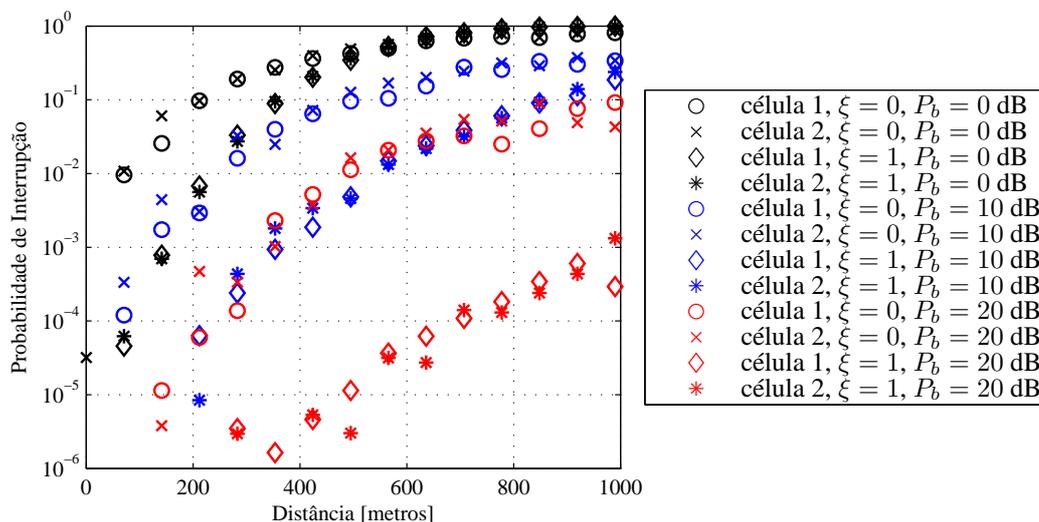


Figura 4.10: Probabilidade de interrupção em função da distância para alguns valores de potência de transmissão

Os mapas da Figura 4.11 mostram a probabilidade de interrupção medida em cada parte do cenário de simulação para o caso $\xi = 1$. As estações base estão posicionadas nas co-ordenadas $(x_1, y_1) = (750, 750)$ e $(x_2, y_2) = (2250, 750)$ e a potência de transmissão é igual a 10 dB. Os pontos em azul indicam os locais em que foram medidos os menores valores e os pontos em vermelho indicam os valores mais altos para a probabilidade de interrupção. O mapa à esquerda confirma que o desempenho médio das células é bem parecido para o caso em que a capacidade requerida é $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz. O mapa à direita, por sua vez, mostra o mapa $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz. Nela, a região $x > 1500$ metros apresenta um desempenho médio pior pois corresponde à área de cobertura da célula 2 e o terminal que requer maior capacidade sempre é posicionado dentro desta célula.

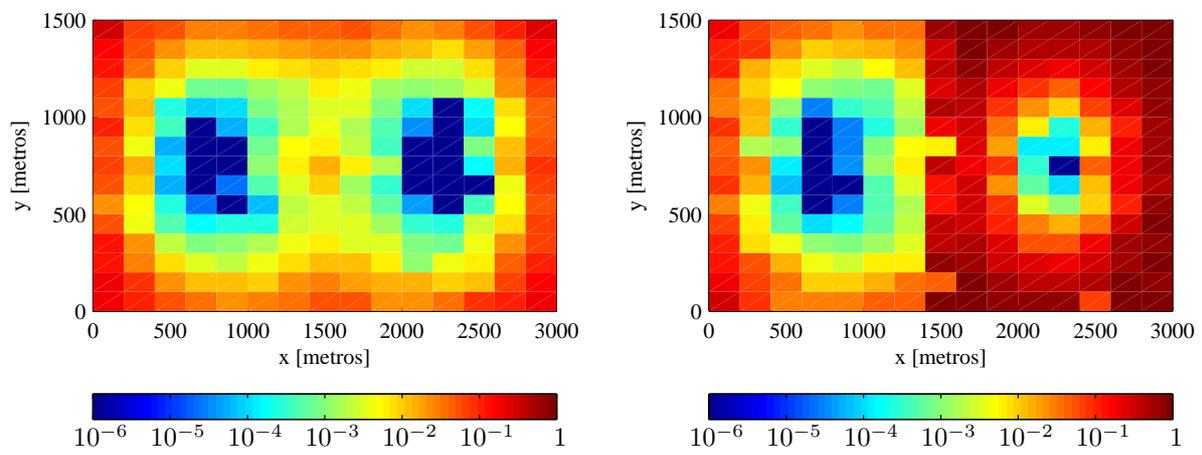


Figura 4.11: Mapa da probabilidade de interrupção para $\gamma = [1, 1]$ bits/s/Hz (à esquerda) e para $\gamma = [1, 3]$ bits/s/Hz (à direita)

5 COOPERAÇÃO EM SISTEMAS COM MÚLTIPLAS PORTADORAS

5.1 MODELO DO SISTEMA

A proposta de modelagem para o enlace de descida apresentada nesta seção é uma extensão do modelo analisado anteriormente para o caso com múltiplas portadoras. O cenário continua com a mesma configuração, com uma estação central, B estações base e K terminais, mas, agora, a técnica de múltiplo acesso é OFDMA (do inglês, *orthogonal frequency division multiple access*) com N portadoras. O objetivo, minimizar a probabilidade de interrupção do sistema, também permanece o mesmo, assim como as etapas básicas da transmissão de dados da estação central até os terminais. Também permanecem ideais os enlaces que ligam as estações base à estação central. Dessa forma, o sinal transmitido pela b -ésima estação base na n -ésima portadora é dado pela expressão:

$$\mathbf{x}_b[n] = \sum_{b=1}^B \sqrt{p_{bk}[n]} \mathbf{g}_{bk}[n] s_{bk}[n], \quad (5.1)$$

e está sujeito à limitação da potência disponível na estação base:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbb{E}[\mathbf{x}_b \mathbf{x}_b^H]) &\leq P_b \\ \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N p_{bk}[n] &\leq P_b. \end{aligned} \quad (5.2)$$

O sinal recebido pelo k -ésimo terminal na n -ésima portadora é:

$$\begin{aligned} y_k[n] &= \underbrace{\sum_{b=1}^B \sqrt{p_{bk}[n]} \mathbf{h}_{bk}^H[n] \mathbf{g}_{bk}[n] s_{bk}[n]}_{\text{signal}} \\ &+ \underbrace{\sum_{b=1}^B \mathbf{h}_{bk}^H[n] \sum_{j \neq k}^K \sqrt{p_{bj}[n]} \mathbf{g}_{bj}[n] s_{bj}[n]}_{\text{interferência}} + w_k[n]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Assim como no caso em que há apenas uma portadora, aqui também será aplicada uma técnica de pré-codificação linear. Supondo que, novamente, o ZF-BF possa ser aplicado de maneira ideal, então o vetor de pré-codificação $\mathbf{g}_{bk}[n]$ será independente de $\mathbf{h}_{bk}[n]$ e ortogonal a $\mathbf{h}_{bj}[n]$ para $j \neq k$. Esta operação elimina a interferência do sinal recebido, que é reescrito da seguinte maneira:

$$y_k[n] = \sum_{b=1}^B \sqrt{p_{bk}[n]} a_{bk}[n] s_{bk}[n] + w_k[n], \quad (5.4)$$

onde $a_{bk}[n] = \mathbf{h}_{bk}^H[n] \mathbf{g}_{bk}[n]$, e $|a_{ik}[n]|^2$ segue a distribuição chi-quadrado com $2(M - K + 1)$ graus de liberdade. Nesta situação o canal é seletivo em frequência, embora não haja correlação entre as respostas em frequência de portadoras adjacentes.

Novamente, considera-se que os terminais realizam a detecção do tipo SIC de forma que a capacidade do k -ésimo pode ser representada pela seguinte expressão:

$$R_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) \quad (5.5)$$

A região de capacidade determinística do sistema para uma dada realização do canal \mathbf{a} e para uma certa alocação de potência \mathbf{p} é dada por:

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}_+^K \mid R_k \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) \right\} \quad (5.6)$$

e a região de capacidade considerando que as estações base têm as potências máximas limitadas a (P_1, P_2, \dots, P_B) será igual a:

$$\mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P}) = \bigcup_{\sum_k \sum_n p_{bk}[n] \leq P_b} \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{p}). \quad (5.7)$$

5.1.1 Conhecimento total das realizações dos canais

Este é o cenário em que a probabilidade de interrupção do sistema é igual à probabilidade de γ estar fora da região de capacidade $\mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})$:

$$P_{\text{out}} = 1 - \Pr(\gamma \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})). \quad (5.8)$$

A alocação de recursos neste cenário também será realizada pelo algoritmo que iguala as probabilidades de interrupção individuais. Deve-se, portanto, solucionar o problema de otimização:

$$\min_{\sum w_k = 1} \max_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})} \sum_{k=1}^K w_k \frac{R_k}{\alpha_k}, \quad (5.9)$$

onde R_k é dado pela expressão (5.5). Novamente, o problema de otimização interno é um problema de maximização da capacidade total do sistema para $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_K)$ fixo. A solução do problema interno pode ser encontrada aplicando-se a técnica de decomposição dual estudada na seção 2.6. O problema externo é idêntico ao caso com uma única portadora e também é resolvido pelo método da bisseção quando há apenas dois terminais. Segue abaixo o algoritmo proposto para de alocação de recursos que minimiza a probabilidade de interrupção deste cenário.

Algoritmo 6 Alocação de recursos para o Cenário 1 - OFDMA

- 1: Inicializar $\mathbf{w} \in [0, 1]$
- 2: **repetir**
- 3: Resolver o problema de otimização:

$$R = \arg \max_{\mathbf{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, \mathbf{P})} \sum_{k=1}^K w_k \frac{R_k}{\alpha_k}$$

- 4: Calcular o subgradiente do k -ésimo terminal:

$$\delta_k = \frac{R_k}{\alpha_k} - R_1$$

- 5: Atualizar a variável \mathbf{w} de acordo com o gradiente calculado anteriormente
 - 6: **até** convergir
-

5.1.1.1 Maximização da capacidade total do sistema

O problema de maximização da capacidade total do sistema para $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_K)$ fixo é definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K w_k \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N p_{bk}[n] \leq P_b, \end{aligned} \quad (5.10)$$

O problema de otimização acima é convexo, uma vez que a função objetivo é côncava e as restrições são funções afins. A mesma abordagem adotada em [38] será seguida aqui e o problema será resolvido por meio da decomposição dual. O problema original (5.10) será decomposto em subproblemas menores e a solução de cada um destes subproblemas poderá ser encontrada separadamente [19]. Para aplicar este método, serão introduzidas BN variáveis de otimização auxiliares e o problema original é reformulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K w_k \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{k=1}^K p_{bk}[n] \leq C_b[n] \\ &&& \sum_{n=1}^N C_b[n] \leq P_b \end{aligned} \quad (5.11)$$

Agora, forma-se o Lagrangiano associado ao problema (5.11) com relação à restrição de

acoplamento $\sum_n C_b[n] \leq P_b$

$$\mathcal{L}(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K w_k \sum_{n=1}^N \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) - \sum_{b=1}^B \mu_b \sum_{n=1}^N C_b[n], \quad (5.12)$$

onde $\mu_b \geq 0$ é o multiplicador de Lagrange associado à b -ésima restrição de acoplamento. Assim, o problema de otimização principal é definido como:

$$\min_{\mu_b \geq 0} \left(\max_{\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}} \mathcal{L}(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \{\mu_b\}) \right). \quad (5.13)$$

Analisando a estrutura do problema (5.13) percebe-se que ele é separável em N subproblemas independentes, pois a função objetivo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \{\mu_b\}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) - \sum_{n=1}^N \mu_b C_b[n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{L}_n(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \{\mu_b\}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $\mathcal{L}_n(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \{\mu_b\})$ é igual a:

$$\mathcal{L}_n(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \{\mu_b\}) = \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) - \mu_b C_b[n]. \quad (5.15)$$

Portanto, o problema (5.13) foi separado em N subproblemas, cada um deles referentes a uma portadora, e que agora podem ser resolvidos independentemente uns dos outros. Convém ressaltar que a motivação principal para a aplicação da decomposição dual nesta situação é simplesmente a busca pela solução do problema de otimização. Conforme será mostrado, este objetivo é alcançado e, além disso, o método proposto ainda pode ser implementado em sistemas distribuídos nos quais a busca pelo ponto ótimo é potencialmente mais rápida.

Feitas estas observações, formula-se o seguinte subproblema referente à n -ésima portadora:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \mathcal{L}_n(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \{\mu_b\}) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{k=1}^K p_{bk}[n] \leq C_b[n]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

O Lagrangiano associado ao problema (5.16) é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{\text{sub}}(\{p_{bk}[n]\}, \{C_b[n]\}, \{\mu_b\}, \nu) &= \sum_{k=1}^K w_k \log \left(1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n] \right) \\ &\quad - \mu_b C_b[n] - \nu \left(\sum_{k=1}^K p_{bk}[n] - C_b[n] \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Avaliando as condições KKT de otimalidade do problema, tem-se que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n^{\text{sub}}}{\partial C_b[n]} = -\mu_b + \nu = 0, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n^{\text{sub}}}{\partial p_{bk}[n]} = \frac{w_k |a_{bk}[n]|^2}{1 + \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n]} - \mu_b = 0. \quad (5.19)$$

A condição de otimalidade (5.19) não pode ser resolvida analiticamente. Todavia, se a potência de todas as estações base, exceto a da b -ésima, for constante, então pode-se resolver a condição. Em outras palavras, assumindo-se que $d_{bk}[n] = \sum_{i \neq b} |a_{ik}[n]|^2 p_{ik}[n]$ é constante, pode-se determinar a potência de transmissão da estação base b para o terminal k na portadora n :

$$p_{bk}[n] = \left[\frac{w_k}{\mu_b} - \frac{1 + d_{bk}[n]}{|a_{bk}[n]|^2} \right]_+. \quad (5.20)$$

Finalmente, propõe-se o algoritmo de *waterfilling* iterativo em que a otimização com relação a μ_b é realizada por meio do método da bisseção.

Algoritmo 7 *Waterfilling* iterativo para maximização da capacidade total com OFDMA

- 1: Inicializar $p_{bk}[n] = P_b / KN$
- 2: **repetir**
- 3: **para** cada usuário **faça**
- 4: **para** cada portadora **faça**
- 5: Calcular a potência de transmissão

$$p_{bk}[n] = \left[\frac{w_k}{\mu_b} - \frac{1 + d_{bk}[n]}{|a_{bk}[n]|^2} \right]_+.$$

- 6: Atualizar os valores de $d_{bk}[n]$
 - 7: **fim para**
 - 8: **fim para**
 - 9: Atualizar o valor de μ_b
 - 10: **até** convergir
-

5.1.2 Conhecimento das estatísticas dos canais

Este é o cenário em que a unidade central conhece a densidade de probabilidade das variáveis aleatórias que modelam os canais, mas não conhece as realizações dos canais. Conforme observado anteriormente, as probabilidades de interrupção individuais são independentes e a pro-

abilidade de interrupção do sistema é igual a:

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}(\gamma, \mathbf{p}) &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr(R_k > \gamma_k) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log(1 + \Delta_{kn}) > \gamma_k\right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde $\Delta_{kn} = \sum_{b=1}^B |a_{bk}[n]|^2 p_{bk}[n]$. A alocação de recursos que minimiza a probabilidade de interrupção do sistema é dada pela solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && P_{\text{out}}(\gamma, \mathbf{p}) \\ &\text{sujeito a} && \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N p_{bk}[n] \leq P_b. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Assim como no caso em que há apenas uma portadora, Δ_{kn} também é uma forma Hermitiana quadrática de uma variável aleatória Gaussiana complexa pois pode ser escrito da maneira apresentada na equação (4.19). Sendo assim, sua função característica é dada pela expressão:

$$\Phi_{\Delta_{kn}}(s) = \frac{1}{\prod_{b=1}^B (1 + s\alpha_{bk}[n]p_{bk}[n])^{M-K+1}} \quad (5.23)$$

onde $\alpha_{bk}[n] = \sigma_{bk}[n]/(M - K + 1)$.

Definem-se as variáveis aleatórias auxiliares $\Psi_{kn} = \log(1 + \Delta_{kn})$ e $\Psi_k = \sum_n \Psi_{kn}$ cujas funções densidade de probabilidade são, respectivamente, $f_{\Psi_{kn}}(\Psi_{kn})$ e $f_{\Psi_k}(\Psi_k)$. Primeiramente, deseja-se encontrar $f_{\Psi_{kn}}(\Psi_{kn})$ e isto pode ser feito com a aplicação do seguinte teorema fundamental [35]:

$$\begin{aligned} f_{\Psi_{kn}}(\Psi_{kn}) &= f_{\Delta_{kn}}(\Delta_{kn}) \left| \frac{d\Psi_{kn}}{d\Delta_{kn}} \right|^{-1} \\ &= f_{\Delta_{kn}}(2^{\Psi_{kn}} - 1) \left| \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1 + \Delta_{kn}} \right|^{-1} \\ &= f_{\Delta_{kn}}(2^{\Psi_{kn}} - 1) \ln(2) 2^{\Psi_{kn}}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde $f_{\Delta_{kn}}(\Delta_{kn})$ é a densidade de probabilidade de Δ_{kn} dada pela transformada inversa de Laplace da expressão (5.23). Agora, para se encontrar a função $f_{\Psi_k}(\Psi_k)$ observa-se que a variável aleatória Ψ_k é definida pela soma de N variáveis aleatórias mutuamente independentes. Logo, sua densidade de probabilidade é igual à convolução das densidades de probabilidade destas N variáveis aleatórias [35]:

$$f_{\Psi_k}(\Psi_k) = f_{\Psi_{k1}}(\Psi_{k1}) * f_{\Psi_{k2}}(\Psi_{k2}) * \dots * f_{\Psi_{kN}}(\Psi_{kN}) \quad (5.25)$$

onde $f_{\Psi_{kn}}(\Psi_{kn})$ é definida pela expressão (5.24).

Finalmente, a probabilidade de interrupção do sistema é igual a:

$$P_{\text{out}}(\gamma) = 1 - \prod_{k=1}^K \left(1 - \int_{-\infty}^{\gamma_k} f_{\Psi_k}(\Psi_k) d\Psi_k \right) \quad (5.26)$$

Infelizmente, a abordagem proposta não parece ser viável principalmente devido à função $f_{\Delta_{kn}}(\Delta_{kn})$, que é bastante complexa e numericamente mal condicionada. Isto torna ainda mais difícil a tarefa de se encontrar uma forma fechada para a expressão (5.26). Posteriormente, esta expressão ainda deveria substituir a função objetivo do problema de otimização (5.22), tornando ainda mais complicados os procedimentos de minimização da probabilidade de interrupção do sistema. É necessário, portanto, abordar o problema de outra maneira.

A nova abordagem para o problema é motivada pelos resultados de simulação descritos a seguir. O cenário analisado é constituído por duas estações base, cada uma com duas antenas, que transmitem um sinal OFDM para dois terminais, cada um com uma única antena, conforme ilustrado na Figura 4.1. A capacidade requerida por ambos os terminais é de 1 bit por uso do canal e os enlaces são simétricos, isto é, a potência do ruído é a mesma nos quatro enlaces. Considera-se que a potência de transmissão das duas estações é igual a P_B e distribui-se metade da potência disponível para cada terminal de modo que a potência do sinal transmitido pela estação base b ao terminal k na portadora n é igual a $p = P_b/KN$. O desempenho do sistema é apresentado na Figura 5.1, que mostra a probabilidade de interrupção em função da relação sinal-ruído para diferentes quantidades de portadoras.

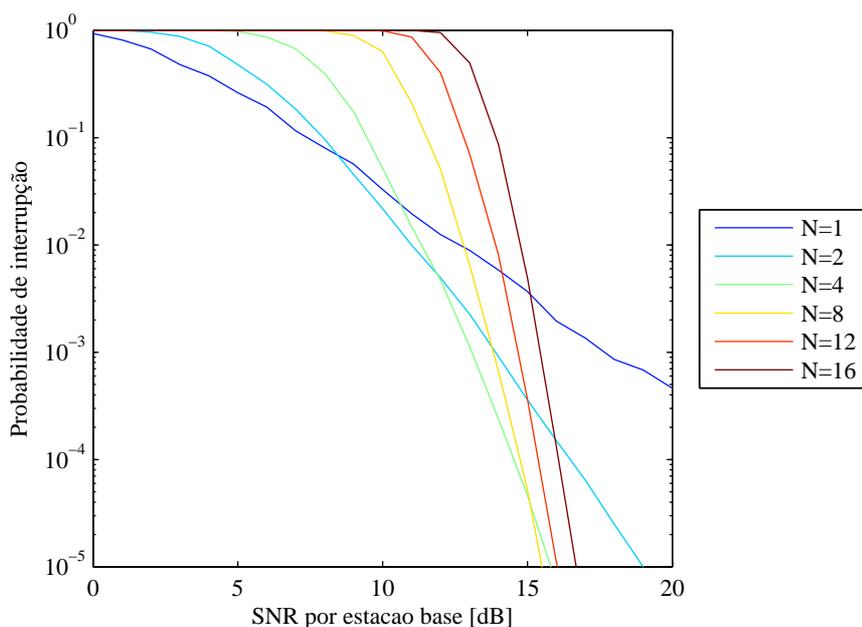


Figura 5.1: Probabilidade de interrupção do sistema em função da SNR por estação base para diferentes quantidades de portadoras

Estes resultados mostram que em algumas situações a melhor estratégia consiste na alocação de toda a potência disponível de um usuário em uma única portadora, ainda que a alocação em múltiplas portadoras seja possível. O exemplo disso ocorre quando a SNR assume valores entre 0 e 5 dB. Nesta faixa de valores a perda causada pela divisão da potência entre várias portadoras é maior do que o ganho de diversidade em frequência proporcionado pelo emprego da técnica OFDM. É por isso que nesta região de operação do sistema o desempenho é melhor quando toda

a potência é alocada a apenas uma portadora. Contudo, à medida em que a potência total disponível aumenta, torna-se mais vantajoso dividir a potência entre duas ou até mais portadoras dependendo do valor da relação sinal-ruído. Este comportamento pode ser melhor compreendido visualizando-se estes mesmos resultados de simulação da maneira como está apresentada na Figura 5.2, que mostra a probabilidade de interrupção em função do número de portadoras alocadas para diferentes níveis de relação sinal-ruído.

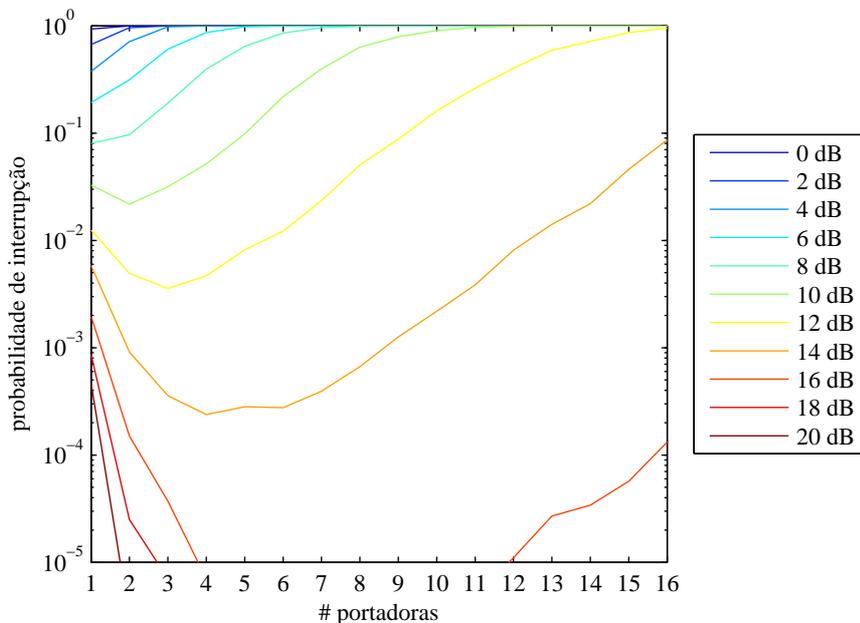


Figura 5.2: Probabilidade de interrupção do sistema em função número de portadoras para diferentes níveis de relação sinal-ruído

O comportamento descrito no parágrafo anterior também é observado no caso em que há quatro antenas por estação base. A mesma análise feita anteriormente para a alocação de potência contínua válida, embora seja um pouco mais difícil visualizar graficamente o desempenho do sistema. A dificuldade deve-se à melhoria de desempenho devido às antenas adicionais e isso aumenta consideravelmente o tempo de simulação necessário para se obter gráficos melhores. Os dados deste segundo caso de simulação são apresentados nas Figuras 5.3 e 5.4.

Feitas estas observações, definem-se as variáveis auxiliares $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ que descrevem completamente a alocação de recursos do sistema de modo que as potências de transmissão das estações base sejam iguais a:

$$p_{11}[n] = \theta_1 \frac{P_1}{N}, \quad p_{12}[n] = (1 - \theta_1) \frac{P_1}{N}, \quad (5.27)$$

$$p_{21}[n] = (1 - \theta_2) \frac{P_2}{N}, \quad p_{22}[n] = \theta_2 \frac{P_2}{N}, \quad (5.28)$$

e propõe-se o Algoritmo 8 para alocação de potência no cenário em que há apenas o conhecimento das estatísticas do canal. Logo após, são analisados cada um dos passos do algoritmo proposto.

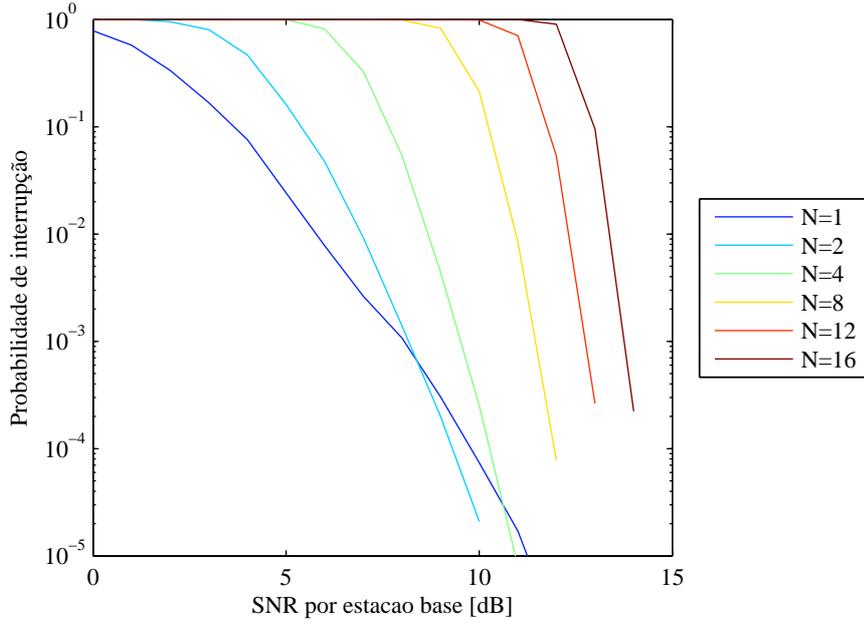


Figura 5.3: Probabilidade de interrupção do sistema (com 4 antenas por estação) em função da SNR por estação base para diferentes quantidades de portadoras

A alocação de potência inicial feita pelo algoritmo consiste em dividir igualmente a potência entre todas as portadoras dos dois terminais. Feita esta alocação inicial, encontra-se a quantidade ótima de portadoras N_{opt} que minimiza a probabilidade de interrupção do sistema e é dada pela solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & P_{\text{out}}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{p}) = 1 - \prod_{k=1}^K \Pr \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log(1 + \Delta_{kn}) > \gamma_k \right) \\ \text{sujeito a} \quad & N \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \quad (5.29)$$

A solução do problema (5.29) não é trivial e a alternativa proposta para os estudos iniciais baseia-se em simulações de Monte Carlo. Assim, todas as soluções possíveis para N são avaliadas e a melhor é a escolhida.

O próximo passo do algoritmo é atualizar as potências de transmissão utilizando o valor ótimo encontrado para N_{opt} no passo anterior. Em seguida, resolvem-se de maneira independente N_{opt} problemas de otimização descritos por (4.27). Para o n -ésimo problema, considera-se que a potência máxima de cada estação base é igual a $p_{b1}[n] + p_{b2}[n]$, isto é, a soma da potência disponível para alocação na n -ésima portadora.

O último passo é atualizar os valores de θ_1 e θ_2 de acordo com a alocação feita anteriormente. A sequência de instruções apresentada acima é repetida até o algoritmo convergir.

Convém observar que, a rigor, é necessário definir uma variável auxiliar independente $\theta_k[n]$ para cada portadora. Entretanto, isto não é feito pois neste modelo de sistema considera-se que todas as portadoras têm as mesmas propriedades estatísticas. Como a alocação de potência deste

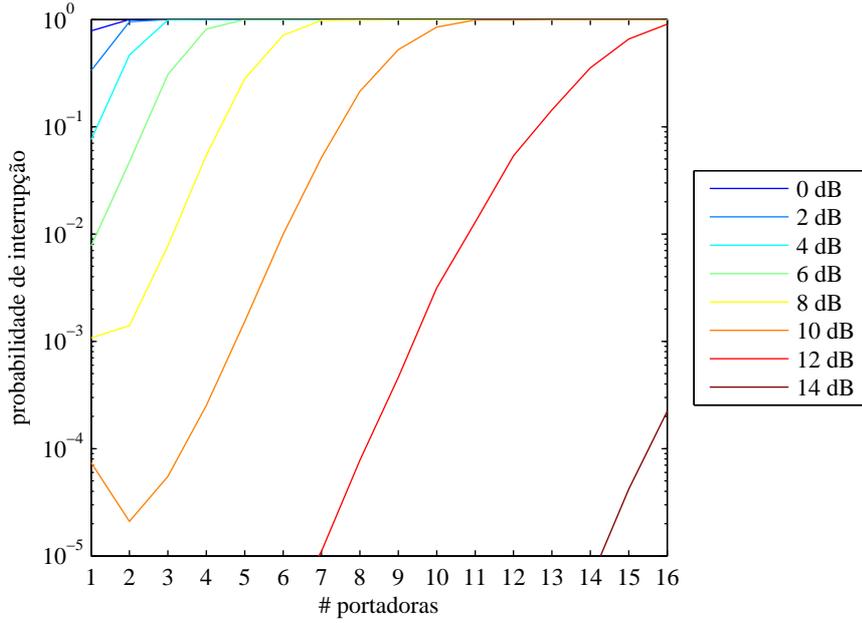


Figura 5.4: Probabilidade de interrupção do sistema em função número de portadoras para diferentes níveis de relação sinal-ruído

cenário é realizada com base apenas nestas propriedades, esta simplificação é feita para facilitar a implementação do algoritmo.

5.1.3 Nenhum conhecimento dos canais

Neste terceiro cenário, a potência disponível deve ser igualmente dividida entre os terminais. Portanto, a potência do sinal transmitido pela estação base b ao terminal k na portadora n é igual a $p = P_b / KN$ e tem-se que $\Delta_{kn}^e = p \sum_b |a_{bk}[n]|^2$. Assim, a probabilidade de interrupção do sistema é igual a:

$$\begin{aligned}
 P_{\text{out}}(\gamma, \mathbf{p}) &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log(1 + \Delta_{kn}^e) > \gamma_k \right) \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr \left(\log \prod_{n=1}^N (1 + \Delta_{kn}^e) > N\gamma_k \right) \\
 &= 1 - \prod_{k=1}^K \Pr \left(\prod_{n=1}^N (1 + \Delta_{kn}^e) > 2^{N\gamma_k} \right), \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

onde Δ_k^e segue uma distribuição chi-quadrado com $4(M - K + 1)$ graus de liberdade e sua função de distribuição cumulativa é dada pela expressão [35]:

$$F_{\Delta_{kn}^e}(y) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{M - K + 1}{p} y \right) \right] \sum_{k=0}^{2(M-K+1)-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{M - K + 1}{p} y \right)^k. \tag{5.31}$$

Algoritmo 8 Alocação de recursos para o cenário 2 - OFDMA

- 1: Inicializar $\theta_{bk} = 1/K$ para $b = 1, \dots, B$ e $k = 1, \dots, K$
 - 2: Inicializar $N_{\text{opt}} = N$
 - 3: **repetir**
 - 4: Calcular $p_{bk}[n] = \theta_{bk}P_b/N_{\text{opt}}$
 - 5: Encontrar N_{opt} que minimiza a probabilidade de interrupção
 - 6: Atualizar $p_{bk}[n] = \theta_{bk}P_b/N_{\text{opt}}$
 - 7: **para** cada portadora **faça**
 - 8: Resolver o problema de otimização (4.27)
 - 9: **fim para**
 - 10: Atualizar θ_1 e θ_2
 - 11: **até** convergir
-

5.2 RESULTADOS

Assim como nos resultados apresentados para o sistema com uma única portadora na seção 4.3, todos os resultados a seguir se referem à situação em que há apenas duas estações base e dois terminais. A capacidade requerida pelos terminais, o número de antenas em cada estação base e o nível de ruído dos enlaces são indicados em cada um dos casos.

Primeiramente é avaliado o desempenho do algoritmo de *waterfilling* no cenário com conhecimento de todas as realizações do canal. Considera-se que há duas antenas por estação base e que a capacidade requerida é de $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal. Além disso, considera-se que os enlaces são simétricos, isto é, $\sigma_{bk}[n] = 1$. Observa-se um comportamento semelhante ao que foi visto na Figura 5.1 quando há apenas o conhecimento das estatísticas dos canais. Novamente, a alocação de muitas portadoras na região de baixa relação sinal-ruído apresenta um desempenho pior do que a alocação de poucas, ou até mesmo uma única portadora, devido à relação de compromisso entre os ganhos de diversidade em frequência e as perdas causadas pela divisão da potência entre as portadoras. Dessa maneira, não se pode fazer a aplicação direta da estratégia de alocação na forma como ela é proposta no Algoritmo 6. É necessário resolver um problema de otimização semelhante ao descrito pela equação (5.29) para encontrar a quantidade ideal de portadoras que minimiza a probabilidade de interrupção do sistema.

O desempenho do algoritmo de *waterfilling* no cenário com conhecimento de todas as realizações do canal é comparado com o desempenho do algoritmo proposto (algoritmo de Chernoff estendido) para o cenário com conhecimento das estatísticas dos canais. As Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 mostra essa comparação e, além disso, inclui o desempenho do cenário sem conhecimento dos canais. Para os resultados específicos da Figura 5.5 não é feita a escolha do número ótimo de portadoras. Consideram-se enlaces simétricos e estações base com duas antenas cada. Novamente, quando $\gamma = [1 \ 3]$, o conhecimento das estatísticas melhora o desempenho do sistema. O algoritmo de *waterfilling* sempre apresenta desempenho superior, pois a potência de transmissão

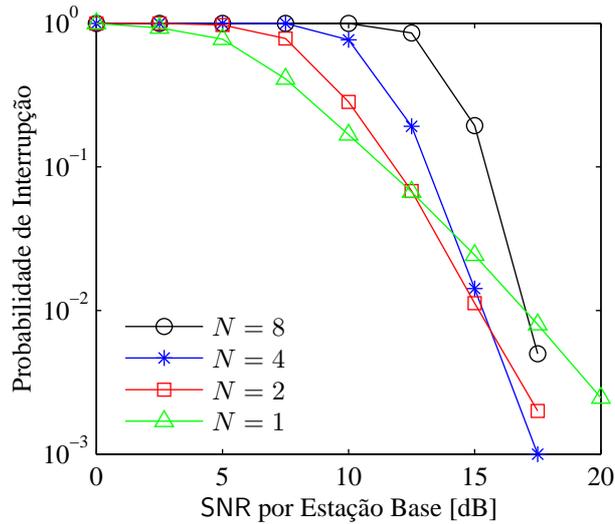


Figura 5.5: Probabilidade de interrupção em função da SNR com 2 antenas por estação base para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal no cenário com conhecimento das realizações do canal

pode ser adaptada de maneira ideal para cada uma das realizações do canal.

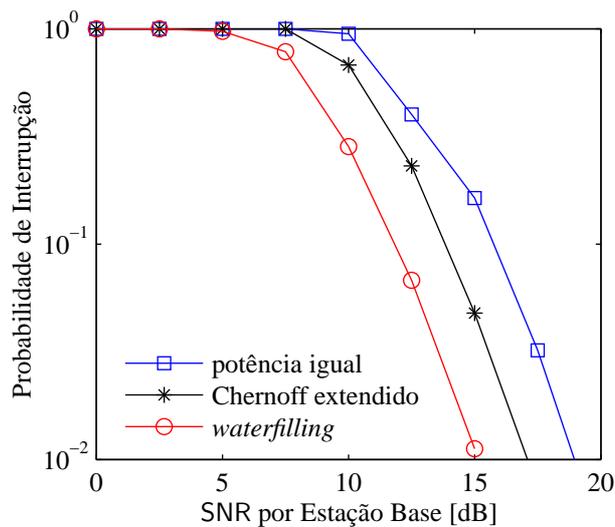


Figura 5.6: Probabilidade de interrupção em função da SNR com 2 portadoras para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal

A Figura 5.9 compara os desempenhos dos algoritmos de *waterfilling* e de Chernoff estendido quando é feita escolha do número ótimo de portadoras alocadas. Para uma comparação definitiva entre os algoritmos, estas são as curvas a serem analisadas, pois elas indicam o melhor desempenho que se pode obter para cada uma das estratégias de alocação de recursos em um sistema de comunicação com múltiplas portadoras. Nestas condições, a otimização do número de portadoras associada a cada um dos algoritmos consegue extrair os maiores ganhos das estratégias de alocação de recursos.

Para o cenário com conhecimento das estatísticas dos canais, são discutidos a seguir os resul-

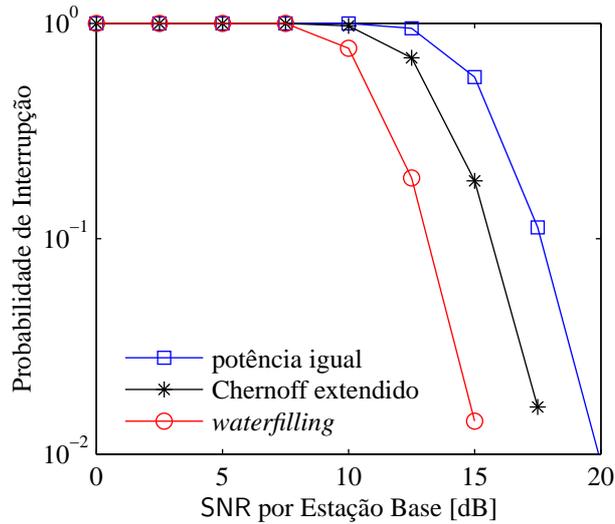


Figura 5.7: Probabilidade de interrupção em função da SNR com 4 portadoras para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal

tados que foram apresentados em [15]. São mostrados os valores ótimos encontrados para θ_1, θ_2 e para a quantidade de portadoras alocadas em função da relação sinal-ruído. Na Figura 5.10 foi considerado um sistema com apenas duas antenas de transmissão por estação base e com enlaces simétricos, isto é, a potência do ruído é a mesma em todos os enlaces. Observa-se no gráfico à esquerda da Figura 5.10 que na situação em que a capacidade requerida é a mesma para ambos os terminais, obtêm-se $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$, resultado que já era esperado visto que nesta configuração os terminais estão exatamente sob as mesmas condições de ruído. Quanto ao número de portadoras alocadas, ele vai aumentando à medida que a relação sinal-ruído também aumenta, de modo a explorar ao máximo os efeitos da diversidade em frequência e mantendo o compromisso de reduzir as perdas causadas pela divisão de potência entre muitas portadoras.

Na situação em que o terminal 1 requer 1 bit por uso do canal e o terminal 2 requer 3 bits por uso do canal a alocação de potência é diferente, conforme apresentado à direita na Figura 5.10. Nesta configuração, o algoritmo proposto aloca uma fração bem significativa da potência total disponível para o terminal 2 de modo a reduzir a probabilidade de interrupção do sistema. Contudo, isto só ocorre quando a relação sinal-ruído está acima de um certo limiar (em torno de 9 dB neste caso), pois é apenas nessa região de operação que as condições de otimalidade definidas para o problema (4.27) são satisfeitas. Abaixo desse limiar o algoritmo proposto simplesmente divide igualmente a potência disponível entre os terminais.

Quando os enlaces são assimétricos, o algoritmo tende a alocar um pouco mais de potência em enlaces nos quais o nível de ruído é menor. De acordo com o resultado apresentado na Figura 5.11, este comportamento é observado especialmente na faixa intermediária de relação sinal-ruído. Em baixos níveis de SNR a potência é dividida de maneira igual pois as condições de otimalidade de (4.27) não são satisfeitas; em altos níveis de SNR a alocação se aproxima da divisão igualitária pois a diferença de desempenho dos enlaces diminui com o aumento da potência

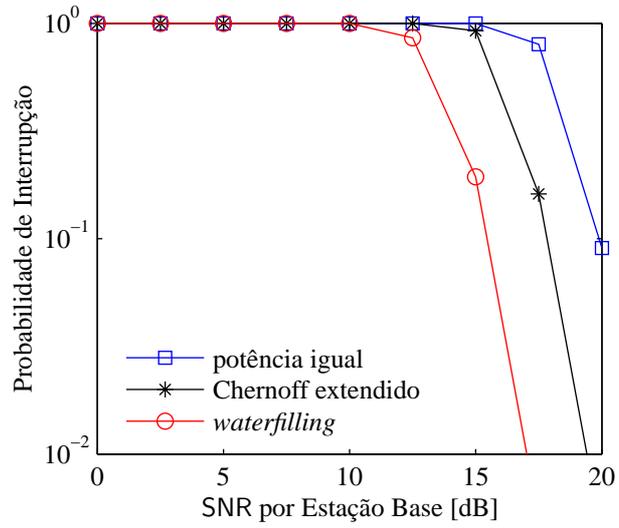


Figura 5.8: Probabilidade de interrupção em função da SNR com 8 portadoras para $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal

de transmissão.

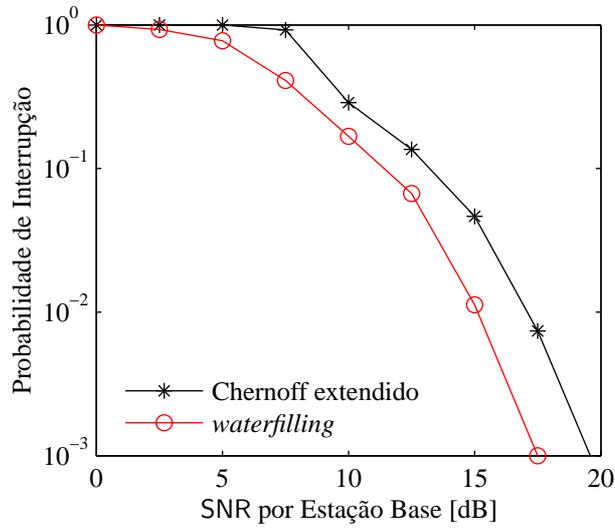


Figura 5.9: Probabilidade de interrupção em função da SNR com $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal com otimização do número de portadoras alocadas

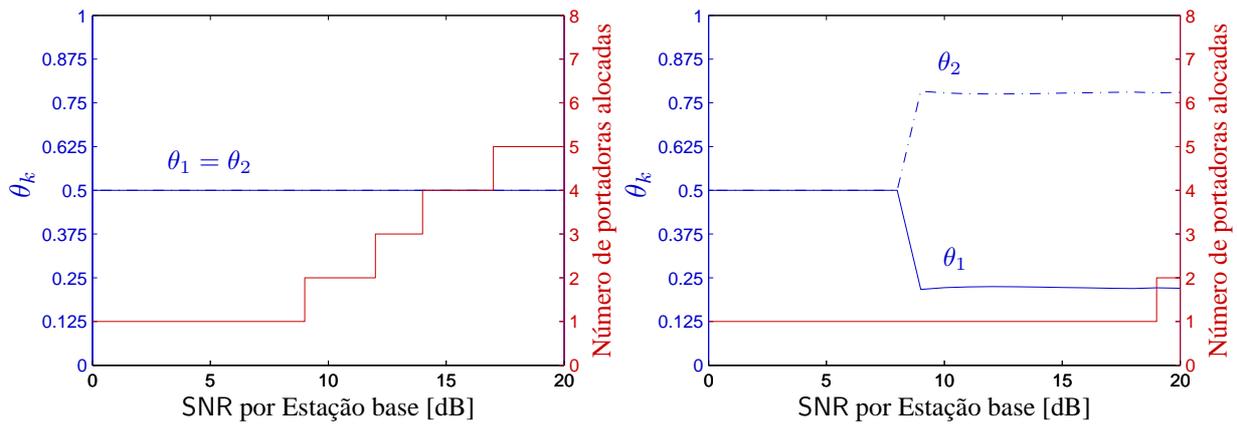


Figura 5.10: θ_1 , θ_2 e N_{opt} em função da SNR com duas antenas por estação base, enlaces simétricos e $\gamma = [1 \ 1]$ bits por uso do canal (à esquerda) e $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal (à direita)

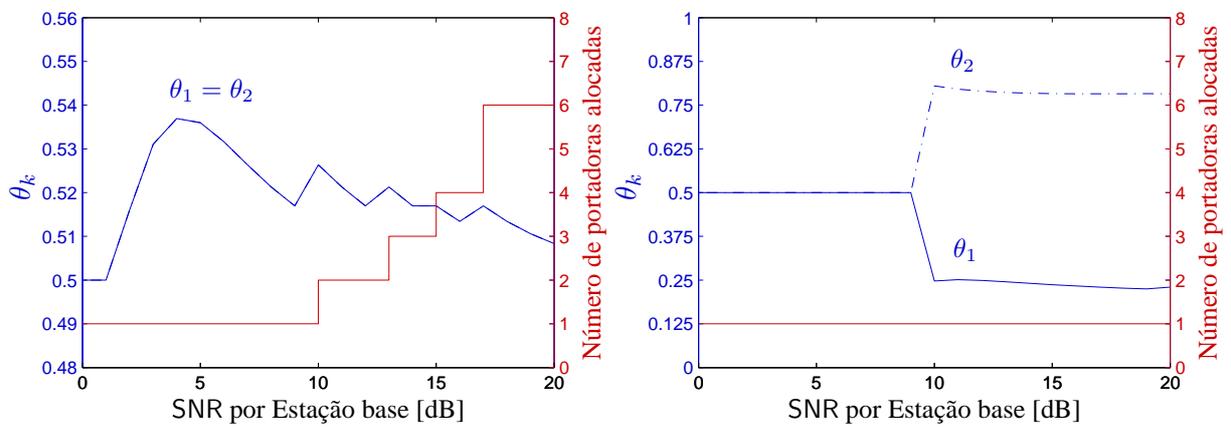


Figura 5.11: θ_1 , θ_2 e N_{opt} em função da SNR com duas antenas por estação base, enlaces assimétricos e $\gamma = [1 \ 1]$ bits por uso do canal (à esquerda) e $\gamma = [1 \ 3]$ bits por uso do canal (à direita)

6 CONCLUSÕES

O modelo do enlace de descida cooperativo que foi analisado apresenta grande utilidade como ponto de partida para o desenvolvimento de estratégias de alocação de recursos em sistemas reais. Os resultados preliminares no caso em que há uma única portadora mostram os ganhos potenciais que o modelo pode proporcionar, principalmente quando aumenta-se o número de antenas por estação base. Já as simulações para o caso onde há múltiplas portadoras mostram que a estratégia de alocação de recursos deve explorar a relação entre os ganhos proporcionados pela diversidade de frequência e as perdas causadas pela diminuição da relação sinal-ruído por portadora, principalmente quando existe a possibilidade de dividir a potência total entre muitas portadoras.

A partir dos resultados apresentados na Seção 4.3.1 já é possível analisar o desempenho do modelo de cooperação proposto em [13] em condições mais realistas. De modo geral, pode-se afirmar que os ganhos do modo de transmissão cooperativo são mais significativos quando a potência do sinal recebido pelos terminais é mais alta. Por este motivo, os terminais mais próximos das estações base experimentam ganhos maiores em todas as situações analisadas, enquanto que o desempenho dos terminais mais próximos das bordas das células melhora apenas quando a potência de transmissão das estações base é maior.

Ainda em relação aos resultados da Seção 4.3.1, observa-se que em sistemas de comunicação sem limitação na capacidade dos canais de retorno, é mais vantajoso ativar o modo cooperativo para todos os terminais. Contudo, se os canais de retorno forem limitados, torna-se necessário definir critérios mais complexos para a seleção do modo de transmissão dos terminais. Tais critérios poderiam considerar não apenas a posição dos terminais em relação à estação base, mas também a capacidade requerida, por exemplo. Outra consideração importante quanto a estas simulações reside no fato de o modelo de cooperação original considerar um canal ideal. Para explorar as características específicas do modelo de canal que foi empregado nas simulações é necessário modificar as estratégias de alocação de recursos e este é um tópico a ser explorado em trabalhos futuros.

Existem alguns problemas associados a este trabalho que ainda não foram resolvidos, especialmente para sistemas com múltiplas portadoras e conhecimento das estatísticas dos canais. Um destes problemas consiste na elaboração de uma prova matemática formal para a convergência do algoritmo de alocação de recursos que foi proposto. Além disso, ainda não foi proposta uma solução analítica para se encontrar o número ótimo de portadoras alocadas e para a alocação de recursos em sistemas com múltiplas portadoras.

Para este trabalho ainda existem diversas extensões que podem ser exploradas. O modelo de cooperação não considera algumas características relevantes em sistemas reais, tais como o impacto de erros na estimação dos canais, atraso nos enlaces de retorno e o sincronismo da rede. A análise destas características é importante para se ter uma estimativa mais precisa do desem-

penho do modelo em sistemas reais. Além disso, para os sistemas com múltiplas portadoras é interessante analisar o impacto das técnicas de codificação, principalmente porque o desempenho do OFDM é bastante sensível a estas técnicas.

Outro ponto interessante a ser explorado é o impacto da correlação entre as antenas de transmissão no desempenho do sistema. Este impacto pode ser avaliado através da mudança do parâmetro de simulação que controla a distância entre as antenas da estação base e é importante verificar a robustez do modelo de cooperação diante de uma condição como esta, que é comum em sistemas reais devido às limitações na área de instalação dos equipamentos.

Por fim, outra possibilidade de extensão deste trabalho consiste na aplicação de pré-codificadores lineares e não-lineares sob condições reais. No modelo aqui apresentado, considera-se apenas o emprego de pré-codificadores lineares ideais e seria interessante observar o impacto destas mudanças no desempenho do sistema. Além disso, também poderia ser observada a degradação que seria causada por atrasos e erros de estimação do canal. Estas últimas propostas são de extrema importância para o estudo do modelo. A análise matemática da capacidade do sistema sob estas condições talvez se torne inviável e a avaliação de desempenho do modelo por meio de simulações pode se consolidar como a principal ferramenta de validação do modelo como uma solução prática de redução da interferência intercelular.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LEE, J.; JINDAL, N. Symmetric capacity of MIMO downlink channels. In: *IEEE International Symposium on Information Theory*. Seattle, WA, EUA: IEEE, 2007.
- [2] TELATAR, E. Capacity of multi-antenna Gaussian channels. *European Transactions on Telecommunications*, v. 10, n. 6, p. 585–596, 1999.
- [3] FOSCHINI, G.; GANS, M. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Communications*, v. 6, p. 311–335, 1998.
- [4] CATREUX, S.; DRIESSEN, P.; GREENSTEIN, L. Simulation results for an interference-limited multiple input multiple output cellular system. In: *IEEE Global Telecommunications Conference*. USA: IEEE, 2000. v. 2, p. 1094–1096.
- [5] 3GPP TS 36.300. *Technical Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) and Evolved Universal Terrestrial Radio Access Network (E-UTRAN); Overall description; Stage 2 (Release 8)*. Sophia Antipolis, France, Mar 2009.
- [6] IEEE 802.16e-2005. *IEEE Standard for Local and metropolitan area networks Part 16: Air Interface for Fixed and Mobile Broadband Wireless Access Systems Amendment for Physical and Medium Access Control Layers for Combined Fixed and Mobile Operation in Licensed Bands*. USA, Dec 2005.
- [7] ANDREWS, J.; CHOI, W.; JR, R. H. Overcoming interference in spatial multiplexing MIMO cellular networks. *IEEE Wireless Communications*, v. 14, n. 6, p. 95–104, Dez 2007.
- [8] ZHANG, H.; DAI, H. Cochannel interference mitigation and cooperative processing in downlink multicell multiuser MIMO networks. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, Hindawi Publishing Corporation, New York, NY, EUA, v. 2004, n. 2, p. 222–235, 2004.
- [9] JING, S. et al. Multicell downlink capacity with coordinated processing. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, Hindawi Publishing Corporation, New York, NY, EUA, v. 2008, 2008.
- [10] GOLDSMITH, A. et al. Capacity limits of MIMO channels. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 21, n. 5, p. 684–702, 2003.
- [11] SHAMAI, S.; ZAIDEL, B. M. Enhancing the cellular downlink capacity via co-processing at the transmitting end. In: *IEEE Vehicular Technology Conference*. Rhodes, Greece: IEEE, 2001. v. 3, p. 1745–1749.

- [12] MARSCH, P.; FETTWEIS, G. On multicell cooperative transmission in backhaul-constrained cellular systems. *Annales des Télécommunications*, v. 63, n. 5-6, p. 253–269, 2008.
- [13] KOBAYASHI, M.; DEBBAH, M.; BELFIORE, J.-C. Outage efficient strategies for network MIMO with partial CSIT. In: *IEEE International Symposium on Information Theory*. Seoul, Korea: IEEE, 2009.
- [14] SOUZA, E. B.; VIEIRA, R. D.; CARVALHO, P. H. P. Análise da probabilidade de interrupção para sistemas MIMO cooperativo. In: *Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*. Blumenau, Brazil: SBrT, 2009.
- [15] SOUZA, E. B.; VIEIRA, R. D.; CARVALHO, P. H. P. Outage probability for multicarrier cooperative MIMO with statistical channel knowledge. In: *IEEE Vehicular Technology Conference*. Anchorage, Alaska, USA: IEEE, 2009.
- [16] BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex optimization*. New York, NY, EUA: Cambridge University Press, 2004.
- [17] LUENBERGER, D. *Linear and nonlinear programming*. 2. ed. Reading, MA, EUA: Addison-Wesley, 1984.
- [18] BERTSEKAS, D. *Nonlinear Programming*. 2. ed. Belmont, MA, EUA: Athena Scientific, 1999.
- [19] BOYD, S. et al. Notes on decomposition methods. Notes for EE364B, Stanford University. Fev 2007.
- [20] COVER, T.; THOMAS, J. *Elements of information theory*. 2. ed. New York, NY, EUA: Wiley-Interscience, 2006.
- [21] TSE, D.; VISWANATH, P. *Fundamentals of wireless communication*. New York, NY, EUA: Cambridge University Press, 2005.
- [22] GOLDSMITH, A. *Wireless communications*. New York, NY, EUA: Cambridge University Press, 2005.
- [23] WEINSTEIN, S.; EBERT, P. Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete Fourier transform. *IEEE Transactions on Communication Technology*, v. 19, n. 5, p. 628–634, 1971.
- [24] WINTERS, J. On the capacity of radio communication systems with diversity in a Rayleigh fading environment. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 5, n. 5, p. 871–878, 1987.
- [25] WINTERS, J. H. The diversity gain of transmit diversity in wireless systems with Rayleigh fading. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 47, n. 1, p. 119–123, 1998.

- [26] ALAMOUTI, S. M. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 16, n. 8, p. 1451–1458, 1998.
- [27] LAY, D. *Linear algebra and its applications*. 2. ed. Reading, MA, EUA: Addison Wesley, 1997.
- [28] LI, L.; GOLDSMITH, A. Capacity and optimal resource allocation for fading broadcast channels - Part I: Ergodic capacity. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 47, n. 3, p. 1083–1102, 2001.
- [29] LI, L.; GOLDSMITH, A. Capacity and optimal resource allocation for fading broadcast channels - Part II: Outage capacity. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 47, n. 3, p. 1103–1127, 2001.
- [30] VISWANATHAN, H.; VENKATESAN, S.; HUANG, H. Downlink capacity evaluation of cellular networks with known interference cancellation. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 21, n. 5, p. 802–811, 2003.
- [31] VISWANATH, P.; TSE, D. Sum capacity of the vector Gaussian broadcast channel and uplink-downlink duality. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 49, p. 1912–1921, 2003.
- [32] YU, W. et al. Iterative water-filling for gaussian vector multiple access channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 50, p. 145–152, 2004.
- [33] BIGLIERI, E. et al. Simple method for evaluating error probabilities. *Electronics Letters*, IEE, v. 32, n. 3, p. 191–192, 1996.
- [34] KOBAYASHI, M.; DEBBAH, M.; BELFIORE, J.-C. Outage-efficient transmission strategies in the multicell downlink. In preparation.
- [35] PAPOULIS, A.; PILLAI, S. *Probability, random variables and stochastic processes*. 4. ed. New York, NY, EUA: McGraw-Hill, 2002.
- [36] IST-WINNER II. *D1.1.2 WINNER II channel models*. Sep 2007. [online] Available: <https://www.ist-winner.org/>.
- [37] IST-WINNER II. *D5.4 Final report on link level and system level channel models*. Nov 2005. [online] Available: <https://www.ist-winner.org/>.
- [38] KOBAYASHI, M.; CAIRE, G. Iterative waterfilling for weighted rate sum maximization in MIMO-OFDM broadcast channels. In: *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Honolulu, Hawaii, EUA: IEEE, 2007.
- [39] CAIRE, G. Introduction to digital communications. Course reader. Abr 2002.

ANEXOS

A. FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE UMA FORMA QUADRÁTICA

Uma forma quadrática (ou forma hermitiana quadrática) de \mathbb{R}^n é, por definição [27], uma função \mathcal{Q} definida em \mathbb{R}^n cujo valor em um vetor \mathbf{x} pode ser calculado a partir de uma expressão da forma $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, onde \mathbf{A} é uma matriz simétrica de ordem n . A matrix \mathbf{A} é chamada de **matrix da forma quadrática**.

Neste anexo encontra-se a demonstração apresentada em [39], segundo a qual a função característica da forma hermitiana quadrática $\Delta = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, quando \mathbf{x} segue uma distribuição normal complexa $\mathcal{N}_C(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{R})$, é dada pela seguinte expressão:

$$\Phi_{\Delta}(s) = \frac{\exp(-s\bar{\mathbf{x}}^H \mathbf{A} (\mathbf{I} + s\mathbf{R}\mathbf{A})^{-1} \bar{\mathbf{x}})}{\det(\mathbf{I} + s\mathbf{R}\mathbf{A})}. \quad (\text{A.1})$$

Como \mathbf{R} é hermitiana positiva definida, ela pode ser decomposta da seguinte maneira

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H,$$

onde \mathbf{U} é uma matriz unitária cujas colunas são os autovetores normalizados de \mathbf{R} , e $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ contem os autovalores de \mathbf{R} . Como $\lambda_i > 0$, pode-se escrever $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Psi}^2$, onde $\mathbf{\Psi} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Logo, o novo vetor gaussiano $\mathbf{w} = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{U}^H \mathbf{x}$ é formado por elementos independentes e identicamente distribuídos com covariância unitária, pois

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})(\mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}})^H] &= \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{U}^H \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{\Psi}^{-1} \\ &= \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{U}^H \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H \mathbf{U} \mathbf{\Psi}^{-1} \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Analisando também a relação inversa $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{\Psi}\mathbf{w}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbf{w}^H \mathbf{\Psi} \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{\Psi} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{T} \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Na equação acima, a matrix hermitiana $\mathbf{T} = \mathbf{\Psi} \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \mathbf{\Psi}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} \mathbf{\Phi} \mathbf{S}^H,$$

onde \mathbf{S} é uma matriz unitária e $\mathbf{\Phi} = \text{diag}(\phi_1, \dots, \phi_n)$. Define-se um novo vetor gaussiano $\mathbf{v} = \mathbf{S}^H \mathbf{w}$ com covariância \mathbf{I} e, finalmente, a forma quadrática pode ser diagonalizada e escrita como

sendo a soma de n termos independentes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \mathbf{w}^H \mathbf{T} \mathbf{w} \\
&= \mathbf{w}^H \mathbf{S} \Phi \mathbf{S}^H \mathbf{w} \\
&= \mathbf{v}^H \Phi \mathbf{v} \\
&= \sum_{i=1}^n \phi_i |v_i|^2.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Por definição [35], a função característica da variável aleatória Δ é dada por

$$\Phi_{\Delta}(s) = \mathbb{E} [\exp(-s\Delta)]$$

e, utilizando o resultado exibido na expressão (A.2), ela pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Delta}(s) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-s \sum_{i=1}^n \phi_i |v_i|^2 \right) \right] \\
&= \prod_{i=1}^n \Phi_{|v_i|^2}(s),
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde $\Phi_{|v_i|^2}(s) = \mathbb{E}[\exp(-s\phi_i|v_i|^2)]$. Como $v_i \sim \mathcal{N}_C(\bar{v}_i, 1)$ e é circularmente simétrico, tem-se que $|v_i|^2 = a_i^2 + b_i^2$, onde $a_i \sim \mathcal{N}(\bar{a}_i, 1/2)$ e $b_i \sim \mathcal{N}(\bar{b}_i, 1/2)$ são independentes, e $\bar{v}_i = \bar{a}_i + j\bar{b}_i$. Sendo assim, basta avaliar a função característica do quadrado de uma variável aleatória gaussiana z com média \bar{z} e variância $1/2$ para finalizar os cálculos. Então

$$\begin{aligned}
\Phi_{z^2}(s) &= \mathbb{E} [\exp(-s\phi z^2)] \\
&= \frac{\exp\left(-s\frac{\phi}{1+s\phi}\bar{z}^2\right)}{\sqrt{1+s\phi}}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

O resultado acima é utilizado para se obter $\Phi_{|v_i|^2}(s)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Phi_{|v_i|^2}(s) &= \Phi_{a_i^2}(s)\Phi_{b_i^2}(s) \\
&= \frac{\exp\left(-s\frac{\phi_i}{1+s\phi_i}\bar{a}_i^2 - s\frac{\phi_i}{1+s\phi_i}\bar{b}_i^2\right)}{(\sqrt{1+s\phi_i})(\sqrt{1+s\phi_i})} \\
&= \frac{\exp\left(-s\frac{\phi_i}{1+s\phi_i}|\bar{v}_i|^2\right)}{1+s\phi_i}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

e, em seguida, a expressão (A.5) pode ser substituída em (A.3):

$$\begin{aligned}
\Phi_{\Delta}(s) &= \prod_{i=1}^n \frac{\exp\left(-s\frac{\phi_i}{1+s\phi_i}|\bar{v}_i|^2\right)}{1+s\phi_i} \\
&= \frac{\exp\left(-s\sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{1+s\phi_i}|\bar{v}_i|^2\right)}{\prod_{i=1}^n (1+s\phi_i)}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

A função característica apresentada acima deve ser escrita novamente, agora em termos das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{R} . Analisando cuidadosamente o numerador da expressão em (A.6), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{1 + s\phi_i} |\bar{v}_i|^2 = \bar{\mathbf{v}}^H \Phi (\mathbf{I} + s\Phi)^{-1} \bar{\mathbf{v}}.$$

Substituindo $\Phi = \mathbf{S}^H \Psi \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} \Psi \mathbf{S}$ e $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{S}^H \Psi^{-1} \mathbf{U}^H \bar{\mathbf{x}}$ na expressão acima, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{1 + s\phi_i} |\bar{v}_i|^2 = \bar{\mathbf{x}}^H \mathbf{A} (\mathbf{I} + s\mathbf{R}\mathbf{A})^{-1} \bar{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.7})$$

Agora, analisando o denominador da expressão (A.6):

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (1 + s\phi_i) &= \det(\mathbf{I} + s\mathbf{T}) \\ &= \det(\mathbf{U}\Psi(\mathbf{I} + s\mathbf{T})\Psi^{-1}\mathbf{U}^H) \\ &= \det(\mathbf{U}\Psi\Psi^{-1}\mathbf{U}^H + s\mathbf{U}\Psi\mathbf{T}\Psi^{-1}\mathbf{U}^H) \\ &= \det(\mathbf{U}\mathbf{U}^H + s\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^H\mathbf{A}) \\ &= \det(\mathbf{I} + s\mathbf{R}\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, pode-se substituir (A.7) e (A.8) em (A.6) para se encontrar a expressão final da função característica da forma hermitiana quadrática de variáveis aleatórias gaussianas complexas:

$$\Phi_{\Delta}(s) = \frac{\exp(-s\bar{\mathbf{x}}^H \mathbf{A} (\mathbf{I} + s\mathbf{R}\mathbf{A})^{-1} \bar{\mathbf{x}})}{\det(\mathbf{I} + s\mathbf{R}\mathbf{A})}. \quad (\text{A.9})$$