



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA



PROFMAT

REFLEXÕES SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
NA REDE PÚBLICA – PROPOSTAS ESTRUTURANTES
E PEDAGÓGICAS COM O USO DE MATERIAL CONCRETO

MARCOS MASSAKI ABE

Brasília
2020

MARCOS MASSAKI ABE

**REFLEXÕES SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
NA REDE PÚBLICA – PROPOSTAS ESTRUTURANTES
E PEDAGÓGICAS COM O USO DE MATERIAL CONCRETO**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Andrea Genovese de Oliveira

Brasília
2020

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**REFLEXÕES SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
NA REDE PÚBLICA – PROPOSTAS ESTRUTURANTES
E PEDAGÓGICAS COM O USO DE MATERIAL CONCRETO**

por

MARCOS MASSAKI ABE

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 28 de setembro de 2020.

Comissão Examinadora:

Prof.^a Andrea Genovese de Oliveira (Orientadora)

Prof.^a Raquel Carneiro Dörr – MAT/UnB

Prof.^a Daiane Soares Veras - IFG

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os meus professores – ilustres mestres - que, certamente, não tenho condições de citar em um conjunto finito (devido à infinita injustiça de me esquecer de algum(a)), a todos os(as) colegas em todos os níveis de ensino/aprendizagem e a todas as demais pessoas que contribuíram de alguma forma para o meu desenvolvimento como entusiasta da Matemática e, principalmente, como ser humano.

Especificamente, agradeço à professora Andrea Genovese, minha orientadora, pois, sem os seus incentivos e a sua dedicação, não teria concluído este trabalho.

Dedico um agradecimento especial aos meus colegas de turma do Profmat/UnB (2018-2020) por todos os momentos vividos e compartilhados nesta caminhada. Todos, sem exceção, fizeram parte dessa história e contribuíram de uma forma ou outra para a conclusão desta etapa de minha vida.

Agradeço ao Dr. Daisaku Ikeda, poeta, filósofo e humanista, de quem recebi muitos incentivos e ensinamentos muito importantes para a minha vida. Considero-o como meu Mestre por seus ensinamentos, baseados, principalmente, em seu comportamento como ser humano.

Especialmente por toda a dedicação e carinho, agradeço a meus pais, Toshimi Abe (*in memoriam*) e Katsuyo Abe, e também - como não podia deixar de mencionar - a minha querida irmã, Miyuki Abe, que fez o juramento de propiciar a educação aos irmãos mais novos diante do túmulo de nosso saudoso pai.

Minha eterna gratidão a todos.

RESUMO

A sistematização do ensino da Matemática, em nível nacional, apresenta muitos desafios em função da dimensão continental do Brasil com as suas múltiplas características. Este trabalho visa refletir sobre a necessidade de adaptação de diretrizes e/ou propostas nacionais, conforme constam na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), para a realidade local de estudantes e professores, de modo a identificar as dificuldades no presente e direcionar o planejamento do desenvolvimento de ações de gestão e práticas de ensino-aprendizagem para o futuro. Propostas de atividades com o uso de material concreto são apresentadas para que sejam principalmente aproveitadas no Ensino Fundamental – fase de aprofundamento na compreensão dos conceitos básicos e fundamentais da Matemática – da Rede Pública e, além disso, devem ser adaptadas pelos professores à realidade local de seus estudantes. Essas propostas podem colaborar na compreensão do conteúdo apresentado e diminuir a distância entre a aprendizagem de estudantes da Rede Pública em relação aos da Rede Privada. Por fim, este trabalho apresenta uma sugestão de propostas estruturantes para que os ideais da educação apresentados na LDB e nos PCNs possam ser perseguidos pelas instituições públicas de gestão da educação, que dependem de vários setores da sociedade e podem exigir a implementação de leis para a adequação dessas propostas.

Palavras-chave: LDB. PCNs. Ensino-aprendizagem. Ensino Fundamental. Propostas. Redes Pública e Privada. Educação Matemática.

ABSTRACT

The systematization of Mathematics teaching, in a national level, presents many challenges in virtue of the continental dimension of Brazil and its various characteristics. This work aims to reflect about the necessity of adapting directives and/or national proposals, in accordance to the Law of Directives and Bases for National Education (LDBNE) and the National Curriculum Parameters (NCP), for the local reality of students and teachers, in order to identify current issues and provide directions for the development planning of managerial actions and teaching-learning practices for the future. Proposals of activities using concrete materials are presented in the interest of making the most of them mainly in Elementary Schools – stage about deepening comprehension of basic and fundamental Mathematical concepts – of the Public Sector, which in addition, should be adapted to the students' local realities by their teachers. These proposals can contribute to the learning comprehension of displayed content and shorten the gap between Public and Private School Sector students. In closing, this work sets forth suggestions of structural propositions so that the ideals of education established by the LDBNE and the NCP can be pursued by public school management institutions, which depend on multiple sectors of society and may call for the implementation of laws in pursuance of the propositions' adequacy.

Keywords: LDBNE. NCP. Teaching-learning. Elementary School. Proposals. Public and Private Sector. Mathematics Education.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Dependências Administrativas da Rede de Ensino	26
Quadro 2 – Distanciamento das médias de Nordeste e Norte	29
Quadro 3 – Peso da dependência F Região Sul	32
Quadro 4 – Peso da dependência F Região Sudeste	32
Quadro 5 – Distanciamento das médias Regiões Sul e Sudeste	33
Quadro 6 – Pesos da dependência F e P	35
Quadro 7 – Pesos da dependência dados Brasil	35
Quadro 8 – Distanciamento da Região Centro-Oeste em relação às médias do Brasil	35
Quadro 9 – Diferenças entre médias Saeb 2017 Matemática	37
Quadro 10 – Resultados do ENA – PROFMAT 2018/UnB	40
Quadro 11 – Frequência em função da pontuação obtida pelos candidatos	41
Quadro 12 – Alimentos a serem adquiridos	70

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Proficiência Região Norte	28
Gráfico 2 – Proficiência Região Nordeste	28
Gráfico 3 – Proficiência Região Sul	31
Gráfico 4 – Proficiência Região Sudeste	31
Gráfico 5 – Proficiência Região Centro-Oeste	34
Gráfico 6 – Proficiência dados Brasil	34
Gráfico 7 – Diferenças entre médias cinco Regiões e Brasil	38
Gráfico 8 – ENA PROFMAT 2018/UnB	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
1.1	UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE O AUTOR.....	16
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2	AS BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL.....	16
2.1	LDB (LEI Nº 9.394/1996).....	16
2.1.1	Comentários	18
2.2	PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - PCNs	19
2.2.1	Matemática e PCNs	21
2.2.2	PCNs e BNCC	22
2.2.3	Reflexões sobre os PCNs e a BNCC	23
3	REFLEXÕES SOBRE A REALIDADE DA EDUCAÇÃO PÚBLICA.....	25
3.1	ESTATÍSTICAS SAEB	25
3.1.1	Análise Saeb 2017: Norte x Nordeste.....	27
3.1.2	Análise Saeb 2017: Sul x Sudeste	31
3.1.3	Análise Saeb 2017: Centro-Oeste x Brasil.....	33
3.1.4	Análise: diferença entre médias	36
3.2	EXAME NACIONAL DE ACESSO – PROFMAT 2018/UNB.....	39
3.3	COMENTÁRIOS	42
4	PROPOSTAS DE PRÁTICAS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CONCRETA	
	43
4.1	APRIMORAMENTO DA SOMA	44
4.2	APRIMORAMENTO DA DIFERENÇA	45
4.2.1	Resultados em \mathbb{N} (Minuendo > Subtraendo)	45
4.2.2	Resultados em \mathbb{Z} (Minuendo < Subtraendo).....	46
4.2.3	Sinais para Números Inteiros (+/-) e Operações	46
4.3	ZERO (ELEMENTO NEUTRO DA ADIÇÃO).....	47
4.3.1	Aplicando o Zero em operações de subtração.....	47
4.3.2	Aplicando em operações de adição.....	48
4.3.3	Observação	49
4.4	APRIMORAMENTO DO PRODUTO	49
4.4.1	Construindo a tabuada.....	50
4.4.2	Observações e comentários	51
4.5	APRIMORAMENTO DO QUOCIENTE.....	51

4.5.1	Praticando a divisão	52
4.5.2	Observações	53
4.6	UM (ELEMENTO NEUTRO DA MULTIPLICAÇÃO)	53
4.6.1	Expressando o número “1”	54
4.6.2	Multipliação por 5	54
4.6.3	Divisão por 5	55
4.6.4	Divisão de um número por uma fração	55
4.6.5	Observações e comentários	56
4.7	“CHUVEIRINHO” PODEROSO (DISTRIBUTIVIDADE)	57
4.7.1	Aplicando com somas	57
4.7.2	Aplicando com diferenças	58
4.7.3	Obtendo quadrados	58
4.7.3.1	Formato XY	59
4.7.3.2	Quadrado de números terminados em “0”	59
4.7.3.3	Quadrado de números terminados em “5”	59
4.7.3.4	Atividade inicial	60
4.7.3.5	Padrões de Y: “+1” ou “-1”	60
4.7.3.6	Atividade intermediária	61
4.7.3.7	Padrões de Y: “+2” ou “-2”	62
4.7.3.8	Atividade final	63
4.7.4	Comentários	63
4.8	RESOLVENDO EQUAÇÕES	64
4.8.1	Praticando a resolução de equações	65
4.8.2	Obtendo a fórmula de Bhaskara	66
4.8.3	Comentários	68
4.9	CALCULANDO A FEIRA	64
4.9.1	Proposta e exemplo de atividade	69
4.9.2	Flexibilidade de tipos de atividade	70
4.9.3	Observações e comentários	71
4.10	GEOMETRIA – OBTENÇÃO DE POLÍGONOS	72
4.11	GEOMETRIA – CÁLCULO DE ÁREAS	72
4.12	GEOMETRIA – LUGARES GEOMÉTRICOS/DESENHO GEOMÉTRICO	72
4.13	OUTRAS PROPOSTAS	74

5	PROPOSTAS ESTRUTURANTES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA (REDE PÚBLICA).....	75
5.1	REVISÃO DE CONTEÚDOS NOS CICLOS DO EF.....	75
5.2	PARCERIAS PÚBLICO-PRIVADAS	77
5.3	ESCOLAS-MODELO	78
6	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	80
6.1	EM INTERNA (OU COMPRESSIVA)	80
6.2	EM EXTERNA (OU EXPANSIVA)	82
6.2.1	Educação Crítica (EC)	82
6.2.2	EMC e Democracia.....	83
6.3	APLICAÇÃO DA EMC	85
6.4	EM COMPRESSIVA VERSUS EXPANSIVA	85
7	CONCLUSÃO.....	87
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	90
	ANEXO A - Conteúdo para cada ciclo do Ensino Fundamental	92
	ANEXO B – Escala de proficiência de Matemática (9º ANO).....	90
	ANEXO C – Tabelas de resultados Saeb 2013, 2015 E 2017	104
	ANEXO D – Propostas de atividades com material concreto.....	107

1 INTRODUÇÃO

1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE O AUTOR

Conto a história de um menino, nascido em uma região rural, em condições bastante desfavoráveis, que, desde a sua tenra idade, teve que trabalhar na roça quando mal tinha um calçado e roupas para usar em seu dia a dia. Mesmo diante das dificuldades e ainda sem frequentar a escola, esse menino sentia-se feliz em seu pequeno mundo, quando este ainda estava reduzido aos limites da região rural e seus moradores.

A primeira escola era rural, localizada a menos de quinhentos metros de sua casa. Iniciou com a idade de seis anos diretamente na primeira série do Ensino Fundamental (EF) - atual segundo ano do EF. Na segunda série (EF), atual terceiro ano (EF), chegou a ficar em recuperação por insuficiência em Matemática (essa disciplina terrível) quando tinha sete anos de idade.

Passou por muitas situações tristes, incluindo a perda de seu pai ainda jovem em seus cinquenta e nove anos quando foi surpreendido por um relâmpago, além de várias outras questões familiares difíceis e problemas financeiros constantes. Enfim, a vida não era nada fácil e favorável para continuar com os seus estudos.

Nesse ínterim, dos nove aos quinze anos de idade, começou a trabalhar aos sábados em uma feira de sua região, de seis horas da manhã até aproximadamente uma hora da tarde, totalizando aproximadamente sete horas de trabalho. A cada sábado, o trabalho exigia inúmeros cálculos como pesar a quantidade de um produto e informar o valor ao cliente. Assim, acompanhava inúmeras tabelas de preço para cada produto vendido pelo peso de sua quantidade (por exemplo: 100g custava R\$ 0,40; 200g custava R\$ 0,80; 300g custava R \$1,20 etc.). Além disso, havia produtos vendidos por unidade e descontos em função da quantidade comprada. Enfim, todos os sábados, durante praticamente seis a sete anos, algumas centenas de contas eram realizadas semanalmente.

Resultado: fez uma prova na quinta série (EF) – atual sexto ano (EF) – em menos de vinte minutos, acertando todos os cálculos. Isso ocorreu quando tinha dez anos de idade, ano seguinte ao que começou a ter o prazer em se deliciar com os exercícios numéricos a cada novo sábado. A partir daí, a Matemática passou a ser a sua grande aliada.

Resumindo, chegou a passar em vários vestibulares, incluindo Medicina na universidade de sua cidade, mas decidiu cursar Engenharia Eletrônica em uma renomada instituição do País por sua “queda” pela sua grande aliada – a Matemática. Posteriormente, concluiu a Licenciatura

em Matemática, devido à sua paixão em aprender “ensinando a Matemática”, e sempre esteve envolvido com atividades de Educação Matemática, facilitando o aprendizado de muitos estudantes.

Esta história é baseada em fatos reais e está sendo apresentada para motivar os estudantes sobre a importância da Matemática, além de desmistificar que alguém já nasce sabendo ou não tem condições de aprender essa bela ciência - a Matemática.

Além disso, esta história direciona o foco desta dissertação: o processo ensino-aprendizagem da Matemática, principalmente no Ensino Fundamental, exige a repetição de exercícios e encontra motivação no mundo concreto (os números devem representar algo concreto). Além disso, a Matemática pode ser aprendida de forma natural, divertida e interessante.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

Na página do PROFMAT (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2020), especificamente no tópico apresentação, consta a seguinte definição:

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2020, apresentação).

E também: “O trabalho de conclusão final do PROFMAT versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica com impacto na sala de aula” (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2020, apresentação). Nesse sentido, o presente trabalho visa refletir sobre a necessidade de adaptação de diretrizes e/ou propostas nacionais, conforme constam na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), de modo a transpor para a realidade local, de estudantes e professores, tais diretrizes, com o intuito de identificar as dificuldades do presente e direcionar o planejamento e o desenvolvimento de ações de gestão e práticas de ensino-aprendizagem para o futuro.

Os primeiros anos do ensino da Matemática são fundamentais para toda a sequência da aprendizagem dos estudantes. Assim, conforme o direcionamento claro do programa reportado acima e a “provocação” contida no item 1.1, este trabalho tem o foco na Educação Matemática na Rede Pública, principalmente no Ensino Fundamental.

A partir da apresentação dos ideais contidos tanto na Lei nº 9.394/1996 (BRASIL, 1996), bem como nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, este trabalho busca realizar reflexões sobre a realidade da Educação Pública para que os profissionais envolvidos no ensino da Matemática Básica possam rever os caminhos que aproximem esses ideais da realidade apresentada no rendimento dos estudantes das escolas públicas.

Essa reflexão e revisão devem ser constantes para que a Rede Pública de ensino faça frente à Rede Privada, diminuindo as disparidades entre essas redes de ensino – assunto a ser apresentado neste trabalho.

Com o intuito de contribuir no aprimoramento da formação docente, gerando impacto na atuação em sala de aula, várias dinâmicas e ideias de abordagens lúdicas são apresentadas no tópico Propostas de Práticas de Educação Matemática Concreta. Por exemplo, o trabalho

com grãos de feijão, pedras e palitos de fósforos para o entendimento das quatro operações básicas (soma, diferença, produto e quociente) e a solução de equações. Essas propostas podem ser expandidas para outros conteúdos e atividades do processo ensino-aprendizagem.

O capítulo Propostas Estruturantes para a Educação Matemática na Rede Pública converge em propostas de revisão de conteúdo e na busca do aprimoramento constante para a formação profissional dos professores da Educação Básica, enfatizando o domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para a docência. Essas propostas visam o alcance dos ideais da educação e dependem de vários setores da sociedade, incluindo a implementação de leis para a adequação dessas propostas.

Por fim, este trabalho tem a intenção de colaborar para o aprimoramento prático da Educação Matemática no Ensino Fundamental e provocar as reflexões necessárias para a melhoria, principalmente, da Educação Pública.

2 AS BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL

No contexto da educação brasileira, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são normativas legais que orientam o modo como os sistemas de ensino devem atuar para garantir uma educação de qualidade a todos. Nesse sentido, o presente capítulo tem a finalidade de refletir sobre esses importantes marcos legais que remetem a um ideal da educação e foram elaborados para propor referências e/ou orientações a serem consideradas para o desenvolvimento e a melhoria da qualidade do Ensino Fundamental (EF), definindo competências a nível municipal, estadual e federal, de modo que as ações efetivas e sinérgicas desses entes possam gerar resultados em conformidade com as diretrizes inerentes ao ideário normativo. Alguns aspectos da LDB e dos PCNs, que são de interesse para este trabalho, são apresentados concisamente a seguir.

2.1 A LDB (LEI Nº 9.394/1996)

A LDB (BRASIL, 1996) estabelece as diretrizes e bases da educação nacional e, em seu TÍTULO II (Dos Princípios e Fins da Educação Nacional), o artigo 2º determina que “a educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, **tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho**” (Grifo nosso).

Em relação ao processo ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica do Ensino Público, é importante realizar avaliações periódicas para verificar se a finalidade apresentada está sendo atingida, ou seja, as verificações da aprendizagem buscam evidenciar se o ensino da Matemática está promovendo o pleno desenvolvimento de conhecimentos e habilidades dos estudantes, propiciando-lhes o exercício pleno de sua cidadania - associada aos conhecimentos matemáticos - e a sua qualificação para o mercado de trabalho.

O artigo 3º da LDB direciona que o ensino será ministrado com base em princípios como (i) a valorização do profissional da educação escolar, (ii) a garantia de padrão de qualidade e (iii) a vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais. Os princípios (i) e (ii) estão vinculados e integrados, uma vez que a qualidade do ensino possui correlação com a valorização do corpo docente e os investimentos em educação. Em “Propostas Estruturantes para a Educação Matemática na Rede Pública”, algumas ideias e propostas são apresentadas com o intuito de elevar essa correlação.

O princípio (iii) reporta à contextualização social do ensino, o que exige uma ação coordenada do corpo docente das várias disciplinas do sistema educacional de cada região do País. Isso pode ser coordenado pela Secretaria de Educação de cada unidade da federação. Especificamente em relação à Matemática, os professores devem associar os conteúdos à realidade local de seus estudantes – questão enfatizada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

No TÍTULO V (Dos Níveis e das Modalidades de Educação e Ensino), CAPÍTULO II (Da Educação Básica), SEÇÃO I, o artigo 22 ressalta a finalidade apresentada no artigo 2º: “A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”.

O foco do ensino fundamental obrigatório é destacado no artigo 32. Neste, é declarado que o Ensino Fundamental terá por objetivo a formação básica do cidadão, destacando o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo; e o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores.

Quando o artigo menciona o pleno domínio do cálculo, é evidente que alguma ferramenta é necessária para medir o nível desse domínio. Além disso, muitas questões podem ser levantadas, pois há muitos exemplos de estudantes da rede de ensino pública que completam o Ensino Fundamental sem sequer dominar as quatro operações e a própria tabuada. Em “Reflexões sobre a Realidade da Educação Pública”, apresentam-se indícios desses exemplos.

Em relação ao Ensino Médio (EMed), o artigo 35 menciona ser a etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, e uma de suas finalidades é a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos. No entanto, a ferramenta necessária, citada no parágrafo anterior, seria muito importante para definir rendimentos mínimos que os estudantes devem alcançar para iniciar o EMed.

Essa definição de rendimentos mínimos poderia ser avaliada como conhecimentos e habilidades mínimos e necessários para que um estudante possa prosseguir em seus estudos no EMed. Tal avaliação está sendo proposta porque há estudantes que “sofrem” no EMed por não terem adquirido os pré-requisitos para a compreensão do conteúdo. Essa observação pode ser verificada em específico no processo ensino-aprendizagem da Matemática no EMed.

2.1.1 Comentários

As diretrizes e bases apresentadas na LDB dependem de recursos – humanos e financeiros – que nem sempre estão disponíveis para a consecução daquilo que emana do desejo legislativo. Assim, cabe ao poder público garantir que tais recursos sejam disponibilizados em quantidade suficiente para que os preceitos garantidos na legislação sejam efetivados.

A sinergia entre os entes federativos – municípios, estados e União – apresenta desafios inerentes às dimensões continentais do País, além dos problemas relacionados com a gestão e a aplicação efetiva dos recursos citados. O sistema educacional precisa estar funcionando de modo a efetivar o ensino de qualidade para todos os educandos.

Deve ser ressaltada a importância do foco na qualidade da educação, associado ao treinamento e à capacitação do corpo docente. Ele precisa passar por formação continuada que garanta o acesso a novas formas de ensinar para que ele possa acompanhar a evolução que tragam um ensino-aprendizagem de qualidade. Além disso, é importante manter a motivação dos professores, fornecendo as ferramentas e os incentivos necessários para o exercício do magistério.

Mesmo que as diretrizes e as bases idealizadas na LDB estejam distantes da realidade, elas são fundamentais para que o alcance desses ideais seja uma busca constante e sempre lembrada. Afinal, a educação é o alicerce do desenvolvimento de toda a sociedade.

2.2 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - PCNs

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) foram elaborados para propor referências e/ou orientações a serem consideradas para o desenvolvimento e a melhoria da qualidade do ensino no Brasil, respeitando as várias características e peculiaridades de cada região, em função de suas dimensões continentais. O contexto de sua criação remete à realidade da educação nacional da década de 1990. Esta foi uma consequência da prioridade das autoridades governamentais das décadas anteriores (1970 e 1980) em expandir as oportunidades de escolarização, construindo mais escolas e aumentando o índice de inserção das crianças e dos jovens. No entanto, essa prioridade não estava diretamente associada à qualidade do ensino e da aprendizagem.

Pesquisas realizadas em 1992, pela Secretaria de Desenvolvimento e Avaliação Educacional (MEC/Sediae), constataram que apenas 51% dos estudantes da 1ª série (atual 2º ano) do EF eram promovidos para a próxima série, apresentando um cenário de alta repetência e evasão escolar. Diante desse contexto, estava evidente que o acesso dos jovens às escolas era uma condição necessária, mas não suficiente para desenvolver a educação. Assim, ações começaram a ser desenvolvidas e direcionadas para a melhoria da qualidade do processo ensino-aprendizagem nas escolas.

No contexto do Plano Decenal de Educação para Todos (1993-2003), elaborado pelo Ministério da Educação e do Desporto (antigo MEC), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) foi editada em 1996, sendo a base legal para sustentar uma profunda reflexão sobre a educação coordenada pelo MEC, contando com a colaboração de muitos profissionais e educadores envolvidos com o aprimoramento pedagógico do processo ensino-aprendizagem. Essa reflexão foi consolidada em 1997 nos PCNs, que eram direcionados para o primeiro e o segundo ciclos (ou as quatro primeiras séries – equivalentes aos anos do segundo ao quinto do atual EF). No ano seguinte (1998), foram elaborados os PCNs para o terceiro e o quarto ciclos (ou as quatro últimas séries – equivalente aos anos do sexto ao nono do atual EF), complementando os parâmetros para todo o EF.

Os PCNs têm o intuito de auxiliar os educadores para que estes possam propor uma educação capaz de desenvolver pessoas conscientes de seu papel na sociedade e habilitadas ao exercício de sua cidadania. Essa proposta de educação possui relação direta com a Declaração Mundial sobre Educação para Todos (FUNDO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A INFÂNCIA, 1990) que menciona em seu artigo 1º:

Cada pessoa – criança, jovem ou adulto – deve estar em condições de aproveitar as oportunidades educativas voltadas para satisfazer suas necessidades básicas de aprendizagem. Essas necessidades compreendem tanto os instrumentos essenciais para a aprendizagem (como a leitura e a escrita, a expressão oral, o cálculo, a solução de problemas), quanto os conteúdos básicos da aprendizagem (como conhecimentos, habilidades, valores e atitudes), necessários para que os seres humanos possam sobreviver, desenvolver plenamente suas potencialidades, viver e trabalhar com dignidade, participar plenamente do desenvolvimento, melhorar a qualidade de vida, tomar decisões fundamentadas e continuar aprendendo. A amplitude das necessidades básicas de aprendizagem e a maneira de satisfazê-las variam segundo cada país e cada cultura, e, inevitavelmente, mudam com o decorrer do tempo. (FUNDO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A INFÂNCIA, 1990).

Conforme esse artigo, a educação é um processo dinâmico e as suas metodologias pedagógicas devem ser revistas e aprimoradas continuamente para a consecução de seus objetivos, envolvendo os seus atores – estudante, família, escola e sociedade.

Para rever as metodologias e avaliar a qualidade de todo o ensino básico no País, o Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (Saeb) foi implantado na década de 1990 e contava com o apoio das secretarias de educação dos estados e municípios. Os dados estatísticos do Saeb são levantados a cada dois anos, abrangendo uma amostra representativa dos 26 estados e do Distrito Federal. O sistema tem como objetivos aferir os conhecimentos e habilidades dos estudantes, mediante aplicação de testes, com a finalidade de avaliar a qualidade do ensino ministrado; verificar as condições de infraestrutura das escolas que incidem na qualidade do ensino; perfil do diretor e mecanismos de gestão escolar; perfil do professor e práticas pedagógicas; características socioculturais e hábitos de estudo dos estudantes.

A análise dos resultados desses levantamentos permite acompanhar a evolução do desempenho dos estudantes e dos diversos fatores incidentes na qualidade e na efetividade do ensino ministrado nas escolas, possibilitando a definição de ações voltadas para a correção das distorções identificadas e o aperfeiçoamento das práticas e do desempenho apresentados pelas escolas e pelo sistema de ensino brasileiro. Essas informações são utilizadas por gestores e administradores da educação, pesquisadores e professores. Além disso, permitem à sociedade conhecer alguns aspectos do ensino oferecido pelas escolas públicas e privadas. (BRASIL, 2020).

Os PCNs, conforme citado anteriormente, foram elaborados em quatro ciclos de dois anos, iniciando a partir do segundo ano (antiga 1ª série) do EF. A sua estruturação para cada área de conhecimento (Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte, Educação Física e Língua Estrangeira) envolveu o tratamento dos temas transversais: (i) Ética, (ii) Saúde, (iii) Meio Ambiente, (iv) Orientação Sexual, (v) Pluralidade Cultural e (vi)

Trabalho e Consumo. Estes permeiam todas as áreas, caracterizando a interdisciplinaridade de cada tema, e devem ser trabalhados para a estruturação e a contextualização do conhecimento a ser desenvolvido em cada área de conhecimento. Assim, os temas transversais propiciam que cada estudante possa exercer o seu papel como agente transformador da sociedade, contribuindo para o desenvolvimento e o exercício de sua cidadania.

2.2.1 Matemática e PCNs

Os PCNs relativos ao Ensino Fundamental podem ser acessados em no portal do MEC (BRASIL, 1997a). A partir dessa página na internet, os PCNs relativos à Matemática podem ser acessados em Brasil (1997b), correspondentes ao primeiro e segundo ciclos; e Brasil (1998) que corresponde ao terceiro e quarto ciclos.

Conforme essas publicações, testes de rendimento em Matemática foram aplicados em 1993 pelo Saeb (BRASIL, 1994), apresentando os seguintes percentuais de estudantes do ensino fundamental que acertavam pelo menos metade dos testes: 67,7% na primeira série (atual segundo ano); 17,9% na terceira série (atual quarto ano); 3,1%, na quinta série (atual sexto ano); e 5,9% na sétima série (atual oitavo ano). Foi constatado também que:

Em 1995, numa avaliação que abrangeu estudantes de quartas e oitavas séries do primeiro grau, os percentuais de acerto por série/grau e por processo cognitivo em Matemática evidenciaram, além de um baixo desempenho global, que as maiores dificuldades são encontradas em questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas.

Além dos índices que indicavam o baixo desempenho dos estudantes na área de Matemática em testes de rendimento, também são muitas as evidências que mostravam que ela funciona como filtro para selecionar estudantes que concluem, ou não, o ensino fundamental. Frequentemente, a Matemática tem sido apontada como disciplina que contribui significativamente para elevação das taxas de retenção. (BRASIL, 1997b, p.21)

Diante dessa situação, os PCNs apresentam diretrizes para repensar e adequar o processo ensino-aprendizagem da Matemática, considerando aspectos como a realidade social, a abordagem dos temas transversais, a revisão dos métodos de ensino e de avaliação, a redefinição de conteúdos para cada ciclo e o preparo dos estudantes para o exercício de sua cidadania.

Em Brasil (1997), nas páginas 24 a 41, constam: o papel, os objetivos gerais, os conteúdos e a avaliação da Matemática no Ensino Fundamental. Tradicionalmente, os conteúdos eram tratados de forma individualizada e independente por assunto. A partir dos PCNs, a ideia passa a ser o tratamento dos conteúdos nos seguintes blocos:

- Números e operações (Aritmética e Álgebra).

- Espaço e formas (Geometria).
- Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria).
- Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade).

Assim, os conteúdos passam a ter uma interdependência entre as diversas áreas da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística, Combinatória e Probabilidade). Além disso, considerando o tratamento dos temas transversais, o processo ensino-aprendizagem passa a ter uma dimensão ampla na escolha de assuntos e situações a serem abordados (por exemplo: resolução de problemas, jogos, tecnologias da informação, história da Matemática etc.) pelos professores, o que colabora para a promoção do aprendizado dos estudantes.

Os detalhamentos relativos ao ensino da Matemática para cada ciclo sobre objetivos, conteúdos e critérios de avaliação constam em Brasil (1997) nas páginas 45 a 64 para o 1º e 2º ciclos e, resumidamente, o documento explica o modo como os conhecimentos das crianças estão interligados e não divididos em campos, conforme didaticamente eles são separados. Assim, os PCNs abordam a questão de aproveitar a diversidade das experiências das crianças para trabalhar os conteúdos de matemática sem, no entanto, apresentar formalmente os conceitos. Já para os 3º e 4º ciclos, os PCNs (BRASIL, 1998) abordam nas páginas 61 a 93 o modo e o que deve ser trabalhado nessas duas etapas da educação básica.

De forma concisa, os conteúdos para cada ciclo são apresentados em **Anexo A** como referência para consulta.

2.2.2 PCNs e BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) foi aprovada pelo Conselho Nacional de Educação – CNE (BRASIL, 2017) em dezembro de 2017, sendo o documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes têm direito. A partir da BNCC, tanto a Rede Pública de ensino como a Rede Privada passaram a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas como base comum.

A BNCC indica os conhecimentos e as competências a serem desenvolvidos pelos estudantes no âmbito da Educação Básica. Por competência, entende-se a capacidade de mobilizar conhecimento, habilidades, atitudes e valores.

Para o Ensino Fundamental, a BNCC apresenta dez competências específicas a serem desenvolvidas por meio de componentes curriculares ou de conteúdo para cada área de conhecimento. Essas competências são: (1) conhecimento; (2) pensamento científico, crítico e

criativo; (3) repertório cultural; (4) comunicação; (5) cultura digital; (6) trabalho e projeto de vida; (7) argumentação; (8) autoconhecimento e autocuidado; (9) empatia e cooperação e (10) responsabilidade e cidadania.

Para a área de Matemática, a BNCC orienta a elaboração do currículo específico das escolas, considerando as particularidades metodológicas, sociais e regionais de cada uma delas, e está dividida em quatro unidades temáticas: (1) números, (2) álgebra, (3) geometria e (4) grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Essa divisão está relacionada com a diretriz dos PCNs em tratar os conteúdos em blocos, destacando a interdependência entre as várias áreas da Matemática, conforme visto anteriormente.

A BNCC possui caráter normativo e obrigatório, amparado pelas Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN (BRASIL, 2013), enquanto os PCNs não são obrigatórios por lei e servem de referência para a elaboração ou revisão de propostas curriculares definidas pela BNCC.

2.2.3 Reflexões sobre os PCNs e a BNCC

Em relação ao que foi apresentado para o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental, caso todos os objetivos propostos tanto nos PCNs como na BNCC fossem alcançados, os estudantes estariam preparados para a continuidade de seus estudos no Ensino Médio.

Para tanto, sugere-se que as seguintes perguntas possam ser satisfatoriamente respondidas com o término do Ensino Fundamental:

(1) Os objetivos descritos foram alcançados satisfatoriamente?

(2) Os professores apresentaram os conteúdos propostos adequada e satisfatoriamente aos estudantes?

(3) Os estudantes são capazes de apresentar a compreensão dos conteúdos e corresponder ao domínio necessário para a continuidade de seus estudos?

Essas questões e outras devem ser constantemente direcionadas aos gestores da educação, professores e estudantes, de modo que as respostas possam direcionar ações de melhoria do processo ensino-aprendizagem, principalmente, na Rede Pública de ensino.

O cenário relativo aos últimos dados do Saeb está tratado no próximo capítulo. Assim como se apresenta a realidade da Rede Pública de ensino, que traz desafios para o desenvolvimento de uma educação democrática – no sentido de que estudantes da Rede Pública tenham aprendizagem compatível com os da Rede Privada, de modo que possam exercer a sua cidadania e acessar o mercado de trabalho em condições de igualdade.

3 REFLEXÕES SOBRE A REALIDADE DA EDUCAÇÃO PÚBLICA

Neste capítulo, tratamos das estatísticas do Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (Saeb). Elas são apresentadas para confrontar o rendimento de estudantes de escolas da Rede Pública em relação aos da Rede Privada, de modo a constatar diferenças nos rendimentos apresentados.

Adicionalmente, o resultado do processo de seleção de candidatos para o Profmat-2018/UnB (Brasília/DF) é apresentado para refletir sobre a necessidade de treinamento do corpo docente e a implementação de políticas para incentivo ao aprimoramento técnico de professores.

3.1 ESTATÍSTICAS SAEB

O Saeb é um sistema de avaliação em larga escala – realizado periodicamente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep). A metodologia do Saeb reside na aplicação de testes e questionários, traduzindo os níveis de aprendizagem demonstrados pelos estudantes avaliados.

Esses níveis de aprendizagem estão descritos e organizados de modo crescente em Escalas de Proficiência de Língua Portuguesa e de Matemática para cada um dos anos de escolaridade avaliados (5º e 9º Anos do Ensino Fundamental mais o 3º Ano do Ensino Médio).

Em relação à Matemática, as Escalas de Proficiência podem ser acessadas em no portal do Inep (BRASIL, 2020), acessando Saeb (Aneb/Prova Brasil) para qualquer ano de pesquisa. A título de exemplo, a Escala de Proficiência de Matemática do 9º Ano do EF consta no Anexo 2.

As diversas esferas governamentais (municípios, estados e União) possuem acesso a esses resultados e podem avaliar a realidade da educação de sua competência. A partir disso, políticas públicas podem ser planejadas e implementadas para a melhoria contínua da educação.

Além disso, os resultados do Saeb, juntamente com as taxas de aprovação, reprovação e abandono verificadas no Censo Escolar, compõe o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

Para este trabalho, foram obtidos os dados referentes ao Saeb dos anos de 2013, 2015 e 2017. Estes foram agregados por região (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste, Sul e Brasil), de acordo com a dependência administrativa apresentada no Quadro 1 abaixo:

Quadro 1 – Dependências Administrativas da Rede de Ensino

DEPENDÊNCIA ADMINISTRATIVA	Dep. Adm.
Federal	F
Privada	P
Estadual e Municipal	EM
Federal, Estadual e Municipal	FEM
Federal, Estadual, Municipal e Privada	FEMP

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Os dados foram agrupados nas tabelas 1, 2 e 3 em Anexo C e refletem o desempenho dos estudantes, conforme as Escalas de Proficiência de Matemática para cada ano de escolaridade avaliado. Essas escalas de desempenho para cada ano são:

- 5º Ano (antiga 4ª Série): nível 1 (a partir de 125) ao nível 10 (desempenho maior ou igual a 350);

- 9º Ano (antiga 8ª Série): nível 1 (a partir de 200) ao nível 9 (desempenho maior ou igual a 400); e

- 12º Ano (3º Ano do EMed): nível 1 (a partir de 225) ao nível 10 (desempenho maior ou igual a 450).

Nota: o intervalo de um nível para o próximo está definido em 25 pontos de desempenho.

Por exemplo, a avaliação do Saeb 2017 a nível nacional (BRASIL) apresentou para o agrupamento “EM” (Rede Pública) os seguintes desempenhos:

- 5º Ano: desempenho 218,56 (nível 4 na escala de 1 a 10);

- 9º Ano: desempenho 249,93 (nível 2 na escala de 1 a 9); e

- 12º Ano: desempenho 259,39 (nível 2 na escala de 1 a 10).

A mesma avaliação (Saeb 2017) apresentou para o agrupamento “P” (Rede Privada) os seguintes desempenhos:

- 5º Ano: desempenho 251,82 (nível 6 na escala de 1 a 10);

- 9º Ano: desempenho 302,47 (nível 5 na escala de 1 a 10); e

- 12º Ano: desempenho 329,48 (nível 5 na escala de 1 a 10).

Conforme os níveis de desempenho verificados no Saeb 2017, a Rede Privada está dois a três níveis (ou de 50 a 75 pontos de desempenho) acima da Rede Pública em relação ao desempenho nas Escalas de Proficiência de Matemática.

Esses resultados devem ser avaliados localmente, pois a gestão da educação pública depende da percepção correta da realidade local/regional. Assim, os resultados das médias de

proficiência em Matemática de cada região serão apresentados graficamente por dependência administrativa.

Na sequência, serão realizadas as análises dos dados do Saeb 2017 e tanto o termo “dependência administrativa” como também o “agrupamento de dependências administrativas” serão tratados unicamente pelo termo “dependência”. Adicionalmente, cada região será tratada apenas com a sua descrição sem mencionar o termo “Região”.

Abaixo, temos os intervalos dos resultados avaliados em números inteiros (limite inferior e superior), considerando todas as dependências, para cada região:

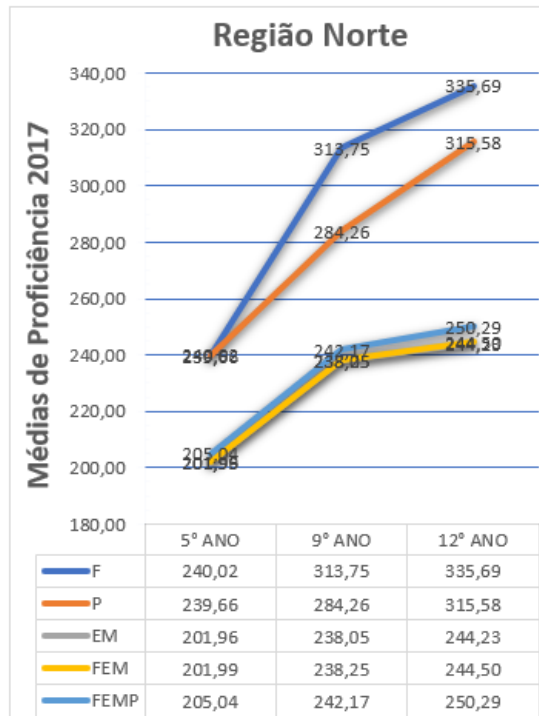
- Norte: 201 a 336.
- Nordeste: 201 a 339.
- Sul: 231 a 364.
- Sudeste: 231 a 370.
- Centro-Oeste: 220 a 352.
- Brasil: 218 a 358.

Em função desses intervalos, as análises dos dados serão realizadas confrontando Norte com Nordeste, Sul com Sudeste e Centro-Oeste com Brasil.

3.1.1 Análise Saeb 2017: Norte x Nordeste

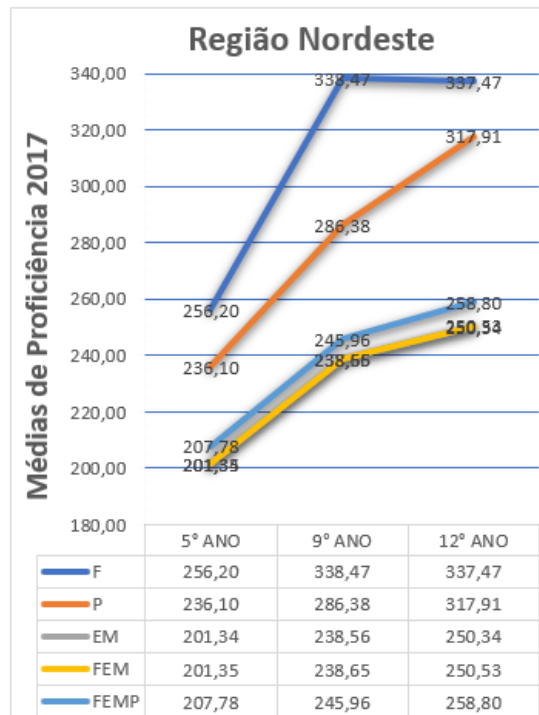
As regiões Norte e Nordeste apresentam médias de proficiência muito próximas quando confrontadas por dependência, conforme pode ser verificado nos seguintes gráficos:

Gráfico 1 – Proficiência Região Norte



Fonte: Saeb 2017.

Gráfico 2 – Proficiência Região Nordeste



Fonte: Saeb 2017.

O Quadro seguinte apresenta o distanciamento das médias do Nordeste em relação às médias do Norte:

Quadro 2 – Distanciamento das médias de Nordeste e Norte

	DIFERENÇAS "NORDESTE - NORTE"		
	5º ANO	9º ANO	12º ANO
F	16,18	24,72	1,78
P	-3,56	2,12	2,33
EM	-0,62	0,51	6,11
FEM	-0,64	0,40	6,03
FEMP	2,74	3,79	8,51

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Com a exceção das dependências P, EM e FEM do 5º Ano, todos os resultados do Nordeste superaram aqueles apresentados pelo Norte. Verifica-se o destaque das médias obtidas pela dependência F do Nordeste em relação às médias do Norte para os 5º e 9º Anos.

Em relação ao 3º Ano do Ensino Médio (12º Ano), as dependências F e P são muito próximas com diferenças abaixo de 2,5 pontos na escala de proficiência. Nas demais dependências (EM, FEM e FEMP), as diferenças superam 5,0 pontos. Esses dados permitem inferir que os estudantes do Nordeste podem ter melhor rendimento nos exames vestibulares do que os do Norte, uma vez que se trata da última etapa da Educação Básica (a análise dos dados do Enem pode respaldar essa avaliação sugestiva).

Para cada região, pode ser calculado o peso (percentual de participação) dos estudantes da Rede Privada quando estes são acrescentados na dependência FEM (Rede Pública, incluindo a dependência Federal), compondo a FEMP. Considerando $m(X)$ e $p(X)$ como a média e o peso da dependência X, respectivamente, o cálculo é obtido pela média ponderada de FEMP, conforme a expressão:

$$m(FEMP) = \frac{m(FEM) \cdot p(FEM) + m(P) \cdot p(P)}{p(FEM) + p(P)}$$

Como $p(FEM) + p(P) = 100\% = 1,00$ ou $p(FEM) = 1,00 - p(P)$:

$$m(FEMP) = m(FEM) \cdot (1,00 - p(P)) + m(P) \cdot p(P)$$

Daí,

$$m(FEMP) = m(FEM) + (m(P) - m(FEM)) \cdot p(P)$$

Portanto:

$$p(P) = \frac{m(FEMP) - m(FEM)}{m(P) - m(FEM)}$$

Assim, conforme os dados apresentados nos gráficos anteriores para o 12º Ano, o peso da Rede Privada para o Norte equivale a:

$$p(P) = \frac{250,29 - 244,50}{315,58 - 244,50} = \frac{5,79}{71,08} \cong 0,0815 = 8,15\%$$

e para o Nordeste:

$$p(P) = \frac{258,80 - 250,53}{317,91 - 250,53} = \frac{8,17}{67,38} \cong 0,1213 = 12,13\%$$

Esses percentuais de participação esclarecem o impacto da dependência P em FEMP e corrobora o argumento de que, em termos de média, a maioria dos estudantes do 3º Ano do Ensino Médio da Rede Pública não consegue fazer frente com os da Rede Privada nos exames vestibulares das universidades públicas, pois a quantidade de vagas disponíveis deve ser abaixo do valor referente aos percentuais obtidos para os pesos da Rede Privada.

Uma avaliação interessante é verificar a participação da dependência F em FEM. Analogamente:

$$p(F) = \frac{m(FEM) - m(EM)}{m(F) - m(EM)}$$

Conforme os dados para o 12º Ano, o peso da dependência Federal para o Norte equivale a:

$$p(F) = \frac{244,50 - 244,23}{335,69 - 244,23} = \frac{0,27}{91,46} \cong 0,0030 = 0,30\%$$

e para o Nordeste:

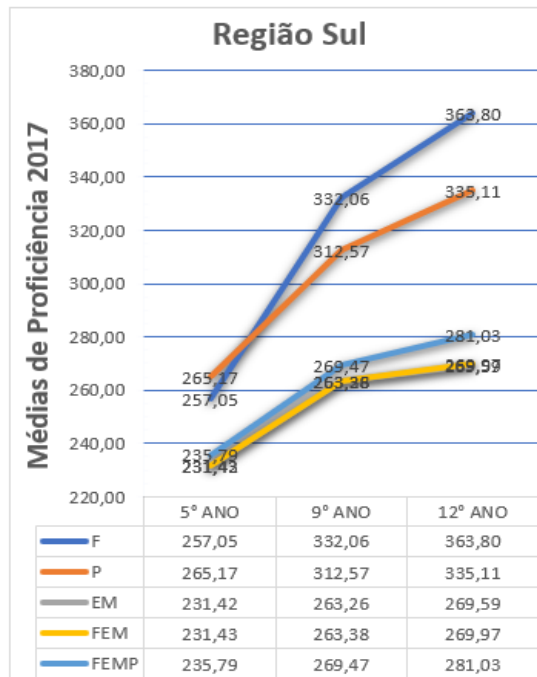
$$p(F) = \frac{250,53 - 250,34}{337,47 - 250,34} = \frac{0,19}{87,13} \cong 0,0022 = 0,22\%$$

Esses percentuais deixam evidente que o quantitativo de estudantes da dependência F, apesar da elevada média de proficiência alcançada, pouco contribui para elevar a realidade da

educação pública dessas regiões. Essa constatação está apresentada nos gráficos, pois as linhas de EM (cinza) e FEM (amarela) praticamente coincidem.

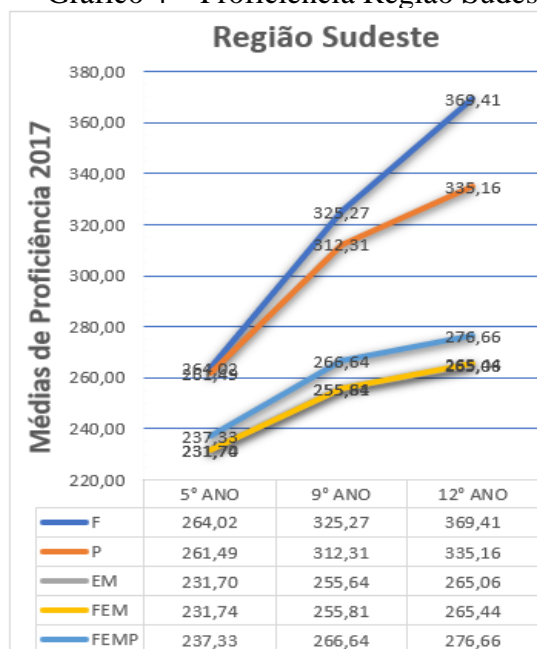
3.1.2 Análise Saeb 2017: Sul x Sudeste

Gráfico 3 – Proficiência Região Sul



Fonte: Saeb 2017.

Gráfico 4 – Proficiência Região Sudeste



Fonte: Saeb 2017.

Analogamente à constatação obtida em 3.1.1, as dependências EM e FEM apresentam médias muito próximas e isso é explicado pelo peso da dependência F na composição de FEM, que apresenta percentual inferior a 0,5%. Portanto, não apresenta influência significativa no panorama da educação pública dessas regiões.

Para o 12º Ano, esse peso equivale a:

$$p(F) = \frac{269,97 - 269,59}{363,80 - 269,59} = \frac{0,38}{94,21} \cong 0,0040 = 0,40\% \text{ (Sul)}$$

e

$$p(F) = \frac{265,44 - 265,06}{369,41 - 265,06} = \frac{0,38}{104,35} \cong 0,0036 = 0,36\% \text{ (Sudeste)}$$

Os quadros seguintes apresentam os demais pesos da dependência F em relação à FEM e também os pesos da dependência P em relação à FEMP para cada ano avaliado:

Quadro 3 – Peso da dependência F Região Sul

PESO (%) - SUL (SAEB 2017)			
DEP.	5º ANO	9º ANO	12º ANO
F	0,04	0,17	0,40
P	12,92	12,38	16,98

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Quadro 4 – Peso da dependência F Região Sudeste

PESO (%) - SUDESTE (SAEB 2017)			
DEP.	5º ANO	9º ANO	12º ANO
F	0,12	0,24	0,36
P	18,79	19,17	16,09

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Os pesos apresentados confirmam que a dependência F tem muito pouca influência no desempenho médio da Rede Pública (FEM) em todos os anos avaliados. No entanto, a influência da dependência P (Rede Privada) possui peso significativo, superando 16% na dependência FEMP (Redes Pública e Privada, equivalente a todo o sistema de ensino) no 12º Ano (3º Ano do Ensino Médio).

Conforme os gráficos referentes a Sul e Sudeste, as médias de proficiência são muito próximas quando confrontadas por dependência. O quadro seguinte apresenta o distanciamento das médias do Sul em relação às médias do Sudeste.

Quadro 5 – Distanciamento das médias Regiões Sul e Sudeste

	DIFERENÇAS "SUL - SUDESTE"		
	5º ANO	9º ANO	12º ANO
F	-6,97	6,79	-5,61
P	3,68	0,26	-0,05
EM	-0,28	7,62	4,53
FEM	-0,31	7,57	4,53
FEMP	-1,54	2,83	4,37

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

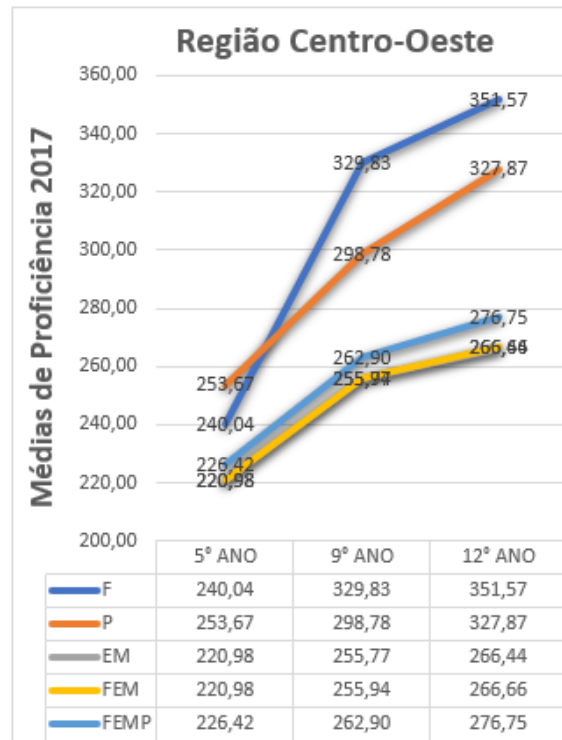
Diferentemente da análise Norte x Nordeste, não há uma região predominantemente superior à outra. Verifica-se que o 9º Ano do Sul supera o Sudeste em todas as dependências, destacando a Rede Pública (Federal, Estadual e Municipal). No entanto, no desempenho geral (dependência FEMP), a diferença (2,83) é pouco significativa quando comparada ao intervalo entre níveis de desempenho de 25 pontos nas Escalas de Proficiência de Matemática.

No quadro de diferenças “Sul – Sudeste”, alguns valores estão destacados por estarem acima de 5 pontos (em módulo). Mesmo assim, esses valores ainda estão abaixo da metade do intervalo entre níveis (12,5 pontos), de modo que essas regiões possuem desempenhos similares nas Escalas de Proficiência.

3.1.3 Análise Saeb 2017: Centro-Oeste x Brasil

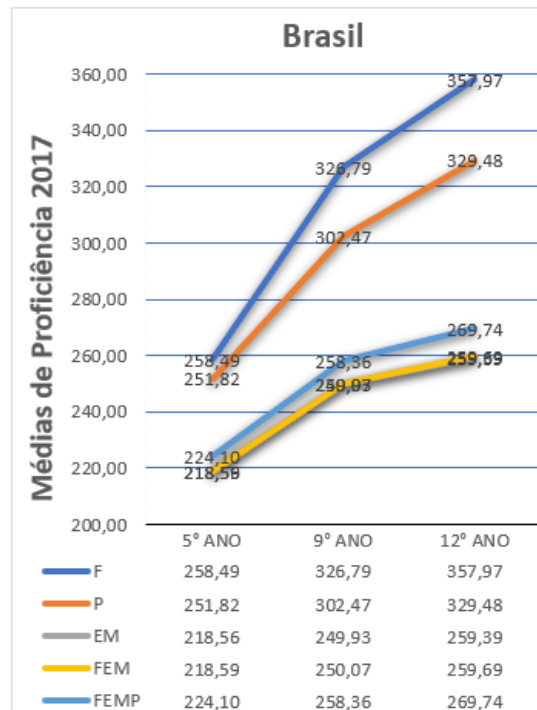
Os seguintes gráficos, assim como os dados apresentados para as dependências EM e FEM, confirmam as constatações anteriores de que a dependência F não apresenta influência significativa para alterar a realidade da educação pública regional e do País (as linhas cinza e amarela são praticamente coincidentes).

Gráfico 5 – Proficiência Região Centro-Oeste



Fonte: Saeb 2017.

Gráfico 6 – Proficiência dados Brasil



Fonte: Saeb 2017.

Os quadros seguintes apresentam os pesos da dependência F em relação à FEM e também os pesos da dependência P em relação à FEMP para cada ano avaliado:

Quadro 6 – Pesos da dependência F e P

PESO (%) - CENTRO-OESTE (SAEB 2017)			
DEP.	5º ANO	9º ANO	12º ANO
F	0,00	0,23	0,26
P	16,64	16,25	16,48

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Quadro 7 – Pesos da dependência dados Brasil

PESO (%) - BRASIL (SAEB 2017)			
DEP.	5º ANO	9º ANO	12º ANO
F	0,08	0,18	0,30
P	16,58	15,82	14,40

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Assim como nas demais análises, os pesos apresentados confirmam que a dependência P (Rede Privada) possui peso significativo no sistema de ensino (dependência FEMP), superando 16% e 14% no 12º Ano (3º Ano do Ensino Médio) para o Centro-Oeste e Brasil, respectivamente.

Em relação às médias de proficiência, o quadro seguinte apresenta o distanciamento das médias do Centro-Oeste em relação às médias do Brasil.

Quadro 8 – Distanciamento da Região Centro-Oeste em relação às médias do Brasil

DIFERENÇAS "CO - BRASIL"			
	5º ANO	9º ANO	12º ANO
F	-18,45	3,04	-6,40
P	1,85	-3,69	-1,61
EM	2,42	5,84	7,05
FEM	2,39	5,87	6,97
FEMP	2,32	4,54	7,01

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos dados da pesquisa.

Destaca-se que a dependência F do 5º Ano do Brasil supera em 18,45 pontos o Centro-Oeste.

Considerando que uma diferença é significativa se for superior a 12,5 pontos (metade do intervalo entre níveis de proficiência), os demais valores confirmam que as realidades da educação no Centro-Oeste e no Brasil apresentam desempenhos médios semelhantes.

3.1.4 Análise: diferença entre Médias

A análise dos gráficos esclarece a realidade do ensino da Matemática no país, evidenciando as regiões com melhor (e pior) desempenho, conforme as Escalas de Proficiência de Matemática. Assim, sobressaem as Regiões Sul e Sudeste, seguidas pela Região Centro-Oeste. Por outro lado, Nordeste e Norte são as Regiões que apresentam os piores desempenhos, ficando abaixo da média nacional em praticamente todas as dependências administrativas e nos três níveis de escolaridade avaliados.

Em relação ao Nordeste, verifica-se uma exceção na dependência F (Federal) do 9º Ano que superou a média nacional nos três anos de avaliação. Esse desempenho está relacionado com a presença dos colégios militares de Fortaleza, Recife e Salvador, pois estes participam da dependência em questão. O padrão dos resultados observados em cada região acompanha os resultados obtidos para o Brasil, de modo que as dependências F e P se distanciam de EM (Estadual e Municipal).

Uma análise diferenciada pode ser efetuada a partir das diferenças entre médias de proficiência obtidas entre dependências. Assim, as seguintes nomenclaturas foram definidas:

- P-F: diferença entre a dependência P e F;
- P-EM: diferença entre a dependência P e EM;
- FEM-EM: diferença entre a dependência FEM e EM; e
- FEMP-FEM: diferença entre a dependência FEMP e FEM.

A partir dos resultados do Saeb 2017, foi obtido o seguinte quadro:

Quadro 9 – Diferenças entre médias Saeb 2017 Matemática

SAEB 2017		DIF. ENTRE MÉDIAS - MATEMÁTICA		
REGIÃO	Diferença	5º ANO	9º ANO	12º ANO
N	P-F	-0,36	-29,49	-20,11
	P-EM	37,70	46,21	71,35
	FEM-EM	0,03	0,20	0,27
	FEMP-FEM	3,05	3,92	5,79
NE	P-F	-20,10	-52,09	-19,56
	P-EM	34,76	47,82	67,57
	FEM-EM	0,01	0,09	0,19
	FEMP-FEM	6,43	7,31	8,27
SE	P-F	-2,53	-12,96	-34,25
	P-EM	29,79	56,67	70,10
	FEM-EM	0,04	0,17	0,38
	FEMP-FEM	5,59	10,83	11,22
S	P-F	8,12	-19,49	-28,69
	P-EM	33,75	49,31	65,52
	FEM-EM	0,01	0,12	0,38
	FEMP-FEM	4,36	6,09	11,06
CO	P-F	13,63	-31,05	-23,70
	P-EM	32,69	43,01	61,43
	FEM-EM	0,00	0,17	0,22
	FEMP-FEM	5,44	6,96	10,09
BRASIL	P-F	-6,67	-24,32	-28,49
	P-EM	33,26	52,54	70,09
	FEM-EM	0,03	0,14	0,30
	FEMP-FEM	5,51	8,29	10,05

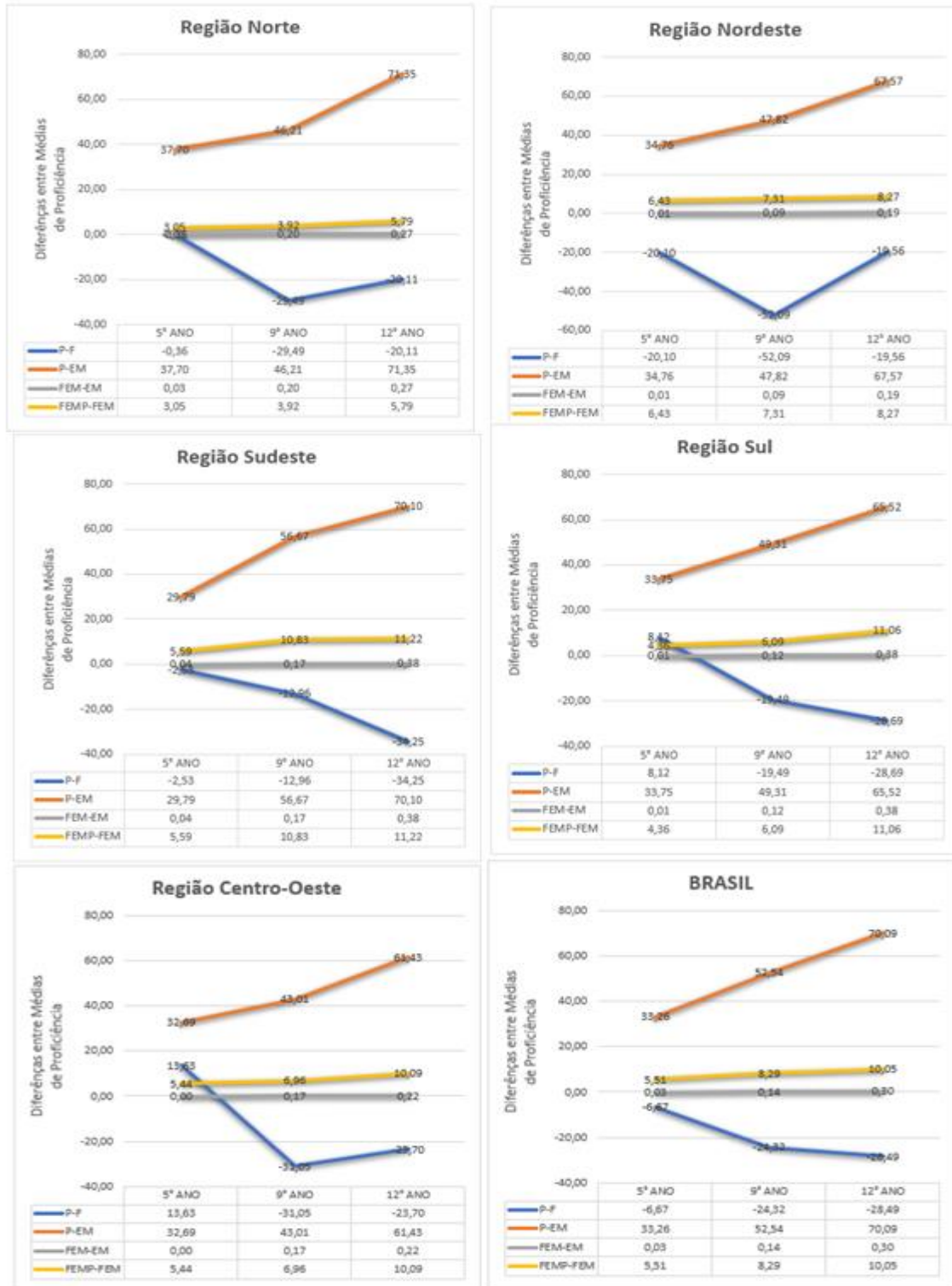
Fonte: Saeb 2017.

Conforme verificado anteriormente, o acréscimo da dependência F em EM, compondo FEM, contribui pouco para a elevação do desempenho da Rede Pública de ensino no Brasil, conforme verificado nas linhas FEM-EM com valores variando de 0,00 a 0,38.

A explicação para essa última conclusão pode ser associada às definições da LDB, pois a dependência F na Educação Básica refere-se às escolas militares. Estas possuem quantitativo de estudantes muito menor e estrutura física e de recursos humanos diferenciados, além de concurso de seleção de estudantes civis – o que eleva o desempenho nas proficiências avaliadas dessas instituições. Esses elementos favorecem a gestão institucional quando comparadas às escolas estaduais e municipais (dependência EM). Além disso, as escolas militares apresentam um histórico de excelência quando comparadas com as redes públicas de ensino da dependência EM. Isso está evidente nas linhas P-F que apresentam valores negativos (dependência F supera a P), excetuando-se os resultados do 5º Ano do Sul (S) e Centro-Oeste (CO).

Para uma melhor visualização, as diferenças entre médias estão apresentadas nos gráficos a seguir:

Gráfico 7 – Diferenças entre médias cinco Regiões e Brasil



Fonte: Saeb 2017.

Os dados mais impactantes nessa análise estão associados à comparação da Rede Pública X Rede Privada, pois, ao acrescentar a dependência P em FEM, compo

agrupamento FEMP, pode ser verificada uma elevação nos rendimentos de proficiência, variando em uma faixa de 3,05 a 11,22 (diferenças FEMP-FEM). Essas variações podem ser consideradas pouco significativas. No entanto, uma avaliação mais minuciosa do rendimento isolado de P frente à EM (diferenças P-EM) apresenta diferenças significativas de rendimentos de proficiência, variando em uma faixa de pontuação de 29,79 a 71,35 – o que equivale a uma diferença de 1 a 3 níveis de proficiência, conforme as Escalas de Proficiência em Matemática. Assim, a comparação de FEM e FEMP não pode ser desprezada em função do quantitativo de estudantes da Rede Privada (participação superior a 10%) ser muito maior que o das escolas militares (participação inferior a 0,5%). E a consequência disso pode ser avaliada e estudada, por exemplo, na comparação entre quantidade de vagas disponíveis nas universidades públicas e a quantidade de vagas obtidas por estudantes da Rede Privada (dependência P).

Essa última avaliação/estudo não foi o foco deste trabalho. No entanto, uma possível conclusão a ser deduzida diante dessas informações é que boa parte das vagas disponíveis nas universidades públicas é conquistada por estudantes oriundos da Rede Privada (P) e da dependência Federal (F). Caso essa conclusão seja uma realidade, o Poder Público deve reavaliar os seus esforços na educação pública, pois a maioria de seus estudantes não consegue se inserir nas universidades públicas em condições de igualdade, provavelmente, devido à formação obtida. Daí, a necessidade da existência de políticas públicas de compensação como são as cotas de 50% para acesso às universidades públicas de estudantes oriundos da Rede Pública.

3.2 EXAME NACIONAL DE ACESSO – PROFMAT 2018/UNB

Os resultados do Exame Nacional de Acesso (ENA) do PROFMAT 2018 são apresentados sem que haja a identificação de nenhum candidato. A relação das notas apenas é apresentada em ordem decrescente, pois o intuito é refletir sobre a realidade da Educação Matemática na Rede Pública de ensino local (Distrito Federal). Assim, o protocolo de cada candidato que tinha o padrão PROFMAT-2018-027.XXX-X foi substituído por XXX.

O exame apresentava 30 questões objetivas sobre assuntos do Ensino Médio e teve uma questão anulada. Esta foi computada a todos os candidatos. A tabela abaixo apresenta as pontuações de todos os 266 candidatos participantes:

Quadro 10 – Resultados do ENA – PROFMAT 2018/UnB

Nº	Protocolo	Acertos Final *	Nº	Protocolo	Acertos Final *	Nº	Protocolo	Acertos Final *	Nº	Protocolo	Acertos Final *	Nº	Protocolo	Acertos Final *	Nº	Protocolo	Acertos Final *	Nº	Protocolo	Acertos Final *
1	XXX	30	39	XXX	19	77	XXX	15	115	XXX	11	153	XXX	9	191	XXX	6	229	XXX	1
2	XXX	30	40	XXX	19	78	XXX	14	116	XXX	11	154	XXX	9	192	XXX	6	230	XXX	1
3	XXX	30	41	XXX	19	79	XXX	14	117	XXX	11	155	XXX	9	193	XXX	6	231	XXX	1
4	XXX	30	42	XXX	19	80	XXX	14	118	XXX	11	156	XXX	9	194	XXX	6	232	XXX	1
5	XXX	29	43	XXX	19	81	XXX	14	119	XXX	11	157	XXX	9	195	XXX	6	233	XXX	1
6	XXX	29	44	XXX	19	82	XXX	14	120	XXX	11	158	XXX	9	196	XXX	6	234	XXX	1
7	XXX	28	45	XXX	18	83	XXX	14	121	XXX	11	159	XXX	9	197	XXX	6	235	XXX	1
8	XXX	27	46	XXX	18	84	XXX	13	122	XXX	11	160	XXX	9	198	XXX	5	236	XXX	1
9	XXX	26	47	XXX	18	85	XXX	13	123	XXX	11	161	XXX	9	199	XXX	5	237	XXX	1
10	XXX	26	48	XXX	18	86	XXX	13	124	XXX	11	162	XXX	9	200	XXX	5	238	XXX	1
11	XXX	25	49	XXX	18	87	XXX	13	125	XXX	11	163	XXX	9	201	XXX	5	239	XXX	1
12	XXX	25	50	XXX	18	88	XXX	13	126	XXX	11	164	XXX	9	202	XXX	5	240	XXX	1
13	XXX	25	51	XXX	18	89	XXX	13	127	XXX	11	165	XXX	8	203	XXX	5	241	XXX	1
14	XXX	24	52	XXX	18	90	XXX	13	128	XXX	11	166	XXX	8	204	XXX	4	242	XXX	1
15	XXX	23	53	XXX	17	91	XXX	13	129	XXX	10	167	XXX	8	205	XXX	4	243	XXX	1
16	XXX	23	54	XXX	17	92	XXX	13	130	XXX	10	168	XXX	8	206	XXX	4	244	XXX	1
17	XXX	23	55	XXX	17	93	XXX	13	131	XXX	10	169	XXX	8	207	XXX	3	245	XXX	1
18	XXX	23	56	XXX	17	94	XXX	13	132	XXX	10	170	XXX	8	208	XXX	1	246	XXX	1
19	XXX	22	57	XXX	17	95	XXX	13	133	XXX	10	171	XXX	8	209	XXX	1	247	XXX	1
20	XXX	22	58	XXX	17	96	XXX	13	134	XXX	10	172	XXX	8	210	XXX	1	248	XXX	1
21	XXX	22	59	XXX	17	97	XXX	12	135	XXX	10	173	XXX	8	211	XXX	1	249	XXX	1
22	XXX	22	60	XXX	17	98	XXX	12	136	XXX	10	174	XXX	8	212	XXX	1	250	XXX	1
23	XXX	21	61	XXX	17	99	XXX	12	137	XXX	10	175	XXX	8	213	XXX	1	251	XXX	1
24	XXX	21	62	XXX	17	100	XXX	12	138	XXX	10	176	XXX	8	214	XXX	1	252	XXX	1
25	XXX	21	63	XXX	17	101	XXX	12	139	XXX	10	177	XXX	8	215	XXX	1	253	XXX	1
26	XXX	21	64	XXX	17	102	XXX	12	140	XXX	10	178	XXX	7	216	XXX	1	254	XXX	1
27	XXX	21	65	XXX	17	103	XXX	12	141	XXX	10	179	XXX	7	217	XXX	1	255	XXX	1
28	XXX	20	66	XXX	16	104	XXX	12	142	XXX	10	180	XXX	7	218	XXX	1	256	XXX	1
29	XXX	20	67	XXX	16	105	XXX	12	143	XXX	9	181	XXX	7	219	XXX	1	257	XXX	1
30	XXX	20	68	XXX	16	106	XXX	12	144	XXX	9	182	XXX	7	220	XXX	1	258	XXX	1
31	XXX	20	69	XXX	16	107	XXX	12	145	XXX	9	183	XXX	7	221	XXX	1	259	XXX	1
32	XXX	20	70	XXX	16	108	XXX	12	146	XXX	9	184	XXX	7	222	XXX	1	260	XXX	1
33	XXX	20	71	XXX	16	109	XXX	12	147	XXX	9	185	XXX	7	223	XXX	1	261	XXX	1
34	XXX	20	72	XXX	15	110	XXX	12	148	XXX	9	186	XXX	7	224	XXX	1	262	XXX	1
35	XXX	20	73	XXX	15	111	XXX	12	149	XXX	9	187	XXX	7	225	XXX	1	263	XXX	1
36	XXX	19	74	XXX	15	112	XXX	12	150	XXX	9	188	XXX	6	226	XXX	1	264	XXX	1
37	XXX	19	75	XXX	15	113	XXX	12	151	XXX	9	189	XXX	6	227	XXX	1	265	XXX	1
38	XXX	19	76	XXX	15	114	XXX	11	152	XXX	9	190	XXX	6	228	XXX	1	266	XXX	1

Fonte: ENA-PROFMAT/2018

A pontuação de corte para a seleção de candidatos foi estipulada em 20, de modo que foram selecionados 35 candidatos (fundo verde). Em fundo laranja claro estão os demais candidatos que acertaram pelo menos metade das questões. E, por fim, em fundo magenta claro, os outros candidatos que tiveram pontuação a partir de 10 acertos.

Agrupando a frequência em função da pontuação obtida pelos candidatos, tem-se:

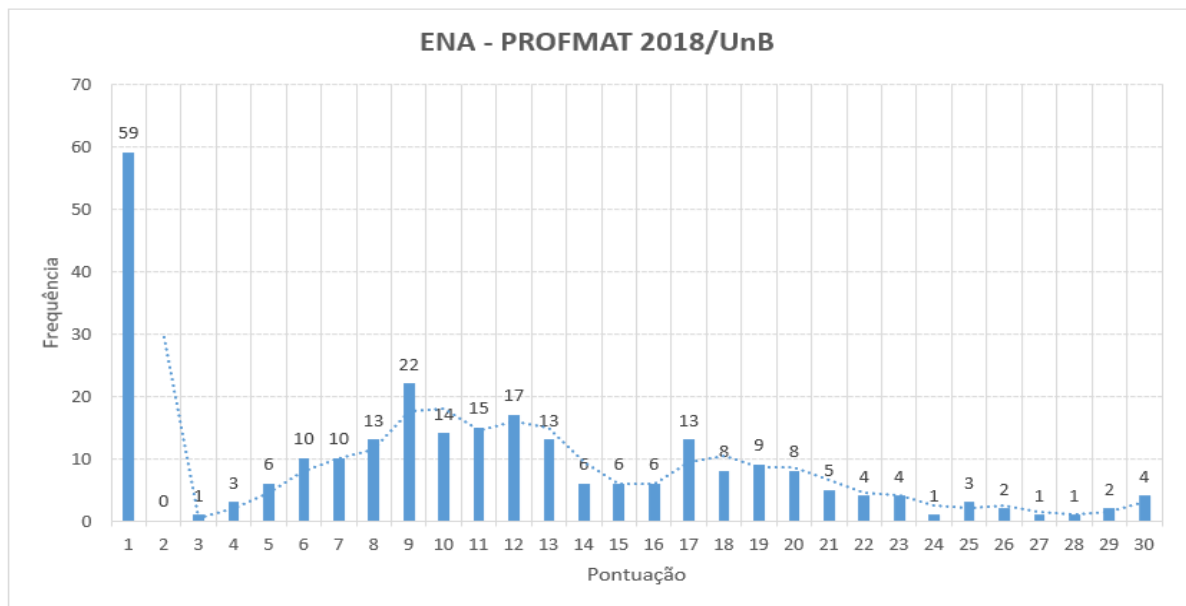
Quadro 11 – Frequência em função da pontuação obtida pelos candidatos

Pontuação	Freq.	Freq. Ac.	Pontuação	Freq.	Freq. Ac.	Pontuação	Freq.	Freq. Ac.
30	4	4	20	8	35	10	14	142
29	2	6	19	9	44	9	22	164
28	1	7	18	8	52	8	13	177
27	1	8	17	13	65	7	10	187
26	2	10	16	6	71	6	10	197
25	3	13	15	6	77	5	6	203
24	1	14	14	6	83	4	3	206
23	4	18	13	13	96	3	1	207
22	4	22	12	17	113	2	0	207
21	5	27	11	15	128	1	59	266

Fonte: elaborado pelo autor a partir dos resultados do ENA.

Graficamente temos a seguinte construção:

Gráfico 8 – ENA PROFMAT 2018/UnB



Fonte: elaborado pelo autor a partir dos resultados do Quadro 11.

Com exceção da pontuação igual a 1, as pontuações extremas (próximas de 1 ou 30) possuem menor frequência. Verifica-se maiores frequências entre as pontuações 6 e 20. Assim, em função do número de candidatos (não suficiente para considerar uma curva normal), os resultados apresentados podem ser considerados normais por se tratar de um exame de admissão. No entanto, é importante destacar que se tratava de uma prova de Matemática (conteúdo de Ensino Médio) a ser resolvida por professores de Matemática.

Do total de 266 candidatos, foram selecionados 35 (equivalente a 13,2%) que erraram no máximo 10 questões. Dos 231 restantes, 42 candidatos acertaram pelo menos metade das

questões (15 a 19 acertos), totalizando 77 candidatos. Assim, 189 candidatos (equivalente a 71,1%) não obtiveram rendimento de 50% nessa prova.

Dado que uma questão foi anulada e 59 candidatos (equivalente a 22,2%) obtiveram 1 acerto, estes candidatos não acertaram efetivamente nenhuma questão válida. Uma possível explicação para esse fato pode estar associada a professores dedicados exclusivamente ao magistério no Ensino Fundamental, de forma a não praticarem exercícios equivalentes às questões apresentadas no ENA.

Essa análise está restrita à amostra dos professores desse exame interessados na reciclagem e/ou no desenvolvimento técnico proposto pelo PROFMAT. Considerando que este trabalho tem foco na Educação Matemática da Rede Pública, uma análise direcionada exclusivamente para o corpo docente da Secretaria de Educação do Governo do Distrito Federal pode apresentar realidades ainda mais desafiadoras em função das deficiências técnicas dos professores, caso essa amostra possa representar a realidade local.

Certamente, outras avaliações mais criteriosas devem ser feitas. Ainda assim, uma pergunta pode ser feita:

“Nossos professores de Matemática da Rede Pública estão preparados para ensinar a Matemática?”

Caso os resultados apresentados nesta seção traduzam a realidade da capacitação técnica dos professores de Matemática, seja no âmbito do Distrito Federal ou das demais unidades da federação, sugere-se que a gestão pública da educação (municipal, estadual ou federal) avalie as capacitações vigentes (que certamente existem) e proponha mais programas de treinamento e aperfeiçoamento de professores de Matemática da Rede Pública.

3.3 COMENTÁRIOS

A seção 3.1 deixa claro que estudantes da Rede Pública apresentam menor desempenho quando comparados com os da Rede Privada. Por outro lado, a seção 3.2 apresenta indícios de que, pelo menos, alguns professores podem estar precisando de capacitação.

É fundamental que as Secretarias de Educação de cada estado avaliem as suas deficiências, de modo a direcionar ações efetivas para reverter realidades que caminham na direção oposta ao cenário idealizado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB).

4 PROPOSTAS DE PRÁTICAS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CONCRETA

Em Introdução aos PCNs (BRASIL, 1997a), no capítulo Princípios e Fundamentos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, consta:

Não basta visar à capacitação dos estudantes para futuras habilitações em termos das especializações tradicionais, mas antes trata-se de ter em vista a formação dos estudantes em termos de sua capacitação para a aquisição e o desenvolvimento de novas competências, em função de novos saberes que se produzem e demandam um novo tipo de profissional, preparado para poder lidar com novas tecnologias e linguagens, capaz de responder a novos ritmos e processos. Essas novas relações entre conhecimento e trabalho exigem capacidade de iniciativa e inovação e, mais do que nunca, **“aprender a aprender”**. Isso coloca novas demandas para a escola. A educação básica tem assim a função de garantir condições para que o aluno construa instrumentos que o capacitem para um processo de educação permanente.

O termo “aprender a aprender” sugere a evolução de práticas educacionais em que os estudantes sejam atores (participantes) ativos do processo ensino-aprendizagem ao invés de ouvintes passivos de um modelo ultrapassado, em que o professor é o ator principal (e, muitas vezes, único). Assim, essa participação ativa dos estudantes sugere o ensino da Matemática com o uso de material concreto para que o estudante passe a aprender enquanto pensa, raciocina, mexe, manuseia e trabalha com algo concreto. A partir disso, ele infere, deduz, corrige, conclui e constrói as bases fundamentais da Matemática.

Desse modo, as propostas seguintes possuem o intuito de apresentar formas simples de trabalhar conceitos, teorias e operações básicos da Matemática, aprimorando para operações mais complexas. O princípio da maioria das propostas é trabalhar com material concreto de baixo custo (acessíveis à maioria dos estudantes) e traduzir cada configuração em sua respectiva operação matemática, aprimorando a compreensão e o domínio da linguagem matemática (sentido: concreto => abstrato/linguagem matemática). Cabe adiantar que algumas dessas propostas são consequência de outras previamente apresentadas.

Essas propostas resultam da minha experiência como estudante, monitor, facilitador e professor no ensino da Matemática por mais de trinta anos, além das vivências práticas de trabalhar em feira, conforme mencionado na introdução deste trabalho.

4.1 APRIMORAMENTO DA SOMA

A ideia é propor que o estudante manuseie material simples, construindo configurações com quantidades de objetos (por exemplo: grãos de feijão ou palitos de fósforos – materiais acessíveis e baratos) representadas numericamente. Dessa forma, cada número está associado a algo concreto e o estudante passa a ser agente da construção do pensamento e raciocínio matemáticos.

Proposta: escolha de grãos de feijão e construção de configurações de duas ou mais parcelas.

Atividades:

O estudante deve construir configurações de duas e três parcelas de modo que a soma seja:

- (1) um valor de 1 a 10 e
- (2) um valor de 10 a 100 (neste caso, as parcelas devem representar dezenas)

Essas atividades têm o objetivo de que o estudante seja capaz de tratar a mesma quantidade – seja em unidades ou dezenas – de diversas maneiras. Isso possibilitará que ele exercite a criatividade em função de construir diversas configurações e adquira maior rapidez em cálculos aritméticos.

Exemplos de atividades estão no Anexo D (Práticas 1 e 2).

Por meio dessas atividades, os estudantes podem verificar e compreender na prática e de forma lúdica as seguintes propriedades:

- (i) COMUTATIVIDADE (*a ordem das parcelas não altera a soma*);
- (ii) ASSOCIATIVIDADE (atividades da Prática 2); e
- (iii) ELEMENTO NEUTRO.

Observação 1: em relação à ASSOCIATIVIDADE, o professor deve ressaltar que a adição pode ser efetuada metodicamente a partir de duas parcelas. Daí, o resultado é somado com a terceira parcela. Essas etapas podem ser traduzidas na escrita por meio do acréscimo de parênteses e o professor deve esclarecer adequadamente seu uso por meio das atividades práticas. Assim, o estudante deverá reescrever cada operação com o uso adequado dos parênteses, conforme realiza as somas.

Observação 2: o professor deve acompanhar os estudantes em suas atividades para que estes observem que algumas atividades propostas apresentam o número “0” (ZERO) e este, de

fato, não influencia no resultado final, destacando a sua propriedade de ELEMENTO NEUTRO.

4.2 APRIMORAMENTO DA DIFERENÇA

As atividades a serem propostas apresentam a ideia de tirar uma quantidade de elementos de um total ou “ficar devendo” por querer tirar mais do que se tem inicialmente. Assim como na soma, o procedimento consiste em escolher um material concreto, sejam palitos de fósforo, grãos de feijão, pequenas pedras, tampinhas de garrafas (vidro ou PET) etc.

Proposta: escolha de grãos de feijão e construção de configurações de minuendo (valor base) e subtraendo (valor retirado).

Atividades:

O estudante deve construir configurações de subtrações, identificando três grupos: Valor Base (minuendo), Valor Retirado (subtraendo) e Resultado/Dívida (diferença).

Casos a serem tratados:

(1) minuendo maior que subtraendo: a diferença é identificada como “Resultado”.

(2) minuendo menor que subtraendo: a diferença é identificada como “Dívida”.

Essas atividades têm o objetivo de permitir ao estudante a visualização das subtrações enquanto manipula os materiais concretos, de modo que processe cada operação e entenda a respectiva diferença no conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) – minuendo maior que subtraendo (Resultado) – e no conjunto dos números inteiros negativos (\mathbb{Z}) – minuendo menor que subtraendo (Dívida).

4.2.1 Resultados em \mathbb{N} (Minuendo $>$ Subtraendo)

Os casos tratados, conforme a Prática 3 do Anexo D, apresentam operações com termos (minuendo e subtraendo) positivos representados pelas quantidades do material concreto adotado, ou seja, representados por números naturais, resultando um número natural em cada operação.

Cada estudante deve “traduzir” as atividades realizadas sob a supervisão do professor. Nessas traduções, o professor deve destacar o uso do sinal negativo como operação referente a tirar uma quantidade de outra.

Por exemplo:

$$\blacksquare \quad 12 - 4 = 8$$

- $35 - 23 = 12$
- $43 - 29 = 14$

4.2.2 Resultados em \mathbb{Z} (Minuendo < Subtraendo)

Os casos tratados, conforme a Prática 4 do Anexo D, apresentam operações com termos positivos representados pelas quantidades do material concreto adotado. No entanto, diferentemente do item anterior, o resultado é uma “dívida” que não é NATURAL, de modo que o professor deve esclarecer a representação dessa dívida como um número negativo.

Analogamente, cada estudante deve “traduzir” as atividades realizadas sob a supervisão do professor. Nessas traduções, o professor deve destacar o uso do sinal negativo tanto para a operação referente a tirar uma quantidade de outra, como também para a representação do resultado.

Por exemplo:

- $4 - 12 = -8$
- $18 - 55 = -37$
- $39 - 42 = -3$

Nota: A partir das atividades realizadas nos itens 4.2.1 e 4.2.2, o professor pode apresentar o conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}) aos estudantes.

4.2.3 Sinais para Números Inteiros (+/-) e Operações

A proposta deste item é dar um significado diferente para números positivos e negativos, como um jogo, de modo que um tipo de elemento (por exemplo: grão de feijão) anula ao se juntar com outro tipo de elemento (por exemplo: palito de fósforo). Assim, a quantidade de grãos de feijão (ou outro material concreto adotado) é considerada como números positivos e a quantidade de palitos de fósforo (ou outro material concreto adotado), números negativos, ou vice-versa.

Cabe esclarecer que poderia ser utilizado apenas um tipo de material concreto. No entanto, nessa situação, seria necessário definir previamente a posição da parte positiva separada da parte negativa na configuração da operação. Por exemplo: dispor de duas caixinhas sem tampa de cores distintas em que o material colocado numa caixinha seja positivo e o

colocado na outra, negativo. Nessa proposta, a Prática 5 do Anexo 4 apresenta exemplos dessas atividades.

A partir de atividades dessa natureza, cada estudante deve “traduzir” as suas atividades de diferenças sob a supervisão do professor. Nessas traduções, o professor deve destacar o uso de parênteses para separar adequadamente a quantidade de cada material associada ao respectivo sinal, positivo ou negativo. Deve ser destacado que aquele material em maior quantidade define o sinal do resultado e o estudante deve associar o sinal e compreender naturalmente esse resultado.

É sugestivo enfatizar que o sinal positivo associado a um número é NATURAL, ou seja, os números positivos são números naturais. Assim, devem ser destacadas as situações em que o sinal positivo e/ou os parênteses podem deixar de ser apresentados porque a situação não apresenta interpretação dúbia.

Por exemplo:

- $(+8) + (+7) = +8 + 7 = +15 = 15$
- $(-2) + (+5) = (-2) + 5 = -2 + 2 + 3 = +3 = 3$
- $(+11) + (-7) = +11 - 7 = +4 + 7 - 7 = +4 = 4$
- $(-8) + (-7) = -8 - 7 = -15$
- $(+2) + (-5) = +2 - 5 = +2 - 2 - 3 = -3$
- $(-11) + (+7) = -11 + 7 = -4 - 7 + 7 = -4$

4.3 ZERO (ELEMENTO NEUTRO DA ADIÇÃO)

O número ZERO pode ser representado de várias formas e isso pode ser aplicado – como será visto – para realizar operações de subtração e adição.

Exemplos:

- $(+1) + (-1) = 0$ ou $+1 - 1 = 0$ ou $1 - 1 = 0$ ou $-1 + 1 = 0$
- $(+2) + (-2) = 0$ ou $+2 - 2 = 0$ ou $2 - 2 = 0$ ou $-2 + 2 = 0$
- $(+3) + (-3) = 0$ ou $+3 - 3 = 0$ ou $3 - 3 = 0$ ou $-3 + 3 = 0$
- $(+4) + (-4) = 0$ ou $+4 - 4 = 0$ ou $4 - 4 = 0$ ou $-4 + 4 = 0$

4.3.1 Aplicando o Zero em operações de subtração

A operação de subtração $54 - 18$ resulta na diferença 36 e pode ser representada numericamente por:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 54 - 18 &= 54 + 0 - 18 = 54 + (2-2) - 18 = 54 + 2 - 2 - 18 = (54 + 2) + (-2 - 18) = 56 + (-20) = 56 - 20 = 36 + 20 - 20 = 36 \end{aligned}$$

Verifica-se que o primeiro termo (denominado minuendo) e o segundo termo (denominado subtraendo) são acrescentados da mesma quantidade. Ou seja, como o primeiro termo é positivo e o segundo é negativo, o acréscimo realizado em cada termo equivale a somar ZERO (elemento neutro da adição). Portanto, o procedimento não afetará o resultado, de modo que sempre poderá ser feito um procedimento semelhante em operações dessa natureza.

A ideia é complementar o número mais próximo da dezena com a contrapartida em diminuir na mesma quantidade o outro número, não alterando o resultado final. Desse modo, a operação final fica restrita às demais casas a partir da casa das dezenas.

Proposta de atividades: o estudante deverá escolher 2 materiais concretos para representar números positivos e negativos, de modo a exercitar passo a passo operações de subtração, conforme o exemplo acima, e apresentar a respectiva configuração com o uso dos materiais escolhidos.

Exemplos de atividades estão na Prática 6 do Anexo D.

4.3.2 Aplicando em operações de adição

Assim como em 4.3.1, observe o operação abaixo:

$$\blacksquare \quad 28 + 16 = 28 + 2 + 16 - 2 = 30 + 14 = 44$$

Verifica-se que uma das parcelas é acrescentada de um valor e a outra parcela é subtraída do mesmo valor. Assim, não há interferência no resultado final porque foi acrescentado “0” (elemento neutro).

A ideia é a mesma do item anterior, ou seja, é complementar o número mais próximo da dezena com a contrapartida em diminuir na mesma quantidade o outro número, não alterando o resultado final. Desse modo, a operação final fica restrita às demais casas a partir da casa das dezenas.

Proposta de atividades: o estudante deverá escolher 2 materiais concretos para representar números positivos e negativos, de modo a exercitar passo a passo operações de adição, conforme o exemplo anterior, e apresentar a respectiva configuração com o uso dos materiais escolhidos.

Exemplos de atividades estão na Prática 7 do Anexo D.

4.3.3 Observação

Em relação ao item 4.3.1, é importante observar que o procedimento é conveniente quando um algarismo do minuendo em alguma casa numérica é menor que o algarismo do subtraendo na respectiva casa numérica (unidade, dezena, centena etc.).

Nas atividades propostas na Prática 6 do Anexo D, o algarismo das unidades do minuendo era menor que o respectivo algarismo do subtraendo. Por exemplo: em $34 - 17$, minuendo possui unidade igual a 4 e subtraendo, unidade igual a 7.

Conforme mencionado nesta observação, o procedimento pode ser aplicado em uma situação semelhante para qualquer casa numérica sem se restringir às unidades. Por exemplo: em $426 - 394$, o minuendo possui dezena igual a 2 e o subtraendo, dezena igual a 9. Nesse exemplo, a ideia seria somar e subtrair 1 dezena: $426 + 10 - 394 - 10 = 436 - 404 = 32$.

4.4 APRIMORAMENTO DO PRODUTO

Nesta prática, o estudante escolherá um material concreto para formar grupos com a mesma quantidade ou mesmo tamanho. Por exemplo, a partir de 12 palitos de fósforo podemos formar:

- 1 grupo com 12 palitos (1×12);
- 2 grupos com 6 palitos em cada grupo (2×6);
- 3 grupos com 4 palitos em cada grupo (3×4);
- 4 grupos com 3 palitos em cada grupo (4×3);
- 6 grupos com 2 palitos em cada grupo (6×2); e
- 12 grupos com 1 palito em cada grupo (12×1).

É importante destacar que:

- $1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 6 \times 2 = 12 \times 1 = 12$

Desse modo, pode ser observado que:

- $12 \times 1 = 1 \times 12 = 12$
- $6 \times 2 = 2 \times 6 = 12$
- $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$

Cada uma das igualdades anteriores exemplifica a propriedade da **COMUTATIVIDADE** na multiplicação de fatores. Esta propriedade indica que **a ordem dos fatores não altera o produto**.

Sugere-se que o professor supervisione as atividades para que cada estudante efetue a configuração com o uso do material escolhido.

Exemplos de atividades estão na Prática 8 do Anexo D.

4.4.1 Construindo a tabuada

Esta parte é essencial para a formação da base numérica em matemática, pois o estudante deve entender os números apresentados na tabuada ao invés de ser mais uma “decoreba” sem nenhuma compreensão prática. Dessa forma, o uso de material concreto é fundamental para esse entendimento. É importante que o estudante possa associar os resultados obtidos em casos práticos a serem verificados em seu cotidiano, de modo que ele deve ser estimulado e orientado pelo professor para isso.

Continuando com o mesmo material concreto e a supervisão do professor, o estudante deverá gerar a sequência da tabuada para cada um dos grupos de 1 a 10, apresentando a configuração com o uso do material e o resultado obtido (produto).

Atividades:

Grupo1:

$$1 \times 1 = 1$$

$$2 \times 1 = 2$$

$$3 \times 1 = 3$$

$$4 \times 1 = 4$$

$$5 \times 1 = 5$$

$$6 \times 1 = 6$$

$$7 \times 1 = 7$$

$$8 \times 1 = 8$$

$$9 \times 1 = 9$$

$$10 \times 1 = 10$$

Observação: cada um dos produtos obtidos deve ser representado adequadamente com o uso do material concreto. Analogamente, o estudante deve fazer o mesmo para os demais grupos de 2 a 10.

4.4.2 Observações e comentários

O professor deve auxiliar o estudante para que seja compreendido que o produto obtido da multiplicação de dois fatores equivale à soma de várias parcelas iguais (mesma quantidade do material concreto em cada parcela), de modo que a quantidade de elementos em cada parcela é um fator e a quantidade de parcelas é o outro fator. Essa associação prática entre o produto e a soma deve ser exercitada constantemente para que o estudante obtenha a compreensão das ideias apresentadas e o domínio da linguagem matemática, de modo que o professor pode propor atividades com esse intuito.

É importante ressaltar que – no decorrer das atividades – os estudantes devem verificar a propriedade da comutatividade da multiplicação entre dois fatores, de modo que, de fato, **a ordem dos fatores não altere o produto**. Nesse sentido, as atividades propostas na Prática 8 do Anexo D e em 4.4.1 podem ter continuidade com variados valores, diferenciando dos padrões apresentados.

Assim como foi apresentado na adição, o professor pode propor atividades de produto resultante da multiplicação com 3 fatores com o uso de material concreto. A partir disso, pode ser interessante apresentar tanto a propriedade da associatividade como a da comutatividade nesse tipo de multiplicação.

O principal foco de todas as atividades apresentadas é estimular o estudante a verificar todas as operações com o uso de material concreto, propiciando uma compreensão prática e mais próxima da realidade cotidiana. Enfim, com o uso da criatividade, o professor pode propor atividades alternativas para que o estudante desenvolva o raciocínio operacional associado a casos práticos.

4.5 APRIMORAMENTO DO QUOCIENTE

Na formação de 2 grupos com 5 elementos cada, tem-se o total de 10 elementos. Essa configuração é expressa como $2 \times 5 = 10$. A partir dessa expressão, uma pergunta pode ser apresentada da seguinte forma:

“Com um total de 10 elementos, separando (ou dividindo) em 2 grupos, haverá quantos elementos em cada grupo?”

Resposta: 5 elementos em cada grupo.

Assim posto, essa pergunta representa a operação de divisão, cujo resultado é denominado quociente, sendo representada da seguinte forma:

- $10 \div 2 = 5$ ou $10 : 2 = 5$ ou $10/2 = 5$

Definição de cada termo:

- dividendo: 10
- divisor: 2
- quociente: 5

Fazendo uso da propriedade da comutatividade na multiplicação, apresentando a expressão como $5 \times 2 = 10$, uma outra pergunta pode ser feita:

“Com um total de 10 elementos, separando (ou dividindo) em 5 grupos, haverá quantos elementos em cada grupo?”

Resposta: 2 elementos em cada grupo.

Representação:

- $10 \div 5 = 2$ ou $10 : 5 = 2$ ou $10/5 = 2$

Definição de cada termo:

- dividendo: 10
- divisor: 5
- quociente: 2

4.5.1 Praticando a divisão

A partir das definições apresentadas, o estudante deve rever as atividades propostas na Prática 8 do Anexo D e em 4.4.1, de modo a verificar em cada atividade o dividendo, o divisor e o quociente. Além disso, deve apresentar cada igualdade conforme a linguagem matemática da representação do quociente, associando à sua respectiva configuração com uso de material concreto.

O próximo exemplo apresenta a ideia da operação de divisão:

- 18 elementos divididos em 3 grupos, cada grupo possui 6 elementos.

Nota: sugere-se que o estudante faça a configuração com material concreto desse exemplo.

Em linguagem matemática, temos:

- $18 \div 3 = 6$ ou $18 : 3 = 6$ ou $18/3 = 6$

4.5.2 Observações

Nas atividades propostas, os quocientes apresentados resultaram em números naturais. Assim, o professor pode dar continuidade apresentando operações de divisão entre 2 números naturais, cujo resultado não é um número natural e inteiro. Ele também pode apresentar operações de divisão entre números inteiros (com sinal negativo).

Essas atividades servem de base para iniciar o estudo dos números racionais que podem ser representados em forma de razão (fração) e/ou decimal. A partir do entendimento dos números racionais, é possível apresentar o conjunto dos números reais que englobam os números que não podem ser representados em forma de razão ou fração – os números irracionais. Dessa forma, o conceito de reta real pode ser desenvolvido, associando um número a cada ponto dessa reta.

4.6 UM (ELEMENTO NEUTRO DA MULTIPLICAÇÃO)

O número “1” (UM) aparece em muitas operações, inclusive em atividades propostas no Anexo D, seja em multiplicações ou divisões com resultados apresentados por um número natural.

Na multiplicação de dois fatores, o número 1 como fator não altera o valor do outro fator na obtenção do produto (valor do produto = valor do outro fator).

Na divisão, enquanto divisor, o número 1 não altera o valor do dividendo na obtenção do quociente (valor do quociente = valor do dividendo).

Exemplos:

- $1 \times 4 = 4 \times 1 = 4$
- $4 \div 1 = 4 : 1 = 4/1 = 4$
- $1 \times 9 = 9 \times 1 = 9$
- $9 \div 1 = 9 : 1 = 9/1 = 9$
- $1 \times 15 = 15 \times 1 = 15$
- $15 \div 1 = 15 : 1 = 15/1 = 15$

Essas constatações definem o número “1” (UM) como o elemento neutro da multiplicação.

Com base nas atividades realizadas e nos exemplos anteriores, o número UM pode ser representado de várias formas (como um número – diferente de ZERO – dividido por ele mesmo) e isso pode ser aplicado – como será visto – para realizar operações de produto ou

quociente com mais facilidade, esclarecendo procedimentos em que muitos estudantes apresentam dúvidas.

4.6.1 Expressando o número “1”

Conforme já mencionado, o número “1” (elemento neutro da multiplicação) pode ser expresso como qualquer número dividido por ele mesmo, desde que esse número seja diferente de “0” (elemento neutro da adição).

Por exemplo:

- $2 \div 2 = 2/2 = 1$
- $5 \div 5 = 5/5 = 1$
- $10 \div 10 = 10/10 = 1$
- $1,5 \div 1,5 = 1,5/1,5 = 1$
- $(-1) \div (-1) = (-1)/(-1) = 1$
- $(2/3) \div (2/3) = (2/3)/(2/3) = 1$
- $(5/2) \div (5/2) = (5/2)/(5/2) = 1$
- $(-3/4) \div (-3/4) = (-3/4)/(-3/4) = 1$

4.6.2 Multiplicação por 5

O nosso sistema de numeração é decimal, ou seja, qualquer número pode ser expresso em parcelas de potências de 10. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{▪} \quad 327 &= 300 + 20 + 7 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 7 \times 1 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + \\ &7 \times 10^0 \end{aligned}$$

O número 10 pode ser expresso em seus fatores primos, ou seja: $10 = 2 \times 5$. Assim,

- $5 = 10 \div 2 = 10/2$ e
- $2 = 10 \div 5 = 10/5$.

Dessa forma, multiplicar por 5 equivale a:

- multiplicar por 10 e dividir o resultado por 2 ou
- dividir por 2 e multiplicar o resultado por 10.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{▪} \quad 52 \times 5 &= 52 \times 5 \times \mathbf{1} = 52 \times 5 \times \mathbf{(2/2)} = (52 \times \mathbf{(1/2)}) \times (5 \times \mathbf{2}) = 26 \\ &\times 10 = 260 \text{ ou} \\ \text{▪} \quad 52 \times \mathbf{5} &= (52 \times \mathbf{10}) \div \mathbf{2} = 520 \div 2 = 260 \end{aligned}$$

Conforme o exemplo acima, o professor pode propor atividades para que os estudantes exercitem a ideia apresentada.

4.6.3 Divisão por 5

Como dividir por 5 equivale a multiplicar por $1/5$, o procedimento se resume em:

- multiplicar por 2 e dividir o produto obtido por 10 ou
- dividir por 10 é multiplicar o quociente obtido por 2.

Por exemplo:

- $52 \div 5 = 52 \times 1/5 = (52 \times 2) \div 10 = 104 \div 10 = 10,4$ ou
- $52 \div 5 = (52 \div 10) \times 2 = 5,2 \times 2 = 10,4$

Conforme o exemplo apresentado acima, a sugestão é que o professor proponha atividades para que os estudantes exercitem a ideia apresentada. Espera-se, assim, que essas atividades, juntamente com as do item 4.6.2, colaborem para a compreensão e o aprofundamento de assuntos relacionados ao sistema de numeração decimal.

4.6.4 Divisão de um número por uma fração

Muitos professores apresentam a regra prática (“decoreba”) para realizar a divisão por uma fração, mas dificilmente esclarecem os estudantes sobre o motivo desse procedimento.

Regra prática:

“Para realizar a divisão de um número por uma fração, multiplica-se o primeiro (o número dado) pelo inverso do segundo (fração dada).”

Quando muitas regras práticas são assimiladas sem o devido entendimento de cada procedimento, o estudante fica obrigado a memorizar tais procedimentos e a Matemática fica cada vez mais complexa, tornando-se uma matéria ainda mais difícil e incompreensível.

A regra prática em questão é facilmente explicada com o procedimento de multiplicar por “1”, escolhendo de maneira apropriada a representação do número “1”.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{▪} \quad \frac{4}{2/3} &= \frac{4}{2/3} \times 1 = \frac{4}{2/3} \times \frac{3/2}{3/2} = \frac{4 \times (3/2)}{(2/3) \times (3/2)} = \frac{4 \times (3/2)}{1} = 4 \times \frac{3}{2} = \\ &\left(\frac{4}{2}\right) \times 3 = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

Desse modo, o número dividido por ele mesmo, que será utilizado para representar o “1”, equivale ao inverso da fração (certamente diferente de “0”) que fica no denominador.

4.6.5 Observações e comentários

Em relação ao número “1” (elemento neutro da multiplicação), as ideias apresentadas aqui são algumas dicas para facilitar alguns cálculos, além de esclarecer a regra da divisão de um número por uma fração. Ainda assim, essa ideia de representar o número “1” por qualquer número (diferente de zero) dividido por ele mesmo pode ser aplicada amplamente. Mesmo porque, de fato, multiplicar por “1” nunca irá alterar qualquer número ou expressão, seja na Matemática ou em qualquer outra ciência.

Em Física, por exemplo, a velocidade de 36 km/h pode ser convertida em m/s, usando um procedimento equivalente a multiplicar por “1” – representado de forma apropriada. Vejamos:

$$36 \text{ km/h} = \frac{36 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times 1 \times 1 = \frac{36 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \frac{36 \times 1000 \times 1}{1 \times 1 \times 3600} \times \frac{\text{km} \times \text{m} \times \text{h}}{\text{h} \times \text{km} \times \text{s}} = 10 \text{ m/s}$$

Portanto, 36 km/h é igual a 10 m/s.

Observe que, de fato, 1000m/1km é igual “1” porque 1000m = 1km. Analogamente, 1h/3600s é igual a “1” porque 1h = 3600s. Exemplos similares a esse podem ser aplicados em diversas áreas das ciências exatas.

A intenção desta parte do trabalho é apresentar algumas possibilidades e situações quando a compreensão e o domínio da Matemática devem ser considerados e estimulados, ou seja, a Matemática deve ser entendida em suas aplicações e, principalmente, compreendida. Dessa forma, os estudantes podem tomar gosto por esta ciência tão importante e maravilhosa. Afinal, quando se trata de estudos, é difícil gostar de algo que não se compreende (até porque as notas dos estudantes não costumam ser boas nessas situações).

Em relação ao produto e/ou quociente envolvendo um número terminado com o algarismo 5, uma dica interessante seria multiplicar por 2 (compensando com a divisão por 2), pois, dessa forma, é obtido um número em dezenas (por exemplo: $45 \times 2 = 90$, ou seja, 9 dezenas). No entanto, pode ser mais interessante aplicar a propriedade da distributividade (assunto a ser visto a seguir) em situações dessa natureza.

4.7 “CHUVEIRINHO” PODEROSO (DISTRIBUTIVIDADE)

A propriedade da distributividade é apresentada aos estudantes em seus primeiros anos do ensino fundamental. No entanto, alguns professores cobram dos estudantes a resolução de exercícios com o uso dessa propriedade sem abordar o poder (aplicação prática) desse procedimento.

Essa propriedade pode ser facilmente verificada com o uso de material concreto, de modo que o professor deve orientar os estudantes para realizarem atividades nesse sentido.

Após os estudantes verificarem a validade da propriedade, as aplicações seguintes podem ser trabalhadas para o desenvolvimento de habilidades de cálculo.

4.7.1 Aplicando com somas

O uso dessa propriedade tem relação com as atividades do item 4.1 quando os números são decompostos em parcelas. Com essa ideia, é possível realizar operações de multiplicação de forma criativa. Vejamos:

- $42 \times 12 = 42 \times (10 + 2) = 42 \times 10 + 42 \times 2 = 420 + 84 = 504$
- $42 \times 12 = 12 \times 42 = 12 \times (40 + 2) = 12 \times 40 + 12 \times 2 = 480 + 24 = 504$
- $57 \times 15 = 57 \times (10 + 5) = 57 \times 10 + 57 \times 5 = 570 + 570 \div 2 = 570 + 285 =$
 $= 570 + 30 - 30 + 285 = 600 + 255 = 855$
- $34 \times 6 = 6 \times 34 = 6 \times (30 + 4) = 6 \times 30 + 6 \times 4 = 180 + 24 = 204$
- $34 \times 6 = 34 \times (5 + 1) = 34 \times 5 + 34 \times 1 = (34 \div 2) \times 10 + 34 =$
 $= 17 \times 10 + 34 = 170 + 34 = 204$
- $27 \times 11 = 27 \times (10 + 1) = 27 \times 10 + 27 \times 1 = 270 + 27 = 297$

Esses são apenas alguns exemplos relacionados à aplicação prática da distributividade, usando procedimentos apresentados anteriormente.

É importante ressaltar que o raciocínio de cada passo foi apresentado detalhadamente. Ainda assim, caso o estudante obtenha o domínio em realizar mentalmente a(s) operação(ões), ele pode deixar de escrever o raciocínio de alguns passos (com a exceção de que seja uma exigência da atividade).

4.7.2 Aplicando com diferenças

Em um dos exemplos acima, o uso dessa propriedade poderia ser feito usando a decomposição em diferença. Vejamos:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 57 \times 15 &= 15 \times \mathbf{57} = 15 \times (\mathbf{60 - 3}) = 15 \times \mathbf{60} - 15 \times \mathbf{3} = 900 - 45 = \\ &= 900 - 45 = 855 \end{aligned}$$

Outros exemplos:

$$\blacksquare \quad 27 \times \mathbf{18} = 27 \times (\mathbf{20 - 2}) = 27 \times \mathbf{20} - 27 \times \mathbf{2} = 540 - 54 = 540 - \mathbf{4} - 54 + \mathbf{4} = \\ = 536 - 50 = 486$$

$$\blacksquare \quad 14 \times \mathbf{99} = 14 \times (\mathbf{100 - 1}) = 14 \times \mathbf{100} - 14 \times \mathbf{1} = \mathbf{1400} - 14 = \mathbf{1380} + \mathbf{20} - 14 = \\ = 1386$$

A decomposição de um número com a aplicação da diferença é usada quando um dos fatores está próximo de completar mais uma dezena. Assim, esse fator é substituído pela próxima dezena menos a quantidade que foi somada – equivalente a somar ZERO (elemento neutro da adição).

Nessa parte, o raciocínio de cada passo também foi apresentado detalhadamente, mas o estudante pode deixar de escrever o raciocínio de alguns passos para obter a resposta, caso tenha o domínio em realizar mentalmente a(s) operação(ões).

4.7.3 Obtendo quadrados

A propriedade da distributividade é aplicada na obtenção de produtos notáveis como o quadrado da soma de (ou da diferença entre) dois números.

Relembrando, a partir de dois números inteiros A e B, aplicando a propriedade da distributividade, tem-se que:

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

e

$$(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Esses produtos notáveis são a base para calcular o quadrado de um número inteiro qualquer.

A partir dos quadrados de números naturais terminados em 0 ou 5, os quadrados dos demais números serão calculados, conforme procedimentos descritos na sequência.

4.7.3.1 Formato XY

O formato XY indica X-dezenas e Y-unidades, ou seja: $XY = 10X + Y$, onde Y é um algarismo de 0 a 9. Por exemplo: XY=74 indica X=7 e Y=4, de modo que $74 = 10 \cdot 7 + 4$. Assim,

$$(XY)^2 = (10X + Y)^2 = (10X)^2 + 2(10X)Y + Y^2$$

4.7.3.2 Quadrado de números terminados em “0”

Este caso é mais simples, pois basta calcular o quadrado do número obtido sem considerar o algarismo das unidades (caso $Y = 0$) e multiplicar por 100, conforme se mostra a seguir:

$$(X0)^2 = (10X)^2 = X^2 \cdot 10^2 = X^2 \cdot 100 = "X^2"00$$

Nota: o termo entre aspas indica que o resultado será escrito naquela posição numérica acompanhada dos dois zeros à direita (00), ou seja, o termo entre aspas resulta na quantidade de centenas.

Exemplos:

- $(40)^2 = (4 \cdot 10)^2 = 4^2 \cdot 10^2 = 16 \cdot 100 = 1600$
- $(70)^2 = (7 \cdot 10)^2 = 7^2 \cdot 10^2 = 49 \cdot 100 = 4900$
- $(120)^2 = 12^2 \cdot 10^2 = 144 \cdot 100 = 14400$
- $(150)^2 = 15^2 \cdot 10^2 = 22500$

4.7.3.3 Quadrado de números terminados em “5”

Nessa situação, tem-se o caso $Y = 5$:

$$(X5)^2 = (10X + 5)^2 = (10X)^2 + 2(10X)5 + 5^2 = 100X^2 + 100X + 25$$

ou ainda,

$$X5^2 = 100X(X + 1) + 25 = "X(X + 1)"25$$

Nota: o termo entre aspas indica que o resultado será escrito naquela posição numérica acompanhada de 25 nas posições da dezena e da unidade, ou seja, o termo entre aspas resulta na quantidade de centenas.

Exemplos:

- $(45)^2 = "4 \cdot (4+1)"25 = "4 \cdot 5"25 = 2025$
- $(75)^2 = "7 \cdot (7+1)"25 = "7 \cdot 8"25 = 5625$
- $(125)^2 = "12 \cdot (12+1)"25 = "12 \cdot 13"25 = 15625$
- $(155)^2 = "15 \cdot (15+1)"25 = "15 \cdot 16"25 = 24025$

4.7.3.4 Atividade inicial

O estudante deve criar uma tabela com todos os números terminados em 0 ou 5, de 10 a 105, e calcular os respectivos quadrados utilizando as ideias anteriores. Pode ser utilizada uma calculadora após a realização dos cálculos, de modo a verificar a validade e a aplicação das ideias apresentadas.

Para a consolidação das ideias, sugere-se que o estudante realize cálculos de outros números terminados em 0 ou 5.

4.7.3.5 Padrões de Y: “+1” ou “-1”

(A) **Caso Y = 1 (passou “1” do “0”):**

$$(X1)^2 = (10X + 1)^2 = (10X)^2 + 2(10X) + 1 = 100X^2 + 20X + 1$$

ou seja:

$$(X1)^2 = (10X^2 + 2X) \cdot 10 + 1 = "(10X^2 + 2X)"1$$

Exemplos:

- $(41)^2 = (4^2 \cdot 10 + 2 \cdot 4) \cdot 10 + 1 = "(160+8)"1 = 1681$
- $(51)^2 = (5^2 \cdot 10 + 2 \cdot 5) \cdot 10 + 1 = "(250+10)"1 = 2601$
- $(71)^2 = (7^2 \cdot 10 + 2 \cdot 7) \cdot 10 + 1 = "(490+14)"1 = 5041$
- $(121)^2 = (12^2 \cdot 10 + 2 \cdot 12) \cdot 10 + 1 = "(1440+24)"1 = 14641$

(B) **Caso Y = 9 (faltou “1” para “0”):**

$$(X9)^2 = (10(X + 1) - 1)^2 = (10N - 1)^2 = (10N)^2 - 2(10N) + 1$$

$$(X9)^2 = 100N^2 - 20N + 1 = (10N^2 - 2N) \cdot 10 + 1$$

ou seja:

$$(X9)^2 = "(10N^2 - 2N)"1$$

Nota: na situação apresentada $N = X + 1$.

Exemplos:

- $(49)^2 = (5^2 \cdot 10 - 2 \cdot 5) \cdot 10 + 1 = "(250 - 10)"1 = 2401$
- $(59)^2 = (6^2 \cdot 10 - 2 \cdot 6) \cdot 10 + 1 = "(360 - 12)"1 = 3481$
- $(79)^2 = (8^2 \cdot 10 - 2 \cdot 8) \cdot 10 + 1 = "(640 - 16)"1 = 6241$
- $(129)^2 = (13^2 \cdot 10 - 2 \cdot 13) \cdot 10 + 1 = "(1690 - 26)"1 = 16641$

(C) Caso Y = 6 (passou "1" do "5"):

$$(X6)^2 = (X5 + 1)^2 = (X5)^2 + 2(X5) + 1$$

Exemplos:

- $(36)^2 = (35 + 1)^2 = (35)^2 + 2(35) + 1 = 1225 + 70 + 1 = 1296$
- $(46)^2 = (45 + 1)^2 = (45)^2 + 2(45) + 1 = 2025 + 90 + 1 = 2116$
- $(86)^2 = (85 + 1)^2 = (85)^2 + 2(85) + 1 = 7225 + 170 + 1 = 7396$
- $(106)^2 = (105 + 1)^2 = (105)^2 + 2(105) + 1 = 11025 + 210 + 1 = 11236$

(D) Caso Y = 4 (faltou "1" para "5"):

$$(X4)^2 = (X5 - 1)^2 = (X5)^2 - 2(X5) + 1$$

Exemplos:

- $(34)^2 = (35 - 1)^2 = (35)^2 - 2(35) + 1 = 1225 - 70 + 1 = 1156$
- $(44)^2 = (45 - 1)^2 = (45)^2 - 2(45) + 1 = 2025 - 90 + 1 = 1936$
- $(84)^2 = (85 - 1)^2 = (85)^2 - 2(85) + 1 = 7225 - 170 + 1 = 7056$
- $(104)^2 = (105 - 1)^2 = (105)^2 - 2(105) + 1 = 11025 - 210 + 1 = 10816$

Nota: nos casos **(C)** e **(D)**, foi utilizado o procedimento de obter o quadrado de um número terminado em "5".

4.7.3.6 Atividade intermediária

O estudante deve criar uma tabela com todos os números terminados em 1, 4, 6 ou 9, de 11 a 89, e calcular os respectivos quadrados utilizando as ideias apresentadas. Pode ser utilizada

uma calculadora após a realização dos cálculos, de modo a verificar a validade e a aplicação das ideias apresentadas.

Para a consolidação das ideias e o aprimoramento dos procedimentos, sugere-se que o estudante realize cálculos de outros números terminados em 1, 4, 6 ou 9.

4.7.3.7 Padrões de Y: “+2” ou “-2”

(A) Caso Y = 2 (passou “2” do “0”):

$$(X2)^2 = (10X + 2)^2 = (10X)^2 + 4(10X) + 4 = 100X^2 + 40X + 4$$

ou seja:

$$(X2)^2 = (10X^2 + 4X) \cdot 10 + 4 = "(10X^2 + 4X)"4$$

Exemplos:

- $(42)^2 = (4^2 \cdot 10 + 4 \cdot 4) \cdot 10 + 4 = "(160+16)"4 = 1764$
- $(112)^2 = (11^2 \cdot 10 + 4 \cdot 11) \cdot 10 + 4 = "(1210+44)"4 = 12544$

(B) Caso Y = 8 (faltou “2” para “0”):

$$(X8)^2 = (10(X + 1) - 2)^2 = (10N - 2)^2 = (10N)^2 - 4(10N) + 4$$

$$(X8)^2 = 100N^2 - 40N + 4 = (10N^2 - 4N) \cdot 10 + 4$$

ou seja:

$$(X8)^2 = "(10N^2 - 4N)"4$$

Nota: na situação apresentada $N = X + 1$.

Exemplos:

- $(48)^2 = (5^2 \cdot 10 - 4 \cdot 5) \cdot 10 + 4 = "(250 - 20)"4 = 2304$
- $(108)^2 = (11^2 \cdot 10 - 4 \cdot 11) \cdot 10 + 4 = "(1210 - 44)"4 = 11664$

(C) Caso Y = 7 (passou “2” do “5”):

$$(X7)^2 = (X5 + 2)^2 = (X5)^2 + 4(X5) + 4$$

Exemplos:

- $(37)^2 = (35 + 2)^2 = (35)^2 + 4(35) + 4 = 1225 + 140 + 4 = 1369$
- $(107)^2 = (105 + 2)^2 = (105)^2 + 4(105) + 4 = 11025 + 420 + 4 = 11449$

(D) Caso Y = 3 (faltou “2” para “5”):

$$(X3)^2 = (X5 - 2)^2 = (X5)^2 - 4(X5) + 4$$

Exemplos:

- $(33)^2 = (35 - 2)^2 = (35)^2 - 4(35) + 4 = 1225 - 140 + 4 = 1089$
- $(103)^2 = (105 - 2)^2 = (105)^2 - 4(105) + 4 = 11025 - 420 + 4 = 10609$

Nota: nos casos (C) e (D), foi utilizado o procedimento de obter o quadrado de um número terminado em “5”.

4.7.3.8 Atividade final

O estudante deve criar uma tabela com todos os números terminados em 2, 3, 7 ou 8, de 12 a 88, e calcular os respectivos quadrados utilizando as ideias apresentadas. Pode ser utilizada uma calculadora após a realização dos cálculos, de modo a verificar a validade e a aplicação das ideias apresentadas.

Para a consolidação das ideias e o aprimoramento dos procedimentos, sugere-se que o estudante realize cálculos de outros números terminados em 2, 3, 7 ou 8.

4.7.4 Comentários

A propriedade da distributividade é um procedimento importante para ser trabalhado com os estudantes porque colabora na construção de técnicas de resolução de problemas. Essas técnicas podem ser denominadas como técnicas de “**DIVIDIR PARA CONQUISTAR**”, pois o problema original pode apresentar elevado grau de dificuldade e exigir um tempo considerável para ser resolvido, de modo que poderá ser resolvido com menos dificuldade e tempo quando dividido em vários problemas menores.

A ciência costuma usar essa técnica (“**DIVIDIR PARA CONQUISTAR**”) em várias frentes. Por exemplo, o estudo do corpo humano é dividido em seus vários sistemas (nervoso, digestivo, respiratório, auditivo etc.) para que se possa ter uma melhor compreensão de sua totalidade ao associar a interação e a função desses vários sistemas.

Outro exemplo é a análise vetorial em Física, tratada separadamente em direções independentes ou perpendiculares entre si. Esse procedimento facilita a análise em cada direção

e, posteriormente, retoma o caso concreto com a composição de efeitos obtidos nas direções de análise.

Enfim, exemplos de “**DIVIDIR PARA CONQUISTAR**” não faltam na construção e desenvolvimento do conhecimento humano.

4.8 RESOLVENDO EQUAÇÕES

O uso de material concreto pode ser aplicado para que os estudantes possam compreender a lógica da resolução de qualquer tipo de equação de uma variável.

Seja o seguinte exemplo: $2x - 7 = 15$.

Adota-se a variável “x” que é representada por uma tampa de garrafa, o número negativo por palitos de fósforo e o número positivo por grãos de feijão, de modo que cada grão de feijão é anulado por um palito de fósforo (essa ideia de embutir o sinal negativo a um determinado material é feita para que não haja necessidade de indicar um grupo como negativo e o outro como positivo durante a configuração). Dessa forma, a equação pode ser traduzida como:

“O valor de 2 unidades de um produto (representado por tampa de garrafa) subtraído de R\$7 equivale ao valor de R\$15. Qual é o valor de uma unidade do produto?”

Com o uso dos materiais concretos sugeridos, a situação apresentada pode ser representada da seguinte forma:

Primeiro membro: 2 tampas de garrafa e 7 palitos de fósforo (negativo)

Segundo membro: 15 grãos de feijão (positivo)

Como o objetivo é encontrar o valor de uma unidade do produto (x) – representado pela tampa de garrafa –, o procedimento consiste em conseguir deixar um único x (uma única tampa de garrafa) em um dos lados da equação (igualdade).

Primeiro passo: retirar ou eliminar os 7 palitos de fósforo que estão do mesmo lado das 2 tampas de garrafa. Como o que elimina ou anula um palito de fósforo é um grão de feijão, 7 grãos de feijão são acrescentados em ambos os lados da igualdade, de modo a manter inalterada a igualdade.

Primeiro membro: 2 tampas de garrafa, 7 palitos de fósforo(negativo) e 7 grãos de feijão (positivo)

Segundo membro: 15 grãos de feijão mais 7 grãos de feijão (positivo)

Simplificando:

Primeiro membro: 2 tampas de garrafa

Segundo membro: 22 grãos de feijão (positivo)

Esse procedimento resulta que 2 tampas de garrafa equivalem a 22 grãos de feijão.

Segundo passo: pegar a metade de cada lado, uma vez que há 2 tampas de garrafa e o objetivo é deixar apenas uma tampa de garrafa de um dos lados. Esse passo mantém a validade da igualdade.

Primeiro membro: metade de 2 tampas de garrafa

Segundo membro: metade de 22 grãos de feijão (positivo)

Simplificando:

Primeiro membro: 1 tampa de garrafa

Segundo membro: 11 grãos de feijão (positivo)

Esse último procedimento resulta que uma tampa de garrafa equivale a 11 grãos de feijão. E traduzindo ao que cada material representa, uma unidade do produto (x) – representado pela tampa de garrafa – é igual a R\$ 11.

Traduzindo algebricamente os procedimentos:

Equação original: $2x - 7 = 15$

Primeiro passo: $2x - 7 + 7 = 15 + 7$

Resultado: $2x = 22$

Segundo passo: $2x \div 2 = 22 \div 2$

Resultado final: $x = 11$

As ideias apresentadas podem parecer triviais devido à simplicidade da equação considerada. No entanto, essas ideias indicam que se o mesmo procedimento realizado em um dos lados da igualdade for também realizado no outro lado, a equação resultante continuará representando a mesma equação original.

Resumindo: resolver uma equação é operar/efetuar o mesmo procedimento em ambos os lados da igualdade.

4.8.1 Praticando a resolução de equações

A partir das ideias apresentadas e o uso de materiais concretos, o professor pode sugerir várias atividades similares de resolução de equações do primeiro grau, de modo a supervisionar a manipulação dos materiais concretos pelos estudantes, verificando a compreensão e tirando as dúvidas.

Espera-se que essas atividades propiciem o entendimento dos estudantes em relação às ideias sobre a resolução de equações e o domínio dos procedimentos.

4.8.2 Obtendo a fórmula de Bhaskara

Uma equação do segundo grau é representada genericamente por: $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$).

A fórmula de Bhaskara será obtida com o uso das ideias de resolução de equações (fazer o mesmo procedimento em ambos os lados da igualdade).

Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os lados por a :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

ou seja:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Multiplicando o termo do meio por “1” de forma apropriada ($1 = 2/2$):

$$x^2 + \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ou

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Pode ser verificado que os dois primeiros termos podem ser reunidos em um quadrado da soma, faltando apenas o termo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Assim, basta somar esse termo em ambos os lados da igualdade:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

ou ainda:

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$

Daí,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$

Agora, subtrai-se (c/a) em ambos os lados da igualdade:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

ou ainda, multiplicando o último termo à direita por “1” igual a $(4a/4a)$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4a}{4a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Define-se o discriminante da fórmula de Bhaskara: $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ : lê-se “delta”).

Assim, chega-se a:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Como o objetivo é encontrar o valor de x , para isolá-lo, é preciso que o termo do primeiro membro não esteja elevado ao quadrado. Assim, o procedimento a ser feito é tirar a raiz quadrada em ambos os lados da equação. Desse modo,

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

Exatamente neste momento, muitos estudantes apresentam dúvidas quanto ao procedimento a ser feito, pois se tem a raiz quadrada de um termo elevado ao quadrado. A resposta para isso é o módulo do termo que está elevado ao quadrado. Assim,

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} \quad (\#)$$

Observação: esse procedimento não costuma ser devidamente esclarecido por parte de alguns professores, comprometendo a compreensão e o domínio dos estudantes, pois acaba se tornando mais uma fórmula para “decorar”.

Sabe-se que o módulo de um número sempre é um valor não negativo (módulo de 0 é igual a 0). Se o número é positivo, então, o resultado é o próprio número. Agora, se o número é negativo, então, o módulo é o seu oposto. Em linguagem matemática:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Continuando a partir de (#), tem-se que:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observação: não há necessidade de manter o módulo no denominador do termo do segundo membro porque o primeiro membro é igual ao valor do segundo membro, tanto com sinal positivo como negativo.

Finalmente, subtraindo $(b/2a)$ em ambos os lados da equação:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

chega-se a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (discriminante)}$$

separando nas duas raízes x_1 e x_2 (com $x_1 \leq x_2$):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nota: caso o discriminante seja igual a zero ($\Delta = 0$), as duas raízes são iguais: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Se o discriminante for menor que zero ($\Delta < 0$), não existe número real satisfazendo $\sqrt{\Delta}$ e, portanto, não há raízes (soluções) reais para a equação.

4.8.3 Comentários

O principal objetivo deste tema (Resolvendo Equações) é enfatizar a importância dos procedimentos e as ideias apresentadas para a resolução de equações, pois estes podem ser considerados como estratégias para atingir o objetivo proposto (no caso, encontrar o valor da variável). Assim, os estudantes participam de um processo ensino-aprendizagem mais amplo, extrapolando os métodos mais tradicionais e cômodos de apenas “decorar” fórmulas e aplicá-las – sem nenhuma crítica ou reflexão sobre tais métodos.

Assim como foi obtida a fórmula de Bhaskara, qualquer outra fórmula para resolução de equações pode ser obtida de maneira semelhante, ou seja, realizar o mesmo procedimento em ambos os lados da equação para que **o valor da variável possa ser obtido** (foco no objetivo). É importante lembrar que a matemática é construída a partir de uma base elementar para outra mais complexa e isso é aplicado na teoria de resolução de equações.

4.9 Calculando a Feira

O prefácio apresentado neste trabalho é a motivação para a proposta desta atividade. Para realizá-la, o professor propõe aos estudantes que façam uma pesquisa sobre produtos encontrados em mercados locais. Inclusive, isso pode ser feito com a ajuda de familiares, de modo a propiciar a interação destes com os estudantes e a atividade proposta pela escola.

A escolha dos produtos deve estimular os estudantes a realizar cálculos aritméticos, de modo que é sugestiva a escolha de produtos que necessariamente sejam pesados em quilogramas (kg). Assim, o valor de cada produto é proporcional ao seu peso.

Podem ser sugeridos também produtos vendidos por unidade e que, se possível, tenham algum desconto, dependendo da quantidade comprada. Isso exigirá do estudante a sua capacidade de interpretação da situação.

O professor também pode propor atividades a partir de encartes de promoção de supermercados, de forma que, por exemplo, os estudantes escolhem alguns produtos, cuja quantidade é previamente definida pelo professor, e essas escolhas (relação de produtos) são trocadas aleatoriamente entre os estudantes da classe. Daí, cada estudante deve calcular o valor daquela relação de produtos em suas mãos.

Enfim, o professor – ciente da realidade social dos estudantes – possui a autonomia para propor a atividade, ou seja, ele define quais os tipos de produtos a serem pesquisados e como será desenvolvida a atividade.

4.9.1 Proposta e exemplo de atividade

Atividade quinzenal em que os estudantes devem trazer a relação de 5 produtos adquiridos pela família, incluindo a quantidade adquirida de cada produto com a sua respectiva unidade de medida (kg, unidade, dúzia etc.) e o valor por unidade de medida, conforme o exemplo a seguir:

Quadro 12 – Alimentos a serem adquiridos

PRODUTO	UNIDADE DE MEDIDA	PREÇO/UNIDADE (R\$)	QUANTIDADE	VALOR (R\$)
CEBOLA	kg	3,60	3 kg	
TOMATE	kg	2,80	4 kg	
ARROZ	pacote (5 kg)	13,55	2 pacotes	
BATATA INGLESA	kg	6,80	3,5 kg	
FEIJÃO	pacote (1 kg)	7,39	2 pacotes	

Nota: a condição é que pelo menos três produtos devem ser por peso (em kg).

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir das informações contidas no Quadro 12, essa atividade será realizada em quatro etapas de 10 a 15 minutos.

Primeira etapa: cada estudante deverá realizar os cálculos de seu quadro em folha específica (de caderno avulsa ou fornecida pelo professor).

Segunda etapa: o professor, previamente, separará a sua turma em duplas ao acaso. Em seguida, cada dupla receberá as seus respectivos quadros e um estudante dessa dupla calculará a tabela do outro.

Terceira etapa: cada dupla discutirá os valores obtidos por ambos, de modo a viabilizar que um estudante possa ajudar o outro e aprender conjuntamente.

Quarta etapa: o professor aproveitará o restante da aula para tirar eventuais dúvidas que possam existir em função de, por exemplo, os valores obtidos por uma dupla não tiverem um consenso.

4.9.2 Flexibilidade de tipos de atividade

Como foi mencionado, o professor possui autonomia para propor atividades. Evidentemente, isso inclui que ele poderá alterar a forma como cada atividade será desenvolvida.

De uma atividade para outra, por exemplo, o professor pode solicitar que cada estudante calcule o dobro ou o triplo da quantidade de produtos existentes em seu quadro. Outra variação seria manter o cálculo do primeiro produto, conforme as informações do quadro, e solicitar o cálculo do dobro do segundo, o triplo do terceiro e assim sucessivamente. Também pode envolver cálculos de partes como metade, um terço etc.

Enfim, o professor pode usar a criatividade e propor muitas variações de atividades, incluindo a participação dos estudantes de forma lúdica e prática. Inclusive, pode aplicar uma avaliação com base nessas atividades.

4.9.3 Observações e comentários

Conforme a atividade proposta em 4.9.1, caso o estudante saiba antecipadamente a respeito do que será exigido, ele poderá realizar previamente os cálculos antes da aula. Isso não chega a ser um problema porque a intenção da atividade é exatamente que ele realize esse tipo de exercício. Se alguém o ajudou também não é um problema, sendo a participação de mais pessoas, inclusive, benéfica e estimulante para o processo ensino-aprendizagem. Afinal, cada estudante terá que realizar os cálculos em sala de aula sem a ajuda de nenhum material de apoio.

“Calculando a feira” possui o potencial de envolver e integrar praticamente todos os agentes da educação: a família, a escola e a sociedade. A família é envolvida pelo fato de a proposta incluir a pesquisa de produtos adquiridos por ela e o estudante precisará estar informado sobre esses produtos e os valores envolvidos na sua compra – o que exigirá a interação do estudante com a sua família. A escola será requisitada porque o corpo docente poderá conhecer melhor a realidade de cada estudante e isso pode ajudar na relação professor-estudante, além do tratamento específico a um estudante em função de alguma particularidade impactante (por exemplo: estudantes em situação de fome, violência doméstica etc.). E, por fim, a sociedade como ambiente de integração da família com a escola. Esse ambiente social pode ser individualizado para cada estudante porque inclui a vizinhança de sua residência e os demais relacionamentos extraescolares.

A ciência da realidade de cada estudante por parte de sua escola é importante, pois situações desiguais precisam ser tratadas de forma desigual. Por exemplo, um estudante que possui algum tipo de complexo de inferioridade ou limitação precisa da ação compatível para que possa superar a sua dificuldade ao invés de intensificar ainda mais a sua complexidade.

Compartilho caso de colega de trabalho que tinha dificuldade de aprendizagem em seus primeiros anos de estudo, sendo considerado erroneamente com limitação intelectual quando, na verdade, tinha limitação para enxergar – o que justificava a incompreensão das explicações escritas pelos professores. E, da mesma forma, um familiar passou pela mesma situação.

4.10 GEOMETRIA – OBTENÇÃO DE POLÍGONOS

A Geometria é uma área da Matemática com muitas possibilidades do uso de material concreto. Uma sugestão, por exemplo, é propor o uso de embalagens em papel, papelão ou outro material disponível, de fácil acesso e baixo custo. Assim, formas alternativas e criativas podem ser trabalhadas em sala de aula.

Partindo do material disponível, um quadrado pode ser obtido. A partir de vários quadrados, podem ser obtidos outros retângulos – uma vez que um quadrado é um retângulo específico. Qualquer retângulo pode gerar vários paralelogramos com recortes e recomposição. Em seguida, pode ser visto que a metade de um paralelogramo – recorte em uma das diagonais – determina um triângulo. E, a partir de triângulos, outros polígonos podem ser “criados” pelos estudantes.

Enfim, há muitas opções de uso de material concreto para abordar vários assuntos da Geometria no Ensino Fundamental e isso pode ser uma prática rotineira, principalmente nos primeiros anos – os mais importantes para a formação da base matemática dos estudantes.

Em função do extenso conteúdo do Ensino Médio, há uma dificuldade em tornar rotineiro o uso de material concreto, mas, sempre que possível, pode ser recomendado por facilitar a compreensão dos estudantes.

4.11 GEOMETRIA – CÁLCULO DE ÁREAS

Conforme as ideias apresentadas em 4.10, partindo do quadrado, são possíveis de se obter vários polígonos, dentre eles, os principais polígonos trabalhados no EF. Para a obtenção das expressões de cálculo de áreas, o professor pode propor aos estudantes que construam um quadrado base a partir de papelão, por exemplo. A partir do quadrado obtido, define-se uma escala de modo que o lado desse quadrado seja equivalente a 1 metro, ou seja, o quadrado corresponde a 1 m^2 de área.

Nesse ponto, é interessante que o professor mostre o procedimento de multiplicar tanto o valor ($1 \times 1 = 1$) como também a unidade de medida ($\text{m} \times \text{m} = \text{m}^2$), pois essa noção esclarece as unidades de medida obtidas nos cálculos envolvendo várias grandezas, seja na Química, na Física e em outras áreas do conhecimento. Essa observação é importante porque muitos estudantes carregam, ao longo de sua vida estudantil, o pensamento falho de que a Matemática se concentra apenas nos números, esquecendo-se do contexto da medida.

Partindo do quadrado obtido pelo estudante, este deve obter outros quadrados de mesmas dimensões, de modo a compor retângulos. Nessa composição, ficará evidente que a área do retângulo equivale à soma das quantidades de quadrados medindo 1 m^2 cada um. Daí, o estudante poderá concluir facilmente que a área do retângulo equivale ao produto do comprimento (ou base) pela largura (ou altura).

Como foi citado em 4.10, paralelogramos podem ser obtidos a partir de retângulos por cortes e recomposição sem nenhuma perda de área. Assim, o paralelogramo obtido a partir de um retângulo possui a mesma área desse retângulo e a sua área também pode ser calculada pelo produto da base pela altura.

Do paralelogramo, chega-se ao triângulo, pois um corte em qualquer diagonal do paralelogramo gera dois triângulos congruentes. Daí, conclui-se imediatamente que a área de um desses triângulos equivale à metade do produto da base pela altura. Por fim, como qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos, tem-se um caminho para calcular áreas de qualquer polígono.

Todas essas ideias podem ser trabalhadas de forma lúdica em que os estudantes são protagonistas da construção do conhecimento e isso pode colaborar para que o estudante possa enxergar a Matemática como uma ciência diretamente ligada à construção de conhecimentos (no sentido apresentado). É interessante registrar que a composição de retângulos a partir de uma determinada quantidade de quadrados equivale às ideias de multiplicação de dois fatores, gerando o mesmo produto, conforme apresentado no item 4.4. Além disso, os retângulos podem ser utilizados como argumentos geométricos para explicar os procedimentos apresentados no item 4.7, relativo às aplicações da propriedade da distributividade.

4.12 Geometria – Lugares Geométricos/Desenho Geométrico

Lugares geométricos são trabalhados manualmente no desenho geométrico. Esse assunto era obrigatório em concursos militares no passado e – infelizmente – deixou de ser cobrado.

A baixa exploração do desenho geométrico limita o entendimento da Geometria, de modo que a proposta é a defesa de seu retorno como uma atividade manual e construtiva para o EF. Não precisa nem ser conteúdo obrigatório, de modo que pode ser proposto como uma atividade criativa e, ao mesmo tempo, recreativa. Desse modo, caso seja adotado o seu retorno,

os professores poderiam obter treinamento para repassar as práticas das construções dos lugares geométricos aos seus alunos.

A minha experiência em Geometria associa o domínio do conteúdo com a capacidade de demonstração. Ou seja, quando conseguia demonstrar um determinado teorema, percebia que o conhecimento se tornava mais profundo. E a experiência com o desenho geométrico foi fundamental para a assimilação dos conceitos geométricos básicos. Daí, uma construção geométrica seguia a mesma ideia de *brain storm* para redigir uma redação. Inicia-se com um rascunho com variados traçados para encontrar e enxergar o caminho a ser trilhado geometricamente.

Assim, a atividade de desenhar e fazer traçados geométricos com uso de régua, esquadro e compasso pode colaborar no desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes, além de ter a possibilidade de ser uma atividade prazerosa quando devidamente instruída a partir de seus conceitos básicos de construção. Afinal, as construções de base como retas paralelas e perpendiculares, bissetrizes, mediatrizes, circunferências entre outras são fundamentais para a compreensão e o domínio da Geometria.

4.13 OUTRAS PROPOSTAS

Muitas outras propostas podem ser apresentadas tanto para a apresentação dos assuntos tratados neste trabalho quanto de outros assuntos da Matemática. E, como são muitas as possibilidades e elas podem facilitar a construção do pensamento e do raciocínio matemáticos, o uso do material concreto deve ser estimulado em todos os anos do EF.

5 PROPOSTAS ESTRUTURANTES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA (REDE PÚBLICA)

A ciência da administração aborda a técnica do ciclo PDCA – Plan (planejar), Do (fazer), Check (checar) e Act (agir), de modo a colaborar para a melhoria contínua de um projeto desde o seu planejamento até a ação de melhorias. Essa técnica pode servir de referência para a melhoria da educação – não somente da matemática – e convém ser utilizada para o aprimoramento da educação em face das questões apresentadas em 2.4 (Reflexões sobre a Aplicação dos PCNs).

É fundamental a checagem dos resultados para que sejam confrontados com o atingimento dos objetivos desejados, pois, caso estes não estejam sendo alcançados, ações devem ser propostas para diminuir a distância entre a realidade e os ideais da educação – ressaltando o caráter local/municipal, regional/estadual e/ou nacional desses ideais.

Na sequência, três propostas estruturantes são apresentadas como “sementes” a serem nutridas e (quem sabe) ser a motivação para obter grandes “árvores”. Assim, proponho cada uma delas sem qualquer intenção de que seja uma solução para a educação pública, mas uma ideia para auxiliar em projetos legais (âmbito das leis) de educação que venham a ser implementados, promovendo o desenvolvimento da educação na Rede Pública de ensino.

5.1 REVISÃO DE CONTEÚDOS NOS CICLOS DO EF

As secretarias de educação estaduais e/ou municipais – ao realizarem avaliações periódicas dos resultados do Saeb (veja capítulo 3 - Reflexões sobre a Realidade da Educação Pública) – podem identificar deficiências e propor adequações práticas tanto de natureza pedagógica quanto de gestão de recursos (humanos e financeiros/materiais) para a melhoria do processo ensino-aprendizagem, mantendo o foco na consecução dos objetivos com uma visão de médio e longo prazo.

A gestão de recursos é uma competência do administrador e este deve apresentar as competências necessárias para o exercício de suas funções com zelo no uso dos recursos públicos – naturalmente escassos. Por se tratar de assunto fora da alçada deste trabalho, fica apenas a observação para que os gestores sejam eficientes, éticos e dedicados à melhoria contínua da educação de sua localidade.

Em relação aos aspectos pedagógicos, as informações obtidas podem orientar ações de revisão de conteúdo, refletindo no equilíbrio da equação “quantidade de assuntos ministrados a

cada ano ou ciclo” (foco no conteúdo) versus “rendimento dos estudantes” (foco na eficiência da aprendizagem).

Na minha experiência em sala de aula, verifiquei por diversas vezes que um conteúdo era iniciado sem que alguns estudantes tivessem assimilado adequada e minimamente o conteúdo anterior (entendo como educação com foco no conteúdo). Desse modo, esses estudantes acumulavam informações que não agregavam conhecimento por falta de aprendizagem. Assim, os famosos “monstros” ou “fantasmas” associados à Matemática eram criados e barreiras insuperáveis se formavam, chegando ao ponto de algum estudante concluir que “isso (a Matemática) não foi feito pra mim”.

Como as experiências semelhantes à que foi relatada não são poucas, uma questão se faz presente: “Existe possibilidade de sair da ‘caixinha’? Sair da ‘mesmice’?” Essa citada mesmice está associada ao ritmo desenfreado de que todos os conteúdos propostos para um determinado ano ou ciclo devem ser ministrados, conforme a determinação pedagógica da escola ou da secretaria de educação municipal e/ou estadual.

O foco na eficiência da aprendizagem requer a revisão de toda a estrutura do ensino da Matemática ou até mesmo das escolas, pois o processo ensino-aprendizagem deve estar associado a níveis de aprendizagem de cada estudante, de modo que um estudante somente poderá avançar para o próximo conteúdo se atender aos critérios mínimos e desejados do conteúdo anterior. Evidentemente que essa proposta se refere à sequência de conteúdos em que um assunto é avaliado como pré-requisito para o próximo. Por exemplo, não há sentido ensinar potenciação a um estudante que não sabe multiplicar, de modo que será uma angústia para o estudante e – no pior dos casos – um trauma para o resto de sua vida.

Assim posto, a proposta do foco na aprendizagem exige o mapeamento dos conteúdos, dispostos em um ordenamento de pré-requisitos, de modo que os estudantes não sejam obrigados a passar de um ano para o outro, mas de um conteúdo para outro (porque o anterior é fundamental para o processo ensino-aprendizagem do próximo). Essa proposta é uma provocação para a revisão do atual modelo de escola, estruturada rigidamente em uma sequência de anos, de forma que pode levar a novos modelos, apesar de não apresentar uma solução concreta de momento.

Outra proposta de foco na aprendizagem é destrinchar os raciocínios e as estruturas lógicas exigidas em cada assunto ou conteúdo, de modo a constatar similaridades entre os vários assuntos. Na verificação dessas similaridades, escolher apenas um desses assuntos no ciclo ou ano proposto, de modo que o raciocínio e a estrutura lógica possam ser exaustivamente trabalhados para que os estudantes os assimilem. Por exemplo: o cálculo de áreas de retângulos

e a multiplicação de dois fatores apresentam a mesma estrutura lógica operacional. O conteúdo área de retângulo é uma definição que pode ser ajustada ou apresentada em outro momento no processo ensino-aprendizagem.

Essa última ideia consiste em diminuir conteúdos em cada ciclo ou ano, de modo a trabalhar a repetição do processo de aprendizagem com criatividade na abordagem, conforme algumas propostas apresentadas no Capítulo 4.

5.2 PARCERIAS PÚBLICO-PRIVADAS

Conforme citado em algumas ocasiões, os ideais da educação apresentados na LDB possuem uma expectativa que pode extrapolar a realidade em relação aos recursos disponíveis. Assim, melhorias na educação pública podem ser obtidas por meio de propostas de parcerias com o setor privado.

Essas parcerias precisam de arcabouço jurídico, ou seja, deve existir uma lei para definir a forma como um agente do setor privado poderia participar no desenvolvimento da educação local por meio de doações e/ou investimentos. Por exemplo, no âmbito do Distrito Federal, a Câmara Legislativa Distrital – equivalente às assembleias legislativas estaduais – apresentaria um projeto de lei com incentivos a empresas locais, diminuindo a carga tributária da empresa investidora. Esse instrumento legal deve prever critérios baseados nos princípios de moralidade e impessoalidade, além do rigoroso acompanhamento na destinação dos recursos.

A ideia seria, por exemplo, possibilitar que uma empresa adotasse uma escola e acompanhasse as melhorias daquela escola em função de seus investimentos, de modo que a empresa investidora atuaria como um fiscal da aplicação de seu investimento. Essas amarras legais devem ser previstas no projeto de lei e inviabilizar qualquer possibilidade de mau uso dos recursos destinados à melhoria da educação. Dessa forma, a gestão dos recursos doados a título de investimento na Educação Pública deve ser de natureza transparente com a sua fiscalização aberta ao público em geral.

Outra proposta de parceria público-privada pode ser associada à oferta de incentivos aos professores. Estes poderiam receber uma gratificação periódica (anual ou bienal) em função de sua qualificação por meio de critérios legais associados à melhoria de rendimento de seus estudantes. Os valores referentes às gratificações seriam oriundos de investimentos/doações de empresas locais (sempre possibilitando a participação da empresa investidora na fiscalização da destinação dos recursos) com o devido embasamento legal.

Em relação ao rendimento citado, ele pode ser medido, por exemplo, por meio de provas anuais elaboradas pela secretaria de educação estadual, de modo a diminuir o enviesamento da participação de determinados professores e possibilitando a implementação de um projeto de melhoria da educação no âmbito estadual. Por exemplo, os professores de cada disciplina elaboram questões relacionadas com os seus conteúdos e a secretaria de educação estadual seleciona um grupo de questões para a definição da prova e o rendimento do estudante nessa prova poderá fazer parte de sua nota final daquela disciplina.

Além dessas propostas, muitas outras parcerias público-privadas podem ser implementadas no sentido de captar recursos a serem destinados para o desenvolvimento da educação local, seja por meio de melhorias no aspecto físico (recursos materiais, estrutura das escolas etc.) ou via incentivos aos professores.

5.3 ESCOLAS-MODELO

É natural que exista algum modelo ou referência para que uma política pública seja implementada. Nesse sentido, os ideais da educação, apresentados na LDB, chegam a ser um modelo em forma de lei.

Uma proposta para a melhoria da educação, visando o modelo da LDB, seria criar uma ou mais escolas-modelo em cada município ou região, conforme a capacidade de captação de recursos de cada município ou estado com a possível participação da União. Exemplos práticos de escolas-modelo são algumas escolas militares de âmbito estadual e/ou federal. No Distrito Federal, tem-se o Colégio Militar de Brasília (CMB) a nível federal e o Colégio Militar Dom Pedro II a nível distrital (equivalente a estadual).

A ideia segue uma linha semelhante a das propostas apresentadas em 5.2, mas os recursos não podem ser pausados. Assim, pode ser necessária a destinação de uma rubrica específica para a manutenção de escolas-modelo. Ou seja, há a necessidade de implementação de leis específicas, criando a escola-modelo.

Como este trabalho tem foco no desenvolvimento da educação pública, a escola-modelo a ser proposta aproveitaria a estrutura existente do próprio sistema educacional das secretarias de educação, diferenciando na gestão de recursos adicionais direcionados legalmente para:

- manutenção e reforma da estrutura física da escola, adequando o ambiente para as necessidades exigidas no processo ensino-aprendizagem (em resumo, manutenção das condições ideais sem supérfluos);
- aquisição de materiais por meio de compras e/ou doações;

- gratificações sem incorporação salarial aos profissionais da escola-modelo; e
- outras despesas para a manutenção da escola.

Por se tratar de um modelo local (município ou estado), tanto os professores quanto os estudantes seriam selecionados criteriosamente, além dos demais profissionais necessários.

A lei específica pode determinar que os estudantes devam passar por um processo seletivo – uma espécie de vestibular regional – e definir critérios adicionais, inclusive em relação a direitos e garantias. Por exemplo, o acesso à escola-modelo é acessível a todos os estudantes da Rede Pública de Ensino, mas a garantia de manutenção na escola fica limitada a dois anos, de modo que os estudantes precisam participar de processo seletivo a cada biênio. Isso mantém o estímulo de continuar se dedicando aos estudos para manter a sua vaga na escola-modelo, além de definir critérios mínimos de rendimento para a sua manutenção.

O estudante que não atendesse aos critérios de manutenção retornaria para a sua respectiva escola da Rede Pública, deixando a sua vaga para o próximo candidato da relação gerada no processo seletivo. Desse modo, ele teria que se dedicar para retornar à escola-modelo.

A ideia da escola-modelo é manter elevado o nível de estímulo do estudante para fazer parte do corpo discente da escola, pois ela pode ser a garantia de seu futuro, facilitando o acesso a universidades públicas e a estágios em empresas parceiras na formação profissional.

Em relação ao corpo docente da escola-modelo, a lei específica também definiria uma gratificação substancial – sem incorporação – ao professor, além de seu salário garantido por concurso público. O seu acesso também estaria previsto por meio de critérios legais, associados principalmente à sua docência com reflexo na melhoria de rendimento de seus estudantes, conforme mencionado no item 5.2. Nesse caso, os professores receberiam uma pontuação relativa a cada estudante que tenha melhorado de rendimento em relação ao rendimento do ano anterior de forma ponderada pelo valor da nota. Essa ponderação é necessária porque a possibilidade de um estudante melhorar o seu rendimento – na escala de 0 a 10 – é maior quanto menor for a sua nota do ano anterior.

Os critérios relativos ao acesso, tanto de estudantes como também de professores para fazerem parte do projeto da escola-modelo, devem ser avaliados e desenvolvidos tecnicamente, de modo que sejam os mais transparentes possíveis para toda a sociedade local e que possam manter os estudantes e os professores mais comprometidos com a escola-modelo.

Um cenário interessante seria a escola-modelo servir de referência para as demais escolas, incluindo seus professores, estimulando cada uma delas a se tornarem também uma escola no mesmo nível. Assim, a existência de uma escola-modelo pode gerar uma onda de desenvolvimento e aprimoramento da educação local, beneficiando a comunidade regional.

6 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Este trabalho visa contribuir no desenvolvimento da Educação Matemática direcionada, principalmente, para o ensino fundamental da Rede Pública. Assim, uma questão se faz presente: o que é Educação Matemática?

Com o intuito de obter elementos para responder essa questão, tem-se o comentário de Skovsmose (2013):

... meu uso do conceito “educação matemática” deverá, em alguns casos, ser identificado com o conceito alemão *Didaktik der Mathematik*, em outros, simplesmente se refere ao processo educacional da matemática. (SKOVSMOSE, 2013)

Assim, o emérito professor e pesquisador identifica o conceito de Educação Matemática (EM) de duas formas: (a) didática da matemática (*Didaktik der Mathematik*) e (b) processo educacional da matemática. Ressalte-se que essas formas não são excludentes, de modo que se relacionam ou até mesmo se complementam.

Este capítulo tratará a EM de forma similar, ou seja, em duas dimensões: interna (ou compressiva) e externa (ou expansiva). A terminologia proposta propõe tratar de uma EM voltada mais para si mesma e de outra EM que se expande e interage com as ideias dinâmicas do processo educacional, questionando estruturas e modelos tradicionais. Assim, a dimensão interna está mais próxima dos aspectos didáticos, conforme Skovsmose identificou com *Didaktik der Mathematik*, relacionando-se intimamente com o processo de ensino-aprendizagem, seus atores e métodos vigentes. Já a expansiva (externa) se identifica e aproxima do processo educacional da matemática mencionado por Skovsmose, possibilitando influências e impactos sociais, além de considerar uma educação mais democrática. Esta última pode ser considerada a Educação Matemática como área de conhecimento e pesquisa.

6.1 EM INTERNA (OU COMPRESSIVA)

Esta dimensão da EM foi tratada ao longo deste trabalho, propondo melhorias para o desenvolvimento constante do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, de modo a alcançar os ideais propostos tanto na LDB como nos PCNs.

As propostas com o uso de material concreto enfatizam que o ensino da Matemática deve partir do caso concreto para a abstração (processo de construção da linguagem matemática). Isso se aproxima da ideia de etnomatemática proposta por D’Ambrosio (2013):

Na Aritmética, o atributo, isto é, a qualidade do número na quantificação, é essencial. Duas laranjas e dois cavalos são “dois” distintos. Chegar ao “dois” abstrato, sem qualificativo, assim como chegar à Geometria sem cores, talvez seja o ponto crucial na passagem de uma matemática do concreto para uma matemática teórica.

O cuidado com essa passagem e trabalhar adequadamente esse momento talvez sintetizem o objetivo mais importante dos programas de Matemática Elementar. Os demais são técnicas que pouco a pouco, conforme o jovem vai tendo outras experiências, vão se tornando interessantes e necessárias. O cuidado com a passagem do concreto ao abstrato é uma das características metodológicas da etnomatemática. (D’AMBROSIO, 2013)

De acordo com os PCNs, as práticas propostas devem estar associadas ao contexto social (realidade) dos estudantes, adaptando-se às diversas realidades apresentadas nas várias regiões do Brasil. Em várias propostas de uso de material concreto, foi ressaltado o importante papel do professor nessa adaptação em conformidade com a realidade dos estudantes. Esse comprometimento de o professor buscar entender o contexto social de seus estudantes apresenta elementos da outra EM (externa), pois tem um olhar crítico e expansivo em relação às práticas vigentes, ou seja, incentiva a ter a visão para “fora da caixinha” das salas de aula.

Nesta dimensão interna, a avaliação dos resultados do SAEB é fundamental para a obtenção de parâmetros ou medidas sobre a realidade do ensino de Matemática nas escolas da Rede Pública (foco). Assim, a partir dessas medidas, é possível avaliar deficiências e o alcance de objetivos, buscando otimizar a gestão dos recursos públicos aplicados na Educação Pública por parte dos gestores da educação nos âmbitos locais (secretarias de educação estaduais e municipais).

Essa EM Compressiva é a dimensão mais visível de Educação Matemática, sendo apresentada corriqueiramente nos noticiários das mídias televisivas, na internet e outras mídias sociais do grande público (menos formal ou até informal), pois predomina na maioria das escolas em nosso País.

Diante disso, fica a questão: por que a EM Expansiva (a ser tratada no próximo item) não é aplicada amplamente?

6.2 EM EXTERNA (OU EXPANSIVA)

Esta dimensão da EM pesquisa e estuda os vários aspectos relacionados ao processo educacional da Matemática, apresentando um caráter questionador de sua dimensão interna. Esse caráter (questionador) encontrou ressonância em Skovsmose para propor a interação entre a Educação Crítica (EC) e a Educação Matemática (EM), desenvolvendo os princípios da Educação Matemática Crítica (EMC).

6.2.1 Educação Crítica (EC)

A EC, segundo Skovsmose (2013), apresenta três pontos-chave: competência crítica, distância crítica e engajamento crítico.

A competência crítica atribui uma relação de igualdade entre professores e estudantes, de forma que o processo educacional deve ser conduzido através do diálogo construtivo entre iguais (professores-estudantes e estudantes-professores). Assim, o professor aprende com as experiências prévias dos estudantes e ensina considerando essas experiências.

Skovsmose (2013) destaca que:

Essa competência é atribuída principalmente aos estudantes por dois motivos. Primeiro, por razões de fato, uma vez que os estudantes, embora suas experiências sejam falhas, fragmentárias etc., também têm uma experiência geral, que, no diálogo com o professor, permite-lhes identificar assuntos relevantes para o processo educacional; relevantes tanto em relação aos interesses imediatos dos estudantes quanto em relação à perspectiva geral do processo educacional. Em segundo lugar, por razões de princípio, o de que, se uma educação pretende desenvolver uma competência crítica, tal competência não pode ser imposta aos estudantes, deve, sim, ser desenvolvida com base na capacidade já existente. (SKOVSMOSE, 2013)

Em relação ao segundo ponto-chave (distância crítica), estudantes e professores devem manter uma distância do conteúdo da educação vigente para propor um “currículo crítico”, baseado em princípios, conforme Skovsmose (2013):

Em um currículo crítico, colocamos princípios aparentemente objetivos e neutros para a estruturação de uma nova perspectiva, pois buscamos revelar tais princípios como algo carregado de valores. (SKOVSMOSE, 2013)

Esses princípios devem questionar a aplicabilidade de cada assunto, além de analisar e avaliar os interesses, os pressupostos, as funções e as limitações relativos a esse assunto.

O terceiro e último ponto-chave (engajamento crítico) destaca que o processo educacional deve estar relacionado a problemas existentes fora do universo educacional e selecionados fundamentalmente com base nos critérios subjetivo e objetivo. Em relação a esses critérios, Skovsmose (2013) esclarece:

O subjetivo: o problema deve ser concebido como relevante na perspectiva dos estudantes, deve ser possível enquadrar e definir o problema em termos próximos das experiências e do quadro teórico dos estudantes. E o objetivo: o problema deve ter uma relação próxima com problemas sociais objetivamente existentes. (SKOVSMOSE, 2013)

Esses critérios são relevantes porque considera as características regionais dos estudantes. Por exemplo, um professor pode apresentar uma atividade mencionando cajueiros para estudantes do sertão nordestino, onde facilmente são encontrados cajueiros. No entanto, se trocar os cajueiros por damasqueiros, algum estudante pode deixar de realizar a atividade por desconhecer completamente o que vem a ser um damasqueiro. Assim, uma única palavra fora do contexto pode causar dificuldades para realizar uma atividade e atingir o seu objetivo.

Skovsmose postula que:

É necessário intensificar a interação entre a EM e a EC, para que a EM não se degenere em uma das maneiras mais importantes de socializar os estudantes em uma sociedade tecnológica e, ao mesmo tempo, destruir a possibilidade de se desenvolver uma atitude crítica em direção a essa sociedade tecnológica. (SKOVSMOSE, 2013)

Essa interação ou integração entre a EC e a EM caracteriza estruturalmente a Educação Matemática Crítica (EMC).

6.2.2 EMC e Democracia

Em Skovsmose (2013), o autor destaca o papel fundamental da Matemática no desenvolvimento da democracia em uma sociedade cada vez mais tecnológica – haja vista que as tecnologias apresentam explícita e/ou implicitamente conhecimentos matemáticos.

E por que a EMC se torna uma questão de democracia?

Porque a sociedade tecnológica acaba naturalmente apartando (no sentido de *apartheid*) as pessoas que detêm os conhecimentos matemáticos daquelas que não os possuem.

Oportuno ressaltar que este trabalho leva à reflexão do caráter segregador da Matemática, exemplificado na seguinte cena:

“Você chega a um estabelecimento comercial para comprar um produto de R\$ 6,00 e fornece uma nota de R\$ 10,00. O(a) funcionário(a) do estabelecimento pega a calculadora, digita 10 e subtrai 6, resultando em 4. Logo, devolve R\$ 4,00 de troco.”

Essa cena evidencia o *apartheid* (analfabetismo matemático) citado, pois a necessidade do uso da calculadora pode parecer algo inocente e simples, mas apresenta consequências relativas àquela simples ação. Do ponto de vista profissional, provavelmente essa pessoa apresentará dificuldades em atuar nas áreas das ciências exatas (engenharia, computação, física, estatística etc.), sendo apartada de algumas possibilidades de profissões com relação a processos quantitativos. Nesse sentido, a Matemática torna-se socialmente segregadora, distanciando-se de uma proposta de educação democrática.

Assim, a EMC se faz necessária para propor o desenvolvimento de uma educação democrática capaz de empoderar os estudantes e as pessoas com os conhecimentos matemáticos essenciais para a inserção nessa sociedade tecnológica. Esse *empowerment* é a competência democrática, destacada no artigo “Contribuições da Educação Matemática Crítica para o processo de matricia nas séries iniciais do Ensino Fundamental”, de Pessôa (2013):

Uma educação que tenha por objetivo desenvolver cidadãos críticos e conscientes precisa estar interessada em preparar os educandos para agirem democraticamente. Para isso, acreditamos que a competência democrática precisa ser desenvolvida nas crianças desde o início de seu processo de escolarização. Para isso, é importante que o ensino de matemática não se resuma a ensinar algoritmos, mas que abranja os conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo. (PESSÔA, 2013)

Para que os educandos possam agir democraticamente, há a necessidade de os professores atuarem como facilitadores do processo, de modo que não cabe a educação bancária, citada por Freire (2011), onde os professores são os atores principais, detentores de todo o conhecimento a ser depositado nos educandos – personagens meramente passivos nesse processo e comparados a cofres de bancos (que recebem depósitos).

Assim, na ótica da EMC, os professores devem ser parceiros dos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, conforme D’Ambrosio (1993):

O futuro da Educação Matemática não depende de revisões de conteúdo, mas da dinamização da própria Matemática, procurando levar nossa prática à geração de conhecimento. Tampouco depende de uma metodologia "mágica". Depende essencialmente de o professor assumir

sua nova posição, reconhecer que ele é um companheiro de seus estudantes na busca de conhecimento, e que a Matemática é parte integrante desse conhecimento. Um conhecimento que dia-a-dia se renova e se enriquece pela experiência vivida por todos os indivíduos deste planeta. (D'AMBROSIO, 1993)

Essa parceria está relacionada com a competência crítica citada como um dos pontos-chave da EC.

6.3 APLICAÇÃO DA EMC

Diante desse pensar diferenciado da EMC frente à EM compressiva e praticada predominantemente no Brasil, cabe avaliar e refletir sobre a aplicabilidade na estrutura da Rede Pública de ensino.

Importante ressaltar que está sendo proposto um educador bem diferente do modelo tradicional, pois este deve ser um parceiro e facilitador dos educandos na geração do conhecimento matemático. Além disso, o educador precisa estar devidamente capacitado nas competências a serem exigidas, ou seja, além dos conhecimentos exigidos, o docente precisa apresentar as habilidades necessárias para atuar no processo educacional proposto pela EMC e as atitudes adequadas, destacando as exigências psicológicas para conduzir a relação estudante-professor-estudante (essa terminologia é apresentada para destacar que todos aprendem e ensinam nessa relação sinérgica) entre iguais.

Por outro lado, o sistema educacional precisa ser adaptado ou (re)construído para essa nova forma de pensar criticamente e processar a EM como um todo. Há a necessidade de definir métricas (se haverá ou não formas de avaliar o aprendizado) e, caso haja, como serão as mesmas, uma vez que o foco não estará centrado no professor, mas, sim, na relação colaborativa estudante-professor-estudante.

Diante das análises apresentadas neste trabalho, constatando as discrepâncias nas avaliações entre estudantes da Rede Pública (FEM) e Privada (P), sugere-se que os princípios da EMC sejam considerados e/ou testados em unidades pilotos (escolas da Rede Pública ou Privada) para análise de sua aplicabilidade, avaliando os resultados a médio e longo prazo.

6.4 EM COMPRESSIVA VERSUS EXPANSIVA

A terminologia foi escolhida por associação à teoria cinética do gases ideais. Conforme essa teoria, um gás ideal pode expandir e comprimir indefinidamente em função de suas

variáveis de estado (pressão e temperatura), podendo oscilar em torno de um determinado estado de equilíbrio.

Equilíbrio é a ideia ao tratar a EM nessas duas dimensões. De certa forma, a EM Compressiva pode ser associada ao mundo real e a EM Expansiva ao mundo ideal sob a ótica da visão da EMC apresentada por Skovsmose. É sugestivo que essas duas dimensões estejam constantemente conversando entre si, propiciando a busca do equilíbrio entre elas.

Esse equilíbrio pode ser entendido por um lado como a aplicação prática das ideias da EM Expansiva na Compressiva, de modo a direcionar a realidade da EM na Rede Pública (com todas as suas dificuldades) para a melhor formação matemática dos estudantes, diminuindo o analfabetismo matemático e viabilizando o exercício pleno da cidadania por parte dos estudantes no contexto da sociedade (cada vez mais) tecnológica.

Por outro lado, os ideais da EM Expansiva podem estar muito distantes da realidade prática da EM Compressiva. Assim, a aproximação (ou adequação) entre elas é fundamental para que as propostas da EM Expansiva sejam viáveis e adequadas no cenário da EM na Rede Pública. Afinal, a viabilização dessas propostas será tratada por gestores públicos e necessariamente passará por uma decisão política, seja no âmbito federal, estadual ou municipal.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve a intenção de colaborar para o cumprimento do que a LDB direciona:

O Ensino Fundamental terá por objetivo a formação básica do cidadão, destacando o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo; e o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores. (BRASIL, 2017).

É citado o pleno domínio do cálculo – e que seja restrito apenas às quatro operações básicas – na formação básica do cidadão no Ensino Fundamental. Assim, os professores envolvidos com o processo ensino-aprendizagem possuem o desafio de descomplicar a Matemática, estimulando o desenvolvimento do raciocínio e da lógica presentes na linguagem matemática. E, em meio a esse desafio, reverter positivamente as estatísticas apresentadas no Capítulo 3 (Reflexões sobre a Realidade da Educação Pública).

Por essa razão, o Capítulo 4 (Propostas de Práticas de Educação Matemática Concreta) apresentou ideias com o intuito de facilitar a compreensão da linguagem matemática, associada a casos concretos para que o estudante “veja” essa linguagem acontecendo “diante de seus próprios olhos”. Em resumo, trata-se de processo ensino-aprendizagem com uso de material concreto, associado à realidade dos estudantes.

Espera-se que essas propostas sejam aproveitadas por professores da Rede Pública de ensino, facilitando a compreensão dos estudantes e estimulando-os para o avanço às próximas etapas da aprendizagem matemática.

No Capítulo 5 (Propostas Estruturantes para a Educação Matemática na Rede Pública), a revisão de conteúdo nos ciclos foi proposta para que o foco principal esteja relacionado com o rendimento dos estudantes verificado em avaliações periódicas. Além disso, a gestão pública da educação deve propor políticas públicas capazes de motivar os atores envolvidos: estudantes, professores e demais profissionais. Com esse intuito, algumas propostas foram sugeridas, de forma inicial, para que elas possam avançar e provocar mudanças positivas na educação pública.

Como o foco deste trabalho é a Educação Matemática, foram abordadas no Capítulo 6 as dimensões Compressiva e Expansiva da EM, associados respectivamente ao processo de ensino-aprendizagem (ou à didática) e aos procedimentos educacionais da Matemática, conforme o entendimento de Skovsmose e demais pesquisadores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 2a edição. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1996.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Base Nacional Comum Curricular – BNCC*, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>. Acesso em: 25 set. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Relatório Saeb*. Brasília: 2019.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Microdados Saeb*. 2020. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/microdados>. Acesso em: 25 set. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Microdados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Saeb. 2020*. Disponível em: <https://dados.gov.br/dataset/microdados-do-sistema-nacional-de-avaliacao-da-educacao-basica-saeb>. Acesso em: 25 set. 2020.

BRASIL. *Lei de diretrizes e bases da educação nacional - LDB*. Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Saeb Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica. Objetivos, Diretrizes, Produtos e Resultados*. Brasília, 1994. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me002195.pdf>. Acesso em: 25 set. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997a.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª Séries): Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997b.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries): Matemática*. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 25 set. 2020.

CARVALHO, Benjamin de A. *Desenho Geométrico*. 3a edição – reimpressão. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1970.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: Uma Visão do Estado da Arte, Pro-Posições - Vol. 4 N.º1[10]*. março de 1993.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática - Elo entre as tradições e a modernidade*. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

DUARTE, A. L. A.; CASTILHO, S. F. da R. *Metodologia da Matemática*. 2ª edição. Belo Horizonte: Vigília, 1985.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. 50 ed. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

FUNDO DAS NAÇÕES UNIDAS PARA A INFÂNCIA. *Declaração Mundial sobre Educação para Todos*. Conferência de Jomtien. Tailândia, 1990. Disponível em: <https://www.unicef.org/brazil/declaracao-mundial-sobre-educacao-para-todos-conferencia-de-jomtien-1990>. Acesso em: 25 set. 2020.

LIMA NETTO, Sérgio. *Construções Geométricas: exercícios e soluções*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II: métrica plana*. Ed. Original. Rio de Janeiro: FC & Z Livros, 2002.

PESSÔA, E. B.; JÚNIOR, V. D. *Contribuições da Educação Matemática Crítica para o processo de matriciação nas séries iniciais do Ensino Fundamental*. BoEM, Joinville, v.1. n.1, p. 76-98, jul./dez. 2013.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação Matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus Editora, SBEM, 2013.

ROONEY, Anne. *A História da Matemática – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo: M. Books do Brasil Editora LTDA, 2012.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *PROFMAT*. Disponível em: <https://www.profmtat-sbm.org.br/>. Acesso em: 25 set. 2020.

STEWART, Ian. *Incríveis Passatempos Matemáticos*. Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. 86ª edição. Rio de Janeiro: Record, 2014.

ANEXO A - Conteúdo para cada ciclo do Ensino Fundamental

Primeiro ciclo

O primeiro ciclo equivale ao segundo e terceiro anos do Ensino Fundamental e os conteúdos propostos são:

(A) Números e operações:

- apresentação de números naturais e sistema de numeração decimal (base e valor posicional)
- contagem, comparação, ordenação e estimativa de números naturais
- leitura e escrita de números naturais
- decomposição numérica
- estudo e cálculo das operações: adição, subtração, multiplicação e divisão
- uso da calculadora na produção e comparação de escritas numéricas e no auxílio de cálculos
- abordagem de situações-problema

(B) Espaço e formas (Geometria):

- percepção de relações de tamanho e forma
- localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço
- interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço
- observação, construção e representação de formas geométricas
- comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos — esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos — sem uso obrigatório de nomenclatura
- percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos

(C) Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria):

- comparação de grandezas de mesma natureza com o uso de instrumentos de medida: fita métrica, balança, recipientes etc.
- identificação de unidades de tempo (dia, semana, mês, bimestre, semestre, ano etc.) e suas relações
- reconhecimento de cédulas e moedas e suas relações
- realização e apresentação de medições
- leitura de horas, comparando relógios digitais e de ponteiros

(D) Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade)

- leitura, coleta, organização, registro e interpretação de informações
- análise do número como código na organização de informações (linhas de ônibus, telefones, placas de carros, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados)
- interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra

- produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas

Segundo ciclo

O segundo ciclo equivale ao quarto e quinto anos do Ensino Fundamental e os conteúdos propostos são:

(A) Números e operações:

- apresentação e reconhecimento de números racionais e sistema de numeração decimal (base e valor posicional)
- compreensão, representação e utilização das regras do sistema de numeração decimal para leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais e racionais (inclusive as representações fracionárias frequentes e seus equivalentes)
- localização na reta numérica, cálculo de adição e subtração de números racionais na forma decimal
- cálculo simples de porcentagens
- análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema com números naturais e racionais (inclusive frações e porcentagens)
- uso do cálculo mental e da calculadora para verificação e controle de resultados

(B) Espaço e formas (Geometria):

- descrição, interpretação e representação (uso de malhas, redes ou maquetes) da posição e da movimentação de uma pessoa ou objeto no plano e no espaço
- reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos (esfera, cone, cilindro etc.)
- reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (prismas, pirâmides etc.) com a identificação de elementos como faces, vértices e arestas
- composição, decomposição, identificação de simetria e planificações relativas a figuras tridimensionais
- estudo de figuras poligonais (rigidez triangular, paralelismo, perpendicularismo de lados etc.) e circulares
- uso de malhas para ampliação e redução de figuras planas
- representação de figuras geométricas

(C) Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria):

- comparação de grandezas de mesma natureza (escolha de unidade de medida da mesma espécie do atributo a ser mensurado)
- identificação de grandezas (comprimento, massa, tempo, temperatura, capacidade, superfície etc.) e suas respectivas unidades de medida
- conversões de unidades de medida (múltiplos e submúltiplos) relativas às grandezas estudadas
- utilização de procedimentos e instrumentos de medida, em função do problema e da precisão do resultado

- resolução de situações-problema relacionadas ao sistema monetário brasileiro
- cálculo de perímetro e de área de figuras desenhadas em malhas quadriculadas e comparação de perímetros e áreas de duas figuras sem uso de fórmulas

(D) Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade)

- coleta, organização, descrição, leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações
- produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros
- obtenção e interpretação de média aritmética.
- resolução de situações-problema simples relativas à ideia de probabilidade (sucesso, certeza e “sorte”)
- identificação e contagem de combinações de elementos de uma coleção

Terceiro ciclo

O terceiro ciclo equivale ao sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental e os conteúdos propostos são:

(A) Números e operações:

- múltiplos e divisores de números naturais
- leitura, escrita e representação de números racionais na forma decimal e fracionária, incluindo localização na reta numérica
- análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema com números naturais, inteiros (falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento) e racionais (relação parte/todo, quociente, razão)
- cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, inteiros e racionais e uso da calculadora (verificação e controle de resultados)
- definição e propriedades da potenciação (expoente inteiro positivo, nulo e/ou negativo) com aplicação em situações-problema
- compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número (obtenção do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado)
- cálculos aproximados de raízes quadradas (estimativas e uso de calculadoras)
- resolução de situações-problema com proporções e porcentagens
- resolução de problemas de contagem, incluindo princípio multiplicativo
- propriedades das operações aritméticas e regularidades em sequências numéricas com uso de representações algébricas
- compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas e cálculo do valor numérico de expressões algébricas simples

(B) Espaço e formas (Geometria):

- representação da posição de pontos e seus deslocamentos no plano (associado ao sistema de coordenadas cartesianas)

- composição, decomposição, transformação (reflexões, translações e rotações), ampliação e redução de figuras planas
- construção da noção de ângulo em figuras planas e constatação da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo igual a 180°
- caracterização e classificação de figuras bidimensionais (círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados) e tridimensionais (corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros)
- planificação de poliedros
- estudo de prismas e pirâmides com a quantificação do número de vértices, faces e arestas, estabelecendo relações entre esses números e o polígono da base

(C) Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria):

- reconhecimento de grandezas (comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade) e identificação de unidades
- reconhecimento e compreensão das unidades de memória da informática (bytes, quilobytes, megabytes e gigabytes) como uso da potenciação
- obtenção de medidas por meio de estimativas e aproximações e decisão quanto a resultados razoáveis dependendo da situação-problema
- uso de instrumentos adequados (régua, escalímetro, transferidor, esquadro, trena, relógios, cronômetros, balanças) para realização de medições conforme situação-problema
- composição e decomposição de figuras planas para compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras
- cálculos ou estimativas de áreas de figuras planas (decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas)
- relação do volume de paralelepípedo retângulo com a quantidade de cubos necessários para preencher seu interior
- resolução de situações-problema com uso de conversões entre algumas unidades de medida mais usuais (para comprimento, massa, capacidade, tempo)

(D) Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade)

- coleta, organização, leitura e interpretação de dados em fluxogramas, tabelas e gráficos
- compreensão da média aritmética como indicador da tendência de pesquisas
- representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias
- construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão

Quarto ciclo

O quarto ciclo equivale ao oitavo e nono anos do Ensino Fundamental e os conteúdos propostos são:

(A) Números e operações:

- cálculo do valor numérico de expressões algébricas (fatorações e simplificações)

- análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema (números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais)
- resolução de situações-problema relativas a números irracionais (caso do pi, da raiz2, raiz3 etc.) e localização de alguns deles na reta numérica (régua e compasso)
- resolução de situações-problema de contagem (princípio multiplicativo) e cálculo do número de diagonais de um polígono (regularidades com número de lados)
- resolução de situações-problema (juros simples e casos de juros compostos) com uso de calculadora
- grandezas diretamente e inversamente proporcionais ou não-proporcionais (resolução de problemas, regra de três, sentença algébrica, afim, quadrática, plano cartesiano etc.)
- resolução de situações-problema (equações, inequações e sistema de equações do primeiro grau, equação do segundo grau), significado das raízes e representação no plano cartesiano

(B) Espaço e formas (Geometria):

- representação (segmento de reta orientado) e interpretação do deslocamento de um ponto no plano cartesiano
- análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares)
- secção por um plano, reconhecimento e representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais
- divisão de segmentos (proporção, paralelismo e perpendicularismo) com régua e compasso
- identificação de ângulos (congruentes, complementares e suplementares) em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais
- número “pi” (razão entre comprimento de uma circunferência e seu diâmetro)
- soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer e polígonos não-convexos
- resolução de situações-problema (mediatriz de um segmento, bissetriz de um ângulo, retas paralelas e perpendiculares e ângulos notáveis) com uso de régua, compasso, esquadro e transferidor
- congruência de figuras planas (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas) e propriedades de triângulos e quadriláteros (casos de congruência de triângulos)
- estudo de alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de triângulos com uso de régua e compasso
- semelhança de figuras planas (ampliações ou reduções)
- teoremas de Tales e de Pitágoras

(C) Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria):

- resolução de situações-problema envolvendo grandezas (capacidade, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida (conversões, cálculos e resultados)
- cálculo da área de superfícies planas (composição, decomposição, aproximações) e da superfície total de alguns sólidos geométricos (prismas e cilindros)
- construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas (limitadas por segmentos de reta e/ou arcos de circunferência)
- cálculo do volume (prismas retos e suas composições)

- comportamentos de diagonal, perímetro e área de quadrado em função da medida do lado e representação gráfica no plano cartesiano
- resolução de situações-problema envolvendo grandezas determinadas pela razão de duas outras (densidade e velocidade) ou pelo produto (energia elétrica: kWh)
- uso de instrumentos de medida e avaliação das medições (algarismo duvidoso, algarismo significativo e erros de medição)
- estabelecimento da relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo (“pi”)

(D) Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade)

- leitura e interpretação de dados em gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência)
- organização de dados e construção de gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência) para inferências
- compreensão de termos de pesquisa/estatística (frequência, frequência relativa, amostra de população) para interpretação de informações
- distribuição em classes de frequências de uma variável de pesquisa
- medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências
- construção do espaço amostral (uso do princípio multiplicativo e probabilidade de um evento)
- cálculo e estimação de probabilidades em experimentos e simulações

ANEXO B – Escala de proficiência de Matemática (9º ano)

Nível 1: desempenho maior ou igual a 200 e menor que 225

Descrição do Nível:

Os estudantes provavelmente são capazes de:

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Reconhecer o maior ou o menor número em uma coleção de números racionais, representados na forma decimal.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES

- Interpretar dados apresentados em tabela e gráfico de colunas.

Nível 2: desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas.

- Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal.

- Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES

- Interpretar dados apresentados em um gráfico de linha simples.

- Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.

Nível 3: desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

ESPAÇO E FORMA

- Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos.

- Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva.

- Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete.

- Determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema.

- Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica.
- Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES

- Associar dados apresentados em tabela a gráfico de setores.
- Analisar dados dispostos em uma tabela simples.
- Analisar dados apresentados em um gráfico de linha com mais de uma grandeza representada.

Nível 4: desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

ESPAÇO E FORMA

- Localizar um ponto em um plano cartesiano, com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas.
- Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano, com o apoio de malha quadriculada.
- Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu.

GRANDEZAS E MEDIDAS

- Converter unidades de medidas de comprimento, de metros para centímetros, na resolução de situação-problema.
- Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Determinar a soma de números racionais em contextos de sistema monetário.
- Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema.
- Localizar números inteiros negativos na reta numérica.
- Localizar números racionais em sua representação decimal.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES

- Analisar dados dispostos em uma tabela de dupla entrada.

Nível 5: desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

ESPAÇO E FORMA

- Reconhecer que o ângulo não se altera em figuras obtidas por ampliação/ redução.
- Localizar dois ou mais pontos em um sistema de coordenadas.

GRANDEZAS E MEDIDAS

- Determinar o perímetro de uma região retangular, com o apoio de figura, na resolução de uma situação-problema.
- Determinar o volume através da contagem de blocos.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Associar uma fração com denominador dez à sua representação decimal.
- Associar uma situação problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau ou sistemas lineares.
- Determinar, em situação-problema, a adição e multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros.
- Determinar a porcentagem envolvendo números inteiros.
- Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal.

Nível 6: desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

ESPAÇO E FORMA

- Reconhecer a medida do ângulo determinado entre dois deslocamentos, descritos por meio de orientações dadas por pontos cardeais.
- Reconhecer as coordenadas de pontos representados no primeiro quadrante de um plano cartesiano.
- Reconhecer a relação entre as medidas de raio e diâmetro de uma circunferência, com o apoio de figura.
- Reconhecer a corda de uma circunferência, as faces opostas de um cubo, a partir de uma de suas planificações.
- Comparar as medidas dos lados de um triângulo a partir das medidas de seus respectivos ângulos opostos.
- Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos.

GRANDEZAS E MEDIDAS

- Converter unidades de medida de massa, de quilograma para grama, na resolução de situação problema.
- Resolver problema fazendo uso de semelhança de triângulos.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Reconhecer frações equivalentes.
- Associar um número racional, escrito por extenso, à sua representação decimal, e vice-versa.
- Estimar o valor da raiz quadrada de um número inteiro aproximando-o de um número racional em sua representação decimal.
- Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, com constante de proporcionalidade não inteira.
- Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica que contenha parênteses, envolvendo números naturais.
- Determinar um valor monetário obtido por meio de um desconto ou um acréscimo percentual.
- Determinar o valor de uma expressão numérica, com números irracionais, fazendo uso de uma aproximação racional fornecida.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES

- Resolver problemas que requerem a comparação de dois gráficos de colunas.

Nível 7: desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

ESPAÇO E FORMA

- Reconhecer ângulos agudos, retos ou obtusos de acordo com sua medida em graus.
- Reconhecer as coordenadas de pontos representados num plano cartesiano localizados em quadrantes diferentes do primeiro.
- Determinar a posição final de um objeto, após a realização de rotações em torno de um ponto, de diferentes ângulos, em sentido horário e anti-horário.
- Resolver problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo.
- Resolver problemas envolvendo as propriedades de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros, com ou sem justaposição ou sobreposição de figuras.
- Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos.

GRANDEZAS E MEDIDAS

- Determinar o perímetro de uma região retangular, obtida pela justaposição de dois retângulos, descritos sem o apoio de figuras.
- Determinar a área de um retângulo em situações-problema.
- Determinar a área de regiões poligonais desenhadas em malhas quadriculadas.
- Determinar o volume de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo, sem o apoio de figura.
- Converter unidades de medida de volume, de m³ para litro, em situações-problema.

- Reconhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações-problema.
- Determinar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes.
- Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 2º grau, com coeficientes naturais, envolvendo números inteiros.

Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração, multiplicação e/ou potenciação entre números inteiros.

- Determinar o valor de uma expressão numérica com números inteiros positivos e negativos.
- Determinar o valor de uma expressão numérica com números racionais.
- Comparar números racionais com diferentes números de casas decimais, usando arredondamento.
- Localizar na reta numérica um número racional, representado na forma de uma fração imprópria.
- Associar uma fração à sua representação na forma decimal.
- Associar uma situação problema à sua linguagem algébrica, por meio de inequações do 1º grau.
- Associar a representação gráfica de duas retas no plano cartesiano a um sistema de duas equações lineares e vice-versa.
- Resolver problemas envolvendo equação do 2º grau.

TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES

- Determinar a média aritmética de um conjunto de valores.
- Estimar quantidades em gráficos de setores.
- Analisar dados dispostos em uma tabela de três ou mais entradas.
- Interpretar dados fornecidos em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano.
- Interpretar gráficos de linhas com duas sequências de valores.

Nível 8: desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

ESPAÇO E FORMA

- Resolver problemas utilizando as propriedades das cevianas (altura, mediana e bissetriz) de um triângulo isósceles, com o apoio de figura.

GRANDEZAS E MEDIDAS

- Converter unidades de medida de capacidade, de mililitro para litro, em situações-problema.
- Reconhecer que a área de um retângulo quadruplica quando seus lados dobram.

- Determinar a área de figuras simples (triângulo, paralelogramo, trapézio), inclusive utilizando composição/decomposição.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica do 1º grau, com coeficientes racionais, representados na forma decimal.
- Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração e potenciação entre números racionais, representados na forma decimal.
- Resolver problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Nível 9: desempenho maior ou igual a 400

Descrição do Nível:

Além das habilidades anteriormente citadas, os estudantes provavelmente são capazes de:

ESPAÇO E FORMA

- Resolver problemas utilizando a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

NÚMEROS E OPERAÇÕES; ÁLGEBRA E FUNÇÕES

- Reconhecer a expressão algébrica que expressa uma regularidade existente em uma sequência de números ou de figuras geométricas.

Nota:

A Prova Brasil não utilizou itens do 9º ano que avaliam as habilidades do Nível 0. Os estudantes do 9º ano com desempenho menor que 200 requerem atenção especial, pois ainda não demonstram habilidades muito elementares que deveriam apresentar nessa etapa escolar.

ANEXO C – Tabelas de resultados Saeb 2013, 2015 E 2017

Tabela 1 – Resultados Saeb 2013

SAEB 2013		MÉDIA - MATEMÁTICA			DIFERENÇAS "REGIÃO - BRASIL"		
REGIÃO	Dep. Adm.	5º ANO	9º ANO	12º ANO	5º ANO	9º ANO	12º ANO
Norte	F	230,50	305,14	346,68	-27,31	-16,31	-11,50
	P	225,86	273,09	299,15	-18,62	-20,66	-22,30
	EM	185,72	231,72	244,94	-19,33	-10,48	-15,04
	FEM	185,77	231,89	245,20	-19,31	-10,45	-15,14
	FEMP	188,88	235,57	249,96	-22,33	-14,06	-19,29
Nordeste	F	252,28	328,68	338,24	-5,53	7,23	-19,94
	P	230,80	283,07	309,22	-13,68	-10,68	-12,23
	EM	182,39	229,24	245,49	-22,66	-12,96	-14,49
	FEM	182,40	229,32	245,68	-22,68	-13,02	-14,66
	FEMP	190,44	236,91	253,76	-20,77	-12,72	-15,49
Sudeste	F	266,09	326,63	368,19	8,28	5,18	10,01
	P	252,91	299,60	327,06	8,43	5,85	5,61
	EM	221,11	249,10	269,33	16,06	6,90	9,35
	FEM	221,16	249,27	269,84	16,08	6,93	9,50
	FEMP	227,10	257,44	279,13	15,89	7,81	9,88
Sul	F	258,59	315,58	357,61	0,78	-5,87	-0,57
	P	260,49	306,24	331,23	16,01	12,49	9,78
	EM	223,34	250,93	271,77	18,29	8,73	11,79
	FEM	223,35	251,02	272,02	18,27	8,68	11,68
	FEMP	227,43	256,85	281,60	16,22	7,22	12,35
Centro-Oeste	F	257,53	315,10	342,23	-0,28	-6,35	-15,95
	P	245,80	291,75	324,12	1,32	-2,00	2,67
	EM	213,33	246,12	264,28	8,28	3,92	4,30
	FEM	213,34	246,34	264,72	8,26	4,00	4,38
	FEMP	218,35	253,56	274,59	7,14	3,93	5,34
BRASIL	F	257,81	321,45	358,18			
	P	244,48	293,75	321,45			
	EM	205,05	242,20	259,98			
	FEM	205,08	242,34	260,34			
	FEMP	211,21	249,63	269,25			

Tabela 2 – Resultados Saeb 2015

SAEB 2015		MÉDIA - MATEMÁTICA			DIFERENÇAS "REGIÃO - BRASIL"		
REGIÃO	Dep. Adm.	5º ANO	9º ANO	12º ANO	5º ANO	9º ANO	12º ANO
Norte	F	231,60	302,46	325,58	-26,29	-21,92	-23,61
	P	231,63	276,93	291,67	-11,93	-18,14	-18,21
	EM	198,39	238,41	252,60	-16,14	-10,48	-6,70
	FEM	198,42	238,58	252,88	-16,13	-10,44	-6,76
	FEMP	201,22	241,97	256,15	-18,08	-13,79	-10,85
Nordeste	F	237,98	336,03	320,07	-19,91	11,65	-29,12
	P	229,93	281,92	298,29	-13,63	-13,15	-11,59
	EM	197,48	238,64	250,04	-17,05	-10,25	-9,26
	FEM	197,48	238,73	250,26	-17,07	-10,29	-9,38
	FEMP	203,30	245,20	256,42	-16,00	-10,56	-10,58
Sudeste	F	265,79	323,71	373,87	7,90	-0,67	24,68
	P	249,89	302,26	314,77	6,33	7,19	4,89
	EM	227,92	254,54	264,43	13,39	5,65	5,13
	FEM	227,97	254,69	264,88	13,42	5,67	5,24
	FEMP	232,10	262,63	273,19	12,80	6,87	6,19
Sul	F	261,06	335,91	342,57	3,17	11,53	-6,62
	P	261,26	308,60	319,49	17,70	13,53	9,61
	EM	227,06	258,42	265,82	12,53	9,53	6,52
	FEM	227,06	258,55	266,09	12,51	9,53	6,45
	FEMP	231,26	263,39	274,42	11,96	7,63	7,42
Centro-Oeste	F	245,90	328,88	336,95	-11,99	4,50	-12,24
	P	249,13	296,71	310,67	5,57	1,64	0,79
	EM	215,65	252,79	263,24	1,12	3,90	3,94
	FEM	215,66	253,03	263,56	1,11	4,01	3,92
	FEMP	221,31	260,10	271,42	2,01	4,34	4,42
BRASIL	F	257,89	324,38	349,19			
	P	243,56	295,07	309,88			
	EM	214,53	248,89	259,30			
	FEM	214,55	249,02	259,64			
	FEMP	219,30	255,76	267,00			

Tabela 3 – Resultados Saeb 2017

SAEB 2017		MÉDIA - MATEMÁTICA			DIFERENÇAS "REGIÃO - BRASIL"		
REGIÃO	Dep. Adm.	5º ANO	9º ANO	12º ANO	5º ANO	9º ANO	12º ANO
Norte	F	240,02	313,75	335,69	-18,47	-13,04	-22,28
	P	239,66	284,26	315,58	-12,16	-18,21	-13,90
	EM	201,96	238,05	244,23	-16,60	-11,88	-15,16
	FEM	201,99	238,25	244,50	-16,60	-11,82	-15,19
	FEMP	205,04	242,17	250,29	-19,06	-16,19	-19,45
Nordeste	F	256,20	338,47	337,47	-2,29	11,68	-20,50
	P	236,10	286,38	317,91	-15,72	-16,09	-11,57
	EM	201,34	238,56	250,34	-17,22	-11,37	-9,05
	FEM	201,35	238,65	250,53	-17,24	-11,42	-9,16
	FEMP	207,78	245,96	258,80	-16,32	-12,40	-10,94
Sudeste	F	264,02	325,27	369,41	5,53	-1,52	11,44
	P	261,49	312,31	335,16	9,67	9,84	5,68
	EM	231,70	255,64	265,06	13,14	5,71	5,67
	FEM	231,74	255,81	265,44	13,15	5,74	5,75
	FEMP	237,33	266,64	276,66	13,23	8,28	6,92
Sul	F	257,05	332,06	363,80	-1,44	5,27	5,83
	P	265,17	312,57	335,11	13,35	10,10	5,63
	EM	231,42	263,26	269,59	12,86	13,33	10,20
	FEM	231,43	263,38	269,97	12,84	13,31	10,28
	FEMP	235,79	269,47	281,03	11,69	11,11	11,29
Centro-Oeste	F	240,04	329,83	351,57	-18,45	3,04	-6,40
	P	253,67	298,78	327,87	1,85	-3,69	-1,61
	EM	220,98	255,77	266,44	2,42	5,84	7,05
	FEM	220,98	255,94	266,66	2,39	5,87	6,97
	FEMP	226,42	262,90	276,75	2,32	4,54	7,01
BRASIL	F	258,49	326,79	357,97			
	P	251,82	302,47	329,48			
	EM	218,56	249,93	259,39			
	FEM	218,59	250,07	259,69			
	FEMP	224,10	258,36	269,74			

ANEXO D – Propostas de atividades com material concreto

Neste anexo, práticas de atividades com o uso de material concreto são propostas para que professores possam utilizar em suas aulas, de forma a colaborar no aprendizado de seus estudantes.

Prática 1 - Mesma soma em duas parcelas

O procedimento consiste em escolher um material concreto, sejam palitos de fósforo, grãos de feijão, pequenas pedras, tampinhas de garrafas (vidro ou PET) etc. Por exemplo: escolhendo grãos de feijão.

(A) Duas parcelas de 1 a 10

- 1) 1 é igual a:
 $1 + 0$ ou $0 + 1$
- 2) 2 é igual a:
 $2 + 0$ ou $1 + 1$ ou $0 + 2$
- 3) 3 é igual a:
 $3 + 0$ ou $2 + 1$ ou $1 + 2$ ou $0 + 3$
- 4) 4 é igual a:
 $4 + 0$ ou $3 + 1$ ou $2 + 2$ ou $1 + 3$ ou $0 + 4$
- 5) 5 é igual a:
- 6) 6 é igual a:
- 7) 7 é igual a:
- 8) 8 é igual a:
- 9) 9 é igual a:
- 10) 10 é igual a:

A partir desses exemplos, o estudante deve dar continuidade a esse tipo de exercício, de modo a praticar constantemente, aprimorando a compreensão relativa à representação de cada um dos números em duas parcelas.

(B) Duas parcelas de 10 a 100

Aqui, o aluno deve elaborar dez grupos com 10 grãos de feijão cada um. Assim, os exercícios seguintes serão tratados com parcelas equivalentes a dezenas.

- 1) 10 é igual a:
 $10 + 0$ ou $0 + 10$
- 2) 20 é igual a:
- 3) 30 é igual a:
- 4) 40 é igual a:
- 5) 50 é igual a:

- 6) 60 é igual a:
- 7) 70 é igual a:
- 8) 80 é igual a:
- 9) 90 é igual a:
- 10) 100 é igual a:

Assim como nas atividades anteriores, a partir desses exemplos, o aluno deve dar continuidade a esse tipo de exercício, praticando regularmente e aprimorando a compreensão relativa à representação de cada uma das dezenas em duas parcelas (em dezenas).

Prática 2 - Mesma soma em três parcelas

O procedimento é o mesmo da atividade 1, escolhendo uma opção de material concreto (por exemplo: palitos de fósforo). No entanto, agora a soma deve ser expressa em três parcelas.

(A) Três parcelas de 1 a 10

- 1) 1 é igual a:
 $1 + 0 + 0$ ou $0 + 1 + 0$ ou $0 + 0 + 1$
- 2) 2 é igual a:
- 3) 3 é igual a:
- 4) 4 é igual a:
- 5) 5 é igual a:
- 6) 6 é igual a:
- 7) 7 é igual a:
- 8) 8 é igual a:
- 9) 9 é igual a:
- 10) 10 é igual a:

A partir desses exemplos, o estudante deve dar continuidade a esse tipo de exercício, de modo a praticar constantemente, aprimorando a compreensão relativa à representação de cada um dos números em três parcelas.

(B) Três parcelas de 10 a 100

Aqui, o estudante deve elaborar dez grupos com 10 palitos de fósforo cada um. Assim, os exercícios seguintes serão tratados com parcelas equivalentes a dezenas.

- 1) 10 é igual a:
 $10 + 0 + 0$ ou $0 + 10 + 0$ ou $0 + 0 + 10$
- 2) 20 é igual a:
- 3) 30 é igual a:
- 4) 40 é igual a:

- 5) 50 é igual a:
- 6) 60 é igual a:
- 7) 70 é igual a:
- 8) 80 é igual a:
- 9) 90 é igual a:
- 10) 100 é igual a:

Assim como nas atividades anteriores, a partir desses exemplos, o estudante deve dar continuidade à prática repetitiva desse tipo de exercício, aprimorando a compreensão relativa à representação de cada uma das dezenas em três parcelas (em dezenas).

Prática 3 – Praticando diferenças positivas (em \mathbb{N})

As propostas incluem a escolha de um ou dois tipos de material concreto, de modo a exercitar a ideia de “tirar”, “ficar devendo” ou “anular”.

(A) “Tirando” em UNIDADES

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: a partir de 11 palitos de fósforo, tirar 7 e verificar a quantidade de palitos restante, ou seja, 4 palitos de fósforo.

De um lado: 11 palitos de fósforo e 7 palitos de fósforo separados entre si.

Do outro lado: 4 palitos de fósforo como resultado do procedimento.

Atividades propostas, a partir de:

- 1) 11 palitos de fósforo, tirar 5 e verificar a quantidade restante, ou seja, 6 palitos.
- 2) 12 palitos de fósforo, tirar 8 e verificar a quantidade restante, ou seja, 4 palitos.
- 3) 9 palitos de fósforo, tirar 6 e verificar a quantidade restante, ou seja, 3 palitos.
- 4) 14 palitos de fósforo, tirar 7 e verificar a quantidade restante, ou seja, 7 palitos.
- 5) 10 palitos de fósforo, tirar 4 e verificar a quantidade restante, ou seja, 6 palitos.

Sugere-se que o professor proponha pelo menos mais cinco atividades semelhantes para que o estudante possa processar o raciocínio de “tirar” uma parte de forma concreta, desenvolvendo a visualização do processo.

(B) “Tirando” em DEZENAS

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: a partir de 8 dezenas de palitos de fósforo, tirar 4 dezenas e verificar a quantidade de dezenas de palitos restante, ou seja, 4 dezenas de palitos de fósforo.

De um lado: 8 e 4 dezenas de palitos de fósforo separados entre si.

Do outro lado: 4 dezenas de palitos de fósforo como resultado do procedimento.

Atividades propostas, a partir de:

- 1) 6 dezenas de palitos de fósforo, tirar 2 dezenas e verificar a quantidade de dezenas palitos restante, ou seja, 4 dezenas de palitos de fósforo.
- 2) 7 dezenas de palitos de fósforo, tirar 5 dezenas e verificar a quantidade de dezenas palitos restante, ou seja, 2 dezenas de palitos de fósforo.
- 3) 8 dezenas de palitos de fósforo, tirar 5 dezenas e verificar a quantidade de dezenas palitos restante, ou seja, 3 dezenas de palitos de fósforo.
- 4) 9 dezenas de palitos de fósforo, tirar 4 dezenas e verificar a quantidade de dezenas palitos restante, ou seja, 5 dezenas de palitos de fósforo.
- 5) 6 dezenas de palitos de fósforo, tirar 5 dezenas e verificar a quantidade de dezenas palitos restante, ou seja, 1 dezena de palitos de fósforo.

Sugere-se que o professor proponha pelo menos mais cinco atividades semelhantes para que o estudante possa processar o raciocínio de “tirar” uma parte de forma concreta, desenvolvendo a visualização do processo.

(C) “Tirando” em UNIDADES e DEZENAS

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: a partir de 4 dezenas mais 3 unidades de palitos de fósforo, tirar 2 dezenas mais 2 unidades de palitos e verificar a quantidade de palitos restante, ou seja, 2 dezenas mais 1 unidade de palitos de fósforo.

De um lado: um grupo de 4 dezenas mais 3 unidades de palitos de fósforo e outro grupo de 2 dezenas mais 2 unidades de palitos de fósforo.

Do outro lado: 2 dezenas mais 1 unidade de palitos de fósforo.

Atividades propostas, a partir de:

- 1) 6 dezenas mais 8 unidades de palitos de fósforo, tirar 4 dezenas mais 2 unidades de palitos e verificar a quantidade de palitos restante, ou seja, 2 dezenas mais 6 unidades de palitos de fósforo.
- 2) 5 dezenas mais 7 unidades de palitos de fósforo, tirar 1 dezena mais 5 unidades de palitos e verificar a quantidade de palitos restante, ou seja, 4 dezenas mais 2 unidades de palitos de fósforo.
- 3) 6 dezenas mais 5 unidades de palitos de fósforo, tirar 3 dezenas mais 4 unidades de palitos e verificar a quantidade de palitos restante, ou seja, 3 dezenas mais 1 unidade de palitos de fósforo.
- 4) 8 dezenas mais 7 unidades de palitos de fósforo, tirar 5 dezenas mais 4 unidades de palitos e verificar a quantidade de palitos restante, ou seja, 3 dezenas mais 3 unidades de palitos de fósforo.

- 5) 7 dezenas mais 4 unidades de palitos de fósforo, tirando 4 dezenas mais 9 unidades de palitos de fósforo, restam:
- 6) 4 dezenas mais 5 unidades de palitos de fósforo, tirando 3 dezenas mais 6 unidades de palitos de fósforo, restam:

Sugere-se que o professor proponha pelo menos mais quatro atividades semelhantes para que o estudante possa processar o raciocínio de “tirar” uma parte de forma concreta, desenvolvendo a visualização do processo.

Prática 4 – Praticando diferenças negativas (em \mathbb{Z})

Esta atividade pode ser proposta com o mesmo matéria da atividade 3 (no caso, palitos de fósforo). No entanto, cada situação agora apresentará um primeiro termo inferior ao segundo.

(A) “Ficar devendo” em UNIDADES

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: a partir de 8 palitos de fósforo, tirar 13, de modo a “ficar devendo” 5 palitos de fósforo.

De um lado: 8 palitos de fósforo e 13 palitos de fósforo separados entre si por “tirando”.

Do outro lado: “dívida” de 5 palitos de fósforo como resultado do procedimento.

Atividades propostas, a partir de:

- 1) 4 palitos de fósforo, tirar 6, de modo a “ficar devendo” 2 palitos de fósforo.
- 2) 7 palitos de fósforo, tirar 11, de modo a “ficar devendo” 4 palitos de fósforo.
- 3) 6 palitos de fósforo, tirar 9, de modo a “ficar devendo”:
- 4) 9 palitos de fósforo, tirar 14, de modo a “ficar devendo”:
- 5) 12 palitos de fósforo, tirar 17, de modo a “ficar devendo”:

Sugere-se que o professor proponha pelo menos mais cinco atividades semelhantes para que o estudante possa processar o raciocínio de “tirar” uma parte de forma concreta, desenvolvendo a visualização do processo.

(B) “Ficar devendo” em DEZENAS

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: a partir de 3 dezenas de palitos de fósforo, tirar 5 dezenas, de modo a “ficar devendo” 2 dezenas de palitos de fósforo.

De um lado: 3 e 5 dezenas de palitos de fósforo separados entre si por “tirando”.

Do outro lado: “dívida” de 2 dezenas de palitos de fósforo como resultado do procedimento.

Atividades propostas, a partir de:

- 1) 6 dezenas de palitos de fósforo, tirar 10 dezenas, de modo a “ficar devendo” 4 dezenas de palitos de fósforo.
- 2) 3 dezenas de palitos de fósforo, tirar 9 dezenas, de modo a “ficar devendo” 6 dezenas de palitos de fósforo.
- 3) 8 dezenas de palitos de fósforo, tirar 9 dezenas, de modo a “ficar devendo” 1 dezena de palitos de fósforo.
- 4) 5 dezenas de palitos de fósforo, tirar 8 dezenas, de modo a “ficar devendo”:
- 5) 6 dezenas de palitos de fósforo, tirar 11 dezenas, de modo a “ficar devendo”:

Sugere-se que o professor proponha pelo menos mais cinco atividades semelhantes para que o estudante possa processar o raciocínio de “tirar” uma parte de forma concreta, desenvolvendo a visualização do processo.

(C) “Ficar devendo” em UNIDADES e DEZENAS

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: a partir de 4 dezenas mais 3 unidades de palitos de fósforo, tirar 5 dezenas mais 7 unidades de palitos, de modo a “ficar devendo” 1 dezena mais 4 unidades de palitos de fósforo.

De um lado: um grupo de 4 dezenas mais 3 unidades de palitos de fósforo e outro grupo de 5 dezenas mais 7 unidades de palitos de fósforo separados entre si por “tirando”.

Do outro lado: “dívida” de 1 dezena mais 4 unidades de palitos de fósforo como resultado do procedimento.

Atividades propostas, a partir de:

- 1) 2 dezenas mais 6 unidades de palitos de fósforo, tirar 5 dezenas mais 9 unidades de palitos, de modo a “ficar devendo” 3 dezenas mais 3 unidades de palitos de fósforo.
- 2) 3 dezenas mais 1 unidade de palitos de fósforo, tirar 8 dezenas mais 4 unidades de palitos, de modo a “ficar devendo” 5 dezenas mais 3 unidades de palitos de fósforo.
- 3) 4 dezenas mais 7 unidades de palitos de fósforo, tirar 8 dezenas mais 9 unidades de palitos, de modo a “ficar devendo”:
- 4) 5 dezenas mais 8 unidades de palitos de fósforo, tirar 7 dezenas mais 2 unidades de palitos, de modo a “ficar devendo”:
- 5) 6 dezenas mais 7 unidades de palitos de fósforo, tirar 8 dezenas mais 6 unidades de palitos, de modo a “ficar devendo”:

Sugere-se que o professor proponha pelo menos mais cinco atividades semelhantes para que o estudante possa processar o raciocínio de “tirar” uma parte de forma concreta, desenvolvendo a visualização do processo.

Prática 5 – Praticando diferenças com elementos que se anulam (em \mathbb{Z})

As atividades propostas nas Práticas 3 e 4 consideram que os estudantes conhecem apenas os números naturais e, por último, os números negativos.

A proposta é trabalhar com dois tipos de material concreto, considerando que a junção de cada um deles representa o ZERO – como se um deles anulasse o outro. Por exemplo: uma pedra e uma tampinha se anulam entre si.

O procedimento consiste em escolher dois materiais concretos, sejam palitos de fósforo, grãos de feijão, pequenas pedras, tampinhas de garrafas (vidro ou PET) etc.

Escolhendo grãos de feijão e palitos de fósforo, por exemplo, as atividades seguintes são propostas.

(A) “Brincando” de anular - Anulando em UNIDADES

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: 12 grãos de feijão e 7 palitos de fósforo é igual a 5 grãos de feijão.

De um lado: 12 grãos de feijão e 7 palitos de fósforo.

Do outro lado: 5 grãos de feijão.

Atividades propostas:

- 1) 9 grãos de feijão e 3 palitos de fósforo é igual a 6 grãos de feijão.
- 2) 6 grãos de feijão e 14 palitos de fósforo é igual a 8 palitos de fósforo.
- 3) 3 grãos de feijão e 12 palitos de fósforo é igual:
- 4) 7 grãos de feijão e 3 palitos de fósforo é igual:
- 5) 11 grãos de feijão e 18 palitos de fósforo é igual:
- 6) 12 grãos de feijão e 6 palitos de fósforo é igual:
- 7) 8 grãos de feijão e 15 palitos de fósforo é igual:
- 8) 13 grãos de feijão e 5 palitos de fósforo é igual:
- 9) 7 grãos de feijão e 14 palitos de fósforo é igual:
- 10) 10 grãos de feijão e 2 palitos de fósforo é igual:

(B) “Brincando” de anular - Anulando em DEZENAS

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: 2 dezenas de grãos de feijão e 5 dezenas de palitos de fósforo é igual a 3 dezenas de palitos de fósforo.

De um lado: 2 dezenas de grãos de feijão e 5 dezenas de palitos de fósforo.

Do outro lado: 3 dezenas de palitos de fósforo.

Atividades propostas:

- 1) 2 dezenas de grãos de feijão e 5 dezenas de palitos de fósforo é igual a 3 dezenas de palitos de fósforo.
- 2) 7 dezenas de grãos de feijão e 2 dezenas de palitos de fósforo é igual a 5 dezenas de grãos de feijão.
- 3) 4 dezenas de grãos de feijão e 6 dezenas de palitos de fósforo é igual a 2 dezenas de palitos de fósforo.
- 4) 8 dezenas de grãos de feijão e 2 dezenas de palitos de fósforo é igual a 6 dezenas de grãos de feijão.
- 5) 7 dezenas de grãos de feijão e 5 dezenas de palitos de fósforo é igual a:
- 6) 1 dezena de grãos de feijão e 7 dezenas de palitos de fósforo é igual a:
- 7) 8 dezenas de grãos de feijão e 3 dezenas de palitos de fósforo é igual a:
- 8) 2 dezenas de grãos de feijão e 8 dezenas de palitos de fósforo é igual a:
- 9) 5 dezenas de grãos de feijão e 7 dezenas de palitos de fósforo é igual a:
- 10) 7 dezenas de grãos de feijão e 1 dezena de palitos de fósforo é igual a:

(C) “Brincando” de anular - Anulando UNIDADES e DEZENAS

O estudante deve esquematizar cada atividade proposta conforme o exemplo a seguir:

Atividade exemplo: 2 dezenas mais 3 unidades de grãos de feijão e 5 dezenas mais 4 unidades de palitos de fósforo é igual a 3 dezenas mais 1 unidade de palitos de fósforo.

De um lado: 2 dezenas mais 3 unidades de grãos de feijão e 5 dezenas mais 4 unidades de palitos de fósforo.

Do outro lado: 3 dezenas mais 1 unidade de palitos de fósforo.

Atividades propostas:

- 1) 4 dezenas mais 7 unidades de grãos de feijão e 1 dezena mais 2 unidades de palitos de fósforo é igual a 3 dezenas mais 5 unidades de grãos de feijão.
- 2) 5 dezenas mais 3 unidades de grãos de feijão e 5 dezenas mais 7 unidades de palitos de fósforo é igual a 4 unidades de palitos de fósforo.
- 3) 6 dezenas mais 2 unidades de grãos de feijão e 4 dezenas mais 9 unidades de palitos de fósforo é igual a:
- 4) 4 dezenas mais 9 unidades de grãos de feijão e 6 dezenas mais 6 unidades de palitos de fósforo é igual a:

- 5) 3 dezenas mais 6 unidades de grãos de feijão e 5 dezenas mais 6 unidades de palitos de fósforo é igual a:
- 6) 8 dezenas mais 3 unidades de grãos de feijão e 4 dezenas mais 4 unidades de palitos de fósforo é igual a:

Conforme as atividades propostas, o professor deve propor outras atividades para complementação da aprendizagem.

Prática 6 – Uso do ZERO em operações de subtração

O estudante deverá escolher 2 materiais concretos para representar números positivos e negativos, de modo a exercitar passo-a-passo cada uma das seguintes operações com as respectivas configurações com uso dos materiais escolhidos:

- 1) $34 - 17 = 34 + 0 - 17 = 34 + (3 - 3) - 17 = 34 + 3 - 3 - 17 = (34 + 3) + (-3 - 17) = 37 + (-20) = 37 - 20 = 17 + 20 - 20 = 17$
- 2) $53 - 38 = 53 + (2 - 2) - 38 = 53 + 2 - 2 - 38 = (53 + 2) + (-2 - 38) = 55 + (-40) = 55 - 40 = 15 + 40 - 40 = 15$
- 3) $63 - 47 = 63 + 3 - 3 - 47 = (63 + 3) + (-3 - 50) = 66 + (-50) = 66 - 50 = 16 + 50 - 50 = 16$
- 4) $42 - 18 = (42 + 2) + (-2 - 18) = 44 + (-20) = 44 - 20 = 24 + 20 - 20 = 24$
- 5) $55 - 28 = (55 + 2) - (28 + 2) = 57 - 30 = 27 + 30 - 30 = 27$

Conforme essas atividades, o professor deve propor outras atividades para complementação da aprendizagem.

Importante observar que não há a necessidade de o estudante efetuar todos os passos descritos acima, de modo que deve ser enfatizado a compreensão e o domínio dos procedimentos por parte do estudante.

Prática 7 – Uso do ZERO em operações de adição

O estudante deverá escolher 2 materiais concretos para representar números positivos e negativos, de modo a exercitar passo-a-passo cada uma das seguintes operações com as respectivas configurações com uso dos materiais escolhidos:

- 1) $34 + 17 = 34 - 3 + 17 + 3 = 31 + 20 = 51$
- 2) $58 + 33 = 58 + 2 + 33 - 2 = 60 + 31 = 91$
- 3) $16 + 29 = 16 - 1 + 29 + 1 = 15 + 30 = 45$
- 4) $47 + 35 = 47 + 3 + 35 - 3 = 50 + 32 = 82$

Conforme essas atividades, o professor deve propor outras atividades para complementação da aprendizagem. Ressalta-se que não há a necessidade de o estudante efetuar todos os passos descritos acima. O importante é a prática, a compreensão e o domínio por parte do estudante.

Prática 8 – Aprimorando a multiplicação

O estudante deverá escolher um material concreto (por exemplo: grãos de feijão), pegar uma quantidade determinada desse material e separar em partes iguais. Em seguida, essa formação obtida deve ser traduzida em linguagem matemática apropriada (no caso, em uma multiplicação com 2 fatores – a quantidade de partes e o tamanho de cada parte) com o respectivo resultado (produto).

Importante: o estudante deve tentar obter todas as formações possíveis, ou seja, obter todos os fatores que multiplicados 2 a 2 resultam no mesmo produto.

Proposta de atividades:

- 1) $1 = 1 \times 1$
- 2) $2 = 1 \times 2 = 2 \times 1$
- 3) $3 =$
- 4) $4 =$
- 5) $5 =$
- 6) $6 =$
- 7) $7 =$
- 8) $8 =$
- 9) $9 =$
- 10) $10 =$

Continuando com o mesmo material concreto, o estudante deverá dar prosseguimento ao aprimoramento, realizando as atividades de obter todas as formações possíveis e expressar cada uma delas em sua respectiva linguagem matemática (ou seja, obter todos os fatores que multiplicados 2 a 2 resultam no mesmo produto).

- 1) $10 =$
- 2) $20 =$
- 3) $30 =$
- 4) $40 =$
- 5) $50 =$
- 6) $60 =$
- 7) $70 =$
- 8) $80 =$
- 9) $90 =$
- 10) $100 =$

Prática 9 – Multiplicação e Divisão por 5

O estudante deve exercitar as ideias apresentadas nos itens 5.6.2 e 5.6.3 nas seguintes atividades:

A) Obtenção do produto:

- 1) $28 \times 5 = (28 \times (1/2)) \times 10 = 14 \times 10 = 140$ ou
 $28 \times 5 = (28 \times 10) \div 2 = 280 \div 2 = 140$
- 2) $36,4 \times 5 = (36,4 \times (1/2)) \times 10 = 18,2 \times 10 = 182$ ou
 $36,4 \times 5 = (36,4 \times 10) \div 2 = 364 \div 2 = 182$
- 3) $47 \times 5 =$
- 4) $78 \times 5 =$
- 5) $2,34 \times 5 =$
- 6) $245 \times 5 =$
- 7) $44,8 \times 5 =$
- 8) $341 \times 5 =$
- 9) $0,78 \times 5 =$
- 10) $105 \times 5 =$

À medida que o estudante pratica esses procedimentos, verificará que em algumas situações um procedimento é mais prático que o outro.

B) Obtenção do quociente:

- 1) $78 \div 5 = (78 \times 2) \div 10 = 156 \div 10 = 15,6$ ou
 $78 \div 5 = (78 \div 10) \times 2 = 7,8 \times 2 = 15,6$
- 2) $134 \div 5 = (134 \times 2) \div 10 = 268 \div 10 = 26,8$ ou
 $134 \div 5 = (134 \div 10) \times 2 = 13,4 \times 2 = 26,8$
- 3) $47 \div 5 =$
- 4) $78 \div 5 =$
- 5) $2,34 \div 5 =$
- 6) $249 \div 5 =$
- 7) $44,8 \div 5 =$
- 8) $341 \div 5 =$
- 9) $0,78 \div 5 =$

$$10) 727 \div 5 =$$

Assim como na multiplicação por 5, à medida que o estudante pratica esses procedimentos, verificará que em algumas situações um procedimento é mais prático que o outro.

Prática 10 – Resolução de Equações

A partir das ideias apresentadas no item 5.8 e o uso de materiais concretos, o professor supervisionará as seguintes atividades para que os estudantes possam entender e aprofundar as ideias relacionadas com a resolução de equações do primeiro grau.

Atividades propostas:

$$1) 3x - 12 = 16 - x$$

$$2) x + 32 = 4x + 5$$

$$3) 4x + 5 - x = 4x$$

$$4) x - 4 = 24 - x$$

$$5) 12x + 42 = 2 + 8x$$

$$6) 21 - 5x = -3x - 3$$

Nota: conforme visto no item 5.8, podem ser utilizados três tipos de materiais concretos, de modo que um deles representa a variável x e os demais representam os números positivo e negativo.

Sugere-se que o professor trabalhe variados exercícios de resolução de equações, desenvolvendo as habilidades operacionais dos estudantes. Essas atividades devem propiciar o entendimento da ideia de resolver equações e o domínio dos procedimentos.