Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Provas Bijetivas em Partições: uma proposta de abordagem no ensino básico

por

Rodrigo Alves de Oliveira

Orientador: Matheus Bernardini de Souza

Brasília
2020

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Provas Bijetivas em Partições: uma proposta de abordagem no ensino básico

por

Rodrigo Alves de Oliveira*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 13 de março de 2020.

Comissão Examinadora:

____
Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FGA/UnB (Orientador)

____
Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins - DMPA/CCENS/UFES

____
Prof. Dr. Vinícius de Carvalho Rispoli - FGA/UnB

*O autor foi bolsista pela CAPES durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alves de Oliveira, Rodrigo
Ap Provas Bijetivas em Partições: uma proposta de abordagem no ensino básico / Rodrigo Alves de Oliveira; orientador Matheus Bernardini de Souza. -- Brasília, 2020.
62 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. partições. 2. provas bijetivas. 3. gráfico de Ferrers. 4. representações matriciais. I. Bernardini de Souza, Matheus, orient. II. Título.

À minha família

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, pela força que me dá todos os dias.

Aos meus familiares, que sempre me apoiaram nos momentos difíceis. Sempre que pensei em desistir, deram-me força para continuar.

Ao professor Matheus Bernardini de Souza, por ter me aceitado como orientando de mestrado. Agradeço por todo o tempo e paciência no esclarecimento das dúvidas, pelo seu comprometimento, profissionalismo e pelas duas disciplinas muito bem ministradas no PROFMAT.

Aos demais membros da banca examinadora, formada pela professora Rafaela Fernandes do Prado e pelos professores Victor do Nascimento Martins e Vinícius de Carvalho Rispoli, por terem aceitado avaliar o meu trabalho.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB. Em especial, aos professores que lecionaram no programa PROFMAT em 2018 e 2019.

Aos meus amigos da turma do PROFMAT 2018, por me proporcionarem momentos maravilhosos e por todo o apoio em grupos de estudos, que foram fundamentais para aprovação nas provas e no exame de qualificação.

À Secretaria de Educação do Distrito Federal, que me concedeu licença remunerada para realização do mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é usar a revisão bibliográfica sobre a Teoria das Partições para construir roteiros de atividades que, com o auxílio de materiais concretos manipuláveis, possam ser utilizados por professores dos ensinos fundamental II e médio. Esses roteiros foram construídos seguindo a cronologia do texto, que começa pela definição de partição, que é a forma de escrever um número inteiro positivo n usando adições com soma igual a n, na qual a ordem das parcelas não é relevante. O texto segue por algumas identidades em partições que têm em comum o fato de suas demonstrações serem feitas por provas bijetivas e termina em representações matriciais, que é uma forma de representar uma partição irrestrita como uma matriz de duas linhas.

Para facilitar o uso das atividades pelos professores será construída uma tabela antes das atividades, na qual serão listados o público-alvo, os roteiros, os objetos de conhecimentos e as habilidades por eles abordados, utilizando como referência a Base Nacional Comum Curricular de 2017. Alguns dos objetos de conhecimentos abordados nas atividades são: contagem, representação binária, potenciação, função e matrizes. Esses objetos de conhecimento serão trabalhados nos roteiros de forma construtiva por meio de materiais concretos manipuláveis.

Palavras-chave: partições, provas bijetivas, gráfico de Ferrers, representações matriciais.

Abstract

The main goal of this work is to use bibliographic review on the Theory of Partitions to build guides of activities that, with the help of concrete manipulable materials, can be used by teachers of elementary school and high school. These guides were constructed following the chronology of the text, which starts with the definition of integer partition, which is the way of writing a positive integer n using additions and such that the sum is equal to n, the order of the parcels does not matter. It goes through some identities in partitions that have in common the fact that their demonstrations are made by bijective proof and ends in matrix representations, which is a way of representing an unrestricted partition as a two-line matrix.

In order to make the activities more clear for teachers, a table is built with the target audience, the activities, the guides and objects of knowledge and skills they cover, using the Common National Curriculum Base of 2017 as reference. Some of the objects of knowledge covered in the activities are: counting, binary representation, potentiation, function and matrices. These objects of knowledge will be worked on in the guides in a constructive way by using manipulable concrete materials.

Keywords: partitions, bijective proofs, Ferrers graphs, matrix representations.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como tema principal partições de um inteiro positivo. Uma partição de um inteiro positivo n é uma maneira de representá-lo como adições de inteiros positivos, na qual a ordem das parcelas não são levadas em consideração e sua soma é n. O que se almeja com este trabalho é fazer uma revisão bibliográfica sobre produções realizadas acerca da Teoria de Partições, encontrando, assim, identidades e resultados que possam ser utilizados nos ensinos fundamental II e médio. Além disso, pretende-se contribuir com a elaboração de atividades fazendo uso de materiais concretos manipuláveis com possíveis aplicações no cotidiano escolar, tanto em identidades de partições quanto em matrizes. Para tanto, faz-se necessário conhecer um pouco da história das partições. Acerca do estudo das partições de números inteiros, não é possível afirmar ao certo quando tiveram início os primeiros trabalhos nessa área. Sabe-se, porém, que Leonhard Euler realizou as contribuições mais significativas para a área que hoje é conhecida como Teoria de Partições, para mais detalhes, consulte [1]. No ano de 1748, Euler provou uma grande diversidade de identidades de partições, dentre as quais se destaca o Teorema de Euler, em que ele afirma que o número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em de partes ímpares.

Nos dois séculos e meio que se seguiram, nomes como Gauss, Cauchy, Jacobi, Weirstrass, Sylvester, Heine, Lebesgue, Schur, MacMahon e Ramanujan provaram uma grande quantidade de identidades em partições [2]. Devido à sua natureza multidisciplinar, foi difícil encaixar a Teoria de Partições em uma área específica de pesquisa. Ela se originou como uma área da Análise, logo depois se tornou uma parte da Teoria dos Números. Mais tarde, passou a fazer parte da Análise Combinatória. Posteriormente, foi considerada parte da Matemática Discreta e Combinatória. Atualmente, parece ter adquirido caráter próprio.

Outro nome importante no ramo de Teoria de Partições foi Sylvester que, com a colaboração de seus alunos, dentre os quais se destaca Franklin, escreveu "A constructive Theory of Partitions, Arranged in Three Acts, an Interact and Exodion"em 1882, sendo este um longo estudo dos resultados do próprio Sylvester e seus colaboradores. Foi Sylvester [3], quem propôs uma representação gráfica para partições, os chamados diagramas ou gráficos de Ferrers. Baseando-se nestes diagramas, Franklin obteve a demonstração combinatória do Teorema dos Números Pentagonais de Euler. Após a publicação da demonstração de Franklin, o estudo da Teoria de Partições entrou em um período de ascensão conhecido como a "era dourada", em que vários trabalhos importantes foram produzidos. Contudo, os resultados mais expressivos na área, nesse período, foram obtidos por Hardy e Ramanujan [4]. Eles foram responsáveis por encontrar uma formúla que fornecia um valor aproximado para o número de partições de n, que algum tempo depois seria aperfeiçoada por Rademacher [5], ficando conhecida como a fórmula de Hardy-Rademacher-Ramanujan. As descobertas de Ramanujan impactaram fortemente o estudo da Teoria dos Números. Ele foi responsável por conjecturar uma enorme quantidade de famílias de congruências, como citado em [1] provadas posteriormente por Atkin e Watson. A Teoria dos Números ainda é uma área repleta de desafios e possibilidades.

Agora que traçamos este breve contexto histórico, veremos como esse trabalho foi divido:

- **Capítulo 1: Partições**. Neste capítulo será introduzida a definição de partição. Em seguida, serão listados alguns valores da função $p(n)$ para exemplificar seu crescimento e, para finalizar, será demonstrado que a função $p(n)$ é limitada por F_{n+1}, em que (F_n) é a sequência de Fibonacci.

- **Capítulo 2: Provas Bijetivas de Identidades em Partições**. Neste capítulo serão enunciadas e demonstradas algumas identidades em partições. Além disso, definiremos a representação gráfica de uma partição, conhecida como gráfico de Ferrers, e faremos algumas de suas aplicações nas provas bijetivas.

- **Capítulo 3: Representações Matriciais em Partições**. Neste capítulo será definido o símbolo de Frobenius de uma partição. Em seguida, serão enunciados e demonstrados alguns teoremas, cujo foco principal será a representação de partições por matrizes de duas linhas.

- **Capítulo 4: Atividades com Partições**. Neste capítulo serão sugeridas atividades em partições, para que professores possam, em sala de aula, conduzir os estudantes ao entendimento de resultados em partições, mesmo sem o conhecimento da definição de função ou bijeção. O foco principal das atividades estará nas definições e teoremas dos Capítulos 1, 2 e 3.

Capítulo 1

Partições

Neste capítulo, será introduzida a definição de partição de um inteiro positivo n. Em seguida, serão listados alguns valores da função $p(n)$ para exemplificar seu crescimento e, para finalizar, será demonstrado que a função $p(n)$ é limitada pela sequência de Fibonacci. Esse capítulo tem como base os trabalhos [1], [6], [7], [8] e [9].

1.1 Partições de inteiros

Definição 1.1 *Uma partição de um número inteiro positivo n é a coleção não ordenada de números inteiros positivos, tais que sua soma é n, ou seja, $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$, tal que os λ_i's são partes da partição de n, com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$. Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n.*

Exemplo 1.1 *As partições de* $1, 2, 3, 4, 5$ *e* 6 *estão listadas abaixo:*

1	2	3	4	5	6
	$1+1$	$2+1$	$3+1$	$4+1$	$5+1$
		$1+1+1$	$2+2$	$3+2$	$4+2$
			$2+1+1$	$3+1+1$	$4+1+1$
			$1+1+1+1$	$2+2+1$	$3+3$
				$2+1+1+1$	$3+2+1$
				$1+1+1+1+1$	$3+1+1+1$
					$2+2+2$
					$2+2+1+1$
					$2+1+1+1+1$
					$1+1+1+1+1+1$

Ao contar as partições do Exemplo 1.1, encontramos $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ e $p(6) = 11$. Se continuássemos a listar as partições de 7, 8, 9 e assim por diante, iríamos perceber o quão trabalhoso seria, uma vez que $p(n)$ cresce expressivamente à medida que n cresce. Para ilustrar esse crescimento, temos a Tabela 1.1, obtida em [6].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	200	5000
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	3.972.999.029.388	$\backsimeq 1,698 \times 10^{74}$

Tabela 1.1: Alguns valores de $p(n)$

Na tentativa de encontrar uma fórmula para a função $p(n)$, vários matemáticos estudaram seu comportamento em busca de padrões. Como citado em [1], o primeiro a conseguir um avanço nesse sentido foi Euler no século XVIII, que, ao usar função geradora, encontrou uma fórmula recursiva para $p(n)$, a qual, durante 150 anos, foi a ferramenta mais utilizada para encontar $p(n)$. Em 1919, Ramanujan e Hardy, criaram uma fórmula assintótica para $p(n)$. Nessa fórmula, entramos com n e recebemos um valor que se aproxima de $p(n)$, mas nunca o valor real de $p(n)$. Em 1937, Rademacher convidou Hardy e Ramnujan para uma conferência na Universidade Estadual da Pensilvânia. Rademacher, na preparação da conferência, estudando a fórmula assintótica de $p(n)$, descobriu um padrão entre o valor assintótico de $p(n)$ e o valor real de $p(n)$. Usando esse padrão, Rademacher tornou possível calcular $p(n)$ de um inteiro positivo n de forma exata. Porém, essa fórmula não era um dispositivo prático, visto que, para calcular um número inteiro, era preciso determinar o valor de uma série. Mais informações sobre essa formúla podem ser encontradas no capitúlo 2 em [7].

Em setembro de 2010, Ono e Kent [8, 9], perceberam que as partições tinham um comportamento fractal. Com base nessa ideia, Ono e Kent chegaram a uma fórmula exata finita para $p(n)$. Após a descoberta da fórmula, Ken Ono afirmou: "Nunca mais ninguém vai usar partições em criptografia, porque sabemos agora que elas não são aleatórias, mas sim completamente previsíveis. Não podemos continuar a fingir que são misteriosas"

1.2 Cota superior para $p(n)$

Nesta seção, demonstraremos que a função $p(n)$ é monótona crescente e, além disso, que a função $p(n)$ é limitada por F_{n+1}, em que (F_n) é a sequência de Fibonacci.

Notação 1.1 *Usaremos $p(n|[\text{condição}])$ para representar a quantidade de partições de um inteiro n, que tenham como propriedade a "condição".*

Proposição 1.1 *Seja n um inteiro positivo. Então,*

$$p(n) > p(n-1), \forall n \geq 2.$$

Demonstração: Seja λ uma partição do inteiro $(n-1)$, com $n-1 = \lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_r$. Acrescentando uma parte λ_{r+1} de valor 1, temos uma partição λ' do inteiro n. Esse processo transforma cada partição de $(n-1)$ em partição de n, tal que 1 é parte. Note que a forma como a função foi construída garante a injetividade da função. Inversamente, cada partição de n tal que 1 é parte, pode ser transformada em uma partição de $n-1$, basta retirar uma parte igual a 1. Portanto, a bijeção está provada e

$$p(n-1) = p(n|\text{ 1 é parte}). \tag{1.1}$$

Note que $p(n) = p(n|\text{ 1 é parte}) + p(n|\text{ 1 não é parte})$. Usando (1.1) e o fato de $p(n|\text{ 1 não é parte}) > 0$, temos, para todo $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n|\text{1 é parte}) + p(n|\text{1 não é parte}) \\ &= p(n-1) + p(n|\text{1 não é parte}) > p(n-1). \end{aligned}$$

Portanto, $p(n)$ é estritamente crescente.

■

Precisamos de alguns resultados antes de mostrar que a sequência de Fibonacci controla o crescimento de $p(n)$. Vamos partir da equação $p(n) = p(n-1) + p(n|\text{1 não é parte})$, com $n \geq 2$, e verificar como $p(n|\text{1 não é parte})$ se compara com $p(n-2)$. Para fazer essa comparação, vamos provar a seguinte identidade:

Proposição 1.2 *Seja n um inteiro positivo. Então,*

$$p(n-2) = p(n|\textit{existe ao menos uma parte } 2).$$

Demonstração: Seja λ uma partição do inteiro $(n-2)$, com $n-2 = \lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_r$. Acrescentando uma parte λ_{r+1} de valor 2, temos uma partição λ' do inteiro n. Esse processo transforma cada partição de $(n-2)$ em partição de n, tal que exista ao menos um 2 como parte. Note que a forma como a função foi construída garante a injetividade da função. Inversamente, cada partição de n tal que 2 é parte, pode ser transformada em uma partição de $n-2$, basta retirar uma parte igual a 2. Portanto, a bijeção está provada.

■

Utilizando a Proposição 1.2, comparar $p(n|1$ não é parte$)$ com $p(n-2)$ é equivalente a comparar $p(n|1$ não é parte$)$ com $p(n|$existe ao menos uma parte $2)$. Assim, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 1.3 *Seja n um inteiro positivo. Então,*

$$p(n|1 \textit{ não é parte}) \leq p(n|\textit{existe ao menos uma parte } 2).$$

Demonstração: Denotaremos por A e B, respectivamente, os conjuntos formados pelas partições de n tal que 1 não é parte, e partições de n que contenham ao menos uma parte 2. Para provar a desigualdade, basta exibirmos uma função de A em B que seja injetiva. Se o elemento do conjunto A possuir ao menos uma parte de tamanho 2, não há o que fazer, visto que esse elemento já possui um correspondente no conjunto B (via identidade). Caso o elemento do conjunto A não possua uma parte igual a 2, aplicaremos a operação: transformar a menor parte em uma parte 2 e as demais partes 1. Observe que, ao exibir a função, garantimos a correspondência de A em B. Porém, para garantir a injetividade da função, é preciso que essas correspondências sejam distintas. Para exibir a função, os elementos do conjunto A foram divididos em dois subconjuntos: um em que 2 é parte da partição e outro em que o 2 não é parte da partição. Note que duas partições distintas em que 2 é parte da partição possuem correspondentes distintos no conjunto B. Olhando agora para os elementos de A, em que 2 não é parte, ao aplicar a operação descrita na construção da função, garantimos que os correspondentes em B sejam distintos das correspondências do subconjunto anterior, uma vez que todas as partições possuem 1 como parte. Além disso, o fato de partições que terminam com a mesma parte possuir alguma parte distinta garante que os correspondentes dos elementos de A em que 2 não é parte em B sejam distintas entre si. Logo, a injetividade de A em B está provada.

■

Combinando a desigualdade da Proposição 1.3 acima com a equação

$$p(n) = p(n-1) + p(n|1 \text{ não é parte}), \text{temos:}$$

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2), \forall n \geq 2. \tag{1.2}$$

Agora provaremos que $p(n)$ é limitada pela sequência de Fibonacci.

Definição 1.2 *A sequência de Fibonacci* $(F_0, F_1, F_2, \dots)$ *é definida recursivamente por:*

$$\begin{cases} F_0 = 0 \ e \ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

.

Teorema 1.1 *Para todo inteiro positivo* n*, temos* $p(n) \leq F_{n+1}$*, em que* F_{n+1} *é o* $(n+1)$*-ésimo número de Fibonacci.*

Demonstração: Vamos provar por indução em n. Temos que $p(1) = F_2 = 1$. Logo, o teorema é válido para $n = 1$. Seja k um inteiro maior que ou igual a 2 e suponha que $p(m) \leq F_{m+1}$ para todo $m \leq k-1$. Por hipótese de indução, $p(k-1) \leq F_k$ e $p(k-2) \leq F_{k-1}$. Por (1.2), temos $p(k) \leq p(k-1) + p(k-2)$. Por transitividade, $p(k) \leq F_k + F_{k-1}$. Pela definição da sequência de Fibonacci, concluimos que $p(k) \leq F_{k+1}$, como queríamos provar.

∎

Capítulo 2

Provas Bijetivas de Identidades em Partições

Neste capítulo, serão enunciadas e demonstradas algumas identidades em partição. Além disso, definiremos a representação gráfica de uma partição conhecida como gráfico de Ferrers e algumas de suas aplicações nas provas bijetivas. Este capítulo tem como base os trabalhos [1], [10], [11] e [12].

2.1 Operações em partições

Nesta seção, definiremos duas operações que serão utilizadas na demonstração dos próximos teoremas. A primeira operação "adicionar"consiste em adicionar as partes iguais aos pares, obtendo, assim, uma nova partição. Esse procedimento pode ser usado um número finito de vezes, visto que o número de partes se reduz a cada operação.

Exemplo 2.1 *Usando a operação "Adicionar"na partição* $5+5+5+3+3+2+2+2+2$, *temos:*

$$\begin{aligned} 5+5+5+3+3+2+2+2+2 &\mapsto (5+5)+5+(3+3)+(2+2)+(2+2) \\ &= 10+6+5+4+4 \\ &\mapsto 10+6+5+(4+4) \\ &= 10+8+6+5. \end{aligned}$$

A segunda operação "dividir"consiste em dividir por 2 as partes pares, uma a uma, formando uma nova partição. Esse procedimento pode ser usado um número finito de vezes, até que a partição não tenha partes pares.

Exemplo 2.2 *Usando a operação "dividir"na partição* $10+8+6+5$*, temos:*

$$\begin{aligned} 10+8+6+5 &\mapsto (5+5)+(4+4)+(3+3)+5 \\ &= 5+5+5+4+4+3+3 \\ &\mapsto 5+5+5+(2+2)+(2+2)+3+3 \\ &= 5+5+5+3+3+2+2+2+2. \end{aligned}$$

Provar uma identidade em partições consiste em mostrar a existência de uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, os quais são formados por partições, mostrando, assim, que a cardinalidade entre os dois conjuntos é igual. Vejamos algumas identidades em que as operações "adicionar/dividir"são usadas em suas demonstrações, denotando por A e B, respectivamente, os conjuntos formados pelas partições do primeiro e segundo lado da igualdade e aplicando as operações para levar cada elemento de A em B e de B em A. Começaremos com uma identidade que foi provada pela primeira vez por Euler em 1748 [1].

Teorema 2.1 *Seja* n *um inteiro positivo. Então,*

$$p(n|\textit{partes são ímpares}) = p(n|\textit{partes são distintas}).$$

Demonstração: Denotaremos por A e B, respectivamente, os conjuntos formados pelas partições de n que possuem partes ímpares, e partições de n que possuem partes distintas. Para a prova do teorema, primeiro exibiremos uma função injetiva de A em B. Se o elemento do conjunto A possuir apenas partes distintas, não há o que fazer, visto que esse elemento já possui um correspondente no conjunto B. Caso o elemento do conjunto A possua ao menos um par de partes iguais, aplicaremos a operação "adicionar". Se a nova partição ainda possuir partes iguais, repetiremos a operação até que a partição tenha apenas partes distintas. Como o número de partes se reduz a cada operação, podemos fazer esse procedimento um número finito de vezes, até restar apenas partes distintas.

De forma recíproca, temos que exibir uma função injetiva que transforme cada elemento do conjunto B em um elemento do conjunto A. Se o elemento do conjunto B possuir apenas partes ímpares, não há o que fazer, visto que esse elemento já possui um correspondente no conjunto A. Caso o elemento de B tenha partes pares, aplicaremos a operação "dividir", repetindo a operação até que a partição não possua partes pares. Como a cada divisão o valor das partes pares diminui, sempre é possível obter uma partição apenas com partes ímpares, uma vez que, ao dividir um número natural par por 2, obtemos um número menor, par ou ímpar.

■

Exemplo 2.3 *Seja $n = 15$.*

Começando com uma partição em partes ímpares, aplicando a operação "adicionar", temos:

$$\begin{aligned} 3+3+3+1+1+1+1+1+1 &\mapsto (3+3)+3+(1+1)+(1+1)+(1+1) \\ &= 6+3+2+2+2 \\ &\mapsto 6+3+(2+2)+2 \\ &= 6+4+3+2. \end{aligned}$$

De forma recíproca, aplicando a operação "dividir"na partição obtida, temos:

$$\begin{aligned} 6+4+3+2 &\mapsto (3+3)+(2+2)+3+(1+1) \\ &= 3+3+3+2+2+1+1 \\ &\mapsto 3+3+3+(1+1)+(1+1)+1+1 \\ &= 3+3+3+1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

Note que no Exemplo 2.3 exibimos apenas uma correspondência entre elementos dos dois lados da identidade. Para uma verificação completa é necessário exibir todas as correspondências entre os elementos dos dois lados da identidade para $n = 15$.

Continuaremos utilizando as operações "adicionar/dividir"para exibir uma função bijetora na demonstração da identidade do Teorema 2.2.

Teorema 2.2 *Seja n um inteiro positivo. Então,*

$$p(n|\textit{partes são pares}) = p(n|\textit{cada parte aparece um número par de vezes}).$$

Demonstração: Denotaremos por A e B, respectivamente, os conjuntos formados pelas partições de n que possuem partes pares e partições de n que possuem partes que apareçam um par de vezes. Tomando um elemento de A e aplicando a operação "dividir"em todas as partes, obtemos uma partição que tenha todas as partes aos pares, uma vez que todos os termos foram divididos, resultando em duas partes iguais. Note que a forma como a função foi construída garante a injetividade da função. De forma recíproca, tomando um elemento de B e aplicando a operação "adicionar", obtemos todos os termos pares, uma vez que, ao adicionar dois números de mesma paridade, teremos um número par. Assim, a função de A em B é bijetiva.

■

Exemplo 2.4 *Verificaremos a identidade para* $n = 6$.

As partições de 6 *que possuem todas as partes pares são :* $6, 4{+}2, 2{+}2{+}2$. *Aplicando a operação "dividir"em todas as partições de* 6 *encontradas, temos:*

$$\begin{aligned} 6 &\mapsto (3+3) \\ &= 3+3. \\ 4+2 &\mapsto (2+2)+(1+1) \\ &= 2+2+1+1. \\ 2+2+2 &\mapsto (1+1)+(1+1)+(1+1) \\ &= 1+1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

De forma recíproca, aplicando a operação "adicionar"nas partições obtidas, temos:

$$\begin{aligned} 3+3 &\mapsto (3+3) \\ &= 6. \\ 2+2+1+1 &\mapsto (2+2)+(1+1) \\ &= 4+2. \\ 1+1+1+1+1+1 &\mapsto (1+1)+(1+1)+(1+1) \\ &= 2+2+2. \end{aligned}$$

Observe que, no Exemplo 2.4 todas as correspondências entre as partições dos dois lados da identidade foram exibidas, e ainda que, elementos distintos possuem correspondências distintas. Portanto, a identidade está verificada para $n = 6$.

O teorema a seguir traz uma identidade que justifica o fato de um número inteiro positivo ser representado de forma única no sistema binário, esse sistema é de numeração posicional em que todas as quantidades são representadas pelos números zero e um. Esse sistema é utilizado por máquinas com circuitos digitais para interpretar informações e executar ações.

Teorema 2.3 *Seja* n *um inteiro positivo. Então,*

$$p(n|\textit{partes são iguais a 1}) = p(n|\textit{partes são potências distintas de 2}).$$

Demonstração: Denotaremos por A e B, respectivamente, os conjuntos formados pelas partições de n que possuem todas as partes iguais a 1 e partições de n que possuem partes que são potências distintas de 2. Há apenas uma maneira de representar uma partição de n com partes iguais a 1, a saber: $\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ vezes}}$. Assim, a cardinalidade do conjunto A é 1. Se o elemento de A possuir uma única parte, ele será um elemento do conjunto B, visto que $1 = 2^0$. Caso a partição tenha mais que uma parte, aplicaremos a operação "adicionar"aos elementos do conjunto A, transformando pares de 1 em partes 2, pares de 2 em partes 4, pares de 4 em partes 8 e assim de forma sucessiva, até que todas as partes sejam distintas. Como todas as partes são potências de 2, somar aos pares resulta em uma parte que é uma potência de 2, com uma unidade de potência maior que o par anterior. Portanto, o número de partes decresce até que a partição tenha apenas partes de potência de 2 distintas.

De forma recíproca, tomando um elemento do conjunto B e aplicando a operação "dividir", transformamos uma parte de potência 2^k, em duas partes de potências 2^{k-1}, com $k > 0$. Repetimos a operação k vezes, até que todas as partes sejam transformadas em 2^0. Assim, teremos transformado cada partição de B em partição de A. Como existe um único elemento no conjunto A, concluímos que existe uma única forma de escrever um número natural como potência distinta de 2. Esse processo é conhecido como representação binária.

$\blacksquare$

Exemplo 2.5 *Verificaremos a identidade para $n = 9$ e exibiremos sua representação binária.*

Tomando $n = 9$ e começando com a partição em partes $\in \{1\}$, aplicando a operação "adicionar", temos:

$$\begin{aligned}
1+1+1+1+1+1+1+1+1 &\mapsto (1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+1\\
&\mapsto (2+2)+(2+2)+1\\
&\mapsto (4+4)+1\\
&\mapsto 8+1.
\end{aligned}$$

De forma recíproca, aplicando a operação "dividir"na partição obtida, temos:

$$\begin{aligned}
8+1 &\mapsto (4+4)+1\\
&\mapsto (2+2)+(2+2)+1\\
&\mapsto (1+1)+(1+1)+(1+1)+(1+1)+1\\
&\mapsto 1+1+1+1+1+1+1+1+1.
\end{aligned}$$

A partição $1+1+1+1+1+1+1+1+1$ *foi transformada na partição* $8+1$ *que, escrevendo como potência de* 2 *é* $1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0$. *Portanto, o número* 9 *na representação binária é* $(1001)_2$.

Na prova das três identidades acima, usamos as operações "adicionar/dividir"para estabelecer uma relação de bijeção entre os conjuntos. Porém, na última identidade, todas as partes das partições do primeiro lado pertencem a um conjunto $N \subset \mathbb{N}$, enquanto as partes das partições do segundo lado pertencem a outro conjunto $M \subset \mathbb{N}$. Sempre que for possível através de tais operações construir uma bijeção em que as partes pertençam a dois conjuntos, esses conjuntos receberão o nome de **pares de Euler**.

Podemos obter novos pares de Euler usando pares já conhecidos. Tomaremos como exemplo a identidade:

$$p(n|\text{partes sejam iguais a } 1) = p(n|\text{ partes são potências distintas de } 2).$$

Note que a primeira parte da igualdade possui as partes $\in \{1\}$, e a segunda parte da igualdade partes $\in \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$. Multiplicando cada parte da identidade por uma constante c, obtemos novos pares de Euler. Esses novos pares terão no primeiro lado da igualdade partes $\in \{c\}$ e no segundo lado, partes $\in \{c, 2c, 4c, 8c, 16c, ...\}$. Note que tal identidade é uma generalização do Teorema 2.3. Sua demonstração segue de forma análoga, uma vez que se pode colocar c em evidência em todas as partes e aplicar a técnica "adicionar/dividir"para provar a bijeção.

Exemplo 2.6 *Seja* $c = 5$.

$$p(n|\textit{partes} \in \{5\}) = p(n|\textit{partes distintas} \in \{5, 10, 20, 40.....\})$$

Tomando $n = 30$ *e começando com a partição em partes* $\in \{5\}$, *aplicando a operação "adicionar", temos:*

$$\begin{aligned} 5+5+5+5+5+5 &\mapsto (5+5)+(5+5)+(5+5) \\ &\mapsto (10+10)+10 \\ &\mapsto 20+10 \end{aligned}$$

De forma recíproca, aplicando a operação "dividir"na partição obtida, temos:

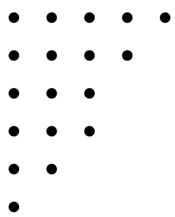
$$\begin{aligned} 20+10 &\mapsto (10+10)+(5+5) \\ &\mapsto 5+5+5+5+5+5 \end{aligned}$$

2.2 Gráfico de Ferrers

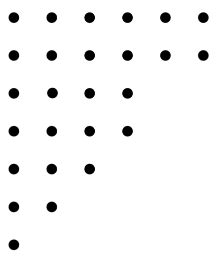
Nesta seção, apresentaremos as definições de gráfico de Ferrers, diagrama de Young e quadrado de Durfee. Além disso, serão enunciadas e demonstradas algumas indentidades em partição. Essas demonstrações serão feitas por bijeções com auxílio de transformações no gráfico de Ferrers.

Definição 2.1 *Considere uma partição de um inteiro positivo* $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$*. O rearranjo de* n *pontos no plano, distribuídos em* r *linhas em ordem não crescente, tal que a primeira linha tenha número de pontos igual a* λ_1*, a segunda linha tenha número de pontos igual a* λ_2 *e assim sucessivamente até que a* r*-ésima linha tenha número de pontos igual a* λ_r*. Essa representação é conhecida como* ***gráfico de Ferrers****.*

Exemplo 2.7 *A representação dos gráficos de Ferrers das partições* $5+4+3+3+2+1$ *e* $6+6+4+4+3+2+1$ *são, respectivamente;*



e



Ao representar graficamente uma partição de n, podemos substituir pontos por quadrados. Tal representação é chamada de **diagrama de Young.**

Exemplo 2.8 *Na Figura 4.12, temos o diagrama de Young da partição* $5+3+2+1$.

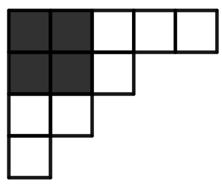


Figura 2.1: Diagrama de Young

Observação 2.1 *Note que o quadrado em destaque na Figura 4.12, da partição* $5+3+2+1$*, é o maior quadrado possível que podemos colocar dentro da representação gráfica. Este maior quadrado é chamado de* ***quadrado de Durfee*** *da partição. Assim, a partição* $5+3+2+1$ *possui quadrado de lado* 2.

Nos teoremas desta seção trabalharemos com transformações no gráfico de Ferrers da partição. Se essas transformações forem invertíveis, então é possível exibir uma bijeção. Logo, pode ser usada para provar as identidades.

Teorema 2.4 *Sejam n e r números inteiros positivos, com $n \geqslant r$. Então,*

$$p(n|a \text{ maior parte é } r) = p(n-r|\text{cada parte é} \leqslant r).$$

Demonstração: Considere uma partição λ de n, tal que a maior parte seja r. Ao construir seu gráfico de Ferrers e remover a primeira linha, obtemos um novo gráfico de Ferrers, que possui todas as linhas com quantidades de pontos menores ou iguais a r. De forma inversa, podemos acrescentar uma linha r em qualquer gráfico de Ferrers com linhas menores ou iguais a r. Portanto, a correspondência biunívoca está provada.

■

Exemplo 2.9 *Usando a identidade acima para $n = 18$ e $r = 5$, temos:*

$$\begin{array}{c} 5+4+4+3+2 \\ \begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array} \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 4+4+3+2 \\ \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & \end{array} \end{array}$$

Teorema 2.5 *Sejam n e m números inteiros positivos, com $n \geqslant m$. Então,*

$$p(n|\text{há exatamente } m \text{ partes}) = p(n-m|\text{há no máximo } m \text{ partes}).$$

Demonstração: Seja λ uma partição de n, com exatamente m partes. Ao construir seu gráfico de Ferrers e remover a primeira coluna, obtemos um novo gráfico de Ferrers, com $n-m$ pontos, uma vez que a coluna removida possui exatamente m pontos. De forma inversa, podemos acrescentar uma coluna com m pontos nesse novo gráfico de Ferrers para obter um gráfico com n pontos. Portanto, a correspondência biunívoca está provada.

■

Exemplo 2.10 *Usando a identidade acima para n=13 e m=5, temos:*

$$\begin{array}{c c c}
4+3+3+2+1 & & 3+2+2+1 \\
\begin{array}{l}
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet \\
\bullet
\end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{l}
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet \\
\bullet
\end{array}
\end{array}$$

No Exemplo 2.10, ao remover a primeira coluna do gráfico da partição 4+3+3+2+1 obtemos o gráfico da partição $3 + 2 + 2 + 1$. Observe que, a partição obtida tem uma parte a menos que a partição original, isso ocorre pois, a menor parte da partição que perdeu a coluna, é 1. Portanto, as únicas partições em que, o procedimento remover a primeira coluna resultará em uma partição com o mesmo número de partes serão aquelas, cuja última parte é maior que ou igual a 2.

Definição 2.2 *Considere o gráfico de Ferrers de uma partição λ de n. Trocando as linhas pelas colunas, obtemos um gráfico de Ferrers de uma nova partição. Essa operação é chamada de* ***conjugação*** *e a partição resultante de tal operação de* ***partição conjugada.***

Exemplo 2.11 *A representação gráfica da partição $6 + 5 + 5 + 4 + 3$ e sua partição conjugada $5 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1$ são, respectivamente:*

$$\begin{array}{c c c}
6+5+5+4+3 & & 5+5+5+4+3+1 \\
\begin{array}{l}
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet
\end{array} & \longmapsto & \begin{array}{l}
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet
\end{array}
\end{array}$$

Observação 2.2 *A partir de agora, vamos associar uma partição ao seu gráfico de Ferrers de forma que falaremos em conjugação de uma partição para nos referir à conjugação do seu gráfico de Ferrers.*

Teorema 2.6 *Sejam n e k números inteiros positivos. Então,*

$$p(n|a\ maior\ parte\ é\ k) = p(n|há\ exatamente\ k\ partes).$$

Demonstração: Considere o gráfico de Ferrers de uma partição de n, cuja maior parte é k. Aplicando a operação conjugação, teremos uma partição de n, tal que tenha k partes. Inversamente, aplicando a operação conjugação em uma partição de n com k partes, teremos uma partição de n, tal que a maior parte é k.

■

Exemplo 2.12 *Sejam $n = 7$ e $k = 4$. As partições de 7, tal que a maior parte é 4, são: $4+3, 4+2+1$ e $4+1+1+1$. As partições de 7, que têm exatamente 4 partes, são: $4+1+1+1$,$3+2+1+1$ e $2+2+2+1$. Agora, vamos usar a operação conjugação para estabelecer a bijeção entre as partições.*

$$\begin{array}{l} 4+3 \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 2+2+2+1 \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4+2+1 \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 3+2+1+1 \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4+1+1+1 \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 4+1+1+1 \\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

Definição 2.3 *Uma partição λ de n é chamada autoconjugada se o seu gráfico de Ferrers é iqual ao gráfico de Ferrers da partição conjugada.*

No Exemplo 2.12, a partição conjugada de $4+1+1+1$ foi ela mesma. Logo, a partição $4+1+1+1$ é autoconjugada.

Exemplo 2.13 *As partições de* 14 *autoconjugadas são:*

$7+2+1+1+1+1+1$

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & & & & & \\
\bullet & & & & & & \\
\bullet & & & & & & \\
\bullet & & & & & & \\
\bullet & & & & & & \\
\bullet & & & & & &
\end{array}$$

$6+3+2+1+1+1$

$$\begin{array}{cccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & & & & & \\
\bullet & & & & & \\
\bullet & & & & &
\end{array}$$

$5+4+2+2+1$

$$\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

No Exemplo 2.13, temos 3 partições autoconjugadas de 14. Como saber se todas as partições conjugadas foram exibidas? Uma resposta para tal pergunta se encontra na construção simétrica do gráfico de Ferrers da partição autoconjugada. De fato, o número de pontos em determinada linha precisa ser igual ao número de pontos na coluna correspondente. Usando esse argumento, o maior número de pontos da primeira linha na partição autoconjugada de 14 é 7 e o menor é 5. Portanto, todas as partições foram exibidas.

Teorema 2.7 *Seja n um inteiro positivo. Então,*

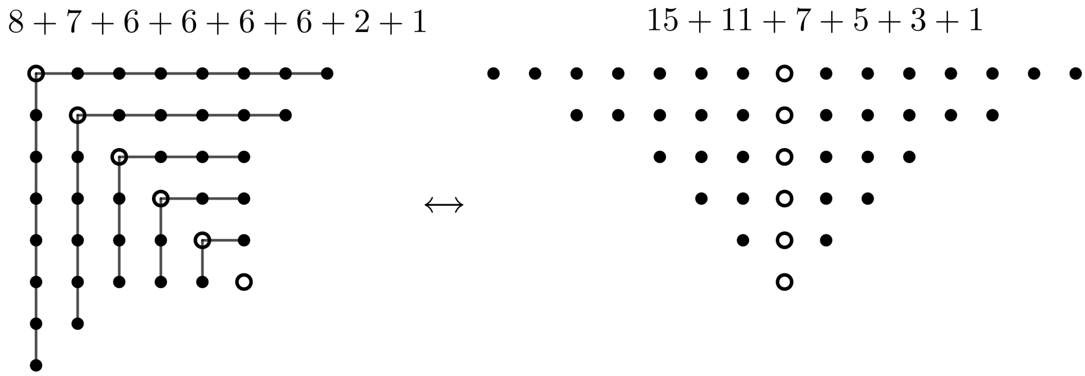
$$p(n|\mathit{autoconjugadas}) = p(n|\mathit{partes\ ímpares\ distintas}).$$

Demonstração: Considere uma partição autoconjugada de um inteiro n. Como uma partição autoconjugada é simétrica em relação à diagonal principal, o número de pontos da primeira linha é igual ao da primeira coluna, o da segunda linha igual ao da segunda coluna e assim sucessivamente. Reagrupando os pontos da primeira linha com os da primeira coluna em uma mesma linha, teremos duas vezes o número de pontos da primeira linha menos um ponto comum da diagonal principal. Logo, o número de pontos dessa linha é ímpar. Esse procedimento se repete com os pontos que sobram da segunda linha e da segunda coluna, que, de maneira análoga, exibe uma linha com número ímpar de pontos e distintos da primeira. O processo segue com todos os pontos restantes até chegar à última linha e à última coluna.

Reciprocamente, considerando o gráfico de Ferrers em partes ímpares distintas, reagrupamos o ponto central de todas as linhas como a diagonal principal de um novo gráfico de Ferrers. Com os pontos que sobram na primeira linha do gráfico, colocamos metade na primeira linha e metade na primeira coluna desse novo gráfico. Procedemos de forma análoga com os pontos restantes de todas as linhas. Assim, o novo gráfico é simétrico em relação à diagonal principal. Portanto, a partição é autoconjugada.

■

Exemplo 2.14 *Considere a partição autoconjugada* $8 + 7 + 6 + 6 + 6 + 6 + 2 + 1$*. O reagrupamento de seus pontos fornece a partição com partes ímpares distintas* $15 + 11 + 7 + 5 + 3 + 1$*. De forma inversa, partimos da partição* $15 + 11 + 7 + 5 + 3 + 1$ *e reagrupamos seus pontos para encontar a partição* $8 + 7 + 6 + 6 + 6 + 6 + 2 + 1$*. A representação da bijeção se encontra abaixo:*



2.3 Identidades de Rogers-Ramanujan

Nesta seção, enunciaremos a primeira e a segunda identidade de Rogers-Ramanujan. As demonstrações dessas identidades não serão abordadas neste trabalho. Porém, uma demonstração analítica pode ser encontrada na seção 8.7 da referência [10]. Para melhor compreender as identidades, precisaremos da definição abaixo:

Definição 2.4 *As partes de uma partição são* ***d-distintas*** *quando a diferença entre estas partes é de pelo menos d. Em particular, as partes de uma partição de* n *são 2-distintas quando a diferença entre quaisquer duas partes é de pelo menos 2.*

Exemplo 2.15 *As partes das partições* $15 + 10 + 6 + 3 + 1$ *e* $30 + 25 + 15 + 10 + 8 + 6$ *são* 2*-distintas, uma vez que a diferença entre suas partes é maior que ou igual a* 2*.*

Teorema 2.8 ***(Primeira identidade de Rogers-Ramanujan)****. Seja* n *um inteiro positivo. Então,*

$$p(n|\textit{partes sejam } 2\textit{-distintas}) = p(n|\textit{partes são} \equiv 1 \textit{ ou } 4 \pmod 5).$$

A primeira identidade de Rogers-Ramanujan afirma que o número de partições de um inteiro positivo n com partes 2-distintas é igual ao número de partições de um inteiro positivo n, com todas as partes pertencentes ao conjunto $M = \{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, \ldots\}$, ou seja, um conjunto em que suas partes deixam restos 1 ou 4 quando divididos por 5.

Exemplo 2.16 *Verificaremos a identidade para* $n = 8$ *e* $n = 10$.

As partições de $n = 8$ *em partes* 2*-distintas são* $8, 7 + 1, 6 + 2, 5 + 3$. *Portanto, um total de* 3 *partições.*

Partições de $n = 8$ *em que as suas partes pertençam ao conjunto* $M = \{1, 4, 6\}$ *são* $6 + 1 + 1, 4 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. *Portanto, um total de* 3 *partições. Verificamos a identidade para* $n = 8$.

As partições de $n = 10$ *em partes* 2*-distintas são* $10, 9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 6+3+1$. *Portanto, um total de* 6 *partições.*

Partições de $n = 10$ *em que as suas partes pertençam ao conjunto* $M = \{1, 4, 6, 9\}$ *são* $9 + 1, 6 + 4, 6 + 1 + 1 + 1 + 1, 4 + 4 + 1 + 1, 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. *Portanto, um total de* 6 *partições. Verificamos a identidade para* $n = 10$.

Iremos exemplificar com mais detalhes a segunda identidade de Rogers-Ramanujan. Uma exemplificação análoga à primeira identidade pode ser encontrada na seção 1.1.4 da referência [1].

Teorema 2.9 ***(Segunda Identidade de Rogers-Ramanujan)***. *Seja* n *um inteiro positivo. Então,*

$$p(n|\textit{partes sejam } 2\textit{-distintas e} \geq 2) = p(n|\textit{partes são} \equiv 2 \textit{ ou } 3 \pmod 5).$$

Investigaremos brevemente a segunda identidade de Rogers-Ramanujan.

Para começar, construímos uma tabela com todas as partições 2-distintas e ≥ 2 para $n = 1, 2, \ldots 12$.

n	Partições de n em partes 2-distintas e ≥ 2	Total
1		0
2	2	1
3	3	1
4	4	1
5	5	1
6	6, 4+2	2
7	7, 5+2	2
8	8, 6+2, 5+3	3
9	9, 7+2, 6+3	3
10	10, 8+2, 7+3, 6+4	4
11	11, 9+2, 8+3, 7+4	4
12	12, 10+2, 9+3, 8+4, 7+5, 6+4+2	6

Tabela 2.1: Partições em partes 2-distintas e ≥ 2

Utilizando os dados da Tabela 2.1, vamos procurar um conjunto M tal que as partes das partições de n pertençam a M e satisfaçam a seguinte identidade:

$$p(n|\text{partes sejam 2-distintas e} \geq 2) = p(n|\text{partes em } M).$$

Inicialmente consideramos o conjunto $\emptyset$ e vamos construindo o conjunto M:

1. Para $n = 1$, não há partição em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(1|\text{partes em } M)$ deve ser zero. Portanto, o número 1 não pertence a M.

2. Para $n = 2$, há uma partição em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(2|\text{partes em } M)$ deve ser um. Portanto, o número 2 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2\}$.

3. Para $n = 3$, há uma partição em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(3|\text{partes em } M)$ deve ser um. Portanto, o número 3 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3\}$.

4. Para $n = 4$, há uma partição em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(4|\text{partes em } M)$ deve ser um. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos a partição $2 + 2$. Portanto, o número 4 não pertence a M.

5. Para $n = 5$, há uma partição em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(5|\text{partes em } M)$ deve ser um. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos a partição $2 + 3$. Portanto, o número 5 não pertence a M.

6. Para $n = 6$, há duas partições em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(6|\text{partes em } M)$ deve ser dois. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos as partições $3 + 3$ e $2 + 2 + 2$. Portanto, o número 6 não pertence a M.

7. Para $n = 7$, há duas partições em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(7|\text{partes em } M)$ deve ser dois. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos a partição $3+2+2$. Logo, precisamos de mais uma partição. Portanto, o número 7 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3, 7\}$.

8. Para $n = 8$, há três partições em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(8|\text{partes em } M)$ deve ser três. Como $M \supseteq \{2, 3, 7\}$, temos as partições $3 + 3 + 2$ e $2 + 2 + 2 + 2$. Logo, precisamos de mais uma partição. Portanto, o número 8 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$.

9. Para $n = 9$, há três partições em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(9|\text{partes em } M)$ deve ser três. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$, temos as partições 7+2, 3+3+3 e 3+2+2+2. Portanto, o número 9 não pertence a M.

10. Para $n = 10$, há quatro partições em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(10|\text{partes em } M)$ deve ser quatro. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$, temos as partições $8+2$, $7+3$, $3+3+2+2$ e $2+2+2+2+2$. Portanto, o número 10 não pertence a M.

11. Para $n = 11$, há quatro partições em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(11|\text{partes em } M)$ deve ser quatro. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$, temos as partições $8+3$, $7+2+2$, $3+3+3+2$ e $3+2+2+2+2$. Portanto, o número 11 não pertence a M.

12. Para $n = 12$, há seis partições em partes 2-distintas e ≥ 2. Assim, $p(12|\text{partes em } M)$ deve ser seis. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$, temos as partições $8+2+2$, $7+3+2$, $3+3+3+3$, $3+3+2+2+2$ e $2+2+2+2+2+2$. Logo, precisamos de mais uma partição. Portanto, o número 12 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3, 7, 8, 12\}$.

Assim, a sequência de números do conjunto $M \supseteq \{2, 3, 7, 8, 12\}$. Se continuarmos com o mesmo argumento, podemos verificar que M contém $\{13, 17, 18, 22, 23, 27, 28, \ldots\}$. Note que obtemos os dois próximos números do conjunto M adicionando 5 nos dois últimos números da sequência. Este conjunto de números pode ser descrito como o conjunto dos inteiros positivos que, quando divididos por 5, deixam restos iguais a 2 ou 3. Portanto

$$p(n|\text{partes sejam 2-distintas e } \geq 2) = p(n|\text{partes são} \equiv 2 \text{ ou } 3 \ (\text{mod}5)).$$

Esta é a segunda Identidade de Rogers-Ramanujan. O argumento acima não prova a identidade para todo n, apenas verifica que é verdadeira para alguns valores de n e encaminha a construção de M.

Capítulo 3

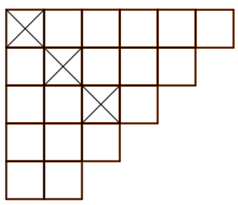
Representações Matriciais em Partições

Neste capítulo, será definido o símbolo de Frobenius de uma partição. Em seguida, serão enunciados e demonstrados alguns teoremas, cujo foco principal será a representação de partições por matrizes de duas linhas. Este capítulo tem como base os trabalhos [1] e [13].

3.1 Símbolo de Frobenius de uma partição

Considerando o diagrama de Young de uma partição de n, pode-se obter uma representação matricial de duas linhas. Essa representação é conhecida como *Símbolo de Frobenius* da partição. Vejamos como pode ser construído esse símbolo.

Exemplo 3.1 *Considere o diagrama de Young da partição* $6+5+4+3+2$ *com sua "diagonal principal"destacada.*



O símbolo de Frobenius da partição é uma matriz de duas linhas com entradas inteiras não negativas em ordem decrescente em cada linha. A quantidade de colunas coincide com a medida do lado do quadrado de Durfee. Por exemplo, na partição $6+5+4+3+2$*, o quadrado de Durfee possui lado* 3*. Portanto, a matriz será do tipo* 2×3*. A construção da matriz está dada a seguir como um exemplo: se retirarmos do diagrama de Young da partição* $6+5+4+3+2$*, os quadrados da sua "diagonal* *principal"sobrarão os quadrados das linhas à direita da diagonal e os quadrados das colunas abaixo da diagonal. Os elementos da forma a_{1k}, com $k \in \{1, 2, 3\}$, serão a quantidade de quadrados na k-ésima linha à direita da diagonal e os elemetos da forma a_{2k} serão a quantidade de quadrados na k-ésima coluna abaixo da diagonal. Portanto, o símbolo de Frobenius da partição $6 + 5 + 4 + 3 + 2$ é a matriz 2×3;*

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

O símbolo de Frobenius mostra de forma rápida qual é o lado do quadrado de Durfee da partição. Podemos usar a matriz que representa o símbolo para reconstruir a partição, em que o procedimento de reconstrução é exatamente o processo inverso do Exemplo 3.1, o qual consiste em desenhar a diagonal principal do quadrado de Durfee e completar o diagrama de Young. Os quadrados das linhas à direita da diagonal serão completados usando os elementos da primeira linha da matriz e os quadrados das colunas abaixo da diagonal usando os elementos da segunda linha da matriz.

3.2 Outras representações de partições por matrizes de duas linhas

Nesta seção, serão enunciados e demonstrados teoremas sobre partições irrestritas, isto é, partições cujas partes não possuem propriedades específicas. Esses teoremas introduzirão interpretações de como representar partições como matrizes de duas linhas satisfazendo certas condições.

Teorema 3.1 *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_r \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_r \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

sendo $c_r = 0, c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_{i=1}^{r} c_i + \sum_{i=1}^{r} d_i = n$.

Demonstração: Seja n um inteiro positivo e $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_r$. Precisamos associar a essa partição uma matriz de duas linhas que possua as características explícitas no teorema. A ideia é transformar cada parte λ_j da partição em duas partes, formando a j-ésima coluna da matriz. Como $c_r = 0$, escolhemos $d_r = \lambda_r$. Assim, a última coluna da matriz fica determinada. Sendo $c_{r-1} = c_r + d_r = \lambda_r$, temos $d_{r-1} = \lambda_{r-1} - \lambda_r$. Assim, a penúltima coluna da matriz fica determinada. Como $c_{r-2} = c_{r-1} + d_{r-1} = \lambda_{r-1}$, temos $d_{r-2} = \lambda_{r-2} - \lambda_{r-1}$. Desse modo, a antepenúltima coluna fica determinada. Essa construção segue de forma análoga até obter os elementos da primeira coluna que serão $c_1 = \lambda_2$ e $d_1 = \lambda_1 - \lambda_2$.

De forma recíproca, dada uma matriz da forma do Teorema 3.1, somando os elementos da última coluna, encontramos a parte λ_r da partição inicial. Somando os elementos da penúltima coluna, encontramos a parte λ_{r-1} da partição inicial. Seguimos o procedimento de forma análoga, somando os elementos das colunas restantes e formando as demais partes da partição inicial. Dessa forma, teremos a partição $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_r$ inicial.

■

Exemplo 3.2 *Para $n = 5$, a tabela a seguir mostra todas as partições representadas por matrizes dadas pelo Teorema 3.1. Assim, como as partições conjugadas.*

Partição	Representação Matricial	Partição Conjugada
5	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$	$1+1+1+1+1$
$4+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$2+1+1+1$
$3+2$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$2+2+1$
$3+1+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$3+1+1$
$2+2+1$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$3+2$
$2+1+1+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$4+1$
$1+1+1+1+1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	5

Tabela 3.1: Representação matricial, Teorema 3.1.

Analisando a Tabela 3.1, pode-se observar um padrão importante entre a última linha da representação matricial de uma partição e sua partição conjugada. A última linha da representação matricial fornece uma descrição completa da partição conjugada. De fato ela nos diz o número de partes de valorers $1, 2, 3 \ldots$, na partição conjugada. Para exemplificar, considere a partição $2+1+1+1$, que possui representação matricial:

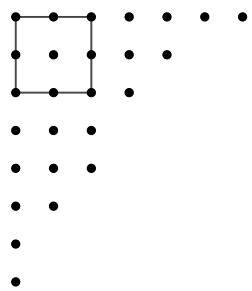
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que a segunda linha possui os valores $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dessa forma, a partição conjugada terá uma parte de valor 1, zero partes de valor 2, zero partes de valor 3 e uma parte de valor 4. Portanto, a partição conjugada é $4+1$. De forma recíproca, a segunda linha da representação matricial da partição $4+1$, que é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$, nos diz que a partição conjugada possui três partes de valor 1 e uma parte de valor 2. Portanto, a partição conjugada será $2+1+1+1$.

Os dois exemplos a seguir terão como objetivos facilitar a compreensão do Teorema 3.2, que virá em seguida.

Exemplo 3.3 *Vamos transformar a partição* $7+5+4+3+3+2+1+1$ *em uma matriz de duas linhas, que tenha o número de colunas igual ao lado do seu quadrado de Durfee e a soma de seus elementos igual a* 26.

Primeiro, representamos o gráfico de Ferrers da partição com seu quadrado de Durfee destacado.



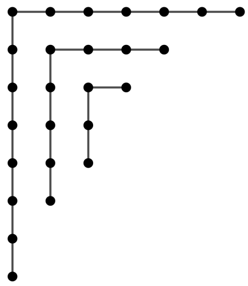
Como representado no gráfico de Ferrers, o lado do quadrado de Durfee é 3. *Assim, a matriz procurada terá duas linhas e três colunas. Portanto, uma matriz da forma* 2×3, *que vamos representar como:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Chamaremos de d_1 *o número de partes da partição iguais a* 1, *de* d_2 *o número de partes da partição iguais a* 2 *e de* d_3 *o número de partes da partição iguais a* 3. *Todas essas partes são contadas excluído o quadrado de Durfee. Logo, substituindo os valores dos* d_i*'s teremos a seguinte matriz:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O que precisamos, agora, é encontrar os valores de c_1, c_2 *e* c_3. *Para tanto, utilizaremos o gráfico de Ferrers da partição, com os pontos das linhas e colunas ligados formando arcos.*

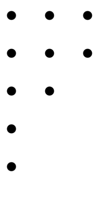


O primeiro arco liga os pontos da primeira linha e os pontos da primeira coluna, somando 14 *pontos. O segundo arco liga os pontos restantes da segunda linha e os pontos restantes da segunda coluna, somando* 8 *pontos. O terceiro arco liga os pontos restantes da terceira linha e os pontos restantes da terceira coluna, somando* 4 *pontos. Dessa forma, usaremos os resultados desses arcos para encontrar os valores dos c_i's do seguinte modo: c_1 será o valor do primeiro arco menos o valor de d_1, c_2 será o valor do segundo arco menos d_2 e c_3 será o valor do terceiro arco menos d_3. Portanto, a matriz final substituindo os valores dos c_i's é:*

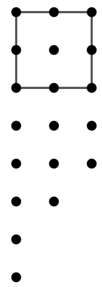
$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.4 *Mostraremos como a matriz* $\begin{pmatrix} 12 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *fornece uma representação completa da partição* $7+5+4+3+3+2+1+1$.

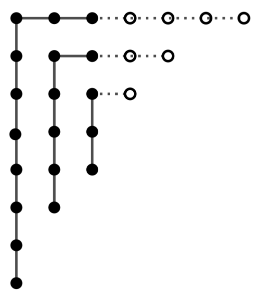
Começamos a construção do gráfico de Ferrers usando os valores dos elementos da segunda linha da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *os quais representam as quantidades de partes de valores* $1, 2$ *e* 3 *na partição, excluídas as partes que perteçam ao quadrado de Durfee. Assim, a base do gráfico de Ferrers é:*



Em seguida, como a matriz possui 3 *colunas, o lado do quadrado de Durfee é 3. Dessa forma, acrescentando o quadrado de Durfee ao gráfico de Ferrers, temos:*



Para concluir, é preciso completar os pontos que faltam nas 3 *primeiras linhas do gráfico de Ferrers. Utilizaremos para isso os arcos formados pelos pontos das linhas e colunas. O primeiro arco precisa ter valor igual à soma dos elementos da primeira coluna da matriz, que é* 14*; o segundo arco precisa ter valor igual à soma dos elemntos da segunda coluna, que é* 8*; e o terceiro arco precisa ter valor igual à soma dos elementos da terceira coluna, que é* 4*. Portanto, o diagrama de Ferrers será:*



A partição encontrada é $7 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$.

Analisando os dois exemplos acima, concluímos que uma partição é totalmente caracterizada se conhecemos o lado s do quadrado de Durfee, a quatindade de partes de valor menor ou igual a s que não pertençam ao quadrado de Durfee e o tamanho de cada um dos s arcos formados pelos pontos das linhas e colunas do gráfico de Ferrers. Além disso, todas essas informações se encontram na matriz de duas linhas e s colunas.

Agora, enunciaremos o Teorema 3.2.

Teorema 3.2 *O número de partições de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma:*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

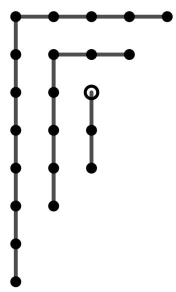
sendo $c_s > 0, c_t \geqslant 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ *e* $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n.$

A demonstração do Teorema 3.2 não será exibida neste trabalho, uma vez que uma bijeção é obtida pela generalização dos Exemplos 3.3 e 3.4. Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [1].

O Teorema 3.2 traz algumas condições nessesárias para que as matrizes possam exibir partições. Portanto, alguns questionamentos a respeito de tais condições se fazem necessários.

Começamos com a condição $c_s > 0$. Essa condição é necessária para fornecer o quadrado de Durfee de lado s. Como os d_i's formam a base do diagrama de Ferrers, se algum c_i for igual a zero, não teremos pontos suficientes para formar o quadrado de Durfee. Vamos exemplificar um caso em que temos algum $c_i = 0$.

Exemplo 3.5 *Utilizando o Exemplo 3.3, construa o gráfico de Ferrers associado à matriz* $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Em seguida, conclua se a partição pode ser exibida.*



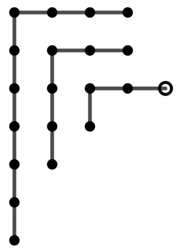
Note que o ponto destacado no gráfico de Ferrers não pode existir, uma vez que o último arco possui apenas 2 *pontos. Assim, o quadrado de Durfee não terá lado* 3 *e a partição não poderá ser exibida.*

Agora, analisamos a condição $c_t \geqslant 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$.

Para facilitar as notações, chamaremos de $arco(t)$ o número de pontos no gráfico de Ferrers, correspondente à soma dos pontos da linha de posição t e coluna de posição t. Observe que, ao partir de um arco no gráfico de Ferrers para o próximo, perdemos ao menos um ponto na linha e um ponto na coluna. Portanto, temos a seguinte desigualdade: $arco(t)$ é maior que ou igual ao $arco(t+1) + 2$. Dessa forma, usando essa desigualdade e a equação $arco(t) = c_t + d_t$, a condição é verificada.

Vamos exemplificar um caso em que a matriz não satisfaz a condição $c_t \geqslant 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$.

Exemplo 3.6 *Utilizando os procedimentos do Exemplo 3.3, construa o gráfico de Ferrers associado à matriz:* $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Em seguida, conclua se a matriz exibe uma partição.*



O gráfico de Ferrers construído usando a matriz não é válido, uma vez que a condição $c_t \geqslant 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ *não é satisfeita na última coluna. Assim, o último arco possui um ponto deslocado que precisa ser retirado do gráfico. Portanto, a partição não poderá ser exibida.*

Capítulo 4

Atividades com Partições Utilizando Materiais Manipuláveis

O objetivo deste capítulo é sugerir atividades utilizando partições de um inteiro positivo n, para que professores possam, em sala de aula, conduzir os estudantes de ensinos fundamental II e médio a entenderem resultados de identidades em partições, mesmo sem o conhecimento da definição de função ou bijeção. O foco principal das atividades estará nas definições e teoremas dos Capítulos 1, 2 e 3. Para facilitar o uso das atividades pelos professores será construída uma tabela, na qual serão listados o público-alvo junto aos roteiros correspondentes, os objetos de conhecimentos e as habilidades por eles abordados, utilizando como referência a Base Nacional Comum Curricular de 2017. Usaremos materiais concretos manipuláveis, com a finalidade de facilitar a compreensão da representação gráfica de uma partição, assim como, orientar o estudante na verificação das identidades de forma construtiva. Algumas sugestões de materiais são: grãos, moedas, tampas de garrafas, anéis de latinhas, entre outros.

4.1 Materiais manipuláveis no ensino da matemática

Nesta seção falaremos sobre o lúdico no processo de ensino da matemática e a definição de materiais concretos manipuláveis. Além disso, justificaremos a proposta do uso desses materiais na criação das atividades em partições.

A matemática é considerada uma das disciplinas que desempenha papel decisivo na formação do estudante, haja visto que "o conhecimento matemático é necessário para todos os estudantes da educação básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais"[14].

Contudo, é sabido ser uma área que apresenta grandes desafios no que tange ao ensino-aprendizagem. Existe uma dificuldade em tornar o ensino da matemática significativo e atrativo para o estudante. O professor enfrenta inúmeras dificuldades, tais como a resistência dos estudantes à disciplina, falta de pré-requisitos e incapacidade de relacionar os conteúdos ensinados na escola com a vida prática.

Assim, faz-se necessário buscar meios que promovam o interesse dos estudantes e facilitem a compreensão dos conteúdos dessa disciplina. Acerca disso, Eva Maria Siqueira Alves [15] fala sobre sua experiência no ensino da matemática fazendo uso de atividades lúdicas. Ela discorre sobre a importância do convívio dos estudantes em um ambiente rico de materiais e oportunidades, que possibilite a construção e elaboração de seus conhecimentos. Ela fala também, sobre a necessidade de uma maior atuação dos estudantes no processo de aprendizagem, assim como a relevância do uso de materiais concretos neste processo.

Discorrendo sobre essa temática, Isabel Vale [16] nos diz que é possível dividir os materiais didáticos em três tipos: concretos, pictoriais e abstratos/simbólicos. Segundo ela, "os materiais concretos permitem que os estudantes trabalhem em contato direto com eles: permitem uma representação de uma ideia matemática através de objetos a três dimensões". Vale afirma que é mais fácil para os estudantes falarem de modelos físicos ou pictoriais do que de ideias abstratas.

Vale divide os materiais concretos em dois tipos: materiais comuns e materiais educacionais. Segundo sua definição, os materiais comuns são os materiais que usamos com diversas finalidades na vida cotidiana, por exemplo, palitos de picolé, feijões, espelhos, folhas de papel, dinheiro, etc. Os materiais educacionais são materiais especificamente construídos para serem usados na sala de aula com fins educativos, tais como, o abáco, geoplano, mira, livros de texto, fichas, etc.

Com esta definição em mente, os materiais utilizados nas propostas de atividades presentes nesse trabalho serão materiais comuns, haja visto que não apresentam custos ao docente e são de fácil acesso a qualquer um que deseje colocá-las em prática. Além do conceito de material concreto, faz-se necessário uma breve definição do que é lúdico. Luckesi [17] define ludicidade como "uma estado de consciência, em que se dá uma experiência em estado de plenitude". Ele ressalta que na vivência de uma atividade lúdica, cada um de nós estamos plenos, inteiros nesse momento, utilizamos atenção total. Assim, neste trabalho pensa-se a ludicidade sob essa perspectiva, em que na execução das atividades propostas os estudantes vivenciem um momento de aprendizagem plena, experimentando um estado de atenção e envolvimento total.

Desta forma, o que se almeja com a proposta dessas atividades, é que com o auxílio de materiais concretos manipuláveis os estudantes consigam, de forma lúdica, compreender o conceito de partição de um inteiro positivo n e realizar verificações de identidades em partições de maneira construtiva, promovendo assim um momento de reflexão, em que os estudantes possam repensar a aprendizagem da matemática, como um processo significativo e interessante.

4.2 Atividades com partições

Nesta seção exibiremos atividades em partições em formato de roteiros. A proposta é auxiliar os professores dos ensinos fundamental II e médio a trabalharem o conteúdo de partições através do uso de materiais manipuláveis.

Para facilitar o uso das atividades, começaremos construindo a Tabela 4.1, na qual serão listados o público-alvo, os roteiros, os objetos de conhecimentos e as habilidades abordados conforme a Base Nacional Comum Curricular de 2017.

Público	Roteiros	Conhecimento	Habilidades
6º ano	Todos	Adição	Resolver problemas que envolvam cálculos mentais.
6º ano	4.10	Subtração	Resolver problemas que envolvam cálculos mentais.
6º ano	4.4 ; 4.5	Divisão	Resolver problemas que envolvam cálculos mentais.
6º ano	Todos	Contagem	Resolver e elaborar problemas de contagem.
6º ano	Todos	Organização e registro	Fazer uso de planilhas para registro, representação e interpretação das informações.
7º ano	4.6; 4.8	Linguagem algébrica	Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo.
7º ano	4.5	Representação binária	Compreender o uso da base 2.
8º ano	4.5	Potenciação	Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação.
9º ano	4.4; 4.5; 4.6; 4.8; 4.10; 4.13; 4.14	Funções	Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis.
1º e 2º anos	4.4; 4.5; 4.6; 4.8; 4.10; 4.13; 4.14	Funções	Compreender a existência de funções injetivas, sobrejetivas, inversas e bijetivas.
2ºano	4.12; 4.13; 4.14	Matrizes	Reconhecer uma estrutura, em que um número é associado a elementos distribuídos em linhas e colunas.

Tabela 4.1: Conhecimentos e habilidades trabalhados em cada roteiro.

4.3 Atividade: Reconhecendo partições

Antes de pensarmos em atividades que representem identidades, precisamos que o estudante tenha o entendimento do conceito de partição. Assim, essa primeira atividade traz exemplos em forma de roteiros, ao usar situações que possam ser reproduzidas em sala de aula com os estudantes, buscando o entendimento da definição de partição de um inteiro positivo n.

Roteiro 4.1 .

1. *Forme uma pilha com todos os livros de matemática da turma e anote o total.*

2. *Peça para os estudantes organizarem os livros em prateleiras, de forma que nenhuma prateleira de baixo tenha mais livros que a de cima.*

3. *Pergunte aos estudantes se existem outras formas de organizar os livros nas prateleiras.*

4. *Explique que cada uma das maneiras de organizar os livros é uma partição da quantidade de livros. Em seguida, explique que podemos escrever a quantidade de livros como a soma dos livros contidos em cada uma das prateleiras.*

Roteiro 4.2 .

1. *Entregue aos estudantes* n *objetos indistinguíveis, como canudos, palitos, grãos, tampas de garrafas, etc. Sugerimos que o valor de* n *seja menor que ou igual a* 7.

2. *Solicite que os estudantes distribuam os objetos em grupos, de forma que possa ser formado um único grupo com todos os objetos ou* n *grupos com 1 objeto cada, respeitando a seguinte condição: o primeiro grupo nunca tenha menos objetos que o segundo; o segundo nunca tenha menos objetos que o terceiro e assim por diante.*

3. *Peça aos estudantes que anotem todos os resultados possíveis, da seguinte maneira: utilizem os números de objetos em cada grupo como parcelas para escrever adições, começando com o número de objetos do maior grupo e indo até o menor.*

4. *Explique aos estudantes que cada formação do item anterior é uma partição de* n *e que cada parcela é uma parte da partição.*

4.4 Atividade: Gráfico de Ferrers

A representação gráfica das partições de um inteiro positivo n, por meio do seu gráfico de Ferrers, é uma ferramenta poderosa no entendimento de algumas identidades em partição. Nesse roteiro, sugerimos uma forma de trabalhar com tampas no lugar de pontos para fazer a representação gráfica.

Observação 4.1 *Nos roteiros em que algum item solicite representar todas as partições, sugere-se que a escolha de* n *seja menor que ou igual a* 7*. Caso* n *seja um número maior que* 7 *a atividade se tornará extensa, devido à quantidade de partições existentes.*

Roteiro 4.3 .

1. *Distribua* n *tampas de garrafas aos estudantes e explique que cada tampa representa uma unidade. Exemplo: 10 tampas representam o número inteiro 10.*

2. *Peça aos estudantes que reagrupem as tampas em linhas horizontais uma embaixo da outra com a seguinte condição: a quantidade de tampas em uma linha inferior nunca supera a quantidade de tampas de uma linha superior. Em seguida, anote todas as partições encontradas.*

3. *Forneça todas as partições de* n*. Em seguida, solicite aos estudantes que verifiquem se todas as partições foram encontradas com o reagrupamento de pontos.*

4. *Explique que existe um procedimento recorrente para encontrar todas as partições de* n *por meio da representação gráfica. Realize os próximos passos com os estudantes para facilitar a compreensão.*

5. *Peça aos estudantes que coloquem todas as tampas em uma fila no sentido horizontal. Em seguida, explique que essa forma de organizar as tampas representa o valor máximo da primeira linha do gráfico e que, a quantidade de tampas dessa primeira linha representa o valor da primeira parte da partição. Assim, a partição será* n*.*

6. *Oriente os estudantes a transferir a última tampa da direita, para baixo da primeira tampa da esquerda, formando, assim, um novo gráfico com duas linhas. Portanto, a partição desse gráfico terá duas partes. Logo, a partição será* $(n-1)+1$*.*

7. *Oriente os estudantes a formarem a primeira linha com as* n *tampas. Em seguida, devem reagrupar as duas últimas tampas da direita da seguinte forma: coloque o maior número de tampas possíveis na segunda linha; caso sobre alguma tampa, coloque a maior quantidade possível na terceira linha e assim por diante, respeitando sempre a condição de que a linha debaixo não tenha mais tampas que a*

linha de cima, anotando a partição encontrada. Em seguida, peça aos estudantes que, se possível, movam a última tampa da direita da segunda linha para a linha abaixo, anotando a partição encontrada. O procedimento de descer uma tampa por vez é feito em todas as linhas a partir da segunda, até que as linhas fiquem com apenas uma tampa. Em cada movimento, a partição encontrada deve ser anotada.

8. *Peça aos estudantes que repitam o mesmo procedimento anterior reagrupando três tampas. Em seguida, quatro tampas, até chegar a $(n-1)$ tampas. Explique que sempre fixamos a quantidade de tampas na primeira linha e reagrupamos as demais.*

9. *Explique para os estudantes que cada uma das configurações encontradas com o reagrupamento das tampas fornece um gráfico diferente.*

Exemplo 4.1 *Passos de* 5 *a* 9 *do Roteiro* 4.3 *utilizando* 5 *tampas.*

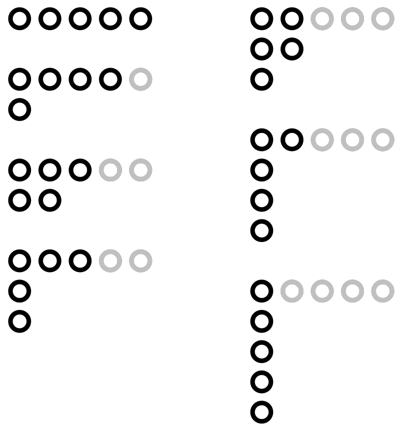


Figura 4.1: Roteiro 4.3.

4.5 Atividade: Teorema 2.1

O objetivo deste roteiro é usar as operações "dividir/adicionar" que foram definidas no Capítulo 2, para conduzir o estudante ao entendimento da seguinte identidade: seja n um inteiro positivo. Então,

$$p(n|\text{partes são ímpares}) = p(n|\text{partes são distintas}).$$

Roteiro 4.4 .

1. *Usando tampas de garrafas, oriente os estudantes a representarem os gráficos e anotarem todas as partições do número n.*

2. *Peça para que os estudantes usem as partições encontradas e formem os conjuntos A e B, de modo que o primeiro tenha partes ímpares e o segundo partes distintas.*

3. *Solicite aos estudantes que transformem as partições do conjunto A da seguinte forma: adicione as partes iguais duas a duas, até que todas as partes da partição sejam distintas; se a partição possuir apenas partes distintas, deixe como está.*

4. *Peça aos estudantes que comparem as partições encontradas após realizarem as transformações com as partições do conjunto B. Em seguida, pergunte: Qual relação existe entre eles?*

5. *Oriente os estudantes que transformem as partições do conjunto B da seguinte forma: caso a partição tenha partes pares, divida por 2 até que não seja possível obter uma parte inteira. A divisão pode ser aplicada mais de uma vez.*

6. *Solicite que os estudantes reescrevam as partições após as transformações do item anterior. Oriente que comparem essas partições com as do conjunto A. Em seguida, pergunte: Qual a conclusão quando comparados os dois conjuntos?*

Exemplo 4.2 *Passos de* 1 *a* 6 *do Roteiro* 4.4 *utilizando* 5 *tampas.*

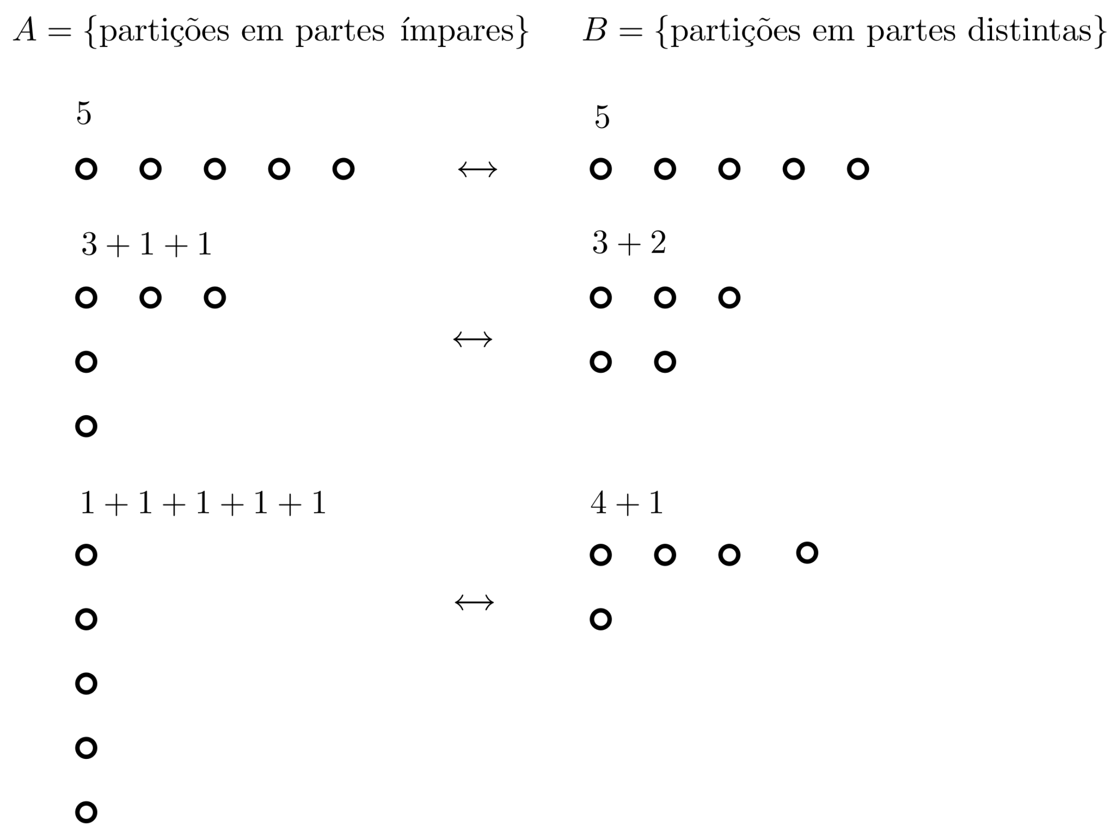


Figura 4.2: Roteiro 4.4.

4.6 Atividade: Teorema 2.3

O objetivo deste roteiro é introduzir o conceito de representação binária. Usaremos operações como dividir e adicionar, para conduzir o estudante ao entendimento da seguinte identidade: seja n um inteiro positivo. Então,

$$p(n|\text{partes são iguais a 1}) = p(n|\text{partes são potências distintas de 2}).$$

Roteiro 4.5 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafas. Em seguida, solicite que organizem as tampas em uma fila. Explique que cada uma dessas tampas representa o valor unitário e, dessa forma, cada tampa é uma parte da partição do número inteiro n.*

2. *Explique aos estudantes o que significa $p(n|\textit{partes sejam iguais a 1})$. Explique também que seu valor é 1.*

3. *Oriente os estudantes a juntarem as tampas da fila formando pares, deixando uma sozinha se for o caso. Por exemplo, em uma fila com 11 tampas, teremos 5 pares de tampas e uma tampa sozinha. Explique que essa nova configuração é uma nova partição com 5 partes 2 e uma parte 1. Em seguida, peça que adicionem as partes com mesmo número aos pares novamente, repetindo o procedimento até que não seja mais possível.*

4. *Peça aos estudantes que anotem a partição de n final. Em seguida, pergunte se existe alguma característica em comum entre as partes dessa partição. Ao final das respostas, explique que as partes são potências de 2 distintas.*

5. *Explique o que significa $p(n|\textit{partes são potências distintas de 2})$. Explique também que seu valor é 1.*

6. *Peça aos estudantes que usem a organização atual das tampas e proceda da seguinte forma: se possível, divida os montes de tampas por 2, formando novos montes de tampas, seguindo o procedimento até que não seja mais possível.*

7. *Pergunte aos estudantes se existe uma relação com a organização das tampas e a da primeira fila feita com as n tampas. Explique aos estudantes que o processo feito é o inverso e, portanto, voltamos à configuração inicial.*

8. *Realize os procedimentos para valores de n diferentes.*

9. *Explique aos estudantes que essa forma de representar o número como soma de potências de 2 é conhecida como representação binária.*

Exemplo 4.3 *Passos de* 1 *a* 4 *do Roteiro* 4.5 *utilizando* 13 *tampas.*

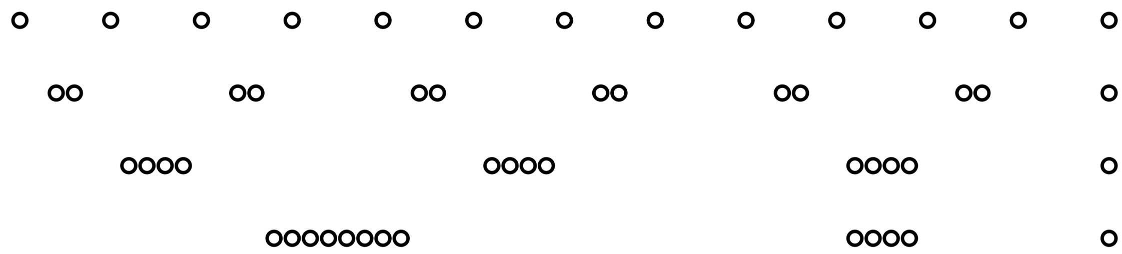


Figura 4.3: Roteiro 4.5.

4.7 Atividade: Teorema 2.4

O objetivo deste roteiro é mostrar que o processo de retirar a primeira linha em uma representação gráfica construindo um novo gráfico e depois acrescentando essa linha novamente ao gráfico novo, fornece uma bijeção. Assim, conduzir o estudante no entendimento da seguinte identidade: sejam n e r números inteiros positivos, com $n \geqslant r$. Então,

$$p(n|\text{a maior parte é } r) = p(n-r|\text{cada parte é} \leqslant r).$$

Roteiro 4.6 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafa. Em seguida, solicite que, usando a representação gráfica, encontrem todas as partições de n com a seguinte observação: a primeira linha do gráfico tenha exatamente r tampas. Em seguida, anote todas as partições encontradas.*

2. *Peça que os estudantes construam um conjunto A, tal que seus elementos sejam as partições encontradas.*

3. *Explique aos estudantes o que significa $p(n|\text{a maior parte é } r)$. Em seguida, encontre seu valor.*

4. *Solicite aos estudantes que refaçam a representação gráfica de cada elemento do conjunto A com a seguinte observação: remova a primeira linha do gráfico e anote a partição encontrada.*

5. *Peça aos estudantes que construam um conjunto B, tal que seus elementos sejam as partições encontradas no passo anterior.*

6. *Explique aos estudantes o que significa $p(n-r|\text{cada parte é} \leqslant r)$. Em seguida, encontre seu valor.*

7. *Pergunte aos estudantes o que pode ser feito aos elementos do conjunto B para que cada um forneça um elemento do conjunto A.*

8. *Explique que o procedimento do item anterior é uma operação inversa, que transforma cada elemento de B em um elemento de A.*

9. *Explique que os procedimentos acima nos permitem afirmar que o número de elementos do conjunto A é igual ao do conjunto B. Caso os estudantes tenham o conhecimento de função, explique que isso é uma bijeção.*

Exemplo 4.4 *Passos de* 1 *a* 9 *do Roteiro* 4.6 *de uma partição utilizando* 16 *tampas e a maior parte da partição igual a* 5.

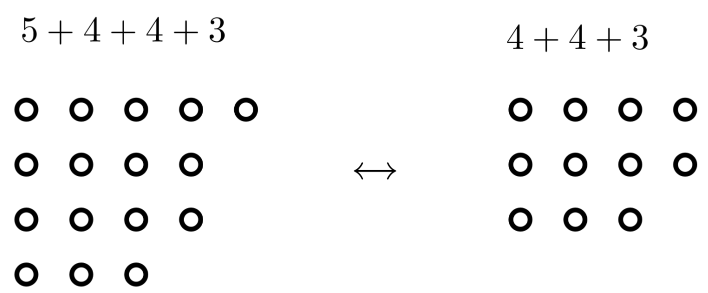


Figura 4.4: Roteiro 4.6.

4.8 Atividade: Partição conjugada

Neste roteiro, será trabalhada a definição de partição conjugada.

Roteiro 4.7 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafas. Em seguida, solicite que representem o gráfico de cada partição de n e anotem as partições encontradas.*

2. *Peça aos estudantes que procedam em cada uma das representações gráficas do item anterior da seguinte forma: a primeira linha se transforma na primeira coluna, a segunda linha na segunda coluna e assim sucessivamente, até a última linha.*

3. *Solicite aos estudantes que anotem as partições encontradas no item anterior.*

4. *Explique aos estudantes que cada partição encontrada através do procedimento de trocar linhas pelas colunas é chamada de partição conjugada.*

Exemplo 4.5 *Passos de* 1 *a* 4 *do Roteiro* 4.7 *de uma partição utilizando* 16 *tampas.*

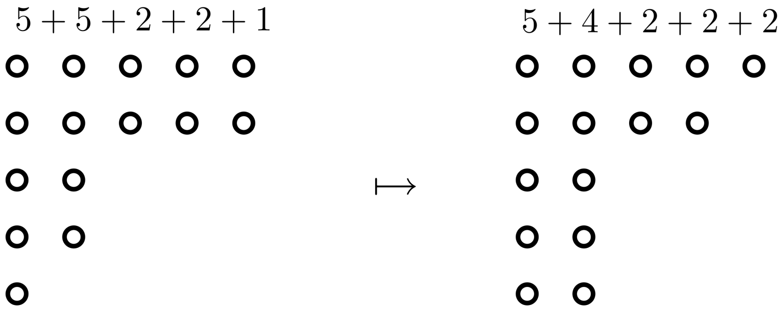


Figura 4.5: Roteiro 4.7.

4.9 Atividade: Teorema 2.6

O objetivo deste roteiro é utilizar a operação conjugação para construir partições conjugadas. Assim, conduzir o estudante no entendimento da seguinte identidade: sejam n e k números inteiros positivos, com $n \geqslant k$. Então,

$$p(n|\text{a maior parte é } k) = p(n|\text{há exatamente } k \text{ partes}).$$

Roteiro 4.8 .

1. *Distribua aos estudantes* n *tampas de garrafas. Em seguida, solicite que, usando a representação gráfica, encontre todas as partições de* n*, com a seguinte observação: que a primeira linha do gráfico tenha exatamente* k *tampas, com* $n \geq k$*. Em seguida, anote todas as partições encontradas.*

2. *Peça que os estudantes construam o conjunto* A*, tal que, seus elementos sejam as partições encontradas no item anterior.*

3. *Explique aos estudantes o que significa* $p(n|\textit{a maior parte é } k)$*. Em seguida, encontre seu valor.*

4. *Solicite aos estudantes que, usando a operação conjugação, escrevam a partição conjugada de cada elemento do conjunto* A*.*

5. *Peça aos estudantes que construam o conjunto* B*, tal que seus elementos sejam as partições encontradas no passo anterior. Em seguida, pergunte se existe uma relação entre a maior parte da partição de cada elemento do conjunto* A *com o número de partes da partição do elemento correspondente no conjunto* B*.*

6. *Explique aos estudantes o que significa* $p(n|\text{tenham exatamente } k \text{ partes})$. *Em seguida, encontre seu valor.*

7. *Solicite aos estudantes que usem a operação conjugação em cada elemento do conjunto* B. *Em seguida, peça que comparem as novas partições com as partições do conjunto* A.

8. *Explique que os procedimentos acima nos permitem afirmar que o número de elementos do conjunto* A *é igual ao do conjunto* B. *Caso os estudantes tenham o conhecimento de função, explique que isso é uma bijeção.*

Exemplo 4.6 *Passos de* 1 *a* 7 *do Roteiro* 4.8 *utilizando* 6 *tampas e a maior parte da partição igual a* 3.

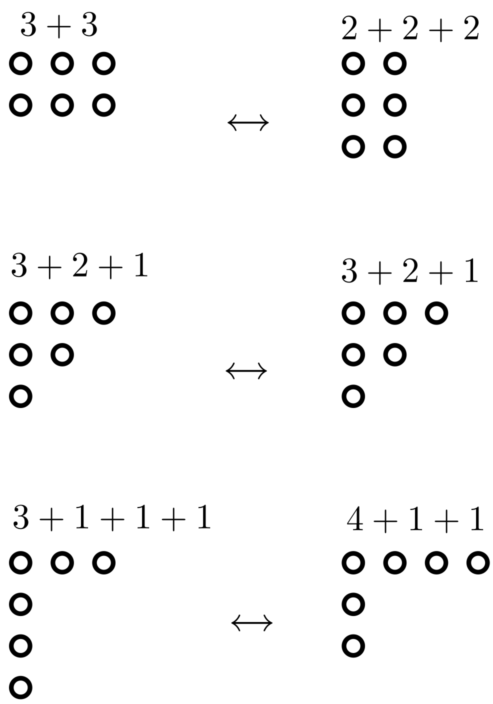


Figura 4.6: Roteiro 4.8.

4.10 Atividade: Partição autoconjugada

Neste roteiro, será trabalhada a definição de partição autoconjugada

Roteiro 4.9 .

1. *Distribua aos estudantes* n *tampas de garrafas. Em seguida, solicite que, usando a representação gráfica, encontrem e anotem todas as partições de* $1, 2, 3, \dots, n$

em que a primeira linha do gráfico tenha exatamente o mesmo número de tampas que a primeira coluna, que a segunda linha tenha o mesmo número de tampas que a segunda coluna e assim sucessivamente.

2. *Solicite aos estudantes que utilizem cada uma das partições encontradas e representem sua partição conjugada, ou seja, que troquem as linhas pelas colunas no gráfico das partições, anotando todas as partições encontradas.*

3. *Peça aos estudantes que comparem as partições encontradas nos dois passos anteriores. Em seguida, pergunte qual o motivo do resultado encontrado e se existe alguma simetria nos gráficos de cada uma das partições.*

4. *Explique aos estudantes que os gráficos das partições são simétricos em relação à diagonal principal e, sempre que a partição conjugada é igual à partição original, ela é chamada de partição autoconjugada.*

Exemplo 4.7 *Passos de* 1 *a* 4 *do Roteiro* 4.9 *de uma partição utilizando* 17 *tampas.*

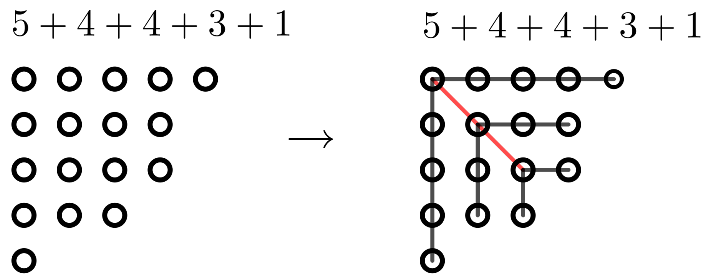


Figura 4.7: Roteiro 4.9.

4.11 Atividade: Teorema 2.7

O objetivo deste roteiro é utilizar partições autoconjugadas, para conduzir o estudante ao entendimento da seguinte identidade: seja n um inteiro positivo. Então,

$$p(n|\text{são autoconjugadas}) = p(n|\text{partes ímpares distintas}).$$

Roteiro 4.10 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafas. Em seguida, peça os estudantes que construam um conjunto A, tal que seus elementos sejam as partições autoconjugadas encontradas na atividade anterior.*

2. *Explique aos estudantes o que significa $p(n|$ autoconjugadas$)$. Em seguida, encontre seu valor.*

3. *Solicite aos estudantes que, usando as partições autoconjugadas do conjunto A, procedam em suas representações gráficas da seguinte forma: reagrupe todas as tampas da primeira linha com as tampas da primeira coluna e forme a primeira linha de um novo gráfico. Em seguida, reagrupe as tampas restantes da segunda linha com as tampas restantes da segunda coluna e forme a segunda linha do novo gráfico. Prossiga com o processo com todas as tampas restantes; ao final, anote todas as partições encontradas.*

4. *Peça os estudantes que construam um conjunto B, tal que seus elementos sejam as partições encontradas no passo anterior.*

5. *Explique aos estudantes o que significa $p(n|\text{partes ímpares distintas})$. Em seguida, encontre seu valor.*

6. *Solicite aos estudantes que refaçam a representação gráfica de cada elemento do conjunto B da seguinte forma: distribua a quantidade de tampas da primeira parte da partição, colocando uma tampa na diagonal principal e metade do restante na primeira linha e metade na primeira coluna. Distribua a quantidade de tampas da segunda parte da partição, colocando uma tampa na diagonal principal e metade do restante na segunda linha e metade na segunda coluna, assim sucessivamente com todas as partes da partição. Ao final, anote o resultado de cada partição encontrada.*

7. *Explique que o procedimento do item anterior é uma operação inversa, que transforma cada elemento de B em um elemento de A.*

8. *Explique que os procedimentos acima nos permitem afirmar que o número de elementos do conjunto A é igual ao do conjunto B. Caso os estudantes tenham o conhecimento de função, explique que isso é uma bijeção.*

Exemplo 4.8 *Passos de* 1 *a* 6 *do Roteiro* 4.10 *de uma partição utilizando* 20 *tampas.*

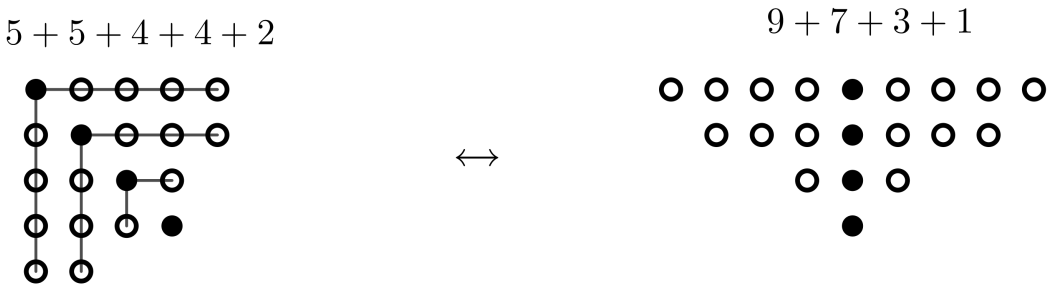


Figura 4.8: Roteiro 4.10.

4.12 Atividade: Partições com partes d-distintas

O objetivo deste roteiro é introduzir a definição de partições em partes d-distintas. Esta definição é necessária para o entendimento das identidades de Roger-Ramanujan que aparecem no Capítulo 2.

Roteiro 4.11 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafas. Em seguida, solicite que, usando a representação gráfica, encontrem todas as partições de n.*

2. *Peça aos estudantes que formem conjuntos usando as partições encontras do seguinte modo: no primeiro conjunto, escreva todas as partições em que a diferença entre as partes seja de pelo menos 1; no segundo conjunto, todas as partições em que a diferença entre as partes seja de pelo menos 2, assim sucessivamente.*

3. *Explique aos estudantes que as partições do primeiro conjunto são chamadas 1-distintas, a do segundo conjunto 2-distintas e assim sucessivamente.*

Exemplo 4.9 *Passos de* 1 *a* 3 *do Roteiro* 4.11 *para partições com partes 2-distintas utilizando* 6 *tampas.*

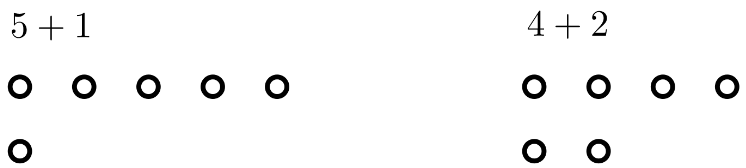


Figura 4.9: Roteiro 4.11.

4.13 Atividade: Símbolo de Frobenius da partição

O objetivo deste roteiro é utilizar a definição do quadrado de Durfee e o gráfico de Ferrers, para representar uma partição como uma matriz que tenha duas linhas e o número de colunas iguais ao lado do quadrado de Durfee. Além disso, conduzir o estudante ao entendimento de que o processo é invertível.

Roteiro 4.12 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafas. Em seguida, peça os estudantes que construam a representação gráfica de qualquer uma das partições de n.*

2. *Solicite aos estudantes que, usando a representação gráfica da partição escolhida, destaquem o maior quadrado que contenha a primeira tampa do gráfico de Ferrers. Explique que esse quadrado é conhecido como quadrado de Durfee da partição.*

3. *Explique aos estudantes que, usando a informação do lado do quadrado de Durfee, já é possível saber o tipo da matriz que ele deve construir. Assim, a matriz terá duas linhas e número de colunas iguais ao lado do quadrado de Durfee.*

4. *Peça aos estudantes que destaquem a diagonal principal no gráfico da partição escolhida. Em seguida, proceda com as demais tampas da seguinte forma: agrupe as tampas que estão à direita da diagonal principal em grupos, o primeiro grupo com as tampas da primeira linha, o segundo grupo com as tampas da segunda linha e assim sucessivamente. Caso alguma linha não possua tampas sua representação na matriz será o elemento zero. Oriente os estudantes que procedam de forma semelhante com as tampas que estão abaixo da diagonal principal, formando novos grupos, o primeiro com as tampas da primeira coluna o segundo com as tampas da segunda coluna e assim sucessivamente. Caso alguma coluna não possua tampas sua representação na matriz será o elemento zero.*

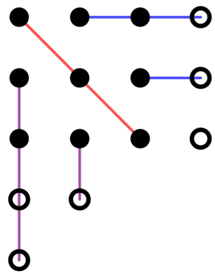
5. *Explique aos estudantes que cada um dos grupos formados pelas tampas das linhas à direita da diagonal principal serão os elementos da primeira linha da matriz, enquanto os grupos formados pelas tampas das colunas abaixo da diagonal principal serão os elementos da segunda linha da matriz*

6. *Solicite aos estudantes que alinhem os grupos formados pelas tampas das linhas e logo abaixo alinhem os grupos formados pelas tampas das colunas. Explique que essa representação é uma matriz de duas linhas e com número de colunas iguais ao lado do quadrado de Durfee.*

7. *Peça aos estudantes que usem a diagonal principal que restou no gráfico e retorne as tampas da matriz do seguinte modo: os grupos da primeira linha da matriz formarão os pontos das linhas à direita da diagonal principal, sendo o primeiro grupo, a primeira linha; o segundo grupo, a segunda linha e assim sucessivamente. De forma semelhante, use os grupos da segunda linha da matriz para retornar as tampas às colunas abaixo da diagonal principal: o primeiro grupo na primeira coluna, o segundo grupo na segunda coluna e assim sucessivamente.*

8. *Explique aos estudantes que, usando os procedimentos dos itens anteriores, sempre é possível representar uma partição como uma matriz de duas linhas. Porém, nem toda matriz de duas linhas representa uma partição. Exemplifique tal restrição usando uma matriz em que seus elementos não estejam em ordem decrescente.*

Exemplo 4.10 *Passos de* 1 *a* 7 *do Roteiro* 4.12 *utilizando* 15 *tampas.*



$$\leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.10: Roteiro 4.12.

4.14 Atividade: Teorema 3.1

O objetivo deste roteiro é representar uma partição de n como uma matriz que tenha duas linhas e o número de colunas iguais ao número de partes da partição. Essa matriz será da forma:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_r \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_r \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

sendo $c_r = 0, c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_{i=1}^{r} c_i + \sum_{i=1}^{r} d_i = n$.

Roteiro 4.13 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafas. Em seguida, peça os estudantes que construam a representação gráfica de qualquer uma das partições de n.*

2. *Explique aos estudantes que, usando a informação do número de partes da partição, já é possível saber o tipo da matriz que ele deve construir. Assim, a matriz terá duas linhas e número de colunas iguais ao número de partes.*

3. *Explique aos estudantes que o último elemento da primeira linha na matriz é sempre zero e o último elemento da segunda linha é igual ao número de tampas da última linha do gráfico. Assim, peça aos estudantes que transporte essas tampas da última linha do gráfico de Ferrers formando o último elemento da matriz.*

4. *Explique aos estudantes que a soma das tampas da última coluna é igual ao antepenúltimo elemento da primeira linha da matriz. Dessa forma, peça aos estudantes que transportem da antepenúltima linha do gráfico as tampas correspondentes a essa soma e depois as tampas que sobraram nesta linha para o elemento correspondente na segunda linha na mesma coluna.*

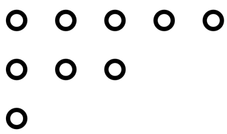
5. *Peça aos estudantes que, completem os valores dos elementos da matriz, usando as informações do item anterior nas demais linhas do gráfico de Ferrers.*

6. *Explique aos estudantes que, a segunda linha da matriz fornece uma representação completa da partição conjugada, uma vez que, o primeiro elemento da segunda linha informa quantas partes de valor 1, o segundo elemento quantas partes de valor 2 e assim sucessivamente existem na partição conjugada.*

7. *Explique aos estudantes que, usando a matriz construída, pode-se retornar à representação gráfica do seguinte modo: todas as tampas da primeira coluna formam a primeira linha do gráfico de Ferrers, as tampas da segunda coluna a segunda linha e assim sucessivamente.*

8. *Explique aos estudantes que, usando os procedimentos dos itens anteriores, sempre é possível representar uma partição como uma matriz de duas linhas. Porém, nem toda matriz de duas linhas representa uma partição. Exemplifique tal restrição usando uma matriz em que o último elemento da primeira linha seja diferente de zero.*

Exemplo 4.11 *Passos de* 1 *a* 7 *do Roteiro* 4.13 *utilizando* 9 *tampas.*



$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

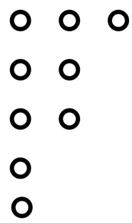


Figura 4.11: Roteiro 4.13.

4.15 Atividade: Teorema 3.2

O objetivo deste roteiro é representar uma partição de n como uma matriz que tenha duas linhas e o número de colunas iguais ao lado do quadrado de Durfee. Essa matriz será da forma:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

sendo $c_s > 0, c_t \geqslant 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ e $\sum_{i=1}^{s} c_i + \sum_{i=1}^{s} d_i = n$.

Roteiro 4.14 .

1. *Distribua aos estudantes n tampas de garrafas. Em seguida, peça os estudantes que construam a representação gráfica de qualquer uma das partições de n.*

2. *Solicite aos estudantes que, usando a representação gráfica da partição escolhida, destaquem o maior quadrado que contenha a primeira tampa do gráfico de Ferrers. Explique que esse quadrado é conhecido como quadrado de Durfee da partição.*

3. *Explique aos estudantes que, usando a informação do lado do quadrado de Durfee, já é possível saber o tipo da matriz que ele deve construir. Assim, a matriz terá duas linhas e número de colunas iguais ao lado do quadrado de Durfee.*

4. *Explique aos estudantes que o primeiro elemento da segunda linha da matriz representa o número de partes de valor 1, o segundo elemento o número de partes de valor 2 e assim sucessivamente, excluídas as partes do quadrado de Durfee. Peça os estudantes que completem a segunda linha da matriz do seguinte modo: use tampas sobrepostas para representar o valor de cada um desses elementos.*

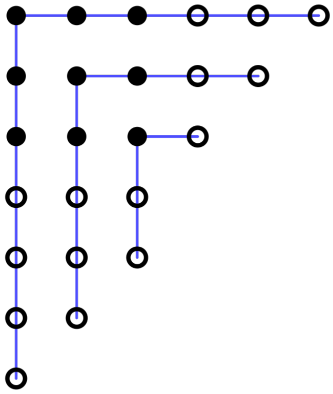
5. *Explique aos estudantes que o número de tampas que formam a primeira linha e primeira coluna no gráfico de Ferrers representa a soma dos elementos da primeira coluna da matriz, o número de tampas restantes que formam a segunda linha e a segunda coluna representa a soma dos elementos da segunda coluna da matriz e assim sucessivamnete.*

6. *Peça aos estudantes que, usando as informações do item anterior, completem os valores dos elementos da primeira linha da matriz do seguinte modo: use tampas sobrepostas para representar a quantidade de cada um desses elementos.*

7. *Explique aos estudantes que, usando a matriz construída, pode-se retornar à representação gráfica do seguinte modo: use as informações da segunda linha da matriz e represente as partes de valor 1, de valor 2 e assim sucessivamente. Em seguida, represente o quadrado de Durfee. Para finalizar, complete as tampas que faltam nas linhas do quadrado de Durfee, de modo que o número de tampas que formam a primeira linha e primeira coluna no gráfico sejam iguais à soma dos elementos da primeira coluna da matriz, o número de tampas restantes que formam a segunda linha e segunda coluna sejam iguais à soma dos elementos da segunda coluna da matriz e assim sucessivamente.*

8. *Explique aos estudantes que, usando os procedimentos dos itens anteriores, sempre é possível representar uma partição como uma matriz de duas linhas. Porém, nem toda matriz de duas linhas representa uma partição. Exemplifique tal restrição usando uma matriz em que algum elemento da primeira linha seja zero.*

Exemplo 4.12 *Passos de* 1 *a* 7 *do Roteiro* 4.14 *utilizando* 25 *tampas.*



$$\leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Figura 4.12: Roteiro 4.14.

Considerações Finais

Neste trabalho, com objetivo de ser o mais didático possível, procuramos exibir as funções bijetivas que demonstraram as identidades em partições de uma forma simples e detalhada. Encontrar essas bijeções nem sempre é algo simples. Porém, quando elas são encontradas, o processo de entender as identidades se torna mais claro e sua utilização na criação de atividades construtivas mais naturais, principalmente em atividades nas quais é exibida a relação entre elementos dos conjuntos representados dos dois lados da igualdade. A representação gráfica de uma partição conhecida como gráfico de Ferrers se mostrou muito útil na exibição das bijeções, principalmente na verificação das identidades e na transformação de partições em matrizes de duas linhas por meio de processos construtivos com o uso do material concreto manipulável proposto nos roteiros.

Mais que propor atividades que possam ser utilizadas por professores dos ensinos fundamental II e médio, esperamos que professores e estudantes interessados no assunto possam continuar o trabalho, acrescentando novas atividades, adaptando as existentes e fazendo relatos de como essas atividades contribuíram com o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] J. P. O. Santos e R. Silva, *Aspectos combinatórios da teoria aditiva dos números.* Colóquio de Matemática da Região Sul, 2012, Londrina. Anais SBM: SU-1.03.93p.

[2] I. Pak, *Partition Bijections, a Survey*, Ramanujan Journal **12** (2006), 5–75.

[3] J. J. Sylvester, *A constructive theory of partitions*, arranged in three acts, an interact and an exodion, Amer. J. Math. (1884-86) 5–6, 251–330, 334–336.

[4] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proceedings of the London Mathematical Society **17** (1918) 75–115.

[5] H. Rademacher, *On the partition function* $p(n)$, Proceedings of the London Mathematical Society **43** (1938) 241–254.

[6] N. J. A. Sloane. "The on-line enciclopedia of integer sequences", A000041, 2009. https://oeis.org/A000041.

[7] G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications (Rota Editor), v. 2, G.-C., Addison-Wesley, Reading, 1976.

[8] J. H. Bruinier e K. Ono, *Algebraic formulas for the coefficients of half-integral weight harmonic weak Maass forms.* Advances in Mathematics **246** (2013) 198–219.

[9] A. Folson, Z. Kent, K. Ono, *l-adic properties of the partition function.* Advances in Mathematics **229** (2012) 1586–1609.

[10] G. E. Andrews e K. Erikson, *Integer Partition*, Cambridge University Press, 2004.

[11] C. Mucelin, *Demonstrações bijetivas em partições.* Dissertação (Mestrado em Matemática) - IMECC-UNICAMP. Campinas, 55p. 2011.

[12] J. P. O. Santos, *Introdução à Teoria dos Números*, Coleção Matemática Universitária, 2006.

[13] J. P. O. Santos, P. Mondek, A. C. Ribeiro, *New two-line arrays representing partitions*, Annals of Combinatorics **15** (2011) 341–354.

[14] Brasil, Base Nacional Comum Curricular, Brasília: MEC, 2017, Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC-20dez-site.pdf.,(acessado em março de 2020).

[15] E. M. S. Alves, *A ludicidade e o ensino de matemática: uma prática possível*, Papirus, 2001.

[16] I. Vale, *Materiais Manipuláveis*, Primeira edição - Segunda triagem, Edição do Laborátorio de Educação Matemática (LEM), 2002.

[17] C. C. Luckesi, *Ludicidade e atividades lúdicas: uma abordagem a partir da experiência interna*, Educação e Ludicidade - Ensaios 02, GEPEL, Programa de Pós-Graduação em Educação, FACED/UFBA, **02** (2002) 22–60.