

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CORRELAÇÃO DE VELOCIDADE EM UM
MODELO DE CORROSÃO**

EVANDRO ALVES RODRIGUES

Brasília, 31 de Janeiro de 2008

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CORRELAÇÃO DE VELOCIDADE EM UM
MODELO DE CORROSÃO**

EVANDRO ALVES RODRIGUES

ORIENTADOR:

FERNANDO ALBUQUERQUE DE OLIVEIRA

CO-ORIENTADOR:

ISMAEL VICTOR DE LUCENA COSTA

Brasília, 12 de fevereiro de 2008

CORRELAÇÃO DE VELOCIDADE EM UM MODELO DE CORROSÃO

Por

Evandro Alves Rodrigues

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Fernando Albuquerque de Oliveira

(Orientador) IF-UnB

Tarcísio Marciano Rocha

IF-UnB

André Luiz Almeida Penna

IF-UnB

Annibal Dias de Figueiredo Neto

(suplente) IF-UnB

Brasília,

Prof. Tarcísio Marciano

Coordenador de Pós-Graduação

Instituto de Física

Universidade de Brasília

“You can know the name of a bird in all the languages of the world, but when you’re finished, you’ll know absolutely nothing whatever about the bird... So let’s look at the bird and see what it’s doing – that’s what counts. I learned very early the difference between knowing the name of something and knowing something.”

Richard Feynman

Agradecimentos

Agradeço a todos que colaboraram na elaboração desta tese. A minha família pela sua compreensão, aos meu orientadores pela paciência (e haja paciência), ao vizinhos do conjunto 2 pelo apoio, e a Míriam, por corrigir boa parte dos erros de gramática das versões iniciais deste texto.

Resumo

O crescimento de superfícies é uma área cujos métodos se aplicam a diversos sistemas na natureza. Nesta dissertação fazemos uma revisão do estudo de crescimento, com particular ênfase nas relações gerais de crescimento como a equação KPZ e na universalidade dos expoentes críticos. Como exemplo prático estudamos um modelo onde um líquido corrosivo atua em um sólido. Nossa principal contribuição é explicitada no capítulo 3 onde calculamos as funções de correlação de velocidade deste modelo. Obtemos uma nova relação de escala para o tempo de correlação, com um novo expoente ψ .

Abstract

Surface growth is an area whose methods apply to many systems on nature. On this work we review the growth process, with emphasis on the general growth relations, such as the KPZ equation and on the critical exponents universality. As a practical example we study a model where a corrosive liquid acts over a solid. Our main contribution is shown on chapter 3 where we calculate the velocity-velocity correlation functions of this model. We also obtain a new scale relation for the correlation time, with a new exponent ψ

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Histórico do estudo de crescimento	1
2	Crescimento	3
2.1	Crescimento de Interfaces	3
2.1.1	Altura e rugosidade	4
2.1.2	Expoentes dinâmicos e propriedades de escala	8
2.2	Equações de Crescimento	12
2.2.1	Equação de Edwards-Wilkinson	14
2.2.2	Equação de Kadar-Parisi-Zhang	15
3	Corrosão	17
3.1	Modelo de corrosão	17
3.1.1	Propriedades de escala	19
3.2	Velocidade de crescimento	23
3.2.1	Correlação da velocidade no tempo	24
4	Conclusões e Perspectivas	35

Lista de Tabelas

3.1	Valores de rugosidade e tempo de saturação para diversos comprimentos de substratos obtidos por meio do algoritmo MCO	21
3.2	Parâmetros obtidos nos ajustes dos resultados experimentais para a equação 3.4.	30

Lista de Figuras

2.1	Representação de um substrato discreto, com indicação da medida da altura em relação a um referencial fixo.	5
2.2	Representação de um substrato discreto, com indicação do referencial de altura média.	5
2.3	Evolução da rugosidade de uma superfície.	7
2.4	Gráfico de correlações em escala logarítmica.	8
2.5	Gráfico do logaritmo da rugosidade de saturação em função do logaritmo do comprimento.	9
2.6	Gráfico do logaritmo do tempo de saturação em função do logaritmo do comprimento.	10
2.7	Rugosidade em função do tempo.	12
3.1	Evolução temporal da rugosidade para substrato com $L=32$	19
3.2	Evolução temporal da rugosidade para substratos com $L=32$ e $L=128$	20
3.3	Gráficos de rugosidades em escala logarítmica.	21
3.4	Gráfico do logaritmo da rugosidade de saturação em função do logaritmo do comprimento.	22
3.5	Gráfico do logaritmo do tempo de saturação em função do logaritmo do comprimento.	23
3.6	Correlação da velocidade no tempo em um substrato de comprimento $L = 64$	25
3.7	Picos da função de correlação $c_v(t)$	26

3.8	Correlação $c_v(t)$ para substrato com comprimento $L = 64$, com $p=0$ e $p = 2$	27
3.9	Correlação $c_v(t)$ para substrato com comprimento $L = 64$, que com valores de $p = 4$ e $p = 6$	28
3.10	Módulo dos ajustes dos máximos e mínimos da correlação da velocidade no tempo para um substrato de comprimento $L = 256$	29
3.11	Exemplo de como substratos menores apresentam maior concordância com a função ajustada.	31
3.12	Tempo de correlação t_c em função do comprimento do substrato, em escala normal e em escala logarítmica.	33
3.13	Frequência de oscilação ω em função do tamanho do substrato.	34

Capítulo 1

Introdução

1.1 Histórico do estudo de crescimento

Ao nosso redor existem processos de crescimento e corrosão ocorrendo a todo instante. Tratam-se de fenômenos que parecem tão distintos quanto a mudança da forma do leito de um rio, devido a areia carregada pelas águas, bem como a expansão de colônias de fungos em um pão embolorado. Apesar da aparente diferença, ambos se encaixam na categoria dos crescimentos. Esse estudo se mostra de tal forma diversificado pelo fato de abranger diferentes áreas do conhecimento humano. Devido a esta abrangência e a seu alto grau de complexidade muitos de seus ramos foram ignorados pela Física durante longo tempo, sendo tratados por áreas de conhecimento que se mostravam mais próximas, como pela geologia e a biologia, nos casos acima citados. Isso, entretanto tornava a análise destes sistemas dispersa, pois o aproveitamento dessas ferramentas em outras áreas se torna muito difícil e as vezes pouco prático.

Com o surgimento dos sistemas complexos como área de pesquisa, novas metodologias permitiram a criação de ferramentas capazes de unificar os modelos, tornando esses sistemas antes tratados como fenômenos díspares, estudáveis por meio das mesmas ferramentas estatísticas.

Um dos fatores que permitiram tal evolução no estudo dos sistemas complexos foi a popularização da computação e o incrível aumento no poder de processamento disponíveis até mesmo em computadores pessoais, que tornou rápida e acessível as simulações numéricas, antes extremamente dispendiosas e demoradas em virtude do custo dos equipamentos necessários.

Também graças a popularização do uso da computação, surgiu uma área de estudo, os autômatos celulares. De forma bastante simplificada, podemos dizer que autômatos celulares são sistemas discretos regidos por algoritmos computacionalmente simples, cuja interação com a sua vizinhança permite mostrar comportamentos coletivos consideravelmente mais complexos, não necessariamente previstos pelo algoritmo inicial. O exemplo mais famoso de autômato celular é sem dúvida, o jogo da vida, inventado por John Horton Conway em 1970 [1].

As propriedades complexas que emergem a partir de um conjunto simples de regras é o que motiva o uso dos autômatos celulares no estudo da Física Estatística e da Complexidade, pois desta forma podemos modelar fenômenos naturais complexos, tais como a turbulência, spin glasses, transição de fase, formação de padrões entre outros.

Neste trabalho estudamos o modelo de corrosão de superfícies proposto por Mello, Chaves e Oliveira (MCO)[2], que utiliza a metodologia de autômatos celulares e parece se encaixar na classe de universalidade KPZ [3].

No capítulo 2 fazemos uma revisão sobre crescimento, em que mostramos algumas características e propriedades gerais do crescimento de superfícies e alguns conceitos chaves na compreensão de nosso estudo.

No capítulo 3 utilizamos o modelo MCO para o estudo de corrosão, em um sistema de $1 + 1$ dimensões. Neste capítulo apresentamos a metodologia e os principais resultados da nossa pesquisa. Verificamos a estabilidade do modelo proposto, assim como as funções de correlações temporal e espacial da velocidade.

Finalmente, no capítulo 4 apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Crescimento

2.1 Crescimento de Interfaces

O estudo de crescimento de interfaces é uma área extremamente abrangente, com uso potencial em diversas áreas do conhecimento humano, como a física, diversos ramos da biologia, a química e a geologia. Quando utilizamos estratégias estatísticas para seu estudo, conseguimos um nível de abstração matemática bastante elevado, o qual nos permite produzir ferramentas e observar características desses sistemas de forma que sejam analisados de forma equivalente, não importando detalhes de sua estrutura ou composição química.

Neste capítulo discutiremos as bases do crescimento de superfícies, apontando aspectos importantes na compreensão dos processos envolvidos e a utilização das ferramentas necessárias para analisar tais fenômenos. De forma bastante geral definimos uma superfície como uma fronteira entre dois sistemas físicos. Desta forma, o crescimento de superfícies abrange situações onde essa fronteira do sistema é alterada de forma dinâmica em meios desordenados. A frente de fogo que se propaga em uma folha de papel e a borda de uma colônia de bactérias apresentam-se como fronteiras de superfícies em crescimento que, em princípio, podem ser estudadas com esse método[4, 5, 6]. Superfícies diferentes podem possuir um conjunto de propriedades semelhantes, cujas características comuns compõe uma classe de

universalidade, que é utilizada para classificar a dinâmica desses processos. Assim, destacaremos nesse capítulo algumas propriedades comuns a todos os sistemas onde ocorre crescimento de superfície.

2.1.1 Altura e rugosidade

A rugosidade é uma propriedade relacionada a forma de uma superfície. Nós sabemos da experiência do dia a dia que uma lixa de paredes deve possuir uma aspereza maior do que a de uma placa de vidro. Naturalmente, observa-se que uma forma de mensurar e quantificar essa aspereza seria verificar a diferença de profundidade entre pontos dessa superfície. Assim, em um material como o vidro praticamente não se percebe a olho nu a existência de sulcos e elevações, enquanto na lixa esse fato é visível.

Dessa forma, podemos definir duas grandezas que nos auxiliarão na compreensão da dinâmica de superfície: a *altura*, que representaremos por h , que é a medida da profundidade dos sulcos ou das alturas dessas elevações, e a *rugosidade*, que é o desvio padrão da altura.

Para medir uma altura é necessário um *referencial*. Em nossos sistemas, podemos definir a altura como a medida entre a base do substrato e o topo de um determinado sítio, como na escala presente na figura 2.1, que chamaremos de h_f . Porém, como estamos interessados na dinâmica da superfície, esse valor não agrega, por si só, muita informação adicional. Assim, neste trabalho utilizaremos como referencial não a base do substrato, e sim a *altura média*, que é simplesmente uma média das alturas dos sítios para um determinado tempo t . Assim, para um substrato de comprimento L podemos definir a altura média como sendo

$$h_m(t) = \frac{1}{L} \int_0^L h_f(x, t) dx. \quad (2.1)$$

No caso de substratos discretos, consideramos que esse é na verdade formado por unidades discretas de comprimento unitário, de forma que a altura h_f e o comprimento L são números inteiros. Para tais substratos – de fundamental

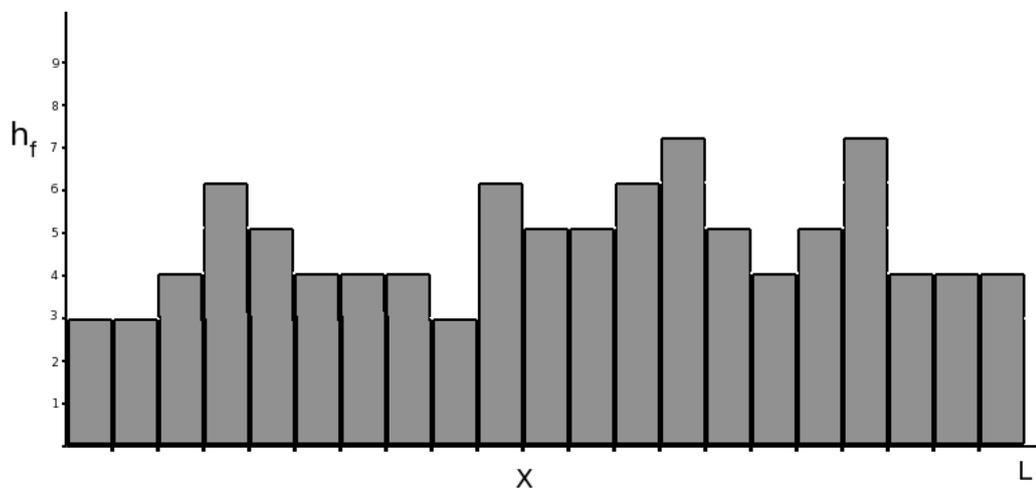


FIGURA 2.1: Representação de um substrato discreto, com indicação da medida da altura em relação a um referencial fixo.

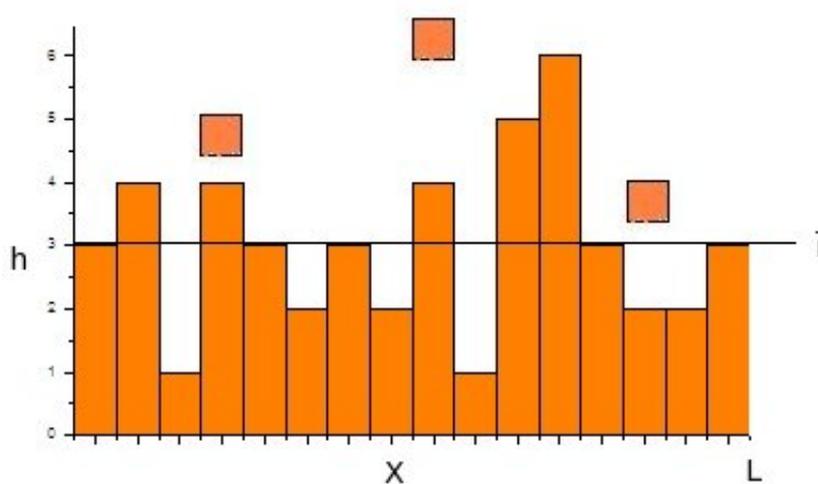


FIGURA 2.2: Representação de um substrato discreto, com indicação do referencial de altura média.

importância devido ao seu uso em simulações numéricas – fazemos a transição da integral para um somatório, de forma que nossa altura média assuma a seguinte forma:

$$h_m(t) = \frac{1}{L} \sum_{x=1}^L h_f(x, t), \quad (2.2)$$

onde utilizamos $h_f(x, t)$ para representar a altura de um determinado sítio na posição x no tempo t . Neste caso, por comodidade, x pode assumir valores contínuos, Eq. (2.1), ou discretos, Eq. (2.2). Deste modo definimos a nova altura h no referencial móvel como

$$h(x, t) = h_f(x, t) - h_m(t). \quad (2.3)$$

A rugosidade nos fornece um valor quantitativo da aspereza de uma superfície, revelando assim importantes informações acerca de sua formação. Definimos a rugosidade w como o desvio padrão da altura da interface, $h(x, t)$, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L h^2(x, t) dx}, \quad (2.4)$$

ou seja, a rugosidade nos dá uma informação estatística de como os valores das alturas se distanciam em torno de uma *média*, significando que um valor maior da rugosidade está associado a uma distribuição com maiores alturas em torno desse valor médio – ou seja, uma aspereza maior – enquanto um valor menor está associado a uma superfície mais lisa, com variações menores da altura entre sulcos e elevações.

A dinâmica de interfaces depende de diversos fatores relacionados a características do sistema tratado, como a dinâmica de deposição e possíveis correlações. É bastante comum que a evolução temporal de uma superfície esteja intimamente ligada a existência ou não de correlação na interface observada. Em modelos como o de deposição aleatória onde não há correlação ao longo da superfície a rugosidade aumenta indefinidamente, enquanto em modelos como o de deposição com relaxamento há a estabilização do valor da rugosidade após um determinado tempo. Sistemas que apresentam correlação costumam possuir algumas características de dinâmica superficial bastante semelhantes entre si e que nos permitem desenvolver uma metodologia para seu estudo que engloba diversos mecanismos de crescimento.

Para tornar este capítulo mais didático, reproduziremos aqui as figuras 2.3 - 2.7 que são resultados de nossas simulações com o modelo MCO, que discutiremos detalhadamente no capítulo 3.

Na figura 2.3 plotamos a rugosidade em função do tempo, em um típico processo de crescimento. A título de ilustração, apresentamos aqui a evolução da rugosidade em um sistema do modelo MCO, que será definido no capítulo 3. O comportamento apresentado na figura é padrão, aparecendo tanto em experimentos como na simulação. O modelo tem dimensão $1 + 1$, ou seja, uma para altura e outra para a posição. Utilizamos um substrato com comprimento $L = 256$ unidades e tomamos uma unidade de tempo após L realizações. A rugosidade cresce até atingir um valor de saturação w_{sat} após o *tempo de saturação*, t_{sat} . A presença de saturação mostra a existência de correlação.

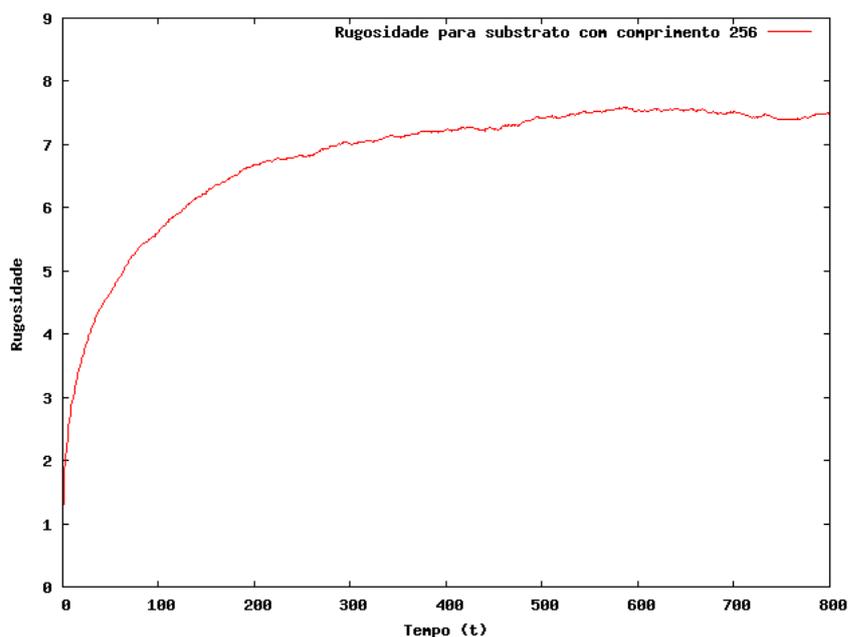


FIGURA 2.3: Evolução da rugosidade de uma superfície. Observe que após um tempo a rugosidade satura, atingindo o valor w_{sat} .

2.1.2 Expoentes dinâmicos e propriedades de escala

Sistemas que apresentam correlação superficial possuem uma característica em comum, que é a saturação da rugosidade após algum tempo. Podemos utilizar esta propriedade para estabelecer uma metodologia para estudo da dinâmica de crescimento que seja universal, sendo deste modo aplicada a uma grande classe de superfícies.

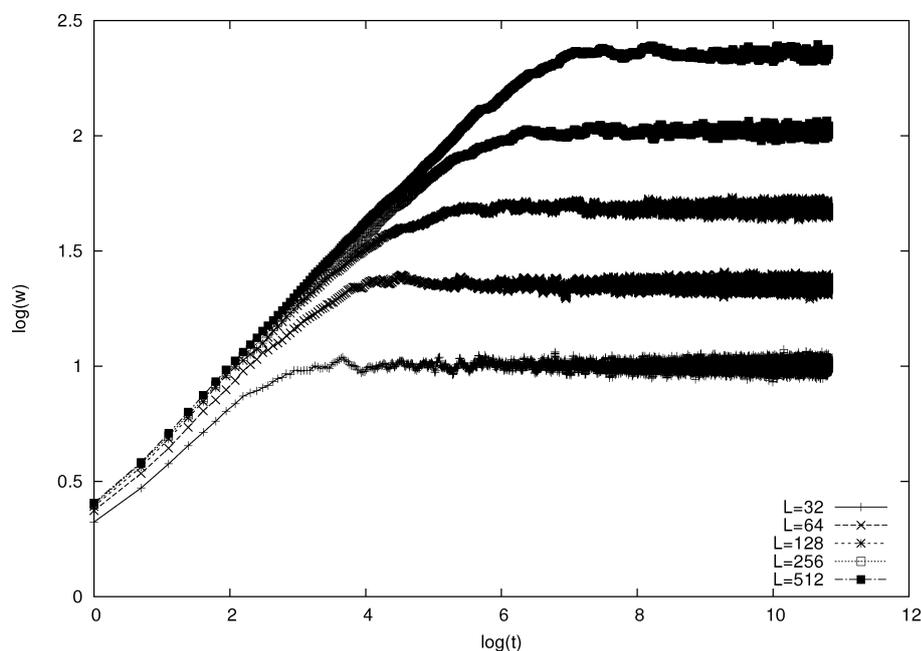


FIGURA 2.4: Gráfico de correlações em escala logarítmica. Nota-se que no trecho onde ocorre o crescimento como lei de potência, os substratos com diferentes comprimentos apresentam expoentes idênticos.

Na figura 2.4 mostramos a saturação em função do tempo em escala log-log para diversos valores de L , ou seja, repetimos os experimentos da figura 2.3 para diversos substratos. Observe que para um tempo $t \ll t_{sat}$

$$w(L, t) \sim t^\beta, \quad (2.5)$$

que mostra que a rugosidade se comporta como uma lei de potência no tempo. O expoente β é chamado o expoente de crescimento, e caracteriza a dinâmica da variação da rugosidade da superfície. Após este tempo, observamos que o valor da rugosidade se estabiliza, chegando ao que chamamos de rugosidade de saturação, w_{sat} .

Na figura 2.5 mostramos w_{sat} em função de L em uma escala log-log. Observe que podemos concluir que

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha. \quad (2.6)$$

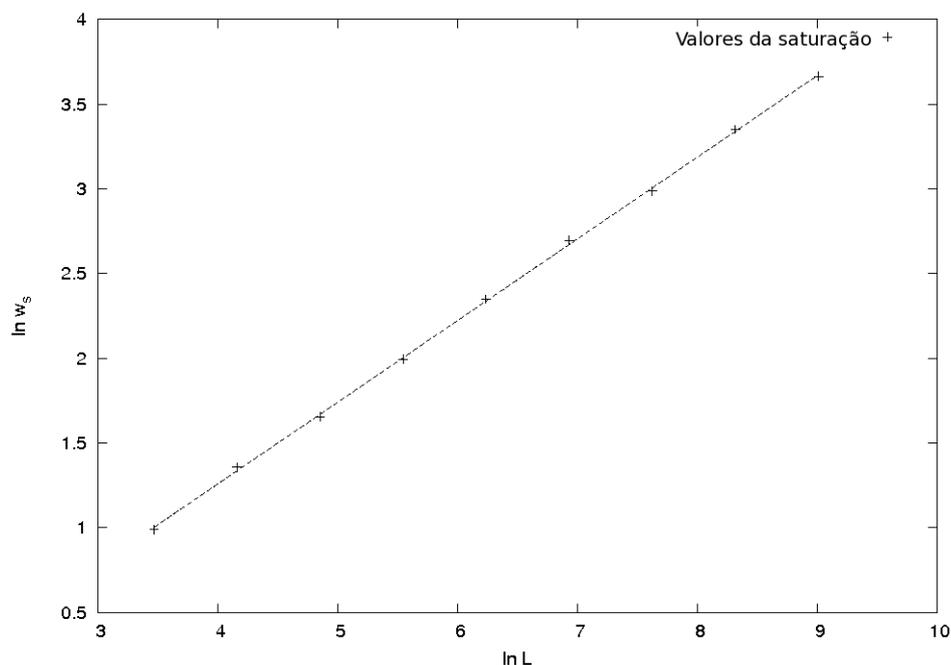


FIGURA 2.5: Gráfico do logaritmo da rugosidade de saturação em função do logaritmo do comprimento.

Isso significa que a rugosidade de saturação w_{sat} está relacionada também ao comprimento do substrato por meio de uma lei de potência. O expoente α é chamado de expoente de saturação e está diretamente relacionado a dinâmica de saturação.

Na figura 2.6 mostramos o tempo de saturação t_{sat} em função do comprimento do substrato L em escala logaritmica. Os valores são obtidos da figura 2.4. Observe que a figura mostra a existência do *expoente dinâmico* z definido por

$$t_{sat} \sim L^z. \quad (2.7)$$

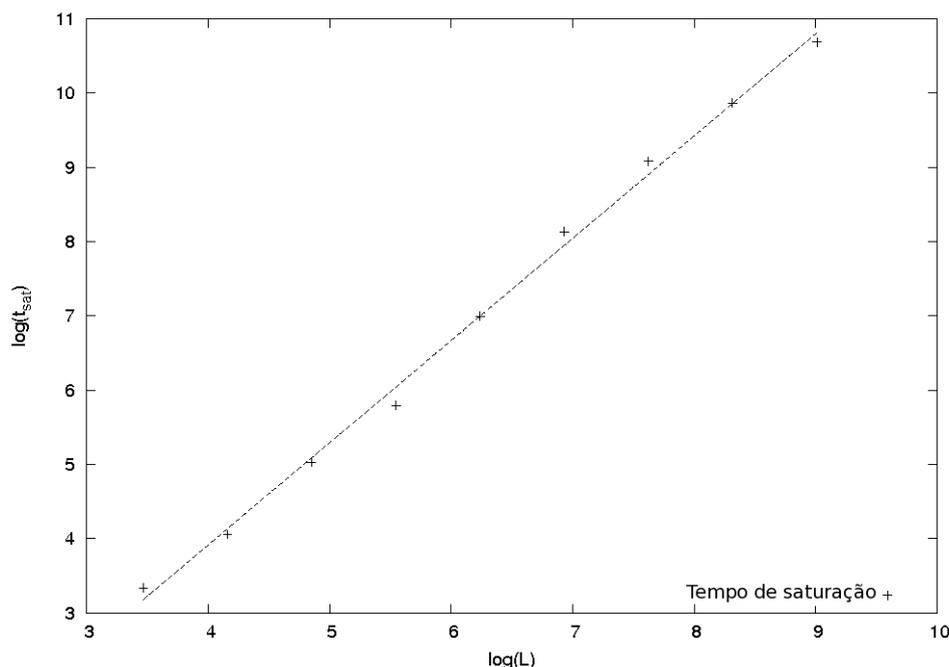


FIGURA 2.6: Gráfico do logaritmo do tempo de saturação em função do logaritmo do comprimento.

As leis de potência expostas nas equações Eq. (2.5), Eq. (2.6) e Eq. (2.7) são universais, i.e, vão além do nosso modelo [7] e são válidas para dimensões $d + 1$. Observando esse fato, podemos definir o que chamamos de *relação de escala*, utilizando α , β e z de forma a colapsar todas as funções de rugosidade em uma única curva. Assim, primeiramente escrevemos uma função $w'(L, t)$ tal que:

$$w'(L, t) = \frac{w(L, t)}{w_{sat}(L)}, \quad (2.8)$$

que simplesmente faz com que todas saturem no mesmo valor. Para colapsarmos completamente as curvas é necessário traçar o gráfico o tempo adimensional $t' =$

t/t_{sat} . Assim, escrevemos então uma função que representa o comportamento geral da rugosidade no tempo, de um substrato de comprimento L como sendo:

$$w'(L, t) = \frac{w(L, t)}{w_{sat}(L)}, \quad (2.9)$$

onde a função $w'(t')$ é a *função de escala*. Substituindo as expressões obtidas para α , β e z , obtemos a *Relação de Family-Vicsek*

$$w(L, t) \sim L^\alpha w' \left(\frac{t}{L^z} \right) \quad (2.10)$$

Na figura 2.7 plotamos $w'(t')$ como função de t/t_{sat} em escala log-log. Observe que todas as curvas colapsam em um mesmo gráfico, mostrando a universalidade do fenômeno. Esta função possui diferentes regimes, dependendo da razão t/t_{sat} .

- Para valores pequenos, temos que a função de escala apresenta crescimento do tipo lei de potência. Neste caso, podemos escrever que:

$$w \left(\frac{t}{t_{sat}} \right) \sim \left(\frac{t}{t_{sat}} \right)^\beta, \quad (2.11)$$

como mostra a figura 2.7.

- Para $t \rightarrow \infty$ temos que $w' \left(\frac{t}{t_{sat}} \right) \rightarrow 1$, como pode ser observado no gráfico normalizado 2.7.

Como dissemos antes, os coeficientes α , β e z não são independentes. Observando o gráfico 2.4, vemos que $w(t_{sat}) \sim t_{sat}^\beta$, e também que aproximando pela direita, temos que $w(t_{sat}) \sim L^\alpha$, de forma que $t_{sat}^\beta \sim L^\alpha$, e temos então

$$z = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.12)$$

Essa lei de escala é válida para todos os crescimentos que obedecem as relações Eq. (2.5), Eq. (2.6) e Eq. (2.7). Os possíveis valores para seus parâmetros definem *classes de universalidade*, que são utilizadas para classificar os diversos tipos possíveis de dinâmica de superfície.

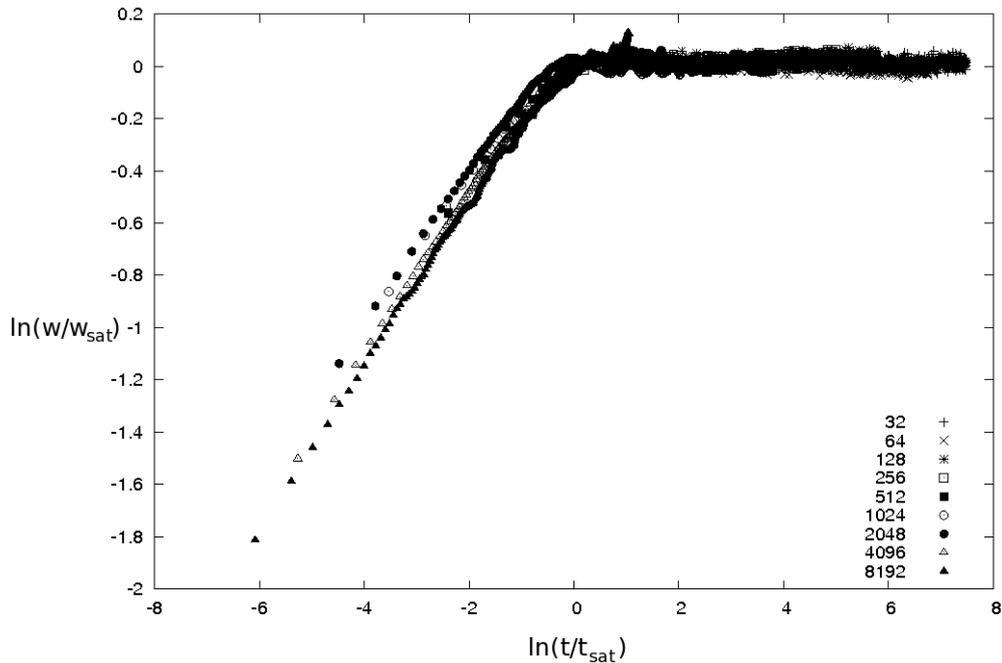


FIGURA 2.7: Rugosidade em função do tempo. Observe o colapso das funções de acordo com a relação de Family-Vicsek para substratos com diferentes comprimentos.

2.2 Equações de Crescimento

Para sistemas como os descritos anteriormente, esperamos que uma equação que modele corretamente tal sistema físico tenha a seguinte forma:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \Phi(x, t). \quad (2.13)$$

Ou seja, a variação da altura em um determinado ponto do substrato é igual a uma taxa de deposição $\Phi(x, t)$. Podemos separar este fluxo de partículas em duas partes tais que $\Phi(x, t) = H(x, t) + \eta(x, t)$, onde $H(x, t) = \langle \Phi(x, t) \rangle$ é a média das deposições, e $\eta(x, t)$ é uma flutuação nessa taxa, que satisfaz $\langle \eta(x, t) \rangle = 0$. Desta forma separamos a nossa deposição em uma parte determinística e uma parte estocástica.

Além disso, existem características das superfícies que nos permitem inferir a existência de simetrias, que nos informam as condições que uma equação de crescimento deve obedecer:

A *Invariância de translação no tempo*

A equação de crescimento deve ser independente do instante t_0 , de forma que esta deve ser invariante a transformações do tipo $t \rightarrow t + \delta t$. Essa exigência faz com que termos do tipo t^n , para $n \neq 0$ sejam descartados.

B *Invariância de translação na direção de crescimento*

A dinâmica do sistema não pode ser afetada pelo referencial escolhido para a altura dos sítios, de forma que a equação de crescimento deve ser invariante a transformações do tipo $h \rightarrow h + \delta h$, deste modo termos que incluam potências de h são descartados.

C *Invariância de translação na direção perpendicular ao crescimento*

A equação de crescimento deve ser invariante em relação a posição onde definimos o início da superfície, de forma que esta deve também ser invariante a uma transformação do tipo $x \rightarrow x + \delta x$, excluindo qualquer dependência explícita de x .

D *Invariância de rotação e inversão de x*

A equação de crescimento deve ser independente da direção do eixo da coordenada paralela à superfície, em outras palavras, o sistema deve ser invariante com relação a inversão de x para $-x$. Este princípio exclui termos como, $\nabla^{2n+1}h$, com $n = 0, 1, 2, \dots$. Porém, atente que os termos $(\nabla^{2n+1}h)^{2m}$, com $m = 0, 1, 2, \dots$ sobrevivem a este princípio de simetria.

E *Invariância da direção de crescimento*

A equação de crescimento deve ser independente de onde definimos o sentido do eixo da coordenada perpendicular à superfície, em outras palavras, o sistema

deve ser invariante com relação a inversão de h para $-h$. Este princípio exclui termos como, $(\nabla^n h)^{2m}$, com $m = 0, 1, 2, \dots$. A quebra deste princípio de simetria indica a existência de termos não-lineares no crescimento.

Considerando todos estes fatores, temos as condições para escrever as possíveis formas da equação de crescimento. Uma equação de crescimento geral e que satisfaz os requisitos citados consiste em

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = (\nabla^2 h) + (\nabla^4 h) + \dots (\nabla^{2n} h) + (\nabla^2 h)(\nabla h)^2 + \dots + (\nabla^{2k} h)(\nabla h)^{2j} + \eta(\mathbf{x}, t). \quad (2.14)$$

2.2.1 Equação de Edwards-Wilkinson

No regime hidrodinâmico,¹ podemos desprezar as derivadas de maior ordem para obter a equação de Edwards-Wilkinson (EW) [10],

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu(\nabla^2 h) + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (2.15)$$

onde ν é uma constante positiva chamada de *tensão superficial*. Este termo é assim chamado devido a sua tendência a suavizar a superfície, reduzindo assim sua rugosidade. No modelo de EW supomos que o ruído é não correlacionado, de forma que

$$\langle \nu(x, t)\nu(x_1, t_1) \rangle = 2D\delta^d(x - x_1)\delta(t - t_1), \quad (2.16)$$

onde d é a dimensão.

Existem duas formas de obter os expoentes α , β e z na equação de EW, usando argumentos de escala ou resolvendo propriamente a equação. Nós o faremos através dos argumentos de escala. Para isto, consideremos a seguinte mudança de escala,

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = b\mathbf{x}, \quad (2.17)$$

¹a transformada de Fourier de $\nabla^n h(x, t)$ é $k^n \tilde{h}(k, w)$ de modo que no limite dos grandes comprimentos de onda $k \rightarrow 0$, e tomamos o menor n

na vertical,

$$h \rightarrow h' = b^\alpha h, \quad (2.18)$$

e no tempo

$$t \rightarrow t' = b^z t. \quad (2.19)$$

Devemos observar que as relações acima são válidas estatisticamente, e são consequência das relações Eq. (2.6) e Eq. (2.7). A equação de crescimento deve então ser invariante a esta transformação de escala. O tempo é reescalado para que a rugosidade mantenha o seu comportamento original.

Das propriedades da função $\delta(\lambda)$ obtemos

$$\langle \eta(bx, b^2 t) \eta(bx', b^2 t') \rangle = D \delta^d(b|x - x'|) \delta(b^z |t - t'|) \quad (2.20)$$

$$= D b^{-(d+z)} \delta^d(x - x') \delta(t - t'). \quad (2.21)$$

Logo,

$$b^{\alpha-z} \frac{\partial h}{\partial t} = \nu b^{\alpha-2} \nabla^2 h + b^{-\frac{d+z}{2}} \eta(x, t), \quad (2.22)$$

ou

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu b^{z-2} \nabla^2 h + b^{\frac{z}{2} - \frac{d}{2} - \alpha} \eta(x, t). \quad (2.23)$$

A invariância de escala exige então que

$$\alpha = \frac{2-d}{2} \quad (2.24)$$

$$\beta = \frac{2-d}{4} \quad (2.25)$$

$$z = 2. \quad (2.26)$$

Estes resultados não são razoáveis para sistemas com $d \geq 2$, e mesmo para $d = 1$ obtemos expoentes inconsistentes quando comparados a experimentos.

2.2.2 Equação de Kadar-Parisi-Zhang

Diante das inconsistências do resultado de EW tornava-se necessário uma nova equação para descrever o crescimento. Em 1986, na Universidade de Cambridge, Kadar, Parise e Zhang [11] conjecturaram que faltava na equação de EW

um termo não-linear da forma $\lambda(\nabla h)^2$ devido ao crescimento lateral [11]. Note que este termo, dada a sua origem, não está sujeito a simetria de inversão $h \rightarrow -h$ discutida previamente. Deste modo a equação KPZ é escrita como

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (2.27)$$

onde λ é a *intensidade de não-linearidade*.

É sabido que diversos modelos unidimensionais se encaixam na classe de universalidade KPZ, sendo a deposição balística [12, 13, 14] um dos exemplos mais conhecidos. Existem também sistemas com $d > 1$ que são classificados como pertencentes a classe de universalidade KPZ [15]. Os coeficientes encontrados para $d = 1$ são:

$$\alpha = 1/2 \quad (2.28)$$

$$\beta = 1/3 \quad (2.29)$$

$$z = 3/2. \quad (2.30)$$

O modelo MCO a ser descrito no capítulo seguinte apresenta resultados compatíveis com esses valores.

Capítulo 3

Corrosão

No capítulo 2 introduzimos as ferramentas básicas ao estudo do crescimento de superfícies por métodos estatísticos. Neste capítulo apresentaremos um modelo de corrosão para uma estrutura sólida e nossa contribuição ao estudo deste analisando a correlação de velocidades, assunto que não foi abordado em publicações anteriores.

Para isso realizamos simulações com o objetivo de analisar a dinâmica do sistema através das correlações na velocidade. Estas simulações foram executadas em cenários com substratos de comprimentos $L = 2^n$, com n inteiro entre 5 e 13. Assim como no cálculo das rugosidades, utilizamos apenas condições de borda periódica. Este capítulo está distribuído do seguinte modo: na seção 3.1 apresentamos o modelo MCO de crescimento, mostrando suas propriedades de escala. Na seção 3.2 definimos as grandezas necessárias à investigação da correlação da velocidade no modelo MCO e apresentamos nossos resultados.

3.1 Modelo de corrosão

Recentemente, um modelo discreto e determinístico foi proposto por Mello, Chaves e Oliveira [2], o qual chamaremos MCO, para descrever a dissolução de um sólido cristalino por um líquido corrosivo. Nesse modelo, consideramos que a corrosão ou deposição ocorre em um substrato composto de L unidades discretas, onde a cada unidade de tempo t é feita a deposição de L partículas, i.e., em média uma partícula

por sítio, com eventos posteriores regidos por um algoritmo simples. Tais eventos ocorrem sobre uma superfície de $1 + 1$ dimensões. Cálculos para $2 + 1$ dimensões, neste modelo, foram realizados por Aarão [15, 16], entretando, ele não estudou as funções de correlação de velocidade, que apresentamos neste trabalho.

A probabilidade da ocorrência de um evento de retirada nesse modelo é proporcional ao número de lados livres. Esse comportamento é justificado pela consideração de que o número de colisões por unidade de tempo entre as moléculas do solvente com a superfície é proporcional a área exposta e de que o solvente mantém durante todo o experimento uma concentração suficientemente baixa do soluto de forma a não ocorrer re-deposição.

O algoritmo utilizado no modelo MCO apresenta características típicas de autômatos celulares, isto é, regras simples que se reproduzem *ad infinitum*. Para evitarmos alturas negativas fazemos $h \rightarrow -h$, de modo que uma retirada corresponde a uma deposição, e a corrosão assemelha-se a um crescimento. A cada deposição é desencadeada uma série de eventos dentro de um conjunto simples de regras do modelo, descritas a seguir:

- (1) Um sítio $i=1,2,3,\dots,L$ do substrato é escolhido aleatoriamente,
- (2) $h_i(t + 1) = h_i(t) + 1$,
- (3) se $h_{i-1}(t) < h_i(t)$; então $h_{i-1}(t + 1) = h_i(t)$.
- (4) se $h_{i+1}(t) < h_i(t)$; então $h_{i+1}(t + 1) = h_i(t)$.

A execução do algoritmo nas bordas depende das condições de contorno escolhidas. A forma do algoritmo descrita acima é adequada somente em sistemas de borda periódica. Em sistemas de borda não-periódica existem faces expostas nas laterais da superfície que devem ser ignoradas, de forma que nestes sistemas quando $i = 1$ ou $i = L$ os passos (3) ou (4) não são executados, respectivamente.

Nos instantes iniciais da dinâmica de crescimento, a rugosidade cresce tal como a de um crescimento aleatório com $\beta = 1/2$. Isto ocorre porque nos instantes iniciais a correlação espacial entre vizinhos ainda é pequena de modo que o algoritmo da dinâmica ainda não se diferenciou em relação ao algoritmo aleatório. Após esta

fase inicial, ainda na fase de tempos pequenos, $t \ll t_{sat}$, a rugosidade passa a crescer com outro expoente β .

Dentre as propriedades emergentes, nota-se o fato da rugosidade superficial apresentar, após esse período de crescimento aleatório, um crescimento com forma de lei de potência que se encaixa na definição de Family-Vicsek [3]. Após esse período de crescimento rápido, observamos, como mostrado no gráfico 3.1, um período de estabilidade no valor da rugosidade quando esta *satura*.

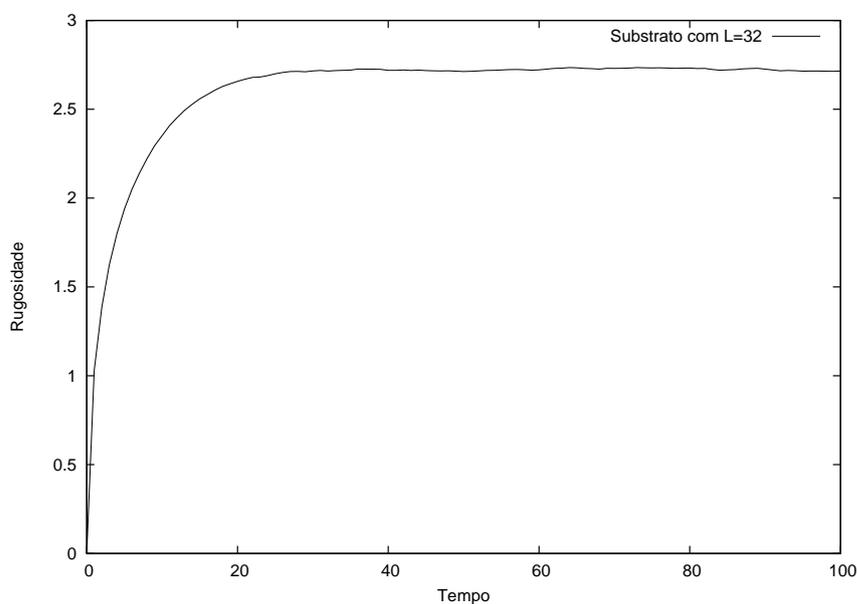


FIGURA 3.1: Evolução temporal da rugosidade para substrato com L=32. Observe que após algum tempo ocorre a saturação da rugosidade.

3.1.1 Propriedades de escala

A análise das propriedades de escala se dá através da obtenção dos expoentes da relação de Family-Vicsek. Para isso, fizemos diversas simulações para substratos com comprimentos $L = 2^n$, com n inteiro e variando entre 5 e 13 para obter t_{sat} e

w_{sat} .

Na figura 3.2 mostramos a rugosidade em função do tempo. Os valores dos tempos de saturação aparecem explícitos. Note a dependência do tempo de saturação do tamanho do substrato.

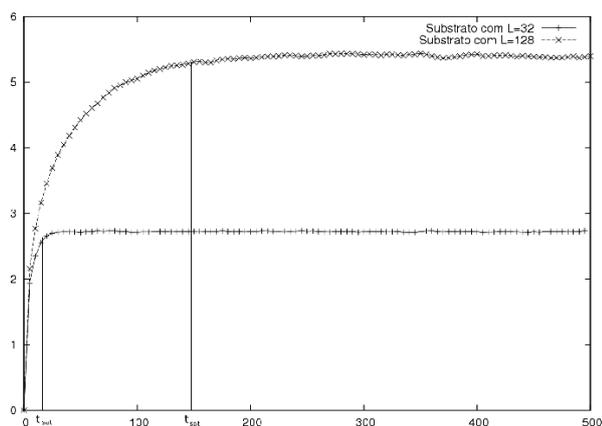


FIGURA 3.2: Evolução temporal da rugosidade para substratos com $L=32$ e $L=128$.

É possível observar que o aumento do comprimento do substrato leva a tempos de saturação maiores.

No gráfico 3.3 vemos que para substratos de diferentes comprimentos em escala log-log temos inclinações iguais nos tempos antes da saturação. Note que neste intervalo a curva é aproximadamente uma reta, o que indica que a rugosidade se comporta como uma lei de potência do tempo neste período. Através da inclinação da curva antes do período de saturação e utilizando a Eq. (2.5) obtemos o coeficiente $\beta = 0.335 \pm 0.001$.

A tabela 3.1 ilustra os valores de tempo e rugosidade de saturação obtidos para diversos substratos. A relação entre o aumento do comprimento do substrato e o conseqüente aumento do tempo de saturação é evidente.

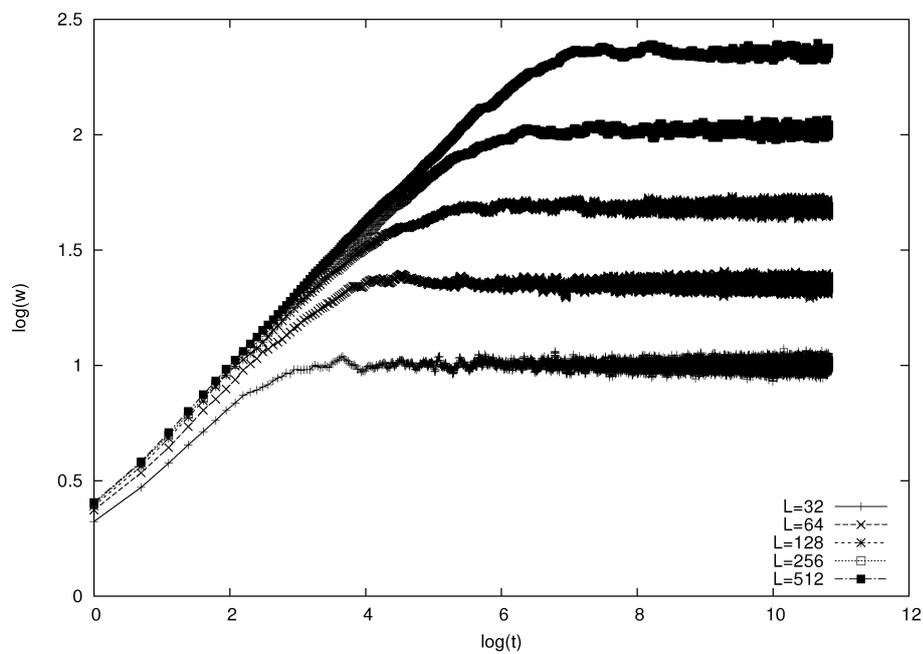


FIGURA 3.3: Gráficos de rugosidades em escala logarítmica. Nota-se que no trecho onde ocorre o crescimento como lei de potência, os substratos com diferentes comprimentos apresentam expoentes idênticos.

TABELA 3.1: Valores de rugosidade e tempo de saturação para diversos comprimentos

de substratos obtidos por meio do algoritmo MCO

L	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
w_{sat}	2.68	3.88	5.23	7.34	10.46	14.80	19.80	28.52
t_{sat}	28.2	57.8	153.4	328.6	1094.0	3421.4	8822.7	19342.7

Efetutando um procedimento semelhante, plotamos os valores da rugosidade de saturação w_{sat} em função do comprimento do substrato também em escala log-log no gráfico 3.4. Observamos que a relação entre estas grandezas também é uma lei de potência, como descrito na Eq. (2.6). A partir da inclinação desta curva, obtemos então o valor do expoente $\alpha = 0.482 \pm 0.003$.

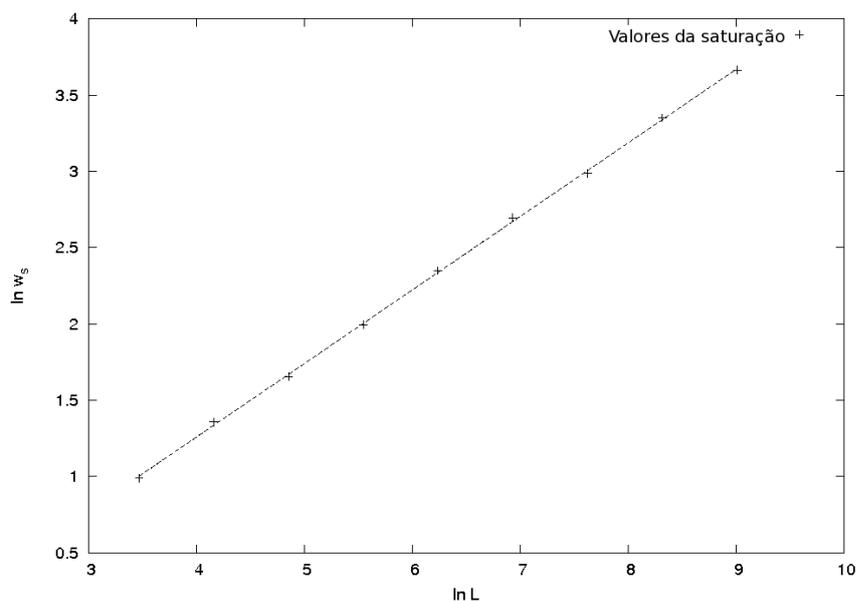


FIGURA 3.4: Gráfico do logaritmo da rugosidade de saturação em função do logaritmo do comprimento.

De forma semelhante podemos obter o expoente $z = 1.4 \pm 0.2$ por meio da análise em escala logarítmica do tempo de saturação em função do comprimento do substrato L , mostrado na figura 3.5, que torna visível a lei de potência definida na Eq. (2.7). Note que este valor concorda com $z = \frac{\alpha}{\beta} = 1.44 \pm 0.01$, dentro do limite de erro. Observe que a razão α/β produz um valor mais preciso.

De posse destes resultados, verificamos que os valores $\alpha = 0.482 \pm 0.003$ e $\beta = 0.335 \pm 0.001$ são muito próximos a $1/2$ e $1/3$, os quais caracterizam o modelo dentro da classe KPZ. Esta concordância de valores não é casual, visto que as regras (3) e (4) do modelo são equivalentes ao crescimento lateral $\lambda(\nabla h)^2$ da equação KPZ.

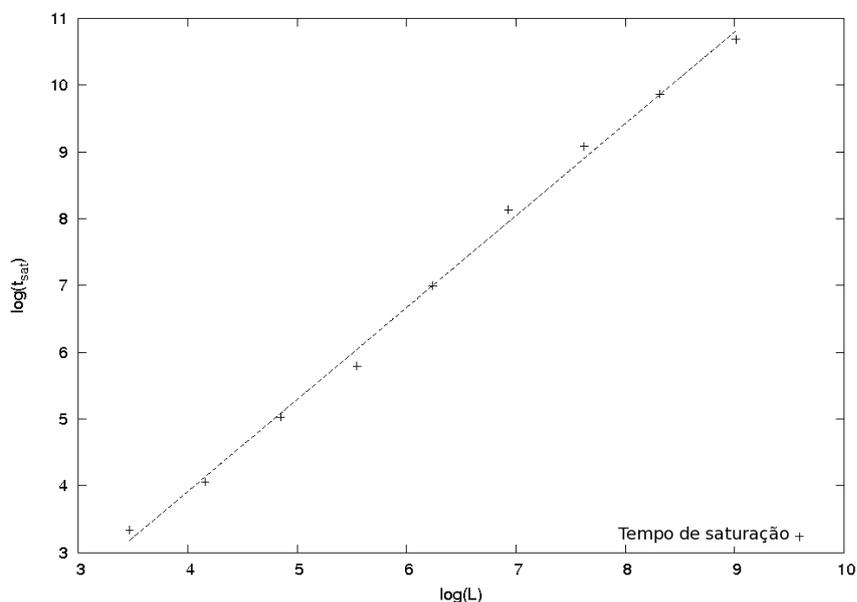


FIGURA 3.5: Gráfico do logaritmo do tempo de saturação em função do logaritmo do comprimento.

Deste modo, temos um modelo simples cuja semelhança com KPZ pode encontrar várias aplicações [15, 16, 17, 18]

3.2 Velocidade de crescimento

A velocidade de crescimento de um determinado sítio i no tempo t está relacionada a taxa de deposição de partículas e ao algoritmo de crescimento, visto que este regula a variação nas alturas de um determinado sítio. Assim como foi feito para altura, onde escolhemos um referencial baseado na altura média, aqui utilizamos em nossos cálculos não a velocidade de crescimento de um sítio i em relação a base do substrato $v_f(i, t)$, e sim a velocidade de crescimento de cada sítio i em relação a uma velocidade média, $v_m(i, t)$,

$$v_m(i, t) = \frac{1}{T} \sum_{\tau = -\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_f(i, t + \tau), \quad (3.1)$$

de forma que definimos então a velocidade em relação ao referencial móvel como sendo

$$v(i, t) = v_f(i, t) - v_m(i, t). \quad (3.2)$$

Deste modo podemos calcular as correlações da flutuação da velocidade, ou simplesmente correlações da velocidade.

3.2.1 Correlação da velocidade no tempo

Nosso principal objetivo neste trabalho é compreender como se comporta a velocidade de crescimento de superfícies no modelo MCO. Com este objetivo, foi feito uso de simulações computacionais, onde modelamos o comportamento de substratos de diversos comprimentos. Assim, propomos uma função com a seguinte forma para as correlações da velocidade no tempo,

$$C_v(t) = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{x=L} \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{\tau+t < T} v(x, \tau) v(x, t + \tau), \quad (3.3)$$

onde de forma semelhante aos cálculos de rugosidade, utilizamos substratos discretos de comprimento $L = 2^n$ unidades, com n inteiro valendo entre 5 e 12.

A partir dos dados obtidos por meio da simulação, plotamos o gráfico 3.6. Neste, observamos que ocorre uma saturação em um tempo curto, de forma que só é visível uma curva com o crescimento médio da correlação. Assim, refazemos a simulação de forma que a contagem de velocidades ocorra em um tempo menor. Escolhemos então $m = \frac{L}{2^p}$, onde p é um número inteiro positivo, como unidade de tempo onde será feita a contagem de velocidades.

Na figura 3.8 observamos os gráficos dos resultados do experimento para diversos valores de p para um substrato de comprimento $L = 64$. Para $p = 0$ vemos apenas um resultado de decaimento, assim como antes do aumento da resolução. Para $p = 2$ notamos o que inicialmente se assemelha a uma forma de correlação. Já na figura 3.9 aumentamos mais ainda a resolução, de forma que com $p = 4$ e

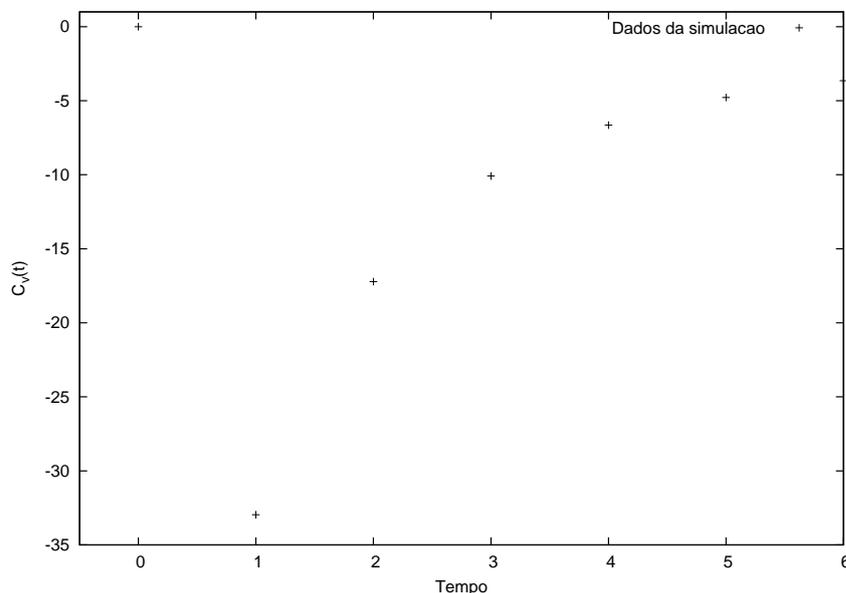


FIGURA 3.6: Correlação da velocidade no tempo em um substrato de comprimento $L = 64$. Nota-se que apenas é possível observar um decaimento com este nível de resolução.

$p = 6$ observamos claramente a natureza oscilatória da função $c_v(t)$, mostrando a existência de correlação.

Estes resultados nos sugerem uma função de ajuste oscilatória e decrescente. O comportamento dos máximos das funções, como visto na figura 3.7, sugere um decaimento exponencial. Desta forma, utilizamos para ajustes dos valores numéricos a seguinte função,

$$C_v(T) = Ae^{-t/t_c} \cos(\omega t). \quad (3.4)$$

Para simplificar o ajuste, normalizamos a altura das funções de forma que a altura do primeiro pico seja 1. Assim descartamos o parâmetro A de nossa equação, restando os parâmetros t_c e ω , relacionados ao tempo de correlação e a frequência das oscilações de $c_v(t)$, respectivamente.

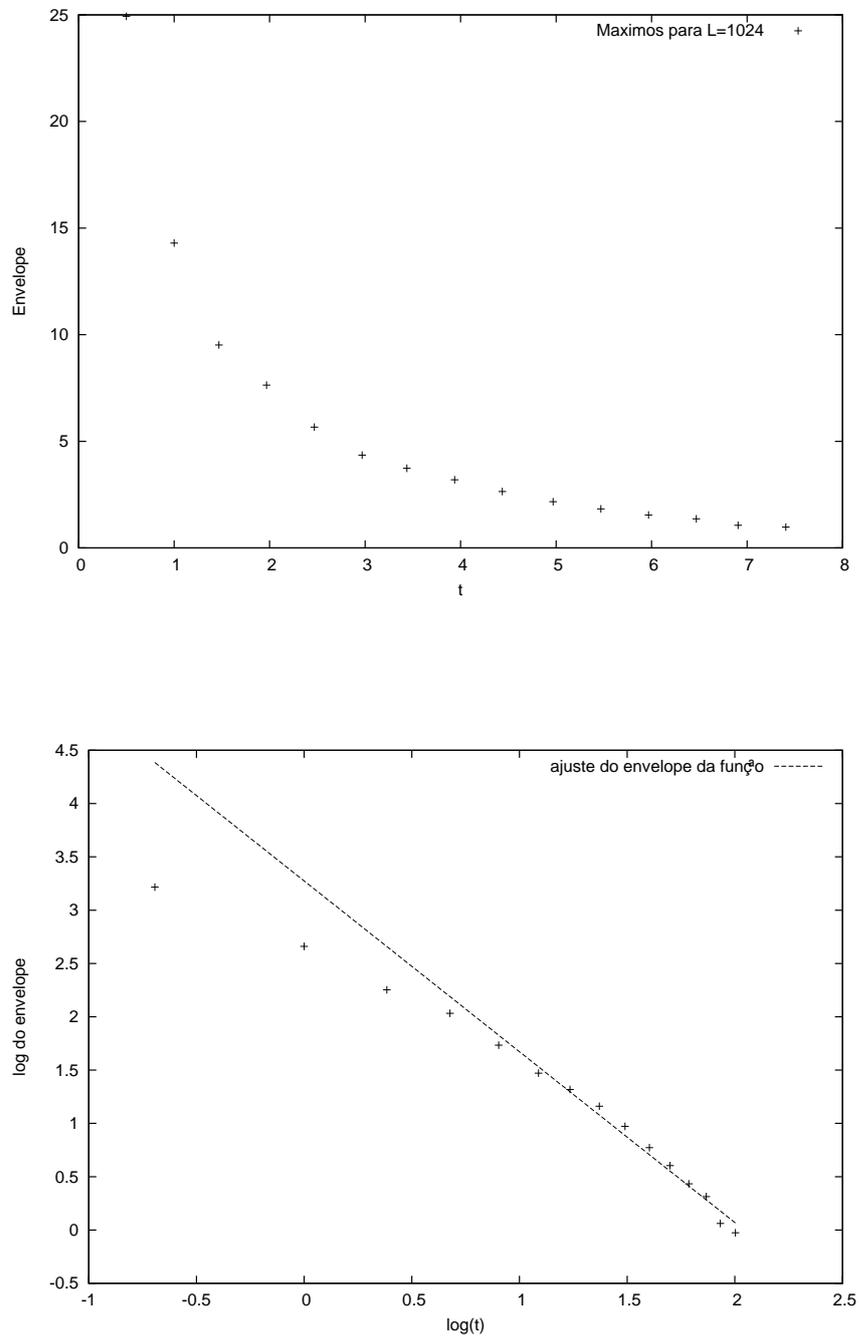


FIGURA 3.7: Picos da função de correlação $c_v(t)$ em escala normal e em escala logarítmica. Observe que os primeiros pontos não se ajustam a reta devido aos efeitos relacionados ao início das deposições.

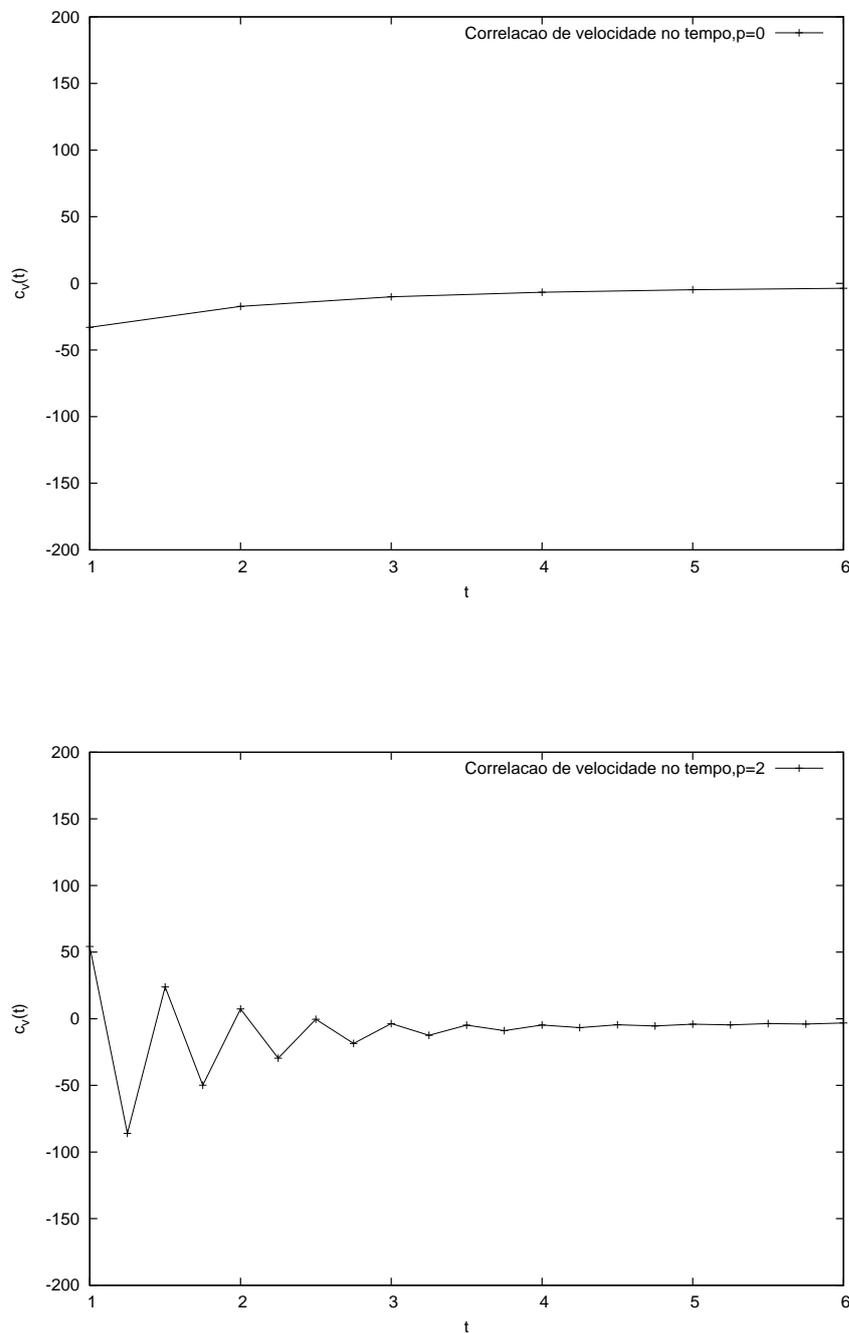


FIGURA 3.8: Correlação $c_v(t)$ para substrato com comprimento $L = 64$, com $p=0$ e $p = 2$. Nota se que com o aumento de p passamos para o que se assemelha a uma curva com oscilações.

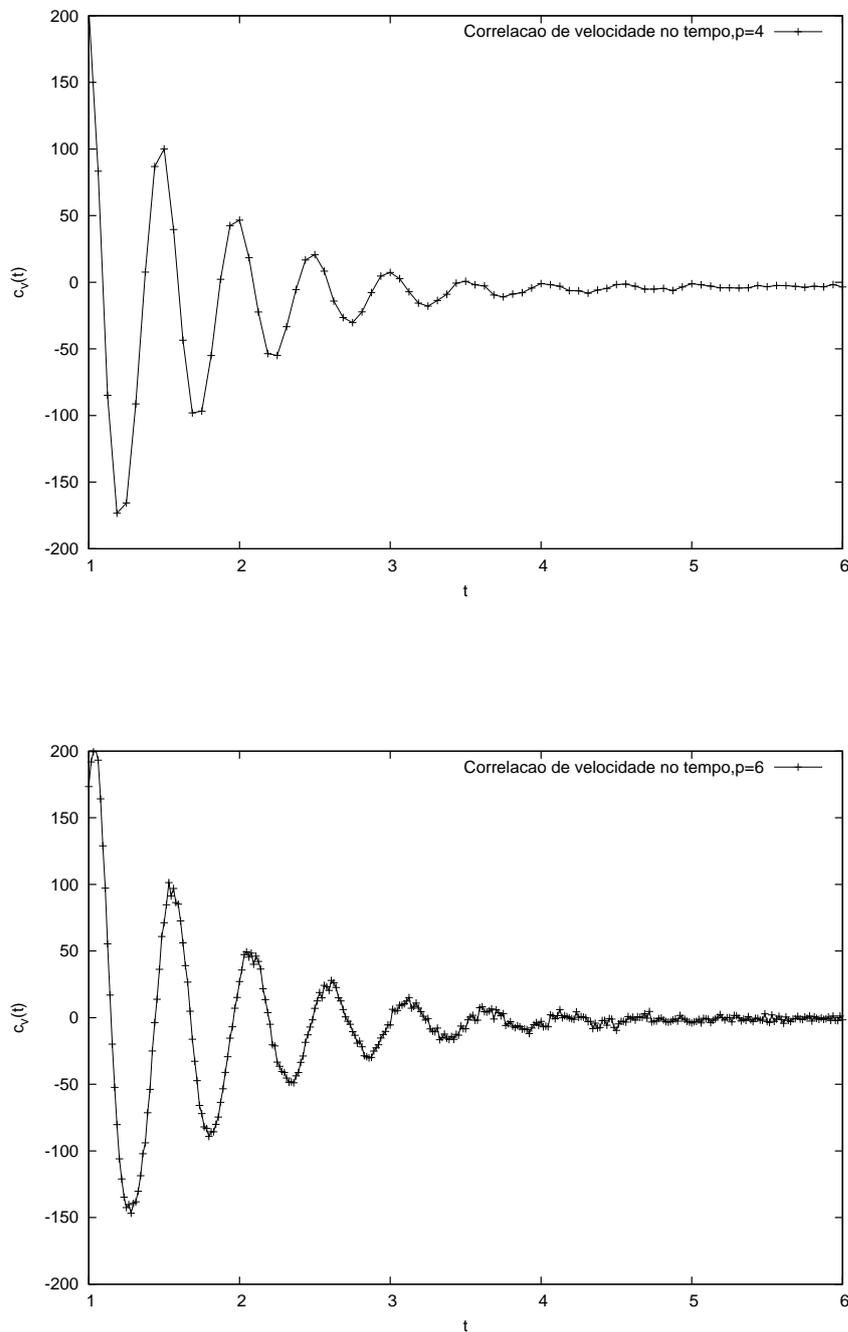


FIGURA 3.9: Correlação $c_v(t)$ para substrato com comprimento $L = 64$, que com valores de $p = 4$ e $p = 6$. Observe que as oscilações se tornam claramente visíveis.

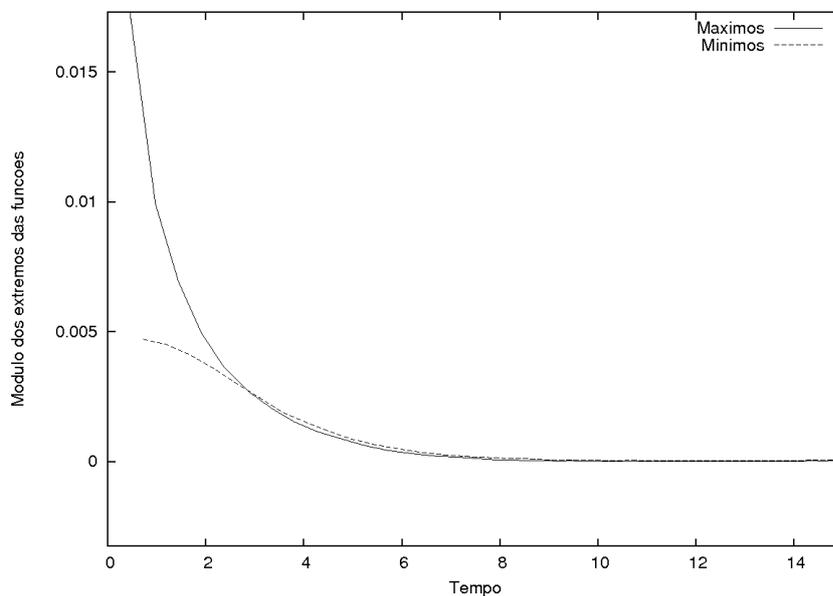


FIGURA 3.10: Módulo dos ajustes dos máximos e mínimos da correlação da velocidade no tempo para um substrato de comprimento $L = 256$.

Observando os gráficos dos resultados e das curvas ajustadas, como por exemplo na figura 3.11, verificamos que para valores grandes de L , $c_v(t)$ apresenta assimetria nos valores do início do crescimento. Plotamos no gráfico 3.10 os valores dos módulos dos máximos e mínimos dos resultados experimentais de um substrato com comprimento $L = 256$. Observamos que ambos possuem a forma de exponenciais decrescentes, com os seus valores se aproximando após algum tempo. Consideramos que esta anomalia está relacionada a efeitos das primeiras deposições, quando o crescimento ainda apresenta características de crescimento aleatório [2]. Os valores para t_c e ω obtidos para os diversos comprimentos de substrato encontram-se na tabela 3.2.

L	32	64	128	256	512	1024	2048
$t_c (\pm 15\%)$	0.5872	1.1929	1.7665	1.9113	2.9596	5.6838	15.937
$\omega (\pm 12\%)$	12.8510	13.0865	13.0987	13.2189	13.1859	13.1925	13.1944

TABELA 3.2: Parâmetros obtidos nos ajustes dos resultados experimentais para a equação 3.4.

Plotamos na figura 3.12 o valor do parâmetro de decaimento t_c em função do comprimento do substrato. Observamos que este parâmetro cresce com um aumento do comprimento do substrato, que significa que grandes substratos tem tempos de saturação de $c_v(t)$ maiores, o que é condizente com o fato da rugosidade saturar em tempos maiores em substratos maiores. Usando um procedimento semelhante ao utilizado para obter os coeficientes α , β e z , plotamos os dados em escala logarítmica. Assim, obtemos a segunda curva no gráfico 3.12. A função que apresenta o melhor ajuste aos nossos dados é uma nova relação de escala da forma

$$t_c(L) = \xi L^\psi. \quad (3.5)$$

Ajustando então uma linha reta no gráfico em escala logarítmica, obtemos $\xi = 0.066 \pm 0.032$ e $\psi = 0.68 \pm 0.07$.

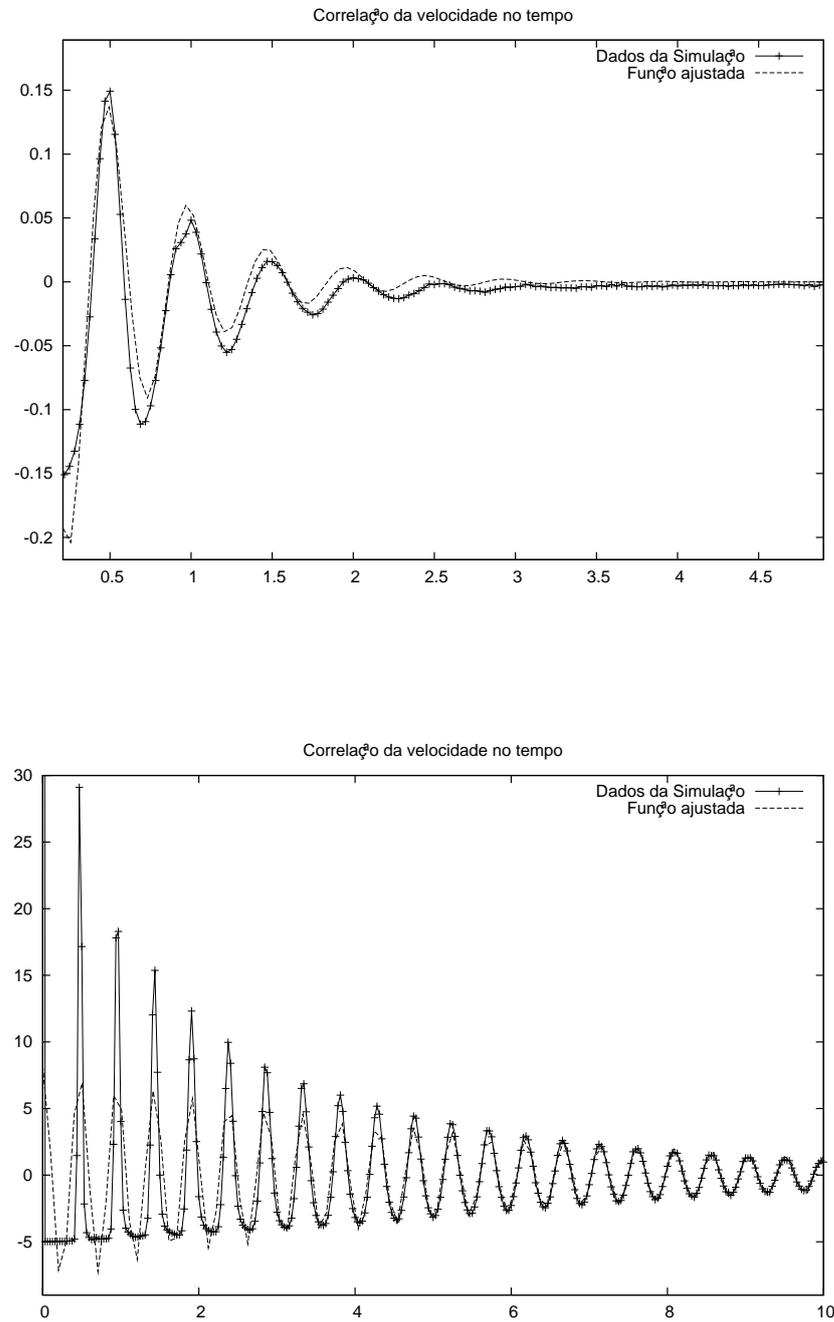


FIGURA 3.11: Exemplo de como substratos menores apresentam maior concordância com a função ajustada, mostrando no topo um substrato com comprimento $L = 32$ e abaixo um substrato com $L = 1024$

No gráfico 3.13 mostramos os valores obtidos para o parâmetro ω em função do comprimento do substrato. Observa-se que ω apresenta efeitos de comprimento finito, tendo um valor constante ω_0 quanto $L \rightarrow \infty$. Através do ajuste dos valores, obtemos uma equação para ω com a seguinte forma,

$$\omega(L) = \frac{\chi}{L} + \omega_0, \quad (3.6)$$

com $\chi = -11.2 \pm 1.1$ e $\omega_0 = 13.21 \pm 0.01$, que significa que em substratos grandes, com n maior do que 10, podemos considerar o frequência de oscilação ω_0 como constante.

Assim, a correlação da velocidade no tempo pode ser escrita em sua forma analítica como

$$C_v(t, L) = e^{-t/t_c} \cos(\omega t), \quad (3.7)$$

com t_c e ω definidos pelas Eq. (3.5) e Eq. (3.6) respectivamente. Deste modo, podemos obter os valores da correlação da velocidade no tempo para superfícies de crescimento dentro do modelo MCO.

Nossa análise leva a um novo expoente ψ . Entretanto, não fomos capazes de observar a sua universalidade. O resultado ainda apresenta algumas imprecisões devido aos recursos computacionais disponíveis. Como nossos programas já estão funcionando, esperamos fazer novas execuções destes no novo sistema de super-computação que está sendo implementado no FIS de modo a estudar a possível universalidade deste expoente.

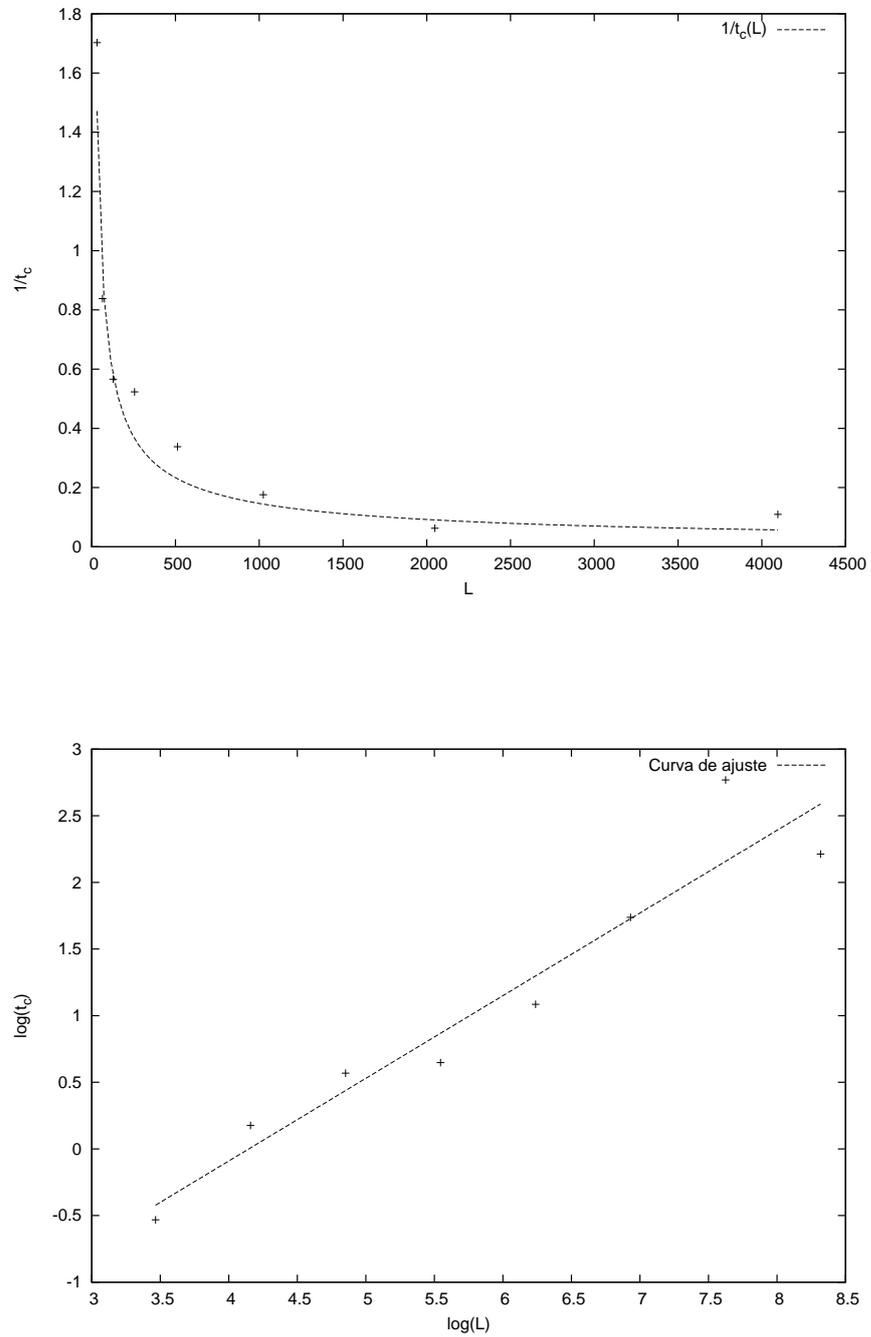


FIGURA 3.12: Tempo de correlação t_c em função do comprimento do substrato, em escala normal e em escala logarítmica.

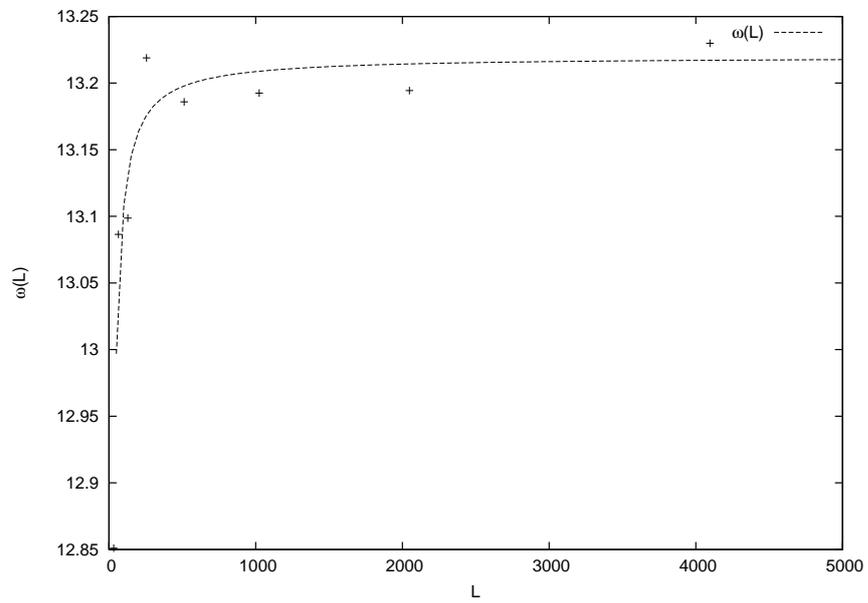


FIGURA 3.13: Frequência de oscilação ω em função do tamanho do substrato.

Observa-se a estabilização do valor para substratos grandes.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação abordamos o problema de crescimento de superfícies em $d + 1$ dimensões. Este tipo de crescimento é importante devido a grande gama de processos naturais que podem ser modelados desta forma, abrangendo diversas áreas do conhecimento.

Para realizar este estudo, nos baseamos no modelo MCO de corrosão de superfícies em $1 + 1$ dimensões. Este modelo, que pertence a classe de universalidade KPZ, utiliza autômatos celulares para a partir de um conjunto de regras simples simular a corrosão de superfícies. Utilizamos o modelo invertendo o referencial de altura h de forma a facilitar a análise de resultados e a simulação. Em todo este trabalho utilizamos apenas condições de borda periódica, para evitar efeitos de borda e para permitir a obtenção de resultados em substratos menores.

Primeiramente foram feitos os cálculos para a evolução da rugosidade, para confirmar o funcionamento da simulação. Nesta etapa, verificamos que os resultados obtidos são coerentes com publicações anteriores, confirmando que o sistema estudado pertence a classe KPZ. Posteriormente, foram realizados experimentos visando obter informações relacionadas a correlação de velocidade. Nestas simulações utilizamos substratos com diversos comprimentos, a fim de investigar a relação entre esta grandeza e as características da correlação da velocidade no tempo. Os substratos investigados possuíam comprimentos $L = 2^n$, com n inteiro entre 5 e 12.

Verificamos que a resolução utilizada inicialmente no experimento na etapa

de cálculo de rugosidades – onde era considerada como unidade de tempo padrão o tempo necessário para a ocorrência de L deposições – era inadequado, fazendo com que efeitos fossem mascarados por médias entre períodos. Assim, optamos por realizar os experimentos utilizando uma fração de nossa unidade de tempo inicial. Desta forma, dividimos a unidade de tempo em intervalos de $1/2^p$, i.e. contamos cada fração de tempo após $m = \frac{L}{2^p}$ realizações.

Obtemos então resultados que apresentam a forma de uma função oscilatória com um envoltório exponencial decrescente. Por meio de ajustes numéricos, chegamos a uma função com a forma de produto de cosseno por exponencial, com 2 parâmetros. Observamos que estes parâmetros, t_c e ω apresentam a forma de funções do comprimento do substrato L , sendo que a relação obtida para t_c apresenta uma relação de escala $t_c \sim L^\psi$, com um possível novo expoente ψ . A frequência de oscilação ω apresenta apenas efeito de dimensões finitas atingindo um valor fixo ω_0 para $L \rightarrow \infty$.

Temos como perspectiva futura avançar na investigação de crescimento de superfícies, estudando também a correlação de velocidade no espaço. Um dos problemas encontrados é que não podemos reduzir o espaço em subdivisões como fizemos com o tempo, de modo que as correlações não aparecem de forma nítida. Com o novo sistema de computação de alto desempenho implementado no Instituto de Física da UnB esperamos tratar substratos maiores, o que na prática corresponde a unidades espaciais menores. Posteriormente, planejamos também estudar possíveis formas analíticas das funções de probabilidade envolvidas nas deposições.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Gardner, The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life" *Scientific American* **223**, 120-123 (1970).
- [2] B. A. Mello, A. S. Chaves, F. A. Oliveira, Discrete atomistic model to simulate etching of a crystalline solid, *Phys. Rev. E*, **63**, 041113 (2001).
- [3] F. Family, T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces*, World Scientific, Singapore (1991).
- [4] J. Merikoski, J. Maunuksela, M. Myllys, J. Timonen, M. J. Alava, Temporal and spatial persistence of combustion fronts in paper, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 24501 (2003).
- [5] A. Myllys, J. Maunuksela, A. Alava, J. Merikoski, J. Timonen, Kinetic roughening in slow combustion of paper, *Phys. Rev. E*, **64**, 036101 (2001).
- [6] M. Matsushita, H. Fujikawa, Diffusion-limited growth in bacterial colony formation, *Physica*, **44**, 12294 (1991).
- [7] A. -L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth*, Cambridge University Press, (1995).
- [8] Z. Csahók, T. Vicsek, Kinetic roughening in a model of segmentation of granular materials, *Phys. Rev. A*, **46**, 4577 (1992).

- [9] E. Ben-Jacob, O. Shochet, A. Tenenbaum, I. Cohen, A. Czirók, T. Vicsek, Communication, regulation and control during complex patterning of bacterial colonies, *Fractals*, **2**, 15 (1994).
- [10] S. F. Edwards and D. R. Wilkinson, The surface statistics of a granular aggregate, *Proc. R. Soc. London A*, **381**, 17 (1982).
- [11] M. Kardar, G. Parisi, and Y. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 889 (1986).
- [12] D. N. Sutherland, Comment on Vold's simulation of floc formation, *J. Colloid Interface Sci.* **22**, 300-302 (1966).
- [13] M. J. Vold, A numerical approach to the problem of sediment volume, *J. Coll. Sci.* **14**, 168-174 (1959).
- [14] M. J. Vold, Sediment volume and structure in dispersions of anisotropic particles, *J. Phys. Chem.* **63**, 1608-1612 (1959).
- [15] F. D. A. Aarao Reis, Numerical study of roughness distributions in nonlinear models of interface growth, *Phys. Rev. E*, **72**, 032601 (2005)
- [16] F. D. A. A. Reis, Dynamic transition in etching with poisoning, *Phys. Rev. E*, **68**, 041602 (2003).
- [17] A.P. Reverberi, A.G. Bruzzone, L. Maga and A. Barbucci, Monte Carlo simulation of a ballistic selective etching process in (2+1) dimensions, *Physica A* **354**, 323-332 (2005).
- [18] P. Cordoba-Torres, Chemical ordering and kinetic roughening at metal-electrolyte interfaces *Phys. Rev. B* **75**, 115405 (2007).
- [19] P. Jensen, A.-L Barabasi, H. Larralde, S. Havlin, H. E. Stanley, Model incorporating deposition, diffusion, and aggregation in submonolayer nanostructures, *Phys. Rev. E*, **50**, 618 (1994).

- [20] F. Colaiori, M. A. Moore, Numerical solution of the mode-coupling equations for the Kardar-Parisi-Zhang equation in one dimension, *Phys. Rev. E*, **65**, 17105 (2002).
- [21] U. J. T. Filho, *Análise dos expoentes de crescimento de superfícies fractais*, Trabalho de conclusão de curso - Universidade Católica de Brasília (2005).