



José Solano de Moraes Neto

*Dinâmica de uma partícula teste sob a ação das
forças devido a um gás de N partículas.
Um estudo das renormalizações da força
resultante e suas consequências dinâmicas.*

Brasília - DF

Março de 2019



José Solano de Moraes Neto

*Dinâmica de uma partícula teste sob a ação das
forças devido a um gás de N partículas.
Um estudo das renormalizações da força
resultante e suas consequências dinâmicas.*

Tese de Doutorado apresentado ao programa
de pós-graduação do Instituto de Física da
Universidade de Brasília - Unb.

Orientador:

Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA - UNB
INSTITUTO DE FÍSICA - IF
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Brasília - DF

Março de 2019

Dedico esta tese à minha avó Oci Inácio (em memória).

Seja forte e corajoso! Não fique desanimado, nem tenha medo, porque eu, o Senhor, seu Deus, estarei com você em qualquer lugar onde você for.

Josué 1:9

Agradecimentos

Aos meus pais, por acreditarem em mim e depositarem tanta confiança. Mãe você é o meu maior exemplo de amor e dedicação.

Aos meus irmãos Diego e Maraylla, mesmo longe estavam me apoiando e ajudando.

Ao Caio, sobrinho querido.

Ao Prof. Dr. Annibal Dias de Figueiredo Neto, pela orientação, compreensão, paciência e aprendizado. Serei eternamente grato pela confiança depositada em mim.

Aos professores que tiveram importância fundamental em minha formação: Prof. Carlos Burlamaqui (em memória), Prof. Dr. Paulo Henrique, Prof. Dr. José Pimental, Prof. Dr. Irismar Gonçalves, Prof. Dr. Marcos Amato e Prof. Dr. Tarcisio Marciano.

Aos amigos: Moises, Igor, Lilah, Rodrigo, Arthur, Lydiane, Debora, Everton, Carlos Cesar, Rafael, Patrícia, Ana, Sara, Rhuiago, Cláudio, Pedro e Romer, sem os quais não imagino como seria essa minha jornada.

À minha tia Josenildes Inácio(em memória) pelo carinho e dedicação a sua família

Ao Instituto de Física e Universidade de Brasília, pela oportunidade e infraestrutura concedidas.

À CAPES pela bolsa concedida e pela manutenção do Portal de Periódicos, essencial para que essa pesquisa fosse realizada.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta tese queremos analisar o processo difusivo, ou de maneira mais ampla, o processo estocástico de uma partícula (chamada de partícula teste) que está em interação com N partículas (chamadas de Gás de Partículas ou simplesmente Gás). A interação entre cada partícula do gás e a partícula teste tem a mesma natureza e será descrita por uma força central cuja intensidade depende do inverso de alguma potência positiva da distância entre as partículas. De fato queremos estudar o processo estocástico da partícula teste na condição em que o número de partículas do gás tende ao infinito, o que necessariamente implicará em algum tipo de renormalização na constante ou no tamanho do sistema. O foco da análise tese será entender os efeitos das diferentes renormalizações possíveis sobre as propriedades da dinâmica estocástica da partícula teste.

Palavras-chave: Processos Estocásticos; Função Característica; Difusão.

Abstract

In this thesis we want to analyze the diffusive process, or more broadly, the stochastic process of a particle (called a test particle) that is in interaction with N particles (called Particle Gas or simply Gas). The interaction between each particle of the gas and the test particle has the same nature and will be described by a central force whose intensity depends on the inverse of some positive power in the distance between the particles. In fact, we want to study the stochastic process of the test particle under the condition that the number of particles in the gas tends to infinity, which necessarily implies some kind of renormalization in the constant or the size of the system. The focus of the thesis analysis will be to understand the effects of the different possible renormalizations on the properties of the test particle's stochastic dynamics.

Keywords: Stochastic Processes; Characteristic Function; Diffusion.

Lista de Símbolos

X	Variável Estocástica
θ	Variável de Retorno
ψ	Função Característica
β	Expoente de Hurst
α_0	Coefficiente de Viscosidade do Fluido
m	Massa
γ	Coefficiente de Viscosidade por Unidade de Massa
ξ	Ruído (Força Aleatória por Unidade de Massa)
\tilde{w}	Aproximações de Quinta
w	Aproximações de Quarta
h	Medida da Discretização do Domínio da Equação
ϵ	Tolerância
δ_0	Valor Especial para Novo Passo no Runge-Kutta-Fehlberg
δ	Expoente de Força
d	Dimensão do Sistema
α	Expoente de Lévy
Φ	Função Característica Assintótica
Ω	Função de Lévy
K	Constante Real
\bar{M}	Matriz de Covariância
σ_N	Parâmetro de Dispersão
\vec{S}_α	Vetor Aleatório
κ_N	Constante da Renormalização da Força
L	Tamanho do Sistema
A	Desvio Padrão no Ajuste da Função Característica

K_B Constante de Boltzmann

a_N Constante da Força

Lista de Figuras

1	Movimento aleatório de duas partículas em um plano. As partículas foram submetidas a uma força flutuante com média nula e variância constante. . .	p. 17
2	Difusão	p. 27
3	Ilustração do modelo em 2D.	p. 39
4	<p><i>Condição Periódica e Evolução Temporal da Velocidade Quadrada Média.</i> Condição Periódica: CPT (linhas de traço), CPS (linha solida). Passo de integração: $\Delta t = 0.01$ (linha vermelha), $\Delta t = 0.005$ (linha azul). (a): Velocidade quadrática média da partícula de teste. (b): Velocidade quadrada média das partículas de gás. <i>Parâmetros de simulação:</i> $\alpha = \infty$, $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $t_F = 10$ e $N_S = 500$.</p>	p. 44
5	<p><i>Evolução temporal da velocidade e posição da partícula de teste.</i> (a): Velocidade para dez trajetórias (linhas cinzas), Velocidade Média $\langle v(t) \rangle$ (linha preta) Intervalo de variação $\pm \sqrt{\langle v^2(t) \rangle}$ (linha vermelha). (b): Posição para dez trajetórias (linhas cinzas), Posição Média $\langle x(t) \rangle$ (linha preta) e Intervalo de variação $\pm \sqrt{\langle x^2(t) \rangle}$ (linha vermelha). <i>Parâmetros de simulação:</i> $\alpha = \infty$, $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 0.01$ and $t_F = 10$. As médias são calculadas sobre $N_S = 500$ trajetórias e a condição periódica usada é CPS.</p>	p. 45
6	<p><i>Difusão da partícula de teste.</i> Etapa de integração: $\Delta t = 0.01$ (linha vermelha) e $\Delta t = 0.005$ (linha azul). As linhas tracejadas pretas são obtidas a partir do ajuste linear para o regime de difusão assintótica. Os valores de ajuste obtidos para β (ver equação 4.9) são respectivamente $\beta = 1.32$ ($\Delta t = 0.01$) and $\beta = 1.26$ ($\Delta t = 0.005$). <i>Parâmetros de simulação:</i> $\alpha = \infty$, $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $t_F = 10$ e $N_S = 500$. A condição periódica usada é CPS.</p>	p. 46

- 7 *Importância da força de reação - Gráficos de $\log \langle v^2(t) \rangle \times \log(t)$ para diferentes expoentes de Levy.* Curvas obtidas no sistema dinâmico (4.1) com força de reação (linhas vermelhas). Curvas obtidas do sistema dinâmico (4.10) sem força de reação (linhas azuis). (a): Expoente de Levy $\alpha = 0.25$ ($\mu = 1.31$). it (b): Expoente de Levy $\alpha = 0,75$ ($\mu = 1,51$). *Panel (c):* Expoente de Levy $\alpha = 1.5$ ($\mu = 1.50$). (d): Expoente de Levy $\alpha = 3.0$ ($\mu = 1.44$). *Parâmetros de Simulação:* $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$ e $N_S = 1000$. A condição periódica usada é CPS. Os valores de μ na equação (4.11) são obtidos pelo ajuste linear da parte difusiva das curvas azuis. p. 48
- 8 *Evolução temporal da força resultante.* As figuras mostram a força resultante na partícula teste para uma trajetória e valores diferentes do expoente de Levy. *Parâmetros de Simulação:* $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$, $N_S = 1$ p. 50
- 9 *A função característica da força resultante.* Os gráficos mostram a função característica Empírica (linhas de ponto) e Teórica (linhas sólidas) para diferentes valores do expoente de Levy. A função característica teórica é obtida ajustando a expressão dada em (5.1). *Parâmetros de Simulação:* $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$, $N_S = 1$ p. 51
- 10 *Ajuste linear da função característica empírica.* Os painéis mostram o ajuste linear da expressão fornecida em (5.1) (linhas sólidas) com a Função Característica Empírica (linhas de ponto) para diferentes valores do expoente de Levy. Os valores de ajuste para A e α são mostrados nos respectivos painéis. *Parâmetros de Simulação:* $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$, $N_S = 1$ p. 52
- 11 *Velocidade quadrada média da partícula de teste.* Os painéis mostram a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para sistema dinâmico com $\alpha = 0.5$, $N = 10$ e valores diferentes de κ_N e L_N . (a): $\kappa_N = 1$ e $L_N = 1$ (linha vermelha); $\kappa_N = 1$ e $L_N = 50$ (linha azul). (b): $\kappa_N = 1$ e $L_N = 1$ (linha vermelha); $\kappa_N = 0,5$ e $L_N = 1$ (linha azul). Valores assintóticos de $\langle v^2(t) \rangle$ (linhas tracejadas). *Parâmetros de Simulação:* $N = 10$, $\alpha = 0.5$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$, $t_F = 10$, $N_S = 1000$ p. 54

- 12 (a): *Velocidade quadrada média da partícula teste*. Evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ (linhas vermelhas) e seus respectivos valores assintóticos (linhas tracejadas) para diferentes valores de K_0 . De baixo para cima, mostramos as curvas correspondentes respectivamente a $K_0 = 0$, $K_0 = 1$, $K_0 = 2,5$, $K_0 = 5,0$, $K_0 = 7,5$ e $K_0 = 10$. (b): *Temperatura Assintótica*. T_{teste} (pontos vermelhos), T_{gs} (pontos pretos), T_0 (linha de traço). *Parâmetros de Simulação*: $N = 50$, $\alpha = 0.5$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$, $t_F = 1$, $t_I = 0.5$, $N_S = 1000$ p. 55
- 13 *Temperatura assintótica para sistemas com menor força constante ou maior tamanho*. Os painéis mostram a temperatura assintótica para diferentes valores de K_0 : T_{teste} (pontos vermelhos), T_{gs} (pontos pretos), T_0 (linhas tracejadas). O Sistema Dinâmico tem os mesmos parâmetros de simulação mostrados na figura 12, exceto que em (a) temos $\kappa_N = 10^{-4}$ e em (b) temos $L_N = 50$. *Parâmetros de Simulações*: $N = 50$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 10^{-2}$, $t_F = 1$, $t_I = 0.5$, $N_S = 1000$ p. 56
- 14 *Difusão da partícula teste para diferentes valores do expoente de Levy*. $\alpha = 0,5$ (linha vermelha), $\alpha = 1,5$ (linha verde), $\alpha = \infty$ (linha azul), ajuste linear (linhas de traço) O expoente de difusão assintótica β obtido por ajuste linear é mostrado na tabela 1. *Parâmetro de Simulação*: $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$, $N_S = 1000$. Os valores de t_F são respectivamente $t_F = 1$ ($\alpha = 0.5$), $t_F = 2.5$ ($\alpha = 1.5$), $t_F = 10$ ($\alpha = \infty$). . . p. 57
- 15 *Evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ - Limite Flutuativo-L*. A figura mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$. Os valores de N e L_N satisfem a condição (3.24). Os gráficos pequenos mostram essa evolução temporal na escala $\log - \log$ p. 61
- 16 *Evolução temporal $\langle x^2(t) \rangle$ - Limite flutuativo-L*. Os gráficos mostram a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ para $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ na escala $\log - \log$. Os valores de N e L_N satisfazem a condição(3.24). p. 62
- 17 *Valores Assintóticos - Limite Flutuativo - L*. (a): Expoente de difusão assintótica em função do expoente de Levy. (b): $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle$ como função do expoente Levy. Os valores assintóticos são calculados a partir das simulações com $N = 10^4$ e usando $t_I = t_F/2$ na equação (5.3). O expoente de difusão é obtido por ajuste linear no intervalo $[t_I, t_F]$ p. 63

18	<i>Evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ - Limite Flutuativo-κ.</i> O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$. O valor de N e κ_N satisfazem a condição (3.25). O gráfico pequeno mostra a evolução temporal na escala $\log - \log$	p. 64
19	<i>Evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ - Limite Flutuativo -κ.</i> O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ for $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ na escala $\log - \log$. Os valores de N e κ_N satisfazem a condição (3.25).	p. 65
20	<i>Valores Assintóticos - Limite Flutuativo - κ.</i> It (a): Expoente de difusão assintótica em função do expoente de Levy. it (b): $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle$ como função do expoente Levy. Os valores assintóticos são calculados a partir das simulações com $N = 10^4$ e usando $t_I = t_F/2$ na equação (5.3). O expoente de difusão é obtido por ajuste linear no intervalo $[t_I, t_F]$	p. 66
21	<i>Evolução Temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ - Limite de Vlasov.</i> O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para $\alpha = 1.5, 3.0, \infty$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$. O valor de N e κ_N satisfazem a condição (3.27).	p. 67
22	<i>Evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ - Vlasov Limit.</i> O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ para $\alpha = 1.5, 3.0, \infty$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ na escala $\log - \log$. O valor de N e κ_N satisfazem a condição (3.27).	p. 68
23	<i>Limite de Vlasov para uma distribuição inicial não uniforme de partículas do gás.</i> (a): A evolução temporal de $\langle v(t) \rangle$ para gases com número crescente de partículas N . (b): A evolução temporal de $\text{Var}(v(t))$ para os respectivos valores de N . Os valores de N e κ_N atendem à condição (3.27). <i>Parâmetros de Simulação:</i> $\alpha = \infty, K = 1, L_N = 1, \sigma = 1, \Delta t = 10^{-2}, t_F = 10, N_S = 1000$. A variância da velocidade da partícula teste é dada por $\text{Var}(v(t)) = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2$	p. 69
24	<i>O tempo transitório no limite de Vlasov.</i> It (a) Curvas dadas pelo modelo (6.2) ajustadas às curvas mostradas na figura 23 (a) (linhas pretas). it (b): Os tempos transitórios (tabela 2) em função de N (pontos pretos) e o ajuste linear desses pontos (linha preta). A expressão do ajuste linear mostrado na figura (b) é $t_N^{trans} = 0,4083N$	p. 70
25	<i>Série temporal da velocidade, Limite Flutuativo- Renormalização K para $\alpha = 1,5$</i>	p. 76
26	<i>Série temporal da velocidade: Runge-Kutta-Fehlberg (Linha Azul) e Runge-Kutta de 4^o adaptado (Linha vermelha)</i>	p. 77

27	Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas. Observa-se que quanto maior o número de partículas no gás, menor o desvio padrão da função característica.	p.95
28	(a) $\alpha = \infty$ (b) $\alpha = 3.0$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas. Observa-se que quanto maior o número de partículas no gás maior o desvio padrão da função característica	p.96
29	(a) $\alpha = 1.5$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas.	p.96
30	(a) $\alpha = \infty$ (b) $\alpha = 3,0$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas.	p.97
31	(a) $\alpha = 1,5$ (b) $\alpha = 0.5$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas. Observa-se que quanto maior o número de partículas no gás mantem-se o desvio padrão da função característica	p.97
32	$\alpha = 3.0$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas.	p.98
33	(a) $\alpha = 1,5$ (b) $\alpha = 0.5$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas.	p.98

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 17
1.1	Objetivos da Tese	p. 18
1.2	Organização da Tese	p. 21
2	Processo Estocástico	p. 22
2.1	Variáveis Aleatórias	p. 22
2.2	Valor Esperado e Momento	p. 23
2.3	Função Característica	p. 24
2.3.1	Propriedades da Função Característica	p. 24
2.4	Função de Lévy	p. 25
2.5	Processo de Difusão	p. 26
2.5.1	Runge-Kutta-Fehlberg	p. 28
3	O Teorema do Limite Central a os Limites da Força Resultante	p. 30
3.1	Força Resultante para uma soma de Forças Centrais descritas por uma Lei de Potência - Caso d -dimensional	p. 30
3.2	Força Resultante para uma soma de Forças Centrais descritas por uma Lei de Potência - Caso unidimensional	p. 33
3.2.1	Limite Flutuativo	p. 36
3.2.2	Limite de Vlasov	p. 38
4	Modelo	p. 39

4.1	Modelo Dinâmico de Interação entre uma Partícula Teste e um Gás de N partículas	p. 39
4.2	Algoritmo de Integração	p. 41
4.2.1	Implementação da CPR	p. 42
4.2.2	A Importância da Força de Reação	p. 46
5	Estatística de Força Resultante e Caracterização da Dinâmica da Partículas teste	p. 49
5.1	Estatística da Força Resultante	p. 49
5.2	Caracterização da Dinâmica da Partícula Teste	p. 53
6	Análise das Consequências Dinâmicas das Renormalizações da Força Resultante	p. 59
6.1	Limite Flutuativo-L	p. 59
6.2	Limite Flutuativo - κ	p. 63
6.3	Limite de Vlasov	p. 66
7	Conclusões e Perspectivas	p. 71
7.1	Conclusões	p. 71
7.2	Perspectivas de Trabalho	p. 73
	Apêndice A - Método de Função Característica	p. 74
	Apêndice B - Métodos Computacionais	p. 76
	Apêndice C - Programa C (Runge-Kutta-Fehlberg)	p. 78
	Apêndice D - Programa CUDA-C (RK Adaptado)	p. 85
	Apêndice E - Limites de Vlasov e Flutuativo e a Função Característica	p. 94
7.1	Sem Renormalização	p. 94
7.2	Limite de Vlasov	p. 95

7.3 Limite de Força Flutuativa - Renormalização K p. 96

7.4 Limite de Força Flutuativa - Renormalização L p. 98

Referências p. 99

Referências p. 99

1 Introdução

O movimento Browniano é o movimento de uma partícula pequena macróscopica imersa em um fluido e descrito inicialmente por Robert Brown em 1827 [1]. Os choques sucessivos da partícula com as moléculas do fluido levam-na a descrever um movimento flutuativo imprevisível, como observado na Figura 1. Devido a tais flutuações não conhecemos nem a posição, nem a velocidade exata da partícula ao longo do tempo. A máxima informação que pode ser obtida é a probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada região e com uma certa velocidade.

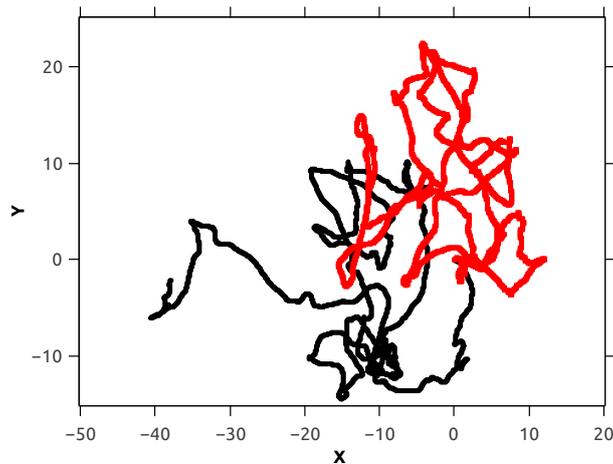


Figure 1: Movimento aleatório de duas partículas em um plano. As partículas foram submetidas a uma força flutuante com média nula e variância constante.

Dentre as várias maneiras que podemos tratar esse tipo de movimento podemos destacar: o tratamento difusivo de Einstein [2], as caminhadas aleatórias de Karl Pearson [3], uma abordagem via equação de Fokker-Planck [4] e a variante estocástica ou de força flutuante proposta por Paul Langevin [5]. Tais abordagens podem ser tratadas como processos estocásticos que representam sistemas nos quais o estado muda ao longo do tempo. Estas mudanças não são totalmente previsíveis, mas elas estão associadas a distribuições de probabilidade.

Elementos tais como energia, momento linear, átomos, moléculas, produtos químicos, células, animais e outros, realizam trajetória randômica e como resultado desse movimento individual altamente irregular o conjunto apresenta certo comportamento coletivo descrito por leis dinâmicas bem definidas, denominada de difusão. A difusão ocorre, em geral, quando um sistema encaminha-se para um estado de equilíbrio e é caracterizada por uma dependência linear do crescimento temporal no deslocamento quadrático médio. No movimento Browniano a difusão usual é uma consequência direta do teorema do limite central e da natureza markoviana do processo estocástico [6].

O teorema do limite central é de grande importância no estudo de processos estocástico. Ele enuncia que a soma, igualmente normalizada, de N variáveis aleatórias independentes e indenticamente distribuídas, todas com média e variância finita irá convergir para uma distribuição normal quando N tende ao infinito. Em 1924, Paul Lévy demonstrou no trabalho intitulado *Sur la loi de Gauss* uma versão do teorema do limite central em que se utiliza do conceito de função característica [7]. A partir do trabalho de Lévy surgiram inúmeros outros estudos sobre processos de convergência no contexto da função característica [8, 9, 10].

Por muito tempo somente os processos difusivos que podiam ser descritos usando o Teorema do Limite Central foram estudados, até a observação da necessidade de outras distribuições para a descrição de processos de difusão com comportamento diferente do enunciado anteriormente (difusão normal). A descrição deste tipo de processo se apóia na validade do teorema do limite central generalizado de Lévy-Gnedenko, em que nem todos os momentos relacionados existem e a respectiva distribuição recai numa que tem como forma estável as distribuições de Lévy [11].

Regimes anormais foram identificados e estudados em sistemas físicos [12, 13], químico [14] e biológicos [15, 16], bem como no deslocamentos de humanos e animais [17], na difusão de átomos frios [18] e em alguns sistemas fora do equilíbrio [19]. O crescente interesse no desenvolvimento de técnicas para os casos em que a variância da posição diverge rapidamente, remete-nos aos estudos de processos estocásticos com interação de Longo alcance - Um sistema é dito possuir interações de longo alcance quando seu potencial de interação decresce com $r^{-\nu}$ em que $\nu \leq d$, onde d é a dimensão do espaço [20] - dos quais podemos destacar [21, 22].

1.1 Objetivos da Tese

Nesta tese queremos analisar o processo difusivo, ou de maneira mais ampla, o processo estocástico de uma partícula (chamada de partícula teste) que está em interação com N

p rticulas (chamadas de Gás de P rticulas ou simplesmente Gás). A intera o entre cada p rticula do gás e a p rticula teste tem a mesma natureza e será descrita por uma força central cuja intensidade depende do inverso de alguma potência positiva da distância entre as p rticulas. Matematicamente, este modelo de intera o será descrito pelo seguinte sistema de equa es diferenciais resultantes da aplica o das Leis de Newton:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \kappa_N \sum_{i=1}^N \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^{\delta+1}} \\ \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} &= \kappa_N \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^{\delta+1}}, \quad i = 1, \dots, N,\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde \vec{r} e \vec{r}_i representam respectivamente a posi o da p rticula teste e das p rticulas do gás em um espaço de dimensão d ($d = 1, 2, 3$).

Vemos que o somatório que aparece na equa o para a p rticula teste nada mais   que a força resultante sobre a mesma. De fato queremos estudar o processo estocástico da p rticula teste na condi o em que o número de p rticulas do gás tende ao infinito, o que necessariamente implicará em algum tipo de renormaliza o na constante κ_N ou no tamanho do sistema, pois do contrário esta força resultante irá divergir. O foco da análise desta tese   entender os efeitos das diferentes renormaliza es possíveis sobre as propriedades da dinâmica estocástica da p rticula teste.

A fonte básica de estocasticidade aqui   o fato das p rticulas do gás estarem inicialmente distribuidas randomicamente de acordo com alguma densidade de probabilidade. Em particular, nos interessa entender em profundidade a questão de como a p rticula teste converge para um regime assintótico e qual o seu respectivo regime difusivo. Nos interessa também entender se este regime assintótico corresponde a situa o de equilíbrio térmico entre a p rticula teste e o gás de N p rticulas.

Portanto, a primeira grande questão a ser enfrentada diz respeito as condi es de renormaliza o possíveis da força resultante sobre a p rticula teste.

De acordo com os trabalhos de Lévy sobre leis de probabilidade estáveis não gaussianas [23], a soma de N variáveis randômicas reais pode ser interpretada como a força resultante de N p rticulas sobre uma p rticula teste, onde as p rticulas estão distribuidas uniformemente em uma linha finita, e a intensidade da força   dada por uma lei de potência com rela o a distância entre a p rticula randômica e a p rticula teste.

Posteriormente este resultado foi generalizado [24] e pode ser interpretado como a força resultante devido a uma distribui o arbitrária de p rticulas em uma linha infinita.

A extensão do Teorema Central do Limite para vetores randômicos foi proposta por Levy

em [25]-[26] e, posteriormente, utilizando-se do famoso esquema triangular de Kolmogorov [27], foi desenvolvida por Rvaceva in [28]. Este ultimo trabalho constituindo-se no fundamento básico para todos os posteriores desenvolvimentos no estudo de Teoremas de Limites para soma de vetores randômicos.

A determinação de qual lei de distribuição estável é um limite para uma soma de vetores aleatórios implica em conhecer o comportamento assintótico no infinito das densidades de probabilidade destes vetores. De acordo com Lévy (veja [25]) é necessário que estas densidades de probabilidade tenham caudas descritas por leis de potência ou, pelo menos, limitadas por leis de potência.

Recentemente, utilizando-se da noção de funções com variação regular [29], foi introduzida uma caracterização geral das propriedades assintóticas de uma densidade de probabilidade que implicam em uma convergência para leis estáveis [30]–[35].

No contexto da física, devido a necessidade de entender as propriedades estatísticas da força gravitacional, os trabalhos pioneiros de Antonov [36], Lynden Bell and Wood [37] and Chandrasekhar [38] sobre termodinâmica e dinâmica de galaxias e estrela levaram ao desenvolvimento de um conjunto de métodos muito similares aqueles desenvolvidos para o Teorema Central do Limite, embora com escopo e alcance menores. Modernamente, um trabalho importante e contendo resultados mais gerais foi desenvolvido por Chavanis [39].

Recentemente, foi publicado por nosso grupo de pesquisa um trabalho que abordou e discutiu em bases matemáticas rigorosas a aplicação do Teorema Central do Limite ao problema do cálculo da força resultante devido a N partículas randomicamente distribuídas sobre uma partícula teste [40]. De fato, unicamente com a hipótese de que a força de interação entre as N partículas randômicas e a partícula teste é descrita por uma força central cuja intensidade varia com o inverso de uma potência positiva da distância entre as partículas, caracterizou-se de maneira completa e exaustiva as condições que implicam em um limite bem definido para a força resultante. Mais ainda, foi obtida um classificação completa das renormalizações possíveis para garantir a existência deste limite.

Discutiu-se neste trabalho a relação entre estas renormalizações e as conhecidas renormalizações Termodinâmica e de Vlasov. Mostrou-se que além destas é possível uma terceiro tipo de renormalização, que foi denominada de renormalização flutuativa.

Neste tese iremos analisar as consequências destas renormalizações sobre a dinâmica estocástica da partícula teste. Por uma questão de simplicidade iremos analisar apenas os casos unidimensionais ($d = 1$), sendo os casos bi e tridimensionais postergados para um trabalho futuro.

1.2 Organização da Tese

Esta tese está dividida como segue: No **capítulo 2**, estudamos algumas ferramentas necessárias ao desenvolvimento deste trabalho. Na seção 2.1 apresentamos o conceito de variável aleatória e de processo estocástico. Na seção 2.2 mostramos os momentos estatísticos de uma variável estocástica. Na seção 2.3 enunciamos a função característica e suas propriedades. Na seção 2.4 exibimos a função de Lévy. Na seção 2.5 discutimos os regimes de difusão. **capítulo 3**, apresentamos o teorema central do limite, baseado no formalismo de função característica, onde mostraremos que a função característica da força resultante e seu limite quando $N \rightarrow \infty$ é bem determinado e, conseqüentemente, sua densidade de probabilidade bem definida. Esse estudo é baseado na referência [40], onde se definiu dois tipos de limites, denominados de Limites de Vlasov, seção 3.1, e Limite de força puramente flutuativo, seção 3.2, bem como as possíveis renormalizações na constante da força que corresponde a uma mudança nos parâmetros físicos do sistema. No **capítulo 4**, Definimos um modelo dinâmico de interação de uma partícula teste com N partículas, chamadas neste contexto de *Gás de N partículas*. Essa partícula ao mesmo tempo que sofre interação das N partículas que compõe o gás, também contribui com interação (ação e reação), já as partículas do gás não interagem entre si. No **capítulo 5**, O primeiro objetivo desta capítulo é testar se a distribuição de probabilidade da força resultante das N partículas de gás sobre a partícula teste satisfaz os resultados obtidos no capítulo 2. O segundo objetivo é discutir a dinâmica da partícula teste, entendendo principalmente a questão de seu equilíbrio térmico com o gás e caracterizando o tipo de processo difusivo que ela satisfaz. No **capítulo 6**, analisaremos as conseqüências na estatística de evolução temporal da partícula teste em função do crescimento do número de partículas do gás, onde impomos no processo de limite $N \rightarrow \infty$ nos limites de Vlasov e limite Flutuativo. A análise irá se concentrar sobre as características mais importantes da evolução temporal da velocidade quadrática média $\langle v^2(t) \rangle$ e da posição quadrática média $\langle x^2(t) \rangle$. Finalmente, no **capítulo 6**, concluímos nosso trabalho e falamos da continuidade da pesquisas.

2 *Processo Estocástico*

Neste capítulo, discutiremos alguns tópicos conhecidos da literatura a respeito de processos estocásticos.

2.1 Variáveis Aleatórias

Variável aleatória é um objeto X definido por um conjunto de possíveis realizações ω , chamado de espaço de fases, cuja evolução é governada por leis de probabilidade [41]. Quando as variáveis aleatórias associadas a um evento dependem do tempo é dito que esta variável é estocástica. Um processo estocástico é um modelo matemático definido como uma coleção indexada de variáveis estocásticas $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in W\}$, definidas em um espaço de probabilidade W , indexado pelo parâmetro t , que varia no conjunto de índices T [41]. O parâmetro t , interpretado como o tempo, pode ser contínuo ou discreto. Para facilitar a notação, usaremos $X(t)$ para denotar um processo estocástico.

Para que um processo estocástico seja bem definido ele tem que satisfazer as condições de compatibilidade de Chapman [42]. Uma dessas condições permite estabelecer a seguinte relação entre a probabilidade condicional $f(x_{k+1}, t_{k+1}|x_k, t_k)$ de uma variável assumir um valor x_{k+1} em um tempo t_{k+1} , uma vez que a variável tinha um valor x_k no tempo t_k , e as probabilidades de tempo único $f(x_{k+1}, t_{k+1})$ e $f(x_k, t_k)$:

$$f(x_{k+1}, t_{k+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{k+1}, t_{k+1}|x_k, t_k) f(x_k, t_k) dx. \quad (2.1)$$

Esta equação é denominada de 1º condição de compatibilidade de Chapman e implica em uma equação de difusão fundamental na descrição de processos estocásticos.

Se o processo estocástico satisfaz simultaneamente a equação (2.1) e a equação de Chapman-Kolmogorov, então ele é um processo de Markov em que a probabilidade de um estado em um certo instante de tempo depende apenas do estado do sistema em um instante de tempo anterior [43]. Neste caso podemos escrever:

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \theta(x, t, \Delta t). \quad (2.2)$$

De um ponto de vista probabilístico a equação (2.2) descreve uma transformação probabilística que relaciona a variável X no tempo t à variável X no tempo $t + \Delta t$. Esta transformação é feita através da variável aleatória θ que possui $dF[\theta(x, t, \Delta t)]$ como probabilidade condicionada ao valor de X no tempo t e ao intervalo de tempo Δt . Esta variável θ será chamada de variável de retorno.

2.2 Valor Esperado e Momento

Considere uma função $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ e seja $f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ a densidade de probabilidade associada a $X(t_k)$ ($k = 1, 2, 3 \dots n$). O valor esperado, também denominado de média, é definido por [44]

$$\langle \varphi(X_1, \dots, X_n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (2.3)$$

O valor

$$\langle [X(t_k) - b]^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_k - b)^n f(x_k, t_k) dx_k, \quad (2.4)$$

é denominada de n-ésimo momento de $X(t_k)$ em torno de b , para b real e k inteiro não-negativo. Se $b = 0$, então $M_n = \langle X^n(t_k) \rangle$ é chamado de n-ésimo momento de $X(t_k)$.

O valor esperado $\mu = \langle X(t_k) \rangle$ é denominado média de $X(t_k)$. O segundo momento central

$$Var[X(t_k)] = \langle [X(t_k) - \mu_k]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_k - \mu_k)^2 f(x_k, t_k) dx_k, \quad (2.5)$$

é denominado de variância. O desvio-padrão $\sigma_k = \sqrt{Var[X(t_k)]}$ é a medida mais comum da dispersão estatística. É definido desta forma de maneira a dar-nos uma medida da dispersão que seja um número não-negativo e que use a mesma unidade de medida dos dados fornecidos.

A assimetria é o grau de desvio ou afastamento da simetria de uma distribuição [45]. Ou seja, a assimetria ocorre devido à extensão de uma das caudas da distribuição. Os valores da cauda afetam o valor da média, pois a média sempre acompanha o lado da cauda da distribuição com extensão. A medida de assimetria de uma distribuição é dada por

$$Skew[X(t_k)] = \left\langle \left(\frac{X(t_k) - \mu_k}{\sigma_k} \right)^3 \right\rangle. \quad (2.6)$$

A curtose é o grau de achatamento de uma distribuição, considerado usualmente em relação a uma distribuição normal, e é dada por

$$Kur[X(t_k)] = \left\langle \left(\frac{X(t_k) - \mu_k}{\sigma_k} \right)^4 \right\rangle. \quad (2.7)$$

2.3 Função Característica

No estudo da teoria de probabilidade o valor esperado pode ser utilizado para caracterizar, parcialmente ou completamente, uma determinada variável aleatória. A função característica é um tipo de valor esperado que sempre existe e caracteriza uma distribuição de probabilidade de forma completa e unívoca, sendo uma ferramenta de grande utilidade para o estudo do conceito de convergência em distribuições de variáveis aleatórias e na demonstração de alguns teoremas de extrema relevância.

2.3.1 Propriedades da Função Característica

A função característica $\psi_X(z, t)$, associada a variável aleatória X , é definida como a transformada de Fourier da densidade de probabilidade, isto é:

$$\psi_X(z, t) = \langle e^{izX} \rangle = \langle \cos[zX] \rangle + i \langle \sin[zX] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x, t) dx, \quad (2.8)$$

onde a densidade de probabilidade é a transformada inversa de Fourier da função característica. A função característica possui as seguintes propriedades [46]:

1. $|\psi_X(z, t)| \leq 1$;
2. $\psi_X(0, t) = 1$;
3. Se X e X' são independentes, então $\psi_{[X+X']} = \psi_X(z, t)\psi_{X'}(z, t)$;
4. Se $X = aY + b$, em que a e b são reais e Y uma outra variável aleatória, então $\psi_X(z, t) = e^{izb}\psi_Y(az, t)$;
5. Se a função característica associada a X é analítica, todos os momentos estatísticos de X serão finitos, ou seja, $\langle |X|^n \rangle < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\psi_X(z, t)$ possui infinitas derivadas contínuas e

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \psi_X(z, t) = \int (ix)^n e^{izx} f(x, t) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (2.9)$$

A partir de (2.9), se $|\psi_X(0, t)| < \infty$, então o n -ésimo momento de X existe e pode ser obtido por

$$\frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \psi_X(z, t)}{\partial z^n} \Big|_{z=0} = \langle X^n \rangle, \quad (2.10)$$

desta forma, a existência de todos os momentos permite o desenvolvimento de $\psi_X(z, t)$ em uma série de Taylor:

$$\psi_X(z, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \langle X^n \rangle. \quad (2.11)$$

O resultado (2.11) é bastante importante pois estabelece uma relação entre a função característica e os momentos da distribuição. Enquanto a densidade de probabilidade define a forma da distribuição de seus possíveis valores, a função característica permite descrever o processo no espaço dos momentos estatísticos. Por isso, as propriedades estatísticas do processo podem ser estudadas tanto da perspectiva da densidade de probabilidade como da função característica. Ela pode também ser utilizada para medir e caracterizar de modo preciso o afastamento de uma distribuição em relação à distribuição normal.

2.4 Função de Lévy

O matemático francês Paul Lévy no seu trabalho intitulado “*Sur la loi de Gauss*” [7] apresentou uma versão do Teorema do Limite Central totalmente baseada no conceito de função característica. Lévy demonstrou que para qualquer variável aleatória com desvio padrão finito a função característica associada à sua variável reduzida¹ \bar{X} pode ser escrita como:

$$\psi_{\bar{X}}(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2}(1 + \Omega(z))\right). \quad (2.12)$$

A função $\Omega(z)$ é denominada de função de Lévy. Ela é uma função complexa e contínua em um intervalo real aberto $-\varepsilon < z < \varepsilon$, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\Omega(z) = \omega_R(z) + i\omega_I(z) \quad (2.13)$$

onde $\omega_R(z)$ é uma função par, $\omega_I(z)$ uma função ímpar e $\Omega(0) = 0$.

A função de Lévy pode ser calculada a partir da função característica $\psi_X(z, t)$, definida em (2.8). Em termos da variável reuzida \bar{X} , podemos reescrevê-la como

$$\psi_{\bar{X}(t)}(z, t) = \psi_R(z, t) + i\psi_I(z, t), \quad (2.14)$$

em que

$$\psi_R(z, t) = \langle \cos[zX] \rangle$$

e

$$\psi_I(z, t) = \langle \text{sen}[zX] \rangle.$$

¹Este tipo de variável é também conhecida como padronização: $\bar{X} = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Com isso, obtemos a parte real de $\Omega(z)$ através da fórmula

$$\omega_R(z) = -\frac{z^2 + 2 \ln \left(\sqrt{\psi_R^2(z, t) + i\psi_I^2(z, t)} \right)}{z^2} \quad (2.15)$$

e sua parte imaginária

$$\omega_I(z) = \frac{1}{z^2} \arctan \left[\frac{\psi_I(z, t)}{\psi_R(z, t)} \right]. \quad (2.16)$$

A função arco-tangente fornece o valor principal do argumento θ do número complexo $x+iy \equiv re^{i\theta}$, o que significa $-\pi < \theta \leq \pi$. Quando $\Omega(z) = 0$, a função característica associada a variável reduzida \bar{X} será dada por:

$$\psi_{\bar{X}}(z, t) = e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (2.17)$$

que é a função característica associada a uma distribuição normal.

2.5 Processo de Difusão

A difusão pode ser encontrada pelo estudo da variância associada ao processo estocástico. Uma forma usual de caracterizar o tipo de difusão é através do expoente de Hurst (β) [47] que foi introduzido por Harold Hurst quando o mesmo estudava o fluxo de água no rio Nilo. Um processo estocástico $X(t)$ possui difusão normal se sua variância $Var[X(t+\Delta t) - X(t)] \propto \Delta t$. Entretanto, outros tipos de regimes difusivos não se manifestam de forma linear em relação ao intervalo de tempo Δt , ocorrendo de forma mais rápido ou mais lenta, denominados de difusões anômalas.

De um modo geral, podemos expressar o tipo de difusão através da seguinte lei de potência,

$$Var[X(t + \Delta t) - X(t)] \propto (\Delta t)^\beta \quad (2.18)$$

em que β é denominado de expoente de Hurst (ou expoente de difusão). O expoente de Hurst não pode ser negativo porque não haveria um processo de difusão mas sim uma contração, e quando o tempo tende-se ao infinito ocorreria um colapso em uma singularidade. Da equação (2.18), construímos o gráfico $\log \langle x^2 \rangle$ versus $\log t$ onde é possível determinar o tipo de difusão que ocorre.

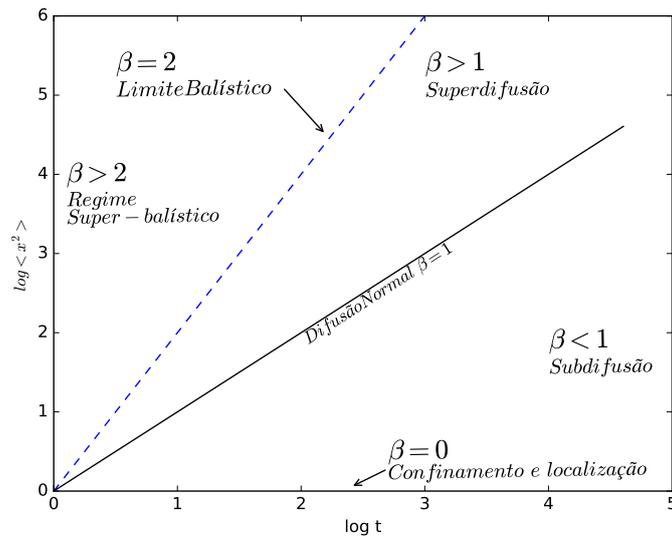


Figure 2: Difusão

A difusão normal ($\beta = 1$) consiste em uma variância dos incrementos $X(t+\Delta t) - X(t)$ que possui uma evolução temporal linear. Isto indica um processo estocástico sem memória longa e que os incrementos $X(t + \Delta t) - X(t)$ são independentes. Este tipo de difusão é condição necessária para a obtenção de equações de difusão na descrição de processos estocásticos.

Caso o expoente de Hurst seja diferente de um temos difusão anômala. Isto é indicativo de que os incrementos $X(t + \Delta t) - X(t)$ não são independentes e contém uma memória dos eventos que os procederam. Para valores entre $1 < \beta < 2$ (superdifusão) ocorre um crescimento superlinear no tempo do deslocamento quadrático médio indicando dependência longa positiva (persistência), ou seja, se o valor do processo $X(t)$ foi aumentando em um período passado há uma maior chance de que continue aumentando no próximo período. Valores entre $0 < \beta < 1$ (subdifusão) caracterizada por um crescimento sublinear indicam dependência longa negativa (antipersistência), ou seja, tendências passadas tendem a se reverter no futuro. Este é um tipo de memória de longo prazo nos quais eventos presentes influenciam eventos futuros distantes, ou seja, o processo estocástico possui correlação de longo alcance.

Temos dois casos extremos: O caso subdifusivo extremo $\beta = 0$ e o caso balístico $\beta = 2$. Para sistemas com memória, $\beta = 0$ está relacionada a características especiais de localização. Já em [48, 49] verificamos alguns experimentos com difusão balística.

2.5.1 Runge-Kutta-Fehlberg

O Método de Runge-Kutta-Fehlberg para o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(a) = \varepsilon_0, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.19)$$

utiliza um método de Runge-Kutta de quinta ordem para obter uma estimativa do erro de aproximação em um método de Runge-Kutta de quarta ordem, com

$$\begin{aligned} w_0 &= \varepsilon_0, \\ k_1 &= hf(t_i, w_i), \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\ k_4 &= hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\ k_5 &= hf\left(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\ k_6 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right), \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5, \\ \tilde{w}_{i+1} &= w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, onde N é o número de passos desejados na simulação, \tilde{w}_i e w_i são respectivamente as aproximações de quinta e quarta ordem da solução da equação no i -ésimo ponto discreto, $h = \frac{|b - a|}{N} = |t_{i+1} - t_i|$, ou seja, h é a medida da discretização do domínio da equação e k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6 são chamados de coeficientes de Runge-Kutta.

Um valor ϵ é dado ao método como sendo um valor de medida de erro entre as aproximações, ou seja, após calculadas as aproximações de quinta e quarta ordem, calcula-se uma medida de erro entre elas, e tal aproximação só é aceita caso essa medida seja menor que ϵ .

Além disso, um valor especial é calculado $\delta_0 = 0,84 \left(\frac{\epsilon h}{|\tilde{w}_i - w_i|} \right)^{1/4}$.

- Caso $\delta_0 \leq 0,1$ então o próximo passo de tempo h recebe o valor $0,1 h$.
- Caso $0,1 < \delta_0 < 4$ então o próximo passo de tempo h recebe o valor $\delta_0 h$.
- Caso $\delta_0 \geq 4$ então o próximo passo de tempo h recebe o valor $4 h$.

São informados ao método o valor máximo e o valor mínimo que o passo de tempo pode atingir. Caso o novo passo de tempo seja maior do que o tempo máximo o método impõe que o novo passo de tempo será o tempo máximo. Caso o novo passo de tempo seja menor do que o mínimo esperado o método para informando que a simulação não pode ser feita. Para o caso de um sistema de equações todas elas tem que apresentar o mesmo valor de ϵ_0 . Ainda no caso de várias equações é calculado um valor de δ_0 para cada uma das equações e o menor deles é escolhido como o valor que medirá o próximo passo de tempo [51].

3 *O Teorema do Limite Central a os Limites da Força Resultante*

3.1 Força Resultante para uma soma de Forças Centrais descritas por uma Lei de Potência - Caso d -dimensional

No trabalho [40] generalizou-se o método empregado por Lévy para soma de variáveis randômicas reais para o caso de uma soma de variáveis randômicas vetoriais [31]. Calculou-se a distribuição da força resultante sobre a partícula teste devido a força de N partículas distribuídas aleatoriamente no espaço de acordo com uma certa densidade de probabilidade.

O método baseia-se em associar um vetor randômico \vec{R} para descrever a posição relativa das N partículas com relação a partícula teste. Este vetor randômico é caracterizado por uma densidade de probabilidade denotada como $\rho_{\vec{R}}(\vec{r})$, onde $\vec{r} \in^d$ e $d = 1, 2, 3$ designa a dimensão espacial.

A força \vec{F}_i^N da partícula i ($i = 1, \dots, N$) pode ser representada como uma transformação de vetores aleatórios:

$$\vec{F}_i^N = \vec{F}^N(\vec{R}), \quad (3.1)$$

onde assumimos que estas N forças aleatórias são idênticas estatisticamente.

A força resultante \vec{F}_{res}^N é obtida pela soma vetorial das N forças \vec{F}_i^N , $i = 1, \dots, N$:

$$\vec{F}_{res}^N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^N. \quad (3.2)$$

Consideramos que para N muito grande, as forças \vec{F}_i^N podem ser renormalizadas como

$$\vec{F}_i^N(\vec{R}) = a_N \vec{U}(\vec{R}), \quad (3.3)$$

onde a_N é uma constante positiva.

Assumindo que as posições espaciais das partículas são descorrelacionadas, isto é, o vetor da posição relativa das partículas são estatisticamente independentes, então podemos

escrever a função característica da força resultante em termos das funções características das N forças sobre a partícula teste, obtendo a seguinte expressão:

$$\psi_{\vec{F}_{res}^N}(\vec{z}) = \prod_{i=1}^N \psi_{\vec{F}_i^N}(\vec{z}) = \psi_{(a_N \vec{U})}(\vec{z})^N = \psi_{\vec{U}}(a_N \vec{z})^N. \quad (3.4)$$

Se o limite (3.4) para $N \rightarrow \infty$ existe, então ele corresponde a uma função característica bem definida, que é denotada por $\Phi(\vec{z})$ e pode ser calculado como:

$$\Phi(\vec{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_{\vec{F}_{res}^N}(\vec{z}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_{\vec{U}}(a_N \vec{z})^N. \quad (3.5)$$

Para prosseguirmos no cálculo supomos que a força $F_i^N(\vec{R})$ é uma força central, com intensidade descrita por uma lei de potência, isto é, assumimos que a força $F_i^N(\vec{R})$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\vec{F}_i^N = \kappa_N \frac{\hat{R}}{|\vec{R}|^\delta}, \quad \hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}, \quad (3.6)$$

onde κ_N e δ são constantes reais com $\delta \geq 0$.

Definimos o vetor de renormalização $\vec{U} = \hat{R}/|\vec{R}|^\delta$ com densidade de probabilidade dada por $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$, onde $\vec{u} \equiv \hat{r}/|\vec{r}|^\delta$. Se definimos $\rho_{\vec{R}}(\vec{r})$ como a densidade de probabilidade do vetor \vec{R} , teremos que

$$\lim_{|\vec{u}| \rightarrow \infty} \rho_{\vec{U}}(\vec{u}) = \frac{1}{\delta |\vec{u}|^{d+d/\delta}} \lim_{|\vec{r}| \rightarrow 0} \rho_{\vec{R}}(\vec{r}). \quad (3.7)$$

Portanto, podemos ver que o comportamento assintótico no infinito de $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$ é determinado pelo comportamento de $\rho_{\vec{R}}(\vec{r})$ para pequenas distâncias.

Supomos que existe uma distância $r_c > 0$ (possivelmente $r_c \ll 1$) tal que densidade de probabilidade $\rho_{\vec{R}}(\vec{r})$ par $|\vec{r}| < r_c$ pode ser aproximada como

$$\rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = g(\hat{r}) |\vec{r}|^\nu; \quad \nu > -d. \quad (3.8)$$

Logo, para $|\vec{r}| < r_c$ ou equivalentemente $|\vec{u}| > u_c = 1/r_c^\delta$, a densidade de probabilidade $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$ pode ser escrita como:

$$\rho_{\vec{U}}(\vec{u}) = \begin{cases} f(\vec{u}), & \text{if } |\vec{u}| \leq u_c, \\ \frac{C(\hat{u})}{|\vec{u}|^{d+\alpha}}, & \text{if } |\vec{u}| > u_c, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{(d+\nu)}{\delta}, \\ C(\hat{u}) = \frac{g(\hat{u})}{\delta}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Para que o limite da distribuição de probabilidade da força resultante seja bem definido quando $N \rightarrow \infty$, ou de modo equivalente o limite mostrado em (3.5), temos que renormalizar as forças \vec{F}_i^N por uma escolha adequada de κ_N ou/e de um tamanho característico $L_N > 0$,

ou seja,

$$\vec{F}_i^N = \kappa_N \frac{\hat{R}}{|L_N \vec{R}|^\delta} = \frac{\kappa_N}{L_N^\delta} \frac{\hat{R}}{|\vec{R}|^\delta} = a_N \vec{U}, \quad a_N = \frac{\kappa_N}{L_N^\delta}. \quad (3.10)$$

As possíveis renormalizações de a_N (obtidas em [40]) estão sintetizadas na Tabela 1. Em todos os casos temos que $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$. Os respectivos possíveis limites da força resultante, dependendo dos valores do expoente de levy α , são dados por (onde $q = a_N/|a_N| = \text{sgn}(\kappa_N)$):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vec{F}_{res}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} \sigma_N \vec{S}_\alpha & \sigma_N = K^{1/\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \\ qK\vec{v} + \sigma_N \vec{S}_1^0 & \sigma_N = Nh(K/N) \quad (\alpha = 1) \\ \langle qK\vec{U} \rangle + \sigma_N \vec{S}_\alpha & \sigma_N = KN^{(1-\alpha)/\alpha} \quad (1 < \alpha < 2) \\ \langle qK\vec{U} \rangle + \sigma_N \vec{S}_2^* & \sigma_N = K(N^{-1} \ln N)^{1/2} \quad (\alpha = 2) \\ \langle qK\vec{U} \rangle + \sigma_N \vec{S}_2 & \sigma_N = KN^{-1/2} \quad (2 < \alpha < \infty), \end{cases} \quad (3.11)$$

Table 1: *Renormalizações de a_N . K é uma constante positiva - veja ref. [40]*

Flutuativo ($0 < \alpha < 1$)	Singular ($\alpha = 1$)	Vlasov ($1 < \alpha < \infty$)
$N a_N ^\alpha = K$	$-N a_N \ln a_N = K$	$N a_N = K$
$ a_N = \left(\frac{K}{N}\right)^{1/\alpha}$	$ a_N = h(K/N)$	$ a_N = \frac{K}{N}$
$N > 0$	$N \geq \frac{2}{\ln 2} K$	$N > 0$

Observamos que para $N \rightarrow \infty$ o vetor \vec{F}_{res}^N converge para um vetor aleatório denotado por \vec{S}_α , com densidade de probabilidade dada por uma distribuição estável de Lévy-Khintchine cuja função característica para $0 < \alpha < 2$ ($\alpha \neq 1$) é dada por:

$$\Phi(\vec{z}) = \exp \left(-\frac{\lambda A_\alpha(\hat{z})|\vec{z}|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left[1 - i\beta_\alpha(\hat{z}) \tan \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \right] \right), \quad (3.12)$$

onde $\beta_\alpha(\hat{z}) = B_\alpha(\hat{z})/A_\alpha(\hat{z})$, com $A(\hat{z})$ e $B(\hat{z})$ definidos a partir da função $C(\hat{u})$ em (3.9) e a constante λ sendo um número positivo (ver referência [40]).

A função característica escrita na forma dada na equação (3.12) está diretamente rela-

cionada a função característica padrão de um vetor aleatório estável apresentada por Samorodt-sky e Taqqu na referência [52].

Para $\alpha = 1$ a função característica não representa uma verdadeira distribuição de probabilidade estável, desde que a função $C(\hat{u})$ definida em (3.9) não seja simétrica. Neste caso, a respectiva distribuição de probabilidade é chamada de semi-estável. As distribuições semi-estáveis de uma variável aleatória real foram introduzidas por Levy [26]. Quando a função $C(\hat{u})$ é simétrica, a função característica representa uma distribuição de probabilidade estável que corresponde a generalização da distribuição de Cauchy para um vetor aleatório.

Para $\alpha > 2$ a soma renormalizada dos vetores aleatórios idênticos \vec{U} converge para uma distribuição gaussiana, independentemente das propriedades estatísticas específicas da densidade de probabilidade $\rho_{\vec{U}}(\vec{u})$. Mais ainda, a única propriedade de \vec{U} relevante para o limite $N \rightarrow \infty$ é a sua matriz de covariância.

É importante destacar que os vetores aleatórios \vec{S}_2^* e \vec{S}_2 são definidos por uma distribuição gaussiana, mas somente para \vec{S}_2 a distribuição gaussiana é determinada pela matriz de covariância do vetor aleatório \vec{U} . De fato, a matriz de covariância do vetor \vec{U} não pode ser definida para $\alpha = 2$ e a distribuição limite gaussiana neste caso é definida por uma outra matriz (veja referência [40]).

3.2 Força Resultante para uma soma de Forças Centrais descritas por uma Lei de Potência - Caso unidimensional

Considere que $x \in \mathfrak{R}$ denota a posição de uma partícula teste. Suponha um conjunto de N partículas, denominado de gás de N partículas, com posições designadas por $x_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, \dots, N$, e que estão distribuídas em um intervalo de tamanho 1 centrado na partícula teste, isto é, para cada x_i temos que $x_i \in [x - 1/2, x + 1/2]$.

Cada uma das partículas do gás tem sua posição relativa a partícula teste $x_i - x$ gerada por uma mesma distribuição de probabilidades. Em outras palavras, as variáveis $x_i - x$ são estatisticamente indênticas e correspondem a uma mesma variável aleatória designada por X . Defimos a variável relativa aleatória $R = -X$. Esta variável designa a posição aleatória da partícula teste em relação a uma das partículas do gás, ou seja, R é a variável aleatória que representa a distribuição de probabilidades da variável $x - x_i$.

Impomos também que cada partícula do gás exerce uma força repulsiva f_i sobre a

partícula teste dada por:

$$f_i = \frac{\text{sign}(x - x_i)}{|x - x_i|^\delta}, \quad i = 1 \dots N. \quad (3.13)$$

Em termos de uma transformação de variáveis aleatórias teremos que a força aleatória F_i da partícula i do gás sobre a partícula teste será escrita como

$$F_i \equiv F = \frac{\text{sign}(R)}{R^\delta}, \quad i = 1 \dots N. \quad (3.14)$$

Evidenciado que as variáveis aleatorias F_i são idênticas a uma mesma variável aleatória designada por F .

Consideremos agora que a variável R tenha uma distribuição uniforme em cada um dos lados da partícula teste, isto é, uma densidade de probabilidade definida como

$$\rho_R(r) = \begin{cases} C_- & -\frac{1}{2} \leq r < 0 \\ C_+ & 0 < r \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \frac{C_- + C_+}{2} = 1, \quad (3.15)$$

onde C_- and C_+ são constantes positivas.

Considerando a transformação de variáveis aleatórias na equação (3.14), teremos que a densidade de probabilidade da força aleatória F será dada por:

$$\rho_F(f) = \begin{cases} \frac{\alpha C_-}{|f|^{1+\alpha}} & f \leq -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha C_+}{|f|^{1+\alpha}} & f \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \alpha = \frac{1}{\delta}, \quad (3.16)$$

onde o parâmetro α é chamado de expoente de Levy.

A função característica da variável aleatória F é definida como

$$\psi_F(z) = \langle \exp(iFz) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(izf) \rho_F(f) df, \quad z \in \Re. \quad (3.17)$$

O logaritmo da função característica, denotado por $\Psi_F(z) = \log(\psi_F(z))$, pode ser escrito

em uma forma canônica que depende do valor do expoente de Levy α :

$$\Psi_F(z) = \begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ -\frac{D|z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left(1 - i \frac{\beta z}{|z|} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) (1 + \Omega(z)) \\ \\ 1 < \alpha < 2 \\ i \langle F \rangle z - \frac{D|z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left(1 - i \frac{\beta z}{|z|} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) (1 + \Omega(z)) \\ \\ \alpha > 2 \\ i \langle F \rangle z - \frac{\sigma^2 z^2}{2} (1 + \Omega(z)), \end{cases} \quad (3.18)$$

com os parâmetros D , β and σ são definidos como

$$D = \frac{\pi\alpha(C_+ + C_-)}{2 \sin(\alpha\pi/2)}, \quad \beta = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}, \quad \sigma^2 = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2,$$

onde o operador colchete $\langle \rangle$ significa fazer a média da variável aleatória no sentido usual.

As expressão (3.18) podem ser obtidas nas formas canônicas relacionadas a forças aleatórias vetoriais em espaços de dimensão arbitrária [40]. Por economia de espaço não colocamos as formulas respectivas para os casos singulares $\alpha = 1$ and $\alpha = 2$, que tem expressões mais complicadas. Uma análise completa destes casos é feita na referência [40].

Se quisermos definir uma nova força de interação sobre a partícula teste com intensidade proporcional a F em um sistema com tamanho L_N , então devemos multiplicar as variáveis aleatórias F e R por κ_N e L_N respectivamente. Isto corresponde a definir uma nova variável aleatória para a força devido a uma partícula do gás sobre a partícula teste dada por

$$F_N = \kappa_N \frac{\text{sign}(R)}{(L_N R)^\delta} = \frac{\kappa_N}{L_N^\delta} F. \quad (3.19)$$

Vemos então que a variável aleatória F_N é uma renormalização multiplicativa da variável F . Explicitamos claramente que o tamanho do sistema e a intensidade da força de interação podem depender do número de partículas do gás. Isto será de extrema importância nos limites que definiremos na sequência deste trabalho. O parâmetro κ_N é chamado simplesmente de constante da força.

Portanto, a força resultante sobre a partícula teste pode ser definida como a soma de N variáveis aleatórias que representam a força aleatória de cada partícula do gás sobre a partícula teste. Matematicamente escrevemos esta variável aleatória da força resultante

como

$$F_N^{res} = \sum_{i=1}^N F_i, \quad F_i \equiv F_N. \quad (3.20)$$

Considerando que as forças F_i são estatisticamente independentes, então podemos aplicar as propriedades de convolução da função característica para obtermos a função característica da força resultante, que será dada por

$$\psi_{F_N^{res}}(z) = \psi_F(a_N z)^N, \quad a_N = \frac{\kappa_N}{L_N^\delta}. \quad (3.21)$$

A partir das equações (3.18) e (3.21) obtemos a seguinte expressão para o logaritmo da função característica $\psi_{F_N^{res}}(z)$, denotado por $\Psi_N^{res}(z)$:

$$\Psi_N^{res}(z) = \begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ -\frac{Na_N^\alpha D |z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left(1 - i \frac{\beta z}{|z|} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) (1 + \Omega(a_N z)) \\ 1 < \alpha < 2 \\ iNa_N \langle F \rangle z - \frac{Na_N^\alpha D |z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left(1 - i \frac{\beta z}{|z|} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) (1 + \Omega(a_N z)) \\ \alpha > 2 \\ iNa_N \langle F \rangle z - \frac{Na_N^2 s^2 z^2}{2} (1 + \Omega(a_N z)) \end{cases} \quad (3.22)$$

Para que a função característica da força resultante tenha um limite bem determinado para $N \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, defina uma densidade de probabilidade bem definida, temos que impor restrições sobre a maneira como os parâmetros κ_N e L_N dependem de N . Isto foi feito na referência [40], onde se definiu dois tipos de limites: o limite Flutuativo e o limite de Vlasov. Descrevemos estes dois tipos de limites nas próximas duas subseções respectivamente.

3.2.1 Limite Flutuativo

O limite flutuativo é sempre bem definido para $\alpha < 1$ e pode ser utilizado para o caso $\alpha > 1$ desde que a média da força F seja nula, isto é, $\langle F \rangle = 0$. O intrincado caso singular $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, não será tratado nesta tese. Indicamos a referência [40], onde este caso é tratado em detalhe.

O limite flutuativo é obtido impondo-se que $Na_N^\alpha = K$ (para $0 < \alpha < 2$) ou $Na_N^2 = K$

(para $\alpha > 2$) sejam constantes quando $N \rightarrow \infty$, onde $K > 0$. Esta imposição implicara que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(a_N z) = 0,$$

onde $\Omega(0) = 0$ (ver referência [40]).

Portanto, a função característica em (3.22) terá a seguinte expressão assintótica no limite $N \rightarrow \infty$:

$$\Psi_N^{res}(z) = \begin{cases} 0 < \alpha < 2 \\ -\frac{KD|z|^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \left(1 - i\frac{\beta z}{|z|} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) \frac{N\kappa_N^\alpha}{L_N} = K \\ \alpha > 2 \\ -\frac{Ks^2 z^2}{2} \frac{N\kappa_N^2}{L_N^{2/\alpha}} = K, \end{cases} \quad (3.23)$$

onde utilizamos a expressão de a_N em (3.19) e a definição do expoente de levy $\alpha = 1/\delta$.

Iremos definir dois tipos de limites flutuativos. O primeiro limite que definimos é o limite Flutuativo - L . Neste tipo de limite mantemos a constante da força $\kappa_N = \kappa > 0$ constante e o tamanho do sistema L_N deve depender do número de partículas N do gás. A relação entre L_N e N , obtida a partir de (3.23), será dada por

$$L_N = \begin{cases} \left(\frac{\kappa^\alpha}{K}\right) N & 0 < \alpha < 2 \\ \left(\frac{\kappa}{K^{1/2}}\right)^\alpha N^{\alpha/2} & \alpha > 2. \end{cases} \quad \text{Limite Flutuativo-L} \quad (3.24)$$

Observamos que para $0 < \alpha < 2$ o limite acima definido corresponde ao conhecido Limite Termodinâmico, onde o tamanho do sistema cresce linearmente com o número de partículas do gás. De fato, se definirmos a densidade de partículas do gás $\eta = N/L$ como sendo constante, então teremos que K será definido como $K = \eta\kappa^\alpha$.

O segundo limite a ser definido é o que chamaremos de limite Flutuativo - κ . Neste tipo de limite consideramos o tamanho $L_N = L$ constante e obtemos a partir de (3.23) a seguinte relação entre κ_N e N :

$$\kappa_N = \begin{cases} \frac{(LK)^{1/\alpha}}{N^{1/\alpha}} & 0 < \alpha < 2 \\ \frac{K^{1/2} L^{1/\alpha}}{N^{1/2}} & \alpha > 2. \end{cases} \quad \text{Fluctuation Limit-}\kappa \quad (3.25)$$

Observamos que neste tipo de limite a constante da força deve diminuir a medida que o número de partículas do gás N aumenta.

3.2.2 Limite de Vlasov

O limite de Vlasov tem por objetivo obter um limite finito e bem definido para a média da força resultante quando $N \rightarrow \infty$, portanto ele só pode ser definido para os casos em que a força resultante tem uma média. Isto corresponde a considerar o expoente de Levy $\alpha > 1$. Lembrando que o caso singular $\alpha = 1$ é tratado na referência [40].

No limite de Vlasov impomos que $Na_n = K$ é constante para $N \rightarrow \infty$. Isto implicará, de modo análogo ao limite flutuativo, que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Omega(a_N z) = 0.$$

Logo, obtemos a seguinte expressão assintótica no limite $N \rightarrow \infty$ para a função característica em (3.22):

$$\Psi_N^{res}(z) = \begin{cases} 1 < \alpha < 2 \\ iK \langle F \rangle z - \frac{K^\alpha D |z|^\alpha}{N^{\alpha-1} \Gamma(1+\alpha)} \left(1 - i \frac{\beta z}{|z|} \tan \left(\frac{\alpha\pi}{2} \right) \right) \\ \alpha > 2 \\ iK \langle F \rangle z - \frac{K^2 s^2 z^2}{2N}, \quad \frac{N\kappa_N}{L_N^{1/\alpha}} = K. \end{cases} \quad (3.26)$$

Neste trabalho iremos apenas considerar limites de Vlasov onde $L_N = L$. é fixado como uma constante. Portanto, teremos que κ_N terá a seguinte relação com N :

$$\kappa_N = \frac{KL^{1/\alpha}}{N} \quad \text{Limite de Vlasov.} \quad (3.27)$$

Nos próximos capítulos iremos definir um modelo dinâmico de interação entre as partículas dos gás e partícula teste de tal modo que as hipóteses feitas para a força resultante sejam satisfeitas, possibilitando uma análise das consequências dos limites aqui apresentados na determinação das características de evolução temporal da dinâmica estocástica da partícula teste.

4 *Modelo*

Neste capítulo, apresentamos o modelo teórico de comportamento estocástico para uma partícula em que sua dinâmica está restrita a interações de curto ou longo alcance. Estudamos o comportamento assintótico baseados nos limites de Vlasov e Limite de Força Puramente Flutuativo propostos na referência [40].

4.1 Modelo Dinâmico de Interação entre uma Partícula Teste e um Gás de N partículas

Definimos um modelo dinâmico de interação de uma partícula teste com N partículas, chamadas neste contexto de *Gás de N partículas*. Essa partícula ao mesmo tempo que sofre interação das N partículas que compõe o gás, também contribui com interação (ação e reação), já as partículas do gás não interagem entre si, como ilustra a Figura 3.

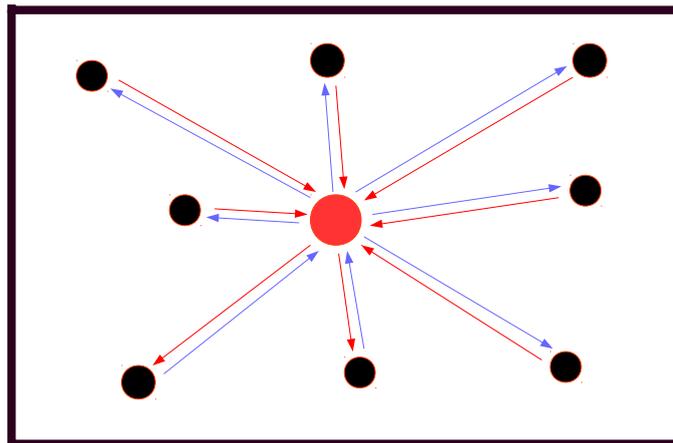


Figure 3: Ilustração do modelo em 2D.

Este modelo é definido em três etapas

1. Um sistema de equações diferenciais baseadas nas segunda e terceira leis de Newton,

tal que exista uma força de interação entre a partícula teste e cada partícula do gás. Lembrando que partículas do gás não interagem entre si.

Esta força de interação é repulsiva, equação (3.13), com intensidade dependente do inverso da distância entre as partículas elevada a uma certa potência $\delta > 0$.

2. Condições iniciais aleatórias para a posição e velocidade das partículas do gás. De fato, as posições das partículas do gás serão geradas de acordo com uma distribuição uniforme num intervalo de tamanho L , e suas velocidades iniciais serão geradas de acordo com uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão σ .

A partícula teste terá posição inicial centrada no meio do intervalo de tamanho L , onde foram inicializadas as partículas do gás, e sua velocidade inicial será nula.

3. Um processo de integração submetido a algum tipo de condição periódica nas posições relativas das partículas do gás com a partícula teste.

Na sequência detalhamos matematicamente as três partes acima descritas na montagem de nosso modelo dinâmico

1. O sistema dinâmico

Considerando que $x, x_i \in \mathfrak{R}$ ($i = 1, \dots, N$) denotam respectivamente as posições da partícula teste e das partículas do gás em uma linha representada pela reta real \mathfrak{R} , então definimos o seguinte sistema de $2N + 2$ Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v & \frac{dv}{dt} &= \sum_{i=1}^N \kappa_N \frac{x_i - x}{|x_i - x|^{1+\delta}}, \\ \frac{dx_i}{dt} &= v_i & \frac{dv_i}{dt} &= \kappa_N \frac{x - x_i}{|x_i - x|^{1+\delta}}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Aqui, v e v_i ($i = 1, \dots, N$) denotam respectivamente as velocidades da partícula teste e das partículas do gás. Observe que o sistema EDO's (4.1) definido acima representa um modelo dinâmico que satisfaz a segunda e terceira leis de Newton.

2. A Condição Inicial

As posições $x_i(0)$ e velocidades $v_i(0)$ das partículas $i = 1, \dots, N$ do gás no instante inicial $t = 0$ são geradas respectivamente de tal modo que:

$$-\frac{L}{2} < x_i(0) < \frac{L}{2} \quad | \quad x_i(0) \in \text{unif} \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right] \quad (4.2)$$

e

$$-\infty < v_i(0) < \infty \mid v_i(0) \in \text{gauss}[0, \sigma], \quad (4.3)$$

onde $\text{unif}[a, b]$ representa um gerador aleatório de números distribuídos uniformemente no intervalo aberto $[a, b]$ e $\text{gauss}[\mu, \sigma]$ representa um gerador aleatório de números distribuídos na reta real de acordo com uma distribuição gaussiana com média μ e desvio padrão σ .

A posição e velocidade iniciais da partícula teste são dadas por

$$x(0) = 0, \quad v(0) = 0. \quad (4.4)$$

3. A Condição Periódica

No processo de integração do sistema de EDO's (4.1), devemos impor a seguinte condição periódica sobre a variável $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$):

$$x_i(t) = x(t) - e_i(t) \frac{L}{2} + \left(x_i(t) - x(t) + e_i(t) \frac{L}{2} \mod L \right), \quad (4.5)$$

onde $e_i(t)$ é a função sinal de $x_i(t) - x(t)$, isto é,

$$e_i(t) = \begin{cases} +1 & x_i(t) > x(t) \\ -1 & x_i(t) < x(t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

Esta condição periódica assegura que sempre todas as partículas do gás estarão dentro de um intervalo de tamanho L centrado na partícula teste. Toda vez que uma das partículas do gás chega a uma distância de $L/2$ da partícula teste, ela muda para uma posição simétrica do outro lado da partícula teste, mantendo a distância de $L/2$ e sua velocidade. Observe que nenhuma condição periódica é estabelecida sobre a partícula teste.

Este tipo de condição periódica será chamado neste trabalho de Condição Periódica Relativa (CPR). A idéia principal deste tipo de condição é manter as partículas do gás sempre distribuídas simetricamente em torno de uma distância máxima de $L/2$ da partícula teste.

4.2 Algoritmo de Integração

Nesta seção analisamos dois pontos importantes para que as trajetórias da partícula teste, obtidas por integração do sistema de EDO's satisfaçam do ponto de vista estocástico uma condição de Flutuação-Dissipação.

O primeiro ponto tem haver com o tipo de implementação numérica que fazemos da Condição Periódica Relativa. O segundo ponto diz respeito a importância da presença da força de reação da partícula teste sobre as partículas dos gás. Analisaremos estes dois pontos nas proximas duas subseções.

4.2.1 Implementação da CPR

O grande problema do ponto de vista algorítmico é implementar a CPR no processo de integração do sistema de EDO's em (4.1). Uma metodologia tradicional para fazer isto é definir um certo passo de tempo fixo Δt de integração, de tal modo a implementar a CPR ao final de cada passo. A integração do sistema então é feita até um tempo final $t_F = n\Delta t$, onde n define o número total de passos de integração.

Em cada passo, correspondente ao intervalo de integração $m\Delta t < t < (m + 1)\Delta t$ com $m = 0, \dots, n - 1$, o sistema de EDO's (4.1) é integrado utilizando-se um método Runge-Kutta de quarta-quinta ordem com controle de tolerância e interpolação de quarta ordem. As condições iniciais em $t_0 = 0$ são geradas de acordo com as equações em (4.2)-(4.4). As condições iniciais ao final de cada passo são redefinidas de acordo com o tipo implementação numérica feita para a CPR. O resultado deste processo de integração é a obtenção de uma trajetória do sistema de partículas considerado.

Para qualquer grandeza de interesse $G(t)$, que possa ser calculada a partir da posição e velocidade das partículas no tempo t , definimos da maneira usual a média $\langle G(t) \rangle$ sobre um conjunto de trajetórias: calcula-se a média da grandeza com relação a todas trajetórias obtidas no instante t .

Neste trabalho calcularemos as grandezas promediadas sobre um certo número de trajetórias e denotaremos este número sempre por N_S . Todas estas N_S trajetórias serão integradas sob as mesmas condições, exceto para a condição inicial, que será obtida mediante a geração aleatória de N_S diferentes condições iniciais de acordo com as distribuições descritas nas equações (4.2) and (4.3).

A implantação da CPR é feita final de cada passo de integração Δt , de tal modo que as posições das partículas do gás são redefinidas de acordo com regra descrita a seguir.

Considere as posições das partículas do gás e da partícula teste ao final de tempo $t_m = m\Delta t$, após $m < n$ passos de integração, denotadas respectivamente por $x_i^{\text{old}}(t_m)$ and $x(t_m)$. As novas posições das partículas do gás, denotados como $x_i^{\text{new}}(t_m)$, são redefinidas da seguinte

maneira:

$$\begin{aligned} |x_i^{\text{old}}(t_m) - x(t_m)| < \frac{L}{2} &\Rightarrow x_i^{\text{new}}(t_m) = x_i^{\text{old}}(t_m) \\ |x_i^{\text{old}}(t_m) - x(t_m)| \geq \frac{L}{2} &\Rightarrow x_i^{\text{new}}(t_m) = x_i^{\text{old}}(t_m) - e_i(t_m)L. \end{aligned}$$

A regra descrita acima implica em uma implementação aproximada da CPR, no sentido em que durante o passo Δt algumas partículas saem do intervalo de tamanho L centrado na partícula teste. A regra recoloca a partícula do gás para dentro do intervalo, só que pelo lado oposto daquele pela qual a partícula do gás saiu. A distância relativa percorrida fora do intervalo é compensada, fazendo-se com que a partícula do gás seja reposicionada a esta mesma distância do outro extremo do intervalo. Rigorosamente falando, a condição CPR exata só será satisfeita no limite $\Delta t \rightarrow 0$. Esta implementação da CPR será batizada de CPT (Condição Periódica Tradicional)

O problema com esta implementação aproximada é que a energia potencial de interação repulsiva entre a partícula do gás que saiu e a partícula teste aumenta com o reposicionamento da partícula do gás após sair do intervalo de tamanho L , como a partícula do gás continua aumentando sua energia cinética enquanto esta fora do intervalo, ao ser recolocado para dentro haverá um aumento efetivo da energia mecânica total desta partícula e da partícula teste. Mesmo para um passo Δt pequeno, o efeito acumulativo deste efeito implicará num crescimento exponencial da energia cinética média das partículas do gás e da partícula teste. Implicando que esta não satisfará um teorema de flutuação-dissipação. Ilustramos este fenômeno de não conservação da energia cinética média na figura 4.

Para superar as dificuldades analisadas acima implementaremos um outro tipo de aproximação para a CPR, que descrevemos através da seguinte regra de redefinição das posições das partículas do gás:

$$\begin{aligned} |x_i^{\text{old}}(t_m) - x(t_m)| < \frac{L}{2} &\Rightarrow x_i^{\text{new}}(t_m) = x_i^{\text{old}}(t_m) \\ |x_i^{\text{old}}(t_m) - x(t_m)| \geq \frac{L}{2} &\Rightarrow x_i^{\text{new}}(t_m) = x(t_m) - (x_i^{\text{old}}(t_m) - x(t_m)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Vale observar que estamos simplesmente invertendo a posição relativa da partícula do gás em relação a posição da partícula teste. Esta inversão garante a conservação da energia total do sistema, pois a energia potencial de interação depende apenas da distância relativa entre a partícula teste e a partícula do gás. Esta implementação da CPR será batizada de CPS (Condição Periódica Simetrizada).

Nesta nova regra, a redefinição das posições x_i garante que todas as partículas do gás estarão sempre em torno da partícula teste, ainda que possam estar a uma distância maior do

que $L/2$ da partícula teste. De fato, a distância máxima que as partículas do gás podem ficar da partícula teste será sempre menor que um certo valor $L_{max} > L/2$. Este valor L_{max} será tão mais próximo de $L/2$, quanto menor for o passo de integração Δt . Em outras palavras, quando $\Delta t \rightarrow 0$ convergiremos para a CPR exata. A vantagem aqui é que para cada passo de integração Δt escolhido, o sistema conservará a energia total. Este fato implicará que a energia cinética média da partícula teste vai satisfazer um teorema de flutuação-dissipação para cada passo de integração Δt escolhido. Ilustramos este ponto também na figura 4.

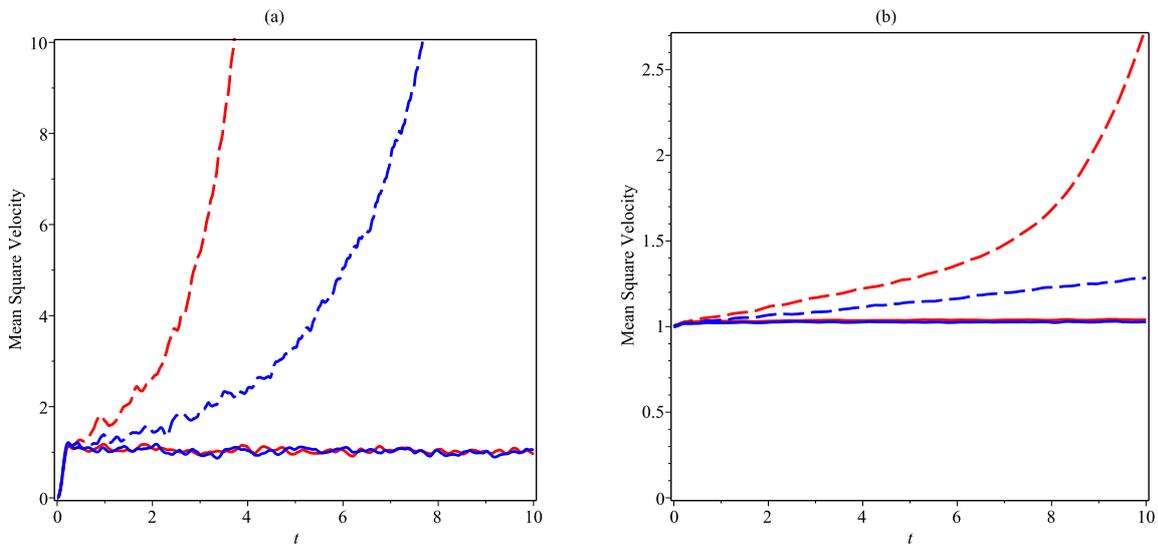


Figure 4: *Condição Periódica e Evolução Temporal da Velocidade Quadrada Média.* Condição Periódica: CPT (linhas de traço), CPS (linha sólida). Passo de integração: $\Delta t = 0.01$ (linha vermelha), $\Delta t = 0.005$ (linha azul). (a): Velocidade quadrática média da partícula de teste. (b): Velocidade quadrática média das partículas de gás. *Parâmetros de simulação:* $\alpha = \infty$, $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $t_F = 10$ e $N_S = 500$.

Na figura 5 mostramos a evolução da posição e velocidade de algumas trajetórias da partícula teste com suas respectivas médias e variância, para um sistema com mesmo parâmetros do mostrado na figura 4 e com CPS. Fica claro através da análise das figuras 4 e 5 que a a velocidade quadrática média, que define a temperatura da partícula teste, converge para um regime de equilíbrio estacionário no caso em que utilizamos CPS, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle = C \quad (C > 0) \quad (4.8)$$

Esta convergência da variância da velocidade da partícula teste para um equilíbrio, após um regime transiente, é que nos autoriza a dizer que a dinâmica estocástica da partícula teste

satisfaz uma condição análoga ao do teorema de flutuação-dissipação.

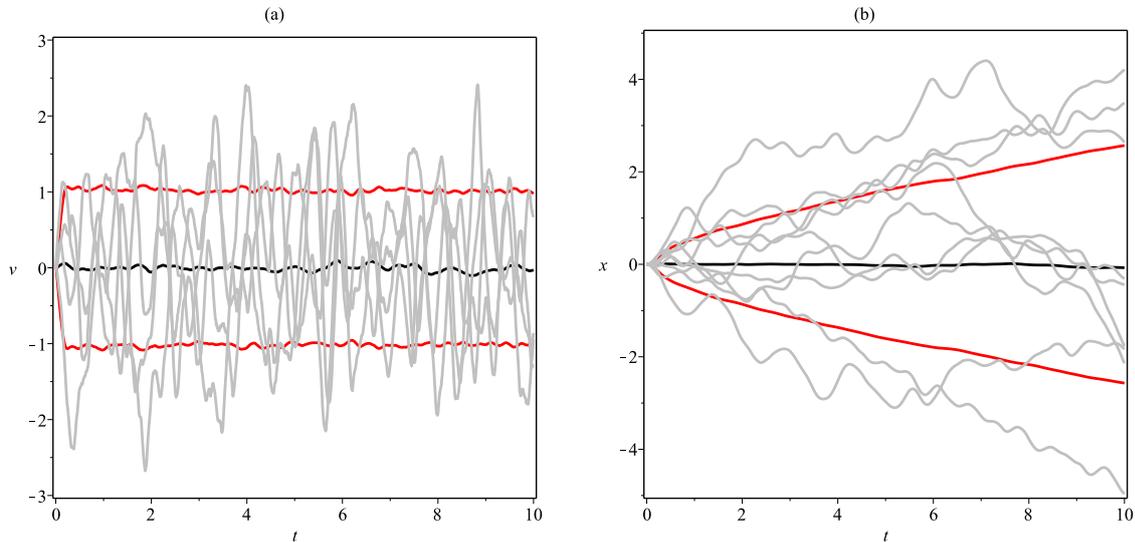


Figure 5: *Evolução temporal da velocidade e posição da partícula de teste.* (a): Velocidade para dez trajetórias (linhas cinzas), Velocidade Média $\langle v(t) \rangle$ (linha preta) Intervalo de variação $\pm\sqrt{\langle v^2(t) \rangle}$ (linha vermelha). (b): Posição para dez trajetórias (linhas cinzas), Posição Média $\langle x(t) \rangle$ (linha preta) e Intervalo de variação $\pm\sqrt{\langle x^2(t) \rangle}$ (linha vermelha). *Parâmetros de simulação:* $\alpha = \infty$, $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 0.01$ and $t_F = 10$. As médias são calculadas sobre $N_S = 500$ trajetórias e a condição periódica usada é CPS.

Na figura 6, mostramos a evolução temporal da variação da posição de uma partícula teste. Podemos ver claramente que a partícula teste, após um regime transiente difunde anormalmente, ou seja, sua posição quadrática média $\langle x^2(t) \rangle$ converge para um regime difusivo assintótico caracterizado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^2(t) \rangle = Dt^\beta \quad (D > 0, \beta \neq 1). \quad (4.9)$$

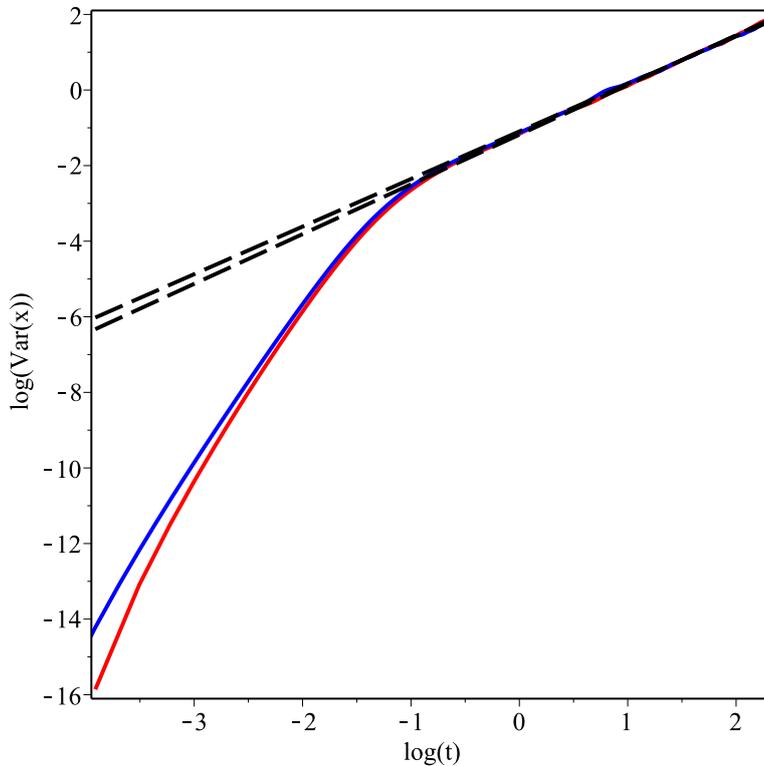


Figure 6: *Difusão da partícula de teste*. Etapa de integração: $\Delta t = 0.01$ (linha vermelha) e $\Delta t = 0.005$ (linha azul). As linhas tracejadas pretas são obtidas a partir do ajuste linear para o regime de difusão assintótica. Os valores de ajuste obtidos para β (ver equação 4.9) são respectivamente $\beta = 1.32$ ($\Delta t = 0.01$) and $\beta = 1.26$ ($\Delta t = 0.005$). *Parâmetros de simulação*: $\alpha = \infty$, $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $t_F = 10$ e $N_S = 500$. A condição periódica usada é CPS.

4.2.2 A Importância da Força de Reação

O objetivo desta subseção é mostrar a importância da presença da força de reação da partícula teste sobre a partícula do gás na dinâmica do sistema (4.1), ainda que as partículas do gás não interajam entre si. Esta força de reação é definida pela terceira lei de Newton e sua presença é fundamental para que a velocidade quadrática média $\langle v^2(t) \rangle$ convirja para um valor constante de equilíbrio.

Ilustraremos este ponto comparando a dinâmica do sistema (4.1) com o sistema que é

obtido eliminando a força de reação, isto é, um sistema de EDO's definido como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v & & \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^N \kappa_N \frac{x_i - x}{|x_i - x|^{1+\delta}}, \\ \frac{dx_i}{dt} = v_i & & \frac{dv_i}{dt} = 0 \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Em ambos os casos integraremos os sistemas de EDO's utilizando CPS.

Na figura 7 comparamos a evolução da velocidade quadrática média da partícula teste do sistema com força de reação (4.1) com a sua evolução obtida no sistema sem força de reação (4.10). Podemos observar claramente que sem a força de reação a velocidade quadrática média não converge para um valor constante de equilíbrio. De fato, podemos constatar que na ausência de força de reação a velocidade quadrática média tende a um expressão assintótica dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle = Ct^\mu \quad (C > 0). \quad (4.11)$$

Na legenda da figura 7, mostramos os valores de μ obtidos através de um ajuste linear. Podemos concluir que, em um sistema em que a força de reação está ausente, a variação de velocidade de uma partícula teste, em vez de convergir para um valor de equilíbrio, difunde-se anormalmente.

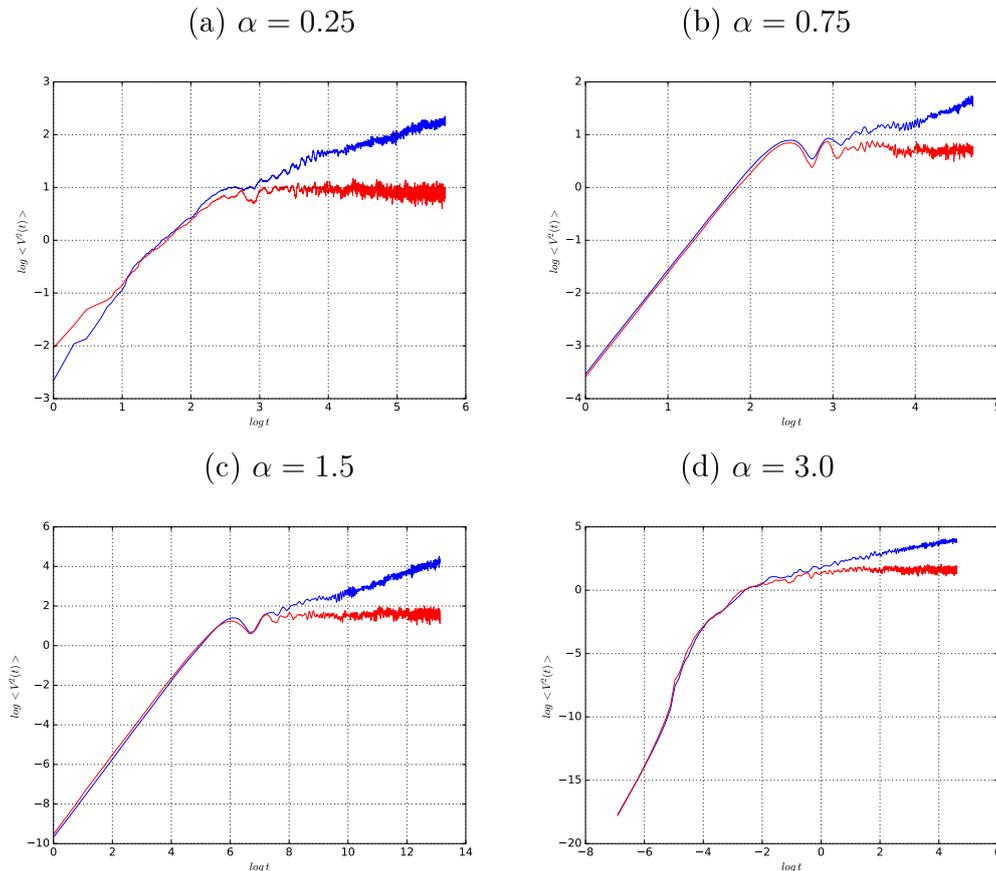


Figure 7: *Importância da força de reação - Gráficos de $\log \langle v^2(t) \rangle \times \log(t)$ para diferentes expoentes de Levy.* Curvas obtidas no sistema dinâmico (4.1) com força de reação (linhas vermelhas). Curvas obtidas do sistema dinâmico (4.10) sem força de reação (linhas azuis). (a): Expoente de Levy $\alpha = 0.25$ ($\mu = 1.31$). (b): Expoente de Levy $\alpha = 0.75$ ($\mu = 1.51$). Panel (c): Expoente de Levy $\alpha = 1.5$ ($\mu = 1.50$). (d): Expoente de Levy $\alpha = 3.0$ ($\mu = 1.44$). *Parâmetros de Simulação:* $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$ e $N_S = 1000$. A condição periódica usada é CPS. Os valores de μ na equação (4.11) são obtidos pelo ajuste linear da parte difusiva das curvas azuis.

5 *Estatística de Força Resultante e Caracterização da Dinâmica da Partículas teste*

O primeiro objetivo desta capítulo é testar se a distribuição de probabilidade da força resultante das N partículas de gás sobre a partícula teste satisfaz os resultados obtidos no capítulo 3. O segundo objetivo é discutir a dinâmica da partícula teste, entendendo principalmente a questão de seu equilíbrio térmico com o gás e caracterizando o tipo de processo difusivo que ela satisfaz.

5.1 *Estatística da Força Resultante*

Nosso objetivo aqui é comparar a distribuição de probabilidade da força resultante, obtida a partir de simulações do sistema de EDO's em (4.1), com as distribuições teóricas obtidas no capítulo 3. Uma vez que obtivemos as expressões para a Função Característica das distribuições de probabilidades da força resultante é mais fácil comparar estas expressões com as Funções Características Empíricas, calculadas a partir das trajetórias simuladas para o sistema dinâmico Newtoniano em (4.1).

Na figura 8 mostramos a evolução temporal da força resultante sobre a partícula teste para um sistema com um gás de $N = 500$ partículas e diferentes valores para o expoente de Levy α . O tamanho do sistema é $L = 2$, o que significa que as partículas do gás foram inicialmente uniformemente distribuídas num intervalo $[1, 1]$, com a partícula teste posicionada na posição $x = 0$. As velocidades iniciais das partículas do gás é dada por uma distribuição gaussiana de média zero e desvio padrão $\sigma = 1$.

O passo de integração utilizado foi $\Delta t = 10^{-4}$ com tempo final de integração $t_F = 100$. Ao final de cada passo calculamos a força sobre a partícula teste, o que implica 10^6 valores calculados para a força resultante. O que observamos na figura 8 é um claro perfil de processo estocástico estacionário para a força resultante.

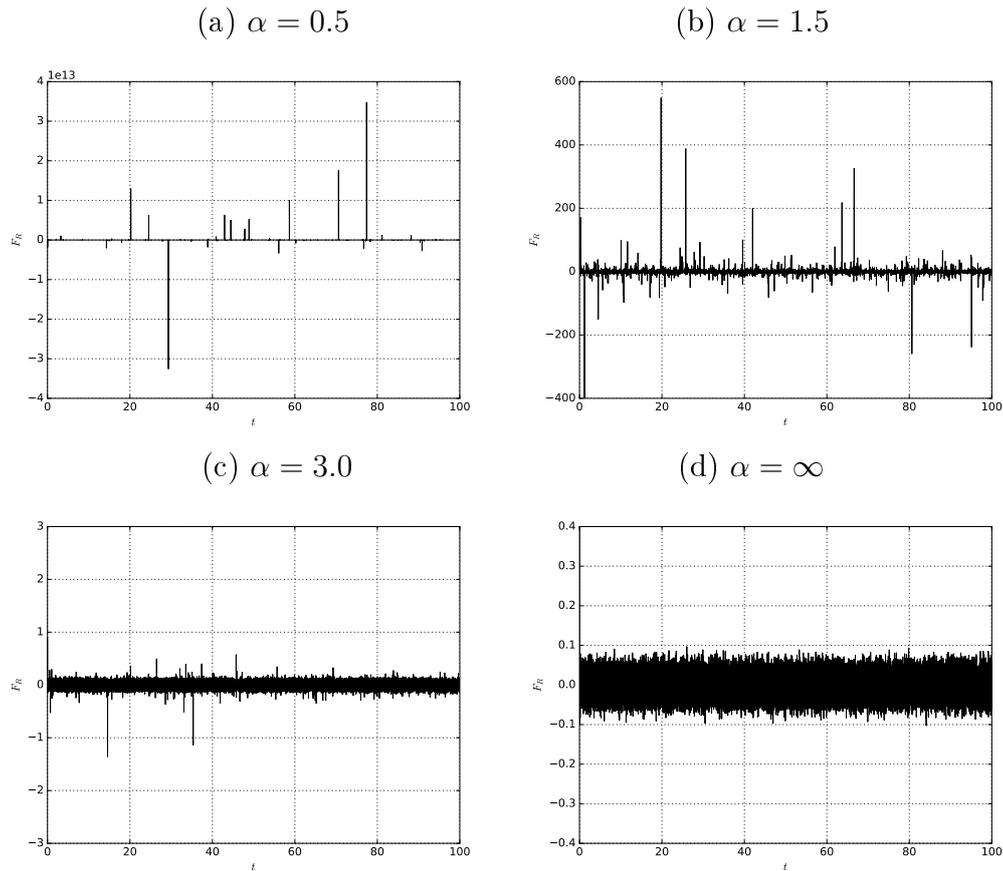


Figure 8: *Evolução temporal da força resultante*. As figuras mostram a força resultante na partícula teste para uma trajetória e valores diferentes do expoente de Levy. *Parâmetros de Simulação*: $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$, $N_S = 1$.

A partir desses valores para a força resultante, obtemos sua Função Característica Empírica. Essas funções características são mostradas na figura 9 para os diferentes valores do expoente de Levy usado nas simulações. Nesta mesma figura, plotamos as Funções Características Teóricas, onde o expoente Levy correspondente é obtido através de um ajuste linear.

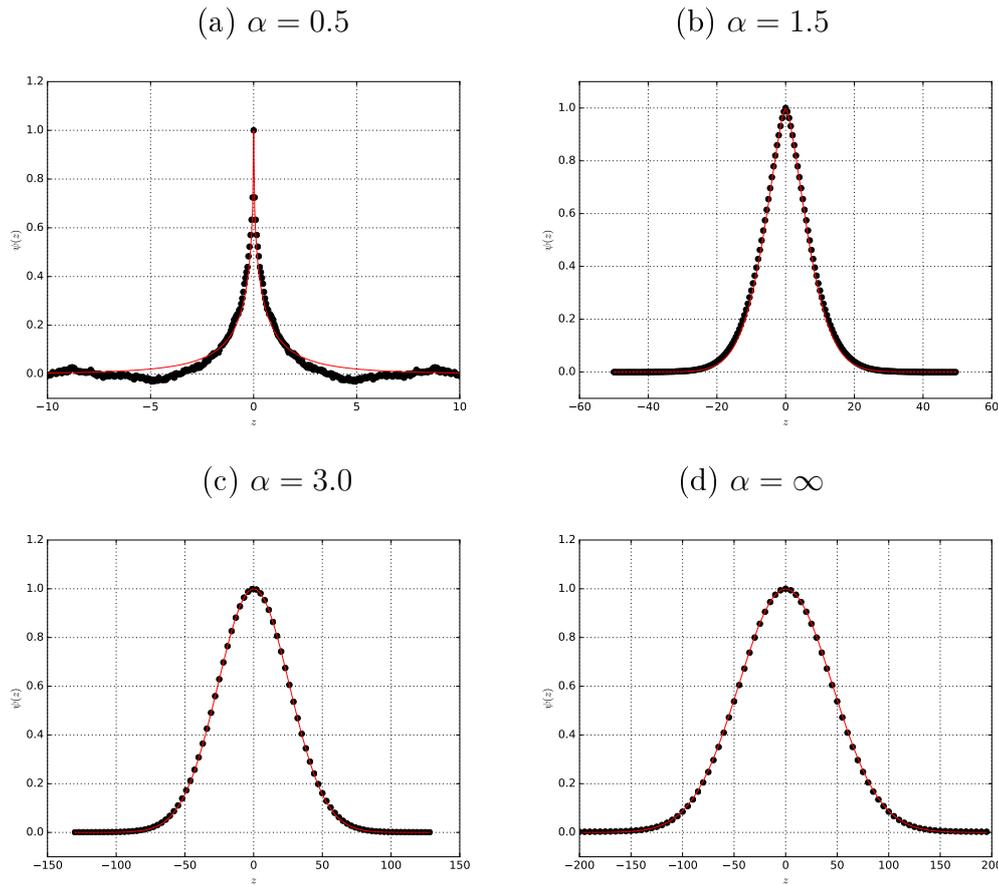


Figure 9: *A função característica da força resultante.* Os gráficos mostram a função característica Empírica (linhas de ponto) e Teórica (linhas sólidas) para diferentes valores do expoente de Levy. A função característica teórica é obtida ajustando a expressão dada em (5.1). *Parâmetros de Simulação:* $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$, $N_S = 1$.

Vale ressaltar que não fizemos um ajuste funcional entre a função característica teórica e a empírica, apenas tentamos estimar o expoente de Levy por um método muito simples de ajuste linear da maneira que é explicada a seguir: tomamos o dobro do logaritmo da expressão em (3.21) e obtemos

$$\log(-\log(\psi(z))) = \begin{cases} \log(A) + \alpha \log(|z|) & \alpha < 2 \\ \log(A) + 2 \log(|z|) & \alpha \geq 2, \end{cases} \quad (5.1)$$

que mostra uma relação linear entre $\log(-\log(\psi(z)))$ and $\log(|z|)$. Como supomos uma distribuição simétrica espacial do gás, assumimos $a_N = 0$, $\beta = 0$ e $\langle F \rangle = 0$ na equação (3.22)

Na figura 10, mostramos o ajuste linear para a Função Característica Empírica. Os

valores de ajuste obtidos para os expoentes de Levy estão de acordo com seus respectivos valores teóricos dados por $\alpha = 1/\delta$.

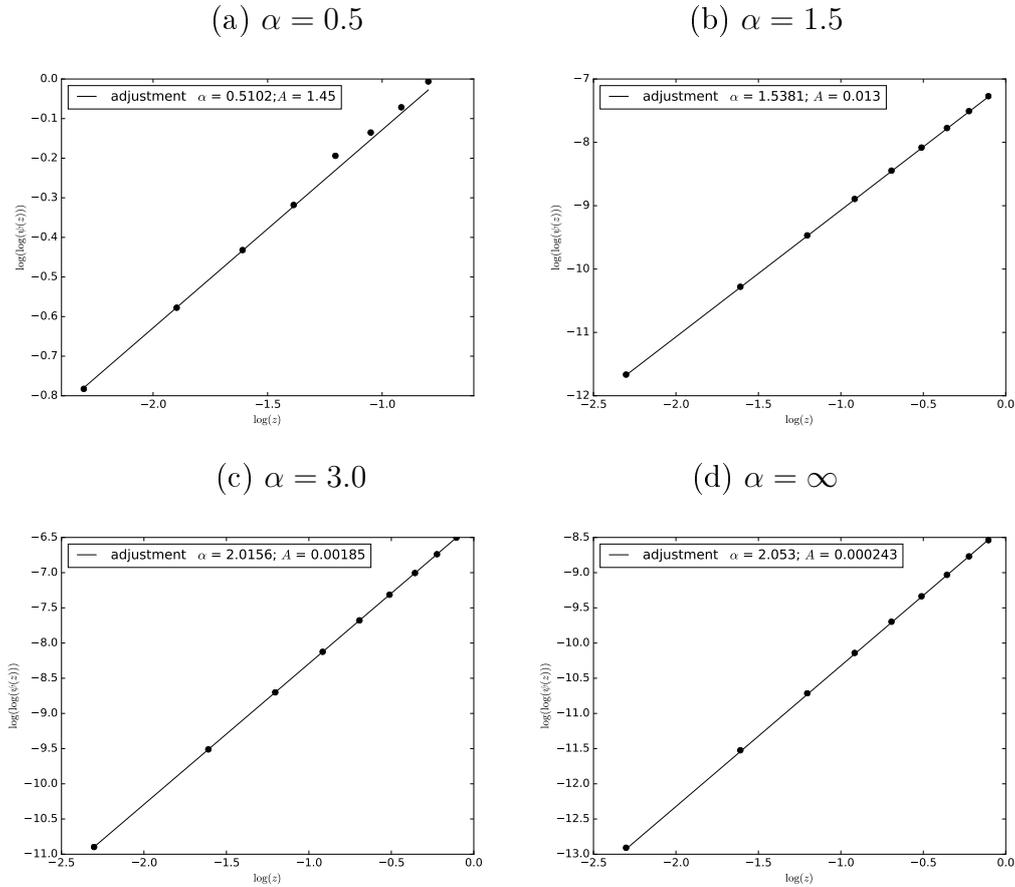


Figure 10: *Ajuste linear da função característica empírica.* Os painéis mostram o ajuste linear da expressão fornecida em (5.1) (linhas sólidas) com a Função Característica Empírica (linhas de ponto) para diferentes valores do expoente de Levy. Os valores de ajuste para A e α são mostrados nos respectivos painéis. *Parâmetros de Simulação:* $N = 500$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 2$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-4}$, $t_F = 100$, $N_S = 1$.

Estes resultados para a estatística da força resultante indicam que o modelo dinâmico definido pelo sistema de EDO's, junto com condições periódicas do tipo CPS, satisfaz, ao menos aproximadamente, a hipótese de independência estatística entre as N forças que atuam na partícula teste devido a partículas do gás. Lembremos que esta é a hipótese fundamental do Teorema do Limite Central e que foi utilizada em nossas demonstrações na Capítulo 3.

5.2 Caracterização da Dinâmica da Partícula Teste

Iremos estudar a dinâmica da partícula teste através da caracterização da evolução temporal das seguintes grandezas:

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle & \text{ Posição quadrática média .} \\ \langle v^2(t) \rangle & \text{ Velocidade quadrática média.} \end{aligned}$$

promediadas sobre N_S trajetórias integradas a partir do sistema de EDO's definido em (4.1), onde fixamos os valores dos parâmetros que o caracterizam:

As médias são calculadas sobre um conjunto de trajetórias simuladas no sistema de EDO's (4.1) e usando CPS. Devemos definir os seguintes parâmetros que caracterizam a simulação do modelo dinâmico:

N	<i>Número de partículas do gás</i>
δ ($\alpha = 1/\delta$)	<i>Expoente da força de interação (Expoente de Levy)</i>
κ_N	<i>Constante da força de interação</i>
L_N	<i>Tamanho do sistema</i>
σ	<i>Desvio padrão da distribuição inicial da velocidade do gás</i>
N_S	<i>Número de trajetórias na simulação</i>
Δt	<i>Passo de integração</i>
t_F	<i>Tempo total de integração</i>

Outra quantidade de interesse é a energia cinética média do gás, definida como:

$$K_{gas}(t) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \langle v_i^2(t) \rangle.$$

Definimos a temperatura assintótica para a partícula teste e para as partículas do gás, respectivamente, como

$$T_{teste} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle, \quad T_{gas} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{gas}(t). \quad (5.2)$$

Podemos estimar os limites acima através das seguintes médias temporais

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle &= \frac{1}{t_F - t_I} \int_{t_I}^{t_F} \langle v^2(t) \rangle dt, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} K_{gs}(t) &= \frac{1}{t_F - t_I} \int_{t_I}^{t_F} K_{gas}(t) dt, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde t_I deve ser escolhido para garantir que $\langle v^2(t) \rangle$ e $K_{gs}(t)$ estejam estacionários no intervalo $[t_I, t_I]$.

A energia cinética média inicial do gás (ou sua temperatura inicial), de acordo com o gerador aleatório de velocidade inicial em (4.3), é dada por

$$T_0 = K_0 = K_{gas}(0) = \frac{\sigma^2}{2}. \quad (5.4)$$

A figura 11 mostra a velocidade quadrática média da partícula teste para dois valores diferentes da constante de força κ_N e tamanho do sistema L_N . O número de partículas no gás é $N = 10$ e sua energia cinética média inicial é $K_0 = 1/2$. Podemos ver pela figura que a evolução temporal e o valor assintótico de $\langle v^2(t) \rangle$ dependem de κ_N e L_N .

Observe que em todos os casos o valor assintótico de $\langle v^2(t) \rangle$ é diferente de 1. Isso mostra que a energia cinética média da partícula teste não converge para a energia cinética média inicial K_0 do gás. Nesse caso, não há transmissão completa de energia cinética inicial do gás para a partícula teste.

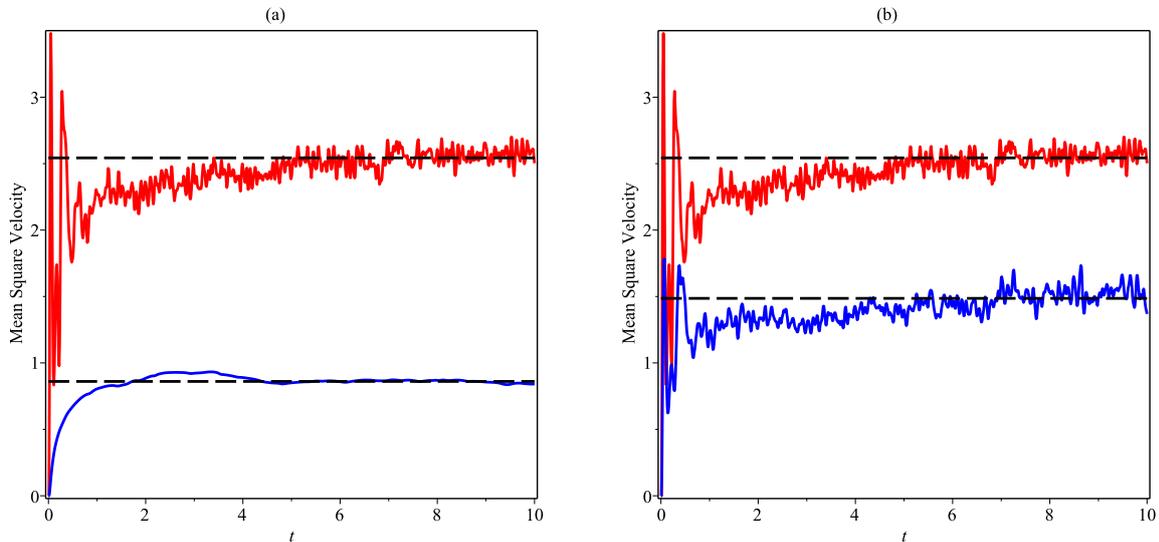


Figure 11: *Velocidade quadrada média da partícula de teste.* Os painéis mostram a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para sistema dinâmico com $\alpha = 0.5$, $N = 10$ e valores diferentes de κ_N e L_N . (a): $\kappa_N = 1$ e $L_N = 1$ (linha vermelha); $\kappa_N = 1$ e $L_N = 50$ (linha azul). (b): $\kappa_N = 1$ e $L_N = 1$ (linha vermelha); $\kappa_N = 0,5$ e $L_N = 1$ (linha azul). Valores assintóticos de $\langle v^2(t) \rangle$ (linhas tracejadas). *Parâmetros de Simulação:* $N = 10$, $\alpha = 0.5$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$, $t_F = 10$, $N_S = 1000$.

Vejamos agora como o limite assintótico de $\langle v^2(t) \rangle$ depende da energia cinética média inicial K_0 . Estudamos essa questão analisando a velocidade quadrada média da partícula de teste em interação com um gás constituído por partículas $N = 50$.

A figura 12 mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para diferentes valores da energia do gás K_0 . Na figura 12 (a), observamos que $\langle v^2(t) \rangle$ converge para valores assintóticos mais altos quanto mais altos for os valores de K_0 . Esse é um comportamento esperado, porque parte da energia cinética do gás é transmitida devido às forças de interação entre o gás e a partícula teste.

A questão importante é quanto da energia cinética inicial é transmitida para a partícula de teste. A figura 12 (b) ilustra este ponto mostrando uma transmissão não completa de energia cinética. De fato, para valores mais baixos de K_0 , a energia cinética média da partícula teste tende a ser maior que K_0 , enquanto para valores mais altos de K_0 energia cinética média da partícula teste tende a ser menor que K_0 .

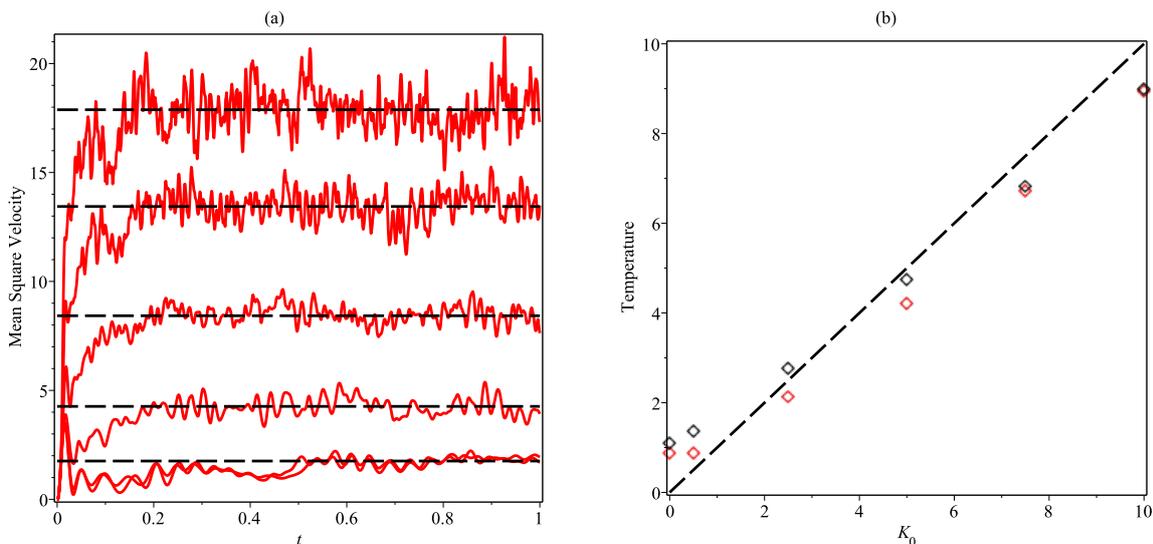


Figure 12: (a): *Velocidade quadrada média da partícula teste.* Evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ (linhas vermelhas) e seus respectivos valores assintóticos (linhas tracejadas) para diferentes valores de K_0 . De baixo para cima, mostramos as curvas correspondentes respectivamente a $K_0 = 0$, $K_0 = 1$, $K_0 = 2,5$, $K_0 = 5,0$, $K_0 = 7,5$ e $K_0 = 10$. (b): *Temperatura Assintótica.* T_{teste} (pontos vermelhos), T_{gs} (pontos pretos), T_0 (linha de traço). *Parâmetros de Simulação:* $N = 50$, $\alpha = 0.5$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$, $t_F = 1$, $t_I = 0.5$, $N_S = 1000$.

Esses resultados parecem contradizer a idéia de que a partícula teste tenderia a alcançar um equilíbrio térmico com o gás de partículas de N , onde é fornecida uma transmissão

perfeita da energia cinética inicial K_0 para a partícula teste. Essa transmissão completa não parece ser consequência da energia potencial de interação que não pode ser considerada pequena em relação à energia do gás. Uma maneira de verificar esse problema é aumentar o tamanho do sistema L_N ou diminuir a constante de força κ_N , conforme ilustrado na figura 13.

Observamos que a diminuição da constante de força κ_N , figura 13 (a), ou o aumento do tamanho do sistema, figura 13 (b), implicam numa transmissão mais completa da energia inicial K_0 do gás e, conseqüentemente, a partícula teste fica mais próxima de uma situação de equilíbrio térmico com as partículas do gás.

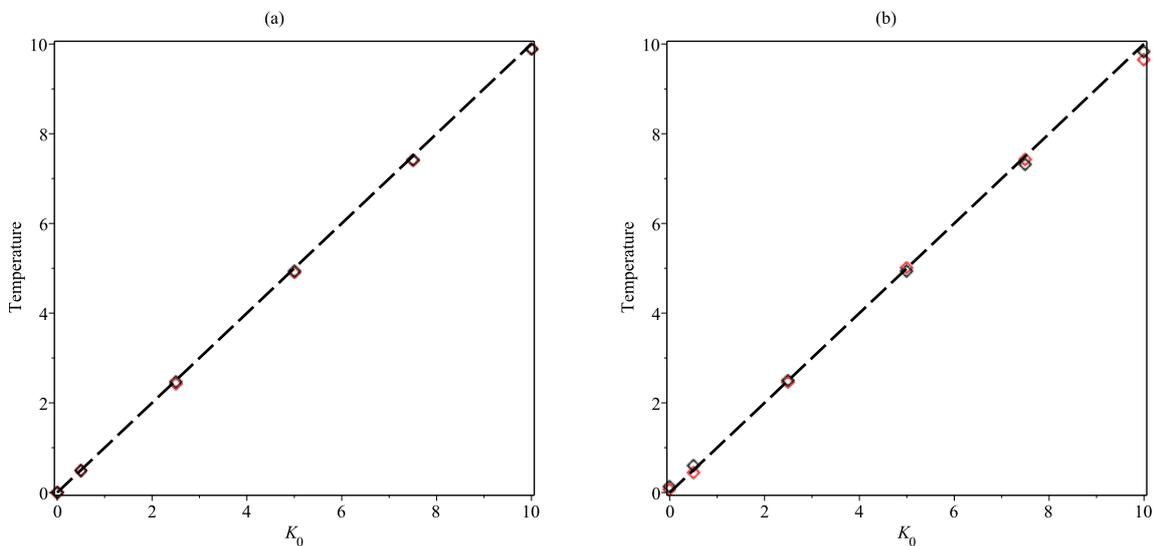


Figure 13: *Temperatura assintótica para sistemas com menor força constante ou maior tamanho.* Os painéis mostram a temperatura assintótica para diferentes valores de K_0 : T_{teste} (pontos vermelhos), T_{gs} (pontos pretos), T_0 (linhas tracejadas). O Sistema Dinâmico tem os mesmos parâmetros de simulação mostrados na figura 12, exceto que em (a) temos $\kappa_N = 10^{-4}$ e em (b) temos $L_N = 50$. *Parâmetros de Simulações:* $N = 50$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 10^{-2}$, $t_F = 1$, $t_I = 0.5$, $N_S = 1000$.

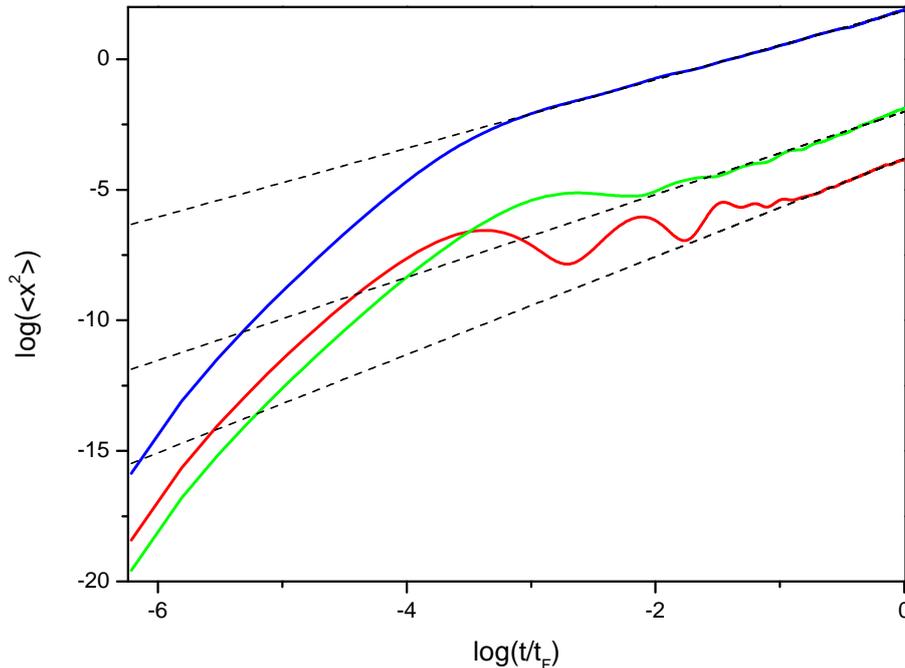


Figure 14: *Difusão da partícula teste para diferentes valores do expoente de Levy.* $\alpha = 0,5$ (linha vermelha), $\alpha = 1,5$ (linha verde), $\alpha = \infty$ (linha azul), ajuste linear (linhas de traço) O expoente de difusão assintótica β obtido por ajuste linear é mostrado na tabela 1. *Parâmetro de Simulação:* $N = 50$, $\kappa_N = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$, $N_S = 1000$. Os valores de t_F são respectivamente $t_F = 1$ ($\alpha = 0.5$), $t_F = 2.5$ ($\alpha = 1.5$), $t_F = 10$ ($\alpha = \infty$).

Em relação à difusão de partículas teste, mostramos a evolução da variação de posição na figura 14 para sistemas com diferentes expoentes de Levy. O padrão de evolução temporal é caracterizado por uma fase transitória e uma difusão anômala assintótica. Em todas as simulações que fizemos para um pequeno número de partículas de gás ($N \leq 50$), observamos o mesmo padrão exibido na figura 14, com o expoente de difusão dependendo de maneira muito sensível e complicada nos parâmetros α , κ_N , L e K_0 .

Não apresentamos todos esses resultados porque o foco deste trabalho é entender o que acontece quando $N \rightarrow \infty$ no contexto dos limites discutidos no capítulo 3. No entanto, para ter uma idéia dessa dependência complicada, mostramos na tabela 1 os expoentes de difusão β obtido (por ajuste linear) a partir das simulações usadas nas figuras 12, 13 e 14.

Table 1

Expoente de Difusão $\alpha = 0.5$, $N = 50$ e diferentes valores de κ_N and L

	$\kappa_N = 1.0$ $L = 1.0$	$\kappa_N = 1.0$ $L = 50.0$	$\kappa_N = 0.0001$ $L = 1.0$
$K_0 = 0.0$	$\beta = 1.65$	$\beta = 0.37$	$\beta = 0.76$
$K_0 = 1.0$	$\beta = 1.88$	$\beta = 0.86$	$\beta = 1.35$
$K_0 = 5.0$	$\beta = 1.97$	$\beta = 1.05$	$\beta = 1.64$
$K_0 = 10.0$	$\beta = 1.98$	$\beta = 1.24$	$\beta = 1.76$
$K_0 = 15.0$	$\beta = 1.96$	$\beta = 1.41$	$\beta = 1.81$
$K_0 = 20.0$	$\beta = 1.97$	$\beta = 1.47$	$\beta = 1.85$

Expoente de difusão para diferentes valores de α com $N = 50$, $\kappa_N = 1$ and $L = 1$

	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = \infty$
$K_0 = 1.0$	$\beta = 1.88$	$\beta = 1.59$	$\beta = 1.32$

A importância de analisar sistemas com N pequenos reside no fato de que podemos definir um gás que interagi com a partícula teste e implicando uma condição de Flutuação-Dissipação com um regime assintótico caracterizado por difusão anômala.

6 *Análise das Consequências Dinâmicas das Renormalizações da Força Resultante*

Neste capítulo analisaremos as consequências na estatística de evolução temporal da partícula teste em função do crescimento do número de partículas do gás, onde impomos no processo de limite $N \rightarrow \infty$ as condições discutidas no capítulo 3 deste trabalho. A análise irá se concentrar sobre as características mais importantes da evolução temporal da velocidade quadrática média $\langle v^2(t) \rangle$ e da posição quadrática média $\langle x^2(t) \rangle$.

Com relação a velocidade quadrática média estamos interessados em caracterizar o seu valor assintótico e o tempo transiente de convergência para este valor assintótico. Interessamos verificar se a transmissão de energia cinética do gás para a partícula teste é completa. Com relação a posição quadrática média estamos interessados em identificar o tipo de difusão assintótica da partícula teste e o tempo transiente de convergência para este regime assintótico. Particularmente queremos identificar o valor do expoente de difusão correspondente.

Relembrando, no capítulo 2 discutimos três tipos de limites: 1) o Limite Flutuativo- L , 2) o Limite Flutuativo- κ e 3) o Limite de Vlasov. Abordaremos cada um desses limites nas subseções seguintes.

6.1 Limite Flutuativo-L

O limite Flutuativo-L é obtido fazendo-se $N \rightarrow \infty$ e $L_N \rightarrow \infty$ de tal modo que a condição dada em (3.24) é satisfeita. Todas as simulações apresentadas nesta subseção foram realizadas com os seguintes parâmetros:

$$K = 1.0, \quad \kappa_N = 1.0, \quad \sigma = 1.0, \quad \Delta t = 10^{-4}, \quad N_S = 1000.$$

Na figura 15 apresentamos a evolução temporal da velocidade quadrática média da partícula teste para quatro valores do expoente de Levy. A seguir analisamos as princi-

tais características observadas.

- Para $\alpha = 0.25$ - figura 15 (a) - e $\alpha = 0.75$ - figura 15 (b)- vemos a coincidência das quatro curvas relativas aos diferentes número de partículas N dos gás. Isto mostra que o tempo transiente para $\langle v^2(t) \rangle$ convergir não depende de n
- Para $\alpha = 1.5$ - figura 15 (c) - e $\alpha = 3.0$ - figura 15 (d), vemos que os valores assintóticos de equilíbrio $\langle v^2(t) \rangle$ são os mesmos para as curvas correspondentes aos diferentes valores de N , porém as partes transientes não mais coincidem. De fato, observando as figuras 15 (c) and 15 (d), vemos que o tempo transiente parece diminuir a medida que N aumenta.
- O valor assintótico da velocidade quadrática média da partícula teste é aproximadamente 1 para $\alpha = 0.25$ - figura 15 (a) - e menor do que 1 para os outros valores de expoentes de Levy apresentados nas figuras 15 (b), 15 (c) e 15 (d).

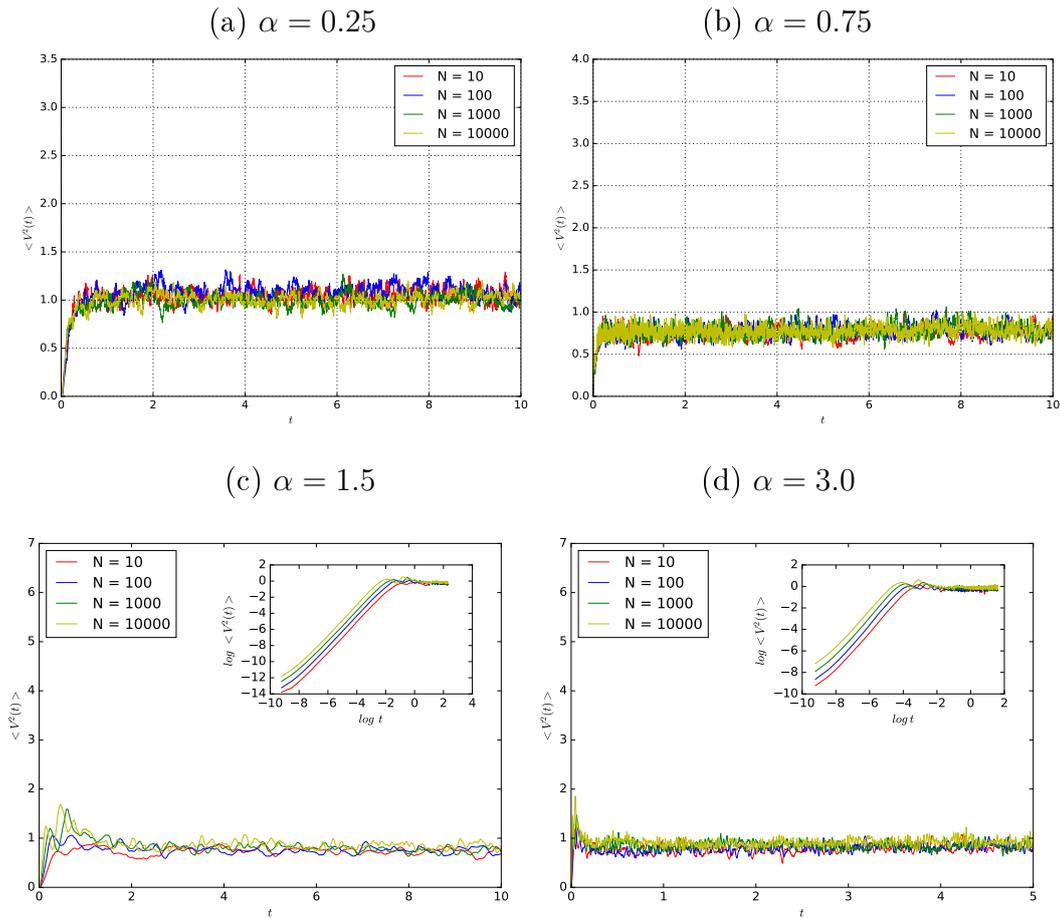


Figure 15: *Evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ - Limite Flutuativo-L*. A figura mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$. Os valores de N e L_N satisfem a condição (3.24). Os gráficos pequenos mostram essa evolução temporal na escala $\log - \log$.

Na figura 16 apresentamos a evolução temporal da posição quadrática média da partícula teste para as mesmas simulações apresentadas na figura 15. A seguir listamos e analisamos as principais características observadas.

- Em cada um dos painéis da figura 16 observamos que as curvas correspondentes aos diferentes valores de N convergem para o mesmo regime difusivo.
- O tempo transiente para convergir ao regime difusivo diminui com o aumento do número de partículas N .
- Para $\alpha = 0.25$ e $\alpha = 0.75$, a partícula teste converge para um regime difusivo normal, isto é, expoente de difusão $\beta = 1$.

- Para $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 3.0$ a partícula teste converge para um regime difusivo balístico, isto é, $\beta = 2$.

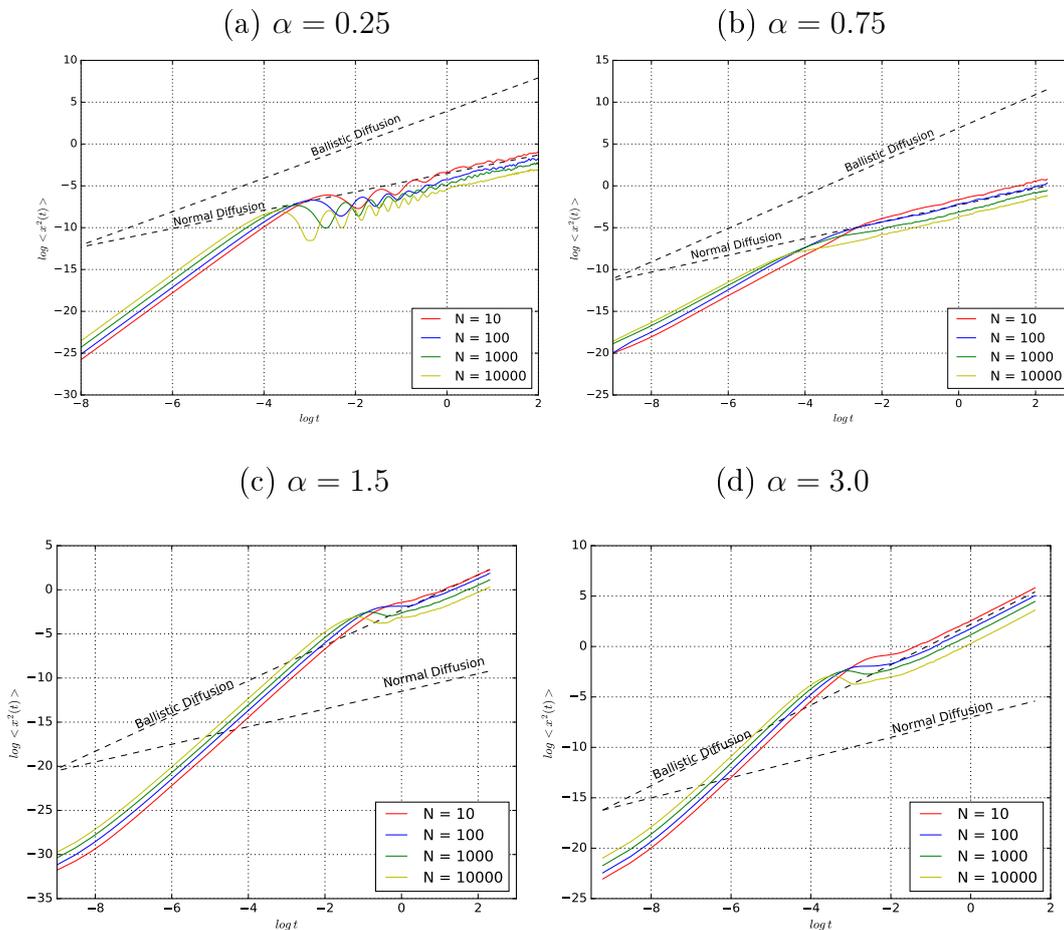


Figure 16: *Evolução temporal* $\langle x^2(t) \rangle$ - *Limite flutuativo-L*. Os gráficos mostram a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ para $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ na escala $\log - \log$. Os valores de N e L_N satisfazem a condição(3.24).

Na figura 17 mostramos o expoente de difusão β e o valor assintótico de $\langle v^2(t) \rangle$ em função do expoente de Levy α . Na figura 17 (a), concluímos a existência de dois regimes difusivos assintóticos: uma difusão normal ($\beta = 1$) por $0 < \alpha < 1$ e uma difusão balística ($\beta = 2$) para $\alpha \geq 1$. A transição de um regime para outro ocorre em $\alpha = 1$ (expoente de força $\delta = 1$). Observamos também que em $\alpha = 1$ corresponde a uma transição entre a condição de existência de uma força resultante média ($\alpha > 1$) e sua inexistência ($\alpha < 1$).

A análise da figura 17 (b) permite-nos concluir que a transmissão de energia cinética para a partícula de teste está completa quando $0 < \alpha \leq 1/2$, ou seja, a energia cinética assintótica da partícula de teste é igual a energia cinética média inicial K_0 do gás. Por outro

lado, para $\alpha > 1/2$, essa transmissão não está completa, significando uma energia cinética média assintótica da partícula teste menor que K_0

Esse resultado está relacionado ao fato de que a energia potencial média da partícula teste existe para $\alpha \geq 1/2$ ($\delta < 2$), enquanto para $\alpha < 1/2$ ($\delta > 2$) não existe. Esta transmissão incompleta de energia cinética deve-se a uma variação da energia potencial média assintótica em relação ao seu valor inicial.

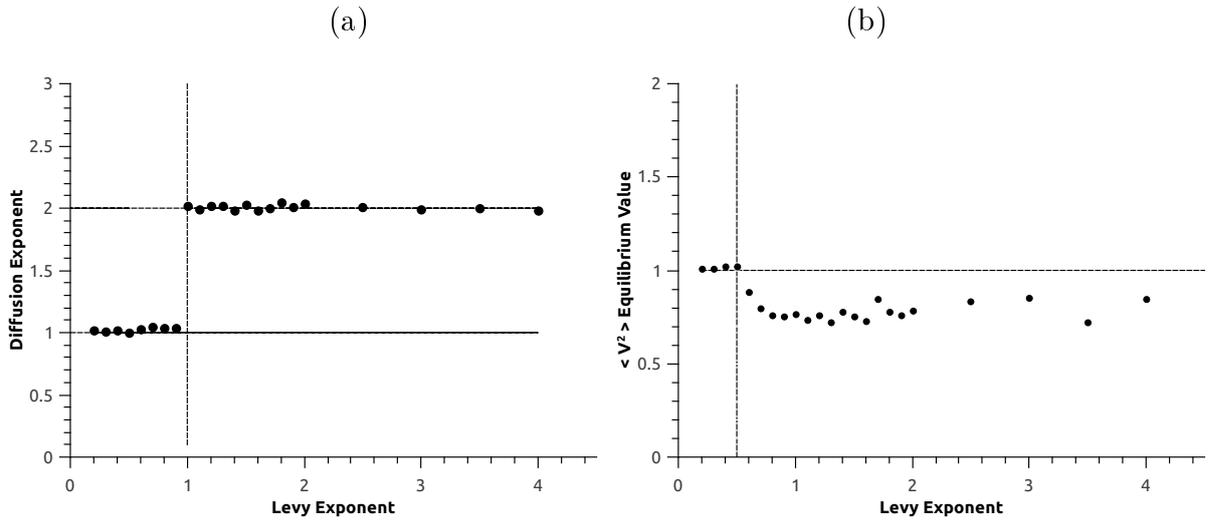


Figure 17: *Valores Assintóticos - Limite Flutuativo - L.* (a): Expoente de difusão assintótica em função do expoente de Levy. (b): $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle$ como função do expoente Levy. Os valores assintóticos são calculados a partir das simulações com $N = 10^4$ e usando $t_I = t_F/2$ na equação (5.3). O expoente de difusão é obtido por ajuste linear no intervalo $[t_I, t_F]$.

6.2 Limite Flutuativo - κ

O limite Flutuativo- κ é obtido fazendo-se $N \rightarrow \infty$ and $\kappa_N \rightarrow 0$ de tal modo que a condição dada na equação (3.25). Todas as simulações apresentadas nesta seção foram realizadas com os seguintes parâmetros:

$$K = 1.0, \quad L_N = 2.0, \quad \sigma = 1.0, \quad \Delta t = 10^{-4}, \quad N_S = 1000.$$

Na figura 18, apresentamos a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para diferentes valores do expoente de Levy. Listamos abaixo as principais características observadas.

- Para $\alpha = 0,25$ e $\alpha = 0,75$, as curvas correspondentes a diferentes valores de N têm tempos transitórios diferentes. Esses tempos diminuem à medida que N aumenta.

- Para $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 3.0$, as curvas coincidem, mostrando um tempo transitório que é independente de N .
- O valor de equilíbrio de $\langle v^2(t) \rangle$ é 1 para $\alpha = 0,25$ e menos que 1 para os outros valores de α .

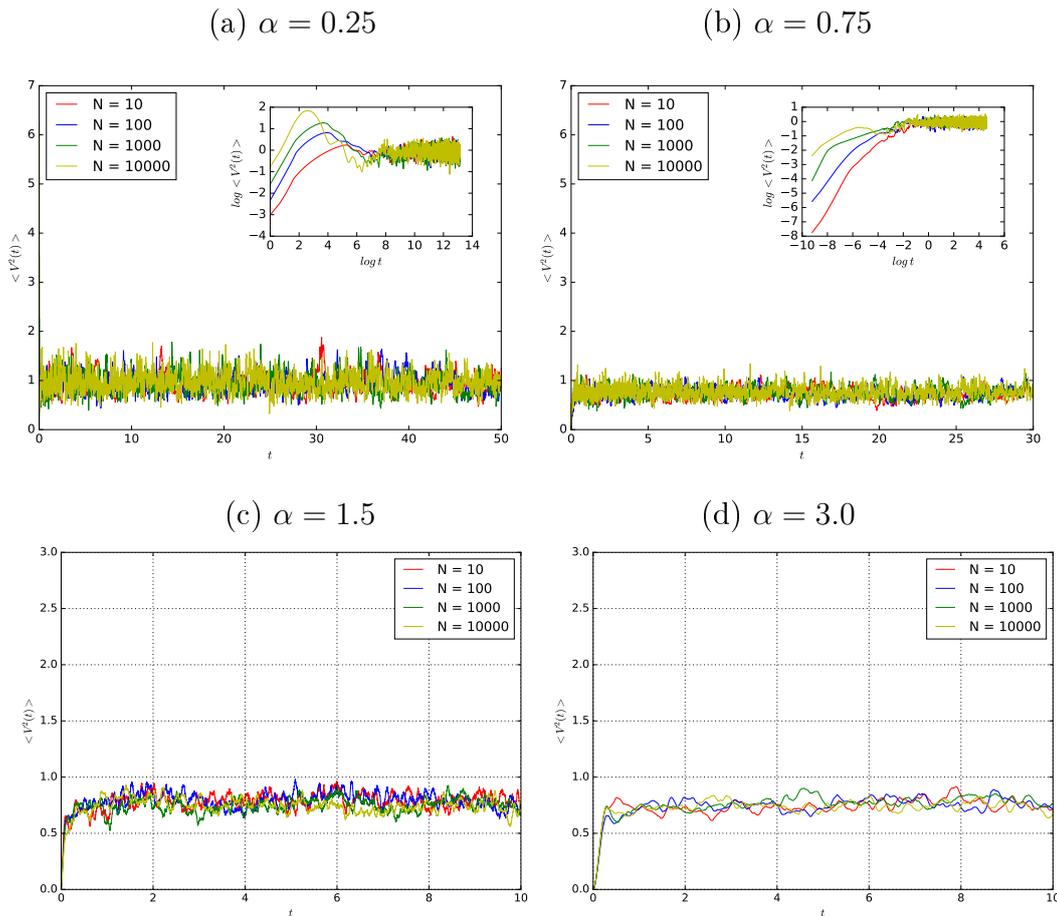


Figure 18: *Evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ - Limite Flutuativo- κ* . O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$. O valor de N e κ_N satisfazem a condição (3.25). O gráfico pequeno mostra a evolução temporal na escala $\log - \log$.

Na figura 19, mostramos a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$. Podemos tirar as seguintes conclusões.

- Em cada figura, observamos uma quase coincidência entre as curvas, indicando que a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ é independente de N . Como consequência, o tempo transitório não depende de N .

- Para $\alpha = 0,25$ e $\alpha = 0,75$, a partícula de teste converge para um regime difusivo normal.
- Para $\alpha = 1,5$ e $\alpha = 3,0$, a partícula de teste converge para um regime difusivo balístico.

Na figura 20, plotamos o expoente de difusão β e o valor de equilíbrio de $\langle v^2(t) \rangle$ em função do expoente de Levy. Observamos na figura 20 (a) a existência de dois regimes difusivos: uma difusão normal para $\alpha \leq 1$ e uma difusão balística para $\alpha > 1$. A transição no expoente de difusão acontece em $\alpha = 1$. Já na figura 20 (b), vemos que o valor assintótico de $\langle v^2(t) \rangle$ é igual a 1 por $0 < \alpha \leq 1/2$, enquanto que para $\alpha > 1/2$ é menor que 1. Esse fato deve ser interpretado exatamente da mesma maneira que quando analisamos esta questão no Limite de flutuação - L .

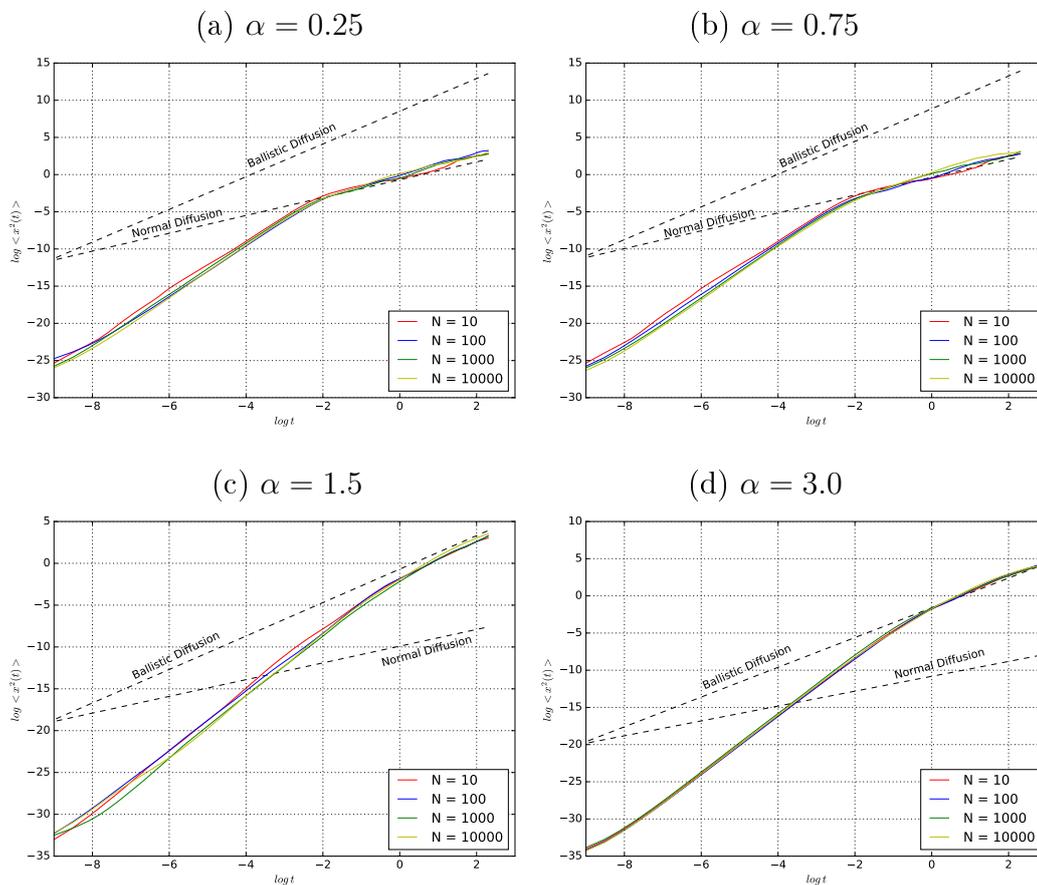


Figure 19: *Evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ - Limite Flutuativo $-\kappa$.* O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ for $\alpha = 0.25, 0.75, 1.5, 3.0$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ na escala $\log - \log$. Os valores de N e κ_N satisfazem a condição (3.25).

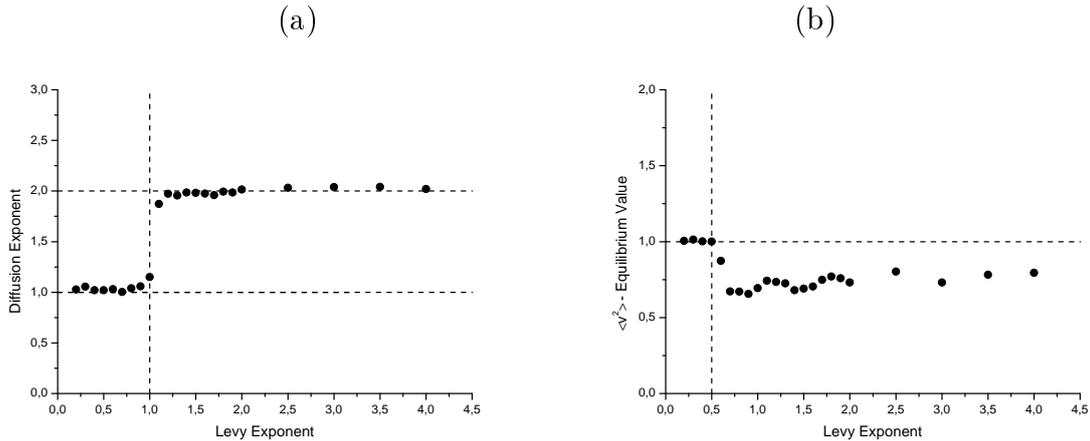


Figure 20: *Valores Assintóticos - Limite Flutuativo - κ* . It (a): Expoente de difusão assintótica em função do expoente de Levy. it (b): $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle$ como função do expoente Levy. Os valores assintóticos são calculados a partir das simulações com $N = 10^4$ e usando $t_I = t_F/2$ na equação (5.3). O expoente de difusão é obtido por ajuste linear no intervalo $[t_I, t_F]$.

6.3 Limite de Vlasov

O limite de Vlasov é estabelecido assumindo o limite $N \rightarrow \infty$ e $\kappa_N \rightarrow 0$, mantendo o tamanho do sistema L_N constante, de modo que a condição (3.27) seja preenchida. As simulações são feitas fixando os seguintes parâmetros:

$$K = 1.0, \quad L_N = 2.0, \quad \sigma = 1.0, \quad \Delta t = 10^{-4}, \quad N_S = 1000.$$

A figura 21 mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para diferentes números de partículas N do gás. Em cada figura, há uma convergência para o mesmo valor assintótico, porém o tempo transitório cresce com N . Isso parece mostrar que o tempo transitório tende ao infinito quando $N \rightarrow \infty$. Portanto, a partícula teste tende a permanecer mais desequilibrada à medida que o número de partículas de gás N aumenta. Tecnicamente, para $N = \infty$, a flutuação sobre a força resultante média na partícula teste é nula, o que faria com que ela permanecesse em repouso indefinidamente.

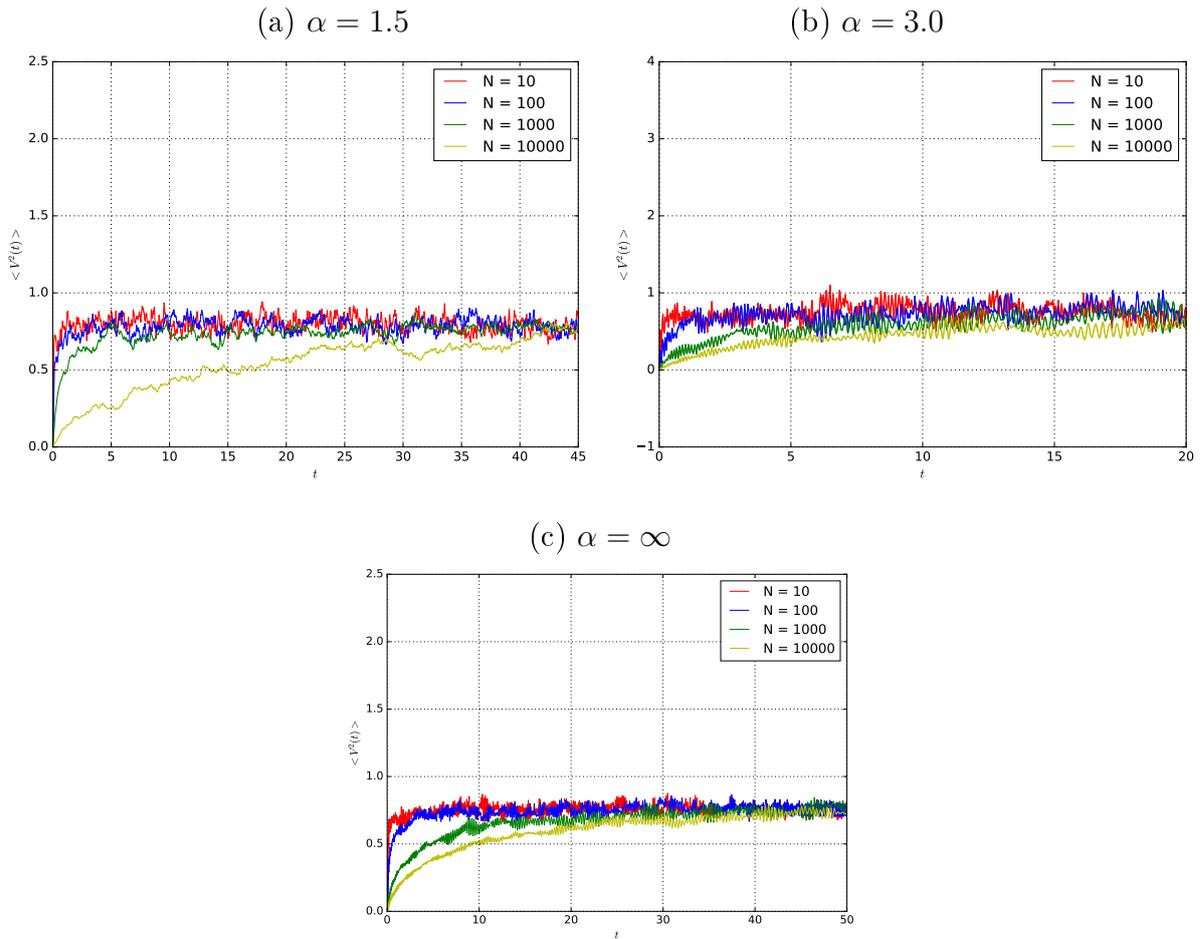


Figure 21: *Evolução Temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ - Limite de Vlasov.* O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle v^2(t) \rangle$ para $\alpha = 1.5, 3.0, \infty$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$. O valor de N e κ_N satisfazem a condição (3.27).

A figura 22 ilustra o efeito do limite de Vlasov na difusão da partícula teste. Vemos que, em todos os casos, a partícula teste tende a um estado assintótico de difusão balística, equivalente ao que foi mostrado para nos limites flutuativos. A diferença com o limite de Vlasov é que o tempo transitório para atingir o regime de difusão balística parece aumentar com o aumento de N .

Na figura 22 temos o gráfico $\log \langle x^2(t) \rangle \times \log(t)$, então podemos escrever

$$\langle x^2(t) \rangle = D_N f_N(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_N(t) = t^2. \quad (6.1)$$

Para períodos curtos, a função $f_N(t)$ parece ser independente de N (as curvas para $N = 10^3$ e $N = 10^4$ são paralelas), então D_N deve diminuir como Aumento de N . Esperamos que, no limite de $N \rightarrow \infty$, tenhamos $D_N \rightarrow 0$.

Vemos que, para o limite de Vlasov, o tempo transitório de $\langle x^2(t) \rangle$ para atingir o

regime de difusão balística, se comporta de maneira diferente dos limites flutuativos, onde o tempo transitório é claramente finito.

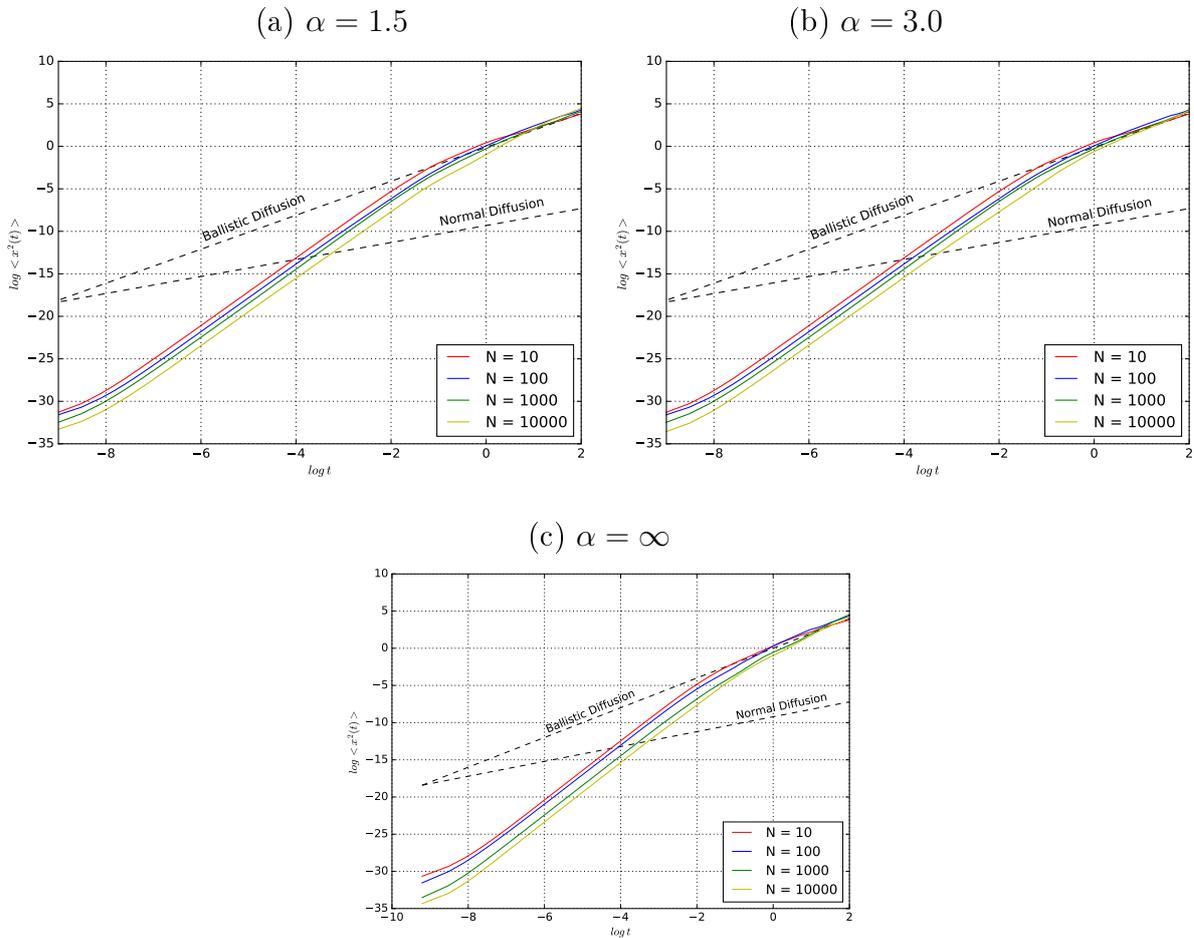


Figure 22: *Evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ - Vlasov Limit.* O gráfico mostra a evolução temporal de $\langle x^2(t) \rangle$ para $\alpha = 1.5, 3.0, \infty$ e $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ na escala $\log - \log$. O valor de N e κ_N satisfazem a condição (3.27).

A discussão acima é consistente com o fato de que o Limite de Vlasov está configurado para estabilizar a força resultante, fazendo com que a flutuação ao redor diminua indefinidamente à medida que o N aumenta. Portanto, é razoável esperar que a partícula teste tenda a permanecer cada vez mais em seu estado inicial à medida que N cresce, uma vez que a média da força resultante é nula. Em outras palavras, temos uma força resultante nula que flutua cada vez menos à medida que N cresce.

Esses resultados parecem condenar o limite de Vlasov como uma curiosidade matemática sem importância física, uma vez que não define uma dinâmica estocástica da partícula teste que tende a ser independente do processo de renormalização realizado. No entanto, devemos ter cuidado com esta conclusão, porque foi obtida em uma situação muito particular: a força

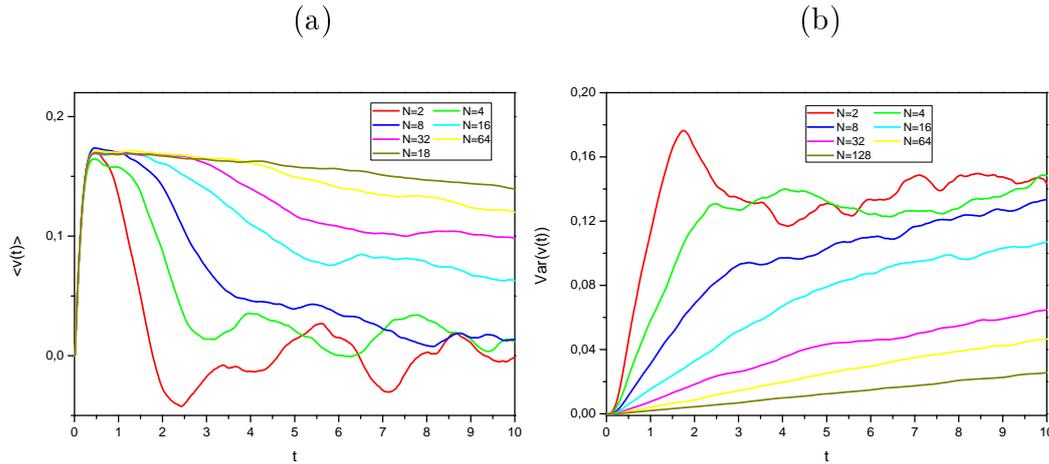


Figure 23: *Limite de Vlasov para uma distribuição inicial não uniforme de partículas do gás.* (a): A evolução temporal de $\langle v(t) \rangle$ para gases com número crescente de partículas N . (b): A evolução temporal de $\text{Var}(v(t))$ para os respectivos valores de N . Os valores de N e κ_N atendem à condição (3.27). *Parâmetros de Simulação:* $\alpha = \infty$, $K = 1$, $L_N = 1$, $\sigma = 1$, $\Delta t = 10^{-2}$, $t_F = 10$, $N_S = 1000$. A variância da velocidade da partícula teste é dada por $\text{Var}(v(t)) = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2$.

resultante é nula. Se a força resultante não for nula (por exemplo: distribuição inicial não uniforme do gás), os limites flutuativo para $\alpha > 1$ não renormalizarão a força resultante, fazendo com que ela cresça indefinidamente com o aumento de N . Isso implicaria em aceleração da partículas teste que também aumentariam indefinidamente.

Por outro lado, o limite de Vlasov tenderia a estabilizar a força resultante na partícula teste, o que implica que não sofreria um crescimento indefinido de sua aceleração. A consequência seria a estabilização da velocidade média da partícula teste, que nos limites flutuativos tenderia a crescer indefinidamente.

Mostramos, na figura 23 (a), a evolução temporal da velocidade média $\langle v(t) \rangle$ de uma partícula teste em interação com um gás, cujo número de partículas aumenta de $N = 2$ a $N = 128$ e com uma distribuição inicial não uniforme. Na figura 23 (b), mostramos a respectiva evolução temporal da variação da velocidade.

Para ter uma idéia aproximada de como esse tempo transitório cresce com N , tentamos ajustar a evolução temporal da variação de velocidade por uma curva dada por

$$\text{Var}(v(t)) = \langle v^2(t) \rangle - \langle v(t) \rangle^2 = A(1 - \exp(-Bt)). \quad (6.2)$$

O valor de A é obtido a partir do valor assintótico de $\text{var}(v(t))$ a $N = 2$. O valor de B é obtido ajustando a expressão dada em (6.2). O resultado dessa conexão é mostrado na figura 24 (a). Nós estimamos o tempo transitório como sendo $t_N^{\text{trans}} = 1/B_N$, onde B_N é o

valor ajustado de B para a respectiva curva correspondente a um determinado valor de N . Os valores de B_N e seus tempos transitórios são mostrados na tabela 2.

Table 2

N	B_N	t_N^{trans}
2	1.5770	0.6341
4	0.6807	1.4691
8	0.2809	3.5605
16	0.1528	6.5432
32	0.0643	15.543
64	0.0396	25.219
128	0.0192	52.089

Na figura 24 (b), plotamos o tempo transitório em função do número de partículas N . É bastante interessante notar que o tempo transitório estimado depende aproximadamente linearmente do número de partículas. Observamos que nossa intenção com o modelo simples e aproximado (6.2) não é usado o modelo correto para descrever a evolução da variação de velocidade, mas apenas ter uma estimativa básica de como o tempo transitório varia com o número de partículas N .

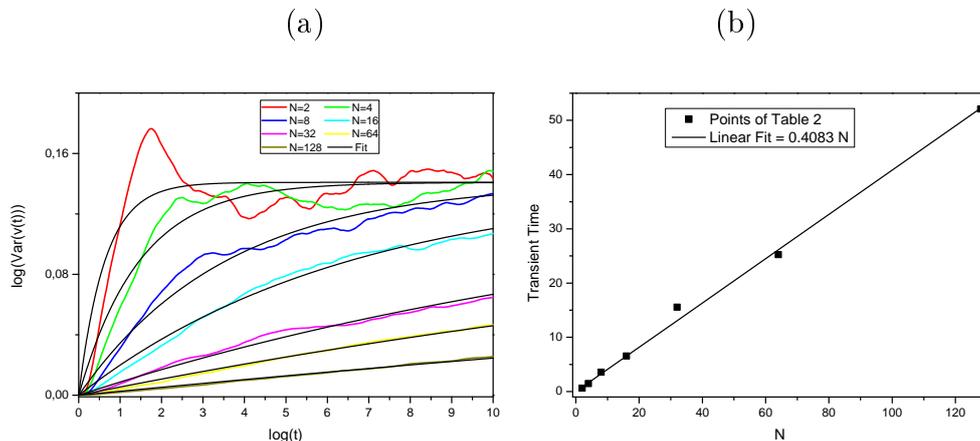


Figure 24: *O tempo transitório no limite de Vlasov.* It (a) Curvas dadas pelo modelo (6.2) ajustadas às curvas mostradas na figura 23 (a) (linhas pretas). it (b): Os tempos transitórios (tabela 2) em função de N (pontos pretos) e o ajuste linear desses pontos (linha preta). A expressão do ajuste linear mostrado na figura (b) é $t_N^{trans} = 0,4083N$.

7 *Conclusões e Perspectivas*

7.1 Conclusões

Neste trabalho analisamos e verificamos o significado dos Limites Flutuativos e de Vlasov para determinar a dinâmica de uma partícula teste submetida a uma interação com N partículas. Mostramos que os limites decorrentes da renormalização da Força Resultante via Teorema do Limite Central, conforme proposto na referência [40] e especificados para o caso unidimensional no capítulo 3 deste trabalho, são os guias naturais para definir as classes de universalidades dos possíveis comportamentos dinâmicos da partícula teste

De maneira geral, em todas as simulações realizadas, o comportamento dinâmico da partícula teste, visto como um processo estocástico, pode ser sumarizado como sendo constituído de duas fases: uma fase transiente, onde a partícula teste partindo do repouso aumenta sua energia cinética média e uma fase assintótica, onde sua energia cinética média atinge um patamar estacionário e sua posição possui uma difusão anômala.

Com relação a primeira fase o que temos é a transmissão da energia cinética das partículas do gás para a partícula teste. Vimos que esta transmissão é em geral incompleta, devido a presença da energia de interação com as partículas do gás. Mostramos que quando esta energia de interação fica pequena em relação a energia cinética do gás, então ocorre uma transmissão mais completa de energia cinética. Porém este processo de transmissão completa depende claramente do expoente de Levy α , ou equivalentemente do expoente da força δ .

O que os limites flutuativo implicam é reduzir fortemente os tipos de possibilidades dinâmicas para a partícula teste. Este limites implicam em um tempo transiente finito, onde por isto queremos entender que este tempo é finito no limite $N \rightarrow \infty$. Eles implicam também em um valor assintótico bem definido para a energia cinética média da partícula teste.

Quando $\alpha \leq 1/2$ este valor assintótico corresponde exatamente a energia cinética média do gás, mostrando que existe um equilíbrio térmico com o gás de N partículas. Quando $\alpha > 1/2$ este patamar assintótico de energia cinética média é menor que a energia cinética média do gás, revelando um transmissão incompleta de energia cinética.

O valor de transição desta propriedade de transmissão de energia cinética é dado por $\alpha = 1/2$ ($\delta = 2$), que é exatamente o valor de transição entre a existência de uma energia potencial média ($\delta < 2$) e a sua não existência ($\delta > 2$).

Portanto, esta transição pode ser entendida como a capacidade da partícula teste armazenar (ou não) parte da energia cinética transferida pelo gás na forma de energia potencial. Vale observar que, nos dois limites flutuativos analisados para o valor de transição $\alpha = 1/2$, a partícula teste se comporta de maneira equivalente aos casos em que $\alpha < 1/2$, isto é, existe uma transmissão completa de energia cinética média.

Com relação a difusão assintótica da partícula teste vimos que os limites flutuativos implicam em apenas dois regimes difusivos possíveis. Para $\alpha < 1$ a partícula teste possui difusão assintótica normal e para $\alpha > 1$ ela possui difusão assintótica balística.

O valor de transição entre estes dois regimes difusivos possíveis acontece em $\alpha = 1$ ($\delta = 1$). Este valor corresponde exatamente a transição entre a situação em que a força resultante sobre a partícula teste não tem média $\delta > 1$ para a situação em que esta média existe $\delta < 1$. Para $\alpha = 1$ temos um comportamento que depende claramente do tipo de limite flutuativo que é feito: para o limite Flutuativo-L a partícula teste se comporta como no caso $\alpha > 1$; para o limite Flutuativo- κ a partícula teste se comporta como no caso $\alpha < 1$.

Concluimos com relação aos limites flutuativos que a fator relevante na definição do tipo e de dinâmica da partícula teste, ao menos para as variáveis $\langle v^2(t) \rangle$ e $\langle x^2(t) \rangle$, é a existência ou não de força resultante média e energia potencial média. Respectivamente, os valores de transição na existência (ou não) destas médias é $\alpha = 1$ e $\alpha = 1/2$. É interessante notar que o fato da distribuição da força resultante ser gaussiana $\alpha \geq 2$ não parece ter nenhuma importância para determinar o comportamento das variáveis analisadas.

Antes de passarmos a análise final do limite de Vlasov é fundamental lembrar que os limites flutuativos só podem ser aplicados para o caso $\alpha > 1$ quando a força resultante sobre a partícula teste possui média nula. Esta é uma situação particular que foi garantida pelo fato de termos imposto as partículas do gás uma distribuição inicial espacial uniforme, com a condição periódica relativa garantindo que a distribuição destas partículas permanecesse uniforme ao longo do tempo.

O limite de Vlasov aplicado ao caso em que a média da força resultante é nula tem um problema básico: o tempo de transiência para o regime assintótico cresce indefinidamente quando $N \rightarrow \infty$, em que pese os estados assintóticos estejam bem definidos e coorespondam, como no caso flutuativo, a uma transmissão incompleta de energia cinética e difusão balística. Esta situação não deveria nos surpreender, pois o limite de Vlasov tem como objetivo

estabilizar a média da força resultante e isto implicará em uma estabilização da média da velocidade da partícula teste.

Como o valor desta força resultante média é zero, então a velocidade média se estabilizara em zero com a flutuação em torno da mesma sendo cada vez menor a medida que o número de partículas N do gás aumenta. A diferença com relação ao limite flutuativo é que para $N \rightarrow \infty$, a variância da velocidade da partícula teste convergirá para uma função temporal que tem um tempo transiente cada vez maior.

Tecnicamente, podemos afirmar que o limite deste processo é

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle v(t) \rangle = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \langle v^2(t) \rangle = 0, \quad \forall t.$$

Em outros termos, se fizessemos rigorosamente $N = \infty$ a partícula teste permaneceria em repouso, mantendo seu estado inicial. Como sempre temos que ter um N finito, então lentamente - tão mais lentamente quanto maior N - a partícula teste sai do repouso e difunde.

O que tudo isto quer nos dizer é que o limite de Vlasov é importante para situações em que a dinâmica da partícula teste é determinada por variações na média da força resultante. Isto acontecerá quando tivermos variações globais na distribuição espacial das partículas do gás. Isto foi ilustrado neste trabalho impondo-se uma distribuição inicial não uniforme as partículas do gás, o que implicou em uma força resultante não nula sobre a partícula teste. Neste caso apenas o limite de Vlasov pode estabilizar a evolução temporal da média da velocidade da partícula teste.

7.2 Perspectivas de Trabalho

Para trabalhos futuros, será investigado a questão da ergodicidade, a equação de difusão da *partícula teste* (Fokker-Planck ou Kramers-Moyal) bem como um análise em 2D e 3D.

Apêndice A - Método de Função Característica

Nesse apêndice será mostrado o teorema central do limite, baseado no formalismo de função característica, para processos estocásticos. O intuito será apresentar o comportamento assintótico da variância média da velocidade para uma partícula em que sua dinâmica é estudada pela equação de Langevin.

Soma de Variáveis aleatórias

Para um processo estocástico, como o dá equação de Langevin, temos que

$$v(t + \Delta t) - v(t) = -(\gamma\Delta t)v(t) + \xi[\Delta t], \quad (7.1)$$

sendo ξ contínuo, $\langle \xi \rangle_{\Delta t} = 0$ e $\langle \xi^2 \rangle_{\Delta t} = \Gamma\Delta t$. Escrevendo a seguinte indentificação,

$$v(t) = v_i \quad e \quad v(t + \Delta t) = v_{i+1}. \quad (7.2)$$

Obtem-se para a equação (4.1) o mapa:

$$v_{i+1} = \lambda v_i + \xi_{i+1}[\Delta t]. \quad \therefore \lambda = 1 - \gamma\Delta t \quad (7.3)$$

Adotando $\langle v_0 \rangle = 0$, $\langle v_0^2 \rangle = m_0^2$, $\langle \xi_{i+1} \rangle = 0$, e $\langle \xi_{i+1}^2 \rangle = m^2$, podemos iterar o mapa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda v_0 + \xi_1 \\ v_2 &= \lambda v_1 + \xi_2 = \lambda^2 v_0 + \lambda \xi_1 + \xi_2 \\ v_3 &= \lambda v_2 + \xi_3 = \lambda^3 v_0 + \lambda^2 \xi_1 + \lambda \xi_2 + \xi_3 \\ &\vdots \\ v_n &= \lambda^n v_0 + \lambda^{n-1} \xi_1 + \lambda^{n-2} \xi_2 + \cdots + \lambda \xi_{n-1} + \xi_n. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Assim, a função característica associada a variável v_n é:

$$\psi_n(z) = \bar{\psi}(M_n z) = \exp\left(-\frac{(M_n z)^2}{2}(1 + \Omega_n(M_n z))\right); \quad (7.5)$$

onde

$$\begin{aligned}
M_n^2 &= \langle v_n^2 \rangle = \lambda^{2n} m_0^2 + \lambda^{2(n-1)} m^2 + \dots + \lambda^2 m^2 + m^2, \\
M_n^2 &= \lambda^{2n} m_0^2 + m^2 (1 + \lambda^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^2)^3 + \dots + (\lambda^2)^{n-1}), \\
M_n^2 &= \lambda^{2n} m_0^2 + m^2 \frac{1 - \lambda^{2n}}{1 - \lambda^2}.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

e

$$\begin{aligned}
\Omega_n(M_n z) &= \frac{\lambda^{2n}}{M_n^2} m_0^2 \omega_0 \left(\frac{\lambda^n}{M_n} m_0 z \right) + \frac{\lambda^{2(n-1)}}{M_n^2} m^2 \omega_{\Delta t} \left(\frac{\lambda^{n-1}}{M_n} m z \right) + \frac{\lambda^{2(n-2)}}{M_n^2} m^2 \omega_{\Delta t} \left(\frac{\lambda^{n-2}}{M_n} m z \right) \\
&+ \dots + \frac{\lambda^2}{M_n^2} m^2 \omega_{\Delta t} \left(\frac{\lambda}{M_n} m z \right) + \frac{m^2}{M_n^2} \omega_{\Delta t} \left(\frac{m}{M_n} z \right).
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Para $\gamma \Delta t \ll 1$, temos:

$$\lambda = 1 - \gamma \Delta t \approx e^{-\gamma \Delta t}. \tag{7.8}$$

Tomando o limite em que Δt é muito pequeno ($n \Delta t = t - t_0$), a equação (A.7) e (A.8) será reescrita da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
M^2(t; \Delta t) &= e^{-2\gamma n \Delta t} m_0^2 + \Gamma \Delta t \frac{1 - e^{2\gamma n \Delta t}}{(1 + \lambda)(1 - \lambda)}, \\
M^2(t; \Delta t) &= e^{-2\gamma(t-t_0)} m_0^2 + \Gamma \Delta t \frac{1 - e^{2\gamma(t-t_0)}}{(2 + \gamma \Delta t)(\gamma \Delta t)},
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle v_n^2 \rangle = M^2(t) = e^{-2\gamma(t-t_0)} m_0^2 + \frac{\Gamma}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}) \tag{7.9}$$

e

$$\begin{aligned}
\Omega(t, z; \Delta t) &= \frac{e^{-2\gamma n \Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} m_0^2 \omega_0 \left(\frac{e^{-\gamma n \Delta t}}{M(t; \Delta t)} m_0 z \right) + \Gamma \Delta t \left[\frac{e^{-2\gamma(n-1)\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} \omega_{\Delta t} \left(\frac{e^{-\gamma(n-1)\Delta t} \sqrt{\Gamma}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right) \right. \\
&+ \frac{e^{-2\gamma(n-2)\Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} \omega_{\Delta t} \left(\frac{e^{-\gamma(n-2)\Delta t} \sqrt{\Gamma}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right) + \dots + \frac{e^{-2\gamma \Delta t}}{M^2(t; \Delta t)} \omega_{\Delta t} \left(\frac{e^{-\gamma \Delta t} \sqrt{\Gamma}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right) \\
&+ \left. \frac{1}{M^2(t; \Delta t)} \omega_{\Delta t} \left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{M(t; \Delta t)} \sqrt{\Delta t} z \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Apêndice B - Métodos Computacionais

Para o desenvolvimento desta tese, construímos um programa em linguagem C que nos informa as posições e velocidades de uma dada partícula quando colocada sob interação com um gás de partículas langevanianas. Entre os possíveis métodos numéricos, o escolhido foi o Rung-Kutta de 4^o. Para o caso unidimensional a interação entre as partículas do gás e a *partícula teste* é dada por uma força do tipo:

$$F_i^N = a_N \frac{\text{sgn}(x_i - x_{pt})}{|x_i - x_{pt}|^\delta}. \quad (7.1)$$

onde a_N é uma constante, x_i é a posição das partículas do gás de langevin ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) e x_{pt} é a posição da *partícula teste*.

Na figura 25 plotamos a série temporal da velocidade, onde observamos a existência de saltos, provocados pela proximidade das partículas do gás com a *partícula teste*. Quanto mais próximo x_{pt} estiver de x_i maior será a força de interação. Uma explicação física para esse efeito seria que, como usamos um passo de tempo fixo, é impossível observar as colisão (momento em que as partículas invertem o sentido da velocidade), pois as mesmas ocorrem tão rápido, que só conseguimos registrar a próxima velocidade muito tempo depois.

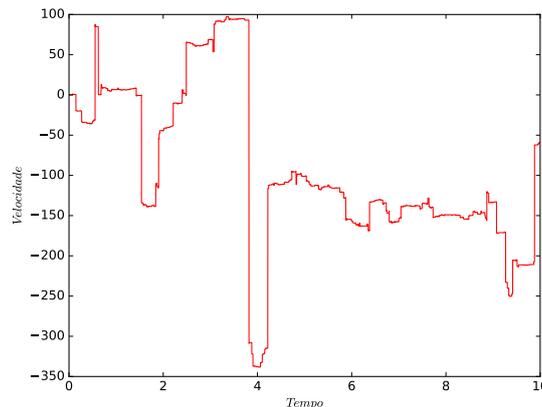


Figure 25: Série temporal da velocidade, Limite Flutuativo- Renormalização K para $\alpha = 1,5$

Uma maneira de contornar esse problema seria modificar o passo do integrador mediante a intensidade da força interação, no intuito de observamos a colisão. Fizemos isso de duas

maneira : *i*) Usando um Rung-Kutta com tolerância de erro (Runge-Kutta-Fehlberg) *ii*) Propomos uma adaptação no Rung-Kutta de 4^o. Nossa modificação consiste em, para um dado valor inicial de Δt_0 , verificamos a seguinte condição:

$$\frac{1.0}{|F_i^N|} \leq \Delta t_0. \quad (7.2)$$

Caso seja verdade, então

$$\Delta t_{new} = \frac{1.0}{|F_i^N|}. \quad (7.3)$$

Caso contrário

$$\Delta t_{new} = \Delta t_0. \quad (7.4)$$

Na figura 26 mostramos a série temporal da velocidade para os dois casos apresentados, Runge-Kutta-Fehlberg (Linha Azul) e Rung-Kutta de 4^o adaptado (Linha vermelha). Observamos que os dois métodos apresentam resultados satisfatórios e que podem ser utilizados no nosso estudo.

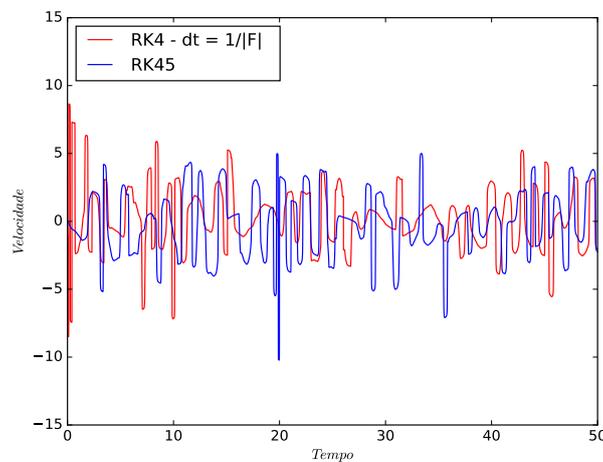


Figure 26: Série temporal da velocidade: Runge-Kutta-Fehlberg (Linha Azul) e Rung-Kutta de 4^o adaptado (Linha vermelha)

Apêndice C - Programa C

(Runge-Kutta-Fehlberg)

Etapas do Programa:

- 1) Pagina 82 : Rotina Principal.
- 2) Pagina 86 : Sub-Rotina - Cálculo dos Momentos Estatísticos.
- 3) Pagina 87: Sub-Rotina - Gerador Gaussiano.

Rotina Principal

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4  #include <stdlib.h>
5  #include <time.h>
6  #include "random-gaussian.c"
7  #include "progress_bar.c"
8  #include "moment.c"
9
10
11
12 double fx(double t, double x, double y)
13 {
14     return y;
15 }
16
17 double fy(double t, double x, double y, double m, int i, double FF, double Fr)
18 {
19
20     if (i==0)
21     {
22         return 1.0*FF;
23     }
24     if (i!=0)
25     {
26         return - 2.0*y + 2.0*(1.0/(sqrt(0.0001)))*m - 1.0*Fr;
27     }
28 }
29 int main()
30 {
31
32     int i, j, k,l, N = 100000, Npar=32, Nteste=10;
33     double m, m1, L=1, ss, Tol = 2*1E-08;
34     double delta = 1.0/3.0, AA, FF, Fr;
35
36     double *K1x = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
37     double *K1y = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
38     double *K2x = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
39     double *K2y = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
40     double *K3x = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
41     double *K3y = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
42     double *K4x = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
43     double *K4y = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
44     double *K5x = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
45     double *K5y = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
46     double *K6x = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
47     double *K6y = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
48
49     double *t = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
50     double *x = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
51     double *y = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
52     double *H = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
53     double *Hmin = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
54     double *Hmax = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
55     double *rx = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
56     double *ry = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
57     double *Err = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
58     double *S = (double*) malloc (Npar*sizeof (double));
59
60     double **mm = (double**) malloc (Nteste*sizeof (double*));
61     for (i=0; i<Nteste; i++)
62     {
63         mm[i] = (double*) malloc (N*sizeof (double));
64     }
65
66     double **mmm = (double**) malloc (Nteste*sizeof (double*));
67     for (i=0; i<Nteste; i++)
68     {
69         mmm[i] = (double*) malloc (N*sizeof (double));
70     }

```

```

71
72 //FILE *outputX = fopen("posi o.dat", "w");
73 //FILE *outputV = fopen("velocidade.dat", "w");
74
75
76
77 for(l=0;l<Nteste;l++)
78 {
79
80
81 //L = pow(Npar,3.0/2.0);
82 //L = pow(Npar,3.0);
83
84 srand(time(NULL));
85 progress_bar((double)l/Nteste);
86 for(i = 1; i< Npar;i++)
87 {
88
89         m1 = (float)rand()/RAND_MAX;
90
91         t[0] = 0.0;
92         x[0] = 0.0;
93         y[0] = 0.0;
94         H[0] = 0.001;
95         Hmin[0] = H[i]/64.0;
96         Hmax[0] = H[i]*64.0;
97
98         t[i] = 0.0;
99         x[i] = 1.0*(2.0*m1 - 1.0);
100
101         y[i] = 1.0*random_gaussian();
102         H[i] = 0.001;
103         Hmin[i] = H[i]/64.0;
104         Hmax[i] = H[i]*64.0;
105     }
106
107     for(j=0;j<N;j++)
108     {
109
110         progress_bar((double)j/N);
111         FF=0.0;
112         double ss = 1.0*sqrt(1.0/Npar);
113
114
115
116
117         for( k = 1 ; k < Npar; k++)
118         {
119
120             if(x[k] - x[0]< 0)
121             {
122                 AA = -1.0*ss;
123             }
124             if(x[k] - x[0]>= 0)
125             {
126                 AA = 1.0*ss;
127             }
128
129             FF += (double)(1.0*AA/(double)(pow(fabs(x[k] - x[0]),1.0/3.0)));
130         }
131
132         for(i = 0; i< Npar;i++)
133         {
134
135             if(x[i] - x[0]< 0)
136             {
137                 AA = -1.0*ss;
138             }
139             if(x[i] - x[0]>= 0)
140             {
141                 AA = 1.0*ss;
142             }
143
144             Fr = (double)(1.0*AA/(double)pow(fabs(x[i] - x[0]),1.0/3.0));
145

```

```

146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201

```

```

    vai:
    m = 1.0*random_gaussian();

    K1x[i] = H[i] * fx(t[i],x[i],y[i]);
    K1y[i] = H[i] * fy(t[i],x[i],y[i],m,i,FF,Fr);

    K2x[i] = H[i] * fx(t[i] + 0.25 * H[i], x[i] + 0.25 * K1x[i], y[i] + 0.25 * K1y[i]);
    K2y[i] = H[i] * fy(t[i] + 0.25 * H[i], x[i] + 0.25 * K1x[i], y[i] + 0.25 * K1y[i],m,i,FF,
        Fr);

    K3x[i] = H[i] * fx(t[i] + 3.0*H[i]/8.0, x[i] + 3.0*K1x[i]/32.0 + 9.0*K2x[i]/32.0, y[i] +
        3.0*K1y[i]/32.0 + 9.0*K2y[i]/32.0);
    K3y[i] = H[i] * fy(t[i] + 3.0*H[i]/8.0, x[i] + 3.0*K1x[i]/32.0 + 9.0*K2x[i]/32.0, y[i] +
        3.0*K1y[i]/32.0 + 9.0*K2y[i]/32.0,m,i,FF,Fr);

    K4x[i] = H[i] * fx(t[i] + 12.0*H[i]/13.0, x[i] + 1932.0*K1x[i]/2197.0 - 7200.0*K2x[i]
        ]/2197.0 + 7296.0*K3x[i]/2197.0, y[i] + 1932.0*K1y[i]/2197.0 - 7200.0*K2y[i]/2197.0 +
        7296.0*K3y[i]/2197.0);
    K4y[i] = H[i] * fy(t[i] + 12.0*H[i]/13.0, x[i] + 1932.0*K1x[i]/2197.0 - 7200.0*K2x[i]
        ]/2197.0 + 7296.0*K3x[i]/2197.0, y[i] + 1932.0*K1y[i]/2197.0 - 7200.0*K2y[i]/2197.0 +
        7296.0*K3y[i]/2197.0,m,i,FF,Fr);

    K5x[i] = H[i] * fx(t[i] + H[i], x[i] + 439.0*K1x[i]/216.0 - 8.0*K2x[i] + 3680.0*K3x[i]
        ]/513.0 - 845.0*K4x[i]/4104.0,y[i] + 439.0*K1y[i]/216.0 - 8.0*K2y[i] + 3680.0*K3y[i]
        ]/513.0 - 845.0*K4y[i]/4104.0);
    K5y[i] = H[i] * fy(t[i] + H[i], x[i] + 439.0*K1x[i]/216.0 - 8.0*K2x[i] + 3680.0*K3x[i]
        ]/513.0 - 845.0*K4x[i]/4104.0,y[i] + 439.0*K1y[i]/216.0 - 8.0*K2y[i] + 3680.0*K3y[i]
        ]/513.0 - 845.0*K4y[i]/4104.0,m,i,FF,Fr);

    K6x[i] = H[i] * fx(t[i] + 0.5*H[i], x[i] - 8.0*K1x[i]/27.0 + 2.0*K2x[i] - 3544.0*K3x[i]
        ]/2565.0 + 1859.0*K4x[i]/4104.0 - 11.0*K5x[i]/40.0, y[i] - 8.0*K1y[i]/27.0 + 2.0*K2y[
        i] - 3544.0*K3y[i]/2565.0 + 1859.0*K4y[i]/4104.0 - 11.0*K5y[i]/40.0);
    K6y[i] = H[i] * fy(t[i] + 0.5*H[i], x[i] - 8.0*K1x[i]/27.0 + 2.0*K2x[i] - 3544.0*K3x[i]
        ]/2565.0 + 1859.0*K4x[i]/4104.0 - 11.0*K5x[i]/40.0, y[i] - 8.0*K1y[i]/27.0 + 2.0*K2y[
        i] - 3544.0*K3y[i]/2565.0 + 1859.0*K4y[i]/4104.0 - 11.0*K5y[i]/40.0,m,i,FF, Fr);

    rx[i] = fabs( K1x[i]/360.0 - 128.0*K3x[i]/4275.0 - 2197.0*K4x[i]/75240.0 + K5x[i]/50.0 +
        2.0*K6x[i]/55.0 );
    ry[i] = fabs( K1y[i]/360.0 - 128.0*K3y[i]/4275.0 - 2197.0*K4y[i]/75240.0 + K5y[i]/50.0 +
        2.0*K6y[i]/55.0 );

    Err[i] = sqrt(pow(rx[i],2) + pow(ry[i],2));

    if( Err[i] == 0 )
    {
        S[i] = 0;
    }
    else
    {
        S[i] = 0.84 * sqrt( sqrt(Tol * H[i] / Err[i]) );
    }

    if ( (Err[i] < Tol) || (H[i] <= 2.0*Hmin[i]) )
    {
        x[i] += 25.0*K1x[i]/216.0 + 1408.0*K3x[i]/2565.0 + 2197.0*K4x[i]/4104.0 - K5x[i]
            ]/5.0;
        if(i!=0 && (x[i] - x[0]) > 1.0*L/1.0)
        {
            x[i] = (x[i]- x[0]) - 2.0*L;
        }
        if( i!=0 && (x[i] - x[0]) <= -1.0*L/1.0)
        {
            x[i] = (x[i] - x[0]) + 2.0*L;
        }

        y[i] += 25.0*K1y[i]/216.0 + 1408.0*K3y[i]/2565.0 + 2197.0*K4y[i]/4104.0 - K5y[i]
            ]/5.0;

        t[i] += H[i];
    }
    else

```

```

202         {
203
204             if ( (S[i] < 0.75) && (H[i] > 2.0*Hmin[i]) ) H[i] /= 2.0;
205
206             else if ( (S[i] > 1.50) && (2.0 * H[i] < Hmax[i]) ) H[i] *= 2.0;
207
208             goto vai;
209         }
210
211         Fr = 0.0;
212     }
213
214
215     //fprintf(outputX, "%lf %lf\n", t[0], x[0]);
216     //fprintf(outputV, "%lf %lf\n", t[0], y[0]);
217
218     mm[1][j] = y[0];
219     mmm[1][j] = x[0];
220
221
222
223     }
224
225
226     }
227
228     printf("%lf\n",L);
229
230     momentos(N, Nteste, mm, mmm);
231
232     //fclose(outputX);
233     //fclose(outputV);
234
235     free(t);
236     free(x);
237     free(y);
238     free(H);
239     free(Hmin);
240     free(Hmax);
241     free(rx);
242     free(ry);
243     free(Err);
244     free(S);
245     free(K1x);
246     free(K1y);
247     free(K2x);
248     free(K2y);
249     free(K3x);
250     free(K3y);
251     free(K4x);
252     free(K4y);
253     free(K5x);
254     free(K5y);
255     free(K6x);
256     free(K6y);
257
258     return 0;
259
260 }

```

Sub-Rotina - Cálculo dos Momentos Estatísticos

```

1 // momentos estatísticos
2
3 #include <stdio.h>
4 #include <stdlib.h>
5 #include <math.h>
6 void momentos( int n, int Nteste, double **mm, double **mmm)
7 {
8
9     int i,l;
10    double *mediax = (double*)malloc(n*sizeof(double));
11    double *mediav = (double*)malloc(n*sizeof(double));
12
13    double *var = (double*)malloc(n*sizeof(double));
14    double *dif = (double*)malloc(n*sizeof(double));
15
16
17    FILE *curt = fopen("dif=32.dat", "w");
18    FILE *vari = fopen("var=32.dat", "w");
19
20    for(i=0;i<n;i++)
21    {
22        mediax[i] = 0.0;
23        mediav[i] = 0.0;
24
25        var[i] = 0.0;
26        dif[i] = 0.0;
27    }
28
29    for(i=1;i<n;i++)
30    {
31        for(l=0;l<Nteste;l++)
32        {
33            mediax[i] += (double)(mmm[l][i]/Nteste);
34            mediav[i] += (double)(mm[l][i]/Nteste);
35        }
36
37        for(l=1;l<Nteste;l++)
38        {
39            var[i] += (double)(pow(mm[l][i]- mediav[i],2)/Nteste);
40            dif[i] += (double)(pow(mmm[l][i]- mediax[i],2)/Nteste);
41        }
42
43        fprintf(curt, "%f %e\n", i*0.0001, dif[i]);
44        fprintf(vari, "%f %e\n", i*0.0001, var[i]);
45
46    }
47
48    fclose(curt);
49    fclose(vari);
50
51
52    free(mediax);
53    free(mediav);
54    free(dif);
55    free(var);
56 }

```

Sub-Rotina - Gerador Gaussiano

```
1  #include <stdlib.h>
2  #include <math.h>
3  #include <stdio.h>
4  #include <time.h>
5
6  double random_gaussian() {
7      long fl=0;
8      double R1, R2, x, y, r;
9
10     while(fl == 0) {
11         R1 = (double)rand()/RAND_MAX;
12         R2 = (double)rand()/RAND_MAX;
13
14         x = 2.0*R1-1.0;
15         y = 2.0*R2-1.0;
16
17         r = x*x+y*y;
18
19         if(r > 0.0 && r < 1.0) {
20             r = x*sqrt(-2.0*log(r)/r);
21             fl=1;
22         }
23     }
24
25     return r;
26 }
```

Apêndice D - Programa CUDA-C (RK Adaptado)

Etapas do Programa:

- 1) Pagina 89: Rotina Principal.
- 2) Pagina 91: Sub-Rotina - Integrador.
- 3) Pagina 93: Sub-Rotina - Cálculo da Força Resultante.
- 4) Pagina 94: Sub-Rotina - Cálculo da Força Reação.
- 5) Pagina 95: Sub-Rotina - Redução; Para o cálculo das médias das velocidades.
- 6) Pagina 96: Sub-Rotina - Produto interno; Para o cálculo da variância média das velocidades.

Rotina Principal

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <time.h>
4  #include <math.h>
5  #include <iostream>
6  #include "cuda-reduce.cu"
7  #include "cuda-scalar-product.cu"
8  #include "k_main2.cu"
9  #include "moment.c"
10 #include "cudaError.cu"
11 #include "progress_bar.c"
12 #include "cudaMem.cu"
13 #include <getopt.h>
14 #include <unistd.h>
15 #include <curand.h>
16 #include <curand_kernel.h>
17
18
19
20 int main(void)
21 {
22     long int i,j,tempo=100000, Nteste = 100, part = 20000, blocos = 1000, threads = 512, L=100;
23     double *dev_x, *dev_v, *dev_v_teste, *dev_med,*dev_var;
24     double var,med,m,m1;
25     double *x = (double*)malloc(part*Nteste*sizeof(double));
26     double *v = (double*)malloc(part*Nteste*sizeof(double));
27     double *v_teste = (double*)malloc(Nteste*sizeof(double));
28
29     FILE *posi= fopen("vla-variancia.dat", "w");
30
31     cudaMalloc((void**) &dev_x, part*Nteste*sizeof(double));
32     cudaError();
33     cudaMalloc((void**) &dev_v, part*Nteste*sizeof(double));
34     cudaError();
35     cudaMalloc((void**) &dev_v_teste, Nteste*sizeof(double));
36     cudaError();
37     cudaMalloc((void**) &dev_med, blocos*sizeof(double));
38     cudaError();
39     cudaMalloc((void**) &dev_var, sizeof(double));
40     cudaError();
41     cudaMem();
42
43     srand(time(NULL));
44
45     for(i = 0 ; i < Nteste; i++)
46     {
47         x[i*part] = 0.0;
48         v[i*part] = 0.0;
49
50         for(j = 1 ; j < part; j++)
51         {
52             m = (double)rand()/RAND_MAX;
53             m1 = (double)rand()/RAND_MAX;
54
55             v[i*part + j] = 1.0*random_gaussian();
56             x[i*part + j] = 2.0*m1 - 1.0;
57         }
58     }
59
60     cudaMemcpy(dev_x, x, part*Nteste*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);
61     cudaError();
62     cudaMemcpy(dev_v, v, part*Nteste*sizeof(double), cudaMemcpyHostToDevice);
63     cudaError();
64
65
66     for (j = 0 ; j < tempo; j++)
67     {
68
69         progress_bar((double)j/tempo);
70

```

```
71     advanceSystem<<<blocos,threads,threads*sizeof(double)>>>( L, Nteste, part, dev_x, dev_v, dev_v_teste);
72     cudaError();
73
74     cudaMemcpy(v_teste, dev_v_teste, Nteste*sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
75
76     cuda_reduce<<<blocos,threads,threads*sizeof(double)>>>(Nteste, dev_v_teste, dev_med);
77     cudaError();
78     cudaMemcpy(&med, dev_med, sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
79     cudaError();
80     med /= Nteste;
81
82     cuda_scalar_product<<<blocos,threads,threads*sizeof(double)>>>(Nteste, dev_v_teste, dev_v_teste, dev_var);
83     cudaError();
84     cudaMemcpy(&var, dev_var, sizeof(double), cudaMemcpyDeviceToHost);
85     cudaError();
86     var /= Nteste;
87     var -= med*med;
88
89     fprintf(posi, "%f %f\n", j*1.0, var);
90
91 }
92
93 progress_bar(1.0);
94
95 fclose(posi);
96
97 free(x);
98 free(v);
99 free(v_teste);
100
101 cudaFree(dev_x);
102 cudaFree(dev_v);
103 cudaFree(dev_med);
104 cudaFree(dev_var);
105 cudaFree(dev_v_teste);
106
107 return 0;
108 }
```

Sub-rotina - Integrador

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <assert.h>
3  #include <cuda.h>
4  #include "for.cu"
5  #include "fre.cu"
6  #include <getopt.h>
7  #include <unistd.h>
8  #include <time.h>
9  #include <curand.h>
10 #include <curand_kernel.h>
11 #include <iostream>
12
13
14 __device__ double fx(double v)
15 {
16     return v;
17 }
18 __device__ double fv(int j, double m, double dt, double v, double FR, double Fr)
19 {
20     if(j==0)
21     {
22         return 1.0*(FR);
23     }
24     else
25     {
26         return -2.0*v + sqrt(4.0)*(sqrt(dt)/dt)*m - 1.0*(Fr);
27     }
28 }
29 __global__ void advanceSystem( int L, int Nteste, int N, double *x, double *v, double *v_teste)
30 {
31
32     extern __shared__ double shMem[];
33     int j=threadIdx.x, tid = blockIdx.x;
34     double k1x,k1v,k2x,k2v,k3x,k3v,k4x,k4v,m,m1,FR,Fr;
35     double dt = 0.0001;
36
37     curandState state;
38     curand_init(clock64(), j+tid*blockDim.x, 0, &state);
39
40     while(tid<Nteste)
41     {
42         fresult( Nteste, N, &FR, &x[tid*N], shMem);
43
44         if (threadIdx.x == 0)
45         {
46             v_teste[tid] = x[tid*N];
47         }
48         __syncthreads();
49
50
51         while(j<N)
52         {
53
54             if(j != 0)
55             {
56                 fre(N, Nteste, &Fr, x[tid*N+j], x[tid*N]);
57             }
58             __syncthreads();
59
60             m1 = curand_uniform(&state);
61
62             if( m1 <= 0.5)
63             {
64                 m = -1.0;
65             }
66             if( m1 > 0.5)
67             {
68                 m = 1.0;
69             }
70

```

```

71     k1x=dt*fx(v[tid*N+j]);
72     k1v=dt*fv(j,m,dt,v[tid*N+j],FR,Fr);
73
74         k2x=dt*fx(v[tid*N+j]+k1v/2.0);
75         k2v=dt*fv(j,m,dt,v[tid*N+j]+k1v/2.0,FR,Fr);
76
77         k3x=dt*fx(v[tid*N+j]+k2v/2.0);
78         k3v=dt*fv(j,m,dt,v[tid*N+j]+k2v/2.0,FR,Fr);
79
80         k4x=dt*fx(v[tid*N+j]+k3v);
81         k4v=dt*fv(j,m,dt,v[tid*N+j]+k3v,FR,Fr);
82
83     x[tid*N+j]+=(1.0/6.0)*(k1x + 2.0*k2x + 2.0*k3x + k4x);
84
85         if(i!=0 && ((x[tid*N+j] - (x[tid*N+0]) > 1.0*L/1.0)
86             {
87                 (x[tid*N+j] = ((x[tid*N+j]- (x[tid*N+0]) - 2.0*L;
88             }
89             if( i!=0 && ((x[tid*N+j] - (x[tid*N+0]) <= -1.0*L/1.0)
90             {
91                 (x[tid*N+j] = ((x[tid*N+j] - (x[tid*N+0]) + 2.0*L;
92             }
93     v[tid*N+j]+=(1.0/6.0)*(k1v + 2.0*k2v + 2.0*k3v + k4v);
94
95     j += blockDim.x;
96 }
97 __syncthreads();
98
99 tid += gridDim.x;
100
101 }
102
103 }
```

Cálculo da Força Resultante

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4
5  __device__ void fresult( int Nteste, int N, double *F, double x[], double shMem[])
6  {
7
8      int i, I;
9      double AA,ss;
10
11
12      shMem[threadIdx.x] = 0.0;
13
14      //ss = pow(1.0/N, 1.0/2.0);          Flutuativo
15
16      ss = 1.0/N;                        // Vlasov
17
18      i=threadIdx.x;
19
20      while(i<N && i!=0)
21      {
22
23          if(x[i] - x[0]< 0)
24          {
25              AA = -ss;
26          }
27          if(x[i] - x[0]>= 0)
28          {
29              AA = ss;
30          }
31
32          shMem[threadIdx.x] += (double)(AA/pow(fabs(x[i] - x[0]),1.0/3.0));
33
34          i += blockDim.x;
35      }
36      __syncthreads();
37
38      i = threadIdx.x;
39      I = blockDim.x/2;
40
41      while(I != 0)
42      {
43          if(i < I)
44          {
45              shMem[i] += shMem[I + i];
46          }
47          __syncthreads();
48
49          I /= 2;
50      }
51
52      *F = shMem[0];
53 }

```

Cálculo da Força Reação

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4
5  __device__ void fre(int N, int Nteste, double *Fr, double x, double x0)
6  {
7
8      double AA,ss;
9
10
11     //ss = sqrt(1.0/N);           Flutuativo
12
13     ss = 1.0/N;                 // Vlasov
14
15     if (x - x0 < 0)
16     {
17         AA = - ss;
18     }
19     if (x - x0 >= 0)
20     {
21         AA = ss;
22     }
23
24     *Fr = (double)(AA/pow(fabs(x - x0),1.0/3.0));
25
26
27 }
```

Redução; Para o cálculo da médias das velocidades.

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4  #include <time.h>
5  #include <curand.h>
6  #include <curand_kernel.h>
7  #include <iostream>
8
9  __device__ void cuda_atomicAdd_reduce(double *address, double val) {
10     double assumed,old=*address;
11
12     do {
13         assumed=old;
14         old= __longlong_as_double(atomicCAS((unsigned long long int*)address,
15             __double_as_longlong(assumed),
16             __double_as_longlong(val+assumed)));
17     }while(assumed != old);
18 }
19
20 __global__ void cuda_reduce(long N, double x[], double *out) {
21     extern __shared__ double sdata[];
22     long int I, index;
23
24     sdata[threadIdx.x] = 0.0;
25
26     index = threadIdx.x + blockIdx.x*blockDim.x;
27     if(index == 0)
28         *out = 0.0;
29     while(index < N) {
30         sdata[threadIdx.x] += x[index];
31         index += blockDim.x * gridDim.x;
32     }
33     __syncthreads();
34
35     for(I=blockDim.x/2;I>0;I>>=1) {
36         if (threadIdx.x < I)
37             sdata[threadIdx.x] += sdata[threadIdx.x + I];
38         __syncthreads();
39     }
40     __syncthreads();
41     if (threadIdx.x == 0)
42         cuda_atomicAdd_reduce(out,sdata[0]);
43 }

```

Produto interno; Para o cálculo da variância média das velocidades

```

1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4  #include <time.h>
5  #include <curand.h>
6  #include <curand_kernel.h>
7  #include <iostream>
8
9  __device__ void cuda_atomicAdd_scalar(double *address, double val) {
10     double assumed,old=*address;
11
12     do {
13         assumed=old;
14         old= __longlong_as_double(atomicCAS((unsigned long long int*)address,
15                                             __double_as_longlong(assumed),
16                                             __double_as_longlong(val+assumed)));
17     }while(assumed != old);
18 }
19
20 __global__ void cuda_scalar_product(long N, double x[], double y[], double *out) {
21     extern __shared__ double sdata[];
22     long int I, index;
23
24     sdata[threadIdx.x] = 0.0;
25
26     index = threadIdx.x + blockIdx.x*blockDim.x;
27     if(index == 0)
28         *out = 0.0;
29     while(index < N) {
30         sdata[threadIdx.x] += x[index]*y[index];
31         index += blockDim.x * gridDim.x;
32     }
33     __syncthreads();
34
35     for(I=blockDim.x/2;I>0;I>>=1) {
36         if(threadIdx.x < I)
37             sdata[threadIdx.x] += sdata[threadIdx.x + I];
38         __syncthreads();
39     }
40     __syncthreads();
41     if(threadIdx.x == 0)
42         cuda_atomicAdd_scalar(out,sdata[0]);
43 }

```

Apêndice E - Limites de Vlasov e Flutuativo e a Função Característica

7.1 Sem Renormalização

Para uma primeira análise, consideramos o caso sem renormalização na constante da força, ou seja, $a_N = 1,0$. Quando alteramos o número de partícula no gás de Langevin a distribuição associada a série temporal da força resultante preserva o perfil gaussiano, independente do número de partícula, mas o desvio padrão da função característica diminui quanto maior for o número de partícula no gás, como observado na figura 27, onde plotamos as respectivas funções características para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas para diferentes valores de α .

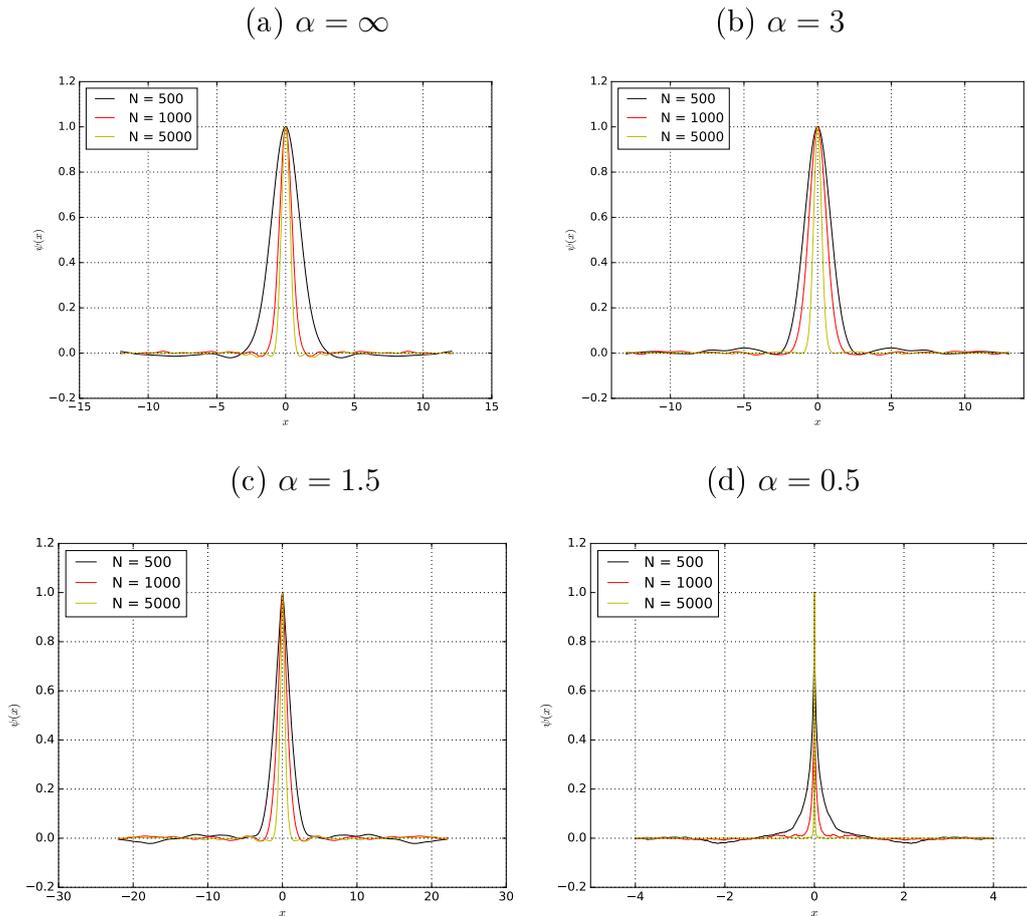


Figure 27: Função característica para um gás com $N = 500$, 1000 e 5000 partículas. Observe-se que quanto maior o número de partículas no gás, menor o desvio padrão da função característica.

A seguir mostramos as simulações computacionais da função característica usando o Limite de Vlasov - Renormalização K , Limite Flutuativo - Renormalização K , Limite de Vlasov.

7.2 Limite de Vlasov

No limite de Vlasov em que consideramos o tamanho do sistema fixa a função característica preserva o perfil gaussiano para os casos em que $\alpha \geq 2, 0$. Já quando alteramos o número de partícula no gás de Langevin o desvio padrão da função característica aumenta quanto maior for o número de partícula no gás, como observado na figura 28 (a) $\alpha = \infty$ e figura 28 (b) $\alpha = 3, 0$, onde plotamos as respectivas funções características para um gás com $N = 500$, 1000 e 5000 partículas.

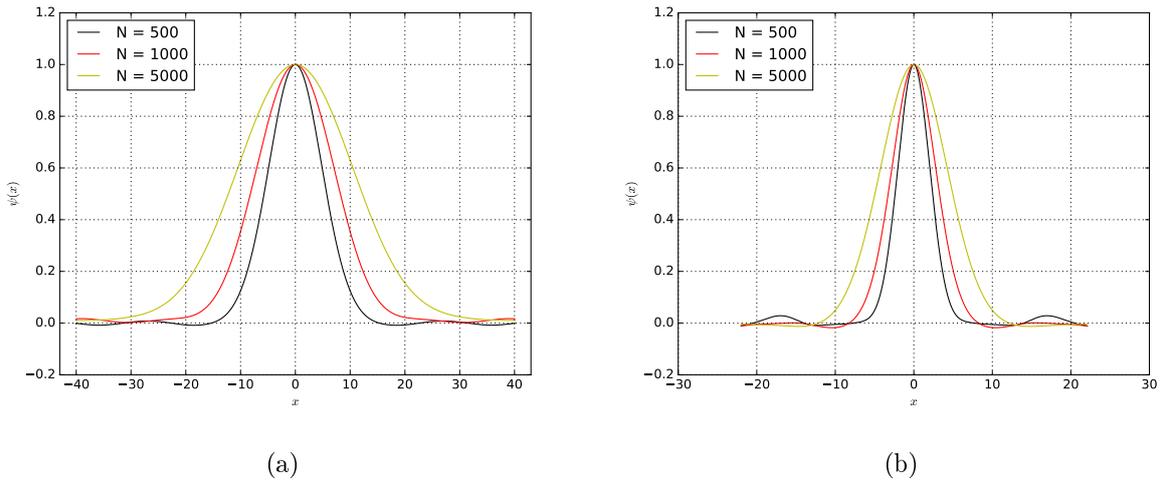


Figure 28: (a) $\alpha = \infty$ (b) $\alpha = 3.0$; Função característica para um gás com $N = 500$, 1000 e 5000 partículas. Observa-se que quanto maior o número de partículas no gás maior o desvio padrão da função característica

Para $\alpha = 1,5$ a função característica associada a série temporal da força resultante é dada por uma distribuição Lévy-estável, como observado na figura 29. Já o desvio padrão da função característica aumenta com o número de partícula no gás.

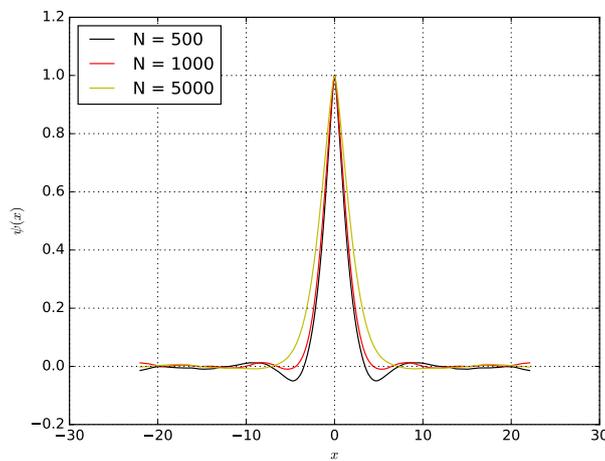


Figure 29: (a) $\alpha = 1.5$; Função característica para um gás com $N = 500$, 1000 e 5000 partículas.

7.3 Limite de Força Flutuativa - Renormalização K

No Limite de Força Flutuativa - Renormalização K a função característica preserva o perfil gaussiano para $\alpha \geq 2,0$, figura 30. Já quando alteramos o número de partícula no gás

de Langevin o desvio padrão da função característica se mantêm constante, como observado na figura 30 (a) $\alpha = \infty$ e figura 30 (b) $\alpha = 3,0$, onde plotamos as respectivas funções características para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas.

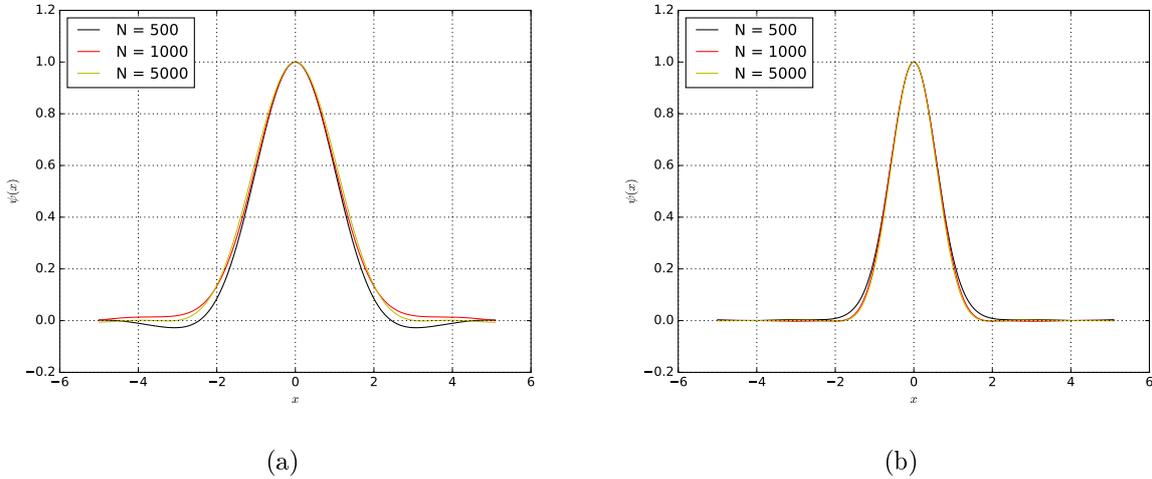


Figure 30: (a) $\alpha = \infty$ (b) $\alpha = 3,0$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas.

Quando $\alpha < 2,0$ a função característica associada a série temporal da força resultante é dada por uma distribuição Lévy-estável. Já o desvio padrão da função característica se mantêm constante, como observado na figura 31 (a) $\alpha = 1,5$ e figura 31 (b) $\alpha = 0,5$.

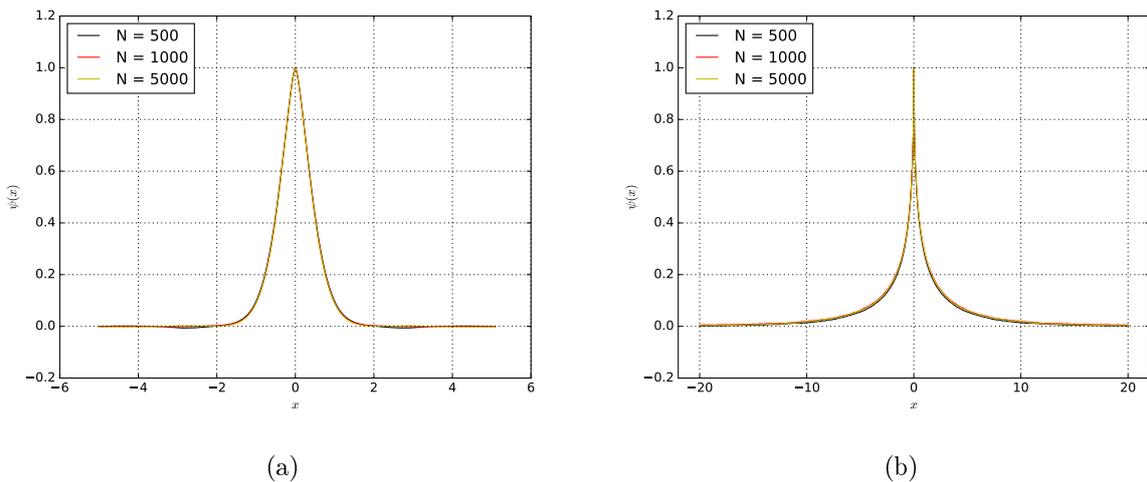


Figure 31: (a) $\alpha = 1,5$ (b) $\alpha = 0,5$; Função característica para um gás com $N = 500, 1000$ e 5000 partículas. Observa-se que quanto maior o número de partículas no gás mantem-se o desvio padrão da função característica

7.4 Limite de Força Flutuativa - Renormalização L

No Limite de Força Flutuativa - Renormalização L, equação (??), quando alteramos o número de partícula no gás de Langevin o desvio padrão da função característica se mantém constante, como observado na figura 32, onde plotamos a funções características para um gás com $N = 500$, 1000 e 5000 partículas.

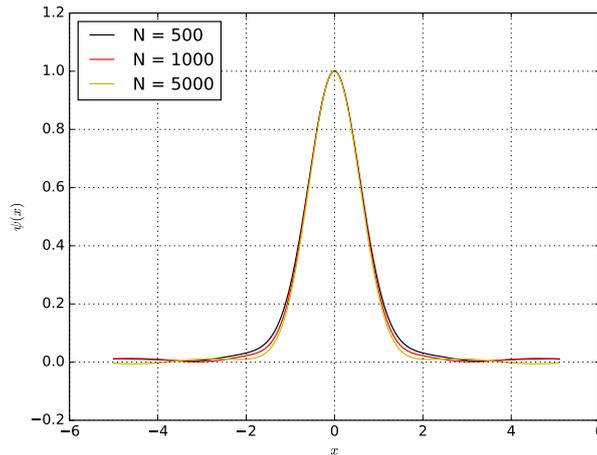


Figure 32: $\alpha = 3.0$; Função característica para um gás com $N = 500$, 1000 e 5000 partículas.

O Limite Flutuativo - Renormalização L compreendido entre $0 < \alpha \leq 2$, equação (??), implica exatamente no limite termodinâmico onde $L_N \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$ e a razão L_N/N se mantém constante. A função característica associada a série temporal da força resultante é dada por uma distribuição Lévy-estável. Já o desvio padrão da função característica se mantém constante, como observado na figura 33 (a) $\alpha = 1,5$ e figura 33 (b) $\alpha = 0,5$.

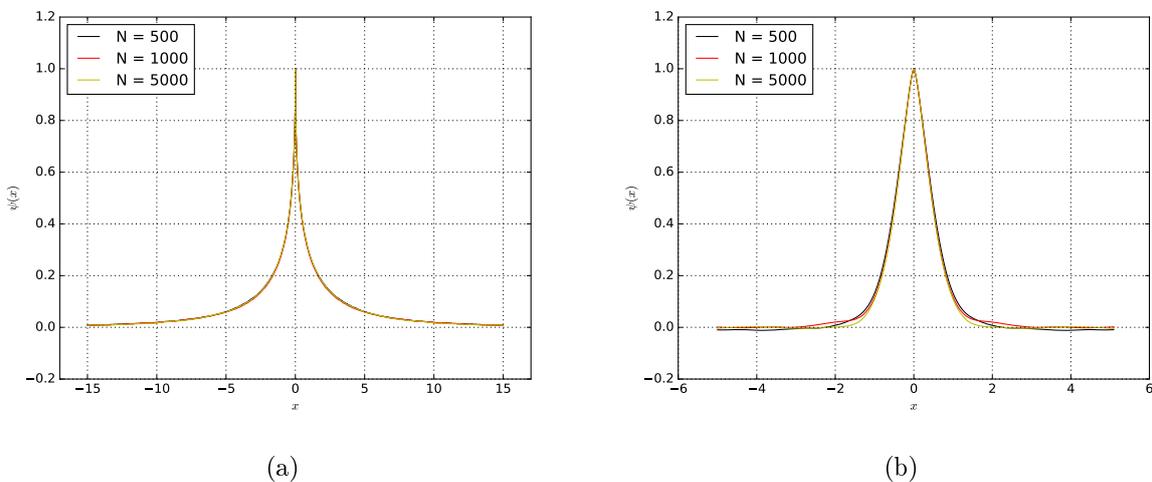


Figure 33: (a) $\alpha = 1,5$ (b) $\alpha = 0,5$; Função característica para um gás com $N = 500$, 1000 e 5000 partículas.

Referências

- [1] R. BROWN. *A brief account of microscopical observations made in the months on june, july and august, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.* Phil. Mag., **4:161**, 1828.
- [2] A. EINSTEIN. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement.* New York: Dover Publications Inc., 1985.
- [3] KARL PEARSON, *The problem of the random walk*, Nature, **72**, 294, (1905)
- [4] H. RISKEN, *The Fokker-Planck Equations*, (Springer, 1996)
- [5] P. LANGEVIN. *Sur la théorie du mouvement brownien*, Comptes Rendues Acad. Sci. Paris, **146:530**, 1908.
- [6] S.K. Ma, *World Scientific, Singapore*, Statistical Mechanics, 1985.
- [7] P. LÉVY. *Théorie des erreurs. la loi de Gauss et les lois exceptionnelles.* Bulletin de la Société Mathématique de France, **52:49–85**, 1924.
- [8] A. FIGUEIREDO, I. GLERIA, R. MATSUSHITA, and S. SILVA. *Autocorrelation as a source of truncated lévy flights in foreign exchange rates.* Physica A, 323:601–625, 2003.
- [9] A. FIGUEIREDO , A. POLITO, L. SILVA , F. PRUDENTE, T. MARCIANO. *The characteristic function method applied to molecular dynamics of inelastic granular gases.* Physica. A (Print), Artigo Publicado - JCR v. **373**, p. 392-416, n. 2007.
- [10] A. FIGUEIREDO, M. T. CASTRO, R. C. B. DA FONSECA, and I. GLERIA. *Diffusion Equations and the Time Evolution of Foreign Exchange Rates.* Physics Letters A, **377:1571–1581**, 2013.
- [11] J.P. BOUCHAD e A. GEORGES, Phys. Rep. **195**, 127 (1990)
- [12] S.C. VENKATARAMANI, T.M. ANTONSER Jr. *Lévy flights in fluid flows with no Kolmogorov–Arnold–Moser surfaces* Phys. Rev. Lett., **78** (20) (1997), p. 3864

- [13] T. SOLOMON, E.R. WEEKS. *Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow* Phys. Rev. Lett., **71** (24) (1993), p. 3975
- [14] M. SCMIDT, F. SAGUÉS, I. SOKOLOV. *Mesoscopic description of reactions for anomalous diffusion: a case study* J. Phys.: Condens. Matter., **19** (6) (2007), Article 065118
- [15] I. GOLDING, E.C. COX. *Physical nature of bacterial cytoplasm* Phys. Rev. Lett., **96** (9) (2006), Article 098102
- [16] A. GRANÉLI, C.C. YEYKAL, R.B. ROBERTSON, E.C. GREENE. *Long-distance lateral diffusion of human Rad51 on double-stranded DNA* Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **103** (5) (2006), pp. 1221-1226.
- [17] J. H. JEON and R. METZLER. *Environmental context explains lévy and brownian movement patterns of marine predators*. Nature, **465**, 2010.
- [18] Y. SAGI, M. BROOK, I. ALMOG, and N. DAVIDSON. *Observation of anomalous diffusion and fractional self-similarity in one dimension*. Phys. Rev. Lett., **108**(093002), 2012.
- [19] F. BARDOU, J. BOUCHAUD, A. ASPECT. *Lévy statistics and laser cooling*. Phys. Rev. Lett., **108** (093002), 2002.
- [20] A. CAMPA, T. DAUXOIS, S. RUFFO. *Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions*. Physics Reports **480**, 57-159, 2009.
- [21] S. GENNADY. *Long range dependence in heavy tailed stochastic processes*. Stochastic Systems Vol. **1**, No. 3 (2006) 163–257.
- [22] MOLINA-GARCIA. *Crossover from anomalous to normal diffusion: truncated power-law noise correlations and applications to dynamics in lipid bilayers*. 2018 New J. Phys.
- [23] P. Lévy, *Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles*, Bull. Soc. Math. France, t. LII, 49-85 (1922). In: D. Dugué, *Oeuvres de Paul Lévy, Eléments Aléatoires*, Vol. 3, Gauthiers-Villars (Paris, 1976).
- [24] P. Lévy, *Sur les lois stables em calcul des probabilités*, C. Acad.R. Sc. **176**, 1284-1286 (1923). In: D. Dugué, *Oeuvres de Paul Lévy, Eléments Aléatoires*, Vol. 3, Gauthiers-Villars (Paris, 1976).

- [25] P. Lévy, *Intégrales à éléments aléatoires indépendants et lois stables à n variables*, C. R. Acad. Sc. **202**, 543-545 (1936). In: D. Dugué, *Oeuvres de Paul Lévy, Éléments Aléatoires*, Vol. 3, Gauthiers-Villars (Paris, 1976).
- [26] P. Lévy, *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*, 2nd Ed., Gauthiers-Villars (Paris, 1954).
- [27] B. Gnedenko and A. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Revised Edition, Addison-Wesley (1968).
- [28] E. Rvaceva, *On domains of attraction of multidimensional distributions*, Select. Transl. Math. Stat. Prob. **2**, American Math. Soc., 183-205 (Rhode Island, 1962).
- [29] W. Feller, *An introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, 2nd Ed., Wiley (New York, 1971).
- [30] A. Balkema, *Monotone transformations and limit laws*, Mathematical Centre Tracts **45**, Mathematisch Centrum (Amsterdam, 1973).
- [31] A generalização deste formalismo de variáveis aleatórias reais para vetores aleatórios foi sugerido por Lévy em uma pequena carta em 1936 (veja [25]).
- [32] M. Hahn and M. Klass, *The generalized domain of attraction of spherically symmetric stable laws on d* , Probability theory on vector spaces, Lecture Notes in Math. **828**, 52-81, Springer (Berlin, 1980).
- [33] M. Meerschaert, *Regular Variation and domains of attraction in k* , Stat. Probab. Lett. **4**, 43-45 (1986).
- [34] M. Meerschaert, *Regular Variation in k* , Proc. Amer. Math. Soc. **102**, 341-348 (1988).
- [35] M. Meerschaert, *Norming operators for generalized domains of attraction*, J. Theoret. Probab. **7**, 793-798 (1994).
- [36] A. A. Antonov, Vest. Leningr. Gos. Univ. **7**, 135 (1962).
- [37] D. Lynden-Bell, R. Wood, MNRAS **138**, 495 (1969).
- [38] S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943).
- [39] P.H. Chavanis, *Statistics of the gravitational force in various dimensions of space: from Gaussian to Lévy laws*, Eur. Phys. J. B **70**, 413-433 (2009).

- [40] A. Figueiredo; T. M. da Rocha Filho, T. M. ; M. A. Amato. Distribution probability of force for a physical system of random particles. *Journal of Mathematical Physics*, v. 60, p. 073301, 2019.
- [41] N. G. VAN KAMPEN. *Stochastic processes in physics and chemistry*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [42] J. MOYAL. Stochastic processes and statistical physics. *Journal of Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 11:150–210, 1949.
- [43] N. VAN KAMPEN. *Stochastic processes in physics and chemistry*. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [44] H. RISKEN. *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, 1984.
- [45] B. V. GNEDENKO. *A Teoria da Probabilidade*. Ciência Moderna, 2008.
- [46] B. JAMES. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. *impa*, 1981.
- [47] H. E. HURST, R. P. BLACK e Y. M. SIMAIKA, *Long-Term Storage: An Experimental Study*, (Constable, London, 1965)
- [48] R. PICCIOTTO, H. L. STORMER, K. W. BALDWIN, K. W. WEST, Four-terminal resistance of a ballistic quantum wire, *Nature*, 411, 51 (2001).
- [49] C. T. WHITE, R. N. TODOROV, Nanotubes go ballistic, 411, 649 (2001).
- [50] WILLIAM H. PRESS; *Numerical recipes in C: the art of scientific computing – 2nd ed.*
- [51] A. ISAMIC A, B. SHAHRE-REY; Step variable numerical orbit integration of a low earth orbiting satellite; *Journal of the Earth Space Physics*. Vol. 31, No. 1, 2005, P. 1-12.
- [52] G. Samorodnitsky and M. Taqqu, *Stable non-gaussian random process*, Chapman & Hall (New York, 1994).