



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**AVALIAÇÃO DO MODELO DE SOUZA–AURICCHIO PARA
LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA NO CONTEXTO DE
CARREGAMENTOS AXIAIS-TORCIONAIS**

Por

Tiago Ferreira da Fonseca

Brasília, 18 de outubro de 2019

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

**AVALIAÇÃO DO MODELO DE SOUZA–AURICCHIO
PARA LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA NO
CONTEXTO DE CARREGAMENTOS
AXIAIS-TORCIONAIS**

Tiago Ferreira da Fonseca

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. Fábio Comes de Castro, D.Sc. (ENM/UnB)
(Orientador)

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, D.Sc. (ENM/UnB)
(Examinador Interno)

Prof. Francisco Evangelista Junior, D.Sc. (ENC/UnB)
(Examinador Externo)

Brasília/DF, 18 de outubro de 2019.

FICHA CATALOGRÁFICA

FERREIRA DA FONSECA, TIAGO

Avaliação do modelo de Souza–Auricchio para ligas com memória de forma no contexto de carregamentos axiais-torcionais

[Distrito Federal] 2019.

xi, 58 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2019)

Dissertação de mestrado – Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1. Ligas com memória de forma | 2. Modelo de Souza–Auricchio |
| 3. Avaliação experimental | 4. Axial-torcional |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FONSECA, T. F., (2019) Avaliação do modelo de Souza–Auricchio para ligas com memória de forma no contexto de carregamentos axiais-torcionais. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 58 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Tiago Ferreira da Fonseca.

TÍTULO: Avaliação do modelo de Souza–Auricchio para ligas com memória de forma no contexto de carregamentos axiais-torcionais.

GRAU: Mestre

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Tiago Ferreira da Fonseca
Setor Habitacional Jardim Botânico Quadra 8 Conj. C Lote 13
71681-415 Brasília – DF – Brasil.

Dedico este projeto a minha mãe Silvânia Fonseca, a meu pai Robson Fonseca, a minha irmã Letícia Fonseca e a minha namorada Karina Livino por me apoiarem nos momentos de dificuldade e por tornarem mais este sonho possível.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais pelos sacrifícios realizados em nome do meu bem-estar e educação. Agradeço também aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília por todo o conhecimento repassado ao longo desta jornada. Em especial, agradeço ao Professor Fábio Comes pela orientação e pelo apoio nesses três anos de projeto. Por fim, agradeço a todos os amigos de curso pelo companheirismo dentro e fora das salas de aula.

Resumo

Este trabalho apresenta uma avaliação do modelo constitutivo de Souza–Auricchio para ligas com memória de forma. O modelo, atualmente disponível no *software* comercial de elementos finitos *ANSYS*[®], é avaliado no contexto de carregamentos axiais-torcionais por meio de comparação com dados experimentais disponíveis na literatura. Diferentes histórias de carregamento, proporcionais e não-proporcionais, são simuladas sob controle de deslocamento axial/ângulo de torção ou controle de força/torque. Em todos os casos, consideram-se corpos de prova de Ni-Ti no formato de tubo de parede fina. Os resultados obtidos indicam que as previsões do modelo de Souza–Auricchio podem ser influenciadas pela forma de controle adotada, de modo que ensaios conduzidos sob controle de deslocamento tendem a gerar resultados mais exatos. Os resultados apontam ainda que as previsões do modelo podem ser influenciadas pela história de carregamento imposta. As diferenças observadas entre os resultados numéricos e os resultados obtidos experimentalmente são até 5 vezes maiores nos casos em que carregamentos não-proporcionais são aplicados. Por fim, os resultados sugerem que, do ponto de vista qualitativo, o modelo de Souza–Auricchio consegue reproduzir as principais características dos laços de histerese das curvas tensão-deformação. Entretanto, a correlação quantitativa com os dados experimentais não é exata, podendo apresentar diferenças de até 98% entre os resultados experimentais e os resultados numéricos.

Abstract

This work presents an evaluation of the Souza–Auricchio constitutive model for shape memory alloys. The model, currently available in the *ANSYS*[®] commercial finite element software, is evaluated in the axial-torsional loading context by comparison with experimental data available in the literature. Different loading conditions, proportional and non-proportional, are investigated in both displacement and force control modes. In all cases, Ni-Ti thin-walled tube specimens are considered. Results indicate that Souza–Auricchio model predictions may be influenced by the adopted control mode, so that tests conducted under displacement control tend to return more accurate outcomes. Results also indicate that model prediction capabilities may be influenced by applied loading conditions. Existing differences between numerical and experimental results are up to 5 times greater in cases where non-proportional loads are applied. Finally, results suggest that, from a qualitative point of view, the Souza–Auricchio model is able to reproduce the main features of the stress-strain hysteresis loops. However, the quantitative agreement with experimental data is not accurate, presenting variances of up to 98% between experimental and numerical results.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivo.....	3
1.2	Organização do trabalho.....	3
2	Revisão bibliográfica	4
2.1	Ligas com memória de forma	4
2.1.1	Contexto histórico.....	4
2.1.2	Fenomenologia da transformação de fase.....	5
2.1.3	Pseudoelasticidade	8
2.1.4	Quasiplasticidade	9
2.1.5	Efeito memória de forma	10
2.2	Modelos constitutivos para ligas com memória de forma.....	11
2.2.1	Modelos fenomenológicos macromecânicos	12
2.2.2	Modelos micromecânicos	12
2.2.3	Modelos macromecânicos baseados em micromecânica e termodinâmica	12
2.3	Modelo de Souza–Auricchio.....	13
2.3.1	Modelo de Souza et al. (1998).....	14
2.3.2	Modelo de Souza–Auricchio.....	17
2.3.3	Determinação das constantes do modelo	19
3	Comparação numérico-experimental.....	23
3.1	Definição da malha	23
3.2	Dados experimentais de Mehrabi et al. (2015).....	26
3.2.1	Determinação dos parâmetros do modelo.....	27
3.2.2	Resultado das simulações e discussão	29
3.3	Dados experimentais de Wang et al. (2010).....	32
3.3.1	Determinação dos parâmetros do modelo.....	34
3.3.1	Resultado das simulações e discussão	35
4	Conclusão.....	38
	Referências bibliográficas	39

Lista de Figuras

Figura 2-1 Evolução da fração volumétrica de martensita em função das temperaturas de transformação de fase.	6
Figura 2-2 Demaeração de uma LMF.	7
Figura 2-3 Esquema do efeito memória de forma.	7
Figura 2-4 Diagrama esquemático do comportamento pseudoelástico.	9
Figura 2-5 Diagrama esquemático do comportamento pseudoelástico (a) completo e (b) parcial.	9
Figura 2-6 Comportamento quasiplástico.	10
Figura 2-7 Diagrama esquemático do efeito memória de forma.	11
Figura 2-8 Representação gráfica das constantes do modelo de Souza– Auricchio em uma curva tensão-deformação correspondente ao comportamento pseudoelástico	22
Figura 3-1 Corpo de prova adotado por Mehrabi et al. (2015): (a) dimensões em mm e (b) vista isométrica.	23
Figura 3-2 Malhas de elementos finitos utilizadas para discretizar o corpo de prova adotado por Mehrabi et al. (2015): (a) malha I, (b) malha II e (c) malha III.	24
Figura 3-3 Ensaio para definição da malha: (a) história de carregamento e (b) condições de contorno.	25
Figura 3-4 Curvas (a) tensão axial vs deformação axial e (b) tensão cisalhante vs deformação cisalhante para diferentes malhas.	26
Figura 3-5 História dos carregamentos proporcionais sob: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força impostos nos ensaios de Mehrabi et al. (2015).	27
Figura 3-6 História dos carregamentos não-proporcionais sob: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força impostos nos ensaios de Mehrabi et al. (2015).	27
Figura 3-7 Condições de contorno adotadas nos ensaios sob: (a) controle de deslocamento axial/ângulo de rotação e (b) controle de força/torque realizados por Mehrabi et al. (2015). ...	28
Figura 3-8 Calibração das constantes do modelo para os ensaios de Mehrabi et al. (2015): (a) curva experimental e (b) curva simulada utilizando-se as constantes obtidas.	28
Figura 3-9 Curvas tensão axial vs deformação axial e tensão cisalhante vs deformação cisalhante sob carregamento proporcional: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força.	29
Figura 3-10 Curvas tensão axial vs deformação axial e tensão cisalhante vs deformação cisalhante sob carregamento não-proporcional: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força.	30

Figura 3-11 Ilustração esquemática do corpo de prova utilizado. Dimensões em mm (adaptado de Wang et al., 2010).	32
Figura 3-12 Malha de elementos finitos utilizada para discretizar o corpo de prova adotado por Wang et al. (2010): (a) vista frontal e (b) vista isométrica.	32
Figura 3-13 Condições de contorno adotadas nos ensaios realizados por Wang et al. (2010). 33	
Figura 3-14 História do carregamento (a) proporcional, (b) não-proporcional defasado 45° e (c) não-proporcional defasado 90° imposto nos ensaios realizados por Wang et al. (2010).	34
Figura 3-15 Calibração das constantes do modelo para os ensaios de Wang et al. (2010): (a) curva experimental e (b) curva simulada utilizando-se as constantes obtidas.	35
Figura 3-16 Curvas tensão axial vs deformação axial e tensão cisalhante vs deformação cisalhante sob: (a) carregamento proporcional, (b) carregamento não-proporcional defasado 45° e (c) carregamento não-proporcional defasado 90°.	36

Lista de Tabelas

Tabela 1-1 Dados experimentais para LMF sob carregamento axial-torcional.....	2
Tabela 3-1 Propriedades da liga de Ni-Ti utilizada por Mehrabi et al. (2015).....	28
Tabela 3-2 Índices de desempenho para os ensaios de Mehrabi et al. (2015).....	31
Tabela 3-3 Propriedades da liga de Ni-Ti utilizada por Wang et al. (2010).....	35
Tabela 3-4 Índices de desempenho para os ensaios de Wang et al. (2010).....	37

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

A_f	Temperatura final de formação da austenita
A_s	Temperatura inicial de formação da austenita
E_A	Módulo de elasticidade da fase austenítica
E_M	Módulo de elasticidade da fase martensítica
e^{tr}	Deformação de transformação
I_{ε_L}	Função indicatriz
J_2	Segundo invariante do tensor desviador de tensão
J_3	Terceiro invariante do tensor desviador de tensão
M_f	Temperatura final de formação da martensita
M_s	Temperatura inicial de formação da martensita
E	Módulo de elasticidade
e	Parcela desviadora do tensor de deformações
F	Força
f	Função limite
G	Módulo de cisalhamento
h	Parâmetro de endurecimento do material
I	Diferença entre resultados experimentais e numéricos
K	Módulo de compressão
L	Comprimento inicial
m	Parâmetro de Lode
M	Torque
p	Parcela volumétrica do tensor de tensões
R	Raio do domínio elástico

s	Parcela desviadora do tensor de tensões
t	Pseudotempo
T	Temperatura
X	Força termodinâmica associada à deformação de transformação
\mathbf{X}	Tensão termodinâmica associada à deformação de transformação

Símbolos Gregos

ε_L	Máxima deformação de transformação
ε_r	Deformação residual
ε^{tr}	Deformação de transformação
σ_{Af}	Tensão final de formação da austenita
σ_{As}	Tensão inicial de formação da austenita
σ_{Mf}	Tensão final de formação da martensita
σ_{Ms}	Tensão inicial de formação da martensita
σ_c	Tensão axial crítica em compressão
σ_f	Tensão final da demacção
σ_s	Tensão inicial da demacção
σ_t	Tensão axial crítica em tração
τ_M	Parâmetro do material
ΔL	Deslocamento axial
\varnothing	Diâmetro
β	Parâmetro de escala da temperatura
γ	Deformação cisalhante
δ	Parâmetro de regularização
ε	Deformação axial
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações infinitesimais

θ	Parcela volumétrica do tensor de deformações
Θ	Rotação
λ	Parâmetro derivado da função indicatriz
ξ	Fração volumétrica de martensita
σ	Tensão axial
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões infinitesimais
τ	Tensão cisalhante
Φ	Ângulo de fase
φ	Parâmetro associado à fração volumétrica de martensita
Ψ	Potencial de energia livre
Ω	Pseudopotencial de dissipação
ω	Velocidade angular

Subscritos

<i>exp</i>	Experimental
<i>ext</i>	Externo
<i>in</i>	Interno
<i>max</i>	Máximo
<i>n</i>	Instante inicial
<i>n + 1</i>	Instante final
<i>num</i>	Numérico

Sobrescritos

+	Parte positiva
·	Variação temporal

Siglas

Cd-Au	Cádmio-ouro
-------	-------------

Cu-Al-Zn-Mn Cobre-alumínio-zinco-manganês

Cu-Zn-Al Cobre-zinco-alumínio

LMF Ligas com memória de forma

Ni-Ti Níquel-titânio

1 Introdução

As ligas com memória de forma (LMF) constituem uma classe de ligas metálicas com comportamentos termomecânicos característicos, denominados de *efeito memória de forma* e *pseudoelasticidade*. O efeito memória de forma pode ser entendido como a capacidade do material de memorizar uma forma previamente definida e recuperá-la, após sofrer uma deformação quasiplástica (i.e., deformação resultante da reorientação dos cristais que compõem o material), por meio da imposição de uma temperatura. Por sua vez, a pseudoelasticidade pode ser entendida como a capacidade do material de recuperar deformações resultantes de transformações martensíticas induzidas por tensão.

Devido a estes comportamentos, as aplicações envolvendo LMF difundiram-se por diversos segmentos da indústria. No setor automotivo, por exemplo, o comportamento pseudoelástico propicia um sistema eficiente de dissipação de impacto, sendo utilizado em veículos militares e comerciais (Paine & Rogers, 1995). Ainda neste segmento, a utilização de materiais com memória de forma na construção de atuadores proporciona vantagens com relação ao peso e a dimensão dos dispositivos (Stoeckel, 1990).

Na indústria aeroespacial, as LMF são utilizadas na construção de dispositivos destinados à redução dos ruídos emitidos pelo motor das aeronaves. Tais dispositivos, conhecidos como *chevrons*, são responsáveis por misturar o fluxo de gases na exaustão e, assim, reduzir o ruído emitido. Durante a decolagem, as tiras de LMF se aquecem e defletem a estrutura dos *chevrons* em direção ao fluxo de gases, aumentando assim a taxa de mistura e reduzindo o ruído. Por outro lado, quando a aeronave se encontra em velocidade de cruzeiro, as tiras de LMF se resfriam, aumentando a rigidez dos *chevrons* e melhorando a eficiência do motor (Hartl et al., 2009).

No campo da biomedicina, as ligas de níquel-titânio (Ni-Ti) têm sido empregadas na fabricação de *stents*, fios ortodônticos e dispositivos para cirurgias minimamente invasivas (Miyazaki, 1998). O efeito memória de forma e a pseudoelasticidade, juntamente com a biocompatibilidade (i.e.,

habilidade do material de permanecer não tóxico durante a sua vida funcional) e a biofuncionalidade (i.e., bom funcionamento do material no interior do corpo humano), tornam as ligas de Ni-Ti interessantes para aplicações biomédicas.

A demanda crescente da indústria por materiais inteligentes (i.e., materiais capazes de responder a estímulos externos de maneira funcional) tem impulsionado a produção de trabalhos voltados a investigação dos comportamentos (Lieberman et al., 1975; Funakubo & Kennedy, 1987; Otsuka & Wayman, 1999), mecanismos microestruturais (Jackson et al., 1972) e aplicações das LMF (Duerig et al., 1990; Van Humbeeck, 1999).

Nas últimas três décadas, diversos modelos constitutivos para LMF foram propostos. Entre eles, o modelo desenvolvido por Souza et al. (1998) e aperfeiçoado por Auricchio & Petrini (2004) proporciona um ambiente favorável para a análise tensão-deformação tridimensional de dispositivos mecânicos. O modelo de Souza–Auricchio apresenta um algoritmo de solução simples e robusto, fundamental para sua implementação dentro de códigos de elementos finitos. Desde 2012, este modelo encontra-se disponível no *software* comercial de elementos finitos ANSYS® (Imaoka, 2011).

Tabela 1-1 Dados experimentais para LMF sob carregamento axial-torcional.

Referência	Material	Corpo de Prova	Modo de Controle
Sittner et al. (1995)	Cu-Al-Zn-Mn	Tubo de parede fina	Força, Deslocamento
Sittner et al. (1996)	Cu-Al-Zn-Mn	Tubo de parede fina	Força, Deslocamento
Rogueda et al. (1996)	Cu-Zn-Al	Tubo de parede fina	Força
Tokuda et al. (1999)	Cu-Al-Zn-Mn	Tubo de parede fina	Força, Temperatura
Tokuda et al. (2002)	Cu-Al-Zn-Mn	Tubo de parede fina	Força, Temperatura
McNaney et al. (2003)	Ni-Ti	Tubo de parede fina	Deslocamento
Wang et al. (2007)	Ni-Ti	Tubo de parede fina	Deslocamento
Grabe & Bruhns (2008)	Ni-Ti	Cilindro sólido	Deslocamento
Sittner et al. (2009)	Ni-Ti	Fio	Deslocamento, Temperatura
Wang et al. (2010)	Ni-Ti	Tubo de parede fina	Deslocamento
Karbaschi (2012)	Ni-Ti	Fio	Deslocamento
Mehrabi et al. (2014)	Ni-Ti	Tubo de parede fina	Deslocamento
Mehrabi et al. (2015)	Ni-Ti	Tubo de parede fina	Força, Deslocamento
Khodaei & Terriault (2018)	Ni-Ti	Tubo de parede fina	Força

Embora uma ampla gama de ensaios axiais-torcionais para LMF tenham sido reportados na literatura (Tabela 1-1), as avaliações experimentais do modelo de Souza–Auricchio ainda se concentram no contexto unidimensional (Auricchio et al., 2009a; Auricchio et al., 2009b; Auricchio et al., 2014). Neste trabalho, o comportamento tensão-deformação descrito pelo modelo de Souza–Auricchio é avaliado, tanto do ponto de vista qualitativo quanto quantitativo, utilizando dados extensivos de testes axiais-torcionais.

1.1 Objetivo

O objetivo geral deste trabalho consiste em avaliar a capacidade de predição do modelo constitutivo de Souza–Auricchio para ligas com memória de forma, no contexto de carregamentos axiais-torcionais, por meio de comparação com dados experimentais disponíveis na literatura. Os objetivos específicos são: (i) avaliar a influência da forma de controle (e.g., força ou deslocamento) e (ii) da história de carregamento (e.g., proporcional ou não-proporcional) na capacidade de predição do modelo.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho encontra-se estruturado em quatro capítulos. O capítulo 2 apresenta, primeiramente, uma revisão bibliográfica sobre as LMF e seus principais comportamentos termomecânicos. Em seguida, a formulação do modelo de Souza–Auricchio é apresentada. O capítulo 3 apresenta uma série de comparações realizadas entre resultados obtidos experimentalmente e resultados advindos de simulações numéricas utilizando o modelo de Souza–Auricchio. Por fim, o capítulo 4 apresenta as conclusões e considerações finais deste trabalho.

2 Revisão bibliográfica

2.1 Ligas com memória de forma

As LMF são capazes de deformar-se pseudoelasticamente quando submetidas a carregamentos externos, podendo atingir deformações reversíveis da ordem de 10% a depender de sua composição (Delaey et al., 1974). Além deste comportamento, as LMF também são capazes de memorizar uma forma previamente estabelecida e recuperá-la, por meio de processos de ativação térmica, mesmo após submetidas a deformações quasiplásticas da ordem de 8%. Essa habilidade de reconstituição do material é denominada de efeito memória de forma (Ölander, 1932).

2.1.1 Contexto histórico

O efeito memória de forma foi descoberto pelo físico sueco Arne Ölander (1932). Este efeito foi observado, pela primeira vez, em uma liga metálica de cádmio-ouro (Cd-Au). Apesar dos avanços obtidos nos anos seguintes, com os trabalhos de Kurdjumov & Khandros (1949) e de Chang & Read (1951), o alto custo das ligas e a dificuldade de manufaturá-las inviabilizavam a utilização das LMF em escala industrial.

Na década seguinte, Buehler et al. (1963), cientistas do *U.S. Naval Ordnance Laboratory*, identificaram a presença do efeito memória de forma em ligas de Ni-Ti. Os responsáveis pela descoberta batizaram a liga de Nitinol, em homenagem ao laboratório onde trabalhavam. O Nitinol, ao contrário das demais ligas conhecidas na época, mostrava-se mais barato e fácil de manusear, além de possuir melhores propriedades mecânicas.

A primeira aplicação comercial bem-sucedida das LMF acontece em 1969, quando a *Raychem Corporation* passa a utilizar estas ligas na fabricação de elementos de fixação e uniões para a indústria aeronáutica. Desde então, as LMF, em especial as ligas de Ni-Ti, vêm sendo gradativamente empregadas em diversos setores da indústria automotiva, aeroespacial e biomédica.

2.1.2 Fenomenologia da transformação de fase

Freqüentemente, as LMF apresentam duas fases cristalográficas bem definidas, que se diferenciam quanto à estrutura cristalina e, conseqüentemente, quanto às características exibidas. A fase de alta temperatura é denominada *austenita* e possui, geralmente, estrutura cúbica. A fase de baixa temperatura, denominada *martensita*, pode apresentar estrutura ortorrômbica, tetragonal ou monoclinica. Os cristais que compõem a fase martensítica podem estar organizados de modo a possuírem orientações distintas entre si, caracterizando a *martensita maclada*, ou possuírem uma direção preferencial de orientação, caracterizando a *martensita demaclada* (Krishnan et al., 1974).

Nas LMF, assim como na maior parte das ligas metálicas, a transformação entre as diferentes fases cristalográficas não ocorre por difusão, mas sim pela distorção da estrutura de cisalhamento, resultante de um movimento cooperativo entre os átomos. Esta transformação, conhecida como *transformação martensítica*, está intimamente relacionada aos comportamentos característicos exibidos pelas LMF. Entretanto, diferentemente das demais ligas, a transformação martensítica nas LMF ocorre de maneira reversível, podendo ser induzida termicamente ou mecanicamente (Delaey et al., 1974).

As transformações de fase induzidas termicamente ocorrem em faixas de temperatura que variam não só de acordo com a composição química da liga, mas também de acordo com a história termomecânica da mesma. Neste tipo de transformação, pode-se identificar a existência de quatro temperaturas principais: M_s (temperatura inicial de formação da martensita), M_f (temperatura final de formação da martensita), A_s (temperatura inicial de formação da austenita) e A_f (temperatura final de formação da austenita) (Shaw & Kyriakides, 1995).

A Figura 2-1 ilustra a variação da fração volumétrica de martensita em função da temperatura imposta, na ausência de cargas mecânicas aplicadas. Nota-se que, durante o processo de resfriamento, a curva inferior é percorrida e, ao atingir-se a temperatura M_s , têm-se o início da formação da martensita. Conforme o processo de resfriamento avança, a fração volumétrica de

martensita aumenta. A transformação de fase é concluída assim que a temperatura M_f é atingida, restando então somente martensita maclada no material. Do mesmo modo, durante o aquecimento, a formação da austenita tem início no momento em que a temperatura A_s é alcançada. O processo avança até que se ultrapasse a temperatura A_f , finalizando assim a transformação de fase do material (Shaw & Kyriakides, 1995).

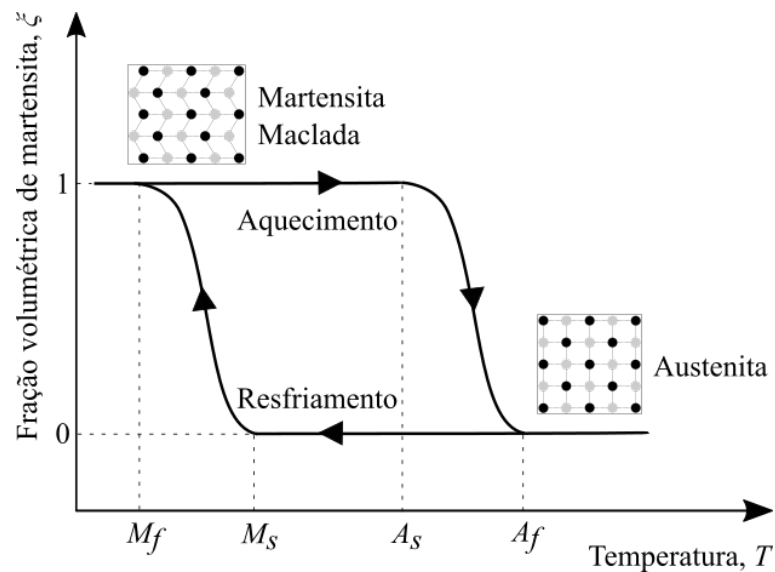


Figura 2-1 Evolução da fração volumétrica de martensita em função das temperaturas de transformação de fase.

Um material, inicialmente na fase martensítica maclada, pode ter seus cristais reorientados quando submetido a aplicação de uma carga mecânica suficientemente elevada. Este processo de reorientação dos cristais é conhecido como *demaclação* (ver Fig. 2-2). Denota-se por σ_s a tensão mínima necessária para que o processo de demaclação tenha início. A demaclação do material avança a medida em que a tensão aplicada aumenta. A tensão correspondente ao fim do processo de demaclação é denotada por σ_f .

A demaclação resulta em uma variação macroscópica da forma do material, onde a configuração deformada é mantida mesmo após a retirada da carga. Este fenômeno é conhecido como *quasiplasticidade*. A recuperação da configuração original pode ser induzida por meio do

aquecimento do material em temperaturas superiores a A_f . O aquecimento proporciona a transformação da martensita demaçada em austenita (ver Fig. 2-3). Um subsequente resfriamento desde material, em temperaturas inferiores a M_f , resulta novamente na formação da martensita maçada, sem alterações na forma. O processo descrito acima é denominado de efeito memória de forma (Ölander, 1932).

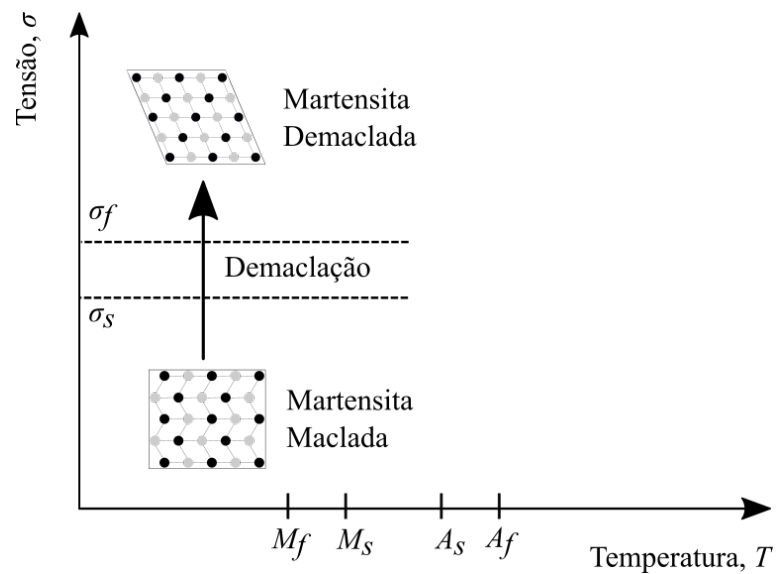


Figura 2-2 Demaçoção de uma LMF.

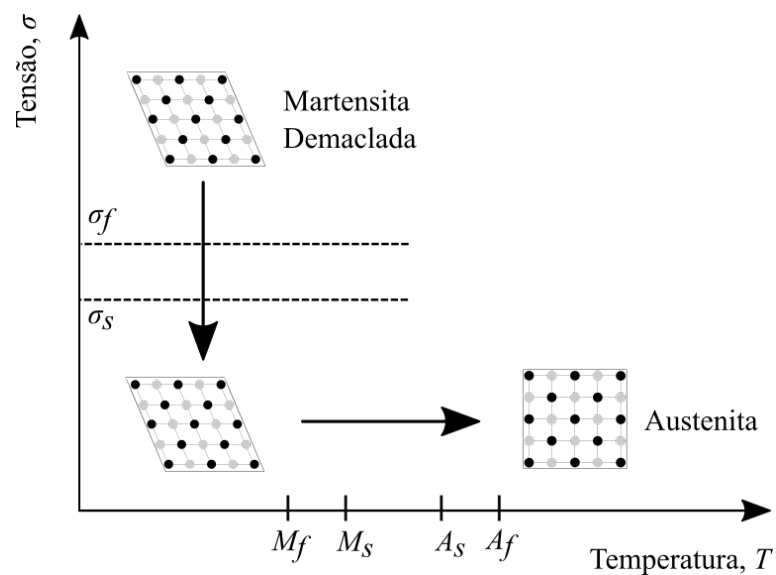


Figura 2-3 Esquema do efeito memória de forma.

Conforme citado anteriormente, a transformação martensítica pode ser induzida termicamente ou mecanicamente. Neste segundo caso, pode-se observar a formação da martensita demaçada quando um material, inicialmente na fase austenítica, é submetido a aplicação de cargas mecânicas suficientemente elevadas. A transformação da austenita em martensita demaçada resulta em uma variação macroscópica da forma do material. Entretanto, se a temperatura estiver acima de A_f , a forma original é recuperada após a retirada da carga aplicada. Este fenômeno é conhecido como pseudoelasticidade (Delaey et al., 1974).

2.1.3 Pseudoelasticidade

O comportamento pseudoelástico somente é observado em temperaturas superiores a A_s e resulta de transformações martensíticas induzidas por tensão (Delaey et al., 1974). O comportamento tensão-deformação pseudoelástico de uma LMF submetida a temperaturas superiores a A_f é ilustrado na Fig. 2-4. Durante o carregamento, o material exibe um comportamento elástico quando submetido a tensões inferiores a σ_{M_s} . No instante em que este limite é ultrapassado, a fase austenítica torna-se instável e a transformação martensítica tem início. Durante o processo de formação da martensita demaçada é possível observar uma deformação macroscópica no material. A transformação martensítica chega ao fim assim que a tensão aplicada atinge σ_{M_f} . Durante o descarregamento, o material responde inicialmente de maneira elástica. Contudo, a fase martensítica torna-se instável ao atingir-se uma tensão equivalente a σ_{A_s} . Conforme os níveis de tensão diminuem, a martensita demaçada se transforma novamente em austenita, fazendo com que haja a recuperação de boa parte da deformação sofrida. Se a temperatura estiver acima de A_f , o material irá retornar a fase austenítica e se reconstituir integralmente, caracterizando assim a *pseudoelasticidade completa*. Todavia, se a temperatura estiver entre A_s e A_f , haverá apenas uma recuperação parcial da deformação sofrida, caracterizando assim a *pseudoelasticidade parcial*. Posteriormente, a deformação residual (ϵ_r) poderá ser recuperada através do aquecimento do

material em temperaturas superiores a A_f (Delaey et al., 1974). A Figura 2-5 ilustra os comportamentos pseudoelásticos completo e parcial em um diagrama tensão-deformação.

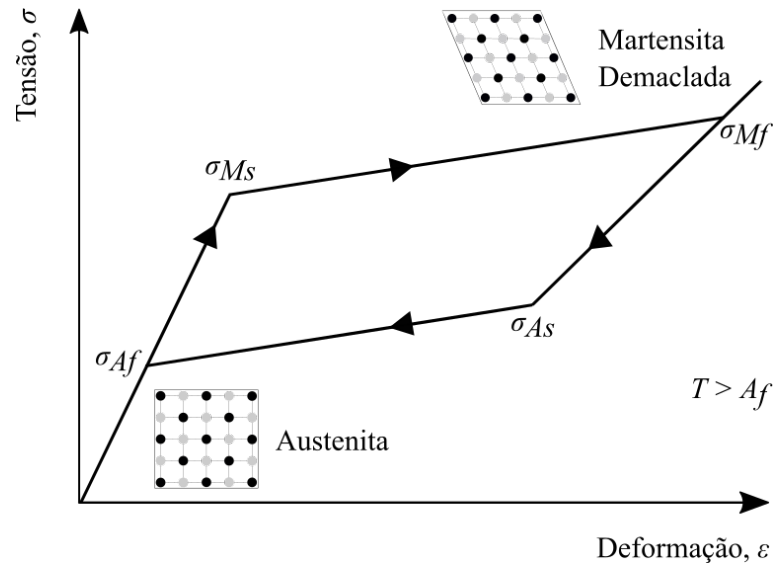


Figura 2-4 Diagrama esquemático do comportamento pseudoelástico.

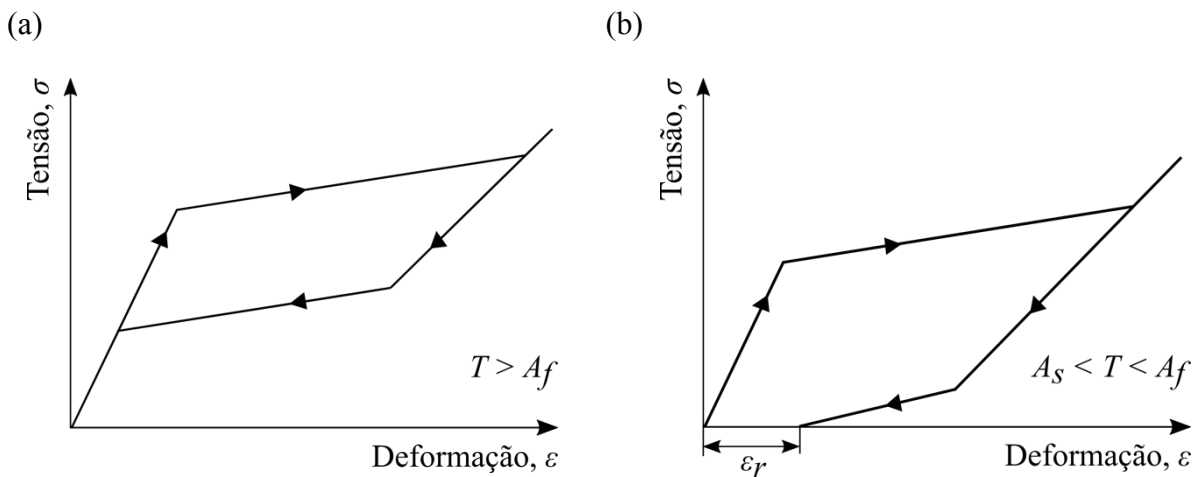


Figura 2-5 Diagrama esquemático do comportamento pseudoelástico (a) completo e (b) parcial.

2.1.4 Quasiplasticidade

A quasiplasticidade é um fenômeno observado somente em temperaturas inferiores a M_f e resulta da reorientação dos cristais que compõem a fase martensítica (Delaey et al., 1974). A Figura 2-6 ilustra o comportamento tensão-deformação quasiplástico de uma LMF.

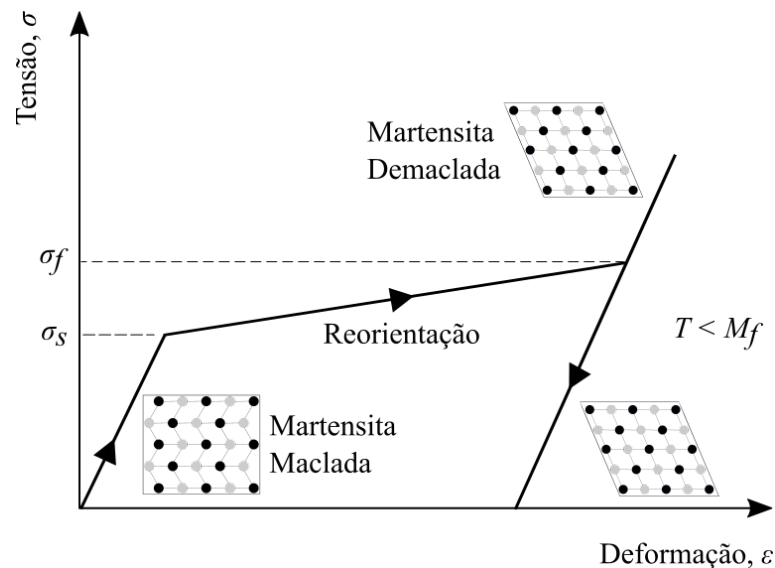


Figura 2-6 Comportamento quasiplástico.

Durante o carregamento, o material exibe um comportamento elástico quando submetido a tensões inferiores a σ_s . No instante em que esta tensão limite é ultrapassada, o processo de demaçoação tem início. A demaçoação acontece em níveis praticamente constantes de tensão, chegando ao fim no momento em que a tensão σ_f é alcançada. Se o carregamento for cessado antes que o limite de escoamento seja atingido, o material irá se comportar de maneira elástica durante todo o processo de descarregamento. Por fim, haverá a presença de uma deformação residual, a qual poderá ser recuperada posteriormente através de um tratamento térmico (Delaey et al., 1974).

2.1.5 Efeito memória de forma

O efeito memória de forma configura-se como o fenômeno associado à recuperação da deformação residual gerada pela imposição de um carregamento quasiplástico a uma LMF. A natureza deste fenômeno pode ser melhor compreendida por meio do diagrama tensão-deformação-temperatura esquemático apresentado na Fig. 2-7.

O material, inicialmente na fase martensítica maclada, tem seus cristais reorientados quando submetido à tensões superiores a σ_f . Durante o processo de descarregamento, o material se comporta de maneira elástica e a estrutura martensítica demaçoada é mantida. A deformação residual gerada

é então recuperada por meio do aquecimento do material a temperaturas superiores a A_f . Este processo de aquecimento leva o material da fase martensítica demaçada para a fase austenítica. Um posterior resfriamento do material, a temperaturas inferiores a M_f , induzirá a formação da martensita maçada (Delaey et al., 1974).

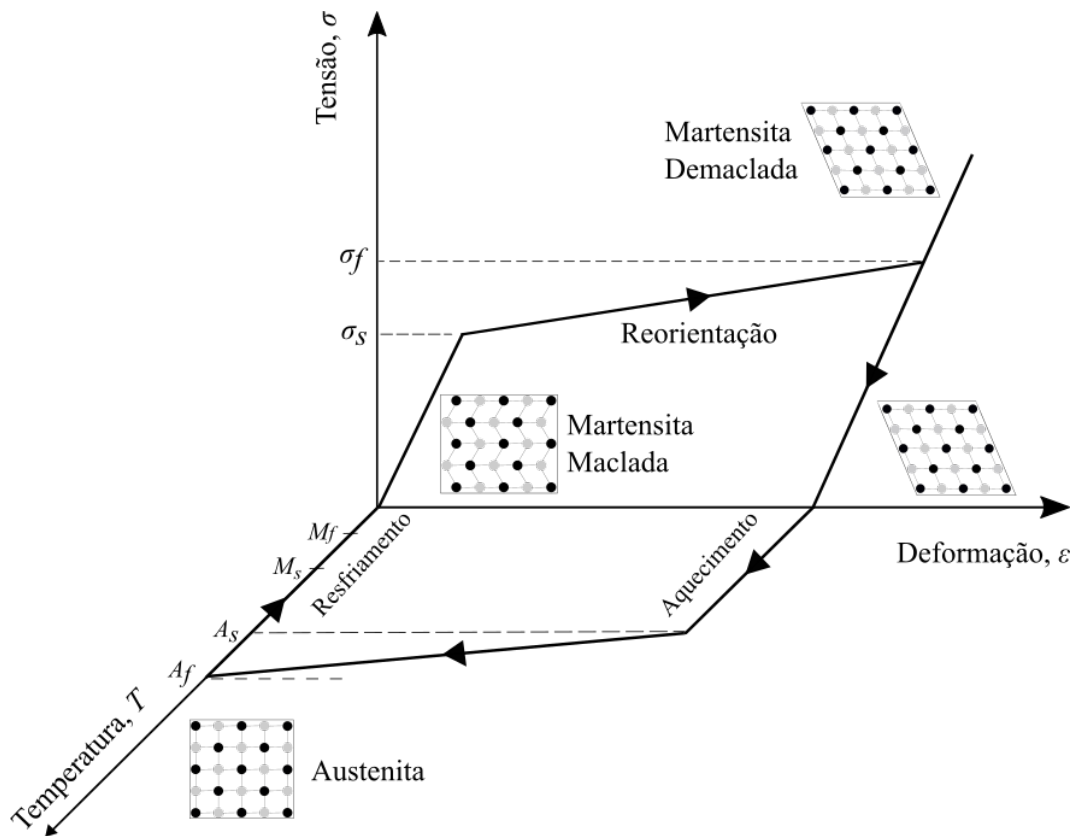


Figura 2-7 Diagrama esquemático do efeito memória de forma.

2.2 Modelos constitutivos para ligas com memória de forma

Em geral, os modelos constitutivos são desenvolvidos com o intuito de simular a resposta macromecânica das ligas e, assim, tornar o processo de criação de estruturas mais confiável. Usualmente, os modelos constitutivos para LMF são divididos em três categorias: modelos fenomenológicos macromecânicos, modelos micromecânicos, e modelos macromecânicos baseados em micromecânica e termodinâmica. Esta seção introduz uma breve caracterização destas três categorias.

2.2.1 Modelos fenomenológicos macromecânicos

Desde a década de 1980, a comunidade científica tem se dedicado ao desenvolvimento de modelos constitutivos capazes de prever o comportamento das LMF. Os primeiros modelos baseavam-se em observações experimentais unidimensionais e, portanto, possuíam um caráter fenomenológico. Ao que se sabe, o primeiro modelo fenomenológico tridimensional para uma LMF foi proposto por Bertram (1983). O modelo, inspirado na teoria clássica da plasticidade, já era capaz de descrever o efeito memória de forma. Anos depois, Tanaka et al. (1995) apresentam uma estrutura macroscópica teórica para explicar o comportamento das LMF durante um carregamento cíclico mecânico e/ou térmico. O efeito do carregamento cíclico nos laços de histerese das curvas tensão-deformação ou tensão-temperatura são o principal tópico de discussão. Auricchio & Sacco (1997) propuseram um modelo fenomenológico unidimensional baseado na plasticidade, o qual abordava a pseudoelasticidade isotérmica das LMF e incorporava um termo de endurecimento linear. Posteriormente, Bouvet et al. (2004) apresentam um modelo tridimensional para descrever o comportamento pseudoelástico das LMF sujeitas a carregamentos multiaxiais.

2.2.2 Modelos micromecânicos

Os modelos micromecânicos buscam descrever o comportamento das LMF levando em consideração a microestrutura granular da liga (Lim & McDowell, 1999; Patoor et al., 1989; Sun & Hwang, 1993; Tokuda et al., 1998; Gao & Brinson, 2002). Nestes modelos, o comportamento macroscópico médio do material é obtido por meio da representação microestrutural da liga sobre um elemento de volume representativo (Thamburaja & Anand, 2002; Mirzaeifar et al., 2013).

2.2.3 Modelos macromecânicos baseados em micromecânica e termodinâmica

Esta classe de modelos constitutivos surge a partir da união dos princípios da micromecânica e da termodinâmica. Tais modelos fazem uso de um potencial de energia livre (e.g. energia livre de Gibbs e energia livre de Helmholtz), obtido por meio da modelagem micromecânica. Além disso, são escolhidas as variáveis de estado que melhor representam comportamento termomecânico das

LMF quando sujeitas a alterações microestruturais. O potencial de energia livre é utilizado juntamente com a primeira e segunda leis da termodinâmica, e as leis constitutivas que regem o comportamento das LMF são obtidas a partir da termodinâmica de processos irreversíveis (Chaboche & Lemaitre, 1990).

Os modelos constitutivos pertencentes à esta classe diferenciam-se dos demais pela escolha das variáveis internas. Usualmente, as variáveis de estado que definem as tensões de transformação e a fração volumétrica de martensita são empregadas na formulação dos modelos para LMF. Entretanto, alguns pesquisadores optam por definir diferentes variáveis de estado na tentativa de reproduzir determinados efeitos (e.g. reorientação da fase martensítica). A função de transformação também afeta alguns aspectos críticos do modelo. A função de transformação, responsável por definir o critério de transformação, é comumente baseada na teoria clássica de plasticidade (Dunne & Petrinic, 2005). Escolhas específicas têm tornado os modelos capazes de capturar a assimetria no comportamento tração-compressão exibido pelas LMF, assunto este extensivamente abordado nos trabalhos de Qidwai & Lagoudas (2000) e Raniecki & LExcellent (1998). Finalmente, a inclusão da equação do calor na formulação dos modelos constitutivos contribuiu significativamente para a habilidade dos modelos em simular a resposta dinâmica das LMF.

O modelo de Souza–Auricchio (Souza et al., 1998; Auricchio & Petrini, 2004), foco de estudo do presente trabalho, enquadra-se nesta última categoria de modelos constitutivos, sendo melhor apresentado na seção que se segue.

2.3 Modelo de Souza–Auricchio

Esta seção apresenta o modelo constitutivo de Souza–Auricchio para LMF. Este modelo foi originalmente desenvolvido por Souza et al. (1998) utilizando conceitos da termodinâmica de materiais com variáveis internas (Chaboche & Lemaitre, 1990) e a teoria dos materiais padrão generalizado (Halphen & Nguyen, 1975; Maugin, 1992). Posteriormente, o modelo foi aperfeiçoado por Auricchio e Petrini (2004) ao perceberem que o algoritmo implícito de integração das relações

constitutivas do modelo original, necessário à construção de um modelo de elemento finitos, possuía algumas limitações. Para fins de clareza, esta seção apresenta em primeiro lugar o modelo original de Souza et al. (1998) e, em seguida, discute-se as modificações introduzidas na versão proposta por Auricchio e Petrini (2004). A apresentação será concisa, sugerindo-se para um estudo mais detalhado a leitura dos trabalhos citados neste parágrafo.

2.3.1 Modelo de Souza et al. (1998)

O modelo proposto por Souza et al. (1998) baseia-se na termodinâmica de meios contínuos com variáveis internas, segundo a qual o estado de um ponto material de um sólido é definido pelos valores do tensor das deformações, da temperatura e de um conjunto de variáveis internas em um determinado instante de tempo. As variáveis internas possuem o papel de representar, em nível macroscópico, fenômenos dissipativos que ocorrem em nível microscópico. Além disso, na construção das relações constitutivas que regem o comportamento das LMF, o modelo de Souza et al. (1998) utilizou a teoria de material padrão generalizado. Nesta teoria, o comportamento tensão-deformação do material é completamente definido a partir da escolha de dois potenciais: o potencial de energia livre, do qual resultam as leis de estado; e o potencial de dissipação, do qual advém as leis de evolução das variáveis internas. No que se segue, descreve-se as variáveis observáveis, as variáveis internas, o potencial de energia livre e o potencial de dissipação adotados no modelo de Souza et al. (1998), bem como as relações constitutivas resultantes.

As variáveis observáveis usadas no modelo de Souza et al. (1998) são o tensor das deformações infinitesimais, $\boldsymbol{\epsilon}$, e a temperatura, T . A variável interna incorporada ao modelo para descrever as deformações macroscópicas associadas à transformação de fase do material é um tensor de segunda ordem, \boldsymbol{e}^{tr} , chamado *deformação de transformação*. Assume-se que \boldsymbol{e}^{tr} é um tensor desviador, tendo em vista evidências experimentais que sugerem que a transformação de fase martensítica ocorre aproximadamente a volume constante (Orgéas & Favier, 1995). A quantidade $\|\boldsymbol{e}^{tr}\|$, definida como a norma de Frobenius de \boldsymbol{e}^{tr} , serve como uma medida da quantidade de martensita em um

ponto material do sólido. Assim, denotando por ε_L o valor máximo da deformação de transformação ao final da transformação de fase de um ensaio uniaxial, tem-se a restrição

$$0 \leq \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L, \quad (2.1)$$

onde ε_L é considerado um parâmetro do material.

O potencial de energia livre de Helmholtz, Ψ , proposto por Souza et al. (1998) possui a seguinte forma:

$$\Psi(\theta, \mathbf{e}, \mathbf{e}^{tr}, T) = \frac{1}{2}K\theta^2 + G\|\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}\|^2 + \tau_M(T)\|\mathbf{e}^{tr}\| + \frac{h}{2}\|\mathbf{e}^{tr}\|^2 + I_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}), \quad (2.2)$$

onde $\theta = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ e \mathbf{e} são as parcelas volumétrica e desviadora do tensor das deformações; K e G denotam os módulos de compressão e cisalhamento do material; $\|\cdot\|$ representa a norma de Frobenius de um tensor; $\tau_M(T)$ é uma função com valores positivos e que aumenta de forma monotônica com a temperatura; essa função é definida como $\tau_M(T) = \beta\langle T - M_f \rangle$ onde o símbolo $\langle \cdot \rangle$ representa os colchetes de Macaulay (i.e., $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$), β é um parâmetro do material relacionado à dependência da tensão crítica (i.e., nível de tensão no qual a transformação martensítica tem início) com a temperatura e M_f é a temperatura abaixo da qual apenas a fase martensítica é estável; h é um parâmetro do material relacionado ao endurecimento do material durante a transformação de fase; por fim, $I_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr})$ é a função indicatriz definida por

$$I_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| \leq \varepsilon_L, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Esta função indicatriz foi incluída no potencial de energia livre para garantir que a condição (2.1), que restringe os valores da magnitude da deformação de transformação, seja satisfeita. Em outras palavras, a função indicatriz evita que \mathbf{e}^{tr} possua valores fora do seu intervalo admissível, uma vez que seria necessária uma quantidade infinita de energia para fazê-lo.

As relações constitutivas (ou leis de estado) do modelo são obtidas a partir da desigualdade de Clausius–Duhem, explorando o fato de que esta desigualdade deve ser satisfeita para qualquer

processo termodinâmico descrito pelo potencial apresentado na Eq. (2.2). O procedimento consiste em substituir na desigualdade de Clausius–Duhem alguns processos termodinâmicos particulares (e.g., um processo de deformação elástica à temperatura constante e uniforme). Resulta deste procedimento (Chaboche & Lemaitre, 1990) que as quantidades termodinâmicas associadas às parcelas volumétrica e desviadora do tensor das deformações, θ e \mathbf{e} , e à deformação de transformação, \mathbf{e}^{tr} , devem possuir as formas a seguir:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K\theta, \\ \mathbf{s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{tr}), \\ \mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{tr}} = \mathbf{s} - \beta \langle T - M_f \rangle \frac{\mathbf{e}^{tr}}{\|\mathbf{e}^{tr}\|} - h\mathbf{e}^{tr} - \lambda \frac{\mathbf{e}^{tr}}{\|\mathbf{e}^{tr}\|}, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde o tensor \mathbf{X} , que representa a tensão termodinâmica associada à deformação de transformação \mathbf{e}^{tr} , é chamado *tensão de transformação*. A variável λ presente na Eq. (2.4)₃ surge da diferenciação da função indicatriz $\partial I_{\varepsilon_L}(\mathbf{e}^{tr})$ em relação a \mathbf{e}^{tr} e é definida como

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{se } 0 < \|\mathbf{e}^{tr}\| < \varepsilon_L, \\ \lambda \geq 0 & \text{se } \|\mathbf{e}^{tr}\| = \varepsilon_L. \end{cases} \quad (2.5)$$

Tendo em vista a obtenção de uma lei de evolução para a deformação de transformação, \mathbf{e}^{tr} , Souza et al. (1998) propuseram um pseudopotencial de dissipação com a seguinte forma:

$$\Omega(\dot{\mathbf{e}}^{tr}) = R\|\dot{\mathbf{e}}^{tr}\|, \quad (2.6)$$

onde R é uma propriedade do material que pode ser interpretada como sendo o raio do domínio elástico. Pode-se mostrar (Souza et al., 1998) que a escolha do pseudopotencial de dissipação apresentado na Eq. (2.6) resulta na seguinte lei de evolução para a deformação de transformação:

$$\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\phi} \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}, \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\| - R \leq 0, \\ \dot{\varphi} \geq 0, \\ \dot{\varphi} f(\mathbf{X}) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Cabe observar que a relação estabelecida na Eq. (2.8)₁ define um domínio no qual a tensão de transformação \mathbf{X} deve estar confinada, cuja forma é uma hipersfera de raio R . Quando a tensão de transformação \mathbf{X} encontra-se no interior deste domínio (i.e., $f(\mathbf{X}) < 0$), a condição (2.8)₃ implica que $\dot{\varphi} = 0$ e, da relação (2.7), tem-se que $\dot{\mathbf{e}}^{tr} = \mathbf{0}$. Nesse caso, portanto, o material comporta-se de forma elástica. Por outro lado, quando há transformação de fase, $\dot{\varphi} > 0$, a condição (2.8)₃ impõe que a tensão de transformação \mathbf{X} deve estar no contorno do domínio (i.e., $f(\mathbf{X}) = 0$).

2.3.2 Modelo de Souza–Auricchio

Auricchio & Petrini (2004) propuseram algumas modificações no modelo original de Souza et al. (1998), e em seu algoritmo de integração numérica, com o objetivo de construir uma formulação numérica que permitisse a análise por elementos finitos de problemas reais de forma robusta e eficiente. Vale observar que o modelo e algoritmo desenvolvidos por Auricchio & Petrini (2004) foram incorporados ao aplicativo comercial de análise por elementos finitos *ANSYS*[®], desde a sua versão 14.5. Apresenta-se a seguir, de forma sintética, as modificações introduzidas por Auricchio & Petrini à formulação de Souza et al. (1998).

Ao invés de uma função de transformação de von Mises, conforme expressa a Eq. (2.8)₁, Auricchio & Petrini (2004) utilizaram uma função de Prager–Lode dada por

$$f(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R, \quad (2.9)$$

onde J_2 e J_3 são o segundo e o terceiro invariantes do tensor desviador \mathbf{X} definidos por

$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}\|^2, \\ J_3 = \frac{1}{3} \det(\mathbf{X}). \end{cases} \quad (2.10)$$

Na Eq. (2.9), m é uma propriedade do material denominada parâmetro de Lode e R é o raio do domínio elástico. Deve-se ressaltar que $m \leq 0,46$ para que a convexidade da superfície de transformação seja garantida. A vantagem de utilizar a função de Prager–Lode, ao invés da função de von Mises, é que ela permite descrever a assimetria da resposta tensão-deformação das LMF quando submetidas à tração e compressão.

A principal modificação proposta por Auricchio & Petrini (2004) refere-se à versão discretizada no tempo do modelo constitutivo. Para explicar essa modificação, apresenta-se a seguir as relações constitutivas do modelo de Souza et al. (1998) após sua discretização no tempo pelo método implícito de Euler:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = K\theta_{n+1}, \\ \mathbf{s}_{n+1} = 2G(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{tr}), \\ \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} - [\beta\langle T_{n+1} - M_f \rangle + h\|\mathbf{e}_{n+1}^{tr}\| + \lambda_{n+1}] \frac{\partial \|\mathbf{e}^{tr}\|}{\partial \mathbf{e}^{tr}} \Big|_{n+1}, \\ \lambda_{n+1} \geq 0, \\ \mathbf{e}_{n+1}^{tr} = \mathbf{e}_n^{tr} + \Delta\delta_{n+1} \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ \|\mathbf{e}_{n+1}^{tr}\| \leq \varepsilon_L, \\ f(\mathbf{X}_{n+1}) = \sqrt{2J_2} + m \frac{J_3}{J_2} - R \leq 0, \\ \Delta\delta_{n+1} \geq 0, \\ \Delta\delta_{n+1} f(\mathbf{X}_{n+1}) = 0, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

onde os subscritos n e $n + 1$ denotam os valores da quantidade no início e no final do pseudointervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$. O problema crucial levantado por Auricchio & Petrini refere-se ao fato de que a tensão de transformação \mathbf{X}_{n+1} depende da derivada da magnitude (norma de Frobenius) da deformação de transformação. Quando $\mathbf{e}^{tr} = \mathbf{0}$, esta derivada fica indefinida. Para resolver este problema, Auricchio & Petrini (2004) propuseram a substituição da norma de Frobenius $\|\mathbf{e}^{tr}\|$ por uma norma regularizada definida por

$$\overline{\|\mathbf{e}^{tr}\|} = \|\mathbf{e}^{tr}\| - \frac{\delta^{(\delta+1)/\delta}}{\delta - 1} (\|\mathbf{e}^{tr}\| + \delta)^{(\delta-1)/\delta}, \quad (2.12)$$

onde δ é um parâmetro que controla a “suavidade” da norma regularizada. Esta norma possui as seguintes propriedades desejáveis. Para valores de e^{tr} grandes, a norma regularizada coincide com a norma de Frobenius. Para valores de e^{tr} pequenos, a diferença entre $\overline{\|e^{tr}\|}$ e $\|e^{tr}\|$ tende a zero para $\delta \rightarrow 0$. A quantidade $\overline{\|e^{tr}\|}$ é sempre diferenciável se $\delta > 0$, inclusive quando $e^{tr} = \mathbf{0}$. Em outras palavras, a quantidade $\partial\overline{\|e^{tr}\|}/\partial e^{tr}$ é bem definida para quaisquer valores de e^{tr} . Vale mencionar que Auricchio & Petrini (2004) adotaram $\delta = 0,02$ em suas simulações numéricas.

Por fim, cabe ressaltar que Auricchio & Petrini (2004) desenvolveram um algoritmo do tipo preditor elástico/corretor inelástico (de Souza Neto et al., 2011) para obter a solução numérica do modelo discretizado no tempo. A estrutura deste algoritmo é similar aos frequentemente empregados para solução de problemas de plasticidade computacional. Além disso, estes autores obtiveram a matriz tangente consistente necessária à convergência quadrática assintótica do método de Newton–Raphson global. Este tópico, de fundamental importância à implementação computacional do modelo no contexto do método dos elementos finitos, não havia sido considerado no trabalho original de Souza et al. (1998).

2.3.3 Determinação das constantes do modelo

Esta seção trata da determinação das constantes do modelo de Souza–Auricchio. Conforme discutido por Auricchio et al. (2009a), estas constantes podem ser obtidas a partir dos seguintes dados experimentais:

- curva tensão-deformação resultante de um processo de carregamento/descarregamento axial de um corpo de prova submetido à temperatura constante;
- curva deformação-temperatura resultante de um processo de aquecimento/desaquecimento de um corpo de prova submetido à tensão axial constante.

Vale ressaltar que a escolha destes dados experimentais para a calibração do modelo de Souza–Auricchio deve-se à relativa simplicidade dos ensaios necessários à sua obtenção, em comparação

com ensaios realizados sob condições de carregamento multiaxial. Além disso, há procedimentos padronizados para a obtenção destes dados, como as normas ASTM E3098 (2017) e F2516 (2018).

Apresenta-se a seguir a versão do modelo de Souza–Auricchio particularizada para o caso uniaxial (unidimensional). Esta versão torna clara a interpretação física das constantes do modelo e, ainda, sugere um procedimento para a determinação de suas constantes.

No contexto uniaxial, o potencial de energia livre de Helmholtz do modelo de Souza–Auricchio adquire a forma

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon^{tr}, T) = \frac{1}{2}E(\varepsilon - \varepsilon^{tr})^2 + \tau_M(T)|\varepsilon^{tr}| + \frac{h}{2}(\varepsilon^{tr})^2 + I_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}), \quad (2.13)$$

onde ε é a deformação total, ε^{tr} é a deformação de transformação e T é a temperatura. Para levar em consideração os diferentes módulos de elasticidade das fases austenítica (E_A) e martensítica (E_M), o módulo de elasticidade é expresso por $E = E_A + \xi(E_M - E_A)$, onde $\xi = |\varepsilon^{tr}|/\varepsilon_L$ é a fração volumétrica de martensita ($0 \leq \xi \leq 1$). A satisfação da restrição $0 \leq |\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L$ relacionada aos valores da deformação de transformação é garantida pela inclusão da seguinte função indicatriz no potencial de energia livre:

$$I_{\varepsilon_L}(\varepsilon^{tr}) = \begin{cases} 0, & \text{se } |\varepsilon^{tr}| \leq \varepsilon_L, \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.14)$$

A dependência de τ_M em relação a temperatura é expressa $\tau_M(T) = \beta\langle T - M_f \rangle$ onde $\langle \cdot \rangle$ são os colchetes de Macaulay, β é um parâmetro do material e M_f é a temperatura abaixo da qual apenas a fase martensítica é estável. No modelo uniaxial, as relações constitutivas são dadas por

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E(\varepsilon - \varepsilon^{tr}), \\ X = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^{tr}} = \sigma - \tau_M(T) \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|} - h\varepsilon^{tr} - \lambda \frac{\varepsilon^{tr}}{|\varepsilon^{tr}|}, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde X é a força termodinâmica associada à deformação de transformação ε^{tr} . A variável λ presente na expressão de X , resultante da derivada da função indicatriz, é tal que

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| < \varepsilon_L, \\ \lambda \geq 0 & \text{se } |\varepsilon^{tr}| = \varepsilon_L. \end{cases} \quad (2.16)$$

A lei de evolução da deformação de transformação, ε^{tr} , no caso uniaxial passa a ser escrita como

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial X} = \dot{\varphi} \frac{X}{|X|}, \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{cases} f(X) = |X| - R \leq 0, \\ \dot{\varphi} \geq 0, \\ \dot{\varphi} f(X) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Deve-se observar que a Eq. (2.18)₁ foi obtida assumindo-se que parâmetro de Lode, m , é igual a zero. Isso implica que a resposta tensão-deformação do material é a mesma quando submetido à tração ou à compressão.

O exame da versão uniaxial do modelo de Souza–Auricchio, Eqs. (2.13) a (2.18), indica que ele possui oito constantes: $E_A, E_M, \varepsilon_L, h, R, \beta, M_f$ e m . A representação gráfica das sete primeiras constantes pode ser visualizada na Fig. 2-8. Esta figura mostra a curva tensão-deformação de uma liga com memória de forma submetida a um processo de carregamento/descarregamento, ocorrido a uma temperatura maior que A_f (i.e., no caso em que o comportamento do material é pseudoelástico). Nota-se que a inclinação da curva tensão-deformação quando o material está na fase austenítica fornece E_A , enquanto a inclinação da curva após o processo de transformação martensítica corresponde a E_M . Por sua vez, a máxima deformação de transformação, ε_L , pode ser estimada pela diferença entre os valores da deformação total no final e no início da transformação martensítica. O parâmetro h define a inclinação da curva tensão-deformação durante a transformação martensítica, pois $\partial\sigma/\partial\varepsilon = Eh/(E + h)$. Vale ressaltar que $\partial\sigma/\partial\varepsilon = Eh/(E + h) \approx h$ quando $E \gg h$. O parâmetro R (i.e., o raio do domínio elástico) corresponde à metade da diferença entre a tensão ao final da transformação martensítica e a tensão no início da transformação reversa. O parâmetro τ_M é igual ao valor médio entre as tensões ao final da transformação

martensítica e no início da transformação reversa. Por fim, cabe observar que no caso em que há assimetria entre as curvas de tração e compressão da uma LMF, o parâmetro de Lode m pode ser calculado pela expressão (Auricchio & Petrini, 2004)

$$m = \sqrt{\frac{27}{2} \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}}, \quad (2.19)$$

onde σ_t e σ_c são as tensões axiais críticas em tração e compressão, respectivamente.

No presente trabalho, as constantes do modelo de Souza–Auricchio foram obtidas a partir das curvas tensão-deformação axial fornecidas nos estudos experimentais analisados (Wang et al., 2010; Mehrabi et al., 2015). Entretanto, deve-se observar que é possível obter os parâmetros do modelo a partir de duas curvas deformação-temperatura do material correspondentes a tensões axiais aplicadas distintas, conforme proposto por Auricchio et al. (2009a). Para obter essas curvas começa-se o ensaio a uma temperatura baixa e com um nível de tensão no qual apenas a fase martensítica está presente, aquece-se então o material e, por fim, desaquece-se o material até a temperatura inicial. Esta estratégia não foi adotada no presente trabalho, pois as curvas deformação-temperatura não foram levantadas nos experimentos coletados da literatura.

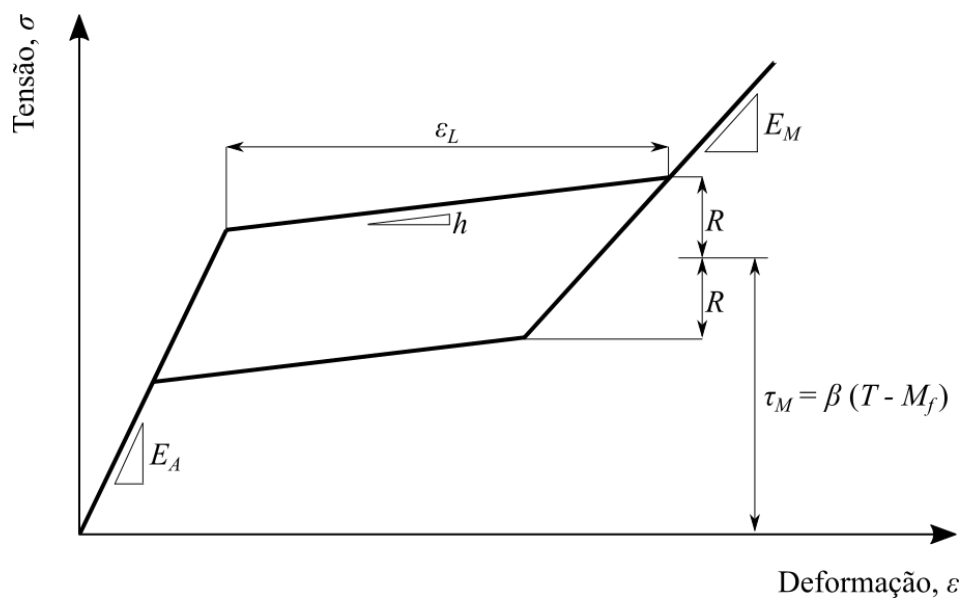


Figura 2-8 Representação gráfica das constantes do modelo de Souza–Auricchio em uma curva tensão-deformação correspondente ao comportamento pseudoelástico

3 Comparação numérico-experimental

Para que o modelo de Souza–Auricchio possa ser considerado eficiente, o mesmo deve ser capaz de prever o comportamento real de uma LMF sujeita a diferentes tipos de carregamento. Neste sentido, é apresentada a seguir uma série de comparações realizadas entre resultados experimentais, disponíveis na literatura, e resultados obtidos via simulação numérica. As simulações numéricas foram realizadas no *software* comercial de elementos finitos *ANSYS® 19.1*.

O elemento finito *SOLID 186* foi escolhido para discretizar todas as geometrias utilizadas nas simulações aqui realizadas. O *SOLID 186* é um elemento hexaédrico de 20 nós, e possui suporte para grandes deformações (Ansys, 2015).

3.1 Definição da malha

A malha adotada na comparação numérico-experimental foi definida a partir da análise de convergência realizada. A análise consistiu em replicar um dos ensaios conduzidos por Mehrabi et al. (2015), utilizando diferentes níveis de discretização do corpo de prova, e comparar as curvas tensão-deformação obtidas. O corpo de prova utilizado na análise tem formato de tubo de parede fina e possui 4,5 mm e 3,9 mm de diâmetro externo e interno, respectivamente, e 14 mm de comprimento (ver Fig. 3-1a). A Figura 3-2 apresenta as três malhas propostas para discretizar o tubo: malha I (300 elementos); malha II (1.800 elementos) e malha III (5.400 elementos).

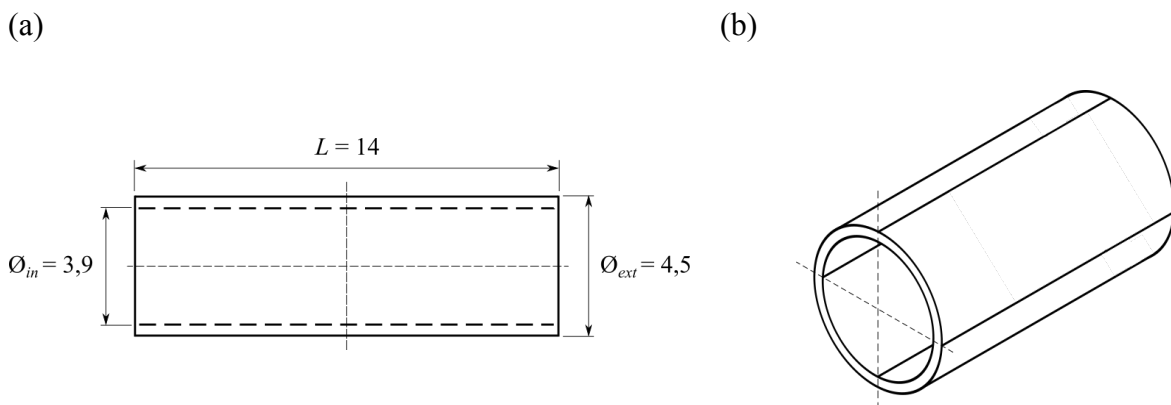
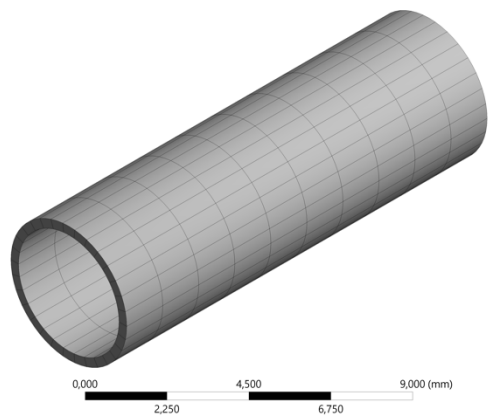
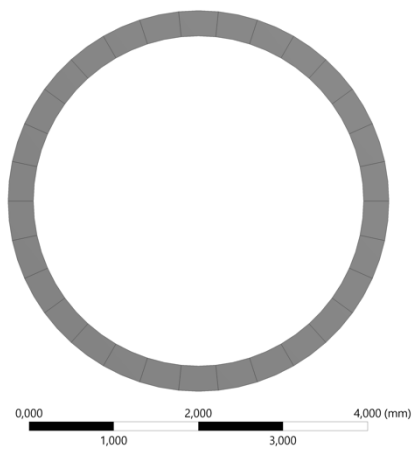
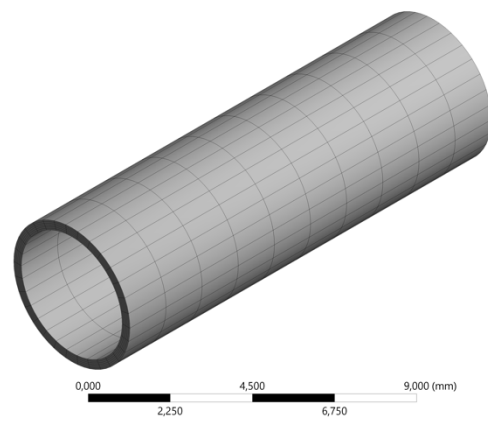
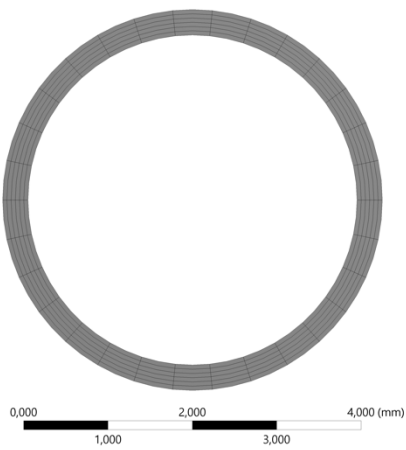


Figura 3-1 Corpo de prova adotado por Mehrabi et al. (2015): (a) dimensões em mm e (b) vista isométrica.

(a)



(b)



(c)

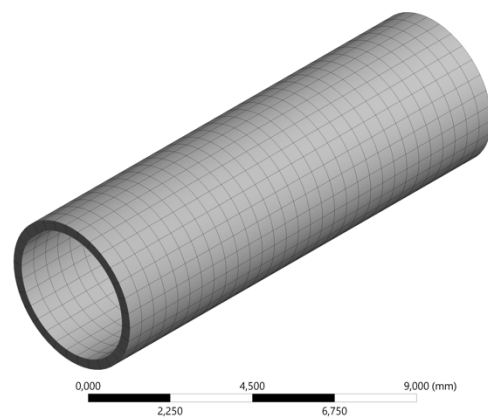
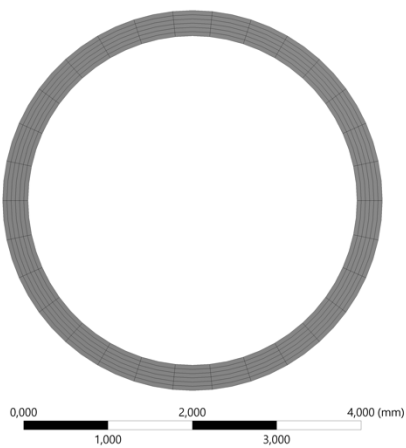


Figura 3-2 Malhas de elementos finitos utilizadas para discretizar o corpo de prova adotado por Mehrabi et al. (2015): (a) malha I, (b) malha II e (c) malha III.

Para a realização da análise, utilizou-se o ensaio proporcional de tração/torção combinados sob controle de força e torque. A história de carregamento e as condições de contorno utilizadas (ver Fig. 3-3) são tais que replicam as condições descritas no estudo de Mehrabi et al. (2015).

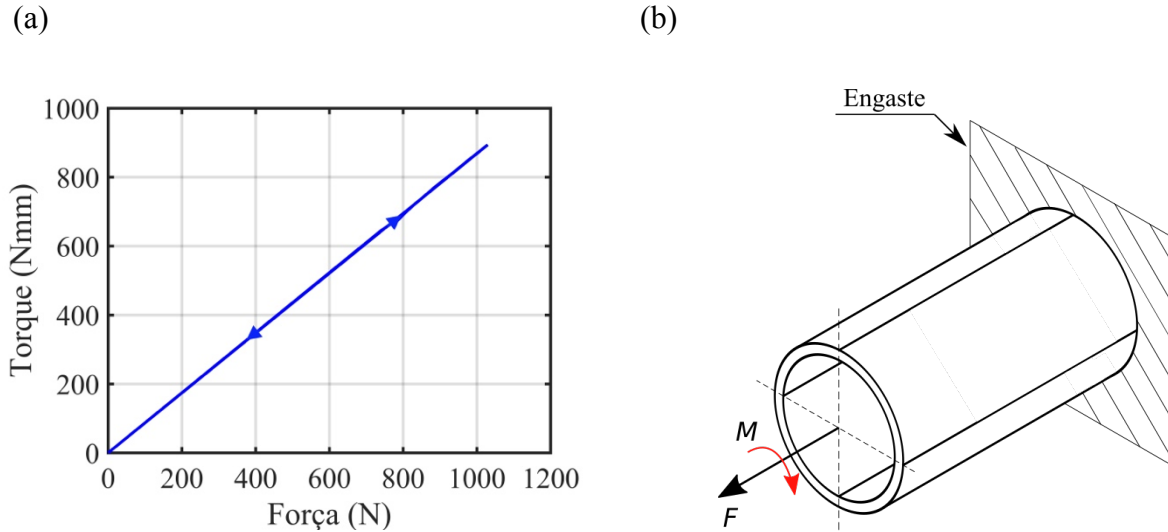


Figura 3-3 Ensaio para definição da malha: (a) história de carregamento e (b) condições de contorno.

As tensões axial (σ) e cisalhante (τ) foram obtidas, respectivamente, a partir da força (F) e torque (M) de reação na superfície engastada do tubo. As relações entre estas quantidades são dadas por

$$\begin{cases} \sigma = \frac{4F}{\pi(\phi_{ext}^2 - \phi_{in}^2)}, \\ \tau = \frac{16M\phi_{ext}}{\pi(\phi_{ext}^4 - \phi_{in}^4)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde ϕ_{ext} e ϕ_{in} representam, respectivamente, o diâmetro externo e interno do tubo. Por sua vez, as deformações axial (ε) e cisalhante (γ) foram obtidas, respectivamente, a partir do deslocamento axial (ΔL) e rotação (θ) da superfície livre do tubo. As relações entre estas quantidades são expressas por

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}, \\ \gamma = \frac{\phi_{ext}\theta}{2L}, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde L representa o comprimento inicial do tubo.

Os resultados apresentados na Fig. 3-4 indicam que as curvas tensão-deformação obtidas são semelhantes entre si, independentemente da malha analisada. Desde modo, por questões de custo computacional, opta-se por utilizar a malha I (Fig. 3-2a) nas simulações realizadas durante a comparação numérico-experimental.

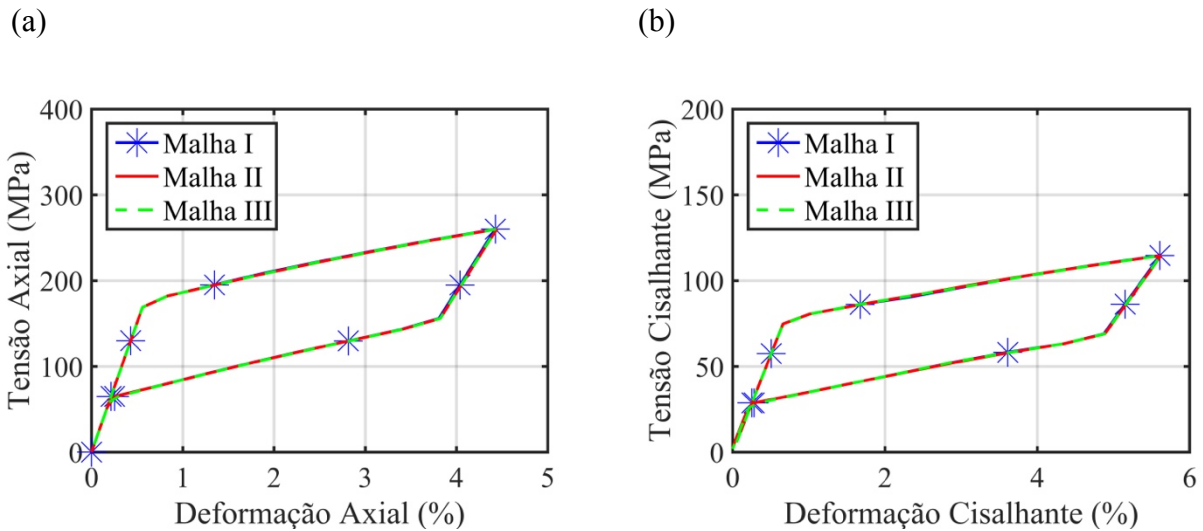


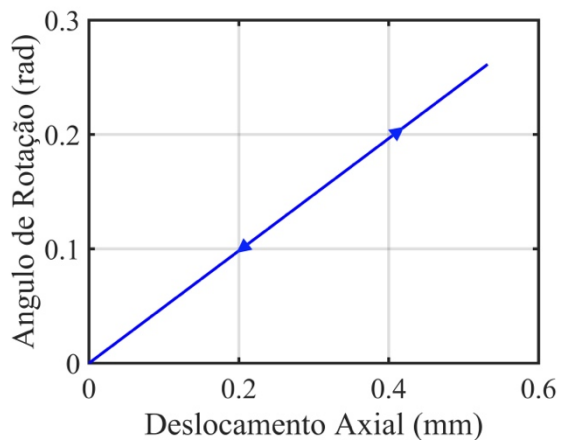
Figura 3-4 Curvas (a) tensão axial vs deformação axial e (b) tensão cisalhante vs deformação cisalhante para diferentes malhas.

3.2 Dados experimentais de Mehrabi et al. (2015)

Os experimentos conduzidos por Mehrabi et al. (2015) foram realizados em tubos de parede fina de Ni-Ti, fornecidos pela *Jonhson Matthey*. Os corpos de prova ensaiados possuem 4,5 mm e 3,9 mm de diâmetro externo e interno, respectivamente, e 14 mm de comprimento (ver Fig. 3-1). O comportamento da liga foi estudado através de ensaios monotônicos de tração/torção combinados. Diversas histórias de carregamento, proporcionais e não-proporcionais, foram impostas ao material sob controle de força/torque ou de deslocamento axial/ângulo de torção (ver Figs. 3-5 e 3-6). As condições de contorno adotadas nos ensaios sob controle de deslocamento axial/ângulo de torção e nos ensaios sob controle de força/torque são apresentadas, respectivamente, nas Figs. 3-7a e 3-7b.

Após o processo de usinagem, as amostras foram termicamente tratadas e tiveram sua resposta mecânica estabilizada. Os ensaios foram realizados no interior de uma câmara térmica, que manteve a temperatura em 23 °C durante a execução de todos os ensaios.

(a)



(b)

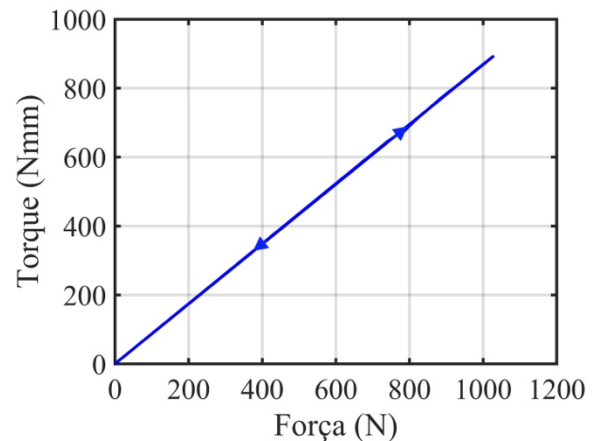
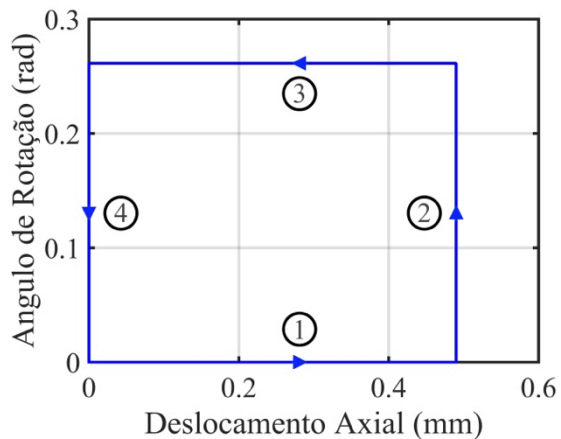


Figura 3-5 História dos carregamentos proporcionais sob: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força impostos nos ensaios de Mehrabi et al. (2015).

(a)



(b)

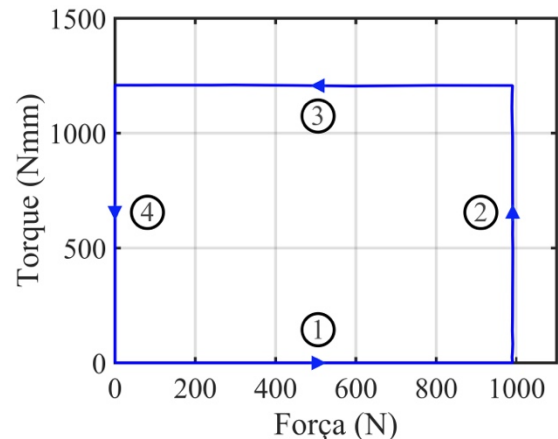


Figura 3-6 História dos carregamentos não-proporcionais sob: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força impostos nos ensaios de Mehrabi et al. (2015).

3.2.1 Determinação dos parâmetros do modelo

Nenhum ensaio de ciclagem térmica foi realizado no estudo apresentado por Mehrabi et al. (2015). Deste modo, os parâmetros do modelo de Souza–Auricchio foram determinados com base no ensaio monotônico de tração apresentado (ver Fig. 3-8a). Para a determinação da temperatura final de formação da martensita, M_f , utilizaram-se os dados produzidos por Sittner et al. (2009) para uma liga de Ni-Ti. Os parâmetros obtidos encontram-se expostos na Tabela 3-1.

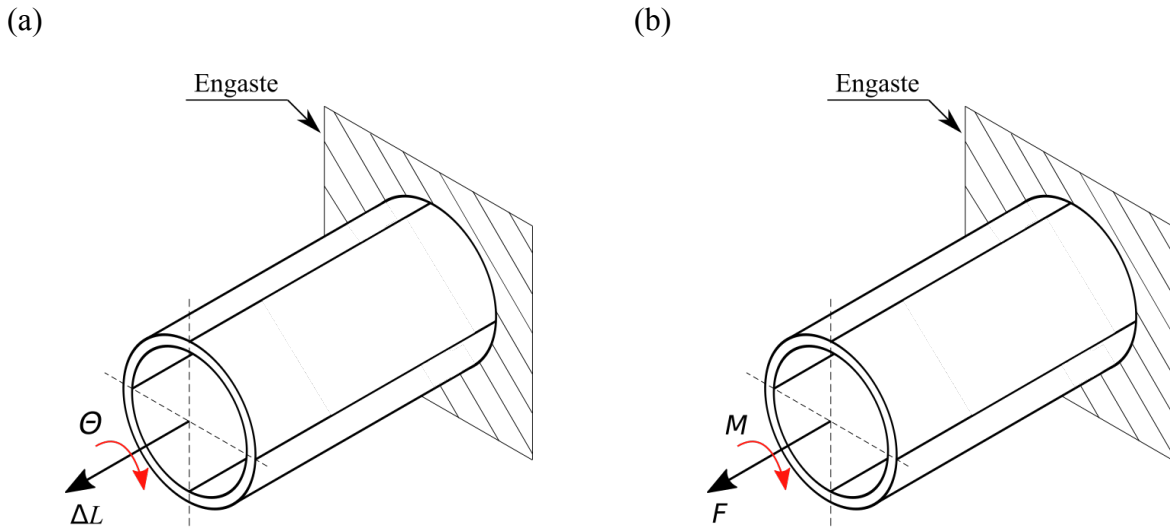


Figura 3-7 Condições de contorno adotadas nos ensaios sob: (a) controle de deslocamento axial/ângulo de rotação e (b) controle de força/torque realizados por Mehrabi et al. (2015).

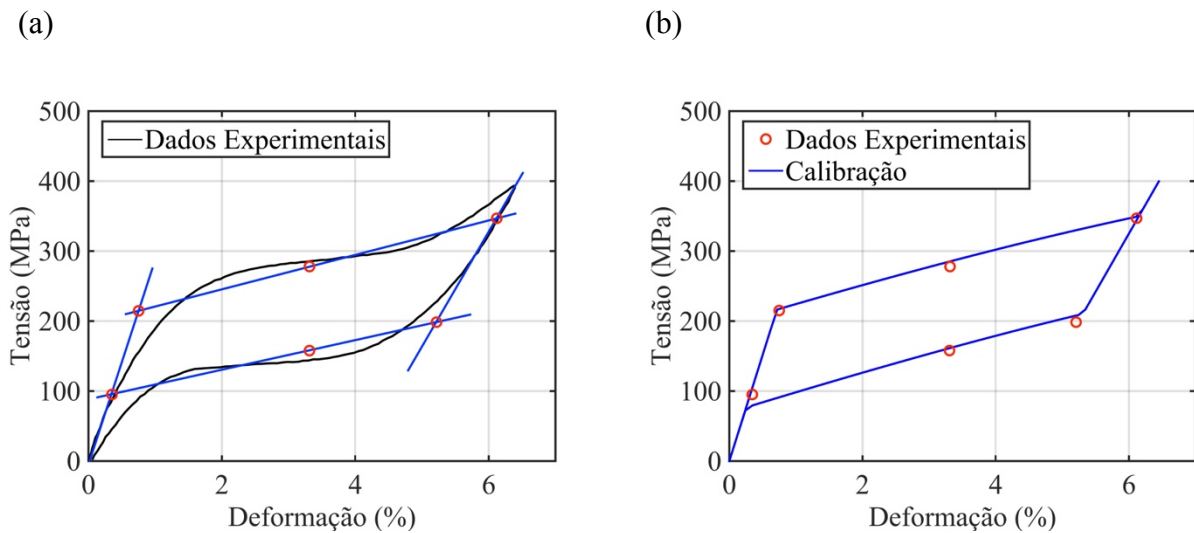


Figura 3-8 Calibração das constantes do modelo para os ensaios de Mehrabi et al. (2015): (a) curva experimental e (b) curva simulada utilizando-se as constantes obtidas.

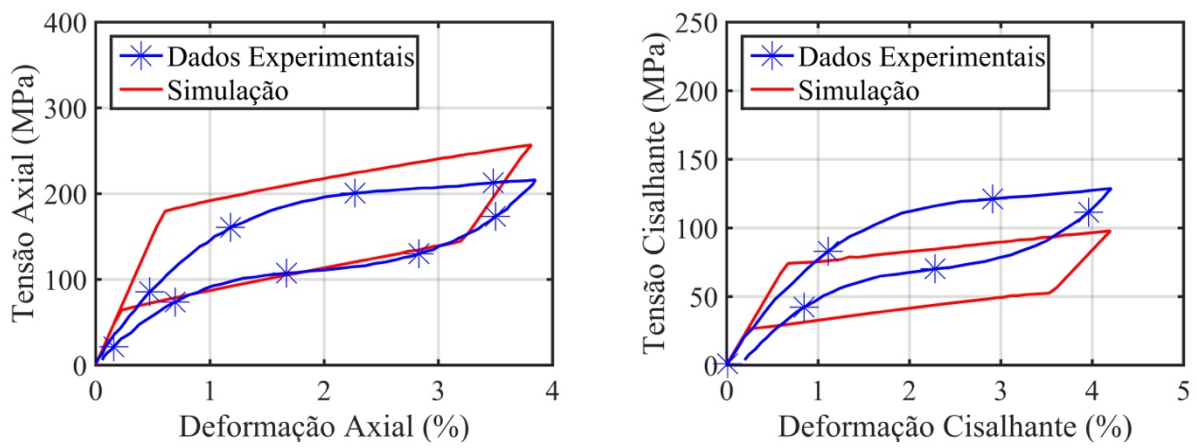
Tabela 3-1 Propriedades da liga de Ni-Ti utilizada por Mehrabi et al. (2015).

Propriedade	Símbolo	Valor
Módulo de Young da austenita	E_A	30.300 MPa
Módulo de Young da martensita	E_M	16.600 MPa
Raio do domínio elástico	R	57 MPa
Máxima deformação de transformação	ε_L	0,0495
Parâmetro de endurecimento	h	2.200 MPa
Parâmetro de escala da temperatura	β	2,1 MPa.K ⁻¹
Temperatura final de formação da martensita	M_f	239,15 K
Parâmetro de Lode	m	0

3.2.2 Resultado das simulações e discussão

A partir dos dados apresentados na Tabela 3-1, obtém-se a modelagem das curvas tensão-deformação axial e cisalhante da liga analisada para as diferentes histórias de carregamento. Os resultados experimentais e os resultados obtidos via simulação numérica são apresentados nas Figs. 3-9 e 3-10. Cabe ressaltar que as tensões e deformações são calculadas com base nas relações apresentadas pelas Eqs. (3.1) e (3.2).

(a)



(b)

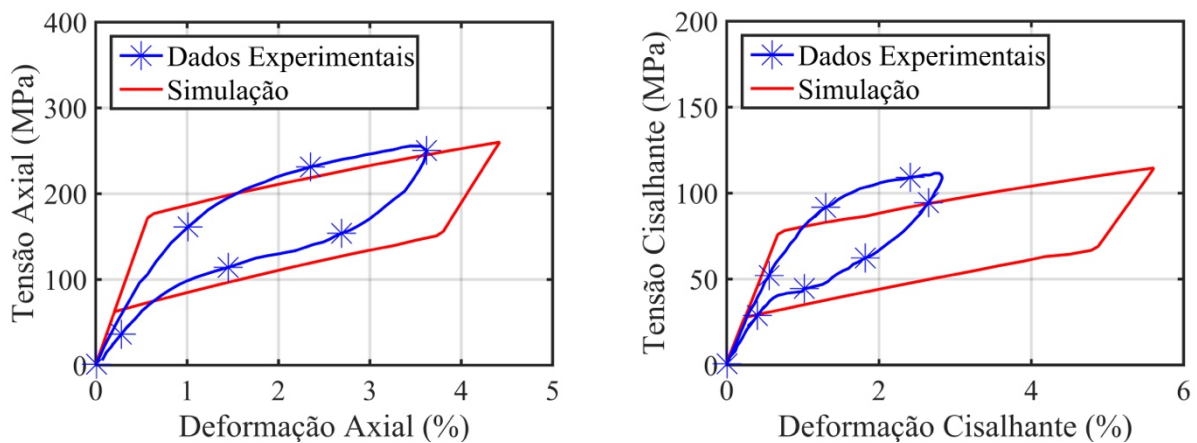


Figura 3-9 Curvas tensão axial vs deformação axial e tensão cisalhante vs deformação cisalhante sob carregamento proporcional: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força.

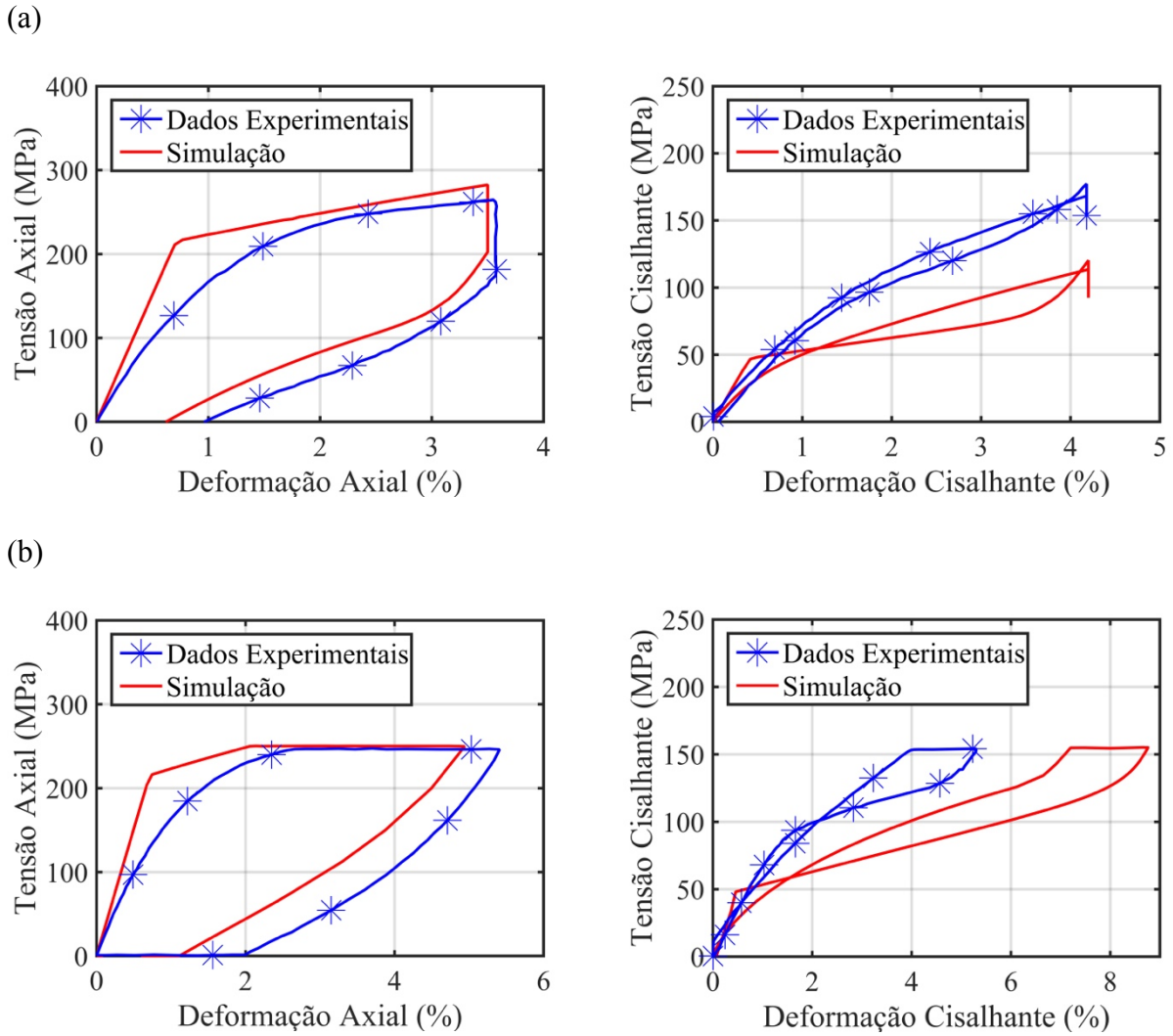


Figura 3-10 Curvas tensão axial vs deformação axial e tensão cisalhante vs deformação cisalhante sob carregamento não-proporcional: (a) controle de deslocamento e (b) controle de força.

Para padronizar a comparação entre as diferentes curvas apresentadas, definem-se quatro índices de desempenho: diferença da tensão axial máxima (σ_{max}); diferença da deformação axial máxima (ϵ_{max}); diferença da tensão cisalhante máxima (τ_{max}) e diferença da deformação cisalhante máxima (γ_{max}). A diferença relativa (I) entre o resultado experimental e o resultado obtido via simulação numérica é calculada por

$$I(\cdot)_{max} = \frac{(\cdot)_{max_{num}} - (\cdot)_{max_{exp}}}{(\cdot)_{max_{exp}}} \quad (3.3)$$

Deste modo, a partir das curvas apresentadas nas Figs. 3-9 e 3-10 e utilizando a Eq. (3.3), obtêm-se os quatro índices de desempenho (ver Tab. 3-2) para a comparação numérico-experimental do estudo de Mehrabi et al. (2015).

Tabela 3-2 Índices de desempenho para os ensaios de Mehrabi et al. (2015).

Carregamento	Controle	$I\sigma_{max}$	$I\varepsilon_{max}$	$I\tau_{max}$	$I\gamma_{max}$
Proporcional	Deslocamento	18,8%	-1,3%	-24,0%	-0,2%
	Força	1,8%	22,1%	2,8%	98,2%
Não-proporcional	Deslocamento	6,8%	-2,2%	-32,1%	0,5%
	Força	1,2%	-8,6%	0,6%	65,5%

Com base nas Figs. 3-9 e 3-10 e nos dados apresentados na Tab. 3-2, pode-se fazer algumas observações com relação aos resultados obtidos:

- O modelo de Souza–Auricchio mostra-se capaz de reproduzir, do ponto de vista qualitativo, as principais características dos laços de histerese das curvas tensão-deformação.
- As predições do modelo aparentam ser influenciadas pela forma de controle adotada nos ensaios. Para o conjunto de dados analisados, as predições do modelo mostraram-se mais exatas quando a forma de controle adotada é o deslocamento. Tomando como exemplo as curvas tensão-deformação cisalhantes obtidas nos ensaios sob carregamento proporcional, observa-se que a diferença da tensão cisalhante máxima no ensaio controlado por deslocamento é de, aproximadamente, -24%. Entretanto, no ensaio controlado por força, a diferença da deformação cisalhante máxima aproxima-se de 98%.
- O modelo descreve o comportamento tensão-deformação axial com maior exatidão, se comparado à predição do comportamento cisalhante. Em uma análise qualitativa, nota-se uma melhor sobreposição entre os laços de histerese experimental e numérico no caso axial.
- Não se pode tirar conclusões com relação à influência do tipo de carregamento (i.e., proporcional ou não-proporcional) na capacidade de predição do modelo de Souza–Auricchio.

3.3 Dados experimentais de Wang et al. (2010)

Os experimentos conduzidos por Wang et al. (2010) foram realizados em tubos de parede fina de Ni-Ti, fornecidos pela *Xi'an Saite Metal Materials Development*. Os corpos de prova utilizados possuem 11,6 mm e 10 mm de diâmetro externo e interno, respectivamente, e 26 mm de comprimento útil (ver Fig. 3-11). Conforme estabelecido na análise de convergência realizada na seção 3.1 deste estudo, a malha contendo 300 elementos é suficiente para discretizar o corpo de prova utilizado nas simulações numéricas. Deste modo, tem-se representado na Fig. 3-12 a malha de elementos finitos utilizada para discretizar o corpo de prova adotado por Wang et al. (2010).

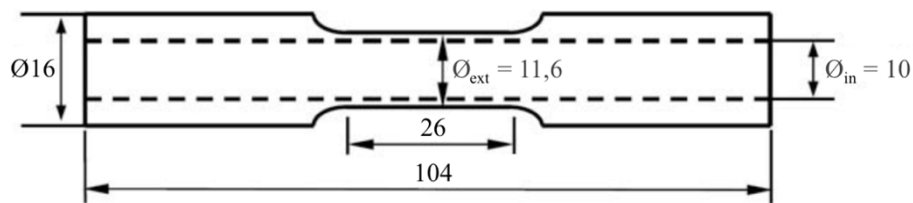
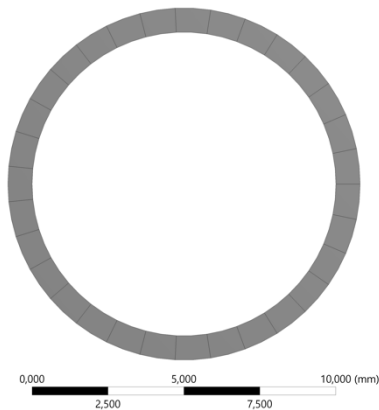


Figura 3-11 Ilustração esquemática do corpo de prova utilizado. Dimensões em mm (adaptado de Wang et al., 2010).

(a)



(b)

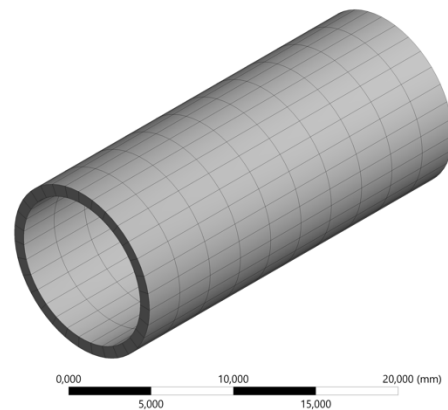


Figura 3-12 Malha de elementos finitos utilizada para discretizar o corpo de prova adotado por Wang et al. (2010): (a) vista frontal e (b) vista isométrica.

O comportamento da liga foi estudado por meio de ensaios de tração/torção combinados. Todos os ensaios realizados foram controlados por deslocamento axial/ângulo de torção. As condições de contorno adotadas encontram-se representadas na Fig. 3-13. Carregamentos proporcionais e não-

proporcionais foram aplicados, de modo que a influência da história de carregamento no comportamento mecânico da liga pudesse ser avaliada. A história dos carregamentos impostos ao material durante os ensaios pode ser expressa por:

$$\begin{cases} \Delta L(t) = L \left[\frac{\varepsilon_{max}}{2} + \frac{\varepsilon_{max}}{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \right], \\ \theta(t) = \frac{2L}{\phi_{ext}} \left[\frac{\gamma_{max}}{2} + \frac{\gamma_{max}}{2} \sin(\omega t - 90^\circ - \Phi) \right], \end{cases} \quad (3.4)$$

onde ω representa a velocidade angular, t representa o pseudotempo e Φ representa o ângulo de fase. Três tipos de carregamento foram selecionados para os ensaios de tração/torção combinados (ver Fig. 3-14), incluindo um carregamento proporcional ($\Phi = 0^\circ$), um carregamento não-proporcional defasado em 45° ($\Phi = 45^\circ$) e um carregamento não-proporcional defasado em 90° ($\Phi = 90^\circ$). As máximas deformações axial e cisalhante foram, respectivamente, iguais a 3% e 6%.

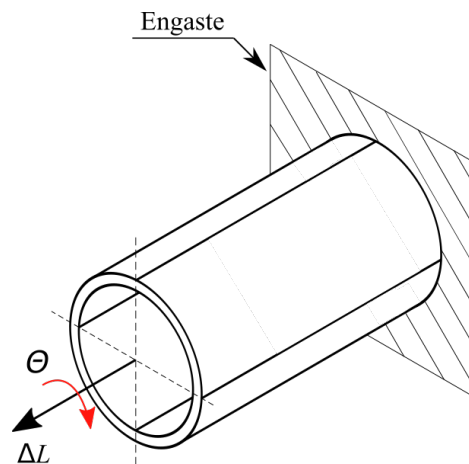


Figura 3-13 Condições de contorno adotadas nos ensaios realizados por Wang et al. (2010).

Antes da realização dos ensaios, as amostras foram submetidas ao processo de recozimento para eliminar a tensão residual e a fase martensítica gerada durante o processo de usinagem. Não houve qualquer tentativa de estabilizar a resposta tensão-deformação das amostras. Todos os ensaios foram realizados a temperatura ambiente de, aproximadamente, 22 °C.

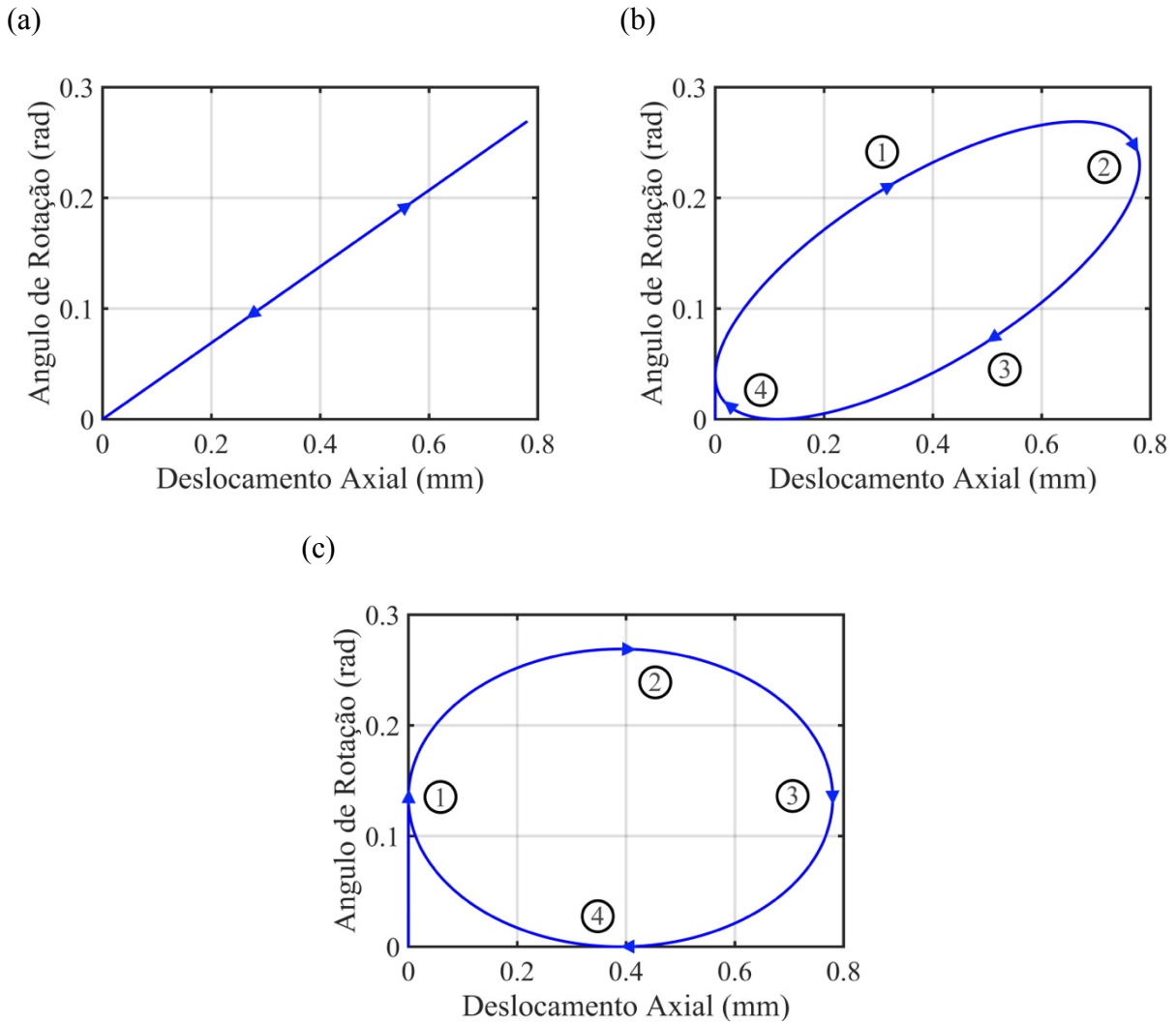


Figura 3-14 História do carregamento (a) proporcional, (b) não-proporcional defasado 45° e (c) não-proporcional defasado 90° imposto nos ensaios realizados por Wang et al. (2010).

3.3.1 Determinação dos parâmetros do modelo

Nenhum ensaio de ciclagem térmica foi realizado no estudo de Wang et al. (2010). Deste modo, os parâmetros do modelo de Souza–Auricchio foram determinados com base no ensaio de tração realizado (ver Fig. 3-15a). Para a determinação da temperatura final de formação da martensita, M_f , utilizaram-se novamente os dados produzidos por Sittner et al. (2009) para uma liga de Ni-Ti. Os parâmetros obtidos encontram-se expostos na Tabela 3-2.

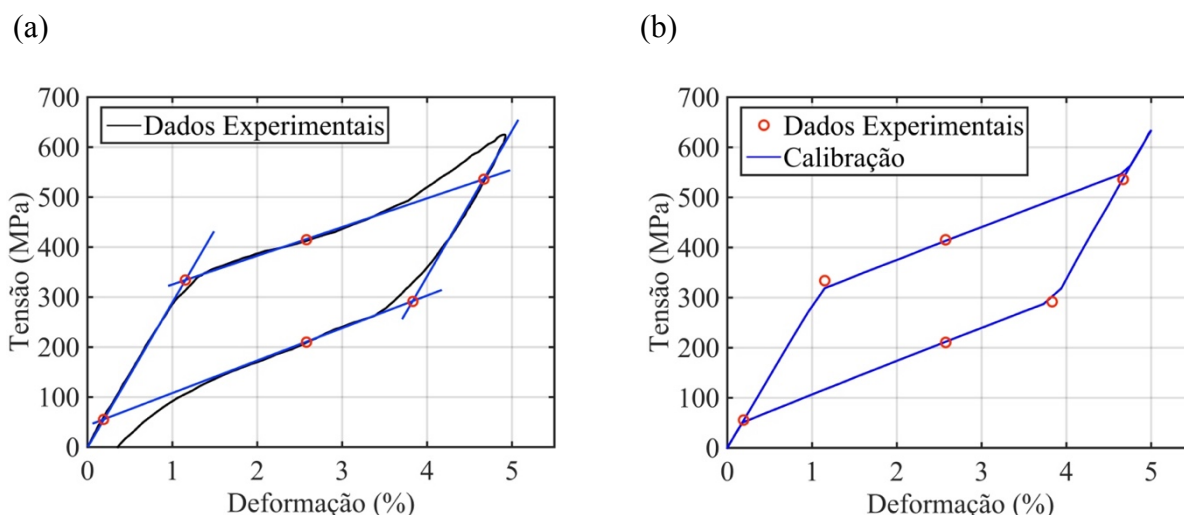


Figura 3-15 Calibração das constantes do modelo para os ensaios de Wang et al. (2010): (a) curva experimental e (b) curva simulada utilizando-se as constantes obtidas.

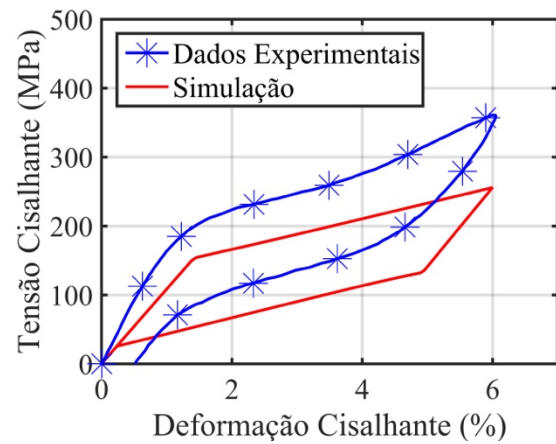
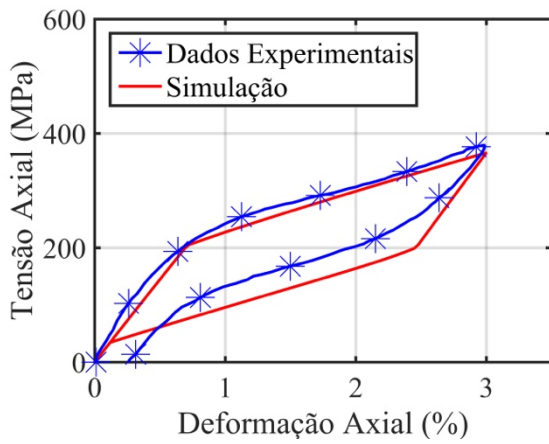
Tabela 3-3 Propriedades da liga de Ni-Ti utilizada por Wang et al. (2010).

Propriedade	Símbolo	Valor
Módulo de Young da austenita	E_A	29.000 MPa
Módulo de Young da martensita	E_M	33.000 MPa
Raio do domínio elástico	R	110 MPa
Máxima deformação de transformação	ε_L	0,035
Parâmetro de endurecimento	h	6.000 MPa
Parâmetro de escala da temperatura	β	2,7 MPaK ⁻¹
Temperatura final de formação da martensita	M_f	239,15 K
Parâmetro de Lode	m	0

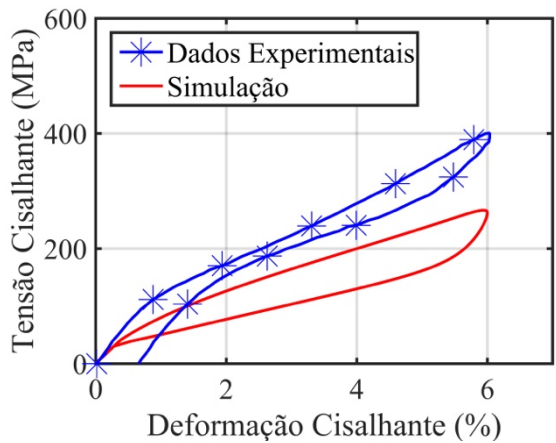
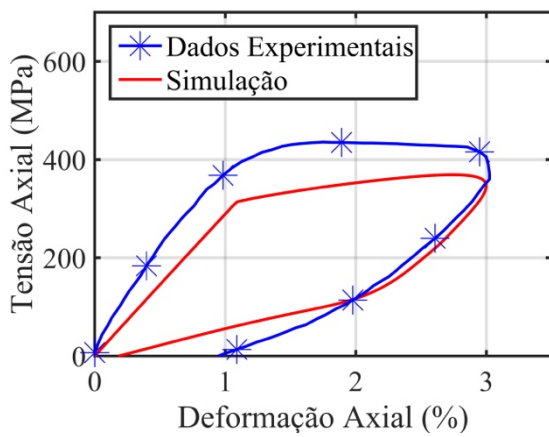
3.3.1 Resultado das simulações e discussão

A partir dos dados apresentados na Tabela 3-3, obtém-se a modelagem das curvas tensão-deformação axial e cisalhante da liga analisada para diferentes histórias de carregamento. Os resultados experimentais e os resultados obtidos via simulação numérica são apresentados na Fig. 3-16. Nota-se que, de maneira similar ao procedimento realizado na seção 3.2.2 deste estudo, os quatro índices de desempenho são determinados (ver Tab. 3-4). Ressalta-se ainda que as tensões e deformações são calculadas com base nas relações apresentadas pelas Eqs. (3.1) e (3.2).

(a)



(b)



(c)

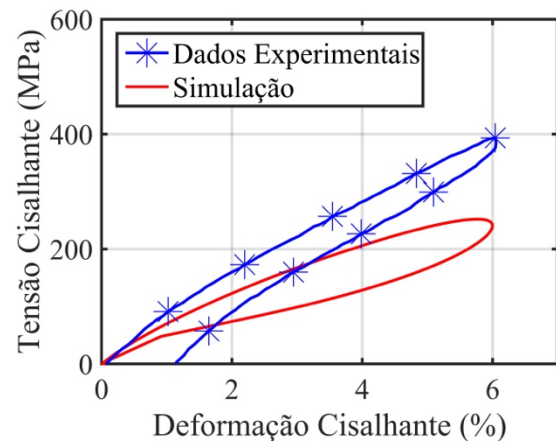
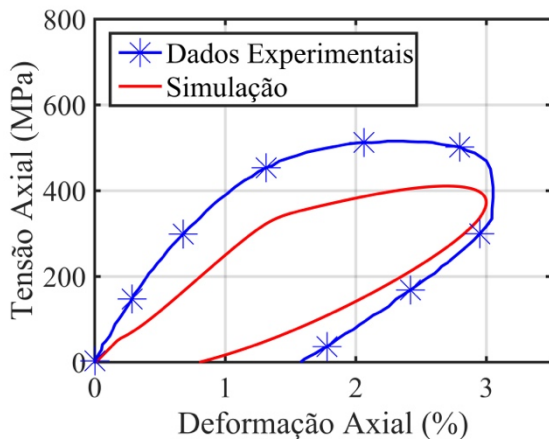


Figura 3-16 Curvas tensão axial vs deformação axial e tensão cisalhante vs deformação cisalhante sob: (a) carregamento proporcional, (b) carregamento não-proporcional defasado 45° e (c) carregamento não-proporcional defasado 90° .

Tabela 3-4 Índices de desempenho para os ensaios de Wang et al. (2010).

Carregamento	$I\sigma_{max}$	$I\varepsilon_{max}$	$I\tau_{max}$	$I\gamma_{max}$
Proporcional	-3,6%	0,4%	-29,1%	-0,9%
Não-proporcional (45°)	-15,3%	-0,8%	-33,5%	-0,6%
Não-proporcional (90°)	-20,3%	-1,7%	-36,0%	-0,9%

A partida da análise das curvas apresentadas na Fig. 3-16 e dos dados apresentados na Tab. 3-4, pode-se fazer algumas observações com relação aos resultados obtidos:

- O comportamento tensão-deformação é subestimado em todas as condições de carregamento. Em média, as máximas tensões axiais previstas pelo modelo são 13% menores do que as observadas experimentalmente. Já no contexto cisalhante, as máximas tensões previstas são, em média, 33% menores do que as observadas experimentalmente.
- As tensões máximas previstas no contexto axial se mostraram mais exatas do que as previstas no contexto cisalhante. Como exemplo, observa-se que no ensaio proporcional a diferença entre as tensões axiais máximas foi de -3,6% enquanto a diferença entre as tensões cisalhantes máximas foi de -29,1%.
- Os resultados indicam que a capacidade de predição do modelo de Souza-Auricchio pode ser influenciada pelo tipo de carregamento aplicado (i.e., proporcional ou não-proporcional). Nota-se, por exemplo, que a diferença da máxima tensão axial ($I\sigma_{max}$) no caso proporcional é de, aproximadamente, -4%. Enquanto isso, no caso não-proporcional (90°), esta diferença ultrapassa os -20%.

4 Conclusão

Este trabalho apresentou uma avaliação do modelo constitutivo de Souza–Auricchio para ligas com memória de forma. O modelo, disponível no *software* comercial de elementos finitos *ANSYS*[®], foi avaliado por meio de comparação com dados experimentais axiais-torcionais disponíveis na literatura. Histórias de carregamento proporcionais e não-proporcionais foram simuladas, tanto em controle de deslocamento axial/ângulo de torção quanto em controle de força/torque. Em ambos os casos, utilizaram-se corpos de prova de Ni-Ti no formato de tubo de parede fina. A discretização dos corpos de prova no aplicativo *ANSYS*[®] foi feita por meio de elementos hexaédricos de 20 nós, capazes de simular grandes deformações.

As comparações realizadas indicam que as predições do modelo de Souza–Auricchio podem ser influenciadas pela forma de controle adotada nos ensaios. Na comparação numérico-experimental feita a partir dos dados produzidos por Mehrabi et al. (2015), percebe-se que as predições do modelo são mais exatas quando os ensaios são controlados por deslocamento axial/ângulo de torção.

As comparações realizadas apontam também que as predições do modelo podem ser influenciadas pela história de carregamento imposta nos ensaios. Na comparação feita a partir dos dados produzidos por Wang et al. (2010), nota-se que as diferenças da tensão axial máxima e da tensão cisalhante máxima são até 5 vezes maiores para os casos não-proporcionais.

Por fim, os resultados obtidos indicam que o modelo de Souza–Auricchio é capaz de reproduzir, do ponto de vista qualitativo, as principais características dos laços de histerese das curvas tensão-deformação. Entretanto, a correlação quantitativa com os dados experimentais não é exata, especialmente ao predizer o comportamento cisalhante das LMF. Para o conjunto de dados analisados, a diferença média entre as tensões e deformações máximas previstas pelo modelo e as observadas experimentalmente é de, aproximadamente, 30%.

Referências bibliográficas

Ansys (2015). Ansys Mechanical APDL Element Reference. Canonsburg, PA, ANSYS, Inc.

ASTM E3097-17 (2017). Standard Test Method for Mechanical Uniaxial Pre-strain and Thermal Free Recovery of Shape Memory Alloys, ASTM International, West Conshohocken, PA.

ASTM F2516-18 (2018). Standard Test Method for Tension Testing of Nickel-Titanium Superelastic Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA.

Auricchio, F., & Petrini, L. (2004). A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(6), 807-836.

Auricchio, F., & Sacco, E. (1997). A one-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(6), 1101-1114.

Auricchio, F., Coda, A., Reali, A., & Urbano, M. (2009a). SMA numerical modeling versus experimental results: parameter identification and model prediction capabilities. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 18(5-6), 649-654.

Auricchio, F., Morganti, S., & Reali, A. (2009b). SMA numerical modeling versus experimental results. In *ESOMAT 2009-8th European Symposium on Martensitic Transformations* (p. 08004). EDP Sciences.

Auricchio, F., Scalet, G., & Urbano, M. (2014). A numerical/experimental study of nitinol actuator springs. *Journal of materials engineering and performance*, 23(7), 2420-2428.

Bertram, A. (1983). Thermo-mechanical constitutive equations for the description of shape memory effects in alloys. *Nuclear engineering and design*, 74(2), 173-182.

Bouvet, C., Calloch, S., & Lexcelent, C. (2004). A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and nonproportional loadings. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(1), 37-61.

Buehler, W. J., Gilfrich, J. V., & Wiley, R. C. (1963). Effect of low-temperature phase changes on the mechanical properties of alloys near composition TiNi. *Journal of applied physics*, 34(5), 1475-1477.

Chaboche, J. L., & Lemaitre, J. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge: Cambridge University Press.

Chang, L. C., & Read, T. A. (1951). Behavior of the elastic properties of AuCd. *Trans Met Soc AIME*, 191, 47.

de Souza Neto, E. A., Peric, D., & Owen, D. R. (2011). *Computational methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons.

- Delaey, L., Krishnan, R. V., Tas, H., & Warlimont, H. (1974). Thermoelasticity, pseudoelasticity and the memory effects associated with martensitic transformations. *Journal of Materials Science*, 9(9), 1521-1535.
- Duerig, T. W., Melton, K. N., & Stöckel, D. (1990). *Engineering aspects of shape memory alloys*. Butterworth-Heinemann, London.
- Dunne, F., & Petrinic, N. (2005). *Introduction to computational plasticity*. Oxford University Press on Demand.
- Funakubo, H., & Kennedy, J. B. (1987). *Shape memory alloys*. Gordon and Breach, xii+ 275, 15 x 22 cm, Illustrated.
- Gao, X., & Brinson, L. C. (2002). A simplified multivariant SMA model based on invariant plane nature of martensitic transformation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 13(12), 795-810.
- Grabe, C., & Bruhns, O. T. (2008). Tension/torsion tests of pseudoelastic, polycrystalline NiTi shape memory alloys under temperature control. *Materials Science and Engineering: A*, 481, 109-113.
- Halphen, B., & Nguyen, Q. S. (1975). Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de mécanique*, 14, 39-63.
- Hartl, D. J., Mooney, J. T., Lagoudas, D. C., Calkins, F. T., & Mabe, J. H. (2009). Use of a Ni60Ti shape memory alloy for active jet engine chevron application: II. Experimentally validated numerical analysis. *Smart Materials and Structures*, 19(1), 015021.
- Imaoka, S. (2011). Shape memory alloy – superelastic vs. shape memory effect models. ANSYS, Inc.
- Jackson, C. M., Wagner, H. J., & Wasilewski, R. J. (1972). The alloy with a memory, 55-Nitinol: Its physical metallurgy, properties, and applications.
- Karbaschi, Z. (2012). Torsional behavior of nitinol: Modeling and experimental evaluation.
- Khodaei, H., & Terriault, P. (2018). Experimental validation of shape memory material model implemented in commercial finite element software under multiaxial loading. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1045389X18781047.
- Krishnan, R. V., Delaey, L., Tas, H., & Warlimont, H. (1974). Thermoplasticity, pseudoelasticity and the memory effects associated with martensitic transformations. *Journal of Materials Science*, 9(9), 1536-1544.
- Kurdjumov, G. V., & Khandros, L. G. (1949). First reports of the thermoelastic behaviour of the martensitic phase of Au-Cd alloys. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 66, 211-213.
- Lieberman, D. S., Schmerling, M. A., Karz, R. S., & Perkins, J. (1975). *Shape memory effects in alloys*. Plenum, Press, New York, 203.

- Lim, T. J., & McDowell, D. L. (1999). Mechanical behavior of an Ni-Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 121(1), 9-18.
- Maugin, G. A. (1992). *The thermomechanics of plasticity and fracture* (Vol. 7). Cambridge University Press.
- McNaney, J. M., Imbeni, V., Jung, Y., Papadopoulos, P., & Ritchie, R. O. (2003). An experimental study of the superelastic effect in a shape-memory Nitinol alloy under biaxial loading. *Mechanics of Materials*, 35(10), 969-986.
- Mehrabi, R., Andani, M. T., Elahinia, M., & Kadkhodaei, M. (2014). Anisotropic behavior of superelastic NiTi shape memory alloys; an experimental investigation and constitutive modeling. *Mechanics of Materials*, 77, 110-124.
- Mehrabi, R., Andani, M. T., Kadkhodaei, M., & Elahinia, M. (2015). Experimental study of NiTi thin-walled tubes under uniaxial tension, torsion, proportional and non-proportional loadings. *Experimental Mechanics*, 55(6), 1151-1164.
- Mirzaeifar, R., DesRoches, R., Yavari, A., & Gall, K. (2013). A micromechanical analysis of the coupled thermomechanical superelastic response of textured and untextured polycrystalline NiTi shape memory alloys. *Acta Materialia*, 61(12), 4542-4558.
- Miyazaki, S. (1998). Medical and dental applications of shape memory alloys. *Shape memory materials*, 12, 267-281.
- Ölander, A. (1932). An electrochemical investigation of solid cadmium-gold alloys. *Journal of the American Chemical Society*, 54(10), 3819-3833.
- Orgeas, L., & Favier, D. (1995). Non-symmetric tension-compression behaviour of NiTi alloy. *Journal de physique IV*, 5(C8), C8-605.
- Otsuka, K., & Wayman, C. M. (Eds.). (1999). *Shape memory materials*. Cambridge university press.
- Paine, J., & Rogers, C. (1995). High velocity impact response of composites with surface bonded nitinol-SMA hybrid layers. In *36th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* (p. 1409).
- Patoor, E., Eberhardt, A., & Berveiller, M. (1989). Thermomechanical behavior of shape memory alloys. In *European Symposium on Martensitic Transformations* (pp. 133-140). EDP Sciences.
- Qidwai, M. A., & Lagoudas, D. C. (2000). On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material. *International journal of plasticity*, 16(10-11), 1309-1343.
- Raniecki, B., & LExcellent, C. (1998). Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 17(2), 185-205.
- Rogueda, C., LExcellent, C., & Bocher, L. (1996). Experimental study of pseudoelastic behaviour of a Cu Zn Al polycrystalline shape memory alloy under tension-torsion proportional and non-proportional loading tests. *Archives of Mechanics*, 48(6), 1025-1047.

- Shaw, J. A., & Kyriakides, S. (1995). Thermomechanical aspects of NiTi. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(8), 1243-1281.
- Sittner, P., Hara, Y., & Tokuda, M. (1995). Experimental study on the thermoelastic martensitic transformation in shape memory alloy polycrystal induced by combined external forces. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 26(11), 2923-2935.
- Sittner, P., Heller, L., Pilch, J., Sedlak, P., Frost, M., Chemisky, Y., ... & Auricchio, F. (2009). Roundrobin SMA modeling. In *ESOMAT 2009-8th European Symposium on Martensitic Transformations* (p. 08001). EDP Sciences.
- Sittner, P., Takakura, M., Hara, Y., & Tokuda, M. (1996). On transformation pathways of general stress controlled thermoelastic martensitic transformation in shape memory alloys. *Le Journal de Physique IV*, 6(C1), C1-357.
- Souza, A. C., Mamiya, E. N., & Zouain, N. (1998). Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 17(5), 789-806.
- Stoeckel, D. (1990). Shape memory actuators for automotive applications. *Materials & Design*, v. 11, n. 6, p. 302-307.
- Sun, Q. P., & Hwang, K. C. (1993). Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycrystalline shape memory alloys—I. Derivation of general relations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(1), 1-17.
- Tanaka, K., Nishimura, F., Hayashi, T., Tobushi, H., & LExcellent, C. (1995). Phenomenological analysis on subloops and cyclic behavior in shape memory alloys under mechanical and/or thermal loads. *Mechanics of Materials*, 19(4), 281-292.
- Thamburaja, P., & Anand, L. (2002). Superelastic behavior in tension–torsion of an initially-textured Ti–Ni shape-memory alloy. *International Journal of Plasticity*, 18(11), 1607-1617.
- Tokuda, M. T. M. S. P., Ye, M., Takakura, M., & Sittner, P. (1999). Thermomechanical behavior of shape memory alloy under complex loading conditions. *International journal of Plasticity*, 15(2), 223-239.
- Tokuda, M., Sittner, P., Takakura, M., & Haze, M. (2002). Multi-Axial Constitutive Equations of Polycrystalline Shape Memory Alloy. *JSME International Journal Series A Solid Mechanics and Material Engineering*, 45(2), 276-281.
- Tokuda, M., Ye, M., Takakura, M., & Sittner, P. (1998). Calculation of mechanical behaviors of shape memory alloy under multi-axial loading conditions. *International journal of mechanical sciences*, 40(2-3), 227-235.
- Van Humbeeck, J (1999). Non-medical applications of shape memory alloys. *Materials Science and Engineering A*, 273-275: 134-148.
- Wang, X. M., Wang, Y. F., Lu, Z. Z., Deng, C. H., & Yue, Z. F. (2010). An experimental study of the superelastic behavior in NiTi shape memory alloys under biaxial proportional and non-proportional cyclic loadings. *Mechanics of Materials*, 42(3), 365-373.

Wang, Y. F., Yue, Z. F., & Wang, J. (2007). Experimental and numerical study of the superelastic behaviour on NiTi thin-walled tube under biaxial loading. *Computational Materials Science*, 40(2), 246-254.