

---

# FUNÇÃO ENERGIA GENERALIZADA DE CONTROLE PARA ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

**Flávio H.J.R. Silva\***

fhsilva@unb.br

**Luis F.C. Alberto<sup>‡</sup>**

luis@sel.eesc.usp.br

**Renato B.L. Guedes<sup>†</sup>**

rbguedes@aneel.gov.br

**Newton G. Bretas<sup>‡</sup>**

ngbretas@sel.eesc.usp.br

\*Universidade de Brasília (UnB) - Faculdade do Gama (FGA), Gama, DF, Brasil

<sup>†</sup>ANEEL - Agência Nacional de Energia Elétrica, Brasília, DF, Brasil

<sup>‡</sup>Departamento de Engenharia Elétrica  
Escola de Engenharia de São Carlos - USP  
São Carlos, SP, Brasil

---

## ABSTRACT

In this paper, the control Lyapunov function (CLF) theory is extended in two main directions. In the first direction, the concept of control energy function (CEF) is proposed not only to design stabilizing feedback control laws but also to provide an estimate of the stability region of the closed-loop-system. The CLF guarantees local stability of the closed-loop-system but usually cannot provide optimal estimates of its stability region. The CEF concept is more restrict than the CLF concept. Beyond the guarantee of local stability, the CEF provides global information about limit sets and optimal estimates of stability region. The second direction is related to the fact that, in general, it is difficult to find a CLF or a CEF for many nonlinear systems. In order to overcome this problem and apply the concept of CEF for a larger class of systems, the concept of generalized control energy function (GCEF) is proposed in this paper. The GCEF allows the design of nonlinear controllers even when the derivative of the energy function is positive in some bounded regions of the state space.

**KEYWORDS:** control Lyapunov function, energy function,

stabilization, nonlinear systems.

## RESUMO

Neste trabalho, o conceito de função de Lyapunov de controle é estendido em duas direções principais. Na primeira direção, o conceito de função energia de controle (FEC) é proposto com o objetivo de não somente projetar leis de controle estabilizantes para sistemas não lineares mas também com o objetivo de fornecer uma estimativa da região de estabilidade do sistema em malha fechada. A FLC garante estabilidade local de um certo ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada, mas usualmente não fornece estimativas ótimas da região de estabilidade. O conceito de FEC é mais exigente que o conceito de FLC. Além de garantir estabilidade local do equilíbrio, a FEC fornece informações globais a respeito dos conjuntos limites e estimativas ótimas das regiões de estabilidade. A segunda direção está relacionada com o fato de que, em geral, é difícil encontrar FLC ou FEC para muitos sistemas não lineares. De forma a minimizar este problema e aplicar o conceito de CEF em uma classe maior de sistemas, propõe-se neste artigo o conceito de função energia generalizada de controle (FEGC). A FEGC permite o projeto de controladores mesmo quando a derivada da função energia é positiva em algumas regiões limitadas do

Artigo submetido em 14/06/2007 (Id.: 00806)

Revisado em 15/01/2008, 30/07/2008, 01/11/2008, 12/02/2009

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Takashi Yoneyama

espaço de estados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Função de Lyapunov de controle, função energia, estabilização, sistemas não lineares.

## 1 INTRODUÇÃO

Há anos, a teoria de Lyapunov vem sendo utilizada para análise de estabilidade de sistemas não lineares. Com o passar dos anos, alguns pesquisadores perceberam que as funções de Lyapunov poderiam ser úteis para o projeto de leis de controle estabilizantes em sistemas não lineares. Como resultado desta observação, no início da década de 80, o conceito de função de Lyapunov de controle (FLC) foi introduzido (Jurđjevic and Quinn, 1978; Artstein, 1983; Sontag, 1983; Sontag, 1989; Sontag, 1990; Clarke et al., 2000). A FLC permite, para uma classe de sistemas não lineares, obter leis de realimentação de controle que garantam a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Entretanto, a FLC usualmente não permite obter estimativas ótimas da região de estabilidade do sistema em malha fechada. O conhecimento da região de estabilidade é importante, já que a maioria dos sistemas físicos não lineares não apresenta um ponto de equilíbrio assintoticamente globalmente estável.

Com o objetivo de não somente encontrar uma lei de realimentação de controle, mas também de estimar a região de estabilidade dos conjuntos assintoticamente estáveis, propõe-se a *função energia de controle* (FEC). Funções energia trazem informações globais a respeito dos conjuntos limites e podem ser utilizadas para se obter estimativas ótimas da região de estabilidade. Para isto, explora-se o conceito de função energia e a caracterização da região de estabilidade propostos em (Chiang et al., 1988).

O maior obstáculo na utilização de FLC ou de FEC para o projeto de controladores em sistemas não lineares é encontrar uma função de Lyapunov ou uma função Energia para o sistema em questão. Com o objetivo de minimizar este obstáculo, propõe-se neste artigo o conceito de *função energia generalizada de controle* (FEGC). Este conceito é inspirado na extensão do princípio de invariância de LaSalle apresentada em (Rodrigues et al., 2000; Rodrigues et al., 2001). A generalização consiste em permitir que a derivada da FEGC possua regiões limitadas, no espaço de estados, onde a derivada possa ser positiva. Assim como a FEC, a FEGC permite obter leis de realimentação para estabilização de sistemas não lineares e também estimar a região de estabilidade do atrator. A FEGC possui a FEC como caso particular e portanto uma classe maior de sistemas não lineares pode ser tratada com esta teoria. Em algumas situações particulares, explorando-se as propriedades da FEGC e particularidades do campo vetorial, demonstra-se estabilidade assintótica de equilíbrios do sistema em malha fechada.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a seção 2 contém definições e resultados preliminares da teoria de sistemas dinâmicos não lineares. Ainda na seção 2, o conceito de prolongamento de um conjunto, inicialmente proposto por LaSalle, assim como a relação deste conceito com estabilidade e invariância são introduzidos. Na seção 3, o conceito de função de Lyapunov de controle é revisto e um novo resultado (teorema 3.2) que explora a FLC para obter estimativas da região de estabilidade do sistema em malha fechada é demonstrado. Propõe-se, na seção 4, o conceito de função energia de controle, e novos resultados (teoremas 4.2 e 4.3) que exploram a existência da função energia para obter informações a respeito dos conjuntos limites e estimativas da região de estabilidade são demonstrados. A seção 5 contém a principal contribuição deste trabalho. Nesta seção os conceitos de função energia generalizada e função energia generalizada de controle são propostos. Estudam-se as implicações da existência de funções energia generalizadas no comportamento e localização dos conjuntos limites assim como a obtenção de estimativas da região de estabilidade de conjuntos atrativos. Na seção 6, dois exemplos ilustram os conceitos e os resultados propostos e as conclusões encerram o artigo na seção 7.

## 2 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

Nesta seção, apresenta-se uma breve revisão de algumas definições e resultados relacionados a sistemas autônomos não lineares que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho. Considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^1$ , condição esta suficiente para garantir existência e unicidade das soluções de (1). A solução de (1) iniciando em  $x_o$  no instante de tempo  $t = 0$  é denotada por  $\varphi(\cdot, x_o): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . O ponto  $x^*$  é um ponto de equilíbrio de (1) se  $f(x^*) = 0$ . Neste trabalho, considere a seguinte suposição sobre os pontos de equilíbrio.

**(S1)** Os pontos de equilíbrio de (1) são isolados.

O conceito de invariância tem um papel fundamental neste trabalho. Um conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  é positivamente invariante (negativamente invariante) com relação a (1) se, para todo  $x_o \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi(t, x_o) \in \mathcal{A}$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  ( $t \in \mathbb{R}_-$ ). Um conjunto  $\mathcal{A}$  é invariante com relação a (1) se  $\mathcal{A}$  é positivamente e negativamente invariante.

Um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é um ponto limite de  $\varphi(t, x_o)$ , ou simplesmente de  $x_o$ , se existir uma sequência  $\{t_n\} \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  tal que  $\{\varphi(t_n, x_o)\} \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . O con-

junto de todos os pontos limites de  $x_o$  é denotado por  $\omega(x_o)$ . Se a solução  $\varphi(t, x_o)$  for limitada para  $t \geq 0$ , então, além de fechado e invariante, o conjunto  $\omega(x_o)$  é não vazio, compacto, conexo e é o menor conjunto fechado do qual a solução  $\varphi(t, x_o)$  se aproxima quando  $t \rightarrow \infty$ , {ver pág. 29 de (LaSalle, 1976) para maiores detalhes}.

Um conjunto fechado e invariante  $H$  é atrativo se existir vizinhança  $U$  de  $H$  tal que  $x_o \in U$  implica em  $d(\varphi(t, x_o), H) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Conjuntos atrativos de sistemas não lineares não são em geral globalmente atrativos. A região de estabilidade  $A(H)$  de um certo conjunto atrativo  $H$  é o conjunto de condições iniciais cujas trajetórias tendem para o conjunto atrativo quando  $t \rightarrow \infty$ , isto é,  $A(H) := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(t, x) \rightarrow H \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$ . A região de estabilidade de um conjunto atrativo conexo é um conjunto aberto, conexo e invariante. A fronteira topológica de  $A(H)$  é um conjunto fechado e invariante e é denotada por  $\partial A(H)$ .

Um conjunto compacto  $H$  é estável se, dada uma vizinhança  $U$  de  $H$ , existe vizinhança  $W$  de  $H$  tal que  $x_o \in W$  implica  $\varphi(t, x_o) \in U$  para todo  $t \geq 0$ . Conjuntos atrativos e estáveis são ditos assintoticamente estáveis.

Em algumas situações, encontramos conjuntos invariantes e até mesmo atrativos que não são necessariamente estáveis. O conceito de prolongamento positivo de um conjunto  $H$ , introduzido por LaSalle (LaSalle, 1976), recupera, num certo sentido, o conjunto de pontos que são “visitados” por órbitas que se iniciam suficientemente próximas de  $H$ .

**Definição 2.1 (Prolongamento)**(LaSalle, 1976) Um ponto  $z \in \mathbb{R}^n$  pertence ao prolongamento positivo  $\hat{H}$  do conjunto  $H$  se existir seqüência  $x_n$  com  $x_n \rightarrow y \in H$  e seqüência  $t_n \in [0, \tau_{max}(x_n))$ , onde  $\tau_{max}(x_n)$  é o máximo tempo no qual a solução  $\varphi(t, x_n)$  está definida, tal que  $\varphi(t_n, x_n) \rightarrow z$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

É óbvio que  $H \subset \hat{H}$ . De fato, se  $z \in H$ , podemos escolher uma seqüência qualquer  $x_n \rightarrow y = z$  e  $t_n = 0$  para todo  $n$ . Portanto, pela continuidade das soluções com relação às condições iniciais,  $\varphi(0, x_n) \rightarrow z$  quando  $n \rightarrow \infty$  e portanto  $z \in \hat{H}$ . Os próximos resultados relacionam o conceito de prolongamento com estabilidade e invariância. Eles serão utilizados nas próximas seções para mostrar a existência de conjuntos assintoticamente estáveis. O próximo teorema oferece uma maneira de verificar se um conjunto invariante é estável via análise de seu prolongamento.

**Teorema 2.1 (Prolongamento e Estabilidade)**(LaSalle, 1976) Se  $H$  é um conjunto compacto positivamente invariante, então  $H$  é estável se e só se  $\hat{H} = H$ .

Embora o teorema 2.1 tenha sido proposto por LaSalle, a demonstração do resultado anterior não foi incluída em (LaSalle, 1976). A seguir apresenta-se uma demonstração para este teorema.

**Demonstração:** Suponha que  $z \in \hat{H}$  e  $z \notin H$ . Como  $H$  é um conjunto compacto e portanto fechado, existe número real  $\gamma$  tal que  $d(z, H) > \gamma > 0$ . Portanto, podemos escolher vizinhança  $U$  de  $H$  como sendo  $U := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, H) \leq \gamma/2\}$ . Por outro lado, como  $z \in \hat{H}$ , existem seqüências  $x_n \rightarrow y \in H$  e  $t_n \in [0, \tau_{max}(x_n))$  tal que  $\varphi(t_n, x_n) \rightarrow z$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $d(x_n, y) \leq \varepsilon$  e  $d(\varphi(t_n, x_n), z) \leq \varepsilon$  para todo  $n > N$ . Como  $\varepsilon$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, para qualquer vizinhança  $W$  de  $H$ , podemos encontrar um ponto  $x_n \in W$  tal que  $\varphi(t_n, x_n) \notin U$ . Logo  $H$  não é estável. Provamos portanto que se  $H$  é estável, então para todo  $z \in \hat{H}$ ,  $z \in H$ . Em outras palavras, se  $H$  é estável, então  $\hat{H} \subset H$ . Como a inclusão  $H \subset \hat{H}$  é sempre verdadeira, tem-se que  $H$  estável implica  $\hat{H} = H$ .

Suponha que  $H$  não seja estável. Então, para alguma vizinhança limitada  $U$  de  $H$  não existe vizinhança  $W$  de  $H$  tal que  $x \in W$  implica  $\varphi(t, x) \in U$  para todo  $t \geq 0$ . Isto significa que arbitrariamente próximo de  $H$  existe  $x_i$  tal que  $\varphi(t, x_i) \notin U$  para algum  $t > 0$ . Em particular, podemos escolher uma seqüência  $x_i \rightarrow y \in H$  e  $t_i$  como sendo  $\inf_{t \geq 0} \{t : \varphi(t, x_i) \notin U\}$ . Então, a seqüência  $\varphi(t_i, x_i)$  é, por construção, limitada e portanto, possui subsequência convergente, isto é,  $\varphi(t_{i_n}, x_{i_n}) \rightarrow z$ . Por definição,  $z \in \hat{H}$  e  $z \notin H$ . Como consequência, se  $\hat{H} \subset H$ , então  $H$  é estável. Como a inclusão  $H \subset \hat{H}$  é sempre verdadeira, tem-se que  $\hat{H} = H$  implica  $H$  estável. ■

O próximo teorema oferece condições para garantir que o prolongamento de um conjunto invariante também é invariante.

**Teorema 2.2 (Prolongamento e Invariância)** (LaSalle, 1976) Seja  $H$  um conjunto fechado e invariante contido em um conjunto aberto  $G$  limitado e positivamente invariante, então  $\hat{H}$  é invariante.

O teorema 2.2 também foi proposto por LaSalle, mas a demonstração não foi incluída em (LaSalle, 1976). A seguir apresenta-se uma demonstração para este teorema.

**Demonstração:** Seja  $U$  uma vizinhança de  $H$  totalmente contida em  $G$ , ou seja,  $H \subset U \subset G$ . Como  $\bar{G}$  é positivamente invariante, então  $\hat{H} \subset \bar{G}$ . Seja  $z \in \hat{H}$ . Vamos mostrar que  $\varphi(t, z) \in \hat{H}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $z \in \hat{H}$ , existem seqüências  $x_n \rightarrow y \in H$  e  $t_n \in [0, \tau_{max}(x_n))$  tal que  $\varphi(t_n, x_n) \rightarrow z$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para  $n$  suficientemente grande,  $x_n \in G$ . Como  $G$  é positivamente invariante,

ante, o intervalo maximal de definição da solução  $\varphi(t, x_n)$  contém o intervalo  $(0, +\infty)$ . Em particular  $\tau_{max}(x_n) = +\infty$ . Da continuidade das soluções com relação as condições iniciais, tem-se que  $\varphi(t, \varphi(t_n, x_n)) \rightarrow \varphi(t, z)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Da propriedade de fluxos,  $\varphi(t, \varphi(t_n, x_n)) = \varphi(t + t_n, x_n) = \varphi(t_n, \varphi(t, x_n))$ . Como  $H$  é um conjunto invariante,  $\varphi(t, x_n) \rightarrow \varphi(t, y) \in H$  quando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $\varphi(t, z) \in \tilde{H}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ■

### 3 FUNÇÃO DE LYAPUNOV DE CONTROLE

Considere o sistema (1) e suponha que a origem seja um ponto de equilíbrio deste sistema, isto é,  $f(0) = 0$ .

**Definição 3.1 (Função de Lyapunov)** A função  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é uma função de Lyapunov de (1) se as seguintes condições forem satisfeitas: (i)  $\mathcal{V}(x)$  é localmente definida positiva; e (ii)  $\dot{\mathcal{V}}(x)$  é localmente definida negativa.

A existência de uma função de Lyapunov é uma condição suficiente para a estabilidade assintótica da origem de (1) (Khalil, 1996).

Considere agora o sistema

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (2)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle e  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^1$ . Suponha que a origem seja um ponto de equilíbrio do sistema em malha aberta ( $u = 0$ ) isto é,  $F(0, 0) = 0$ . O objetivo é obter uma lei de realimentação de controle  $u = h(x)$ , definida na vizinhança da origem, tal que a origem do sistema em malha fechada

$$\dot{x} = F(x, h(x)) \quad (3)$$

seja assintoticamente estável. Uma condição suficiente para garantir a estabilidade da origem do sistema em malha fechada é a existência de uma função de Lyapunov de controle (FLC) (Jurdjevic and Quinn, 1978; Artstein, 1983; Sontag, 1990).

**Definição 3.2 (Função de Lyapunov de Controle)** Uma função  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é uma FLC de (2) se existir uma lei de realimentação de controle  $u = h(x)$ , de classe  $C^1$ , com  $h(0) = 0$ , tal que a função  $\mathcal{W}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\mathcal{W}(x) = \mathcal{V}(x, h(x))$ , seja uma função de Lyapunov de (3).

O próximo teorema garante que a existência de uma FLC implica na estabilidade da origem do sistema (3) (Artstein, 1983; Sontag, 1983; Clarke et al., 2000).

**Teorema 3.1 (Estabilidade do Sistema em Malha Fechada)** Seja  $\mathcal{V}$  uma FLC de (2), então existe uma lei de realimentação de controle, tal que a origem do sistema em malha fechada (3) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

**Demonstração:** A demonstração é trivial. Pode ser obtida a partir da definição 3.2 e dos resultados de Lyapunov sobre estabilidade (Khalil, 1996). ■

O teorema 3.1 estabelece que a existência de uma FLC é uma condição suficiente para assegurar a estabilização da origem. Sontag (1983) mostra que a existência de uma FLC também é uma condição necessária, mas para isto, ele relaxa as condições sobre o funcional de Lyapunov, isto é, ele mostra que a origem do sistema é assintoticamente controlável se e somente se existe um funcional contínuo (não necessariamente de classe  $C^1$ ) definido positivo cuja derivada pode ser feita negativa por uma escolha apropriada de lei de realimentação. Entretanto, este resultado é existencial e, em geral, é muito difícil explicitar a FLC em termos de funções elementares conhecidas. Neste artigo, apenas a suficiência da existência dos funcionais é explorada. Particularmente, partindo-se do princípio da existência dos funcionais, estuda-se a relação entre os funcionais e a região de estabilidade.

A FLC pode fornecer alguma informação a respeito da região de estabilidade do sistema em malha fechada. Mais precisamente, prova-se neste artigo o seguinte resultado:

**Teorema 3.2 (Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada)** Seja  $V$  uma FLC do sistema (3) e  $\Omega$  um conjunto aberto contendo a origem. Se a função  $W(x) = V(x, h(x))$  satisfaz as seguintes condições: (a)  $W(0) = 0$  e  $W(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega - \{0\}$ ; (b)  $\dot{W}(0) = 0$  e  $\dot{W} < 0$  para todo  $x \in \Omega - \{0\}$  então: (i) a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada, (ii) existe constante  $L$  tal que a componente conexa  $S_c(L)$  do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : W(x) < L\}$  que contém a origem está contida em  $\Omega$  e (iii)  $S_c(L)$  está contida na região de estabilidade  $A(0)$ .

**Demonstração:** A estabilidade assintótica da origem é uma consequência direta do teorema 3.1. Utilizando a condição (a) e a continuidade da função  $W$ , é fácil verificar que existe constante  $L$  tal que a componente conexa  $S_c(L)$  que contém a origem é limitada e está totalmente contida em  $\Omega$ . Do princípio de invariância de LaSalle (Alberto, 2000), demonstra-se que  $S_c(L)$  é positivamente invariante e que toda órbita iniciando em  $S_c(L)$  está definida para todo tempo  $t \geq 0$  e tende para o maior conjunto invariante contido no conjunto  $C = \{x \in \bar{S}_c(L) : \dot{W}(x) = 0\}$ . Utilizando a condição (b), prova-se que  $C = \{0\}$ . Portanto  $S_c(L) \subset A(0)$ . ■

O teorema anterior, embora forneça uma estimativa da região de estabilidade da origem do sistema em malha fechada, ele não oferece indicativos de como encontrar estimativas ótimas da região de estabilidade. Em outras palavras, é difícil encontrar uma FLC que satisfaça todas as condições do teorema 3.2 em um aberto  $\Omega$  grande o suficiente para que possamos obter estimativas relevantes da região de estabilidade. Além disto, o teorema 3.2 não oferece procedimento sistemático para uma escolha ótima do nível  $L$ . Na próxima seção, o conceito de função energia de controle será definido e algumas condições do teorema anterior serão relaxadas de forma a obter-se estimativas ótimas da região de estabilidade do sistema em malha fechada.

## 4 FUNÇÃO ENERGIA DE CONTROLE

Considere o sistema (1). Seja  $E$  o conjunto de todos os pontos de equilíbrio de (1), isto é,  $E := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ .

**Definição 4.1 (Função Energia)**(Chiang et al., 1988) A função  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é uma função energia de (1) se as seguintes condições forem satisfeitas: (i)  $\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}^n$ ; (ii) se  $x_o \notin E$ , então o conjunto  $\{t \in \mathbb{R}_+ : \dot{\mathcal{V}}(\varphi(t, x_o)) < 0\}$  não possui medida finita em  $\mathbb{R}$ ; (iii) se  $|\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))|$  é limitada para  $t \in \mathbb{R}_+$ , então a trajetória  $\varphi(t, x_o)$  é também limitada para  $t \in \mathbb{R}_+$ .

As condições (i) e (ii) implicam que a energia do sistema é estritamente decrescente ao longo de qualquer trajetória não trivial. A definição de função energia dada em (Chiang et al., 1988) exige que o conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : \dot{\mathcal{V}}(\varphi(t, x_o)) = 0\}$  possua medida nula em  $\mathbb{R}$  se  $x_o \notin E$ . A condição (ii) da definição anterior é mais geral e contém a definição dada em (Chiang et al., 1988) como um caso particular, ou seja, a exigência de que o conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : \dot{\mathcal{V}}(\varphi(t, x_o)) = 0\}$  possua medida nula em  $\mathbb{R}$ , se  $x_o \notin E$ , dada em (Chiang et al., 1988) é uma condição suficiente para a satisfação da condição (ii) da definição 4.1. A função  $\mathcal{V}$  não precisa ser própria<sup>1</sup> mas a condição (iii) garante que sendo  $\mathcal{V}$  limitada ao longo da trajetória, então a trajetória  $\varphi(t)$  é limitada para  $t \geq 0$ . Maiores esclarecimentos podem ser obtidos em (Chiang et al., 1988).

A existência de uma função energia possui implicações importantes a respeito dos conjuntos limites. O resultado a seguir é uma adaptação dos resultados obtidos em (Chiang et al., 1988).

**Teorema 4.1 (Função Energia e Conjuntos Limites)** Seja  $\varphi(t, x_o)$  uma solução de (1) e  $\mathcal{V}$  uma função energia de (1) tal que  $|\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))|$  é limitada para  $t \geq 0$ . Então, o conjunto limite  $\omega(x_o)$  é composto por pontos de equilíbrio.

<sup>1</sup>Uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  é própria se para cada conjunto compacto  $D \in Y$ , o conjunto  $F^{-1}(D)$  é compacto em  $X$ .

**Demonstração:** Sendo  $|\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))|$  limitada para  $t \geq 0$ , a condição (iii) da definição 4.1 implica que  $\varphi(t, x_o)$  é uma solução limitada de (1), para  $t \geq 0$ . Portanto o conjunto  $\omega$ -limite de  $\varphi(t, x_o)$  é não vazio. A condição (i) da definição 4.1 implica que  $\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))$  é uma função decrescente em  $t$ . Portanto, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{V}(\varphi(t, x_o)) \rightarrow \alpha$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Seja  $p \in \omega(x_o)$ . Então, pela continuidade de  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}(p) = \alpha \forall p \in \omega(x_o)$ . A invariância de  $\omega(x_o)$  garante que  $\dot{\mathcal{V}}(p) = 0$  para todo  $p \in \omega$ . A condição (ii) da definição 4.1 implica que  $p$  é um ponto de equilíbrio. ■

**Corolário 4.2** Se a suposição (S1) for satisfeita,  $\mathcal{V}$  for uma função energia de (1) e  $\varphi(t, x_o)$  uma solução de (1) tal que  $|\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))|$  seja limitada para  $t \geq 0$ , então o conjunto  $\omega(x_o)$  é composto por um único ponto de equilíbrio.

**Demonstração:** O teorema 4.1 garante que todo ponto  $p \in \omega(x_o)$  é um ponto de equilíbrio. Como os pontos de equilíbrio são isolados por hipótese e o conjunto  $\omega(x_o)$  é um conjunto conexo, então  $\omega(x_o)$  é constituído por um único ponto de equilíbrio. ■

O conceito de função energia, apresentado anteriormente, pode ser utilizado com a finalidade de projetar leis de realimentação. Para isto, define-se o conceito de função energia de controle (FEC).

**Definição 4.3 (Função Energia de Controle)** Uma função  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é uma FEC de (2) se existir uma lei de realimentação de controle  $u = h(x)$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\mathcal{W} = \mathcal{V}(x, h(x))$  seja uma Função Energia de (3).

O próximo teorema garante que a existência de uma FEC em conjunto com o conceito de prolongamento de conjuntos asseguram a estabilidade do sistema (3) e fornece também uma estimativa de sua região de estabilidade.

**Teorema 4.2 (Estabilidade e Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada)** Seja  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma FEC de (2). Se existir uma componente conexa limitada  $S_c(L)$  do conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(x, h(x)) < L\}$ , tal que  $x^s$  seja o único ponto de equilíbrio contido no interior de  $S_c(L)$ , então  $x^s$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada (3). Além disso,  $S_c(L)$  é uma estimativa da região de estabilidade.

**Demonstração:** Vamos demonstrar, em primeiro lugar, que o equilíbrio é atrativo. Seja  $\mathcal{V}(x)$  uma FEC de (2). Então, de acordo com a definição 4.3, existe uma lei de realimentação de controle  $u = h(x)$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\mathcal{W}(x) = \mathcal{V}(x, h(x))$  é uma função energia de (3). Por hipótese,  $S_c(L)$  é uma componente conexa limitada do conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(x, h(x)) < L\}$  e  $x^s$  é o único ponto

de equilíbrio contido em  $S_c(L)$ . O princípio de invariância de LaSalle (Alberto, 2000) garante que  $S_c(L)$  é um conjunto positivamente invariante, isto é, todas as trajetórias de (3) partindo do interior de  $S_c(L)$  são limitadas e convergem para o maior conjunto invariante contido em  $S_c(L)$ . O Teorema 4.1 garante que os conjuntos limites são compostos somente por pontos de equilíbrio. Sendo  $x^s$  o único ponto de equilíbrio contido em  $S_c(L)$ , então toda trajetória partindo em  $S_c(L)$  converge para  $x^s$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Como consequência, este ponto de equilíbrio é atrativo. Vamos mostrar que o equilíbrio  $x^s$  é estável. O ponto de equilíbrio  $x^s$  é um conjunto compacto e invariante, logo, em acordo com o teorema 2.1,  $H = \{x^s\}$  é estável se e só se  $\dot{H} = H$ . O conjunto  $H = \{x^s\}$  é um conjunto fechado e invariante contido em  $S_c(L)$  que, por sua vez, é um conjunto aberto, limitado e positivamente invariante, portanto, segue do teorema 2.2 que  $\dot{H}$  é um conjunto invariante. Suponha existir  $z \in \dot{H}$  tal que  $z \neq x^s$ . Então, existem seqüências  $x_n \rightarrow x^s$  e  $t_n \in [0, \tau_{max}(x_n))$  tal que  $\varphi(t_n, x_n) \rightarrow z$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, segue da suposição (i) da definição 4.1 que  $V(x_n) \geq V(\varphi(t_n, x_n))$ . Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , conclui-se que  $V(x^s) \geq V(z)$ . Por outro lado,  $x^s$  é um ponto de equilíbrio isolado que pertence ao conjunto aberto  $S_c(L)$ . Logo, existe  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $x^s \in S_c(L - \varepsilon) := \{x \in S_c(L) : V(x) < L - \varepsilon\}$ . Por construção,  $S_c(L - \varepsilon)$  é um conjunto positivamente invariante e portanto  $\dot{H} \subset S_c(L - \varepsilon)$ . Conclui-se portanto que se  $z \in \dot{H}$ , então  $z \in S_c(L)$  e  $\varphi(t, z) \rightarrow x^s$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Novamente, utilizando a suposição (i) da definição 4.1, conclui-se que  $V(z) \geq V(x^s)$ . Isto significa que  $V$  é constante e igual a  $V(x^s)$  em  $\dot{H}$ . Como  $\dot{H}$  é invariante e  $z$  não é ponto de equilíbrio, tem-se que  $V(\varphi(t, z)) = V(x^s)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  o que implica que  $\dot{V}(\varphi(t, z)) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  violando a propriedade (ii) da definição 4.1. Portanto não existe  $z \in \dot{H}$  tal que  $z \neq x^s$ , o que implica em  $\dot{H} = H$ . ■

A vantagem em encontrar uma FEC quando comparada a FLC é que podemos utilizar a teoria de caracterização da fronteira da região de estabilidade para obter estimativas ótimas da região de estabilidade. Mais precisamente, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 4.3 (Estimativa Ótima da Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada)** Seja  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma FEC e seja  $x^s$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha fechada. Defina o nível de energia

$$L = \min_{x_i \in \{E \cap \partial A(x^s)\}} W(x_i).$$

Então:

(i) a componente conexa  $S_c(L)$  do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : W(x) = V(x, h(x)) < L\}$  contendo  $x^s$  está con-

tida na região de estabilidade  $A(x^s)$  do sistema em malha fechada,

(ii) a componente conexa  $S_c(M)$  do conjunto de nível  $\{x \in \mathbb{R}^n : W(x) < M\}$  contendo  $x^s$  tem interseção não vazia com o complemento da região de estabilidade  $A^c(x^s)$  do sistema em malha fechada para qualquer  $M > L$ .

**Demonstração:** Se  $\mathcal{V}$  é uma FEC, então existe uma lei de realimentação  $u = h(x)$  tal que  $\mathcal{W}$  é uma função energia do sistema em malha fechada. A região de estabilidade  $A(x^s)$  do ponto de equilíbrio assintoticamente estável  $x^s$  do sistema em malha fechada é um conjunto aberto, conexo e invariante. A fronteira de todo conjunto invariante também é invariante. Portanto  $\partial A(x^s)$  é um conjunto invariante. Da continuidade da função  $\mathcal{W}$  e da condição (i) da definição 4.1, prova-se que  $W(x^s)$  é um limitante inferior da função  $\mathcal{W}$  na fronteira  $\partial A(x^s)$  da região de estabilidade, ou seja,  $W(x) \geq W(x^s)$  para qualquer  $x \in \partial A(x^s)$ . Em seguida, vamos provar que toda solução na fronteira tende para um ponto de equilíbrio na fronteira. Seja  $x_o \in \partial A(x^s)$  um ponto genérico na fronteira da região de estabilidade. Como  $\partial A(x^s)$  é invariante,  $\varphi(t, x_o) \in \partial A(x^s)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disto, da condição (i) da definição 4.1, tem-se que  $W(x^s) \leq W(\varphi(t, x_o)) \leq W(x_o)$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto, como consequência do corolário 4.2, conclui-se que todas trajetórias na fronteira da região de estabilidade tendem para um equilíbrio na fronteira  $\partial A(x^s)$ . Para completar a prova, considere  $x_j \in \partial A(x^s)$  como sendo o equilíbrio com menor energia na fronteira da região de estabilidade, ou seja,  $L = W(x_j)$ . Como consequência das conclusões anteriores,  $W(x) \geq W(x_j)$  para qualquer  $x \in \partial A(x^s)$ . Isto significa que qualquer caminho conexo saindo de  $x^s$  e cruzando a fronteira da região de estabilidade tem que antes cruzar a fronteira do conjunto  $S_c(L)$  antes de sair da região de estabilidade. Portanto  $S_c(L) \subset A(x^s)$ . Isto prova (i). Para provar (ii), seja  $M > L$ . Então existem pontos na fronteira que pertencem a  $S_c(M)$  e portanto  $S_c(M) \cap A^c(x^s)$  é não vazio. ■

O teorema 4.3 utiliza uma curva de nível da função energia para obter uma estimativa ótima da região de estabilidade. Deste teorema conclui-se que o valor da energia do ponto de equilíbrio instável de menor energia na fronteira da região de estabilidade oferece a melhor estimativa da região de estabilidade na forma de um conjunto de nível da função  $\mathcal{W}$ . Em outras palavras  $S_c(L)$  é o maior conjunto de nível da função  $\mathcal{W}$  que está contido na região de estabilidade do sistema em malha fechada. Além disto, o teorema 4.3 oferece um procedimento sistemático para o cálculo do nível  $L$ .

Embora a FEC forneça estimativas ótimas da região de estabilidade, a FEC, assim como a FLC, exige que se tenha

$\dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$ . Em vários sistemas dinâmicos, é difícil encontrar função  $V$  satisfazendo esta condição. Com o propósito de relaxar tal condição, na próxima seção será apresentado o conceito de função energia generalizada de controle.

## 5 FUNÇÃO ENERGIA GENERALIZADA DE CONTROLE

Nesta seção, generaliza-se a teoria da seção anterior permitindo que a função  $\mathcal{V}$  possua, no espaço de estados, regiões limitadas de derivada positiva. Para isto define-se o conceito de função energia generalizada de controle (FEGC).

**Definição 5.1 (Função Energia Generalizada)** Uma função  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é uma função energia generalizada (FEG) de (1) se: (i) todo conjunto compacto intercepta um número finito de componentes conexas limitadas e isoladas  $\mathcal{C}_i$ 's do conjunto  $\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) \geq 0\}$  e (ii)  $\sup_{t \geq 0} |\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))| < \infty$  implica  $\varphi(t, x_o)$  é limitado para  $t \geq 0$ .

As condições exigidas para que uma função seja uma FEG são menos restritivas do que as condições da função energia, ainda assim, não é trivial encontrar uma função energia generalizada para um sistema não-linear. Condições que garantem a existência de uma função energia generalizada para uma classe de sistemas não-lineares com aplicações em sistemas elétricos de potência foram estudadas em (Alberto, 2006). O artigo (Martins et al., 2006) estuda condições semelhantes para uma classe de sistemas não lineares que é uma generalização dos sistemas na forma de Lur'e. Neste artigo, na seção de exemplos, propriedades particulares dos sistemas não-lineares em estudo serão utilizadas para provar a satisfação de tais condições.

É interessante ressaltar que a condição (i) da definição 5.1 poderia ser substituída pela condição de que o conjunto  $\mathcal{C}$  é composto por um número finito de componentes conexas compactas e isoladas; entretanto, esta alternativa é menos geral e restringe a aplicação dos resultados para uma classe de problemas que satisfazem a condição (i) da definição 5.1, mas contêm um número infinito de componentes compactas e isoladas. Este é o caso do exemplo de sistemas elétricos de potência discutido em (Alberto, 2006).

A existência de uma função energia, garante, conforme demonstrado no teorema 4.1, que os conjuntos limites são constituídos exclusivamente por pontos de equilíbrio. Embora a função energia generalizada não possua a derivada ao longo das trajetórias semi-definida negativa, ainda assim, informações importantes a respeito dos conjuntos limites podem ser obtidas conforme mostra o teorema a seguir. Estas informações, em conjunto com o conceito de prolongamento de con-

juntos, serão exploradas no teorema 5.2 para provar a existência e estabilidade de um conjunto atrativo.

**Teorema 5.1 (Função Energia Generalizada e Conjuntos Limites)** Considere que o sistema (1) possua uma FEG  $\mathcal{V}$  e que  $\varphi(t, x_o)$  seja uma solução do sistema (1) tal que  $|\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))|$  é limitado para  $t \geq 0$ . Então  $\varphi(t, x_o)$  é uma solução limitada, seu conjunto  $\omega$ -limite é não vazio e intercepta pelo menos uma componente conexa  $\mathcal{C}_i$  do conjunto  $\mathcal{C}$ .

Demonstração: Seja  $\mathcal{V}(x)$  uma FEG de (1). De acordo com a condição (ii) da definição 5.1, sendo  $|\mathcal{V}(\varphi(t, x_o))|$  limitada, para  $t \geq 0$ , tem-se que  $\varphi(t, x_o)$  é uma solução limitada de (1). Portanto, o conjunto  $\omega$ -limite é não vazio. Suponha que  $\varphi(t, x_o)$  não intercepte o conjunto  $\mathcal{C}$  para todo  $t \geq 0$ . Então usando argumentos similares aqueles utilizados na demonstração do princípio de invariância de LaSalle (Khalil, 1996), demonstra-se que  $\varphi(t, x_o)$  tende para o maior conjunto invariante contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Neste caso, a conexidade do conjunto  $\omega$ -limite e o fato das componentes  $\mathcal{C}_i$ 's serem isoladas garante que existe inteiro  $j$  tal que  $\varphi(t, x_o)$  tende para o maior conjunto invariante contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} \cap \mathcal{C}_j$ . Suponha que  $\varphi(t, x_o)$  intercepte  $\mathcal{C}$ . Então existe um tempo  $t_1$  e uma componente  $\mathcal{C}_{i1}$  tal que  $\varphi(t_1, x_o) \in \mathcal{C}_{i1}$ . Se a solução permanecer em  $\mathcal{C}_{i1}$  para todo  $t \geq t_1$ , então demonstra-se que  $\varphi(t, x_o)$  tende para o maior conjunto invariante contido em  $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} \cap \mathcal{C}_{i1}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Se por outro lado, a solução abandonar  $\mathcal{C}_{i1}$ , ou seja, existir  $t_1^*$  tal que  $\varphi(t, x_o) \in \mathcal{C}_{i1}$  para  $t_1 < t \leq t_1^*$  e  $\varphi(t, x_o) \notin \mathcal{C}_{i1}$  para  $t$  ligeiramente maior que  $t_1^*$ , então duas possibilidades podem ocorrer: (i) a solução não intercepta  $\mathcal{C}$  para todo  $t > t_1^*$  ou (ii)  $\exists t_2$  e componente  $\mathcal{C}_{i2}$  tal que  $\varphi(t_2, x_o) \in \mathcal{C}_{i2}$ . No caso (i), a demonstração segue da primeira parte. No caso (ii) novamente temos duas possibilidades, ou seja, ou  $\varphi(t, x_o) \in \mathcal{C}_{i2}$  para todo  $t \geq t_2$  ou existe  $t_3 > t_2^*$  tal que  $\varphi(t_3, x_o) \in \mathcal{C}_{i3}$ . Se houver uma sequência infinita de tempos  $\{t_r\}$  com  $t_r \rightarrow +\infty$  tal que  $\varphi(t_r, x_o) \in \mathcal{C}_{ir}$ , então, como o número de componentes  $\mathcal{C}_{ir}$  com interseção não vazia com conjuntos compactos é finito, existe pelo menos uma componente  $\mathcal{C}_j$  que é visitada infinitas vezes. Como toda sequência infinita num conjunto compacto possui subsequência convergente, então  $\mathcal{C}_j$  possui pelo menos um ponto pertencente ao conjunto  $\omega$ -limite de  $\varphi(t, x_o)$ . Logo a intersecção do conjunto  $\omega$ -limite com a componente  $\mathcal{C}_j$  é não vazia. ■

Como se exige menos da FEG se comparada a função energia, informações mais fracas a respeito dos conjuntos limites são obtidas no teorema anterior. Em compensação, o teorema anterior permite que os conjuntos limites sejam mais complexos incluindo ciclos limites e comportamentos caóticos.

É interessante observar que a interseção do conjunto  $\omega$ -limite com o conjunto  $C$  não garante que o conjunto limite esteja contido em  $C$ . Em verdade, as soluções podem entrar e sair da região onde a derivada é positiva. Apesar disto, o teorema 5.2, que será apresentado a seguir, oferece condições sobre a FEG e explora o conceito de prolongamento de um conjunto para provar a existência de um conjunto assintoticamente estável e obter estimativas da região de estabilidade deste conjunto. Mostra-se que este conjunto assintoticamente estável intercepta o conjunto  $C$  embora não esteja necessariamente contido em  $C$ , ou seja, a solução de "regime permanente" pode ficar entrando e saindo do conjunto  $C$  indefinidamente. Para maiores esclarecimentos a respeito destas idéias vide (Rodrigues et al., 2000) e (Rodrigues et al., 2001).

Embora o teorema 5.1 não possa ser utilizado para provar estabilidade do conjunto limite, ele em conjunto com o conceito de prolongamento são explorados para demonstrar a existência de um conjunto assintoticamente estável. Com esta finalidade, propõe-se a função energia generalizada de controle (FEGC).

**Definição 5.2 (Função Energia Generalizada de Controle)** Uma função  $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , é uma FEGC de (2), se existir uma lei de realimentação de controle  $u = h(x)$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\mathcal{W}(x) = \mathcal{V}(x, h(x))$  seja uma FEG do sistema em malha fechada (3).

**Teorema 5.2 (Estabilidade e Região de Estabilidade do Sistema em Malha Fechada)** Considere que o sistema (2) possua uma FEGC  $\mathcal{V}$ . Seja  $L \in \mathbb{R}$  um número real tal que a componente conexa  $S_c(L)$  de  $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{W}(x) < L\}$  seja limitada. Suponha que  $\sup_{x \in C \cap \bar{V}_L} \mathcal{W}(x) := l < L$ . Então,  $S_c(l) := \{x \in S_c(L) : \mathcal{W}(x) \leq l\}$  contém um conjunto  $H$  invariante e assintoticamente estável e  $S_c(L)$  é uma estimativa da região de estabilidade de  $H$ . Além disto,  $H$  tem interseção não vazia com o conjunto  $C \cap S_c(l)$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{V}(x)$  uma FEGC de (2). Então, existe uma lei de realimentação de estados  $u = h(x)$ , de classe  $C^1$ , tal que  $\mathcal{W}(x) = \mathcal{V}(x, h(x))$  é uma FEG de (3). Por hipótese  $S_c(L)$  é uma componente conexa e limitada de  $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{W}(x) < L\}$ . Se  $\sup_{x \in C \cap S_c(L)} \mathcal{W}(x) := l < L$  então  $C \subset S_c(l) \subset S_c(L)$ . Pela extensão do princípio de invariância (Rodrigues et al., 2000; Rodrigues et al., 2001),  $S_c(L)$  e  $S_c(l)$  são conjuntos positivamente invariantes e todas as trajetórias de (3) partindo do interior de  $S_c(L)$  convergem para o maior conjunto fechado e invariante  $H$  contido em  $S_c(l)$ . O teorema 5.1 garante que  $H$  tem interseção não vazia com o conjunto  $C \cap S_c(l)$ . Desde que  $d(\varphi(t, x_o), H) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $x_o \in S_c(L)$ , então  $H$  é um conjunto atrativo e  $S_c(L)$  é uma estimativa da região de estabilidade de  $H$ . Falta demonstrar que o conjunto  $H$  é estável. Como  $H$  é um conjunto compacto e invariante, então, pelo teorema

2.1,  $H$  é estável se e só se  $\hat{H} = H$ . Provaremos a seguir que  $\hat{H} \subset S_c(l)$ . Como  $H$  é um conjunto fechado e invariante contido em  $S_c(L)$  que é um conjunto aberto, limitado e positivamente invariante, então, pelo teorema 2.2,  $\hat{H}$  é um conjunto invariante. Por outro lado,  $S_c(l)$  é um conjunto estável, compacto e positivamente invariante. Então, novamente pelo teorema 2.1,  $\hat{S}_c(l) = S_c(l)$ . Como  $H \subset S_c(l)$ , então  $\hat{H} \subset \hat{S}_c(l) = S_c(l)$ . Mas  $\hat{H}$  é um conjunto invariante contido em  $S_c(l)$ . Portanto  $\hat{H} \subset H$  o que implica  $\hat{H} = H$ . ■

O teorema proposto anteriormente permite que se tenha, em algumas regiões limitadas do espaço de estados,  $\dot{\mathcal{V}}(\varphi(t)) \geq 0$ . Esta flexibilidade no conceito de FEGC permite o tratamento de problemas que não apresentam função energia ou em que a função energia seja de difícil obtenção. Mesmo sob esta generalização, demonstra-se a existência de um conjunto assintoticamente estável e obtêm-se estimativas de sua localização e de sua região de estabilidade. Estimativas ótimas da região de estabilidade na forma de curvas de nível da FEGC também podem ser encontradas. Maiores detalhes a este respeito podem ser encontrados em (Alberto and Chiang, 2008).

## 6 EXEMPLOS

### 6.1 Exemplo 1

Considere o sistema não-linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_d x_2 - x_1 - g x_1^2 \left( \frac{x_2}{k_d} + x_1 + 1 \right) + u \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $k_d = 1$ ,  $g = 6$  e  $u$  é a entrada de controle. Este sistema tem origem no problema de controle de velocidade de um motor de corrente contínua via tensão de campo quando não linearidades referentes ao efeito de reação de armadura são levados em consideração (Fallside and Patel, 1965).

Linearizando este sistema, verifica-se que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema em malha aberta para todo  $k_d > 0$ . Entretanto, para  $g > 4$ , o sistema apresenta 3 pontos de equilíbrio indicando que a origem não é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha aberta.

Neste exemplo, utilizaremos o conceito de função energia generalizada e exploraremos as peculiaridades do sistema (4) para projetar uma lei de realimentação de estados  $u = h(x_1, x_2)$  que assegure estabilidade global para a origem. Com este propósito, considere a seguinte candidata a função energia generalizada de controle:

$$V(x, u) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_1 x_2 + k_4 g \frac{x_1^4}{4} + k_5 g \frac{x_1^3}{3}$$

Escolhendo  $k_1 = \frac{k_3 k_d}{2} + k_2$ ,  $k_4 = 2k_2 + \frac{k_3}{k_d}$  e  $k_5 = 2k_2$  e calculando a derivada da função  $V$  ao longo das trajetórias

de (4) obtém-se:

$$\dot{V}(x, u) = -k_3 g x_1^4 - k_3 g x_1^3 - k_3 x_1^2 + (k_3 - 2k_2 k_d) x_2^2 - 2g \frac{k_2}{k_d} x_1^2 x_2^2 + 2k_2 x_2 u + k_3 x_1 u$$

Podemos escolher as constantes da função energia de tal forma que  $2k_2 k_d > k_3$ . Neste exemplo consideraremos  $k_3 = k_d$  e  $k_2 = 1$ . Com esta escolha o termo quadrático em  $x_2$  da derivada fica definido negativo e não é difícil verificar que  $V$  é uma função energia para o sistema (4) em malha aberta se  $g < 4$ . Entretanto, para  $g > 4$  não conseguimos provar a condição (i) da definição 4.1 que exige  $\dot{V} \leq 0$ .

A seguir, iremos mostrar que  $V$  é uma função energia generalizada de controle para o sistema (4). Para isto, escolha  $u = h(x_1, x_2) = g x_1^2$ . Observe que  $h(0, 0) = 0$  e portanto a origem é um ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada. Em malha fechada é fácil verificar que a origem é o único ponto de equilíbrio deste sistema. Para mostrar que  $V$  é uma função energia generalizada de controle, precisamos mostrar que  $W(x) = V(x, h(x))$  é uma função energia generalizada do sistema em malha fechada. Substituindo a lei de realimentação  $u$  na expressão de  $\dot{V}$  obtém-se:

$$\dot{W}(x) = -k_3 g x_1^4 - k_3 x_1^2 - (2k_2 k_d - k_3) x_2^2 - 2g \frac{k_2}{k_d} x_1^2 x_2^2 + 2k_2 g x_1^2 x_2$$

Escolhendo as constantes de tal forma que  $2k_2 k_d - k_3 > 0$ , todos os termos da expressão acima são não positivos exceto o termo  $2k_2 g x_1^2 x_2$ . As regiões de derivada positiva da função  $W$  são apresentadas na figura 1. O conjunto  $C$  neste caso é constituído por três componentes conexas limitadas, são elas os conjuntos  $C_1$  e  $C_2$  e a origem, logo a condição (i) da definição 5.1 está satisfeita. Escolhendo os parâmetros de tal forma que  $2k_2 k_d > k_3$ , a função  $V$  fica radialmente ilimitada e conseqüentemente a condição (ii) da definição 5.1 também é satisfeita. Portanto,  $V$  é uma função energia generalizada de controle associada ao sistema (4).

Escolhendo  $l = \max_{x \in C} V = 0,9406$  e sabendo que  $W$  é uma função radialmente ilimitada, prova-se, com o auxílio do teorema 5.2, que as soluções de (4) em malha fechada entram no conjunto limitado  $S_c(0, 9406)$  para tempos positivos. O conjunto  $S_c(0, 9406)$ , em acordo com o teorema 5.2, é positivamente invariante e possui um conjunto  $H$  invariante não vazio e assintoticamente estável. Este conjunto  $H$  tem interseção não vazia com o conjunto  $C$  em acordo com o teorema 5.1

A seguir, vamos explorar as particularidades deste sistema para mostrar que  $H$  é a origem. Concluiu-se anteriormente que os conjuntos  $\omega$ -limite do sistema (4) em malha fechada estão contidos em  $S_c(0, 9406)$ . De acordo com o teorema de Poincaré-Bendixon (Guckenheimer and Holmes, 1993), se o conjunto  $\omega$ -limite não contém pontos de equilíbrio,

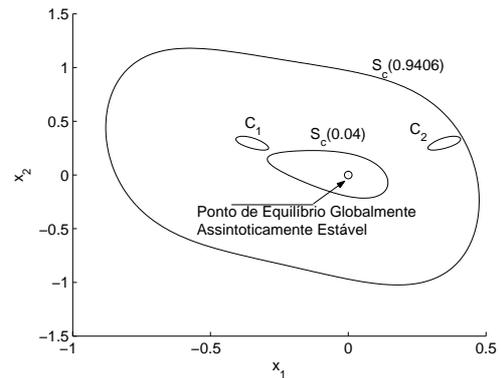


Figura 1: Conjunto de nível  $S_c(0, 9406)$  da função energia generalizada  $W$  associada ao sistema em malha fechada do exemplo 1 para  $k_3 = k_d$  e  $k_2 = 1$ . Os conjuntos  $C_1$ ,  $C_2$  e a origem são as componentes conexas do conjunto  $C$  (vide definição 5.1). Com esta função energia generalizada e explorando as propriedades particulares do sistema 1, demonstra-se que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

ele é uma órbita fechada. Utilizando o critério de Bendixon (Guckenheimer and Holmes, 1993), verifica-se que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -k_d - \frac{g}{k_d} x_1^2 < 0$  para  $k_d > 0$ , logo, não existem órbitas fechadas em  $S_c(0, 9406)$ . Os conjuntos limites portanto contêm o único equilíbrio do sistema em malha fechada que é a origem.

Escolhendo  $L = 0,04$  e utilizando o teorema 4.2, prova-se que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, logo, como os conjuntos limites são conexos, temos que a origem é um conjunto limite isolado, ou seja, não existem órbitas homoclínicas conectando a origem a ela mesma. Portanto, a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema em malha fechada.

## 6.2 Exemplo 2

Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x) + g(x)u \end{cases} \quad (5)$$

onde  $x = [x_1; x_2]$  é a variável de estado,  $u$  é a entrada de controle e

$$f(x) = a - b \sin(x_1) - c \cos(x_1) - dx_2 \quad (6)$$

$$g(x) = -b \sin(x_1) - c \cos(x_1) \quad (7)$$

são funções de classe  $C^1$ . Este sistema é uma versão simplificada de um sistema elétrico de potência constituído de um gerador e um barramento infinito com um dispositivo

FACTS (Flexible AC Transmission System) para controle da impedância série da linha de transmissão. Os parâmetros, do sistema, são:  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0,1$  e  $d = 0,3$ . O ponto  $x^s = [0,4728; 0]$  e  $x^u = [2,5689; 0]$  são respectivamente um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo-1 do sistema em malha aberta ( $u = 0$  em (5)). O objetivo é encontrar uma lei de realimentação  $u = h(x)$  tal que o equilíbrio  $x^s$  seja assintoticamente estável com maior eficiência no amortecimento de oscilações e que a região de estabilidade seja suficientemente grande.

### 6.2.1 Solução utilizando uma FEC

Inicialmente, a lei de realimentação de controle  $u = h(x)$  será projetada utilizando uma FEC. Para isto, considere a função

$$\mathcal{V}_1(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = \frac{1}{2}x_2^2 - ax_1 - b \cos(x_1) + c \sin(x_1) + \alpha, \quad (8)$$

como candidata a FEC do sistema (5). A constante  $\alpha$  pode ser escolhida de maneira arbitrária, entretanto ela pode ser convenientemente escolhida de tal forma que o valor da função  $\mathcal{V}_1$  calculada em  $x^s$  seja igual a zero. Neste caso, temos  $\alpha = -2,208$ . Considerando  $u = h(x_1, x_2)$ , tem-se a seguinte candidata à função energia para o sistema em malha fechada:

$$W_1(x_1, x_2) := V_1(x_1, x_2, h(x_1, x_2)) = \frac{1}{2}x_2^2 - ax_1 - b \cos(x_1) + c \sin(x_1) + \alpha \quad (9)$$

Calculando a derivada de  $W_1$  ao longo das trajetórias do sistema (5) em malha fechada, obtém-se:

$$\dot{W}_1 = -dx_2^2 + g(x)x_2h(x) \quad (10)$$

onde  $g(x)$  é dada em (7). Para que  $W_1$  seja uma função energia do sistema em malha fechada (5), deve-se escolher a lei de realimentação de controle  $h(x)$ , tal que  $\dot{W}_1 \leq 0$ . Com a escolha

$$h(x) = -kg(x)x_2, \quad (11)$$

tem-se:

$$\dot{W}_1 = -dx_2^2 - k(g(x)x_2)^2 \leq 0, \quad (12)$$

onde  $k > 0$ , é um parâmetro do controlador a ser escolhido. A escolha de  $k$  é feita conforme o nível de amortecimento desejado para o sistema. Neste exemplo, considere  $k = 0,5$ . Observe que  $h(x^s) = h(x^u) = 0$ , logo, a realimentação de estados  $h(x)$  não altera a posição dos equilíbrios  $x^s$  e  $x^u$ . Vamos mostrar que  $W_1$  é uma função energia do sistema em malha fechada. Para todo  $k > 0$ , mostrou-se que a função  $W_1$  satisfaz a condição (i) da definição 4.1. Suponha que a condição (ii) da definição 4.1 não seja atendida, então existe  $x_o \notin E$  e intervalo  $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  de medida não nula, com  $t_2 > t_1$  tal que  $\dot{W}_1(\varphi(t, x_o)) = 0$  para todo  $t \in I$ ,

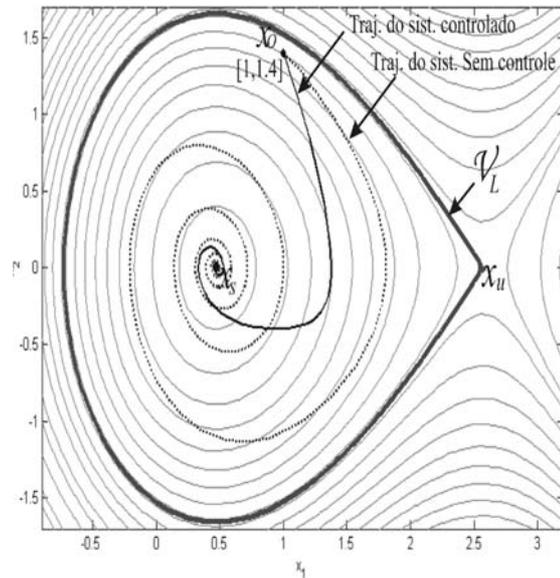


Figura 2: Diagrama de fases, considerando a FEC.

isto é,  $[1 + kg^2(x)]x_2^2 = 0$  para todo  $t \in I$ . Como o termo entre colchetes na igualdade anterior é sempre positivo para  $k > 0$ , obrigatoriamente  $x_2 = 0$  para todo  $t \in I$ . Consequentemente,  $\dot{x}_1 = 0$  para todo  $t \in I$  o que significa que no intervalo  $I$  a solução é um ponto de equilíbrio. Da unicidade de soluções, tem-se que  $x_o$  é um ponto de equilíbrio, mas isto contraria o fato de que  $x_o \notin E$ . Portanto, a condição (ii) da definição 4.1 é atendida para todo  $k > 0$ . Para provar a condição (iii), observa-se que  $x_2(t)$  é sempre limitada para  $t \geq 0$ . Isto é uma consequência direta da fórmula da variação das constantes aplicada a segunda equação diferencial do sistema (5). Então, se  $W_1$  é limitada para todo  $t \geq 0$ , então, necessariamente  $x_1(t)$  é limitada para todo  $t > 0$ . Portanto a condição (iii) é atendida. Para estimar a região de estabilidade do ponto de equilíbrio  $x^s$ , deve-se encontrar o maior número  $L \in \mathbb{R}$  tal que as condições do Teorema 4.2 sejam satisfeitas. Neste exemplo, a melhor estimativa da região de estabilidade na forma de um conjunto de nível da função  $\mathcal{V}_1$  é obtida escolhendo-se, em acordo com o teorema 4.3,  $L = \mathcal{V}_1(x^u) = 1,3740$ , ou seja,  $L$  é a energia do único ponto de equilíbrio na fronteira da região de estabilidade de  $x^s$ . A figura 2, ilustra a estimativa da região de estabilidade. Observe que  $x^s$  é o único ponto de equilíbrio contido em  $\mathcal{V}_L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{V}_L < 1,3740\}$ . Portanto, (8) é uma FEC do sistema (5). As trajetórias do sistema, sem e com a ação da lei de realimentação (11), podem ser observadas na figura 2. Note que (11) é eficaz no amortecimento de oscilações, sendo capaz de estabilizar o sistema em  $x^s$ , para qualquer que seja  $x_o \in \mathcal{V}_L$ . Além disso, com a função energia proposta, pode-se mostrar que a estimativa da região de

estabilidade do sistema em malha fechada é pelo menos tão grande quanto a estimativa da região do sistema em malha aberta, ou seja, consegue-se melhor desempenho em amortecimento das oscilações sem prejuízo a região de estabilidade do sistema.

### 6.2.2 Solução utilizando uma FEGC

Na subseção anterior, mostrou-se que (5) possui uma FEC. Apesar disto, uma FEGC será proposta com o objetivo de ilustrar o teorema 5.2. Para isto, considere a função candidata a FEGC:

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2}x_2^2 - ax_1 - b \cos(x_1) + \beta x_2 z(x) + \alpha, \quad (13)$$

onde  $z(x) = f(x) + dx_2$ ,  $\beta$  é um parâmetro a ser determinado e  $\alpha$  é o valor da função  $\mathcal{V}_2$  calculada em  $x^s$ . Considerando  $u = h(x)$ , a derivada de (8) ao longo das trajetórias de (5) é dada por:

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = - \begin{bmatrix} z(x) \\ x_2 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} z(x) \\ x_2 \end{bmatrix} - c \cos(x_1)x_2 + (g(x)x_2 + \beta z(x)g(x))h(x) \quad (14)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} -\beta & \frac{d}{2}\beta \\ \frac{d}{2}\beta & d - \beta(-b \cos(x_1) + c \sin(x_1)) \end{bmatrix}$$

Observe que  $\dot{\mathcal{V}}_2$  é composta por um termo quadrático  $Q$  dependente do parâmetro  $\beta$ . Este parâmetro deve ser determinado de tal forma que a matriz  $Q$  seja definida positiva. Aplicando o critério de Sylvester pode-se facilmente demonstrar que isto é garantido se

$$-\frac{d}{\frac{d^2}{4} + b + c} < \beta < 0.$$

Neste exemplo, considere  $\beta = -0,0339$ . O sinal do terceiro termo de (14),  $(g(x)x_2 + \beta z(x)g(x))h(x)$ , é dependente da lei de realimentação de controle  $h(x)$ . O sinal do segundo termo de (14) é indefinido. Com o objetivo de aumentar o número de termos definidos negativos em (14), escolhe-se

$$h(x) = -k [g(x)x_2 + \beta g(x)z(x)], \quad (15)$$

onde  $k > 0$  é um parâmetro do controlador a ser determinado. Neste exemplo, considera-se  $k = 0,5$ . Desta forma, tem-se

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = - \begin{bmatrix} z(x) \\ x_2 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} z(x) \\ x_2 \end{bmatrix} - c \cos(x_1)x_2 - k (g(x)x_2 + \beta z(x)g(x))^2 \quad (16)$$

O termo  $-c \cos(x_1)x_2$  será responsável por gerar regiões nas quais a derivada de  $\mathcal{V}_2$  é positiva. O conjunto  $\mathcal{C}$ , da definição 5.1, é composto pela união de componentes conexas

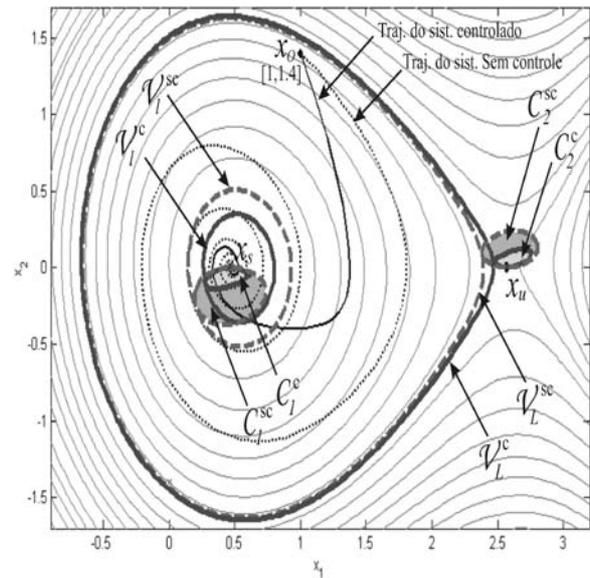


Figura 3: Diagrama de fases, considerando a FEGC

localizadas nas proximidades dos pontos de equilíbrio. A figura 3 mostra as duas componentes que serão de nosso interesse considerando o sistema com e sem controle. A componente  $\mathcal{C}_2$  está próxima ao ponto de equilíbrio instável  $x^u$  ao passo que a componente  $\mathcal{C}_1$  está próxima ao ponto de equilíbrio estável  $x^s$ . Claramente, a condição (i) da definição 5.1 é satisfeita. Utilizando argumentos similares aqueles utilizados na seção 6.2.1, demonstra-se que a condição (ii) da definição 5.1 também é satisfeita e portanto, a função (13) é uma FEGC do sistema (5). Além disso, pode-se mostrar que (13) é uma FEG de (5) do sistema (5) em malha aberta. O máximo valor de  $\mathcal{V}_2$  em  $\bar{\mathcal{C}}_1$  define o conjunto  $\mathcal{V}_l = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{V}_2 < l\}$ . Neste exemplo, obteve-se  $l^c = 0,0605$  para o sistema controlado e  $l^{sc} = 0,1286$  para o sistema sem controle. Para estimar a região de estabilidade, procura-se pelo maior número  $L$  tal que as condições do teorema 5.2 sejam satisfeitas. Na prática, deve-se garantir que  $\mathcal{V}_L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{V}_2 < L\}$  não intercepte a componente  $\mathcal{C}_2$ , próxima ao ponto de equilíbrio instável. Neste exemplo, obteve-se respectivamente  $L^c = 1,3486$  e  $L^{sc} = 1,3253$  para o sistema com e sem controle. Observando a figura 3 verifica-se que  $\mathcal{C}_1^{sc} \subset \mathcal{V}_l^{sc} \subset \mathcal{V}_L^{sc}$  e que  $\mathcal{C}_1^c \subset \mathcal{V}_l^c \subset \mathcal{V}_L^c$ .

As trajetórias do sistema, sem e com a ação da lei de realimentação (15), podem ser observadas na figura 3. A lei de realimentação (15) é eficaz no amortecimento de oscilações, sendo capaz de estabilizar o sistema no maior conjunto invariante  $H$  contido em  $\mathcal{V}_L$ , que neste caso é o ponto de equilíbrio  $x^s$ . Na figura 3, comparando os conjuntos  $\mathcal{C}_1^c$  e  $\mathcal{C}_2^c$  (sistema com o controle (15)), com os conjuntos  $\mathcal{C}_1^{sc}$  e  $\mathcal{C}_2^{sc}$

(sistema sem controle,  $k = 0$  em (15)), pode-se observar que a lei de realimentação de controle (15) é eficiente na redução das regiões de derivada positiva da função (13). Esta redução implica em uma estimativa um pouco menos conservadora da região de estabilidade se comparada a estimativa obtida em malha aberta.

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, os conceitos de função energia de controle (FEC) e função energia generalizada de controle (FEGC) foram propostos. As implicações da existência de uma função energia e uma função energia generalizada em termos dos conjuntos limites foram estudadas. Mostra-se que os conjuntos  $\omega$ -limites de sistemas com funções energia são pontos de equilíbrio e que os conjuntos limites de sistemas com funções energia generalizada interceptam o conjunto de derivada não negativa. A FEC foi proposta utilizando o conceito de função energia apresentado em (Chiang et al., 1988). A principal vantagem da teoria proposta, quando comparada com a tradicional FLC, é a possibilidade de obter uma lei de realimentação de controle, para a estabilização do sistema, e também estimativas ótimas da região de estabilidade do sistema em questão. A FEGC é proposta utilizando as idéias da extensão do princípio de invariância de LaSalle apresentado em (Rodrigues et al., 2000; Rodrigues et al., 2001). A função energia generalizada de controle permite que a derivada da FEGC possua regiões limitadas, no espaço de estados, de derivada positiva. Com isto, uma classe maior de sistemas não lineares pode ser tratada via esta teoria. A FEGC permite obter uma lei de realimentação de controle para estabilização de conjuntos atrativos de sistemas não lineares, e também uma estimativa de sua região de estabilidade. Em situações particulares, pode-se provar, utilizando funções energia generalizadas de controle, estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio em malha fechada.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- Alberto, L. F. C. (2000). *O Princípio de Invariância de LaSalle Estendido Aplicado ao Estudo de Coerência de Geradores e à Análise de Estabilidade Multi-Swing*, Tese de Doutorado da Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- Alberto, L. F. C. (2006). *Caracterização e Estimativas da Área de Atração de Sistemas Dinâmicos Não Lineares*, Tese de Livre-Docência da Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- Alberto, L. F. C. and Chiang, H. D. (2008). Generalized energy functions theory and stability region characterization of complex nonlinear systems, *submetido para possível publicação no IEEE Trans. on Automatic Control*.
- Artstein, Z. (1983). Stabilization with relaxed controls, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application* **7**(11): 1163–1173.
- Chiang, H., Hirsch, M. and Wu, F. (1988). Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **33**(1): 16–27.
- Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Rifford, L. and Stern, R. J. (2000). Feedback stabilization and Lyapunov functions, *SIAM J. Control Optim.* **39**(1): 25–48.
- Fallside, F. and Patel, M. R. (1965). Step-response behaviour of a speed-control system with a back-e.m.f. nonlinearity, *Proc. of the IEE* **112**(10): 1979–1984.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1993). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York.
- Jurdjevic, V. and Quinn, J. P. (1978). Controllability and stability, *Journal of Differential Equations* **28**: 381–389.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall - New Jersey.
- LaSalle, J. P. (1976). *The Stability of Dynamical Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Martins, A. C. P., Alberto, L. F. C. and Bretas, N. G. (2006). Uniform estimates of attractor sets of extended lure systems using lmi's, *IEEE Transactions on Automatic Control* **51**: 1675–1678.
- Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. and Bretas, N. G. (2000). On the invariance principle. generalizations and applications to synchronism, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **47**(5).
- Rodrigues, H. M., Alberto, L. F. C. and Bretas, N. G. (2001). Uniform invariance principle and synchronization. robustness with respect to parameter variation, *Journal of Differential Equations* **169**(1): 228–254.
- Sontag, E. (1983). A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability, *SIAM J. Control Optim.* **21**(3): 462–471.
- Sontag, E. (1989). A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization, *System & Control Letters* **13**: 117–123.

Sontag, E. (1990). *Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional Systems*, Springer-Verlag - New York.