

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE DO PROBLEMA DE FRATURAMENTO  
HIDRÁULICO UTILIZANDO O MÉTODO NUMÉRICO DOS  
ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO**

**JORDANA GARRIDO SILVA SABA**

**ORIENTADOR: MANOEL PORFÍRIO CORDÃO NETO, D.Sc.**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM GEOTECNIA**

**BRASÍLIA/DF: MARÇO/2017**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**ANÁLISE DO PROBLEMA DE FRATURAMENTO**  
**HIDRÁULICO UTILIZANDO O MÉTODO NUMÉRICO DOS**  
**ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO**

**JORDANA GARRIDO SILVA SABA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE**  
**ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO**  
**PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE**  
**MESTRE.**

APROVADA POR:

---

Manoel Porfírio Cordão Neto, DSc. (ORIENTADOR)

---

Márcio Muniz de Farias, PhD (EXAMINADOR INTERNO)

---

Raydel Lorenzo Reinaldo, DSc. (EXAMINADOR EXTERNO)

DATA: BRASÍLIA/DF, 29 DE MARÇO DE 2017.

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

SABA, JORDANA GARRIDO SILVA

Análise do problema de fraturamento hidráulico utilizando o método numérico dos elementos finitos estendido. [Distrito Federal] 2017

xix,108p.,297mm (ENC/FT/UnB, Mestre, Geotecnia, 2017)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

1. Fraturamento Hidráulico

2.XFEM

3. Modelo PKN

4.Hidromecânico

I. ENC/FT/UNB

II. Título (série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

Saba, J.G.S. (2017 Análise do problema de fraturamento hidráulico utilizando o método dos elementos finitos estendido. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM-283/2017, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 108p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Jordana Garrido Silva Saba

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Análise do problema de fraturamento hidráulico utilizando o método numérico dos elementos finitos estendido.

GRAU / ANO: Mestre / 2017

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Jordana Garrido Silva Saba

SQSW 104 Bl. D apt. 605 - Sudoeste

70670-301- Brasília/DF- Brasil.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pelo dom da vida, por me orientar e me ajudar a superar as minhas limitações.

Aos meus pais, agradeço pelo suporte, amor e confiança em mim depositados. Aos meus avós e ao meu irmão agradeço pelo carinho e incentivo.

Gostaria de agradecer ao meu orientador pela paciência e dedicação em ensinar e à Leticia Morais que se dispôs a ajudar sempre que foi necessário. Obrigada pelo suporte e incentivo na realização deste trabalho e pelas oportunidades oferecidas para o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço ao meu namorado pelo apoio, carinho e pela paciência.

Obrigada à Universidade de Brasília, a todo o corpo docente e funcionários que auxiliaram e tornaram possível a conclusão do meu Mestrado. À CAPES e ao CNPq pelo financiamento.

A todos os outros familiares e amigos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, eu agradeço.

## RESUMO

O fraturamento hidráulico (FH) é uma técnica de estimulação de poço que consiste em injetar um fluido viscoso sob alta pressão em rochas reservatórios. O diferencial de pressão gerado pela injeção do fluido inicia uma fratura que se propaga pela rocha, facilitando a extração dos hidrocarbonetos presentes na rocha. Embora seja uma técnica eficiente para a estimulação de poços, gera muitas polêmicas ambientais, relacionadas à poluição. Uma forma de mitigar os impactos ambientais e acidentes é estudar a fundo esse procedimento. O (FH) pode ser usado para a estimulação de poços e para exploração de fontes não convencionais de petróleo. O método dos elementos finitos estendido (XFEM) foi aplicado neste trabalho para simular as descontinuidades geradas pelas fraturas nos campos de tensão e deformação. Foi implementada uma lei de fluxo no programa de Morais (2016) que aproximasse o regime de fluxo dentro da fratura e feita uma série de simulações. Além disso, foi implementado o elemento triangular quadrático no lugar do elemento era quadrilátero com quatro nós, no código de Morais (2016), entretanto, observou-se que o elemento anteriormente implementado por Morais (2016) é mais adequado para a resolução do problema. Diversas simulações foram realizadas para entender como diferentes parâmetros relacionados ao fluxo podem afetar o processo de fraturamento hidráulico. Por fim, concluiu-se nesta dissertação que parâmetros como a geometria da secção transversal, a viscosidade do fluido de fraturamento e a permeabilidade da matriz rochosa influenciam no fenômeno de fraturamento.

Palavras chave: fraturamento hidráulico, geotecnia, petróleo, integral J, fluxo, lei cúbica, PKN.

## ABSTRACT

Hydraulic fracturing (HF) is a well stimulation technique that consists of injecting a viscous fluid under high pressure into a rock reservoir. The differential of pressure generated by the injection of the fluid initiates a fracture that propagates through the rock, increasing the extraction of the hydrocarbons located inside the rock. Although it is an efficient technique for stimulating wells, it generates many environmental controversies related to pollution. One way to mitigate environmental impacts and accidents is to study this procedure thoroughly. The HF can be used not only for stimulation of wells but also for exploration of unconventional reservoirs of petroleum. The extended finite element method (XFEM) was applied in this research to simulate the discontinuities generated by fractures in the stress and strain fields. A flow law was implemented in the Morais (2016) code that approximates the regime of flow within the fracture and series of simulations were made. In addition, the quadratic triangular element was implemented in place of the quadrilateral element with four nodes, in the Morais (2016) code; however, it was observed that the element previously implemented by Morais (2016) is more adequate to compute this problem. Several simulations were performed to understand how the different parameters related to the flow can affect the hydraulic fracturing process. Finally, it was concluded in this dissertation that parameters such as cross-section geometry, fracturing fluid viscosity and rock matrix permeability influences the fracturing phenomenon.

Key words: hydraulic fracturing, geotechnics, petroleum, integral J, flow, cubic law, PKN.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 APRESENTAÇÃO .....	1
1.2 IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA .....	2
1.3 JUSTIFICATIVA.....	2
1.4 HIPÓTESE .....	4
1.5 OBJETIVOS.....	4
1.6 METODOLOGIA DE PESQUISA .....	4
1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	5
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA- FRATURAMENTO HIDRÁULICO.....	7
2.1. ETAPAS DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO .....	8
2.1.1. SELEÇÃO DO POÇO A SER FRATURADO.....	8
2.1.2. PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO .....	9
2.1.3. PERFURAÇÃO DO POÇO .....	11
2.2. MODELOS DE PROPAGAÇÃO DAS FRATURAS .....	12
2.2.1 MODELO PKN.....	13
2.2.2. MODELO KGD .....	13
2.2.3. MODELO RADIAL.....	14
2.3. DIFICULDADES NO PROCESSO DE FRATURAMENTO.....	15
2.4. ASPECTOS AMBIENTAIS .....	15
2.5. MECÂNICA DAS FRATURAS.....	19
2.5.1 MODOS DE FRATURA E FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO (SIF).....	20
2.5.2 BALANÇO DE ENERGIA PARA PROPAGAÇÃO DE FRATURA .....	21
2.5.3 TENACIDADE .....	24
2.5.4 CAMPOS DE DESLOCAMENTO E DE TENSÃO NA ÁREA DA PONTA DA FRATURA .....	24
2.6 FLUXO EM FRATURAS.....	26
2.7 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO APLICADO A MODELAGEM DE FRATURA.....	28

2.7.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO .....	29
2.7.2 MÉTODO DE PARTIÇÃO DE UNIDADES.....	30
2.7.3 MÉTODO <i>LEVEL SET</i> (LSM) .....	32
2.7.4 <i>HEAVISIDE JUMP FUNCTION</i> OU FUNÇÃO DEGRAU.....	33
2.7.5 <i>CRACK TIP FUNCTION</i> OU FUNÇÃO ASSINTÓTICA NA PONTA DA FRATURA .....	35
2.7.6 MODELAGEM FINAL DA FRATURA USANDO O X-FEM.....	36
2.7.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	37
2.7.8 ELEMENTOS MISTOS E HIERARQUIA DE ENRIQUECIMENTO .....	38
2.7.9 PREVISÃO DO CAMINHO DA FRATURA .....	38
2.7.9.1 MÁXIMA TENSÃO CIRCUNFERENCIAL.....	38
2.8 TRABALHOS MAIS RECENTES SOBRE SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO .....	39
2.8.1 SIMULAÇÃO DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO USANDO O <i>ABAQUS</i> .....	40
2.8.2 MODELAGEM GEOMECÂNICA DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO CONSIDERANDO A ESTRATIGRAFIA MECÂNICA DO DOMÍNIO .....	40
2.8.3 MODELAGEM DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO USANDO XFEM EM ROCHAS PARCIALMENTE SATURADAS.....	41
3. EMBASAMENTO TEÓRICO.....	43
3.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DO PROBLEMA .....	43
3.2 RESOLUÇÃO DO ACOPLAMENTO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS .....	45
3.2.1 SOLUÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO .....	46
3.2.2 SOLUÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE FLUXO.....	47
3.2.3 SÍNTESE DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS DO PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO EM MEIOS SATURADOS.....	48
3.2.4 SOLUÇÃO TEMPORAL PARA O SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS .....	48
3.3 DISCRETIZAÇÃO DA PARTE FRATURADA USANDO O XFEM.....	49
3.4 TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS POLARES EM COORDENADAS CARTESIANAS NA FUNÇÃO <i>CRACK TIP</i> .....	51
3.5 BALANÇO DE MASSA DE UM ELEMENTO FRATURADO.....	52
3.6 QUADRATURA DE GAUSS PARA ELEMENTO TRIANGULAR .....	54



3.6.1 REGRA PARA CALCULAR A QUADRATURA DE GAUSS DO ELEMENTO TRIANGULAR POR ZHANG et al.(2009).....	55
3.7. FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO (SIF).....	56
4. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO E VALIDAÇÃO DO CÓDIGO .....	61
4.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO NUMÉRICO .....	61
4.2 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO CALCULADO PARA UMA MALHA COM ELEMENTOS TRIANGULARES DE SEIS NÓS .....	64
4.2.1 PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO UNIDIMENSIONAL .....	64
4.2.2 PROBLEMA DE DEFORMAÇÃO PLANA .....	65
4.2.3 VALIDAÇÃO DA FUNÇÃO <i>HEAVISIDE</i> .....	67
4.3 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO CALCULADO PARA UMA MALHA COM ELEMENTOS QUADRADOS COM QUATRO NÓS .....	70
4.3.1 PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO UNIDIMENSIONAL .....	70
4.3.2 PROBLEMA DE DEFORMAÇÃO PLANA .....	71
4.3.3 VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO (XFEM).....	71
5. SIMULAÇÃO DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO.....	79
5.1 ANÁLISE DO REGIME DE FLUXO .....	80
5.2 TESTE DO PASSO DE TEMPO.....	80
5.2.1 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO $k_p$ NO REGIME DE FLUXO .....	83
5.2.2 ANÁLISE DO REGIME DE FLUXO CONTROLADO PELA LEI CÚBICA x REGIME DE FLUXO CALCULADO EM FUNÇÃO DA PERMEABILIDADE DA MATRIZ .....	87
5.2.3 INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DA SECÇÃO TRANSVERSAL DA FRATURA NO REGIME DE FLUXO .....	94
6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	104
APÊNDICE A.1 .....	107

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 2.1 Modelos de propagação de fratura e suas respectivas características.

Tabela 2.2 Geometria da secção transversal da fratura e dados adicionais

Tabela 3.1 Regra para calcular as coordenadas dos pontos de Gauss.

Tabela 4.1 Resultados obtidos para a viga bi apoiada (Morais, 2016).

Tabela A.1- Pesos e abscissas para calcular a quadratura de Gauss com 16 pontos e 46 pontos do elemento triangular (ZHANG et al., 2009).

Tabela A.2- Pesos e abscissas para calcular a quadratura de Gauss com 88 pontos para o triângulo (ZHANG et al., 2009).

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 Bacias Brasileiras com potencial presença de *shale gas* (modificada- EIA, 2013).
- Figura 1.2 Principais aquíferos brasileiros (geografalando, 2013).
- Figura 1.3 Fluxograma de atividades.
- Figura 2.1 Estrutura do fluxo para um poço não fraturado e para um poço fraturado (Castro, 2004).
- Figura 2.2 Tensões que atuam nas rochas das formações.
- Figura 2.3 Composição básica dos fluidos de fraturamento (Oliveira,2012).
- Figura 2.4 Fraturamento hidráulico (modificada - Aljazeera,2013).
- Figura 2.5 Ilustração da fratura no modelo PKN (Xiang, 2011).
- Figura 2.6 Ilustração esquemática da fratura no modelo KGD (Xiang, 2011).
- Figura 2.7 Geometria da fratura no modelo radial (modificada- Xiang, 2011).
- Figura 2.8 Poluição da Bacia de Campos pelo vazamento (horizontegeográfico, 2014)
- Figura 2.9 Comportamento esquemático de um material frágil (Oller, 2001).
- Figura 2.10 Modos de fraturamento (modificada - Oller, 2001).
- Figura 2.11 Decomposição da energia armazenada (modificada- Ollen, 2001).
- Figura 2.12 Variação da energia em função do comprimento da fratura (Oller, 2001).
- Figura 2.13 Secção transversal da fratura. a) Elíptica (Xiang, 2011); b) Losango (Morais, 2016); c) Retângulo.
- Figura 2.14 Modelagem de descontinuidades fortes e fracas: (a) Propagação de fratura em uma placa com orifício; (b) Modelagem pelo MEF usando refinamento da malha próxima à fratura; (c) MEF enriquecido usando uma malha uniforme cujos elementos cortados pela fratura e pelo orifício são enriquecidos (Khoei, 2015).
- Figura 2.15 Modelagem de descontinuidades fracas e fortes: (a) definição das interfaces incluindo descontinuidades fracas e fortes; (b) malha uniforme com elementos enriquecidos (em amarelo) e nós com graus de liberdade adicionados (círculos vermelhos) (modificada - Khoei, 2015)
- Figura 2.16 Função LSM para um problema bidimensional (Khoei, 2015).
- Figura 2.17 Representação da função *heaviside* (Khoei, 2015).
- Figura 2.18 Função *heaviside* e função *heaviside* transladada (Khoei, 2015).
- Figura 2.19 Função *Heaviside* x Função de forma.

Figura 2.20 Campo de tensão assintótico na ponta da fratura (modificada- Khoei, 2015).

Figura 2.21 Coordenadas polares na ponta da fratura (Morais, 2016).

Figura 2.22 Domínio padrão, enriquecido e misto (modificada- Khoei, 2015).

Figura 2. 23 Integração numérica de um elemento enriquecido: (a) maior número de pontos de Gauss; (b) subdivisão em elementos triangulares; (c) subdivisão em elementos quadrados (Khoei, 2015).

Figura 2.24 Ângulo de propagação da fratura.

Figura 3.1 Conservação da massa em um elemento unitário de solo (Cordão Neto, 2005).

Figura 3.2 Balanço de massa de um elemento fraturado

Figura 3.3 Caminho circular simples para o contorno da integral ao redor da ponta da fratura (Khoei, 2015).

Figura 3.4 Domínio da Integral J para calcular os fatores de intensidade de tensões no modo misto (Khoei, 2015).

Figura 4.1 Fluxograma do código de XFEM (Morais, 2016).

Figura 4.2 Problema de consolidação unidimensional de Terzaghi.

Figura 4.3 Curvas de consolidação - Resultado Analítico e Numérico

Figura 4.4 Malha e propriedades do problema de consolidação de deformação plana, vista no plano x-y (Cordão Neto, 2005).

Figura 4.5 Resultados da validação utilizando o problema de deformação plana de Biot.

Figura 4.6 Teste da função *heaviside* para fratura vertical. a) geometria do domínio e da fratura; b) Deslocamentos na direção x; c) geometria deformada

Figura 4.7 Teste da função *heaviside* para fratura vertical e inclinada: a) geometria do domínio e da fratura; b) deslocamentos na direção x; c) geometria deformada.

Figura 4.8 Teste da função *heaviside* para fratura horizontal: a) geometria do domínio e da fratura; b) deslocamentos na direção y; c) geometria deformada.

Figura 4.9 Resultado da validação realizada utilizando o problema de Terzaghi (Morais, 2016).

Figura 4.10 Resultados da validação utilizando o problema de deformação plana de Biot (Morais, 2016)

Figura 4.11 Viga Bi-apoiada (Morais, 2016)

Figura 4.12 Malha do problema e campo de distribuição de tensões da validação realizada (Morais, 2016).

Figura 4.13 Campo de distribuição de deslocamentos horizontais da validação realizada  $\delta(m)$  (Morais, 2016).

Figura 4.14 Viga em estado de deformação plana fraturada (Khoei,2015).

Figura 4.15 Malhas utilizadas para simulação do problema (Khoei,2015).

Figura 4.16 Esquema da variação do raio de integração da integral J no cálculo do SIF (Morais, 2016).

Figura 4.17 Comparação resultados dos campos de tensão obtidos (a)XFEM (Morais, 2016) com (b) XFEM (Khoei, 2015)  $\sigma$  (Kg/cm<sup>2</sup>).

Figura 4.18 Avaliação da influência da razão R/L no cálculo da SIF (Malha 15x45) (Morais, 2016).

Figura 4.19 Avaliação da influência da razão R/L no cálculo da SIF (Malha 25x45) (Morais, 2016)

Figura 4.20 Avaliação da influência da razão R/L no cálculo da SIF (Malha 45x135) (Morais, 2016).

Figura 4.21 Placa retangular fraturada (Tuan et al., 2014).

Figura 4.22 Avaliação da relação entre o comprimento da fratura e o erro da SIF (Malha 40x80) (Morais, 2016).

Figura 4.23 Avaliação da relação entre a tensão aplicada e o erro da SIF (Malha 30x60) (Morais, 2016).

Figura 4.24 Avaliação da relação entre a tensão aplicada e o erro da SIF (Malha 40x80) (Morais, 2016).

Figura 5.1 Malha usada para simular o fraturamento hidráulico

Figura 5.2 Teste do passo de tempo para fratura elíptica -  $k_w = 10 - 7\text{m/s}$  e  $k_p = 10 - 6\text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

Figura 5.3 Velocidade de propagação da fratura elíptica -  $k_w = 10 - 7\text{m/s}$  e  $k_p = 10 - 6\text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

Figura 5.4 Teste do passo de tempo para fratura elíptica -  $k_w = 10 - 6\text{m/s}$  e  $k_p = 10 - 6\text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

Figura 5.5 Teste do passo de tempo para fratura elíptica -  $k_w = 10 - 8\text{m/s}$  e  $k_p = 10 - 6\text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

Figura 5.6 Valores de KI ao longo do tempo para uma secção transversal elíptica-  $k_w = 10 - 6\text{m/s}$ .

Figura 5.7 Valores de KI ao longo do tempo para uma secção transversal elíptica-  $k_w = 10 - 7\text{m/s}$ .

Figura 5.8 Valores de KI ao longo do tempo para uma secção transversal elíptica-  $k_w = 10 - 8\text{m/s}$ .

Figura 5.9 Velocidade de propagação da fratura secção transversal elíptica-  $k_w = 10 - 6m/s$ .

Figura 5.10 Velocidade de propagação da fratura secção transversal elíptica -  $k_w = 10 - 7m/s$ .

Figura 5.11 Velocidade de propagação da fratura secção transversal elíptica - $k_w = 10 - 8m/s$ .

Figura 5.12 Variação da poropressão em relação ao comprimento da fratura-  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_w = 10 - 7m/s$ .

Figura 5.13 Comparação entre Morais (2016) e lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10 - 6m/s$ .

Figura 5.14 Comparação da velocidade de propagação da fratura entre Morais (2016) e lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10 - 6m/s$ .

Figura 5.15 Comparação da abertura das paredes da fratura entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10 - 6m/s$ .

Figura 5.16 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10 - 6m/s$ .

Figura 5.17 Comparação entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio igual a  $k_w = 10 - 6m/s$ .

Figura 5.18 Comparação da velocidade de propagação da fatura entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10 - 7m/s$ .

Figura 5.19 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10 - 7m/s$ .

Figura 5.20 Comparação da abertura das paredes da fratura entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10 - 7m/s$ .

Figura 5.21 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 5MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.22 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.23 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 5MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.24 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.25 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 5MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.26 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.27 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 5MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.28 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.29 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 5MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.30 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.31 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 5MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.32 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.33 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 5MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.34 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10 - 6m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.35 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

Figura 5.36 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10 - 7m/s$  e  $k_p = 10 - 7MPa.s^{0,8}$ .

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	parâmetro que depende da geometria da peça fraturada
$a_c$	comprimento crítico da fratura
$\bar{a}_{ij}$	graus de liberdade adicionais devido ao enriquecimento
$[B]$	matriz deformação-deslocamento
$b$	parâmetro que depende da geometria da peça fraturada
$b_i$	forças de corpo
$[B^a]$	matriz deformação-deslocamento enriquecida
$B^u$	matriz deformação-deslocamento sem enriquecimento
$[B_p]$	matriz gradiente-poropressão
$[C]$	matriz de acoplamento entre a fase sólida e a água
$C$	constante de fluxo
$C_{ef}$	compressibilidade efetiva do reservatório
$C_l$	coeficiente de vazamento
$c_v$	coeficiente de compressibilidade
$[D]$	matriz da relação constitutiva tensão-deformação
$E$	módulo de elasticidade
$F(r, \theta)$	Função <i>crack tip</i>
$\{F\}$	vetor de taxa de forças externas
$f(\alpha, \theta)$	função tangencial
$f(t^*)$	Função para avaliar os efeitos da poroelasticidade e do fator de intensidade de tensão na ponta da fratura
$\{f^h\}$	vetor de forças externas enriquecidas
$G$	módulo de rigidez
$G_f$	densidade total de energia dissipada
$G_s$	densidade específica
$h$	gradiente hidráulico
$H$	altura da fratura
$\{H\}$	vetor da relação constitutiva tensão-sucção
$[H]$	matriz de fluxo
$H(\xi)$	Função Heaviside
HAPs	perigosos poluentes do ar
$I$	integral de interação



$j$	matriz Jacobiana
$J$	integral J
$[K]$	matriz de rigidez
$K$	constantes para fluidos viscosos
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Fatores de intensidade de tensões (SIF)
$K_{Ic}$	Fatores de intensidade de tensões característico
$k_p$	constante constitutiva do fluido
$[L]$	matriz de acoplamento da fase sólida e da água
$L$	comprimento da fratura
$L_0$	comprimento inicial da fratura
$L_D$	comprimento adimensional
$M_c$	rigidez da fratura
$M_i$	massa de fluido que entranha matriz rochosa
$F_i$	massa de fluido que entra na fratura
$n$	constantes para fluidos viscosos
$[N]$	matriz de interpolação de deslocamento
$[N^a]$	matriz de interpolação de deslocamento enriquecida
$N_i$	funções de forma
$n_j$	vetor normal
$N^{Gauss}$	número de pontos de integração
$[N_p]$	matriz de interpolação de poropressões
$\{p\}$	vetor de poropressões nodais
$p$	pressão do reservatório
$p_0$	pressão do fluido existente nos poros
$p_D$	pressão adimensional
$pf$	pressão do fluido
$p_j$	função de enriquecimento
$q$	peso da função definido no domínio de integração
$q$	fluxo por unidade de altura da fratura
$Q$	fluxo do fluido
$\{q\}$	vetor de vazões nodais impostas
$r$	raio de integração para a <i>crack tip</i>
$S$	grau de saturação

$T$	temperatura do reservatório
$t$	tempo
$t_D$	tempo adimensional
$\{\dot{u}\}$	vetor de taxa de deslocamentos nodais
$\{u^h\}$	vetor de deslocamentos enriquecidos
$u_l$	velocidade do vazamento do fluido
$u^{enr}$	deslocamentos enriquecidos
$u^h$	deslocamentos totais (padrão+enriquecido)
$U_a$	energia de relaxação liberada
$U_e$	densidade de energia elástica de deformação por unidade de volume
$U^{int}$	densidade total de energia de deformação de um meio fissurado
$u_x, u_y, u_z$	deslocamento nas direções x,y,z respectivamente
$u_w$	poropressão
$U_\gamma$	densidade de energia necessária para criar uma nova superfície de fratura
$V$	volume total
$v_i$	velocidade da água
$W$	densidade de energia de deformação
$w$	abertura da fratura
$w_m$	peso de Gauss
$Wm$	abertura média da fratura
$w_D$	abertura adimensional
$w^e$	parcela da abertura controlada tensão líquida
$w^p$	parcela da abertura controlada pela pressão líquida
$W(y)$	função da área da seção transversal da fratura
$\{\dot{x}\}$	derivada temporal de uma variável x
$x_1$	direção da propagação da fratura
$\gamma_0$	relação entre a densidade do óleo e da água
$\gamma^0$	densidade de energia de superfície
$\gamma^p$	densidade de energia plástica
$\delta$	delta de Kronecker
$\delta\varepsilon^*$	deformações virtuais
$\delta u^*$	deslocamentos virtuais
$\varepsilon_{ij}$	tensor de deformações

$\varepsilon_v$	deformação volumétrica
$\varphi(x, t)$	função <i>level set</i>
$\eta$	coeficiente poroelástico
$\theta_w$	volume de água no solo
$\theta_c$	direção de propagação da fratura
$[k]$	matriz de condutividade
$k$	permeabilidade
$k_{ij}$	matriz de permeabilidade
$kp$	constante constitutiva do fluido
$\mu$	viscosidade dinâmica do fluido
$\nu$	Poisson
$\rho$	densidade
$\rho_0$	densidade do óleo
$\rho_w$	densidade da água
$\sigma_o$	tensão normal ao plano de fratura
$\sigma_f$	resistência do material a tração
$\sigma_{ij}$	tensor de tensões
$\sigma_n$	tensão normal a direção de propagação da fratura
$\tau$	tempo de chegada da ponta da fratura em x
$\partial\vartheta_f$	taxa de variação do volume da fratura
$\varphi(x)$	Função rampa
$\psi$	fator de forma dependente da geometria da secção vertical da fratura

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 APRESENTAÇÃO

A produção e o consumo de energia estão intimamente ligados ao desenvolvimento de uma nação e à qualidade de vida de seus habitantes. Em uma sociedade contemporânea a quantidade de energia que ela possui reflete na capacidade de causar mudanças na sua realidade e manter sua subsistência. O consumo de energia *per capita* varia em mais de três ordens de magnitude entre os países. Nas nações menos desenvolvidas da África, o consumo de energia é menor do que 100W/pessoa, enquanto em nações desenvolvidas esse valor excede 4000W/pessoa, chegando até 11.000W/pessoa nos Estados Unidos (Santamarina e Cho, 2011).

Desde a primeira revolução industrial que os combustíveis fósseis são a principal fonte de energia do mundo. O petróleo é uma mistura complexa de hidrocarbonetos e derivados orgânicos oxigenados, sulfurados ou/e nitrogenados. O termo petróleo engloba todas as formas naturais de hidrocarbonetos (gasoso, líquido e sólido). É um recurso natural, abundante na Terra, mas esgotável, considerado uma energia não renovável.

Apesar de o petróleo ser extremamente importante para o mundo, ele não está distribuído uniformemente. As nações participantes da Organização dos Países Exportadores de Petróleo (OPEP) possuem as maiores reservas de petróleo convencional explorável do mundo. Essas reservas estão localizadas no oriente médio, cujos países membros da OPEP são Arábia Saudita, Emirados Árabes Unidos, Irã, Iraque, Kuwait, Catar, na África os países membros são Angola, Argélia, Líbia e Nigéria, por fim os países membros da América do Sul são Venezuela e Equador. Outras nações que controlam o suprimento de combustíveis fósseis do mundo são as produtoras de gás natural, as três maiores potências em produção de gás são a Rússia, o Irã e o Catar, sendo que os dois últimos também participam da OPEP.

Os países citados sofrem com instabilidades políticas e econômicas, gerando um risco de desabastecimento aos países importadores de petróleo. Esse risco levou a busca de novas fontes de combustíveis e de energia, sejam elas renováveis ou não. Além do risco na segurança de abastecimento energético, a possibilidade de tornar-se energeticamente independente atrai os países na busca de novas fontes energéticas.

Embora as fontes de energia renováveis cumpram um importante papel na substituição de petróleo como fonte energética, elas não são suficientes para suprir a demanda energética e industrial. A partir disso, surge a necessidade de explorar novas fronteiras no território de produção de petróleo, como extrair petróleo de reservatórios em águas profundas, usar técnicas de estimulação de poço e buscar novas fontes não convencionais de hidrocarbonetos.

No Brasil, o fraturamento hidráulico já é utilizado como técnica de estimulação de poço, como ocorre no Campo de Frade, por exemplo. No entanto, explorar reservatórios não convencionais, como de gás de folhelho ainda não é legalizado.

O fraturamento hidráulico é uma técnica de estimulação muito usada em poços inativos e fontes não convencionais de petróleo. É um método que, se não for bem controlado e dimensionado, pode acarretar em impactos ambientais e sociais, tais como poluição de aquíferos, do ar e contaminação do solo. Estudar e prever o comportamento de fraturas induzidas por pressão de fluido torna-se essencial, afim de evitar contingências negativas para o meio ambiente.

Vem sendo desenvolvidos projetos na Universidade de Brasília (UnB) no sentido de criar um software que seja capaz de prever como o fraturamento hidráulico ocorre em rochas a grandes profundidades. Os projetos já desenvolvidos foram: Morais, (2013), Saba (2014), Martinez (2015) e Morais (2016). Na dissertação de Morais (2016), apesar de apresentar diversas evoluções em relação a outros trabalhos os resultados não consideraram a geometria da secção transversal da fratura e nem a viscosidades do fluido, isso por que não foi implementada uma lei de fluxo para a fratura que considerasse esses aspectos.

## **1.2 IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA**

Como estabelecer uma lei de fluxo que permita avaliar de maneira mais precisa o regime de fluxo dentro da fratura e o quanto esse regime influencia no processo de fraturamento.

## **1.3 JUSTIFICATIVA**

Aumentar a disponibilidade de fontes de petróleo pode ser uma forma de reerguer a economia no contexto atual. Considerando que o território brasileiro está avaliado como décimo maior reservatório de gás de folhelho (*Shale gas*) essa fonte de energia poderá ser considerada num

futuro próximo. No entanto, a forma de extrair o gás desses reservatórios, o fraturamento hidráulico, pode ser extremamente nociva ao meio ambiente. Como pode-se observar na Figura 1.1, as bacias de *shale gas* encontram-se em uma região muito próxima a rios e aquíferos, conforme pode-se observar ao comparar as Figuras 1.1 e 1.2.

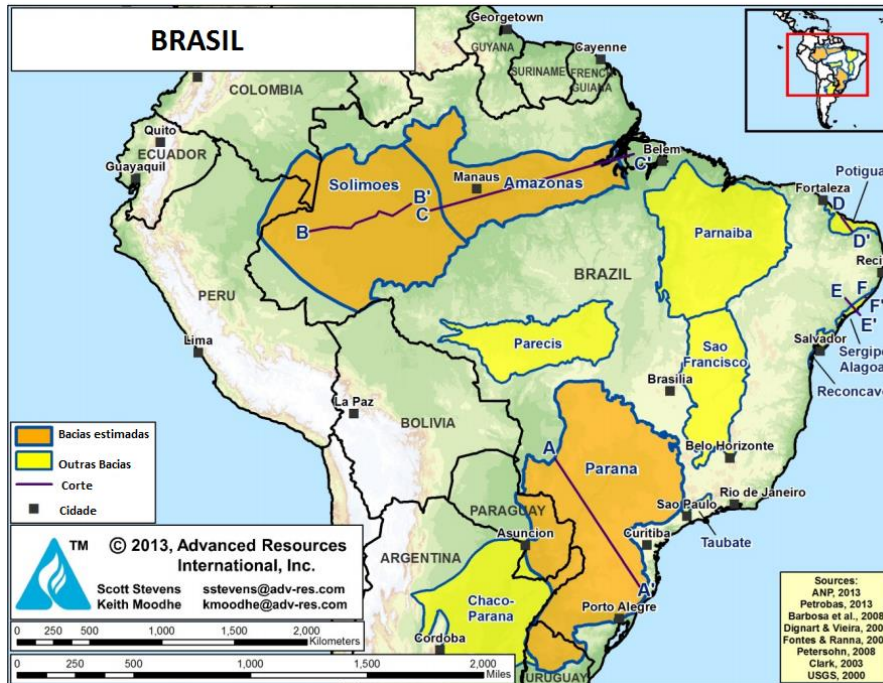


Figura 1.1 Bacias Brasileiras com potencial presença de *shale gas* (modificada- EIA, 2013).



Figura 1.2 Principais aquíferos brasileiros (geografalando, 2013).

Por essa razão torna-se essencial, para cogitar a exploração desses reservatórios, que sejam feitos estudos detalhados para prever como a fratura se propaga nas rochas a grandes profundidades.

A lei de fluxo interfere na forma como as poropressões irão se distribuir dentro da fratura, o quanto será a sua propagação e como ela pode influenciar no *leak off* (vazamento do fluido) para a rocha matriz.

#### **1.4 HIPÓTESE**

A hipótese para este trabalho de pesquisa é: “Uma lei cúbica semelhante à já estabelecida em outros estudos representa de maneira aproximada, não só o regime de fluxo dentro da fratura, como as propriedades do fluido”.

#### **1.5 OBJETIVOS**

Este trabalho tem como objetivo principal implementar uma lei de fluxo para a fratura de modo a considerar características geométricas da fratura, bem como as propriedades do fluido.

Além disso, esse trabalho tem como objetivos específicos:

- Implementar, em uma ferramenta já existente, elementos triangulares de seis nós, uma vez que esses elementos são mais adaptados a geometrias complexas;
- Inserir uma lei de fluxo que capture de maneira adequada a geometria da fratura e as propriedades do fluido;
- Mensurar a influência da geometria da fratura e da viscosidade do fluido no regime de fluxo e na propagação da fratura;

#### **1.6 METODOLOGIA DE PESQUISA**

Afim de atingir os objetivos propostos, nesta pesquisa serão seguidas as atividades apresentadas na Figura 1.3.

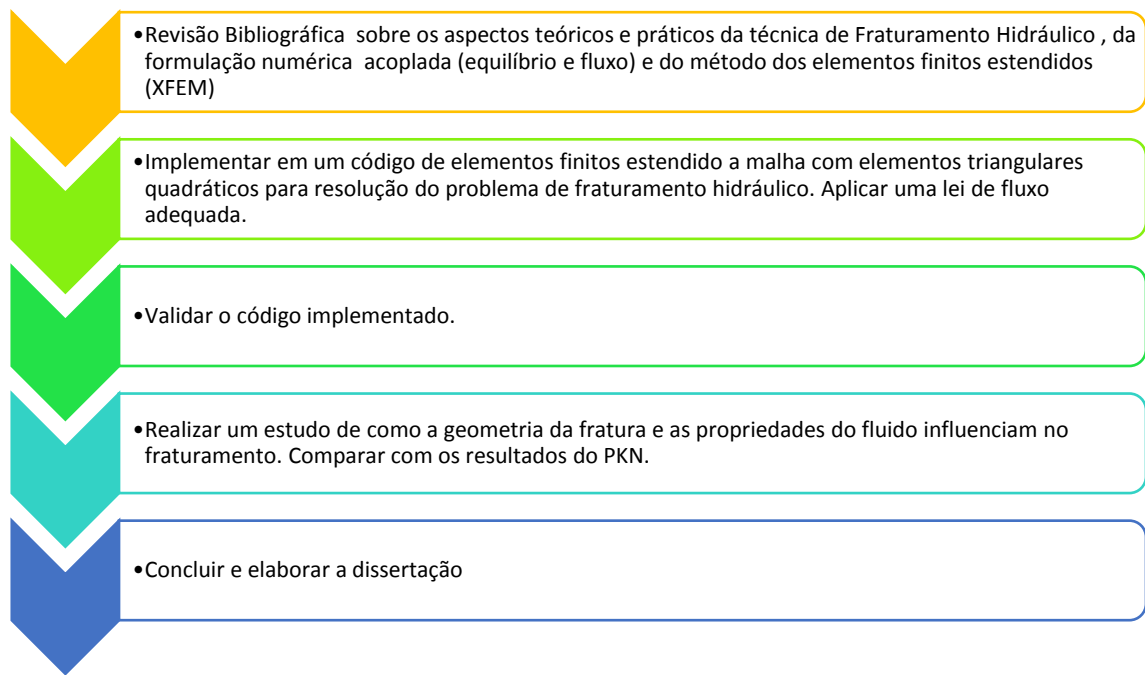


Figura 1.3 Fluxograma de atividades.

## 1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação possui a seguinte estrutura:

- Capítulo 1: apresenta a introdução ao presente trabalho sendo inicialmente apresentado o contexto geral do problema, a motivação os objetivos e a metodologia de trabalho. Além disso, é apresentada uma descrição geral de cada capítulo.
- Capítulo 2 é realizada uma revisão bibliográfica, primeiramente sobre fraturamento hidráulico. Em seguida se discorrerá sobre conceitos sobre geomecânica das rochas, sobre mecânica das fraturas, modelagem de fraturas e o Método dos Elementos Finito Estendido (XFEM).
- Capítulo 3: Neste capítulo são apresentadas as equações para resolução do fraturamento hidráulico de forma acoplada (equações de equilíbrio, continuidade e a lei de fluxo), levando em consideração o meio rochoso onde está inserida a fratura e a lei de fluxo dentro da fratura.
- Capítulo 4: fez-se validação do código desenvolvido para a resolução das equações do problema. Primeiramente é apresentado um fluxograma do código e as principais funções desenvolvidas, em seguida serão apresentadas as modificações feitas no código de Morais (2016), por fim as validações para avaliar a correta resolução pelo código de problemas de equilíbrio, problemas acoplados e problemas envolvendo fraturas.



- Capítulo 5: é feita a simulação do problema de Fraturamento Hidráulico com a lei de fluxo cúbica implementada, sendo apresentados os principais resultados obtidos e fazendo uma comparação com os resultados do PKN (Xiang, 2011).
- Capítulo 6: Foram registradas as conclusões de todo o trabalho e sugeridas novas pesquisas na mesma direção desta pesquisa.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA- FRATURAMENTO HIDRÁULICO

Este capítulo contém um estudo detalhado sobre a técnica de fraturamento hidráulico, abrangendo conceitos e modelos aplicados a essa técnica.

O fraturamento hidráulico (FH) é um método de estimulação de poços de petróleo. Esta técnica consiste em bombear um fluido em alta velocidade no interior da formação geológica, criando um alto diferencial de pressão. Este diferencial supera a resistência mecânica da rocha e a tensão a qual ela está submetida, gerando fraturas no maciço. O fluido injetado contém pequenas partículas sólidas, chamadas de propante, que ficam alojadas na fratura fazendo com que ela permaneça aberta.

O FH começou a ser estudado em 1947 nos Estados Unidos. Este método ganhou notoriedade, recentemente, graças à exploração de reservatórios não convencionais, sendo aplicado em reservatórios folhelho, cujos maciços têm baixíssima permeabilidade. O FH torna possível a extração de petróleo em tais maciços. Além disso, há outras aplicações para o FH como:

- Modificar o regime de fluxo do reservatório, o fluxo passa a ser linear dentro da fratura e pseudoradial nas regiões que circundam a fratura. Isso aumenta a área do reservatório exposta ao fluxo para o poço e criam-se caminhos com menor resistência. A Figura 2.1 ilustra como o fraturamento altera o fluxo na rocha.
- Ultrapassar regiões danificadas nas proximidades dos poços;
- Conectar regiões de maior porosidade efetiva;
- Conectar as fraturas naturais;
- Aumentar a área de exposição;
- Elevar o índice de produtividade de poços.

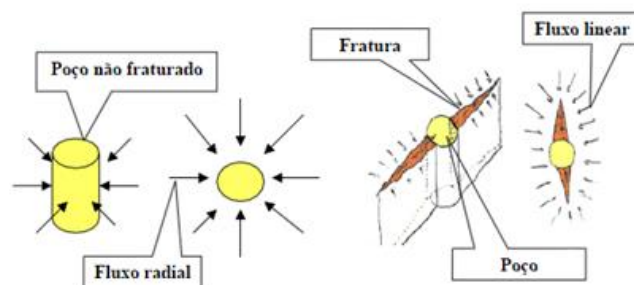


Figura 2.1 Estrutura do fluxo para um poço não fraturado e para um poço fraturado (Castro, 2004).

Os maciços rochosos estão submetidos a tensões nas três dimensões, resultantes do peso das formações superiores e de tensões horizontais. O estado de tensões também depende do processo de formação, cimentação e compactação da rocha. A Figura 2.2 exemplifica o estado de tensões atuante nas rochas de uma formação genérica.

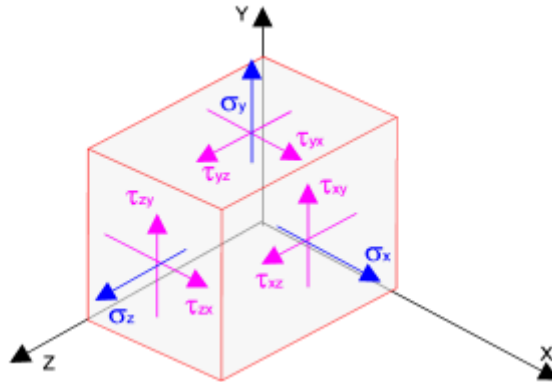


Figura 2.2 Tensões que atuam nas rochas das formações.

Os poços de petróleo têm grande parte de seus vazios preenchidos por fluido, possuem uma tensão geostática e quando outro fluido é injetado sob alta pressão a tensão interna na rocha aumenta. A partir do momento em que a tensão aplicada torna-se maior do que a resistência do maciço, forma-se uma fratura perpendicular ao plano de tensão principal mínima.

## 2.1. ETAPAS DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO

Nesta seção serão descritas todas as etapas do fraturamento hidráulico de forma a abranger todas as aplicações deste método.

### 2.1.1. SELEÇÃO DO POÇO A SER FRATURADO

O sucesso de uma operação de fraturamento depende da qualidade dos poços escolhidos. A seleção do poço deve levar em consideração inúmeras variáveis, dentre elas destacam-se: permeabilidade, distribuição de tensão in situ, viscosidade dos fluidos contidos no reservatório, fator de dano à formação, pressão do reservatório, profundidade do reservatório e condições mecânicas do poço (Oliveira, 2012).

No entanto, nem sempre a seleção do poço está relacionada a aspectos técnicos do reservatório e ao desempenho da fratura. Outros aspectos podem ser condicionantes para a escolha de um poço a ser fraturado como: proximidade a lençóis freáticos, limitações de pressão na cabeça do

poço, tubulações de baixa qualidade, falta de infraestrutura para o fraturamento, pressões e temperaturas elevadas no poço, dentre outros (Martin, 2010).

### **2.1.2. PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO**

Após a escolha do melhor candidato ao fraturamento, deve-se iniciar o planejamento da operação. O planejamento é determinante para garantir o sucesso do fraturamento. Envolve a coleta de dados para simulação, escolha de fluidos e dos propantes e análises mecânicas da formação. Esses passos serão descritos a seguir.

A coleta de dados é essencial para que possam ser feitas simulações do reservatório e das fraturas. Esses dados podem ser divididos em dois grupos: os que são controlados por engenheiros e geólogos e os que são estimados ou inferidos porque não se tem muita informação a respeito.

As informações do primeiro grupo envolvem características como completação, volume de tratamento, taxa de injeção, fluido de fraturamento, volume de propante, viscosidade, tipo de agente propante, aditivos contra perda de fluido, etc. Por outro lado, as informações do segundo grupo enquadram-se em medidas como profundidade de formação, tensões *in-situ* na zona de interesse e camadas adjacentes, permeabilidade e espessura do reservatório. Os dados do segundo grupo podem ser inferidos por meio de perfilagens, amostragens e testes de formação ou estimados através de poços de correlação (Oliveira, 2012).

Outra propriedade que deve ser observada na escolha do fluido é a viscosidade, esta deve ser baixa na coluna, evitando a perda de carga, mas alta durante a propagação e o fechamento da fratura, evitando que o agente de sustentação decante. A alta viscosidade garante também que seja aberta uma fratura de tamanho adequado.

Os principais fluidos usados são fluidos gelificados, água pura e água com cloreto de potássio, espuma em gel, ácidos e combinação de diferentes fluidos. Eles podem ser incorporados com aditivos com diversas funções, quais sejam, estabilizar a espuma, limpar a formação, reduzir a tensão superficial e inibir vazamentos. Os aditivos podem ser biocidas, surfactantes, ácidos oxidantes, emulsificantes e redutores de atrito. A Figura 2.3 tem os componentes do fluido de fraturamento em porcentagens.

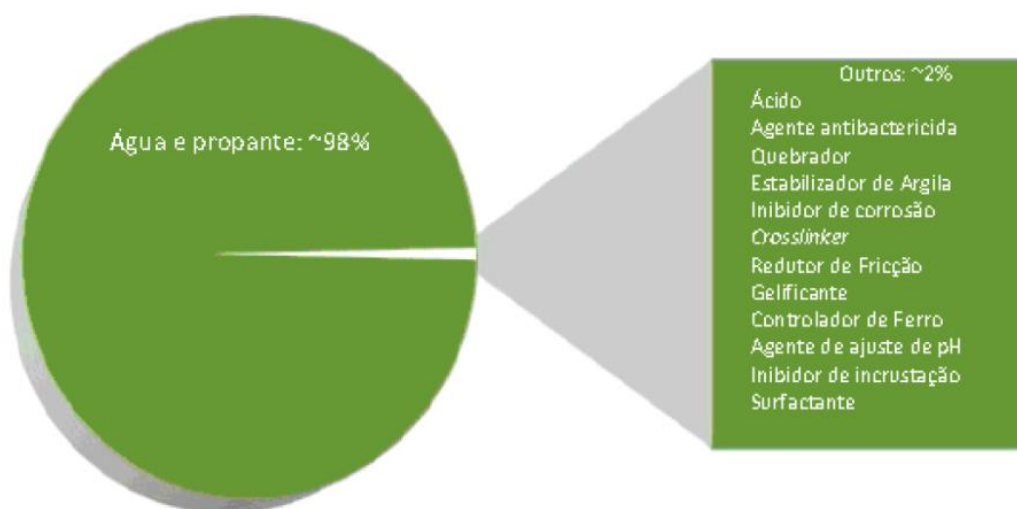


Figura 2.3 Composição básica dos fluidos de fraturamento (Oliveira,2012).

A escolha do agente propante é essencial para garantir um bom fluxo de extração de hidrocarbonetos no poço, pois ele é responsável por sustentar paredes das fraturas quando a injeção do fluido é cessada.

As principais propriedades a serem observadas na escolha do propante são: resistência ao esmagamento, tamanho das partículas e quantidade de finos, esfericidade e arredondamento dos grãos.

- **Resistência ao esmagamento:** Os propantes devem resistir às pressões internas impostas pelas rochas. A resistência de fechamento é dada pela diferença entre a pressão de fraturamento e a pressão do poço. A resistência do propante deve ser maior que a tensão de fechamento, para evitar o esmagamento dos grãos e conseqüentemente reduzir a produção de finos, que diminui a condutividade da fratura (Salas Cachay, 2004);
- **Tamanho das partículas e quantidade de finos:** Partículas de grandes diâmetros são o ideal para garantir bom fluxo nas fraturas. No entanto, elas são esmagadas com maior facilidade do que as de menor diâmetro. Complementarmente, grãos de menor dimensão, embora tenha baixa condutividade inicial, a condutividade é mais constante do que de grãos maiores, cuja condutividade reduz consideravelmente (Salas Cachay, 2004). Portanto, a escolha do diâmetro do propante depende da profundidade e do estado de tensões da rocha, além da condutividade desejada;
- **Esfericidade e arredondamento dos grãos:** o arredondamento determina o quanto as bordas do grão é pontiagudo e a esfericidade mede o quanto o grão se aproxima de uma

esfera. Quanto mais esféricos e uniformes forem os grãos, quando submetidos a altas pressões, menor é o esmagamento e, conseqüentemente, a produção de finos.

Após a escolha do local ideal para perfurar o poço, do fluido de fraturamento e do propante a ser adotado, pode-se dar início às atividades de perfuração, assunto que será explorado no item a seguir.

### **2.1.3. PERFURAÇÃO DO POÇO**

A perfuração do poço exige uma série de processos para viabilizar a produção de hidrocarbonetos com excelência e segurança ambiental. Inicialmente o processo de perfuração é similar à perfuração convencional do poço de petróleo. É feita a perfuração até a profundidade ideal para a produção, previamente determinada em projeto, retira-se a coluna de perfuração e injeta-se água sem aditivos para garantir a retirada dos sólidos do poço. Em seguida é colocado um tubo de aço e após a colocação do tubo, injeta-se cimento ao redor do tubo, para garantir que não vaze fluido para a matriz rochosa.

Os poços estimulados por fraturamento hidráulico se diferenciam dos demais após a perfuração do poço vertical. Neste momento, quando o poço já está na profundidade da rocha reservatório, faz-se necessária a perfuração horizontal da rocha, dando continuidade ao que já havia sido perfurado. O revestimento da parte horizontal do poço é semelhante ao da parte vertical.

Uma vez que o poço está cimentado, são injetados na parte horizontal, explosivos para gerar as fraturas iniciais, conduzindo à completação do poço. As explosões não influenciam na superfície, pois geralmente ocorrem em profundidades maiores do que 1,5 km. Uma vez que acontecem as explosões, dá-se início ao processo de fraturamento hidráulico. O fluido misturado com o propante é bombeado para dentro do poço, submetido a altas pressões. O diferencial de pressão faz com que as fraturas aumentem e o propante garante que as fraturas permaneçam abertas. Por fim, a produção pode ser iniciada. A Figura 2.4 apresenta um esquema de como é feito o fraturamento hidráulico.

Todo o processo de desenvolver um poço leva de três a cinco meses para terminar. Em média, se gastam três semanas para preparar o local, quatro a cinco semanas para perfurar o poço e um

a três meses para a completação, o que inclui um a sete dias de estimulação do poço (Marathon Oil Corps, 2012). Este processo de perfuração aplica-se para reservatórios folhelho, no caso de reativação de poço faz-se o fraturamento no poço pré-existente.

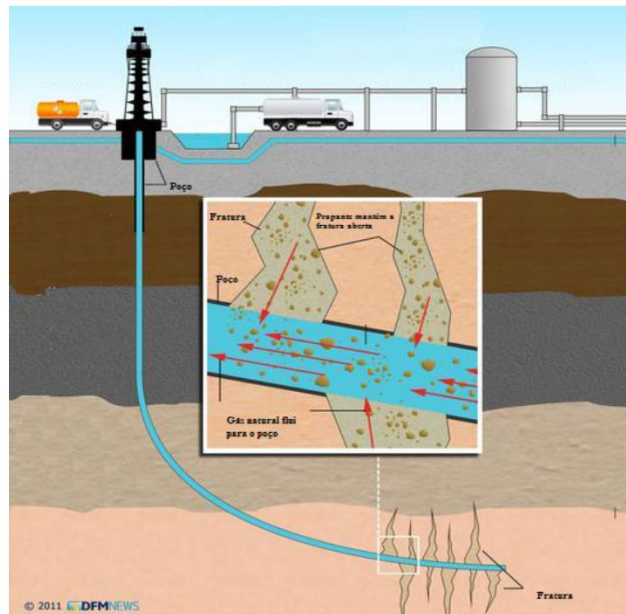


Figura 2.4 Fraturamento hidráulico (modificada - Aljazeera,2013).

## 2.2. MODELOS DE PROPAGAÇÃO DAS FRATURAS

Há vários modelos usados para definir aproximadamente o desenvolvimento da fratura. Variáveis como abertura e comprimento da fratura, fluxo dentro do poço e estados de tensão e deformação no maciço, são consideradas nesses modelos.

As fraturas podem ser classificadas em duas categorias, 2D e 3D. Para fraturas 2D há o modelo analítico de Perkins-Kern-Nordgren (PKN), o de Khristianovic-Geertsma-de.Klerk (KGD) e o modelo radial. Esses modelos fixam a altura da fratura e calculam as demais variáveis. Para fraturas 3D há o modelo de fratura totalmente tridimensional e o modelo de fratura pseudo-tridimensional (Xiang, 2011).

Nesta dissertação a fratura estudada é considerada bidimensional. Por esse motivo os modelos aplicados à fratura 2D serão detalhados abaixo.

### 2.2.1 MODELO PKN

Em 1961, Perkins e Kern desenvolveram um conjunto de equações para calcular o comprimento e a largura de uma fratura com a altura prefixada. Posteriormente, em 1972, Nordgren incrementou o modelo ao considerar que pode haver perda de fluido no processo de fraturamento. O modelo PKN assume que a resistência da fratura pode ser negligenciada, porque a energia necessária para a fratura propagar é significativamente menor do que o requerido para que o fluido flua ao longo do comprimento da fratura. Além disso, no campo de deformações e tensões, o problema tem comportamento de deformação plana no plano vertical. Esse modelo só pode ser adotado se o comprimento da fratura for muito maior do que a sua altura.

Para mecânica dos fluidos, o problema de fluxo no modelo PKN é considerado unidimensional em um canal elíptico (Figura 2.5).

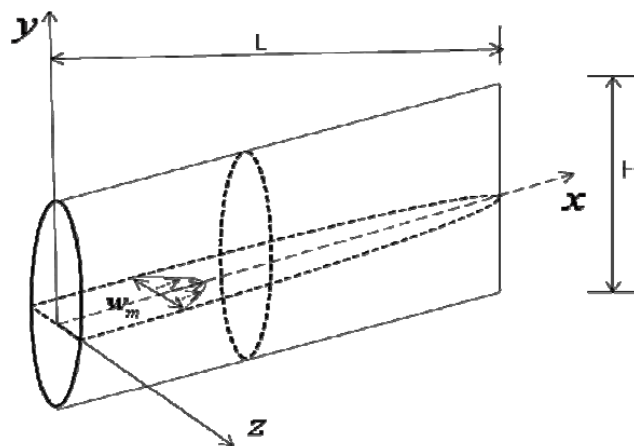


Figura 2.5 Ilustração da fratura no modelo PKN (Xiang, 2011).

A formulação do modelo PKN será detalhada nos subitens 2.6 e 3.5 desta dissertação.

### 2.2.2. MODELO KGD

Este modelo foi desenvolvido inicialmente por Khristianovitch e Zheltov em 1955 e por Geertsma e Klerk em 1969. Ele considera os efeitos da mecânica na ponta da fratura, simplifica a solução assumindo que a vazão e a pressão são constantes ao longo de quase todo o comprimento da fratura, exceto em uma pequena área próxima à ponta da fratura.



Nesse modelo a deformação plana é assumida no plano horizontal. Esse modelo só pode ser adotado se a altura da fratura é muito maior do que o seu comprimento (Xiang, 2011). A Figura 2.6 ilustra a geometria assumida para essa fratura.

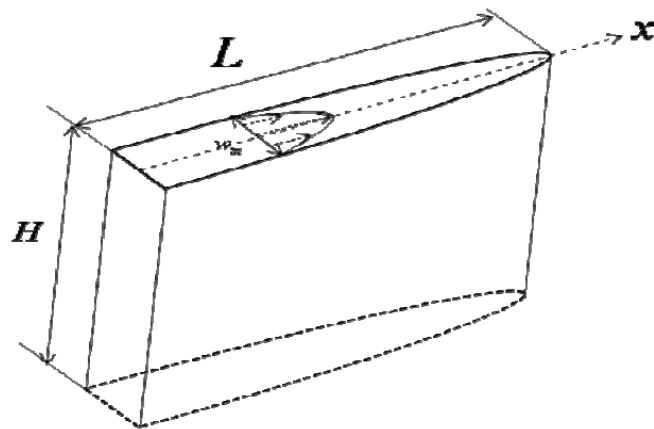


Figura 2.6 Ilustração esquemática da fratura no modelo KGD (Xiang, 2011).

### 2.2.3. MODELO RADIAL

Este modelo assume que a fratura se propaga ao longo de um plano e a geometria da fratura é simétrica em relação ao ponto em que os fluidos são injetados, como ilustrado na Figura 2.7. Nesse estudo, a pressão e a vazão de injeção do fluido são distribuídos uniformemente (Xiang, 2011).

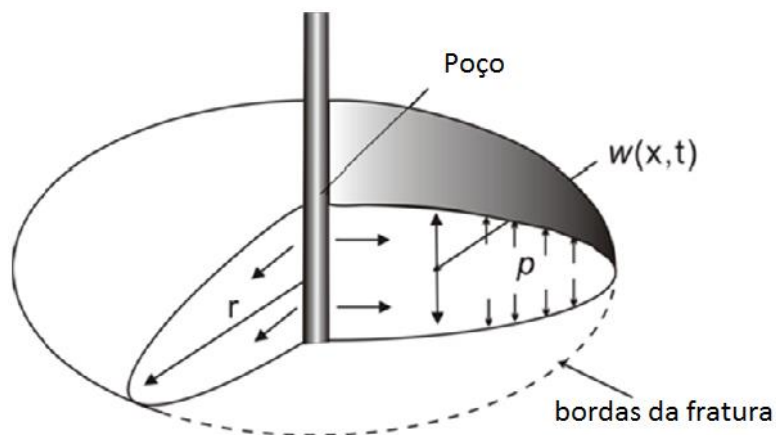


Figura 2.7 Geometria da fratura no modelo radial (modificada- Xiang, 2011).

A Tabela 2.1 resume os três modelos de propagação de fratura. No caso desta dissertação o modelo adotado é o PKN, por ser considerado o modelo que mais se aproxima do que ocorre em campo.

Tabela 2.1 Modelos de propagação de fratura e suas respectivas características.

Modelo	Hipóteses	Geometria	Aplicação
PKN	Altura Fixada Estado de Deformação Plana na direção vertical	Secção elíptica	Comprimento >> Altura
KGD	Altura Fixada Estado de Deformação plana na direção horizontal	Secção retangular	Comprimento << Altura
Radial	Propaga em um plano dado Simétrica ao poço	Secção Circular	Radial

### 2.3. DIFICULDADES NO PROCESSO DE FRATURAMENTO

Embora haja uma série de estudos e ferramentas computacionais para simular e prever o fraturamento, esse método ainda causa controvérsias no meio científico. Dentre as dificuldades de aplicar e simular o fraturamento, as principais são: o fluido não é newtoniano, seu regime é transiente e o fluxo não segue a Lei de Darcy, o caminho de crescimento da fratura não pode ser previsto com acurácia e facilidade, pode haver perda de fluido para fraturas pré-existentes no maciço, a estimativa de volume do reservatório nem sempre é precisa, além disso a permeabilidade do local pode ter sido má estimada (Morais, 2013).

Prever a evolução das fraturas é um processo bastante complexo e essencial para a eficiência e segurança da produção de folhelhos, mas é uma das maiores dificuldades encontradas no processo. O PKN, KGD e o modelo radial, citados no item anterior, foram criados para estudá-las, eles consideram a altura da fratura e o relacionam com o comprimento da abertura. Eles dão uma ideia de como a fratura se comporta, mas não são exatos.

### 2.4. ASPECTOS AMBIENTAIS

Assim como qualquer outra intervenção na natureza, o fraturamento pode causar impactos ambientais. Além disso, ONGs e ambientalistas alegam que essa técnica de exploração de hidrocarbonetos pode prender o universo energético aos combustíveis fósseis, concentrando os

investimentos na exploração de fontes não convencionais e estimulação de poço, deixando em segundo plano os investimentos em fontes de energia renovável. Prosseguir com altos investimentos na exploração de petróleo é uma ação contrária ao Acordo de Paris, assinado por 195 países, inclusive o Brasil.

Recentemente a *World Watch Institute*, concluiu que o risco ambiental mais significativo associado a estimulação de poço por fraturamento é similar ao associado com as técnicas convencionais de exploração de petróleo, incluindo a migração de gás e a contaminação de aquíferos, devido a poços com falhas na construção, rupturas, vazamentos subterrâneos e derramamento de esgoto e produtos químicos usados durante a drenagem e o fraturamento (Stevens, 2010).

Ou seja, diversos riscos operacionais representam ameaça ao meio ambiente, os principais deles são:

- Pequenas explosões;
- Terremotos em pequena escala;
- Incêndios;
- Vazamentos;
- Danos aos poços, decorrentes principalmente das etapas que compõe o fraturamento hidráulico;
- Contaminação de aquíferos devido a vazamentos.

Segundo Scheibe (IHU, 2013), “O *fracking* é tão agressivo do ponto de vista ambiental que pode causar a reabertura de fraturas e essas, conseqüentemente, se comunicarem com os aquíferos”.

Além disso, o processo de fraturamento hidráulico requer milhões de litros de água, misturada com compostos químicos e partículas propantes (areia ou partículas de cerâmica). No folhelho de Marcellus, que fica nos estados de Virginia, Pensilvânia e Nova York, por exemplo, o fraturamento de um poço pode demandar 3,8 milhões de litros a até 19 milhões de litros de água (Sunshine, s. d.).

O resíduo resultante do fraturamento, não pode ser despejado diretamente na natureza, mas deve ser tratado minuciosamente, para garantir a segurança da pureza da água para consumo. Há dois tipos de resíduo: (1) *flowback* - após o término do fraturamento hidráulico, a pressão no poço é liberada e a água e o excesso de propante voltam à superfície do poço; (2) água produzida após a drenagem e o fraturamento de um poço, a água volta para a superfície, carregando gás natural diluído. Parte dessa água provém do fraturamento e parte é resultado de formações geológicas naturais. O *flowback* e a água produzidos variam muito entre os poços e entre as diferentes formações de folhelho.

O resíduo do fraturamento hidráulico pode conter:

- Compostos químicos industriais como: sódio, ferro, magnésio, bário, estrôncio, manganês, metanol, cloro, sulfato, dentre outros;
- Hidrocarbonetos como: benzenos tóxicos, tolueno, etilbenzenos, e xilenos, que podem ser liberados durante a drenagem do gás;
- Materiais radioativos como: rádio, urânio e tório. A *U.S. Environmental Protection Agency* (EPA) estabelece limites para as concentrações de compostos radioativos no esgoto do fraturamento.

Portanto todo tipo de resíduo proveniente do fraturamento deve ser tratado. Se possível a preferência é que haja uma reciclagem dos metais dissolvidos.

Impactos ambientais decorrentes do FH já foram registrados no mundo. Nos Estados Unidos novas pesquisas registram a presença de químicos associados ao fraturamento que estão vazando dos poços de gás nos freáticos próximos. Um estudo feito por pesquisadores da *Duke University* que fica em Durham, no estado da Carolina do Norte, realizado nos arredores da Formação de Marcellus, que vem sendo explorada pelo fraturamento hidráulico, indicam que os aquíferos estão sendo contaminados devido às atividades de exploração. A última análise, feita em junho de 2013 concluiu que o contaminante é o próprio gás, que está sendo desviado para fora da terra, de uma profundidade de 2.000 a 3.000 metros. Os estudos revelaram que a contaminação é mais intensa nas proximidades dos poços e que a causa dos vazamentos é proveniente dos poços mal dimensionados, que permitem o vazamento do gás (Tollesfson 2013).

No dia 8 de novembro de 2011, houve um vazamento de cerca de 3.700 barris de petróleo cru no mar, na Bacia de Campos, no Campo de Frade, que ocorreu devido a uma fratura em um

poço aberto, permitindo que o óleo chegasse até o fundo do mar. O acidente poderia ter sido evitado se o projeto de dimensionamento tivesse seguido uma conduta mais segura, já que a empresa responsável estava ciente das incertezas geológicas da região (ANP, 2012).



Figura 2.8 Poluição da Bacia de Campos pelo vazamento (horizonte geográfico, 2014)

Portanto, conclui-se que medidas de segurança e avaliações de riscos devem ser aplicadas sempre que a técnica de FH for utilizada, não obstante, medidas de minimização de impactos ambientais devem ser aplicadas e seguidas rigorosamente em todos os poços estimulados por FH. Alguns países não consideram essas medidas suficientes e optaram por proibir a técnica em seu território, tais como França e alguns estados dos Estados Unidos (Buffalo e Pittsburgo). Em outros países, embora a técnica não seja proibida, sua permissão está em moratória, como no Canadá e na África do Sul.

## 2.5. MECÂNICA DAS FRATURAS

Neste item serão introduzidos conceitos da mecânica das fraturas, necessários para basear esta dissertação. São eles: balanço de energia, tenacidade, fator de intensidade de tensão (SIF), critérios de direção de propagação da fratura e lei cúbica de fluxo.

Para a engenharia, a fratura é considerada uma descontinuidade física em um meio. Com o estudo da mecânica das fraturas é possível calcular os campos de tensão e deformação nas proximidades da fratura, além disso, é possível prever se e como a fratura vai propagar comparando a tenacidade do material com as tensões às quais o meio está submetido (Oller, 2001). Um material é considerado frágil quando ele não resiste a pequenas deformações sem ruptura (Figura 2.9), enquanto um material é considerado dúctil se ele resistir a deformações plásticas sem sofrer ruptura.

Em 1913 Inglis iniciou os primeiros estudos de fratura e observou que ocorre uma concentração de tensões nas proximidades da descontinuidade, ao estudar uma placa finita com um orifício feita de material elástico. Com isso, estabeleceu o conceito de fator de concentração de tensões (SCF). No entanto, esse conceito era restrito à descontinuidade gerada por um orifício elíptico em uma placa, sendo posteriormente substituído pelo Fator de Intensidade de Tensões (SIF), desenvolvido por Irwin (1957).

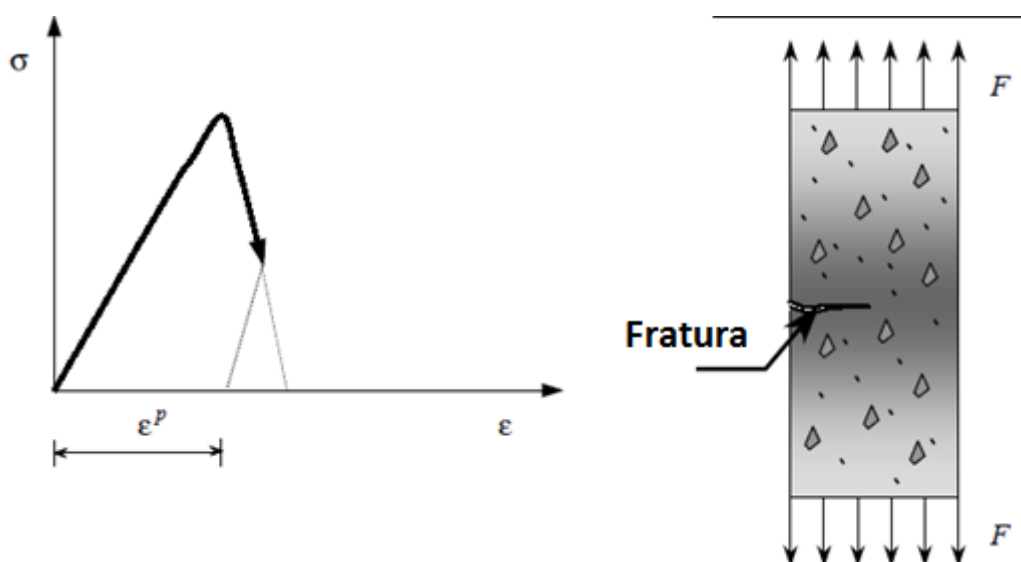


Figura 2.9 Comportamento esquemático de um material frágil (Oller, 2001).

A mecânica das fraturas lineares foi originalmente baseada em materiais de comportamento elástico, que seguem a lei de Hooke. Vários experimentos e teorias foram apresentados por

Orowan (1948), Irwin (1957) e Barenblatt (1962). Posteriormente, Irwin (1960) e Hutchinson (1976) estenderam os conceitos da mecânica das fraturas para materiais de comportamento não linear, como materiais de comportamento plástico (Khoei, 2015).

### 2.5.1 MODOS DE FRATURA E FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO (SIF)

Irwin (1957) introduziu o conceito dos fatores de intensidade de tensões, que servem para calcular a singularidade dos campos de tensão e deslocamento gerados nas proximidades da ponta da fratura. Os campos de tensão na ponta da fratura são assintóticos, tendendo ao infinito, isso motivou o estudo dos SIF (Mohammadi, 2008). A expressão que define os SIF foi estabelecida por Irwin (1957 a 1958) e Muskhelishvili (1953), eles adaptaram o método semi-inverso de Westergaard citado por Owen e Fawkes (1983) (Morais, 2016).

Há três modos de abertura da fratura (Figura 2.10), que descrevem movimentos cinéticos independentes (Oller, 2001):

- Modo I – modo de abertura: As faces da fratura se separam paralelamente e sofrem apenas esforço de tração;
- Modo II – Modo de deslizamento: quando as faces da fratura deslizam uma sobre a outra, gerando esforços tangenciais
- Modo III – Modo de deslizamento lateral: Uma face da fratura desliza lateralmente em relação a outra. Os esforços gerados neste modo também são tangenciais.
- 

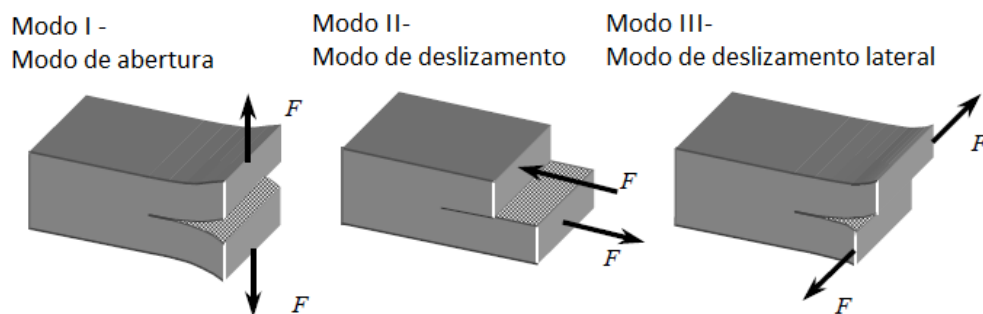


Figura 2.10 Modos de fraturamento (modificada - Oller, 2001).

Na prática o modo mais estudado é o Modo I. Ele é calculado analiticamente utilizando as tensões externas aplicadas no contorno do material. A equação está em função da fratura e do formato da peça fraturada:

$$K_I = \sigma_n \sqrt{b\pi a} f(\alpha, \theta) \quad (2.1)$$

onde  $b$  e  $a$  são parâmetros que dependem da geometria da peça,  $\sigma_n$  é a tensão normal à direção em que a fratura se propaga e a função  $f(\alpha, \theta)$  dependerá da geometria da peça fraturada, do tipo de carregamento ao qual ela está submetida e do modo de propagação de fratura.

Os SIF dos Modos II e III são calculados por meio de uma extensão do Modo I. As tensões normais são substituídas pelas tangenciais e a função  $f(\alpha, \theta)$  também dependerá da geometria da peça e do tipo de carregamento. Portanto os SIF dos Modos II e III são calculados, respectivamente, por:

$$K_{II} = \sigma_{xy} \sqrt{b\pi a} f_{II}(\alpha, \theta) \quad (2.2)$$

$$K_{III} = \sigma_{yz} \sqrt{b\pi a} f_{III}(\alpha, \theta) \quad (2.3)$$

## 2.5.2 BALANÇO DE ENERGIA PARA PROPAGAÇÃO DE FRATURA

Este item é baseado principalmente na obra de Oller (2001), sendo apresentado um resumo do texto original. O balanço de energia, introduzido por Griffith (1920), foi aplicado à mecânica das fraturas com o objetivo de prever a propagação de uma fratura. Ele estabelece que a mínima energia potencial de um corpo fraturado pode ser atingida quando a fratura propaga e o sistema permanece em equilíbrio. Considerando um estado homogêneo de tensões aplicados a uma placa, conforme a Figura 2.11, tem-se que o balanço energético se baseia na premissa que uma fratura é instável se a energia de relaxação sobre a fratura  $U_a$  é maior do que a necessária para criar uma nova superfície de fratura  $U_\gamma$ .

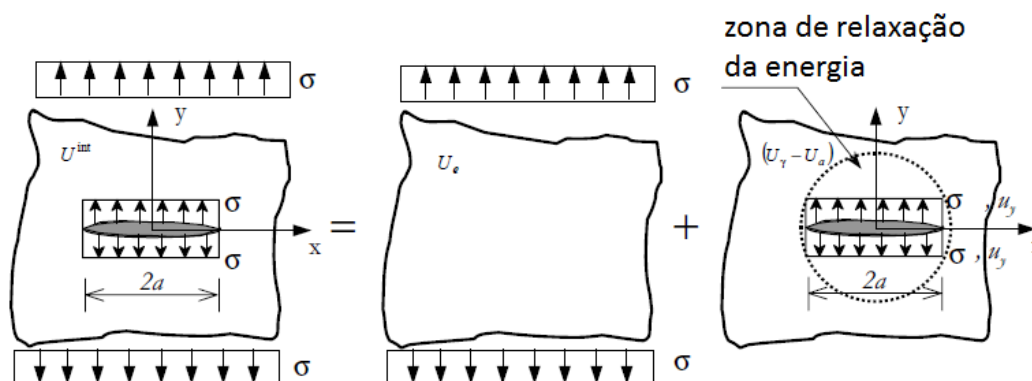


Figura 2.11 Decomposição da energia armazenada (modificada- Ollen, 2001).



Portanto a energia de deformação total para um meio fraturado é:

$$U^{int} = U_e + (U_\gamma - U_a) \quad (2.4)$$

$$U_e = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.5)$$

$$U_\gamma = A_f \gamma^0 \quad (2.6)$$

onde  $U_e$  é a densidade de energia elástica de deformação por unidade de volume para um meio contínuo fissurado,  $U_\gamma$  é a densidade de energia necessária para criar uma nova superfície de fratura de espessura unitária e área  $A_f = 2a$ , sendo  $a$  o eixo maior da elipse (Figura 2.10),  $E$  o módulo de elasticidade de Young e  $\gamma^0$  a densidade superficial de energia da fratura.

O problema fundamental é determinar a energia necessária para propagar a fratura de forma simétrica a partir de seus extremos. A energia de relaxação da fratura  $U_a$  é obtida a partir do trabalho realizado pela tensão  $\sigma$  durante o deslocamento  $u_y$  das faces da fratura (ver Figura 2.11). Ou seja,

$$U_a = \frac{1}{2} \left( 4 \int_0^a \sigma_y u_y dx \right) \quad (2.7)$$

onde a multiplicação por 4 considera as semi-superfícies que compõe as paredes da fratura. O deslocamento  $u_y$  segundo Irwin vale,

$$u_y = \frac{\sigma}{2E} (1 + \nu)(\kappa + 1) \sqrt{a^2 - x^2} \quad \forall x \leq a \quad (2.8)$$

$$\text{sendo } \begin{cases} \kappa = 3 - 4\nu & \text{deformação plana} \\ \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{tensão plana} \end{cases} \quad (2.9)$$

Substituindo a Equação (2.6) na (2.7), resulta na energia de relaxação:

$$U_a = \frac{\sigma^2}{E} (1 + \nu)(\kappa + 1) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\sigma^2 \pi a^2}{4E} (1 + \nu)(\kappa + 1) \quad (2.10)$$

Uma vez que todos os termos de energia são conhecidos, basta substituir na Equação (2.4) que resultará na energia interna total como:

$$U^{int} = U_e + (U_\gamma - U_a) = \frac{\sigma^2}{2E} + \left( 2a\gamma^0 - \frac{\sigma^2 \pi a^2}{4E} (1 + \nu)(\kappa + 1) \right) \quad (2.11)$$

de tal forma que a estabilidade da fratura seja obtida a partir da condição de mínima energia em relação ao eixo longitudinal dela:

$$\frac{\partial U^{int}}{\partial a} = 2\gamma^0 - \frac{\sigma^2 \pi a}{2E} (1 + \nu)(\kappa + 1) = 0 \quad (2.12)$$

Da Equação (2.12) se deduz que a tensão em função da densidade superficial de energia de fratura  $\gamma^0$ , do comprimento da fratura  $a$  e do módulo de elasticidade é:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{4E\gamma^0}{\pi a(1+\nu)(\kappa+1)}\right)} \begin{cases} = \sqrt{\frac{E\gamma^0}{\pi a(1-\nu^2)}} & \text{deformação plana} \\ = \sqrt{\frac{E\gamma^0}{\pi a}} & \text{tensão plana} \end{cases} \quad (2.13)$$

Uma forma conceitual de escrever a Equação (2.12) é dada por:

$$\sigma\sqrt{a} = \sqrt{\left(\frac{4E\gamma^0}{\pi(1+\nu)(\kappa+1)}\right)} \quad (2.14)$$

Na Equação (2.14), os termos da direita são constantes e dependentes das características mecânicas de um material frágil. Pode-se dizer então que a fratura se propaga quando  $\sigma\sqrt{a}$  atinge um valor crítico estabelecido pelo termo a direita da igualdade. Além disso, pode-se obter o comprimento crítico  $a_c$  da fratura a partir da Equação (2.12), que garanta a estabilidade do sólido (Figura 2.12), ou seja:

$$a_c = \frac{4E\gamma^0}{\pi\sigma^2(1+\nu)(\kappa+1)} \quad (2.15)$$

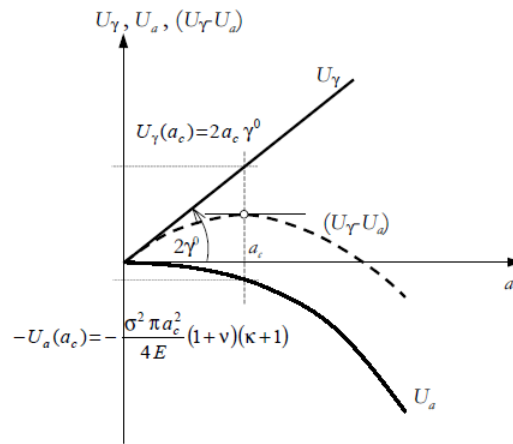


Figura 2.12 Variação da energia em função do comprimento da fratura (Oller, 2001).

Irwin (1948) sugeriu que o critério estabelecido por Griffith para materiais frágeis poderia se estender para materiais dúcteis, considerando a parte plástica também na densidade de energia  $\gamma^p$ , bastava introduzir na Equação (2.13) o total de energia dissipada  $G_f = \gamma^0 + \gamma^p$ . Com isso obtém-se a seguinte equação (Oller, 2001):

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{4EG_f}{\pi a(1+\nu)(\kappa+1)}\right)} \begin{cases} = \sqrt{\frac{EG_f}{\pi a(1+\nu^2)}} & \text{deformação plana} \\ = \sqrt{\frac{EG_f}{\pi a}} & \text{tensão plana} \end{cases} \quad (2.16)$$

### 2.5.3 TENACIDADE

Já foi explicado nas sessões anteriores que o SIF para um carregamento particular pode ser calculado a partir do estado de tensões, das dimensões do objeto fraturado e da forma e orientação da fratura. Em contrapartida, a base fundamental do estudo de propagação de fratura é que ela cresce quando o SIF atinge um valor crítico  $K_{Ic}$ , que também pode ser chamado de tenacidade do material à fratura (Oller, 2001).

Para o Modo I de fraturamento, este valor crítico  $K_I^{max} = K_{Ic}$  pode ser determinado em ensaios de laboratório ou analiticamente. Quando a tensão na ponta da fratura atinge o valor limite de resistência do material à tração ( $\sigma_f$ ). Esse valor depende das características do material, da geometria da fratura e do carregamento aplicado. Podendo ser expresso por:

$$K_{Ic} = \sigma_f \sqrt{b\pi a} f(\alpha, \theta) \quad (2.17)$$

Outra forma de obter o  $K_{Ic}$  é por meio do cálculo da Equação (2.16) de Griffith quando a tensão atinge o limite da resistência do material (Oller, 2001):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_f = \sqrt{\frac{EG_f}{\pi a}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \rightarrow K_{Ic} = \sqrt{EG_f} \text{ tensão plana} \\ \sigma_f = \sqrt{\frac{EG_f}{(1-\nu^2)\pi a}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \rightarrow K_{Ic} = \sqrt{\frac{EG_f}{(1-\nu^2)}} \text{ deformação plana} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

onde  $\sigma_f$  é a tensão na direção da fratura,  $E$  é o módulo de Young,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $G_f$  é a energia total dissipada e  $a$  é o comprimento da fratura.

### 2.5.4 CAMPOS DE DESLOCAMENTO E DE TENSÃO NA ÁREA DA PONTA DA FRATURA

Este item se baseia no trabalho de Khoei (2015) Capítulo 7. Para descrever o comportamento da fratura na região próxima à ponta da fratura, é necessário conhecer os campos de tensão e

deslocamento nessa região. O carregamento aplicado na região da fratura é calculado em três modos, são eles: Modo I ou Modo de abertura, Modo II ou Modo de deslizamento e Modo III ou Modo de deslizamento lateral. Willians (1957) apresenta a solução do problema onde os campos de deslocamento na vizinhança da ponta da fratura são obtidos para o Modo I de carregamento como:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y &= \frac{K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Os campos de tensão são dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), & \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), & \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= \begin{cases} \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \text{deformação plana} \\ 0 & \text{tensão plana} \end{cases}, & \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da mesma forma, para o modo II os campos de deslocamento são:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_{II}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y &= -\frac{K_{II}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Os campos de tensão são dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right), & \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, & \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), & \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para o modo III os campos de deslocamento são:

$$\begin{aligned} u_x &= 0 \\ u_y &= 0 \\ u_z &= \frac{K_{III}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Os campos de tensão são dados por:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0, & \tau_{xy} &= 0 \\ \sigma_y &= 0, & \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_z &= 0, & \tau_{zx} = \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}\end{aligned}\tag{2.24}$$

Sendo que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e a constante  $\kappa$  é definida como  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  para estado plano de tensões e  $\kappa = 3 - 4\nu$  para problemas de deformação plana,  $\theta$  é o ângulo entre o ponto avaliado e a ponta da fratura. Os SIF já foram definidos no item 2.5.1.

Além disso, pode-se observar nas Equações (2.19) e (2.21) que, para problemas bidimensionais em que é usado o modo de fraturamento misto, as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  são singulares nas proximidades da fratura, quando  $r \rightarrow 0$ . Por fim, os campos de tensão e deformação para o modo misto podem ser obtidos conforme:

$$\sigma_{ij}^{total} = \sigma_{ij}^{K_I} + \sigma_{ij}^{K_{II}} + \sigma_{ij}^{K_{III}}\tag{2.25}$$

$$u_i^{total} = u_i^{K_I} + u_i^{K_{II}} + u_i^{K_{III}}\tag{2.26}$$

## 2.6 FLUXO EM FRATURAS

A Lei de Darcy será usada em uma parte desse estudo para desenvolver o fluxo dentro da rocha, mas não é suficiente para descrever o processo de escoamento dentro da fratura. A Lei de Darcy foi desenvolvida para escoamento em meios porosos, e no caso deste problema, a água irá percolar em uma fratura. Embora a abertura entre as faces da fratura seja bem pequena a aproximação da fratura para um meio poroso seria demasiadamente imprecisa.

Witherspoon et al. (1980) conduziram experimentos para verificar a validade da lei cúbica para o escoamento laminar em fraturas abertas em rochas. Essas fraturas são simuladas por placas paralelas e planas, variando a abertura entre elas até a distância mínima de  $2\mu\text{m}$ . A lei na forma simplificada é dada por:

$$\frac{Q}{\Delta h} = C(w)^3\tag{2.27}$$

onde  $Q$  é a vazão,  $\Delta h$  é a diferença da altura piezométrica,  $C$  é a constante de fluxo, que depende da geometria do fluxo e das propriedades do fluido e  $w$  é o espaçamento da fratura.

Ele verificou que a lei é válida quando a fratura é aberta e quando ela está fechada (faces em contato) sob tensão e os resultados não dependem do tipo da rocha. A permeabilidade foi definida unicamente pela abertura da fratura e não depende do histórico de tensões usado nas investigações. Quando há desvios da forma ideal de placas planas e paralelas entre si, há uma redução aparente no fluxo, que pode ser considerada substituindo o  $C$  por  $C/f$ . O fator  $f$  varia de 1,04 a 1,65 no trabalho de Witherspoon et al.(1980).

Xiang (2011) também estabeleceu uma lei cúbica de fluxo em fraturas, similar a de Witherspoon et al.(1980). Ela é dada por:

$$q = \frac{Q}{\Delta h} = -\Psi \frac{w^3}{2k_p} \frac{\partial P_w}{\partial x} \quad (2.28)$$

onde  $w$  é a abertura da fratura,  $P_w$  é a pressão de fluido dentro da fratura e  $k_p = \mu_{eff} / \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^{n-1}$  é uma constante constitutiva do fluido, sendo que  $\mu_{eff}$  é a viscosidade efetiva do fluido,  $\frac{\partial \tau}{\partial y}$  é o gradiente de cisalhamento e  $n$  é um parâmetro do fluido. O  $k_p$  relaciona os efeitos da viscosidade do fluido de fraturamento na geometria da fratura e na pressão de fraturamento, dada em (MPa.s<sup>0,8</sup>) e sua ordem de grandeza varia de  $10^{-5}$  a  $10^{-9}$ . O coeficiente  $\Psi$  é uma função de forma que está relacionada com a forma geométrica da secção transversal da fratura calculado pela seguinte integração:

$$\Psi = \frac{n}{2(2n + 1)} \int_{-H/2}^{H/2} \left( \frac{W(y)}{Wm} \right)^{\frac{2n+1}{n}} dy \quad (2.29)$$

sendo que  $Wm$  é a abertura média da fratura,  $W(y)$  é a função da secção transversal da fratura,  $H$  é a altura da fratura e  $n$  é um índice de potência.

Na Figura 2.13 há 3 exemplos de secção transversal da fratura, cujo o fator de forma  $\Psi$  já foi calculado. Na Tabela 2.2 estão os valores das funções de forma.

Tabela 2.2 Geometria da secção transversal da fratura e dados adicionais.

Geometria da secção transversal	Referência	n	$\Psi$
a) Elipse	Xiang (2011)	0,8	0,1934
b) Losango	Morais (2016)	1	1/3
c) Retângulo	–	1	1/6

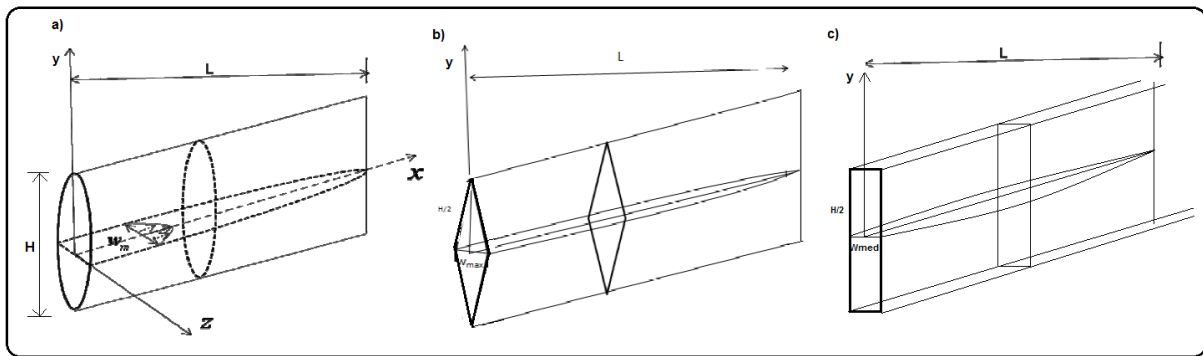


Figura 2.13 Secção transversal da fratura. a) Elíptica (Xiang, 2011); b) Losango (Morais, 2016); c) Retângulo.

## 2.7 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO APLICADO A MODELAGEM DE FRATURA

Vários métodos que simulam a criação e propagação de fratura foram desenvolvidos ao longo dos anos, podendo ser classificados em analíticos, semianalíticos e numéricos, como o método de integral de contorno, de elemento de contorno, método dos elementos finitos (MEF) e até mesmo alguns métodos que não utilizam a discretização do domínio em malhas foram desenvolvidos. Cada um possui vantagens e desvantagens. O MEF teve um papel importante na solução computacional de fraturas mecânicas. Todavia, a parte mais difícil dessa técnica é modelar apropriadamente as fortes descontinuidades no deslocamento causadas pelo crescimento de fraturas (Mohammadi, 2008).

Os métodos numéricos desenvolvidos para simular propagação de fraturas podem ser classificados em 3 categorias; incluindo o modelo contínuo de *smeared crack* (fratura barrada), modelo de fratura discreta e modelo de elementos discretos (Mohammadi, 2008).

Dentro de uma nova classe de modelos que simulam a natureza singular de modelos discretos utilizando uma malha de elementos finitos geometricamente contínua encontra-se o método dos elementos finitos estendido (X-FEM). Ele se baseia no conceito de partição de unidade (PU) para enriquecer a aproximação clássica de elementos finitos, incluindo os efeitos dos campos de descontinuidade e das singularidades gerados na vizinhança da fratura (Mohammadi, 2008).

Além do (X-FEM), tem-se o Método dos Elementos Finitos Generalizado (G-FEM), que também utiliza a PU para analisar problemas com descontinuidades sem que haja a necessidade de refazer a malha, mantendo a precisão da solução mesmo que o domínio do problema seja complexo. O X-FEM e o G-FEM são praticamente idênticos, mas o X-FEM foi inicialmente desenvolvido para descontinuidades como fraturas e usado para enriquecimentos locais, enquanto o G-FEM foi inicialmente usado para enriquecimentos globais. Ambos podem ser usados em malhas estruturadas ou não estruturadas (Khoei, 2015).

### **2.7.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO**

O método dos elementos finitos estendido (X-FEM) é usado para solucionar problemas cujo domínio possui descontinuidades fortes ou fracas em uma malha de elementos finitos. Nesta ferramenta, funções de enriquecimento são adicionadas a aproximação de elementos finitos utilizando o princípio de partição de unidades (PU). Para modelar fraturas, as funções de descontinuidades, como a função degrau (*heaviside*) e os campos de deslocamento 2D linear elástico e assintótico na ponta da fratura, enriquecem a região vizinha à fratura. Isso permite que o domínio seja modelado sem a necessidade de refazer a malha a cada vez que a fratura propagar (Khoei, 2015).

Os artigos originais sobre X-FEM foram apresentados por Belytschko e Black (1999) e Moes et al. (1999) para propagação elástica de fratura, vazios e heterogeneidades. Eles propuseram termos adicionais apropriados para aproximação de elementos finitos baseado na PU, que permite que toda a geometria da fratura seja modelada independentemente da malha (Khoei, 2015). Na Figura 2.14 é possível observar a diferença entre a modelagem pelo MEF e pelo X-FEM.



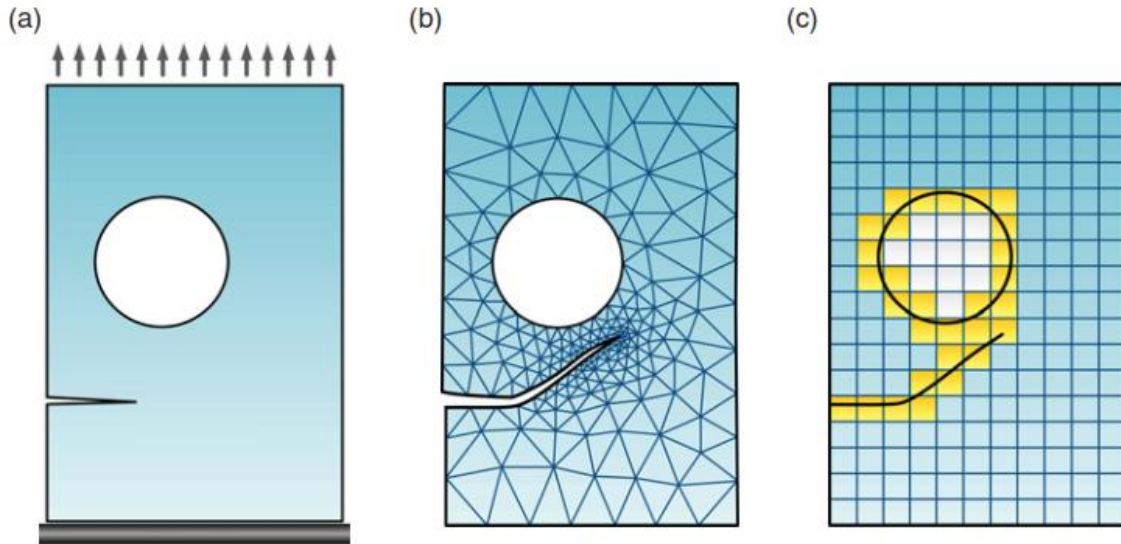


Figura 2.14 Modelagem de descontinuidades fortes e fracas: (a) Propagação de fratura em uma placa com orifício; (b) Modelagem pelo MEF usando refinamento da malha próxima à fratura; (c) MEF enriquecido usando uma malha uniforme cujos elementos cortados pela fratura e pelo orifício são enriquecidos (Khoei, 2015).

A forma mais geral do campo de aproximações enriquecido é definido por:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i + \text{termos de enriquecimento} \quad (2.30)$$

onde  $n$  é o conjunto de pontos nodais e  $N_i(x)$  são as funções de forma tradicionais. Baseado no conceito de PU, as descontinuidades devem ser tratadas em uma malha fixa, todavia, termos de enriquecimento são adicionados. O X-FEM utiliza apenas o enriquecimento local, de tal forma que o número de incógnitas seja mínimo.

Os próximos itens desta seção se baseiam no trabalho de Khoei (2015), e versarão sobre as funções de enriquecimento e os métodos usados no X-FEM. Outras referências bibliográficas usadas serão citadas no texto

## 2.7.2 MÉTODO DE PARTIÇÃO DE UNIDADES

O método de partição de unidade foi desenvolvido por Babuska e Melenk (1997) e define que a soma de funções  $f_i(x)$  em um subdomínio  $\Omega_i$  cobrindo o domínio  $\Omega^{PU}$  de um problema de valor de contorno em que  $\Omega^{PU} \subset \cup_{i=1}^N \Omega_i$  resulta em um.

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega^{PU} \quad (2.31)$$

Ao escolher uma função arbitrária  $\psi(x)$  definida em  $\Omega^{PU}$ , a seguinte propriedade pode ser observada:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)\psi(x) = \psi(x) \quad (2.32)$$

que é semelhante a definição usada no MEF, na qual o conjunto das funções de forma de um elemento são uma PU. Baseado nesse conceito, a solução de um campo  $u(x)$  pode ser discretizada em um domínio do problema considerando  $f_i(x) \equiv N_i(x)$  como:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i \quad (2.33)$$

onde  $n$  é o número de pontos nodais para cada elemento finito. No MEF as funções de forma  $N_i(x)$  são usadas com base em polinômios. Portanto, é possível modelar a propagação de descontinuidades sem alterar a malha de elementos finitos, utilizando a PU e nesse caso as funções de enriquecimento se modificam de acordo com a interface geométrica da descontinuidade. As funções de interpolação ou de forma utilizadas no XFEM podem ser diferentes ou iguais às utilizadas no MEF.

Isto posto, considerando que  $\Gamma_d$  é uma descontinuidade no domínio  $\Omega$  como mostrado na Figura 2.15a. A aproximação enriquecida para a interface  $\Gamma_d$  (parte enriquecida na Figura 2.15b) é dada por:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)u_i + \sum_{i=1}^m N_j(x)\psi_i a_j \quad (2.34)$$

sendo que  $N_j(x)$  são as funções de forma da parte enriquecida, semelhantes às tradicionais,  $u_i$  é o deslocamento nodal,  $a_j$  é o grau de liberdade nodal correspondente a função de enriquecimento  $\psi_i$ .  $n$  e  $m$  são os conjuntos de nós do domínio e o conjunto de nós dos elementos localizados na descontinuidades  $\Gamma_d$ .

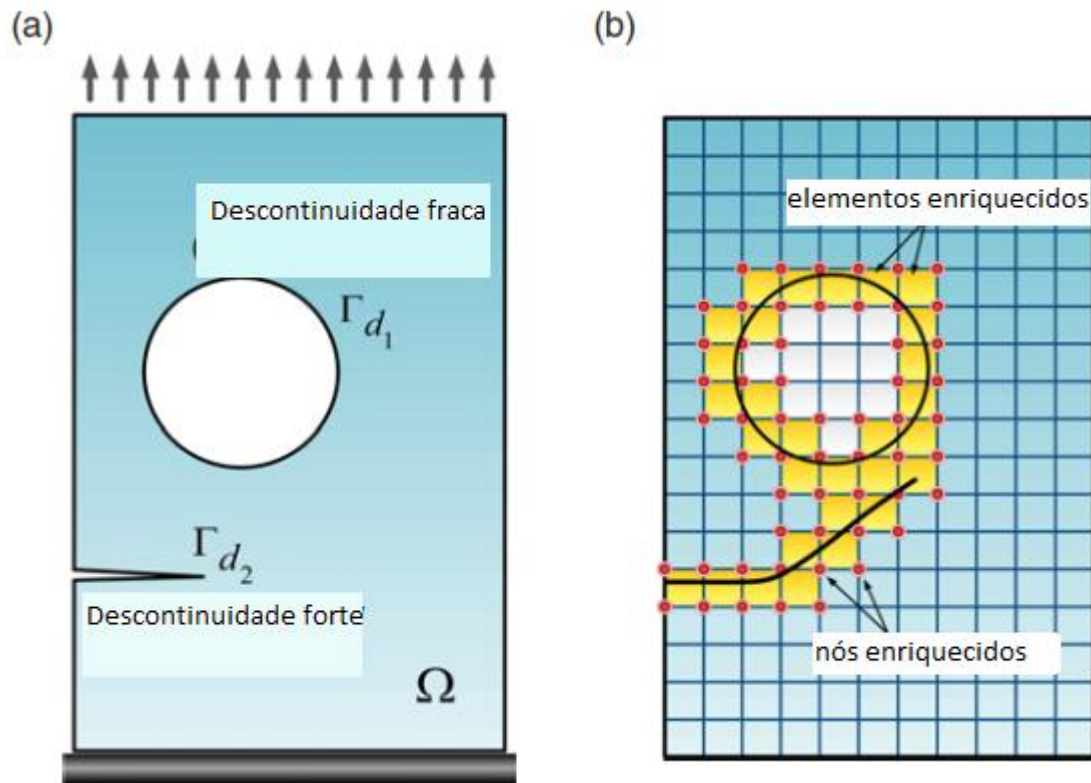


Figura 2.15 Modelagem de descontinuidades fracas e fortes: (a) definição das interfaces incluindo descontinuidades fracas e fortes; (b) malha uniforme com elementos enriquecidos (em amarelo) e nós com graus de liberdade adicionais (círculos vermelhos) (modificada - Khoei, 2015)

### 2.7.3 MÉTODO *LEVEL SET* (LSM)

A ideia geral do LSM é modelar interfaces/descontinuidades, atribuindo a elas o valor zero no seu contorno e valores opostos no interior e exterior. Este método é usado no X-FEM para localizar os pontos que deverão ser enriquecidos, de tal forma que a fratura seja posicionada no nível zero, enriquecendo os nós mais próximos do zero. Com o LSM a fratura é localizada a cada etapa de propagação.

Ou seja, considerando um domínio  $\Omega$  cuja interface da fratura é  $\Gamma$ , o LSM aplica uma função  $\varphi(x, t)$  no espaço e no tempo, respectivamente, e define a função do domínio em duas zonas separadas  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$  como:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &> 0 \text{ se } x \in \Omega_A \\ \varphi(x, t) &= 0 \text{ se } x \in \Gamma \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\varphi(x, t) < 0 \text{ se } x \in \Omega_B$$

onde a interface é capturada a cada incremento de tempo ao localizar o conjunto  $\Gamma$  para cada  $\varphi$  que desaparece. Na Figura 2.16 é possível observar como funciona o LMS para cada instante de tempo no caso bidimensional.

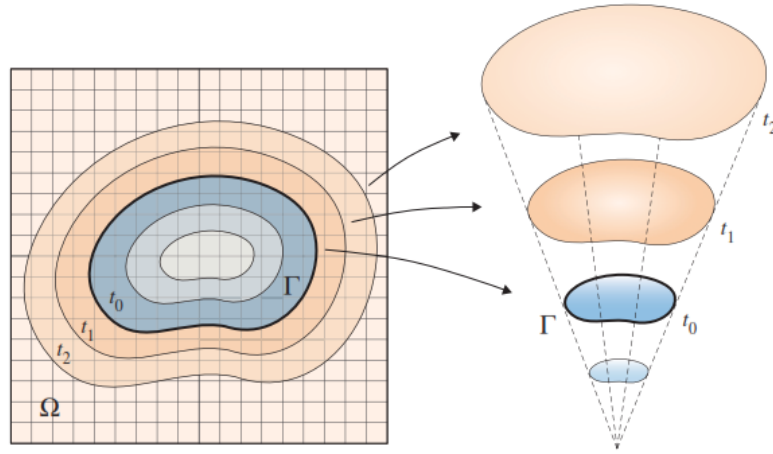


Figura 2.16 Função LSM para um problema bidimensional (Khoei, 2015).

### 2.7.4 HEAVISIDE JUMP FUNCTION OU FUNÇÃO DEGRAU

A função *Heaviside* é aplicável a problemas de descontinuidades fortes que são comumente observadas em problemas de fratura. A descontinuidade no deslocamento ocorre nos lados opostos da fratura, onde o campo de deslocamento de um lado da fratura é oposto ao outro lado resultando em valores completamente diferentes. A função *Heaviside* ou degrau (Figuras 2.18 e 2.19) podem ser definidas conforme as seguintes equações (Bordas and Legay 2005):

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \forall \varphi(x) < 0 \\ 1 & \forall \varphi(x) > 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

onde  $\varphi(x)$  é a função distância que define se o nó está de um lado ou do outro da fratura considerando o salto no campo de deslocamento (Figura 2.17).

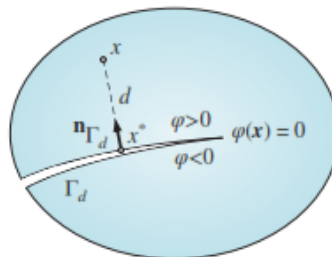


Figura 2.17 Representação da função *heaviside* (Khoei, 2015).

A função *heaviside* adiciona um grau de liberdade por direção a cada nó que será enriquecido, no caso do problema bidimensional serão acrescentados dois graus de liberdade a cada nó.

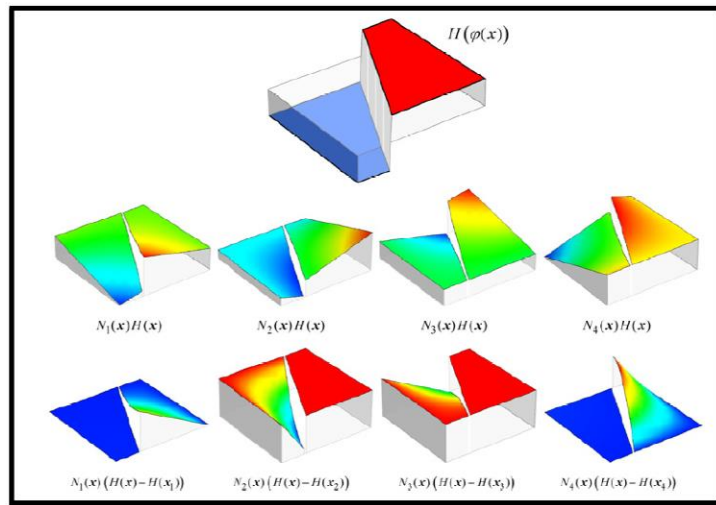


Figura 2.18 Função *heaviside* e função *heaviside* transladada (Khoei, 2015).

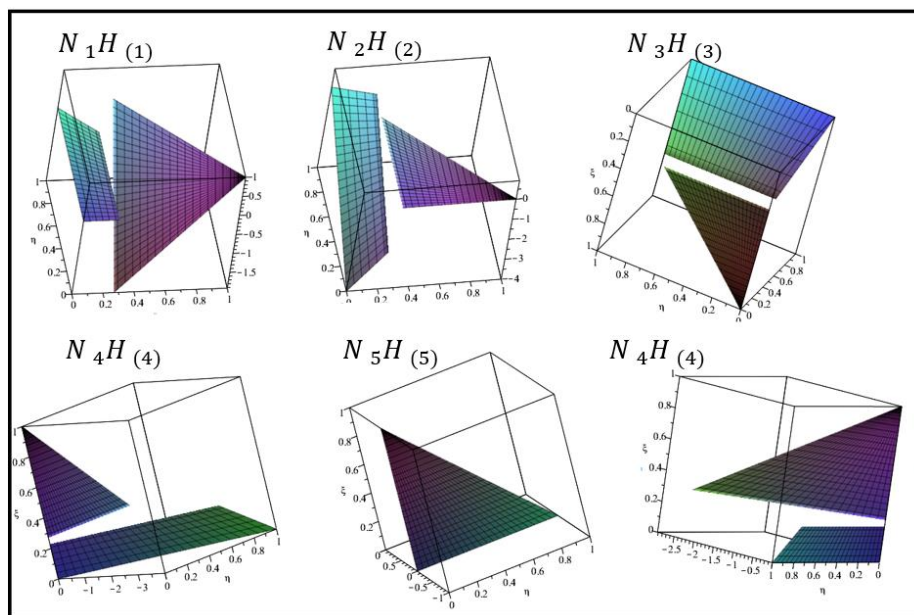


Figura 2.19 Função *Heaviside* x Função de forma.

A aproximação do campo de deslocamentos para aplicar a *heaviside* a uma forte descontinuidade é dada por e a sua geometria plotada pode ser observada nas Figuras 2.18 e 2.19:

$$u^h = \sum_{j=1}^N N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x)H(\xi)a_k \quad (2.37)$$

## 2.7.5 CRACK TIP FUNCTION OU FUNÇÃO ASSINTÓTICA NA PONTA DA FRATURA

Os campos de deslocamento na ponta da fratura são computados por meio de funções que caracterizam o comportamento assintótico na vizinhança da ponta da fratura. Nessa região os campos de tensão tendem ao infinito, conforme pode ser observado na Figura 2.20. Para considerar a singularidade gerada na ponta da fratura utiliza-se uma formulação obtida analiticamente para os campos de tensão. Essa formulação foi desenvolvida por Belytschko e Black (1999). As funções *crack tip* são definidas em coordenadas polares locais na ponta da fratura, vide Figura 2.21.

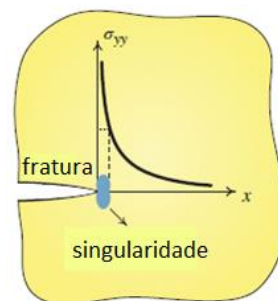


Figura 2.20 Campo de tensão assintótico na ponta da fratura (modificada- Khoei, 2015).

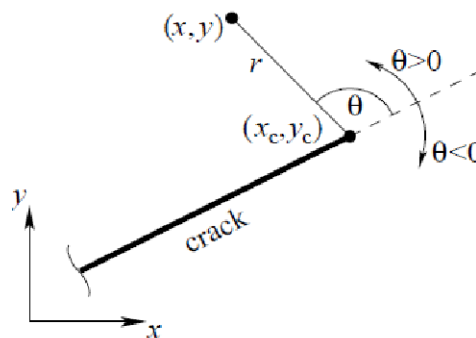


Figura 2.21 Coordenadas polares na ponta da fratura (Morais, 2016).

As funções  $F(r, \theta)$  que aproximam os campos de tensão dentro do elemento que contém a ponta da fratura são dados por:

$$F(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right\} \quad (2.38)$$

Esse enriquecimento adiciona 4 graus de liberdade por direção a cada nó, no caso bidimensional, serão adicionados oito graus de liberdade a cada nó.

## 2.7.6 MODELAGEM FINAL DA FRATURA USANDO O X-FEM

Retomando a Equação (2.34), posto que os enriquecimentos foram definidos nos itens anteriores, podemos estabelecer qual será a modelagem da fratura incluindo os enriquecimentos locais no espaço aproximado usando a partição de unidades aplicada aos elementos finitos. As funções de forma (funções de interpolação) serão multiplicadas pelas funções de enriquecimento definidas para cada nó dos elementos que sofrem a influência da descontinuidade. A aproximação do domínio enriquecido será definida por:

$$u(x) = u^{EF} + u^{enr} = \sum_{i=1}^n N_i(x)\bar{u}_i + \sum_{j=1}^m N_j(x)\psi(x)\bar{a}_j \quad (2.39)$$

onde  $u^{EF}$  corresponde à interpolação pelo MEF e  $u^{enr}$  à interpolação enriquecida.  $n$  e  $m$  são os conjuntos totais de nós dos domínios sem enriquecimento e com enriquecimento, respectivamente,  $\bar{a}_j$  são os graus de liberdades acrescidos pelo enriquecimento relacionados com  $\psi(x)$ , que são as funções de enriquecimento.

A escolha das funções de enriquecimento é determinada pelo tipo de descontinuidade. No caso de fraturas, usa-se a *heaviside* nos nós dos elementos cortados pelo corpo da fratura e a *crack tip* nos nós dos elementos que contêm a ponta da fratura (Figura 2.22).

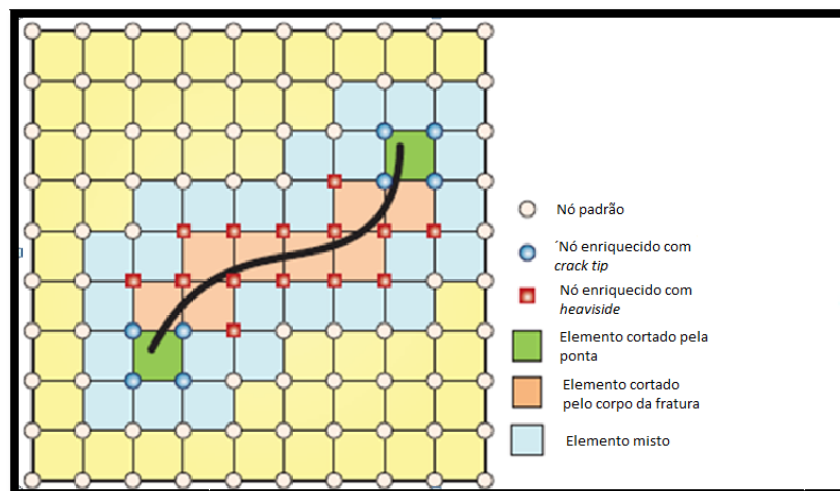


Figura 2.22 Domínio padrão, enriquecido e misto (modificada- Khoei, 2015).

No caso mais geral, a discretização do domínio fraturado, desenvolvendo a Equação (2.39), ao incluir as funções de enriquecimento resulta em:

$$u(x) = \sum_{I \in n^{EF}} N_I(x) \bar{u}_I + \sum_{J \in n_{Hev}^{enr}} N_J(x) H(x) a_J + \sum_{K \in n_{tip}^{enr}} N_K(x) \sum_{\alpha=1}^4 (F_\alpha(x) b_{\alpha K}) \quad (2.40)$$

onde as funções  $F_\alpha(x)$  são as funções *crack tip* e as funções  $H(x)$  são as funções de enriquecimento *heaviside*.  $a_j$  e  $b_{\alpha K}$  são os graus de liberdade adicionados pelo enriquecimento.

## 2.7.7 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integração numérica que utiliza a quadratura de Gauss é largamente aplicada no MEF, visto que as funções de forma padrão estão em termos polinomiais e os resultados obtidos na integração de Gauss são precisos ao avaliar a integral das matrizes de rigidez. No entanto, quando as funções de forma são enriquecidas, elas podem não ter a forma polinomial. Além do que, com a presença das descontinuidades, as funções de forma deixam de ser suaves. Portanto, torna-se necessário aumentar o número de pontos de Gauss consideravelmente (Khoei, 2015).

Uma forma de resolver essa situação é aumentar o número de pontos de Gauss por elemento, obtendo um resultado mais preciso para os campos de deslocamento (Figura 2.23a). Neste trabalho foi adotada esta técnica. Outra forma eficiente é subdividir os elementos com descontinuidades em outros elementos menores. A subdivisão pode ser feita para elementos triangulares (Figura 2.23b) ou para elementos quadrados (Figura 2.23c).

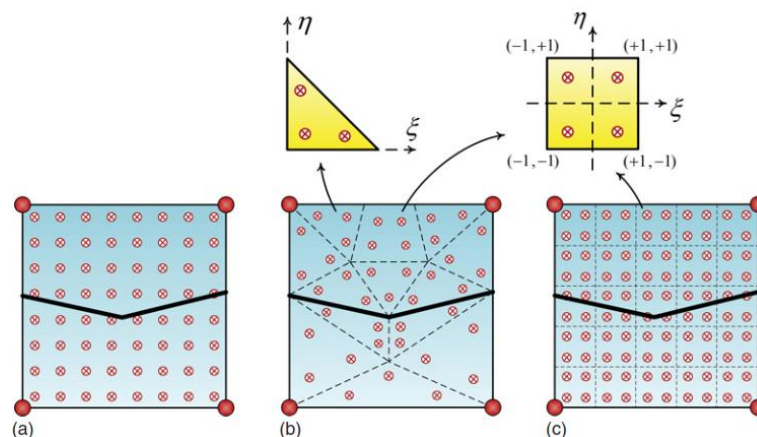


Figura 2. 23 Integração numérica de um elemento enriquecido: (a) maior número de pontos de Gauss; (b) subdivisão em elementos triangulares; (c) subdivisão em elementos quadrados (Khoei, 2015).



## 2.7.8 ELEMENTOS MISTOS E HIERARQUIA DE ENRIQUECIMENTO

O enriquecimento adotado no X-FEM é local, por isso ao enriquecer os nós dos elementos cortados pela fratura são gerados elementos que contêm nós enriquecidos e nós não enriquecidos, como pode ser observado na Figura 2.22. Consequentemente, são gerados três tipos de elementos, os elementos padrões, os enriquecidos e os mistos.

Os elementos mistos podem gerar erros na solução final, isso porque, neles o método de partição de unidades não é aplicado. Quando os elementos mistos possuem apenas enriquecimento *Heaviside*, o erro é pequeno e desprezível. No entanto, se o enriquecimento do elemento misto for do tipo *Crack Tip*, a precisão dos resultados pode ser comprometida.

## 2.7.9 PREVISÃO DO CAMINHO DA FRATURA

Usualmente, problemas de fraturamento incluem propagação inclinada ou curvilínea e são submetidas a carregamentos multiaxiais, criando SIF  $K_I$  e  $K_{II}$  diferente de zero e negligenciando as tensões de deslizamento do Modo III (Mohammadi, 2008). Há três formas de prever a direção em que a fratura irá propagar: utilizando o critério de máxima tensão circunferencial, o critério de mínima densidade de energia de deformação e o critério de taxa máxima liberação de energia. Além disso, há formas empíricas de prever a direção de propagação da fratura, que podem ser encontrados na referência (Mohammadi, 2008). Dentre as formas de calcular a direção da fratura, vale citar o método de máxima tensão circunferencial de Erdogan e Sih (1963), que será descrito a seguir.

### 2.7.9.1 MÁXIMA TENSÃO CIRCUNFERENCIAL

Erdogan e Sih (1963) desenvolveram a primeira teoria do modo misto de fatores de intensidade de tensão baseado na solução do estado de tensão próximo à ponta da fratura. Eles assumiram que a fratura propaga a partir da ponta numa direção radial de um plano perpendicular à direção da máxima tensão, quando a máxima tensão circunferencial  $(\sigma_\theta)_{max}$  atinge valor limite no plano de cisalhamento igual a zero (Mohammid, 2008). Assumindo que a zona plástica é desprezível, a solução singular de tensão na ponta da fratura pode ser usada para determinar o ângulo de propagação da fratura onde a tensão cisalhante é zero, considerando que na condição de carregamento Modo-misto, as tensões assintóticas da ponta da fratura podem ser

obtidas usando as Equações (2.20) e (2.22), transformando os valores de tensão em um sistema de coordenadas polares, obtém a seguinte equação (Khoei, 2015):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

O ângulo crítico de propagação  $\theta_c$  pode ser determinado estabelecendo que a tensão cisalhante  $\sigma_{r\theta}$  é zero, o que leva a relação a seguir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2} K_I \sin\theta + \frac{1}{2} K_{II} (2\cos\theta - 1) \right] = 0 \quad (2.42)$$

A solução dessa equação resulta no ângulo de propagação da fratura  $\theta_c$  que pode ser expresso usando o ângulo entre a linha da fratura e a linha de crescimento da fratura, com valor positivo definido na direção anti-horária, conforme (Figura 2.23).

$$\theta_c = 2\arctan \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (2.43)$$

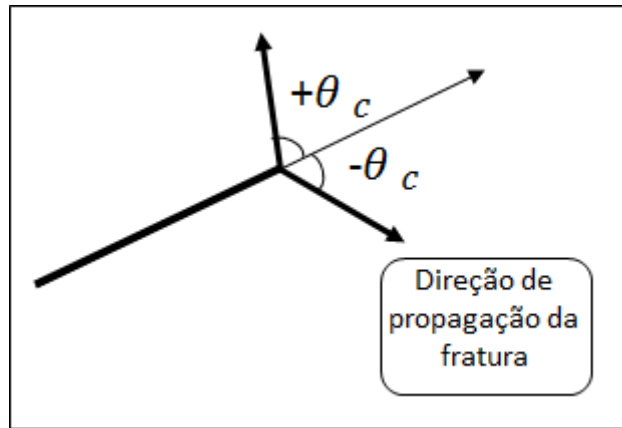


Figura 2.24 Ângulo de propagação da fratura.

## 2.8 TRABALHOS MAIS RECENTES SOBRE SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO

Neste item serão expostas as pesquisas mais recentes sobre simulação numérica de fraturamento hidráulico. Além disso, pretende-se evidenciar a atualidade do tema estudado nesta dissertação. Como já foi dito anteriormente, simular essa técnica de exploração de petróleo ainda possui

muitos obstáculos, como a inexistência de um software completo disponível no mercado que simule o crescimento da fratura somente devido à pressão exercida pelo fluido de fraturamento em suas paredes. No entanto, aparentemente, este problema poderá ser extinguido em curto prazo.

### **2.8.1 SIMULAÇÃO DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO USANDO O ABAQUS**

Uma versão recentemente desenvolvida pelo *software Abaqus* para resolver problemas totalmente acoplados de fraturamento hidráulico teve suas capacidades de modelagem testadas no trabalho de Zielonka et al. (2014). Os *softwares Abaqus "coupled pressure/deformation cohesive elements"* e o *"coupled pressure/deformation extended finite elements (XFEM)"* foram usados nesse trabalho para modelar a propagação e o fluxo do fluido de fraturamento, enquanto a deformação e fluxo do meio poroso são modelados com o acoplamento de poropressão e deformação em meios contínuos com elementos finitos. A propagação de uma fratura planar induzida por pressão de um fluido, sendo que a altura é constante e a largura verticalmente uniforme dentro de um reservatório em forma de prisma (Modelo KGD), e a propagação de uma fratura horizontal, em forma circular, planar em um reservatório cilíndrico (Modelo radial) são simulados em duas e três dimensões utilizando essa nova versão do *Abaqus* (Zielonka et al, 2014).

A solução numérica obtida para os dois métodos, (coesivo e XFEM) é comparada com uma solução analítica assintótica, tanto para o Modelo KGD como para o Modelo Radial. Ambos os métodos foram considerados precisos para reproduzir a soluções analíticas e convergiram para uma resposta mais acurada com o refinamento da malha. Portanto, essa nova versão do *Abaqus* pretende ser uma opção para simular o fraturamento hidráulico na indústria de óleo e gás, após ser lançada no mercado.

### **2.8.2 MODELAGEM GEOMECÂNICA DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO CONSIDERANDO A ESTRATIGRAFIA MECÂNICA DO DOMÍNIO**

Outra deficiência ao simular propagação hidraulicamente induzida de fraturas é que a maioria dos estudos considera somente o modo I de propagação, isso não representa um sistema natural. No trabalho de Smart et al. (2014) foi feita uma análise bidimensional usando o MEF para

modelar a deformação do maciço rochoso induzida pela injeção de fluido combinada com a análise hidro-mecânica acoplada. Os modelos usados nesse trabalho consideram a estratigrafia mecânica natural *in-situ* e o estado de tensões anisotrópico, permitindo o rastreamento temporal e espacial da variação dos estados de tensão e deformação gerada pela injeção de fluido.

Os resultados desse estudo revelam que dificilmente a fratura irá se propagar na mesma direção em um meio composto por camadas que possuem propriedades mecânicas diferentes. Portanto, um estudo que considere somente o Modo I de fraturamento dificilmente será suficiente para simular o fraturamento hidráulico de uma maciço com diferentes estratigrafias.

### **2.8.3 MODELAGEM DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO USANDO XFEM EM ROCHAS PARCIALMENTE SATURADAS**

O trabalho de Salimzadeh & Khalili (2016) faz um estudo de fraturamento hidráulico em rochas parcialmente saturadas. Esta é uma outra condição comum na natureza, o que torna o estudo bastante relevante para o desenvolvimento do modelo de propagação de fratura induzida por injeção de fluidos. Embora existam modelos, ainda que recentes, que estudam a propagação de multifraturas e fraturamento em meios heterogêneos, a maioria deles está restrito a fluxo de uma fase entre a fratura e a rocha porosa permeável. Essas condições não são compatíveis com a realidade em campo, onde o fluido injetado tem propriedades diferentes do fluido presente nas rochas.

Esse trabalho apresenta um modelo hidroporoelástico totalmente acoplado que incorpora dois fluidos, o de fraturamento e o que já está no maciço. O fluxo na fratura é determinado usando a lei cúbica, e o fluxo na matriz é determinado pela lei de Darcy. A descontinuidade mecânica da fratura é estudada usando o XFEM, enquanto o critério de propagação é definido pelo modelo de fratura coesiva. A matriz de velocidade do fluido dentro da fratura é descontínua, usando um carregamento de *leak-off* (vazamento), que acopla o fluxo da fratura e o fluxo na matriz rochosa.

O modelo proposto por Salimzadeh & Khalili (2016) foi discretizado pelo método de Garlekin, implementado no *MATLAB* e posteriormente validado por meio de comparações com soluções analíticas. Foram feitas várias simulações de fraturamento, afim de ilustrar como alguns parâmetros, tais como, vazão de injeção de fluido e permeabilidade da rocha afetam as variáveis

do fraturamento, como a pressão de injeção, a abertura e o comprimento da fratura. Além disso, nesse estudo foi possível relacionar o impacto da sucção gerada pelo fato da matriz não estar saturada com o *leak-off*. Provou-se com o estudo que considerar que o fluxo só tem uma fase de fluido pode subestimar o valor do *leak-off*.

### 3. EMBASAMENTO TEÓRICO

A teoria necessária para o desenvolvimento da ferramenta numérica na formulação de problemas hidromecânicos acoplados será apresentada neste capítulo. Os itens 3.1 a 3.4 foram baseados nas três referências a seguir: Morais (2016), Cordão Neto (2005) e Britto (1987). Para o cálculo dos campos de tensão, deformação e deslocamento será utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF), este método é bem avaliado pela literatura para resolver equações diferenciais em problemas de engenharia. Serão utilizadas as equações de equilíbrio estático para um elemento de solo e de continuidade da fase líquida acopladas. Ao adicionar a fratura, será utilizado o Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM).

#### 3.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DO PROBLEMA

A primeira ferramenta para o cálculo de um problema acoplado é a equação de equilíbrio estático para um elemento de solo, conforme:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (3.1)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  o tensor de tensão total,  $b_i$  é o vetor de forças de corpo e  $x_j$  representa as direções do sistema de coordenadas cartesiano.

Essa Equação (3.1) é expressa em termos de tensão total, ou seja, ela equivale a soma da tensão efetiva  $\sigma'_{ij}$  com a poropressão  $u_w$ . A tensão efetiva é a tensão transmitida pelo contato entre as partículas, em um meio poroso, que se relaciona com a deformação por meio de relações constitutivas do material. Ao assumir que o meio é elástico linear e o estado de tensões do problema é de deformação plana, pode-se fazer algumas simplificações:

- Apenas as tensões em 2 planos  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são calculadas, sendo  $\sigma_z \neq 0$ .
- As deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$  também são calculadas e a deformação no eixo z é nula  $\varepsilon_z = 0$ .

A matriz da relação constitutiva do material é a matriz  $D_{3 \times 3}$ :

$$D = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} (1 - \nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1 - 2\nu}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

O campo de deformação é obtido utilizando os deslocamentos nodais e relacionando com a matriz B, também chamada de matriz de deformação, que é dada por:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

sendo  $N_i$  a função de forma de cada nó. Considerando que  $u$  é a notação para deslocamentos, os campos de deformação podem ser calculados como:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \quad (3.4)$$

O próximo passo é utilizar a matriz D para encontrar as tensões, conforme:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.5)$$

A segunda ferramenta para o cálculo de um problema acoplado envolve o desenvolvimento da equação de continuidade da fase líquida. Para um elemento de solo de volume unitário (Figura 3.1), a equação de continuidade da água pode ser obtida utilizando o princípio de conservação de massa. Portanto, a diferença de massa de água que entra e sai do elemento de solo é igual a variação de massa de água dentro do elemento. Esse princípio pode ser expresso para um elemento como:

$$\frac{\partial(\rho_w n S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.6)$$

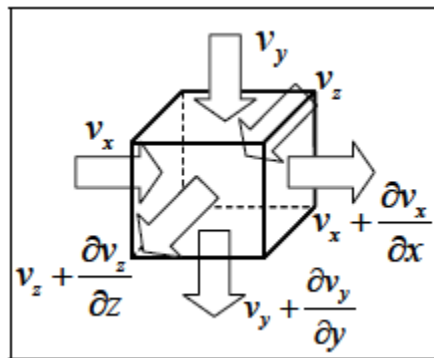


Figura 3.1 Conservação da massa em um elemento unitário de solo (Cordão Neto, 2005).

onde  $n$  é a porosidade,  $S$  é o grau de saturação,  $\rho_w$  é a massa específica da água e  $v_i$  é o vetor de velocidade da água.

Ao considerar que a água é incompressível para o nível de tensões avaliado, a Equação (3.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\theta_w)}{\partial t} + \frac{\partial(v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.7)$$

onde  $\theta_w = nS$  é o volume de água no solo.

Em um primeiro momento, a velocidade da água pode ser determinada pela lei de Darcy. De tal forma que, o vetor de velocidade é definido pela equação a seguir:

$$v_i = -k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

sendo que,  $k_{ij}$  é a matriz de permeabilidade e  $\frac{\partial h}{\partial x_j}$  é o vetor de gradiente hidráulico.

Ao considerar que o meio é saturado, homogêneo e isotrópico, a variação volumétrica da água no meio poroso será igual a variação volumétrica do meio poroso, conseqüentemente a equação de continuidade da água pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial(v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

sendo  $\varepsilon_v$  a deformação volumétrica de um elemento de solo.

### **3.2 RESOLUÇÃO DO ACOPLAMENTO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS**

As equações apresentadas no item anterior são equações diferenciais, que implicam em um número infinito de incógnitas. Para encontrar uma solução computacional é necessário considerar que o sistema seja contínuo e fazer algumas manipulações matemáticas, de forma que o problema se torne discreto. Neste caso, a discretização do problema é feita pelo MEF.

Este método numérico é satisfatório para solucionar a primeira parte do problema (não há fratura). A solução do problema hidromecânico que será apresentada a seguir é semelhante a apresentada por Cordão Neto (2005) para o problema de consolidação em meios não saturados. Neste caso foi utilizada apenas a parte para meios saturados. Para a etapa de fraturamento



adotou-se a discretização apresentada por Morais (2016) para meios fraturados, empregando o XFEM.

### 3.2.1 SOLUÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

O princípio dos trabalhos virtuais será usado para a solução espacial da equação de equilíbrio. Primeiramente, deve-se estabelecer o domínio do problema,  $\Omega$ , que possui condições de contorno  $\Gamma$ , que são compostas por duas partes —  $\Gamma_1$  que age nas forças de superfície e  $\Gamma_2$  em que são prescritos os deslocamentos.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece relação entre as variações no trabalho externo e interno causados por um deslocamento infinitesimal de um corpo deformável. Posto que o sistema está em equilíbrio, a conservação de trabalho realizado pelas forças internas é igual ao trabalho realizado pelas forças externas. Isso significa que qualquer variação no deslocamento, mesmo que virtual, geraria uma quantidade idêntica de trabalho interno e externo. Destarte, considerando o trabalho realizado por um deslocamento virtual  $\{\delta u^*\}$ , tem-se que:

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon^*\}^T \{\dot{\sigma}\} d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u^*\}^T \{\dot{b}\} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \{\delta u^*\}^T \{\dot{\tau}\} d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

sendo  $\{\delta \varepsilon^*\}$  as deformações virtuais resultantes dos deslocamentos  $\{\delta u^*\}$ ,  $\{b\}$  as forças de corpo que atuam no domínio,  $\tau$  as tensões aplicadas na superfície e  $\{\dot{x}\}$  a derivada temporal de uma variável  $x$ .

Empregando as condições de contorno e substituindo a relação constitutiva expressa nas Equações (3.2) e (3.5), na equação (3.10), é dada por:

$$[K]\{\dot{u}\} + [C]\{\dot{p}\} = \{F\} \quad (3.11)$$

Sendo:

- $[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$  é a matriz de rigidez da parte sólida ( $2n \times 2n$ ) –  $[F][L]^{-1}$ ;
- $[B]$  é a matriz de deformação-deslocamento ( $3n \times 2n$ ) –  $[L]^{-1}$ ;
- $[D]$ : matriz da relação constitutiva tensão deformação ( $3 \times 3$ ) –  $[F][L]^{-2}$ ;
- $\{\dot{u}\}$ : vetor da taxa de deslocamentos nodais ( $2n \times 1$ ) –  $[F][T]^{-1}$ ;
- $\{\dot{p}\}$ : vetor da taxa de poropressão nodal ( $n \times 1$ ) –  $[F][L]^{-2}[T]^{-1}$ ;
- $[C] = \int_{\Omega} \{B\}^T \{\dot{H}\} [N_p] d\Omega$  matriz de acoplamento entre fase sólida e a água ( $2n \times m$ ) –  $[L]^{-1}$ ;

- $[N_p]$  matriz de interpolação de poropressão (p) (1 x m) – [-] adimensional;
- $\{m\} = \{1, 1, 0\}^T$
- $\{F\} = \int_{\Omega} [N]^T [\dot{b}] d\Omega + \int_{\Gamma_2} [N]^T [\dot{\tau}] d\Omega$  vetor de taxa de forças externas (2n x 1)– [F][T]<sup>-1</sup>;

\*obs: n equivale ao número de nós do elemento estudado.

### 3.2.2 SOLUÇÃO ESPACIAL DA EQUAÇÃO DE FLUXO

O método de Galerkin foi usado para a solução espacial da equação de continuidade da água, Equação(3.9). Considerando que o meio é saturado tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial(\beta_1 d\varepsilon_v)}{\partial t} = 0 \quad (3.12)$$

sendo  $\beta_1 = 1$  para o caso saturado.

Ademais, a fronteira do domínio,  $\Gamma$ , é composta por duas regiões,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Essa condição possui as seguintes propriedades:  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$  e:  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ . As condições naturais são impostas exclusivamente em  $\Gamma_1$  e as condições essenciais são impostas exclusivamente em  $\Gamma_2$ .

$$p = \bar{p} \text{ para superfície } \Gamma_1 \quad (3.13)$$

$$\{v\}^T \{n\} = \bar{q} \text{ para superfície } \Gamma_2 \quad (3.14)$$

sendo  $\{n\}$  o vetor normal à superfície  $\Gamma_2$ .

Integrando a equação (3.11), pelo método de Galerkin no domínio  $\Omega$  e aplicando as condições de contorno se obtém:

$$[H]\{p\} + [L]\{\dot{u}\} = \{q\} \quad (3.15)$$

sendo:

- $[H] = \int_{\Omega} [B_p] \frac{1}{\gamma_w} [k] [B_p] d\Omega$ : matriz de fluxo (m x m)–  $[L]^5 [F]^{-1} [T]^{-1}$ ;
- $[B_p]$ : matriz de gradiente-poropressão (2 x m) –  $[L]^{-1}$ ;
- $\gamma_w$ : massa específica da água (escalar) –  $[F][L]^{-3}$ ;
- $[k]$ : matriz de condutividade (2 x 2)–  $[F][T]^{-1}$ ;

- $\{p\}$ : vetor de poropressões nodais ( $m \times 1$ ) –  $[F][L]^{-2}$ ;
- $\{\dot{u}\}$ : vetor taxa de deslocamentos nodais ( $2n \times 1$ ) –  $[F][T]^{-1}$ ;
- $[L] = \int_{\Omega} [B_p] \beta_1 [N] d\Omega$ : matriz de acoplamento da fase sólida e da água ( $m \times 2n$ ) –  $[L]^2$ ;
- $\beta_1 = \frac{\partial \theta_w}{\partial \varepsilon_v}$ , igual a 1 no caso saturado (escalar)– [-] adimensional;
- $[N]$ : matriz de interpolação de deslocamentos ( $2 \times 2n$ ); [-] adimensional;
- $\{q\}$ : vetor de vazões nodais impostas.

### 3.2.3 SÍNTESE DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS DO PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO EM MEIOS SATURADOS

Após a discretização espacial do problema acoplado, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$[K]\{\dot{u}\} + [C]\{\dot{p}\} = \{\dot{F}\} \quad (3.16)$$

$$[H]\{p\} + [L]\{\dot{u}\} = \{q\} \quad (3.17)$$

As Equações (3.16) e (3.17) podem ser expressas de forma condensada por:

$$[A]\{x\} + [B]\{\dot{x}\} = \{Y\} \quad (3.18)$$

sendo  $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [H] \end{bmatrix}$ ,  $[B] = \begin{bmatrix} [K] & [C] \\ [L] & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\{X\} = \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{Bmatrix}$  e  $\{Y\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}$ .

### 3.2.4 SOLUÇÃO TEMPORAL PARA O SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS

A fim de obter uma solução estacionária equivalente ao problema transiente, é preciso integrar a Equação (3.11) no tempo, além da integração no espaço. Deste modo, dentro de um intervalo de tempo  $\Delta t$ , o vetor de incógnitas,  $\{x\}$ , varia linearmente, podendo ser avaliado como:

$$\{x\}_{t+\alpha\Delta t} = (1 - \alpha)\{x\}_t + \alpha\{x\}_{t+\Delta t} \quad (3.19)$$

sendo  $\alpha$  o parâmetro que controla o sistema de integração,  $\{x\}_t$  e  $\{x\}_{t+\Delta t}$  os valores do vetor de incógnitas no instante inicial e no estágio de tempo que será calculado. Além disso, pode-se expressar a derivada temporal do vetor de incógnitas como:

$$\{\dot{x}\}_{t+\alpha\Delta t} = \frac{\{x\}_{t+\Delta t} - \{x\}_t}{\Delta t} \quad (3.20)$$

Bem como quando a Equação (3.18) é avaliada no instante de tempo  $t + \alpha\Delta t$  é expressa como:

$$[A]_{t+\alpha\Delta t}\{x\}_{t+\alpha\Delta t} + [B]_{t+\alpha\Delta t}\{\dot{x}\}_{t+\alpha\Delta t} = \{Y\}_{t+\alpha\Delta t} \quad (3.21)$$

Dessa forma, substituindo as equações (3.19) e (3.20) na Equação (3.21) obtém-se a solução em termos do incremento do vetor de incógnitas:

$$[\Delta t\alpha[A]_{t+\alpha\Delta t} + [B]_{t+\alpha\Delta t}]\{\Delta x\} = \Delta t\{Y\}_{t+\alpha\Delta t} - [A]_t\{x\}_t \quad (3.22)$$

onde:

- $[A]_{t+\alpha\Delta t} = [A(\{x\}_{t+\alpha\Delta t})] = [A((1 - \alpha)\{x\}_t + \alpha\{x\}_{t+\Delta t})]$
- $[B]_{t+\alpha\Delta t} = [B(\{x\}_{t+\alpha\Delta t})] = [B((1 - \alpha)\{x\}_t + \alpha\{x\}_{t+\Delta t})]$
- $\{Y\}_{t+\alpha\Delta t} = [Y(\{x\}_{t+\alpha\Delta t})] = [Y((1 - \alpha)\{x\}_t + \alpha\{x\}_{t+\Delta t})]$ .

### 3.3 DISCRETIZAÇÃO DA PARTE FRATURADA USANDO O XFEM

No XFEM as proximidades da descontinuidade sofrem mudanças, além disso o enriquecimento só se aplica ao campo de deslocamentos, de forma que as funções de enriquecimento são acrescentadas às funções de forma e às suas respectivas derivadas.

$$\int [B]^T \{\sigma\} d\Omega = \int [N]^T \{\sigma\} d\Gamma + \int [N]^T \{b\} d\Omega \quad (3.23)$$

Sendo  $[B] = [B^u, B^a]$ ,  $[N] = [N^u, N^a]$ , sendo  $u$  a matriz padrão e  $a$  a matriz enriquecida, na qual as matrizes podem ser enriquecidas pelas funções *Heaviside* ou *Crack tip* (funções descritas nos Itens 2.7.4 e 2.7.5).

A solução da Equação (3.23) é feita de forma semelhante à solução da Equação (3.19), mas considerando as modificações devidas ao enriquecimento, resultando em um sistema linear de equações discretas em equilíbrio:

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{ua} \\ K^{au} & K^{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ a \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_u \\ F_a \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

sendo que  $\{u\}$  e  $\{a\}$  são os vetores de graus de liberdade do cálculo padrão e enriquecido, respectivamente.  $\{F_u\}$  e  $\{F_a\}$  são os vetores de forças externas padrão e enriquecidas, respectivamente. Isso posto, a matriz K para cada elemento do domínio  $\Omega$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} K^{uu} & K^{ua} \\ K^{au} & K^{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} [B^u]^T [D] [B^u] d\Omega & \int_{\Omega} [B^u]^T [D] [B^a] d\Omega \\ \int_{\Omega} [B^a]^T [D] [B^u] d\Omega & \int_{\Omega} [B^a]^T [D] [B^a] d\Omega \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

e o vetor  $\{F\}$  é dado por:

$$\{F\} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_t} [N^u]^T \{t\} d\Gamma + \int_{\Omega} [N^u]^T \{b\} d\Omega \\ \int_{\Gamma_t} [N^a]^T \{t\} d\Gamma + \int_{\Omega} [N^a]^T \{b\} d\Omega \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Por fim, as matrizes B das parte sem enriquecimento e da parte enriquecida serão:

$$B^u = \begin{bmatrix} (N_i)_x & 0 \\ 0 & (N_i)_y \\ (N_i)_y & (N_i)_x \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$B^a = \begin{bmatrix} (HN_i)_x & 0 \\ 0 & (HN_i)_y \\ (HN_i)_y & (HN_i)_x \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$B^u = \begin{bmatrix} (F_{\alpha} N_i)_x & 0 \\ 0 & (F_{\alpha} N_i)_y \\ (F_{\alpha} N_i)_y & (F_{\alpha}) \end{bmatrix} \text{ sendo } \alpha = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (3.29)$$

### 3.4 TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS POLARES EM COORDENADAS CARTESIANAS NA FUNÇÃO *CRACK TIP*

As funções *crack tip* são definidas em um sistema local de coordenadas polares  $(r, \theta)$  na ponta da fratura (Khoei, 2015). Conseqüentemente, as derivadas das funções de forma enriquecidas pela *crack tip*, com relação às coordenadas globais, são expressas em coordenadas polares conforme:

$$\frac{dF}{dX} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (3.30)$$

$$\frac{dF}{dY} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial Y} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (3.31)$$

onde  $X$  e  $Y$  correspondem ao eixo de coordenadas cujo eixo das abscissas corresponde com a direção da fratura.

À vista disso, uma série de derivadas intermediárias que permitam realizar o cálculo desejado serão apresentadas, são elas as derivadas das funções de enriquecimento *crack tip* em relação ao sistema de coordenadas polares locais, dadas por:

$$\frac{dF_1}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.32)$$

$$\frac{dF_2}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.33)$$

$$\frac{dF_3}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \quad (3.34)$$

$$\frac{dF_4}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \quad (3.35)$$

$$\frac{dF_1}{d\theta} = \frac{\sqrt{r}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.36)$$

$$\frac{dF_2}{d\theta} = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.37)$$

$$\frac{dF_3}{d\theta} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right) \quad (3.38)$$

$$\frac{dF_4}{d\theta} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \cos \theta \right) \quad (3.39)$$

### 3.5 BALANÇO DE MASSA DE UM ELEMENTO FRATURADO

Para o balanço de massa de um elemento fraturado será considerado que o fluxo que atravessa o elemento é composto por duas parcelas, sendo elas: o fluxo que atravessa a matriz rochosa e o fluxo que atravessa a fratura. Uma ilustração simplificada do fenômeno é apresentada na Figura 3.2. Considerando que no problema de fraturamento hidráulico, o fluxo que poderá migrar da fratura para a matriz é denominado de *leak off* ou vazamento. A figura ilustra o balanço de massa do elemento fraturado, considerando que  $M_i$  é a massa de fluido que entra na matriz rochosa e  $F_i$  é a massa de fluido que entra na fratura, estabelece-se a seguinte relação:

$$\overbrace{\frac{\partial M_x}{\partial x} dx + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy}^{leak-off} + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy_l = \overbrace{\frac{\partial M_w}{\partial t}}^{leak-off} + \frac{\partial F_w}{\partial t} \quad (3.40)$$

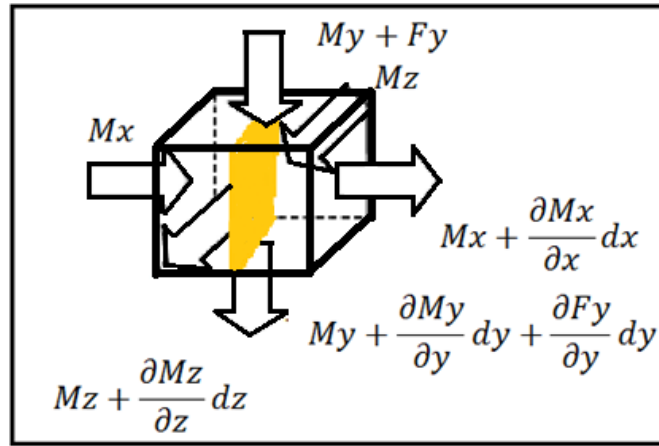


Figura 3.2 Balanço de massa de um elemento fraturado

A inclusão do fluxo na fratura requer um modelo específico para isso. No caso deste trabalho, será adotado o modelo PKN (Xiang, 2011). Este modelo estabelece que parte do volume de fluido injetado na fratura fica armazenado dentro da própria fratura e a outra parte vaza para a formação rochosa (*leak-off*). Sabendo que  $q$  é o volume de fluido injetado,  $w$  é o volume da fratura e  $u_l$  é o volume de fluido que vaza para a formação rochosa, tem-se que o balanço de massa é dado por (Xiang, 2011):

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} + u_l = 0 \quad (3.41)$$

sendo que  $u_l = \frac{2Cl}{\sqrt{t-\tau(x)}}$ , onde  $Cl$  é o coeficiente de *leak-off*, que pode ser obtido experimentalmente,  $t$  é o tempo desde o início do bombeamento de fluido e  $\tau$  é o que a ponta da fratura leva para chegar à localização  $x$ .

A Equação (3.41) tem unidade de comprimento por tempo (L/T). O *leak-off* é a quantidade de fluido perdida para a matriz rochosa e pode ser representado pela Equação (3.7) de continuidade da água, tendo unidade de (1/T).

Considerando que a densidade de fluido é constante, a equação (3.40) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial v_x^M}{\partial x} + \frac{\partial v_y^M}{\partial y} + \frac{\partial v_x^f}{\partial x} + \frac{\partial v_y^f}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta_f}{\partial t} = 0 \quad (3.42)$$

Onde  $v_i^M$  é a velocidade do fluido dentro da matriz,  $\varepsilon_v$  é a deformação volumétrica da matriz,  $v_i^f$  é a velocidade do fluido dentro da fratura e  $\vartheta_f$  é a taxa de variação do volume da fratura ao longo da direção da fratura. A velocidade dentro da matriz rochosa pode ser calculada pela lei de Darcy, enquanto a velocidade dentro da fratura requer outra lei que considere as



características geométricas da fratura e das características do fluido. Neste trabalho foi adotada uma proposta adaptada do modelo PKN ((Xiang, 2011), sendo definida como:

$$v_i^f = -\frac{\Psi}{2k_p} (w)^3 \frac{\partial P_w}{\partial x_i} \quad (3.43)$$

onde  $\Psi$  é o fator de forma adimensional que leva em consideração a geometria da secção transversal da fratura (Xiang, 2011),  $P_w$  é a poropressão e  $k_p$  é uma constante constitutiva do fluido que leva em consideração a viscosidade deste. No capítulo 2 foram apresentados maiores detalhes sobre estes parâmetros, sendo que os valores de  $\Psi$  para fraturas elípticas, retangulares e na forma de losango foram apresentados na Tabela 2.2.

Assim, o fluxo dentro de um elemento fraturado pode ser obtido por:

$$\underbrace{\frac{\Psi w^3}{2k_p}}_C \frac{\partial^2 P_w}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \vartheta_f}{\partial t} + k_w \frac{\partial^2 P_w}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = 0 \quad (3.44)$$

onde  $C$  é a constante usada para computar o fluxo dentro da fratura de acordo com a Lei Cúbica (Equação 3.43).

### 3.6 QUADRATURA DE GAUSS PARA ELEMENTO TRIANGULAR

A integração numérica de Gauss é bastante utilizada no MEF, em uma série de problemas de engenharia. Para elementos quadrados ou hexaedros as equações da quadratura de Gauss podem ser naturalmente derivadas do produto dos tensores da quadratura Gaussiana unidimensional. Em contrapartida, calcular a quadratura de Gauss para elementos triangulares e tetraedros é mais complexo. Há vários estudos nesse sentido, mas não há uma teoria geral (Zhang, et al, 2009). Vários modelos foram propostos, dentre eles destaca-se o trabalho de Dunavant (1985) que possui uma regra de quadratura de Gauss que vai até 78 pontos de Gauss e de Zhang et al. (2009) que computou até 88 pontos de Gauss.

Para simulações utilizando XFEM, torna-se necessário refinar a malha ou aumentar os pontos de Gauss, principalmente na região enriquecida. Isto ocorre devido às funções de enriquecimento que são descontínuas e/ou assintóticas, tornando necessário que os resultados sejam calculados no maior número possível de pontos do domínio.

### 3.6.1 REGRA PARA CALCULAR A QUADRATURA DE GAUSS DO ELEMENTO TRIANGULAR POR ZHANG et al.(2009)

Essa segunda regra para calcular a quadratura de Gauss é mais simples do que a anterior. Ela também é simétrica, no entanto ela fornece uma quadratura com mais pontos de Gauss, podendo chegar até 88 pontos. Uma regra de quadratura é definida como um conjunto de nós e pesos, em que para cada função  $f(x)$ , definida em um domínio contendo um subdomínio  $T$  e os pontos  $p_i$ , a sua integral pode ser aproximada por:

$$\int_T f(x)dx \approx |T| \sum_{i=1}^n f(p_i)w_i \quad (3.47)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  é o número de pontos de Gauss,  $p_i$  são os pontos de gauss,  $w_i$  são os pesos associados aos pontos e  $|T|$  denota a área do triângulo.

Diz-se que uma regra de quadratura é de ordem (algébrica)  $p$  se a Equação (3.47) for exata para todos os polinômios de grau maior do que  $p$ . O conjunto de polinômios de grau menor ou igual a  $p$  é denotado por  $\mathbb{P}^{(p)}$ . Para uma quadratura simétrica, o conjunto de pontos  $n$  é dividido em órbitas simétricas. Supondo que  $n$  pode ser decomposto em  $n = n_1 + 3n_2 + 6n_3$ , onde  $n_1 = 0$  ou  $1$ ,  $n_2 \geq 0$ ,  $n_3 \geq 0$ , então o conjunto de pontos  $n$  pode ser dividido nas órbitas  $n_1S_1$ ,  $n_2S_{21}$  e  $n_3S_{111}$ .  $S_1$ , corresponde a um ponto fixo que é o baricentro do triângulo. Os pontos em  $S_{21}$  são determinados por uma abscissa incógnita e os pontos na órbita  $S_{111}$  são determinados por duas abscissas incógnitas. Para cada órbita simétrica os pesos são iguais. Como o número de incógnitas na Equação (3.47) pode ser reduzido a  $n_2 + 2n_3$  abscissas incógnitas e os pesos desconhecidos são  $n_1 + n_2 + n_3$ , a simetria também pode ser usada para reduzir o número de equações polinomiais na Equação (3.47). Neste caso, foram usados monômios da forma  $x_1^{k_1}x_2^{k_2}$  com  $k_1 \leq k_2$  e  $k_1 + k_2 \leq p$ . Escolhendo um triângulo comum definido em  $\{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ , usando a fórmula:

$$\int_T x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \frac{k_1 k_2}{(2 + k_1 + k_2)!} \quad (3.48)$$

é gerado um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são  $n_2 + 2n_3$  abscissas independentes e  $n_1 + n_2 + n_3$  os pesos. Esse sistema é calculado computacionalmente. A solução está no apêndice A1. A Tabela 3.1 contém a forma como a quadratura de Gauss deve ser calculada utilizando o apêndice A1.

Tabela 3.1 Regra para calcular as coordenadas dos pontos de Gauss.

Permutação	Coordenadas baricêntricas	Nº de pontos de Gauss
$S_3\left(\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	1
$S_{21}(a)$	$(a, a, 1 - 2a)$	3
$S_{111}(a, b)$	$(a, b, 1 - a - b)$	6

### 3.7. FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO (SIF)

Ao assumir o comportamento elástico linear, os campos de tensão, deformação e deslocamento, próximos à ponta da fratura, podem ser encontrados aplicando os conceitos de SIFs. Há uma série de técnicas na literatura para calcular os SIFs, dentre elas: método de correlação do deslocamento, método de crescimento virtual da fratura, método da integral-J.

Os métodos computacionais para calcular os SIFs dividem-se em abordagem “direta”, que correlaciona os SIFs com os resultados obtidos pelo MEF diretamente, e a abordagem de “energia”, que se baseia no cálculo da taxa de liberação de energia. A segunda é mais precisa, embora a primeira seja mais popular (Khoei, 2015).

Um método de integral de contorno e de domínio, baseado na abordagem de “energia” e independente do caminho, bastante utilizado para fraturas que se propagam em modo misto, é a integral-J. Essa técnica foi inicialmente definida por Cherepanow(1967) e Rice (1968). A integral-J calcula a taxa de energia liberada em uma fratura usando coordenadas locais da ponta da fratura em um sistema de coordenadas  $(x_1, x_2)$  como:

$$J = \int_{\Gamma} \left( w \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\delta u_i}{\delta x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (3.49)$$

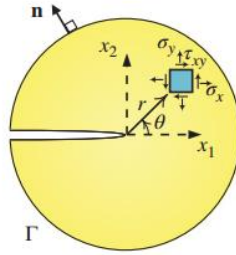


Figura 3.3 Caminho circular simples para o contorno da integral ao redor da ponta da fratura (Khoei, 2015).

Onde  $w$  é a densidade de energia de deformação, definida como  $w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ , sendo que  $\sigma_{ij}$  denota o tensor de tensão,  $u_i$  denota o campo de deslocamentos e  $n_j$  é uma unidade do vetor normal na integral de contorno  $\Gamma$ ,  $\delta$  é o delta de Kronecker e  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  é a tração na integral de contorno  $\Gamma$  (Figura 3.4). A integral-J independe do caminho se não houver forças de corpo nem tração nas faces da fratura. A técnica é baseada em pequenas deformações, o material deve ter comportamento elástico, condições quase-estáticas e isotérmicas. A integral-J é a variação de energia potencial para uma extensão infinitesimal da fratura (Equação 3.49) (Khoei, 2015).

A Integral J também pode ser calculada em função do SIF, quando o modo de fraturamento for misto e 2D, conforme a equação a seguir:

$$J = \frac{1}{E'} * (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (3.50)$$

onde  $E' = E$  para problemas de tensão plana e  $E' = E/(1 - \nu^2)$  para problemas de deformação plana.

Utilizando a Equação (3.54), percebe-se que é possível calcular SIF do modo I e do modo II, utilizando o método de integral-J. Como há duas incógnitas e uma equação, será necessário escolher um estado auxiliar, de modo que ele satisfaça tanto a equação de equilíbrio, como a condição de contorno em que a superfície da fratura está livre de tração (Gosz, 2005). Além disso, o estado auxiliar deve representar os campos de tensão e deslocamento em uma região vizinha à ponta da fratura (Mohammadi, 2008). A integral-J da soma do estado real ao auxiliar pode ser definida como:

$$J^{(1+2)} = \int \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial}{\partial x_1} (u_i^{(1)} + u_i^{(2)}) n_j d\Gamma \quad (3.51)$$

Manipulando algebricamente a Equação 3.51 obtém-se que:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (3.52)$$

onde  $J^{(1)}$  e  $J^{(2)}$  estão associadas ao estado real e ao estado auxiliar, respectivamente, e  $I^{(1,2)}$  é a integral de interação, definida como:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} (w^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1}) n_j d\Gamma \quad (3.53)$$

$$w^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (3.54)$$

E a integração de interação também pode ser obtida por em função dos SIF do modo I e do modo II, conforme:

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E'} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \quad (3.55)$$

O estado auxiliar será assumido de duas formas. A primeira forma denotada por (2a), será utilizada para calcular o  $K_I^{(1)}$ . Para isso ele será considerando como modo I puro nos campos assintóticos. Isso significa que,  $K_I^{(2a)} = 1$  e  $K_{II}^{(2a)} = 0$ , logo o SIF  $K_I^{(1)}$  pode ser calculado usando a integral de interação I conforme a equação a seguir:

$$K_I^{(1)} = \frac{E'}{2} I^{(1,2a)} = \frac{E'}{2} \int_{\Gamma} w^{(1,2a)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2a)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2a)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} n_j d\Gamma \quad (3.56)$$

Os campos de deslocamento e de tensão do modo auxiliar (2a) são dados por:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I^{(2a)} (1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y &= \frac{K_I^{(2a)} (1 + \nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\sigma_x = \frac{K_I^{(2a)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{K_I^{(2a)}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.58)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I^{(2a)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = 0$$

Na segunda forma do estado auxiliar, denotado por (2b), ele será modo II puro nos campos assintóticos, ou seja,  $K_I^{(2b)} = 0$  e  $K_{II}^{(2b)} = 1$ , o SIF  $K_{II}^{(1)}$  pode ser calculado usando a integral de interação I conforme a equação a seguir:

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E'}{2} I^{(1,2b)} = \frac{E'}{2} \int_{\Gamma} w^{(1,2b)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2b)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2b)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} n_j d\Gamma \quad (3.59)$$

Os campos de deslocamento e de tensão do modo auxiliar (2a) são dados por:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I^{(2a)}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_y &= \frac{K_I^{(2a)}(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ u_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\sigma_x = \frac{K_I^{(2a)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{K_I^{(2a)}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{K_I^{(2a)}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = 0 \end{aligned}$$

Por fim, integral J, Equação (3.49), pode ser diretamente avaliada ao longo do contorno usando uma malha de elementos finitos. Esse contorno pode ser calculado nos pontos de Gauss, onde as tensões são calculadas mais precisamente. No entanto, a implementação prática dessa técnica raramente é independente do caminho e o resultado se torna dependente da malha. Khoei (2015) cita o trabalho de Li, Shih e Needleman (1985) que transformaram o contorno da integral J em uma integral de área equivalente. Esta transformação é definida por:

$$J = \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\delta u_i}{\delta x_1} - w \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (3.62)$$

onde  $q$  é a peso da função definida no domínio da integração (Figura 3.4). A integração deve ser escolhida de tal forma que, primeiramente esteja próxima à ponta da fratura, em segundo lugar seja simples de implementar na simulação e, finalmente, que as condições de contorno e a geometria sejam consistentes para problemas complexos (Khoei, 2015).

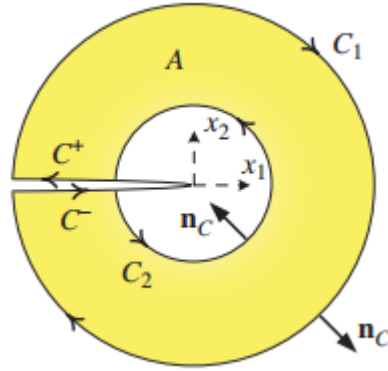


Figura 3.4 Domínio da Integral J para calcular os fatores de intensidade de tensões no modo misto (Khoei, 2015).

Utilizando a integração Gaussiana em um elemento para calcular a Integral J obtemos a seguinte equação:

$$J = \sum_{m=1}^{N^{Gauss}} \left\{ \left( -w\delta_{1j} + \sigma_{ij} \frac{\delta u_i}{\delta x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right\}_m w_m \det j \quad (3.63)$$

onde  $N^{Gauss}$  é o número de pontos de Gauss de um elemento,  $w_m$  é o peso de cada ponto e  $j$  é a matriz Jacobiana.

## **4. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO E VALIDAÇÃO DO CÓDIGO**

No Capítulo 3 foi descrita a formulação para resolver o problema de fraturamento hidráulico utilizando o método dos elementos finitos estendido e o acoplamento hidromecânico. O código é baseado nos algoritmos apresentados por Farias (1993), Cordão Neto (2005) e Morais (2016). Além disso, foram implementados algoritmos que calculam o crescimento da fratura, a integral  $J$  e o SIF para os modos de fraturamento I e II.

Neste Capítulo será apresentado o fluxograma do programa elaborado, as modificações feitas no programa de Morais (2016) e as suas atribuições. Além disso, serão retratadas as simulações usadas para validar o programa, como o adensamento de Terzaghi, o problema de deformação plana de Biot e outras simulações que possuem resultado analítico. Para as malhas triangulares, com elementos de seis nós, só foi possível validar o acoplamento hidromecânico. Já para a malha com elemento quadrado, foram usadas as validações feitas por Morais (2016).

### **4.1 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO NUMÉRICO**

O programa de Morais (2016) é usado como base para a elaboração deste trabalho. O fluxograma da Figura 4.1 possui as funções que foram implementadas por Morais (2016), que estão descritas abaixo:

- INITIAL\_STATE- Responsável, quando necessário, pela leitura do estado de tensões inicial do solo e poropressão inicial.
- LOAD/DISPLAC- Leitura dos carregamentos do problema.
- CRACK- Leitura das coordenadas da fratura, e localização dos elementos que serão enriquecidos.
- PERCF- Cálculo das forças de percolação do problema.
- HM\_MATXE2DENR- Montagem das matrizes de cada elemento, podendo ele ser enriquecido ou não, utilizando o XFEM na construção das matrizes.
- HM\_MATXG2DENR- Montagem da matriz global padrão e enriquecida.
- ORGANIZE- Organização das equações do problema.
- ELIMINA\_GAUSS- Eliminação de Gauss para a resolução do problema.
- SOLVER- Resolução do sistema de equações do problema.



- INTEGX2- Cálculo das deformações, tensões e poropressões correspondentes aos deslocamentos do problema e as forças internas.
- SIFFUNC- Cálculo do SIF e a integral J do problema.
- ACUM- Armazenamento e acúmulo dos valores das tensões e deformações calculadas.
- D\_MATRIX2D- Contém a matriz da relação constitutiva do problema. Foi implementada apenas a relação linear elástica.
- OUTPUT- Impressão dos resultados.

Foram feitas algumas mudanças no código de Morais (2016), entre elas:

- Adaptar a malha para o elemento triangular de seis nós;
- Implementar as funções *heaviside* e *crack tip* de forma que elas são capazes de calcular a descontinuidade em qualquer direção;
- Adaptar o algoritmo que calcula os SIF para o modo misto de fraturamento;
- Inserir uma lei de fluxo cúbica, que considera a geometria da fratura e a viscosidade do fluido.

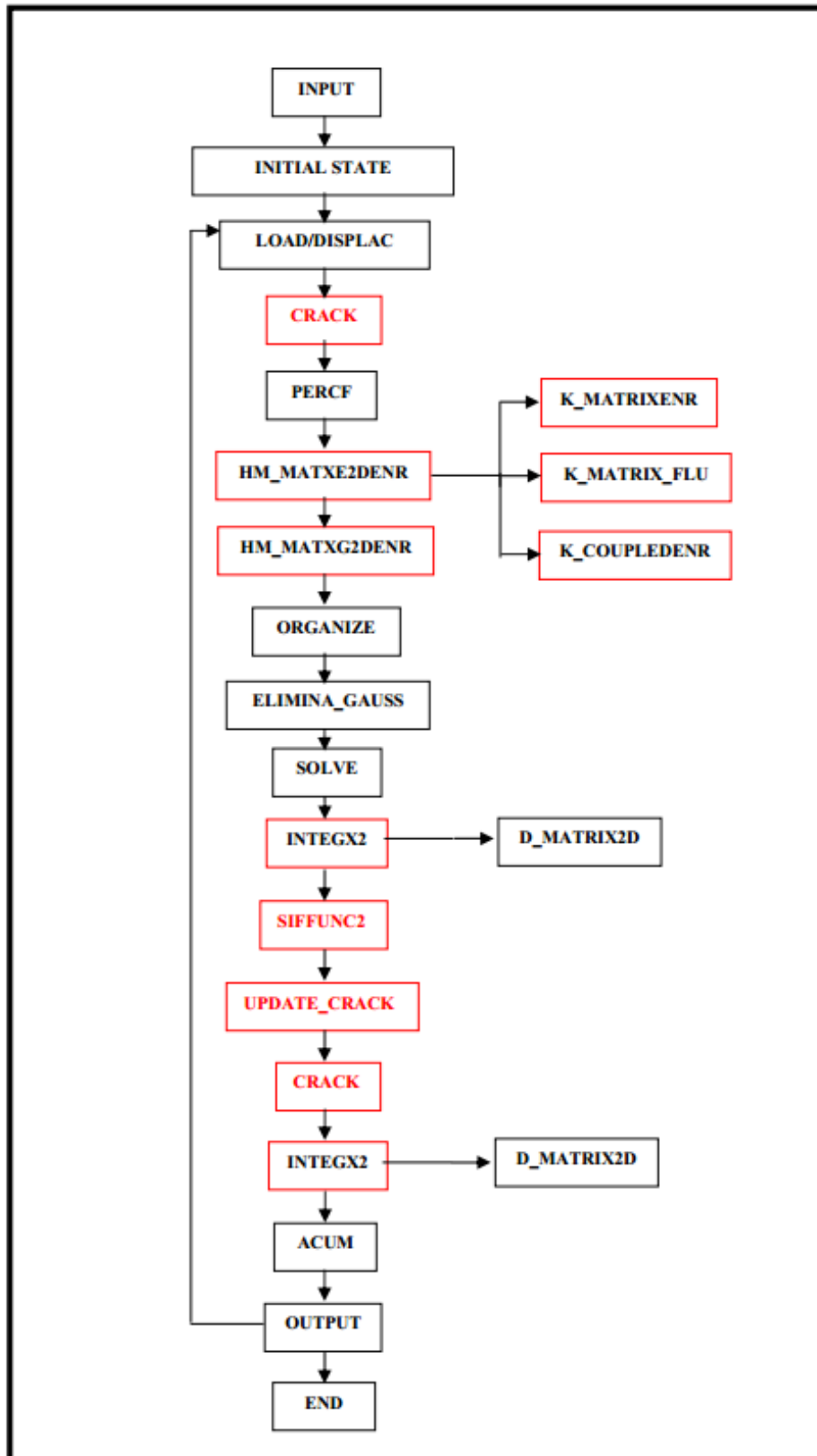


Figura 4.1 Fluxograma do código de XFEM (Morais, 2016).

## 4.2 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO CALCULADO PARA UMA MALHA COM ELEMENTOS TRIANGULARES DE SEIS NÓS

As simulações de validação podem ser divididas em dois grupos. No primeiro grupo foram realizadas duas simulações semelhantes às de Cordão Neto (2005), para conferir a implementação do fluxo e do equilíbrio 2D, são elas: Adensamento unidimensional de Terzaghi (Figura 4.2) e um problema de deformação plana (Figura 4.4), que possui solução analítica dada por Biot. No segundo grupo foram realizadas simulações que possuem solução analítica na literatura, para verificar o funcionamento e precisão das funções de enriquecimento no modelo acoplado.

### 4.2.1 PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO UNIDIMENSIONAL

A primeira simulação realizada é o adensamento unidimensional de Terzaghi, na qual uma coluna de altura  $H=1\text{m}$ , confinada lateralmente é submetida a carregamento distribuído,  $p = 100 \text{ kN/m}^2$ , na superfície, como pode-se observar na Figura 4.2. Com as condições de contorno aplicadas, o problema passa a ser equivalente a um problema unidimensional (Cordão Neto, 2005).

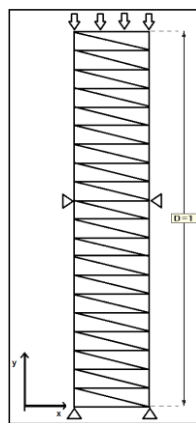


Figura 4.2 Problema de consolidação unidimensional de Terzaghi.

O problema foi resolvido considerando as seguintes condições: o tempo  $T$  é normalizado e dado por  $T = \frac{c_v t}{h_d^2}$ , sendo  $c_v$  o coeficiente de adensamento,  $h_d$  é a altura de drenagem e  $t$  é o tempo real. O módulo adotado foi de  $25.000\text{MPa}$  e o Poisson é  $0,3$ . Além disso, a permeabilidade do meio é de  $1.10^{-6}\text{m/s}$ .

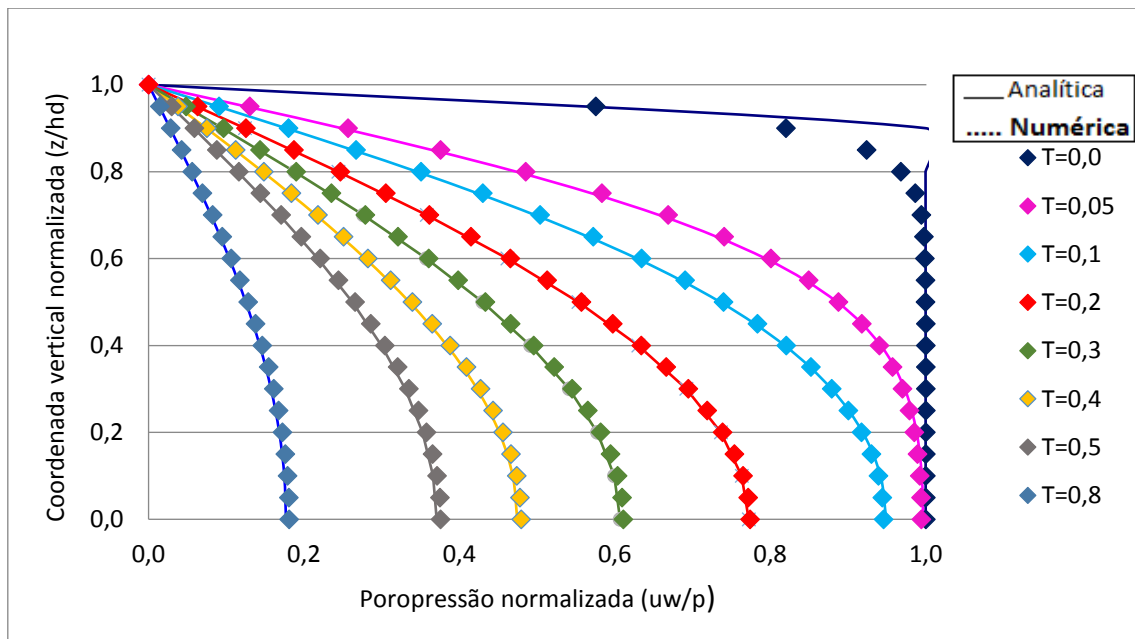


Figura 4.3 Curvas de consolidação - Resultado Analítico e Numérico

A Figura 4.3 contém as curvas de adensamento para cada tempo. É possível observar que os resultados obtidos pela análise numérica são precisos quando comparados aos resultados analíticos.

#### 4.2.2 PROBLEMA DE DEFORMAÇÃO PLANA

Ainda no primeiro grupo de simulações, foi analisado um problema de deformação plana. Serão computados os deslocamentos de uma camada infinita de argila submetida a um carregamento distribuído aplicado no instante  $t=0$ . A argila está saturada. A malha possui 200 elementos triangulares quadráticos. Os resultados obtidos na simulação foram comparados com os resultados analíticos obtidos por Biot (1940). Na Figura 4.5 pode-se observar a geometria do carregamento, a malha usada nas simulações, assim como as propriedades do solo.

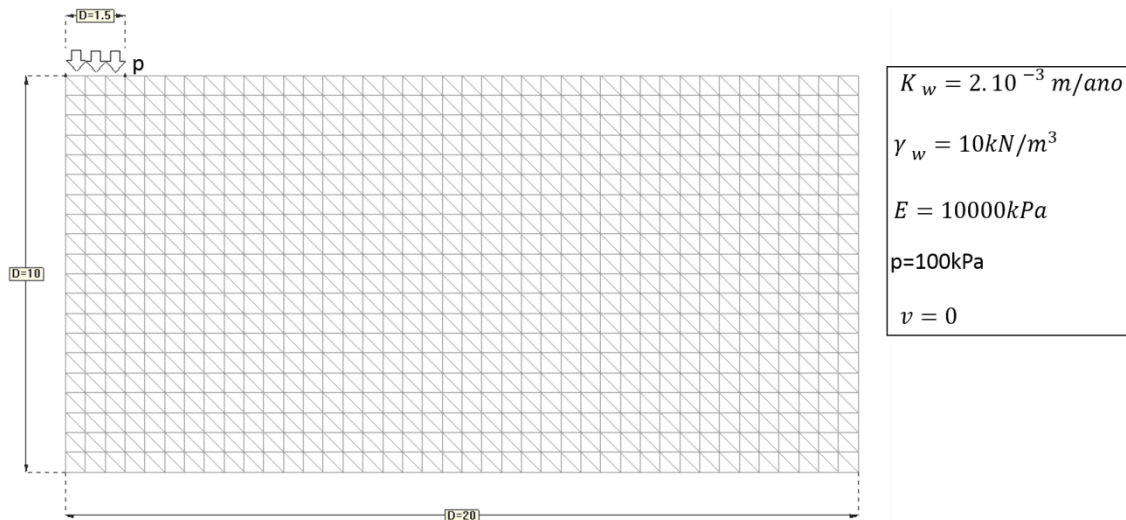


Figura 4.4 Malha e propriedades do problema de consolidação de deformação plana, vista no plano x-y (Cordão Neto, 2005).

A solução do problema é calculada em termos de distância ao eixo de simetria do problema  $x/b$ , versus o deslocamento normalizado,  $d$ . O deslocamento normalizado e o fator tempo  $T$  são dados por:

$$d = \frac{w}{w_{inf}} \quad (4.1)$$

$$T = \frac{(c_v t)^{\frac{1}{2}}}{l} \quad (4.2)$$

onde  $w$  é o deslocamento superficial devido a carga  $p$ ,  $l$  é a largura total do carregamento aplicado, sendo igual a  $2b$ ,  $t$  é o tempo e  $w_{inf} = apl/(4\sqrt{\pi})$ . Além disso,  $c_v$  corresponde ao coeficiente de compressibilidade do solo e  $a$  é calculado por:

$$a = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \quad (4.3)$$

onde  $E$  é o Modulo de Young e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

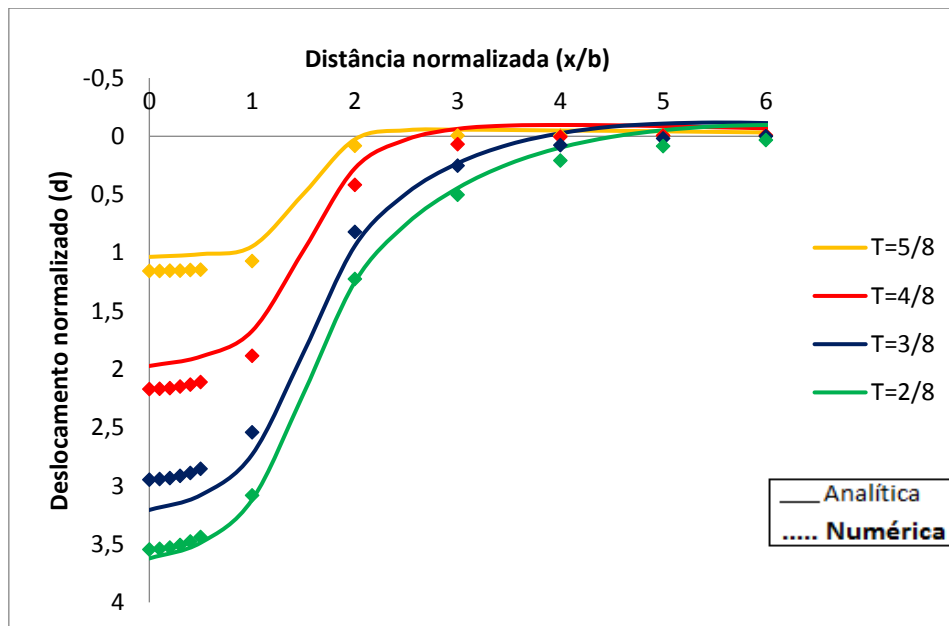


Figura 4.5 Resultados da validação utilizando o problema de deformação plana de Biot.

A Figura 4.5 contém as curvas da solução analítica e da solução numérica. Pode-se observar que, embora haja pequenas diferenças entre elas, os resultados obtidos são satisfatórios. As divergências encontradas são geradas porque na solução numérica o domínio é finito, enquanto na solução analítica, tem-se um semi-espaço infinito.

#### 4.2.3 VALIDAÇÃO DA FUNÇÃO *HEAVISIDE*

A função *heaviside* é aplicada no enriquecimento dos elementos que contém o corpo da fratura. Para verificar se ela está funcionando, primeiramente foi criado um domínio, cuja geometria pode ser observada na Figura 4.6, 4.7 e 4.8. Neste domínio, foi inserida uma fratura. Primeiramente, foi inserida uma fratura reta (Figura 4.6), em seguida, uma fratura que começa vertical e segue inclinada (Figura 4.7), já no domínio representado na Figura 4.8 a fratura divide a peça que está na posição horizontal em um pedaço superior. Por fim, nas Figuras 4.6 e 4.7, foi imposto um deslocamento de 0,1 m na direção x na lateral direita da viga, enquanto que a lateral esquerda está travada em x. Na Figura 4.8 o deslocamento uniforme de 0,1m está aplicado na face superior da viga e a face inferior está travada em y.

Tanto na Figura 4.6, quanto na 4.7 e na 4.8, pode-se observar que a viga está fraturada em toda a sua altura ou largura. Os resultado das Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 foram calculados com 88 pontos de Gauss. Foi escolhida essa quantidade de pontos de Gauss porque ao fazer a simulação com

menos pontos, a resposta não foi precisa. Como já era esperado, não há deformações em local algum do domínio, a parte do domínio depois da fratura se desloca uniformemente, enquanto que o restante não se desloca.

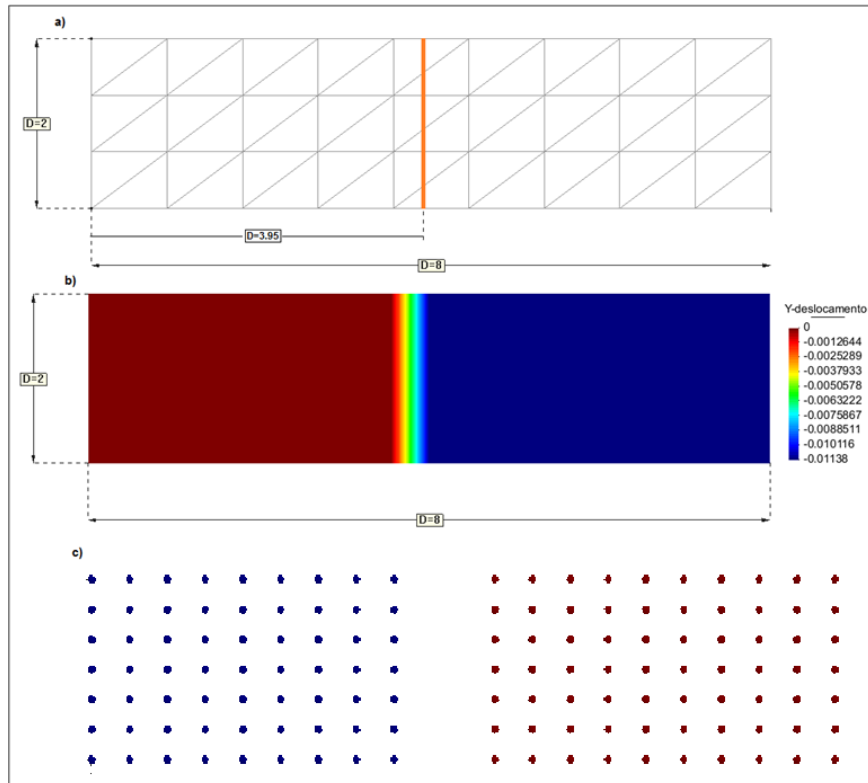


Figura 4.6 Teste da função *heaviside* para fratura vertical. a) geometria do domínio e da fratura; b) Deslocamentos na direção x; c) geometria deformada

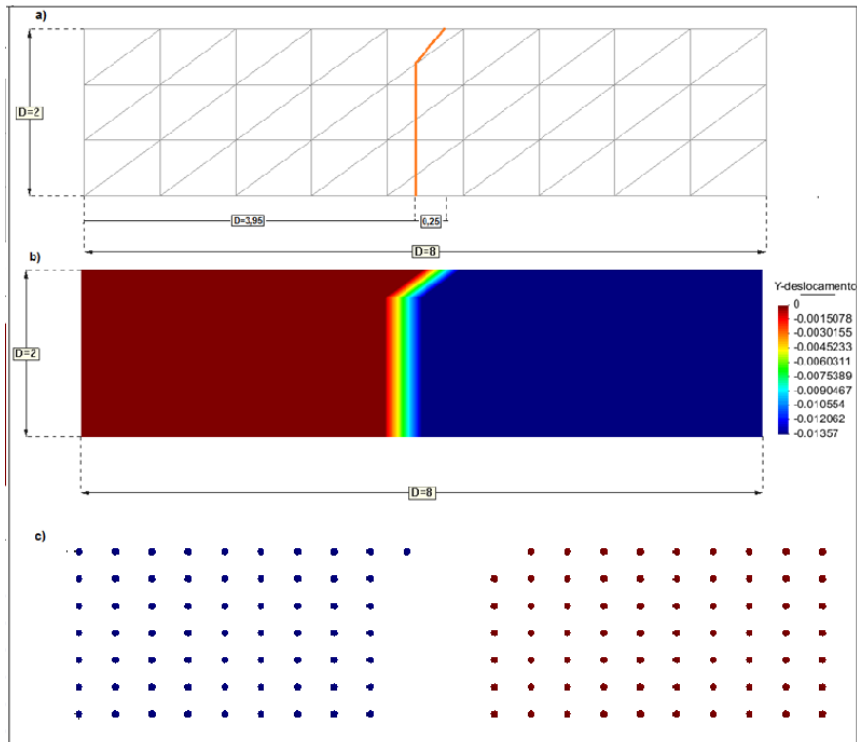


Figura 4.7 Teste da função *heaviside* para fratura vertical e inclinada: a) geometria do domínio e da fratura; b) deslocamentos na direção x; c) geometria deformada.

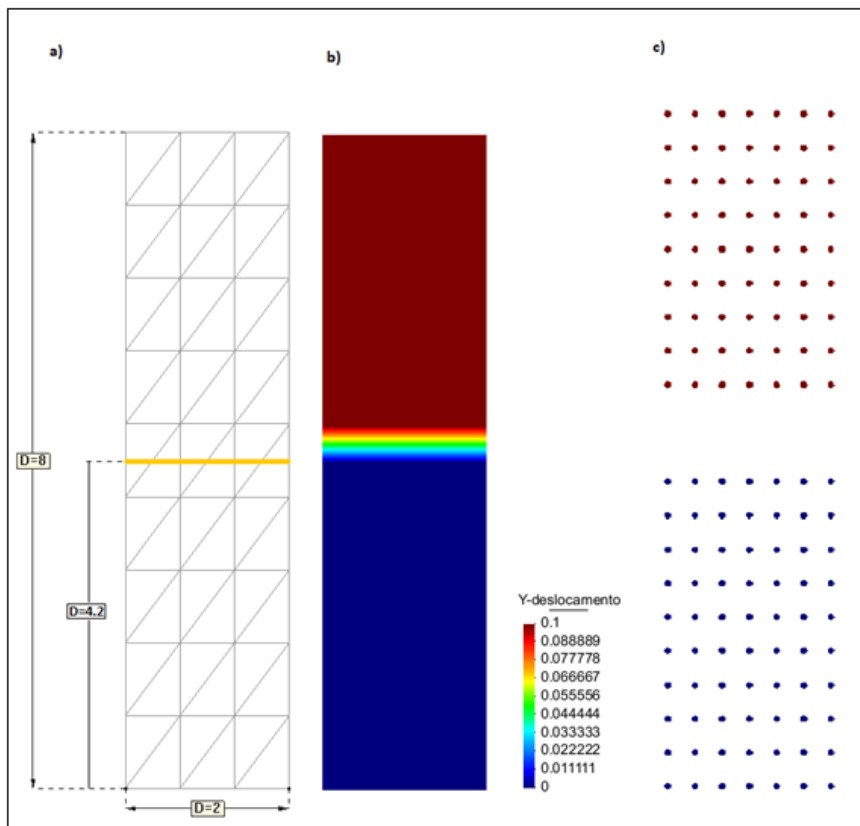


Figura 4.8 Teste da função *heaviside* para fratura horizontal: a) geometria do domínio e da fratura; b) deslocamentos na direção y; c) geometria deformada.



### 4.3 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO CALCULADO PARA UMA MALHA COM ELEMENTOS QUADRADOS COM QUATRO NÓS

Neste item serão demonstradas as validações do código feitas por Morais (2016). Começando pela validação do modelo hidromecânico acoplado, seguida pela validação da implementação do XFEM.

#### 4.3.1 PROBLEMA DE CONSOLIDAÇÃO UNIDIMENSIONAL

A forma de fazer essa validação é semelhante à explicada no item 4.2.1, a única diferença é a malha em que a simulação foi implementada. Nesse caso é uma malha com 10 elementos retangulares. Os resultados da validação de Morais (2016) estão ilustrados na Figura 4.9. Os resultados numéricos de Morais (2016) são precisos quando comparados com os analíticos.

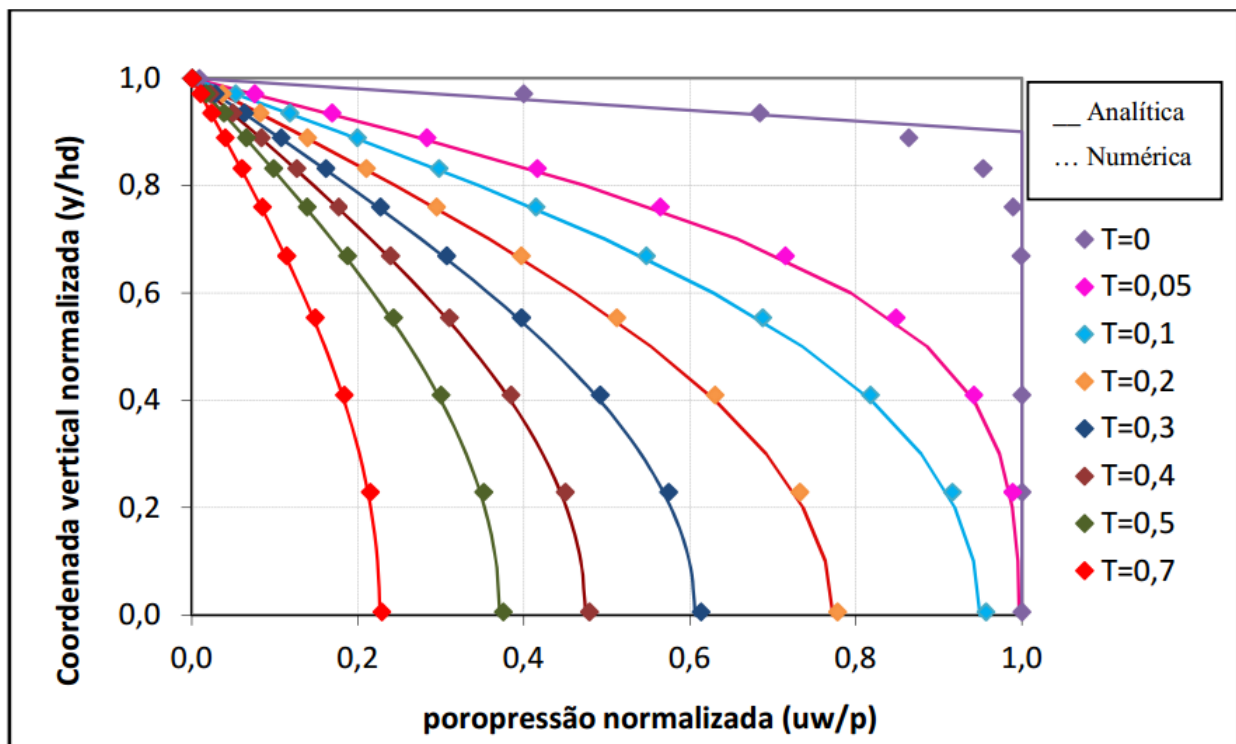


Figura 4.9 Resultado da validação realizada utilizando o problema de Terzaghi (Morais, 2016).

### 4.3.2 PROBLEMA DE DEFORMAÇÃO PLANA

Para o problema de deformação plana, foi usada a malha da Figura 4.10. O modelo analítico é o mesmo do item 4.2.2, desenvolvido por Biot (1940). Os resultados encontram-se na Figura 4.11, provando que a solução numérica de Morais (2016) coincide com o analítico.

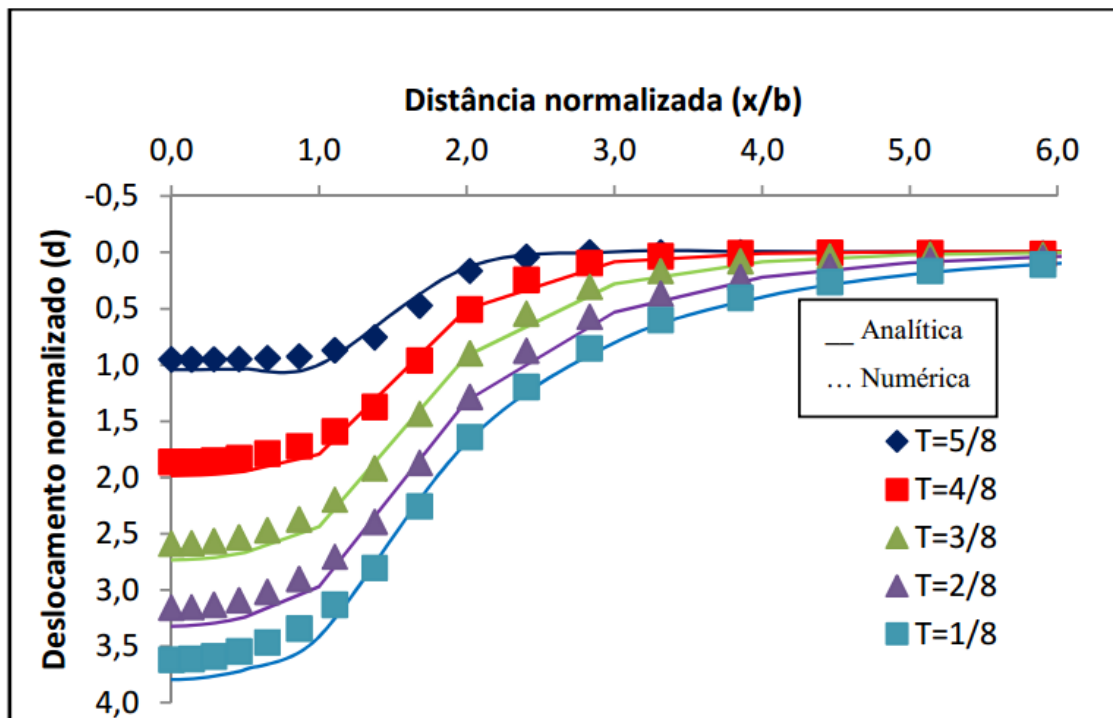


Figura 4.10 Resultados da validação utilizando o problema de deformação plana de Biot (Morais, 2016)

### 4.3.3 VALIDAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTENDIDO (XFEM)

Para validar a implementação do X-FEM no código de elementos finitos, Morais (2016) realizou algumas simulações que possuem resposta analítica na literatura.

O primeiro exemplo realizado é de uma viga bi-apoiada com carga pontual aplicada (Figura 4.11). A solução analítica encontra-se no trabalho de Bower (2011). O  $K_I$  é determinado a partir da geometria do problema e configuração da carga aplicada. Aplica-se uma carga  $P$  central em uma viga de comprimento  $S$ , largura  $W$ , espessura  $B$  e o comprimento da fratura é  $a$ . As dimensões utilizadas para a resolução do problema para as vigas são  $S=4w$  e  $B=1$ . A solução analítica para o fator de intensidade de tensões  $K_I$  é calculado por:

$$K_I = \frac{4P}{B} \sqrt{\frac{\pi}{W}} \left[ 1,6 \left( \frac{a}{W} \right)^{1/2} - 2,6 \left( \frac{a}{W} \right)^{3/2} + 12,3 \left( \frac{a}{W} \right)^{5/2} - 21,2 \left( \frac{a}{W} \right)^{7/2} + 21,8 \left( \frac{a}{W} \right)^{9/2} \right] \quad (4.4)$$

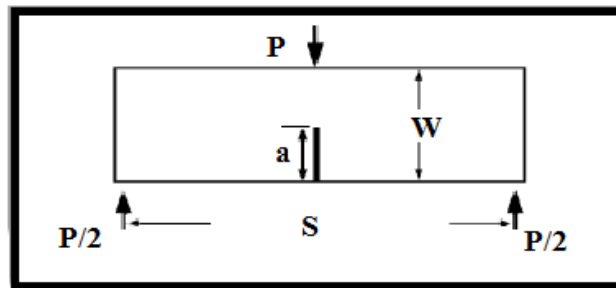


Figura 4.11 Viga Bi-apoiada (Morais, 2016)

Morais (2016) utilizou uma malha de 1785 elementos quadriláteros com quatro nós (Figura 4.12). Pode-se observar os resultados obtidos para o campo de tensão e deslocamento (Figuras 4.12 e 4.13) e os resultados obtidos para o valor de  $K_I$  com um raio da Integral J de 0,4m, na Tabela 4.1. Foram aplicadas as funções *Heaviside* nos elementos cortados pela fratura e *crack tip* nos elementos da ponta da fratura.

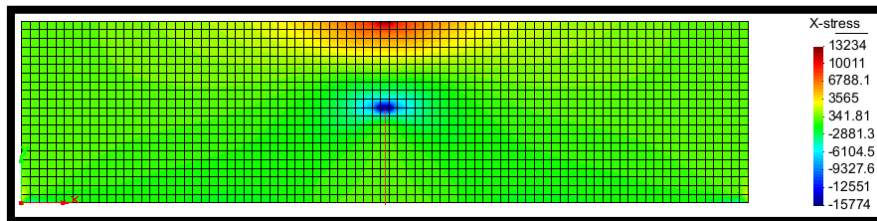


Figura 4.12 Malha do problema e campo de distribuição de tensões da validação realizada (Morais, 2016).

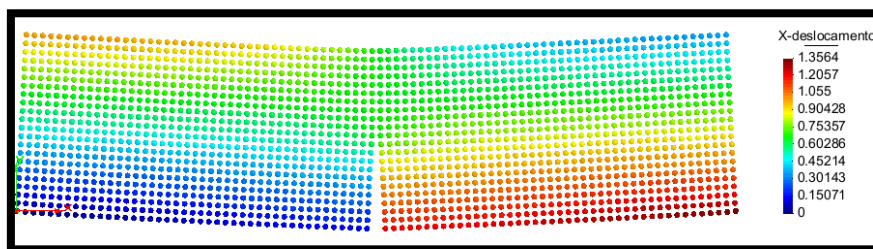


Figura 4.13 Campo de distribuição de deslocamentos horizontais da validação realizada  $\delta(m)$  (Morais, 2016).

Tabela 4.1 Resultados obtidos para a viga bi-apoiada (Morais, 2016).

Tipo de análise	Valor de KI
Solução analítica	7400
XFEM (Morais, 2016)	7380

O segundo exemplo utilizado por Morais (2016) para validar a implementação do XFEM foi de uma viga em estado de deformação plana fraturada (Figura 4.14) estudada por Khoei (2015). A viga é fixa em um lado e são aplicados deslocamentos prescritos na outra extremidade da viga de  $u=0,5\text{mm}$ . A fratura tem um comprimento de 30 cm e está alocada no meio da viga, sendo que ela está submetida apenas ao modo I de fraturamento e o módulo é  $E=2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu=0,3$ .

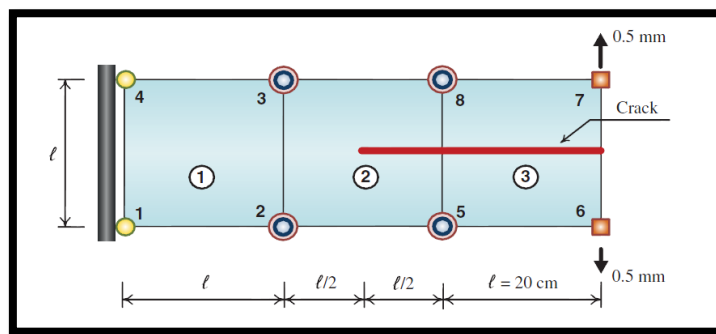


Figura 4.14 Viga em estado de deformação plana fraturada (Khoei,2015).

Foram utilizadas as malhas de:  $45 \times 15$ , de  $75 \times 25$  e de  $135 \times 45$  (Figura 4.15), com elementos quadriláteros de quatro nós. Foi aplicado ao longo dos elementos cortados pela fratura o enriquecimento com a função *Heaviside* e, onde está a ponta da fratura, o elemento foi enriquecido com a função *crack tip*.

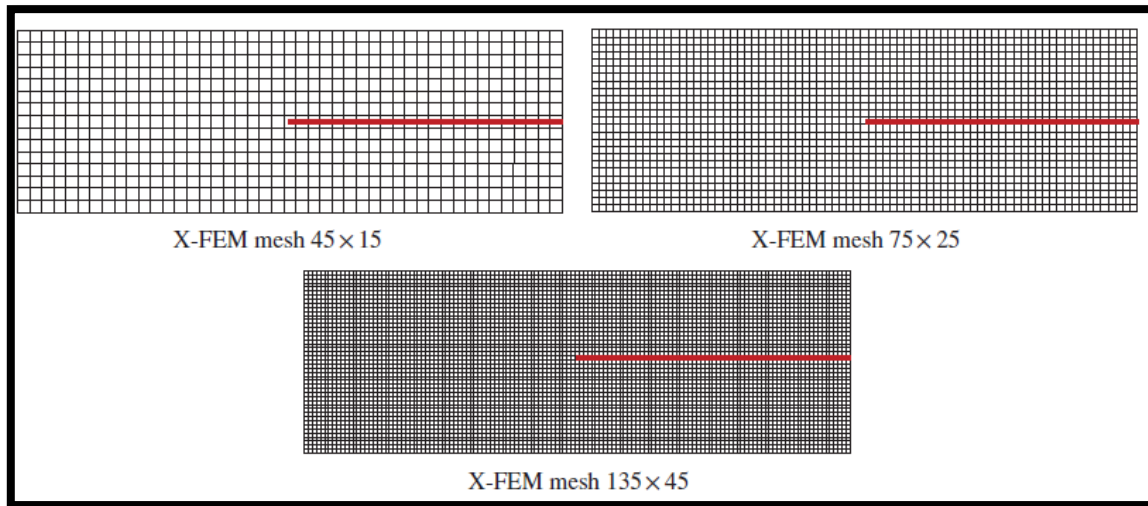


Figura 4.15 Malhas utilizadas para simulação do problema (Khoei,2015).

A Figura 4.16 mostra esquematicamente o que foi feito. É possível observar nas Figuras 4.17 que os resultados obtidos com o código implementado são similares aos resultados de Khoei (2015). Os valores dos campos de tensão da Figura 4.17 (a) e da Figura 4.17 (b) encontram-se com sinais diferentes porque o código implementado por Moraes (2016) usa notação geotécnica com tração tendo o sinal negativo e compressão positivo. Além disso, foi realizado um teste para observar a influência do raio de integração da Integral J no cálculo do SIF. Foram realizados alguns testes variando o raio de integração da integral J e observado como a razão  $R/L$ , sendo  $L$  o tamanho do elemento, se relaciona com o valor do SIF obtido.

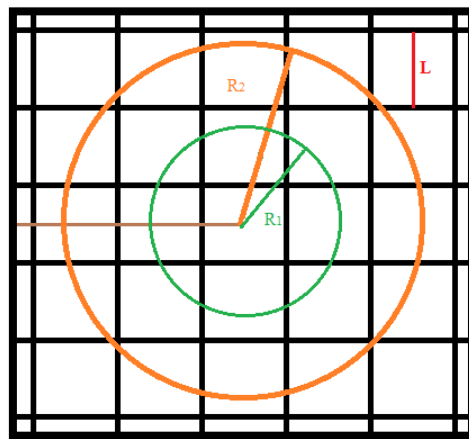


Figura 4.16 Esquema da variação do raio de integração da integral J no cálculo do SIF (Moraes, 2016).

Portanto, foram utilizadas as três malhas apresentadas na Figura 4.15 e os resultados foram comparados com os obtidos por Khoei (2015). É possível observar nos resultados (Figuras 4.18, 4.19 e 4.20) que quando  $R > 3xL$  (sendo  $L$  o comprimento do elemento da malha e  $R$  o

comprimento do raio de integração) o valor da SIF estabiliza e quando  $R > 3xL$  o raio de integração interfere no cálculo do SIF, devendo, portanto, ser evitado. Além disso, quanto mais refinada a malha, mais os valores computados para o SIF se aproximaram dos resultados de Khoei (2015).

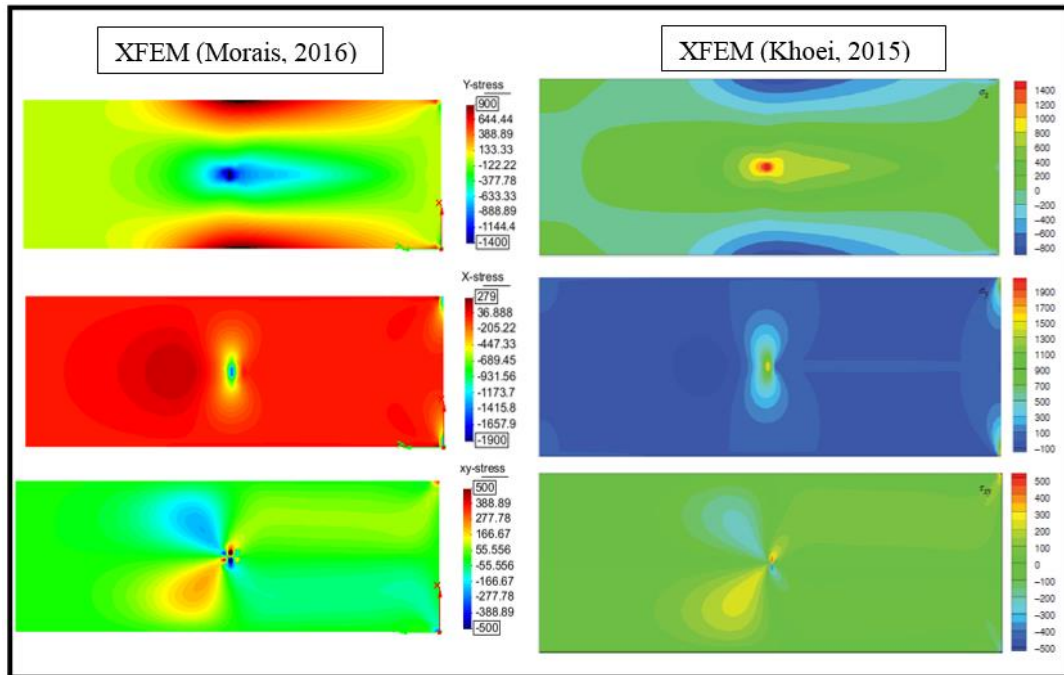


Figura 4.17 Comparação resultados dos campos de tensão obtidos (a)XFEM (Morais, 2016) com (b) XFEM (Khoei, 2015)  $\sigma$  (Kg/cm<sup>2</sup>).

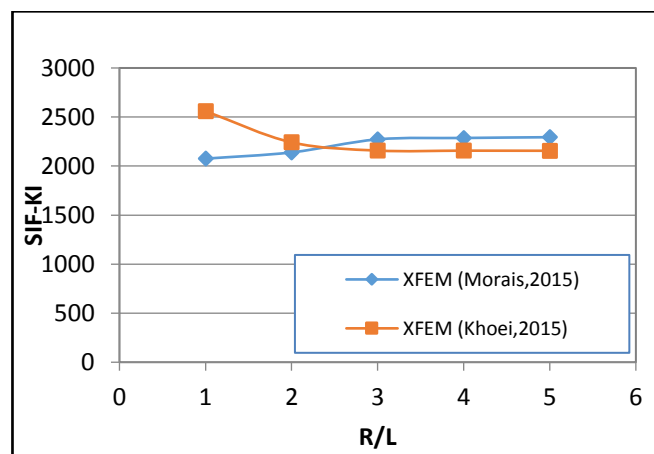


Figura 4.18 Avaliação da influência da razão R/L no cálculo da SIF (Malha 15x45) (Morais, 2016).

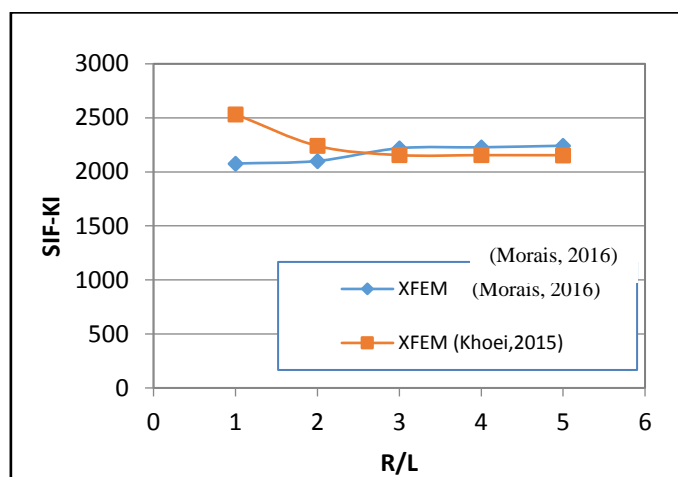


Figura 4.19 Avaliação da influência da razão R/L no cálculo da SIF (Malha 25x45) (Morais, 2016)

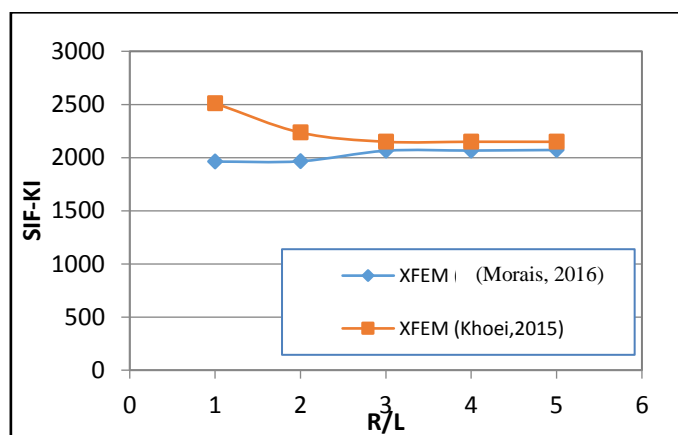


Figura 4.20 Avaliação da influência da razão R/L no cálculo da SIF (Malha 45x135) (Morais, 2016).

Por fim, (Morais, 2016) realizou a validação do código utilizando o problema estudado no trabalho de Tuan e Fei (2014). Uma placa retangular com uma fratura no centro é submetida a uma tensão (Figura 4.21). Foram comparados os valores obtidos para o SIF para diferentes tamanhos de fratura e diferentes cargas aplicadas com os resultados obtidos por Tuan e Fei (2014) utilizando EFG (Element Free Galerkin Method) e com a solução analítica do problema. O comprimento da fratura é de  $2a = 40\text{cm}$ , o comprimento da placa é de  $H = 350\text{cm}$ , a largura da placa é de  $b = 175\text{cm}$ , o módulo de Young é de  $E = 2.107\text{N/cm}^2$  e o coeficiente de Poisson é 0,3. Além disso, a rigidez da fratura é de  $K_{Ic} = 140\text{N/cm}^{3/2}$ .

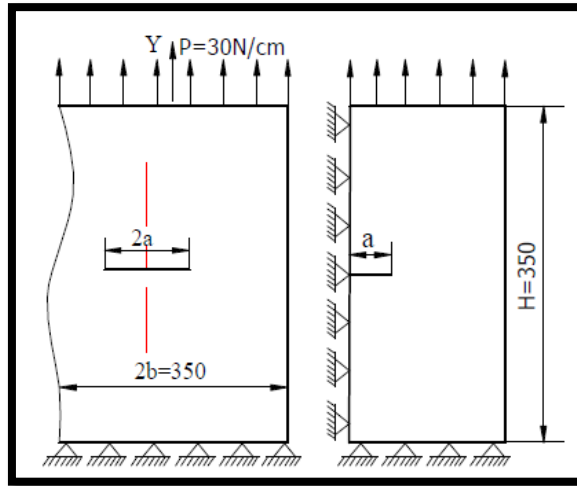


Figura 4.21 Placa retangular fraturada (Tuan et al., 2014).

Figura 0.1

O SIF teórico é obtido a partir da seguinte função:

$$K_{teórico} = \sigma \sqrt{\pi a} F_1 \left( \frac{a}{b} \right) \quad (4.5)$$

A função F é dada por:

$$F_1 \left( \frac{a}{b} \right) = [1 - 0,025(a/b)^2 + 0,06(a/b)^4] \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2b}} \quad (4.6)$$

O erro foi calculado com referência ao valor teórico da SIF, sendo:

$$Error(\%) = \frac{k_{cal} - k_{teo}}{k_{cal}} \times 100\% \quad (4.7)$$

sendo os SIF calculados pelo código desenvolvido neste trabalho e por Tuan e Fei (2014).

Os gráficos obtidos por Morais (2016) variando o comprimento da fratura estão na Figura 4.22 ( $a= 5,10,20,30,40$  e  $50$ ) e variando a tensão aplicada na Figura 4.23 e Figura 4.24 ( $q=5,10,20,30,40$  e  $50$ ). É possível observar que os dois primeiros pontos do resultado obtido na Figura 4.22 ao variar o comprimento da fratura, apresentam grandes erros. Isso se explica, pois, devido ao fato de a fratura possuir um pequeno comprimento, não há espaço para aplicar uma relação entre o raio de integração e o tamanho do elemento maior que três para obter o valor da SIF, o que geraria resultados mais acurados como foi visto na validação anterior.

Ao variar a carga para duas malhas ( $30 \times 60$  e  $40 \times 80$ ) observa-se que quanto mais refinada a malha, mais próximos os resultados são da resposta teórica.

Conclui-se que resultados obtidos por Morais (2016) foram satisfatórios, dado que eles se situaram com um erro menor de 2% se comparados com o teórico.



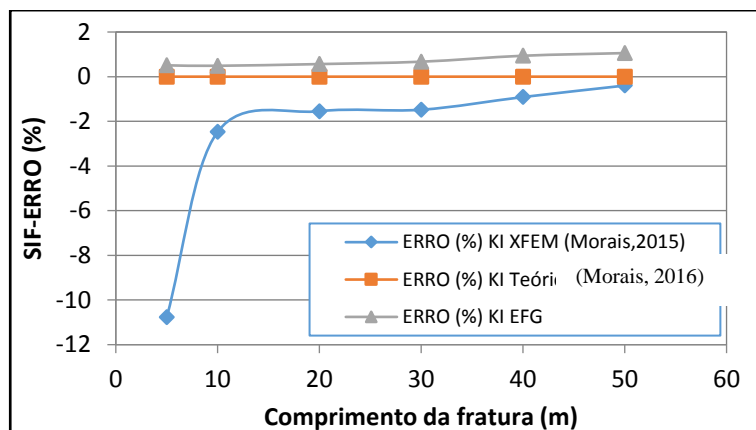


Figura 4.22 Avaliação da relação entre o comprimento da fratura e o erro da SIF (Malha 40x80) (Morais, 2016).

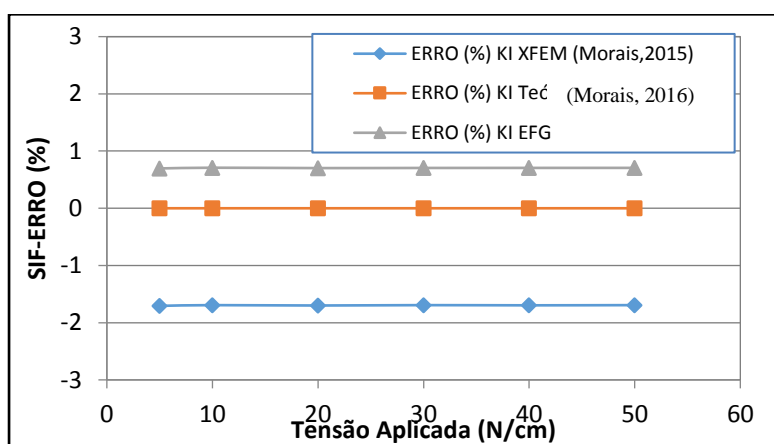


Figura 4.23 Avaliação da relação entre a tensão aplicada e o erro da SIF (Malha 30x60) (Morais, 2016).

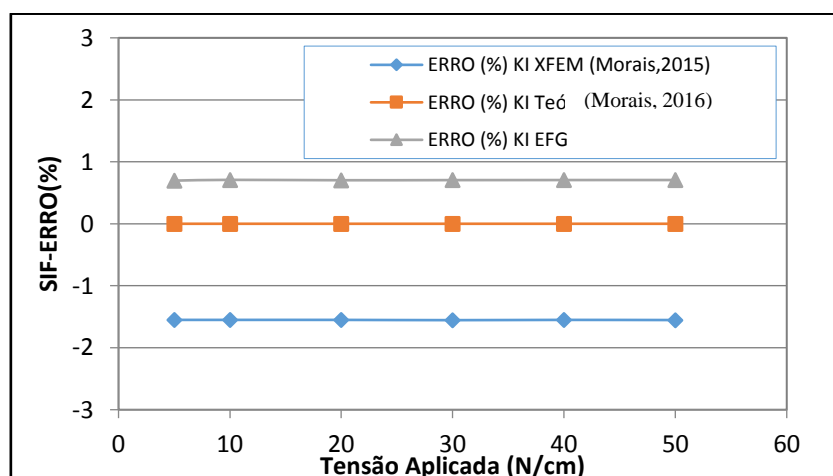


Figura 4.24 Avaliação da relação entre a tensão aplicada e o erro da SIF (Malha 40x80) (Morais, 2016).

## 5. SIMULAÇÃO DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO

Neste capítulo serão apresentados os resultados da simulação numérica que considerou a lei de fluxo cúbica no interior da fratura, permitindo avaliar de maneira mais realística o regime de fluxo na fratura. Para fraturar a rocha, foi injetada uma vazão em uma fratura pré-existente de 29,2 m de comprimento. O modelo de fluxo no interior da fratura, adotado para as simulações, foi a lei cúbica apresentada no trabalho de Xiang (2011). Ela leva em consideração a geometria da fratura e a viscosidade do fluido. Neste capítulo será analisada a precisão da aproximação feita por Morais (2016), o quanto a forma geométrica da fratura influencia na permeabilidade dentro da fratura e a importância da constante constitutiva do fluido  $k_p$  no regime de fluxo. Maiores detalhes sobre essas propriedades foram apresentados no capítulo 2.

A simulação do fraturamento hidráulico foi feita utilizando uma malha de 30x60 elementos, apresentada na Figura 5.1. A vazão injetada foi de  $2 \times 10^{-5} m^3/s$ , o coeficiente de Poisson é 0,3, o módulo de Young é  $E = 2 MPa$  e a tenacidade d material ( $K_{Ic}$ ) igual à  $140 KPa \cdot m^{1/2}$ . O tempo total da simulação é de 20.000 s, podendo ser reduzido quando a fratura atingir o limite imposto na simulação. Os resultados de poropressão e de deslocamento no plano horizontal apresentados foram calculados no último instante de tempo do fraturamento, podendo ser menor ou igual a 20.000 s.

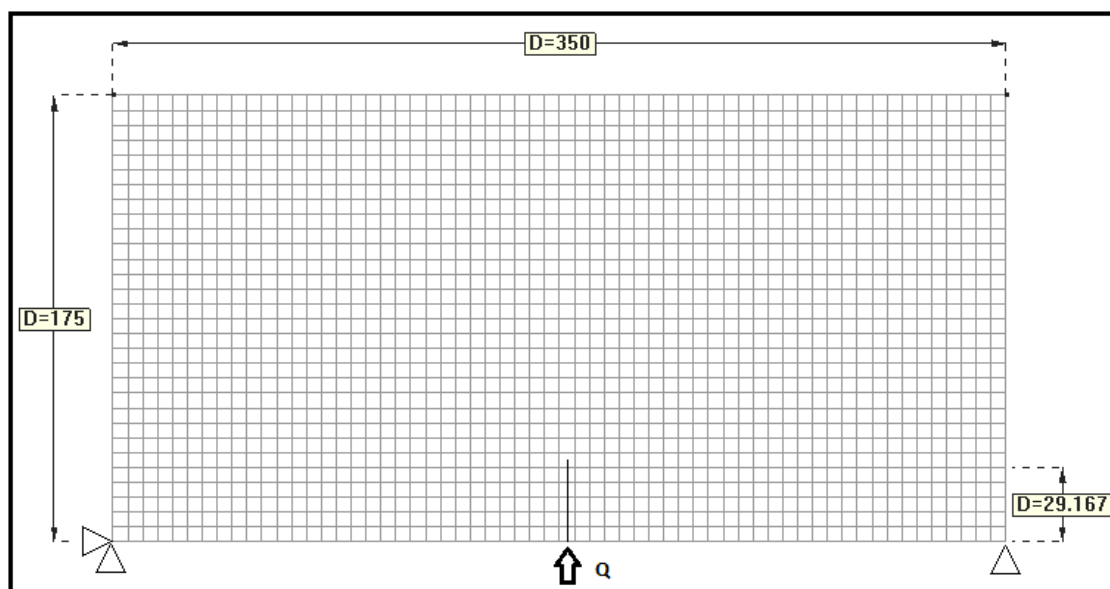


Figura 5.1 Malha usada para simular o fraturamento hidráulico

## 5.1 ANÁLISE DO REGIME DE FLUXO

Há pelo menos dois parâmetros que interferem no fenômeno de fraturamento hidráulico. São eles a permeabilidade da matriz e o regime de fluxo dentro da fratura, que é controlado pela forma da secção transversal da fratura e pelas propriedades do fluido. A relação a seguir (Xiang, 2011) considera esses dois aspectos:

$$q = -\Psi \frac{w^3}{2k_p} \frac{\partial P_w}{\partial x} \quad (5.1)$$

onde, o parâmetro  $k_p$  está associado às características do fluido e  $\Psi$  é o fator de forma da secção transversal da fratura. As demais variáveis da Equação (5.1) estão detalhadas no item 2.6. Nos próximos itens será realizada uma análise paramétrica desses dois parâmetros e será demonstrado como esses parâmetros controlam o processo de propagação das fraturas.

## 5.2 TESTE DO PASSO DE TEMPO

Conforme foi explicado no Capítulo 3, o problema de fluxo é transiente e à vista disso, deve-se realizar a integração no passo de tempo. A determinação do passo de tempo pode ser feita por meio de um algoritmo, mas neste caso, ela foi determinada de maneira que o passo de tempo não influencie a solução do problema. Desta forma, foram realizadas simulações com diversos passos de tempo. Ao considerar que a permeabilidade da matriz era de  $k_w = 10^{-7} m/s$  e a constante  $k_p = 10^{-6} MPa \cdot s^{0,8}$  foram feitos testes para o passo de tempo de 31,25 s, 50 s, 62,5 s, 100 s, 125 s e 250 s. Em alguns casos, parte dos resultados foram suprimidos para melhorar a apresentação gráfica.

Na Figura 5.2 e 5.3 é possível avaliar a sensibilidade do tamanho de passo de tempo. Observa-se que os tempos de 31,25 e 62,5 s têm respostas similares enquanto que o tempo de 125s se afasta dos outros dois. Fica evidente que para os incrementos de tempo. 31,25 s, 50 s e 62,5 s não há grandes variações do resultado, portanto, para as próximas simulações com a mesma permeabilidade do meio, será usado o passo de tempo correspondente a  $t = 62,5 s$ . Na Figura 5.3 e nas demais figuras que possuem a velocidade de fraturamento, os valores contidos nos balões correspondem ao tempo e a altura da fratura no último instante.

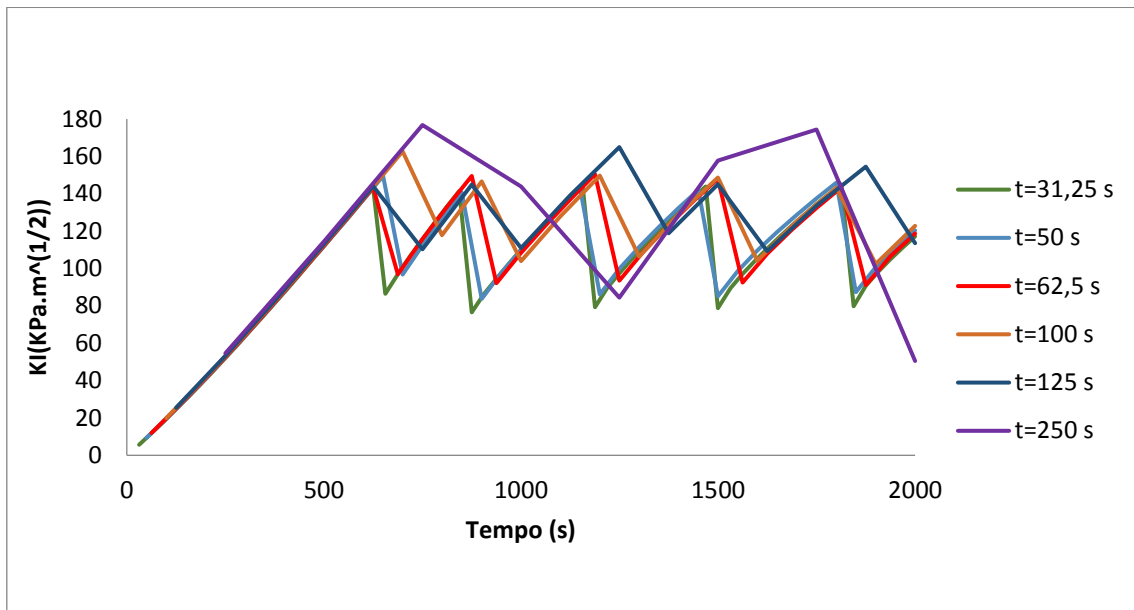


Figura 5.2 Teste do passo de tempo para fratura elíptica -  $k_w = 10^{-7} \text{m/s}$  e  $k_p = 10^{-6} \text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

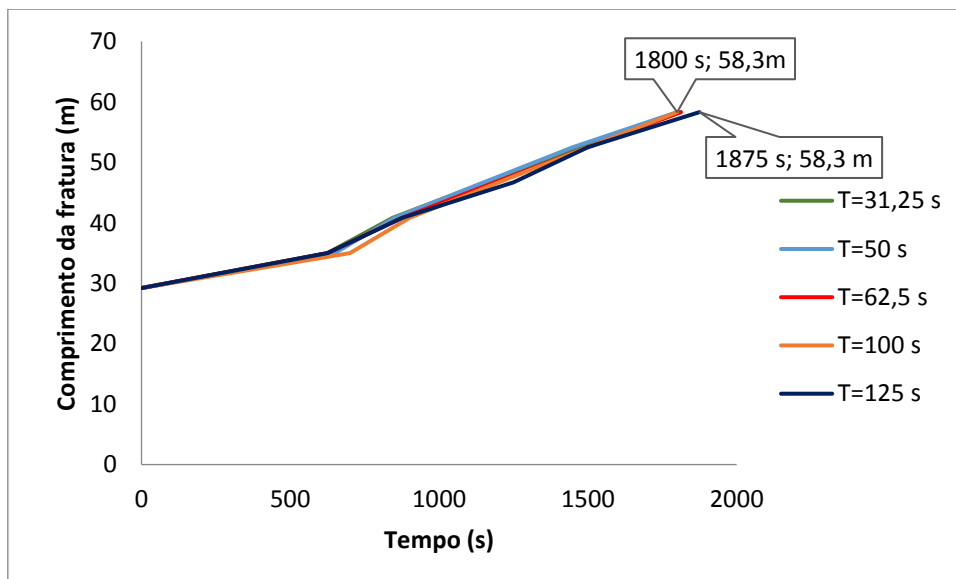


Figura 5.3 Velocidade de propagação da fratura elíptica -  $k_w = 10^{-7} \text{m/s}$  e  $k_p = 10^{-6} \text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

Ao fazer o mesmo teste variando apenas a permeabilidade da matriz para  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ , obtém-se a curva da Figura 5.4, e comparando apenas os incrementos correspondentes a 62,5 s e 125 s, percebe-se que para uma permeabilidade menor no meio, ambos os tempos são satisfatoriamente precisos. Por fim, foi feito o teste de passo de tempo para a permeabilidade

da matriz correspondente a  $k_w = 10^{-8} \text{m/s}$ , conforme a Figura 5.5. Novamente, o passo 62,5 s é suficiente para computar as simulações sem que haja perda na qualidade dos resultados.

Com isso, é possível constatar que quando a permeabilidade do meio é maior, a descontinuidade do problema é menor. Sendo assim, podemos usar um passo de tempo maior. Entretanto, usaremos o passo de tempo 62,5 s para facilitar a comparação com os demais resultados.

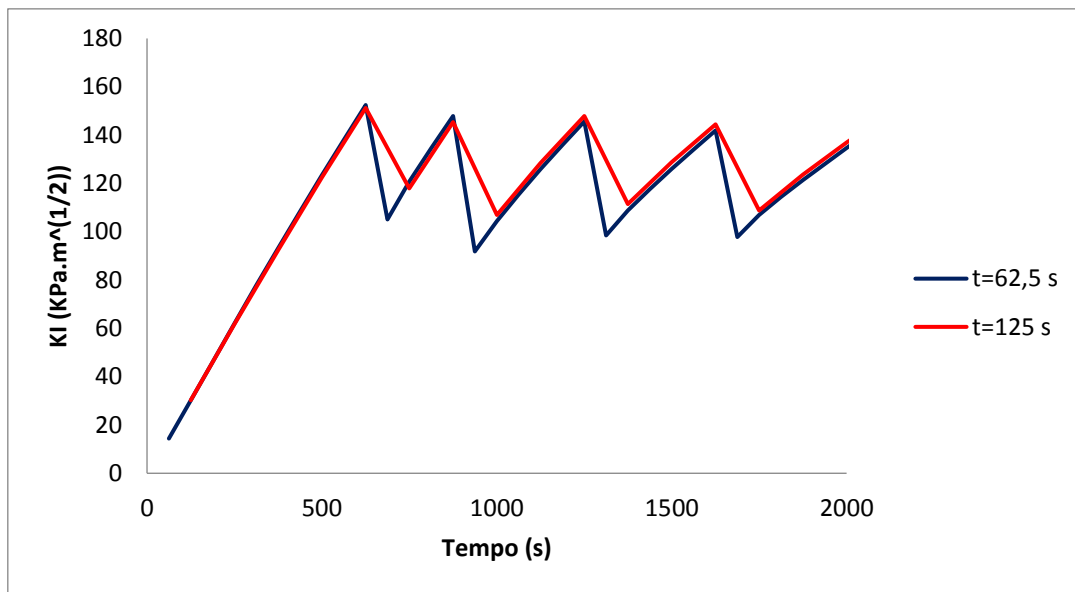


Figura 5.4 Teste do passo de tempo para fratura elíptica -  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$  e  $k_p = 10^{-6} \text{MPa}\cdot\text{s}^{0,8}$ .

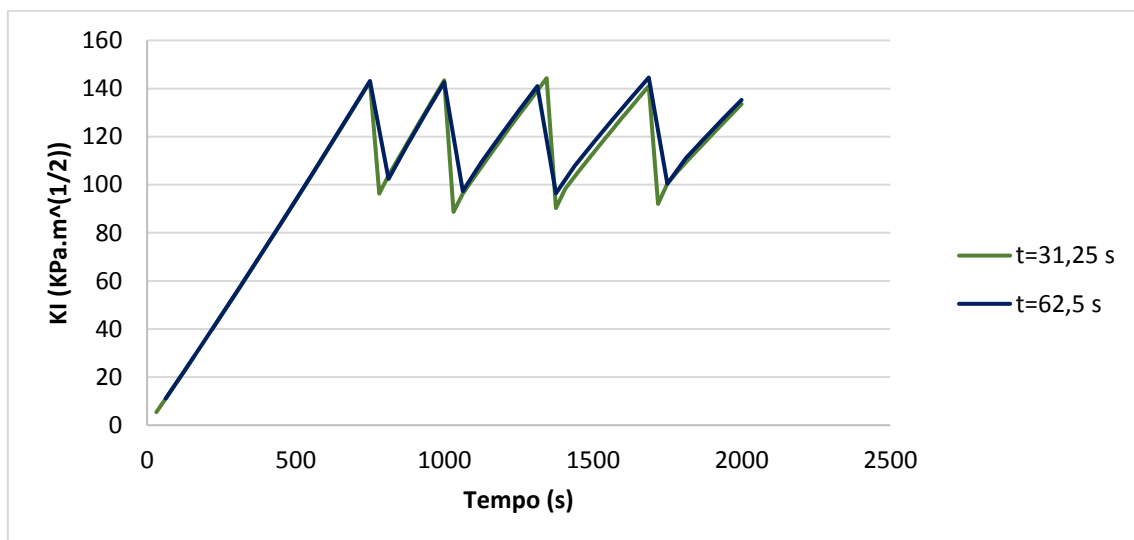


Figura 5.5 Teste do passo de tempo para fratura elíptica -  $k_w = 10^{-8} \text{m/s}$  e  $k_p = 10^{-6} \text{MPa}\cdot\text{s}^{0,8}$ .

### 5.2.1 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO $k_p$ NO REGIME DE FLUXO

Inicialmente, fez-se uma análise da influência da constante constitutiva do fluido. Foram feitas simulações com quatro valores de  $k_p$ , correspondentes a  $10^{-5}MPa.s^{0,8}$ ,  $10^{-6}MPa.s^{0,8}$ ,  $10^{-7}MPa.s^{0,8}$  e  $10^{-8}MPa.s^{0,8}$ . A viscosidade do fluido é maior para valores maiores de  $k_p$ , e menor para valores de  $k_p$  menores. Neste caso, foi estabelecido que a secção transversal da fratura é elíptica. Além disso, essa simulação foi executada para permeabilidade do meio igual à  $k_w = 10^{-6}m/s$ ,  $k_w = 10^{-7}m/s$  e  $k_w = 10^{-8}m/s$ .

A primeira conclusão que pode ser extraída ao comparar as Figuras 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11, é que para valores de  $k_p \leq 10^{-6}MPa.s^{0,8}$  a sua influência no regime de fluxo passa a ser constante. Outra análise extraída das figuras citadas é que quanto maior o  $k_p$ , menor é a velocidade de propagação da fratura. Isso ocorre porque, quando o fluido é mais viscoso, o fluxo gera pressão menor na ponta da fratura, tornando a sua propagação mais lenta (Figura 5.12).

Além disso, é possível observar que quando a permeabilidade do meio é menor, a velocidade de propagação da fratura é maior. Isso ocorre porque há menos *leak-off* para a matriz reafirmando o que foi concluído por Morais (2016). Por fim, é possível notar que a influência do  $k_p$  no regime de fluxo quando a permeabilidade da matriz é muda é a mesma (Figura 5.12).

Conforme as análises deste item, conclui-se que para as próximas análises, só é necessário comparar as simulações em que o  $k_p = 10^{-5}MPa.s^{0,8}$  e  $k_p = 10^{-7}MPa.s^{0,8}$ .

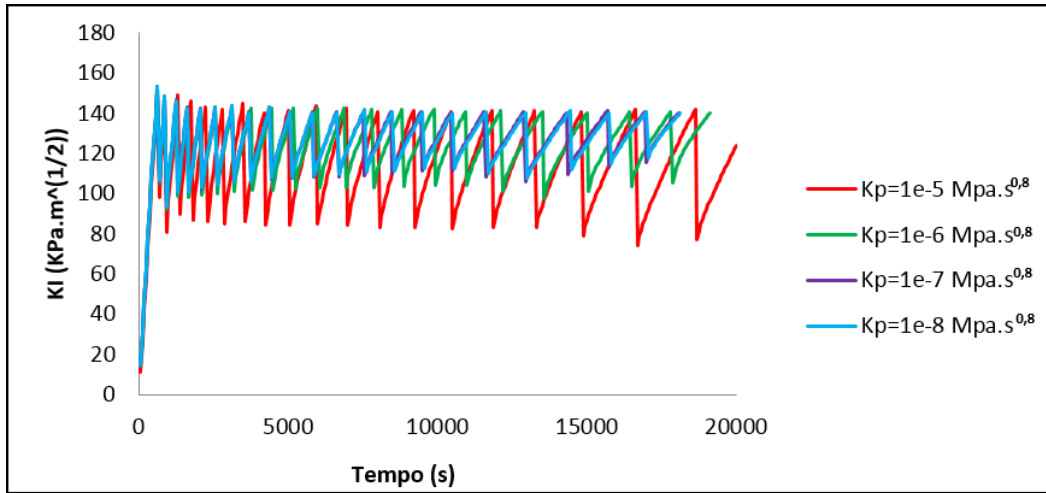


Figura 5.6 Valores de KI ao longo do tempo para uma secção transversal elíptica-  
 $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ .

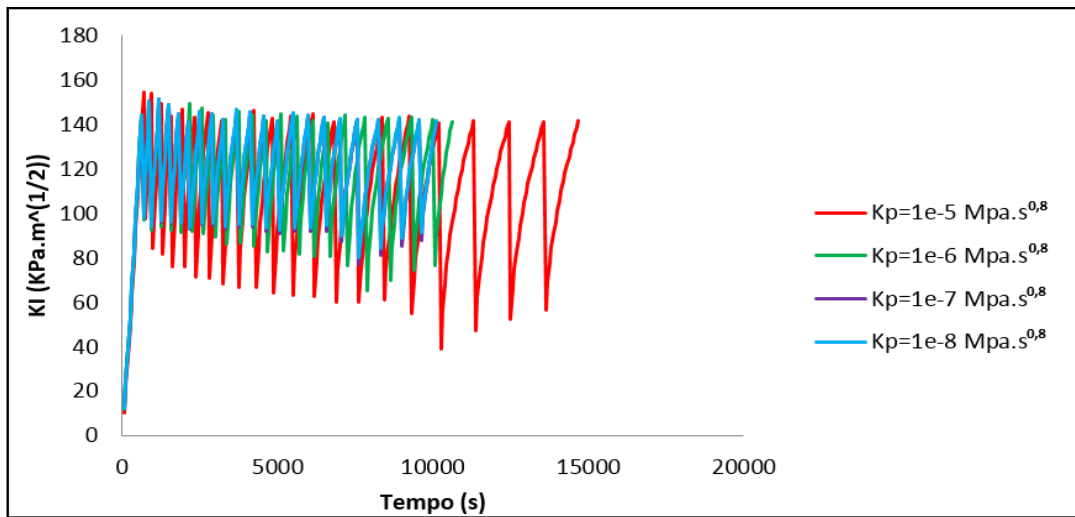


Figura 5.7 Valores de KI ao longo do tempo para uma secção transversal elíptica-  
 $k_w = 10^{-7} \text{m/s}$ .

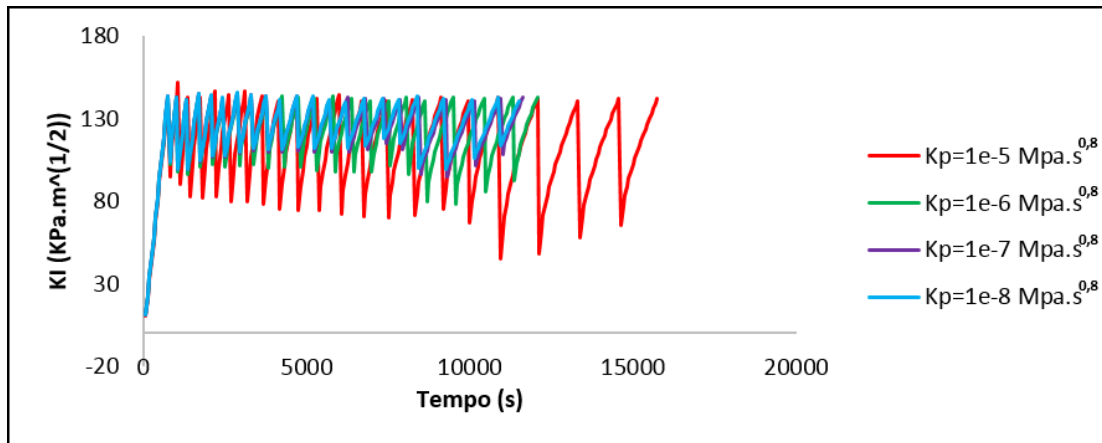


Figura 5.8 Valores de KI ao longo do tempo para uma secção transversal elíptica-  $k_w = 10^{-8} \text{m/s}$ .

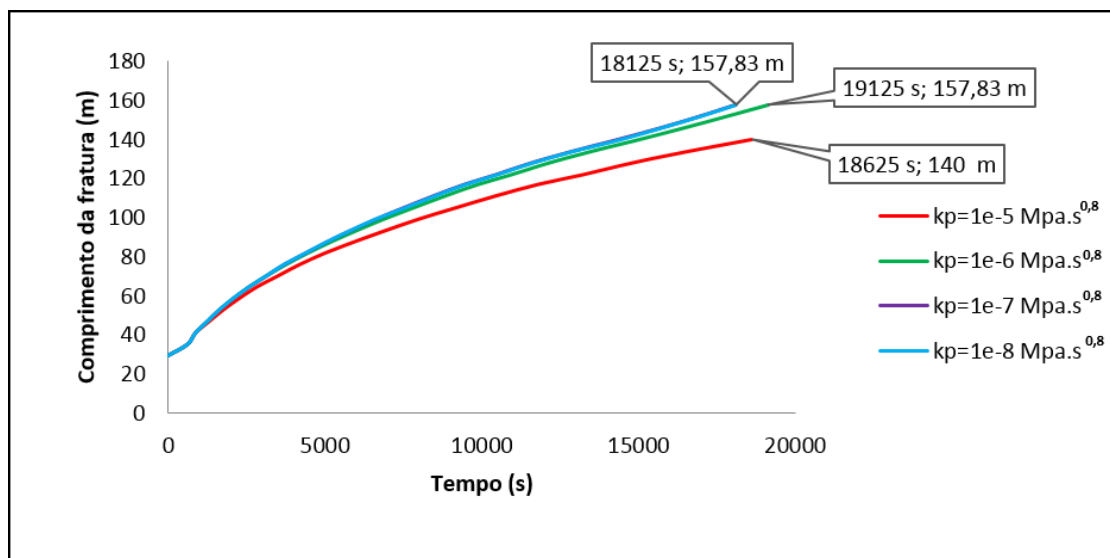


Figura 5.9 Velocidade de propagação da fratura secção transversal elíptica-  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ .



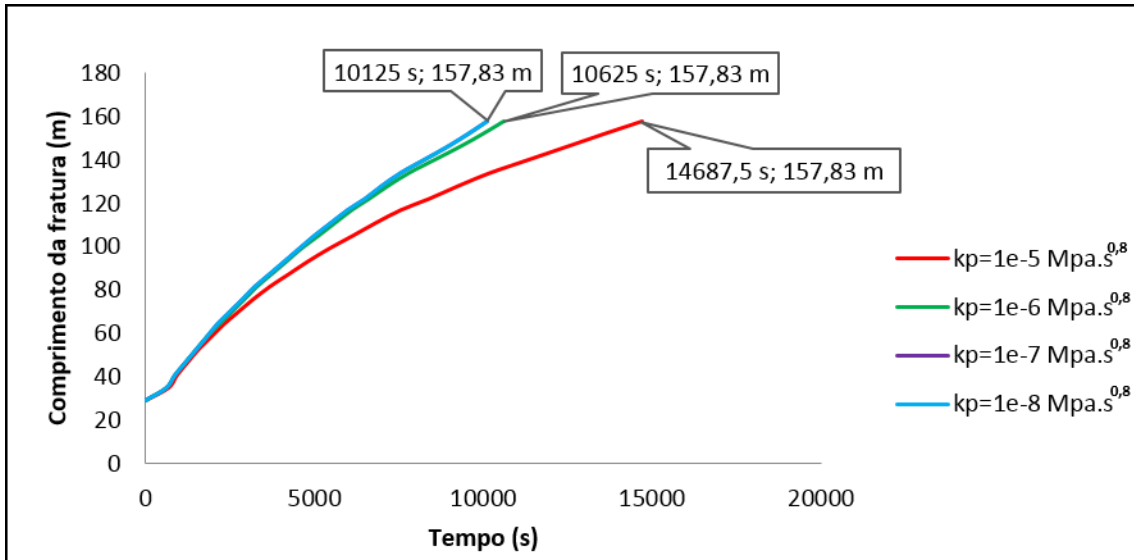


Figura 5.10 Velocidade de propagação da fratura secção transversal elíptica -  $k_w = 10^{-7} \text{m/s}$ .

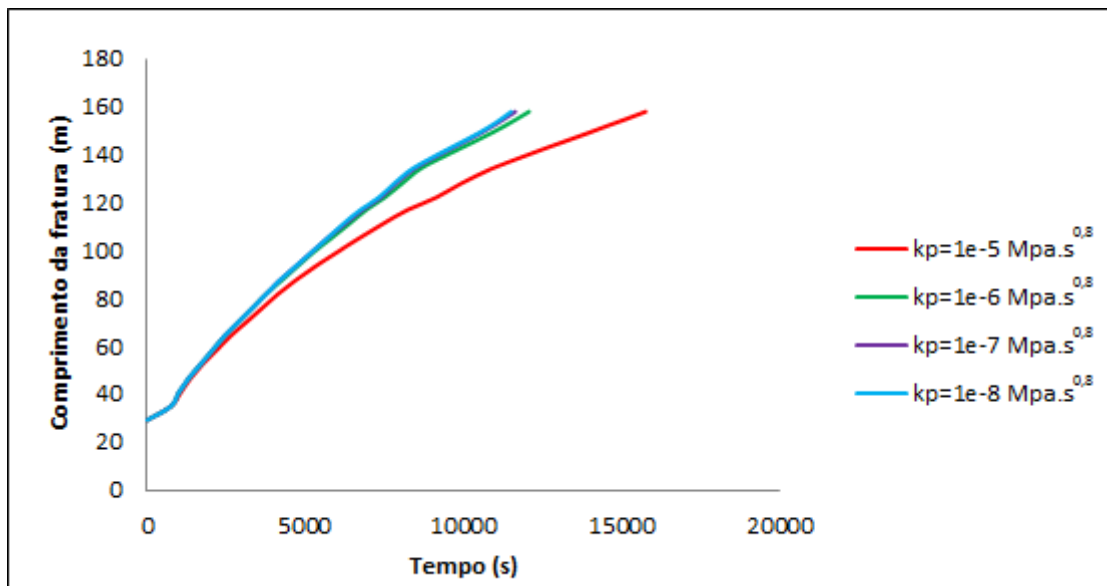


Figura 5.11 Velocidade de propagação da fratura secção transversal elíptica -  $k_w = 10^{-8} \text{m/s}$ .

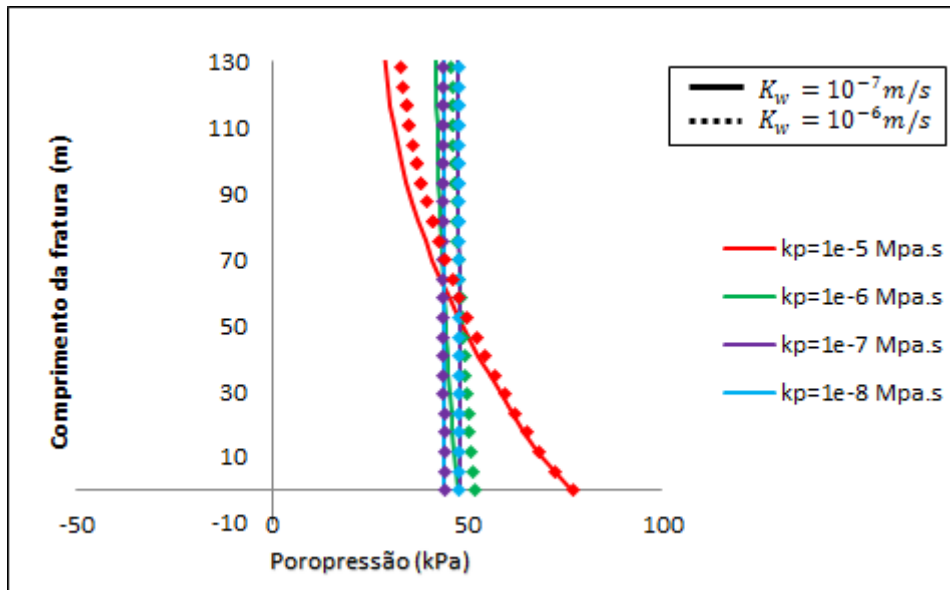


Figura 5.12 Variação da poropressão em relação ao comprimento da fratura-  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$  e  $k_w = 10^{-7} \text{m/s}$ .

## 5.2.2 ANÁLISE DO REGIME DE FLUXO CONTROLADO PELA LEI CÚBICA x REGIME DE FLUXO CALCULADO EM FUNÇÃO DA PERMEABILIDADE DA MATRIZ

Uma vez que já foi analisada a influência do  $k_p$  no regime de fluxo da fratura, serão comparados os resultados de Moraes (2016) com os resultados de fluxo obtidos nas simulações deste trabalho. O objetivo desta comparação é avaliar se a aproximação feita por Moraes (2016) pode ou não ser usada quando a permeabilidade do meio for a mesma usada nas simulações.

Moraes (2016) calculou o regime de fluxo assumindo que a permeabilidade dentro da fratura poderia ser calculada em função da permeabilidade da matriz multiplicada por um fator correspondente a  $k_f = f \cdot k_w$ , ou seja, que o regime de fluxo dentro da fratura segue a lei de Darcy com uma permeabilidade mais elevada. Nesta fórmula,  $f$  representa um número maior que um que fará com que a velocidade dentro da fratura seja maior que na matriz.

As primeiras análises foram feitas para a permeabilidade do meio  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ , conforme pode-se observar nas Figuras 5.13 e 5.14. Para o caso da permeabilidade dentro da fratura com fator multiplicador de  $1000 \times k_w$ , a velocidade de fraturamento é maior. Para os casos que

usam a lei cúbica, a velocidade da fratura é maior para  $k_p = 10^{-7} \text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ , uma vez que este parâmetro está associado à viscosidade do fluido. Nos dois casos, o que ocorrer é uma menor dissipação das poropressões dentro da fratura.

Por meio dessas análises também é possível observar que quando o fluido é mais viscoso ( $k_p = 10^{-5}$ ), a velocidade de propagação da fratura aproxima-se do modelo utilizado por Morais (2016) com o fator de multiplicação de  $100 \times k_w$ . Desta forma, pode-se concluir que para fluidos mais viscosos, o modelo aplicado por Morais (2016) poderia levar a um bom resultado, porém para fluidos menos viscosos ( $k_p = 10^{-7} \text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ ), tem-se que a velocidade de fraturamento é consideravelmente maior do que de todas as simulações feitas por Morais (2016). Portanto, quando o fluido é menos viscoso deve-se utilizar uma lei de fluxo que reproduza de maneira mais aceitável a influência do fluido dentro da fratura.

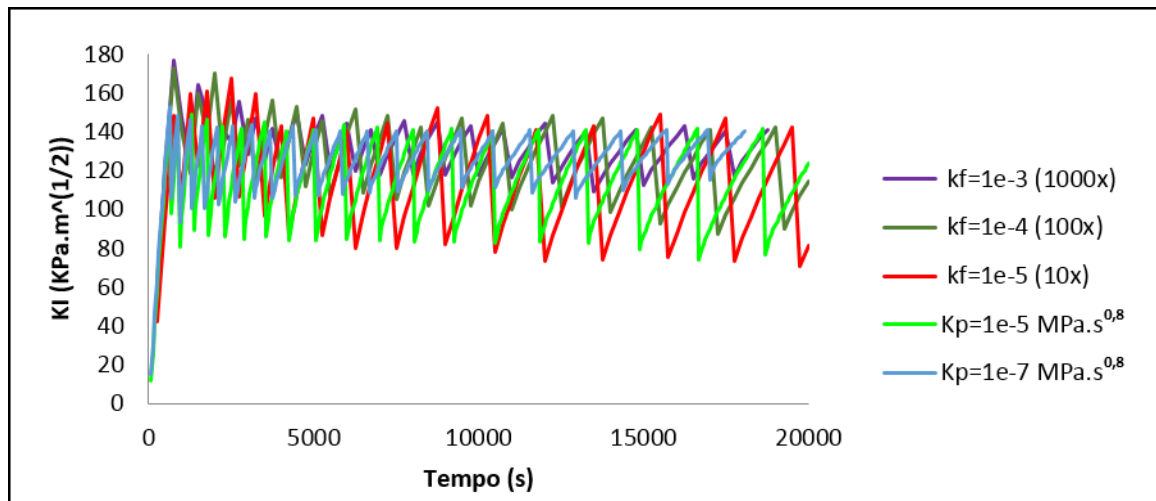


Figura 5.13 Comparação entre Morais (2016) e lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ .

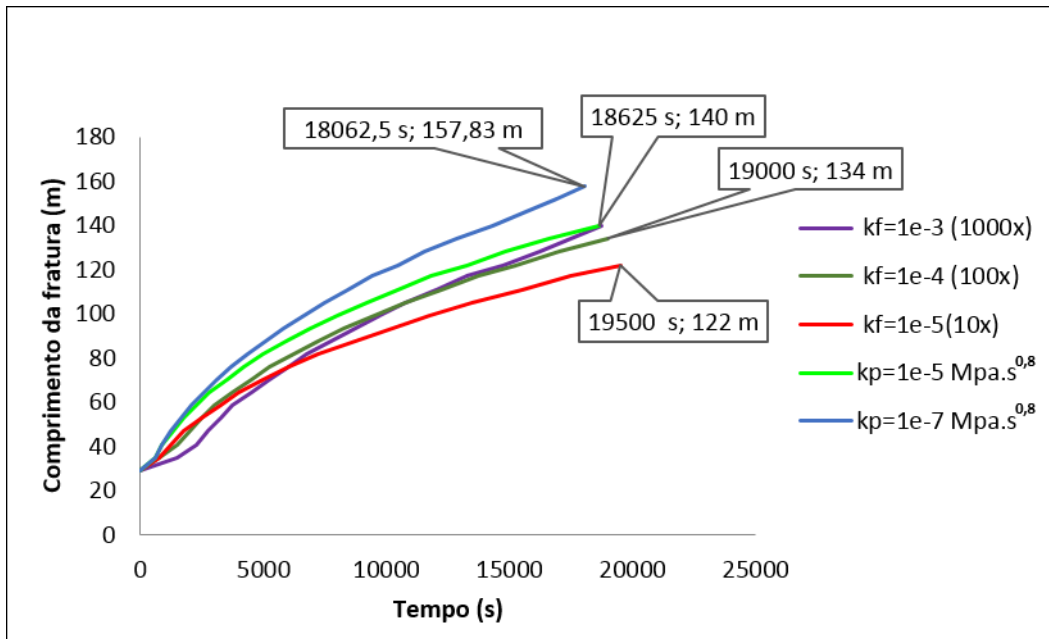


Figura 5.14 Comparação da velocidade de propagação da fratura entre Morais (2016) e lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10^{-6} \text{ m/s}$ .

Prosseguindo com a análise comparativa entre o modelo adotado por Morais (2016) e a lei cúbica do PKN, ao analisar a deformação das paredes da fratura, na Figura 5.15 percebe-se que, para esse parâmetro, aplicar um fator multiplicador de 100x é suficiente para representar o regime de fluxo se o fluido for mais viscoso ( $k_p = 10^{-5} \text{ MPa}\cdot\text{s}^{0,8}$ ). No caso de fluidos menos viscosos ( $k_p = 10^{-7}$ ), o fator multiplicador de 1000x é satisfatório. Portanto, ao avaliar a abertura das paredes da fratura, não é necessário implementar uma lei de fluxo mais complexa do que a utilizada por Morais (2016). O único problema seria o fato de o fator de multiplicação não ser um parâmetro físico, sendo assim determinado por tentativa e erro.

Além disso, é possível constatar na Figura 5.15 que quando a permeabilidade da fratura é menor, a pressão se dissipa rapidamente, sendo assim, embora a abertura seja maior no início do fraturamento, a pressão na ponta da fratura é menor, reduzindo a velocidade de fraturamento.

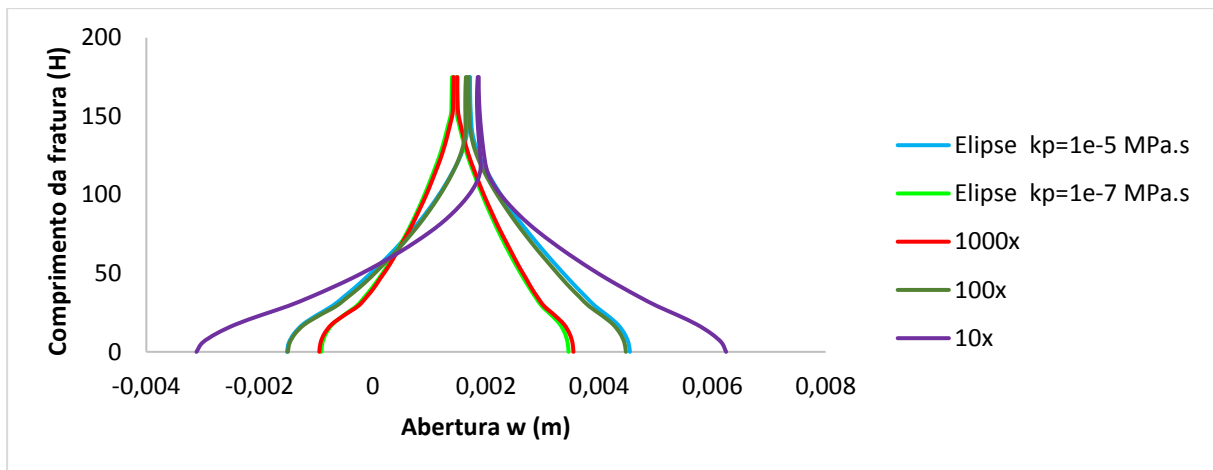


Figura 5.15 Comparação da abertura das paredes da fratura entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ .

Por fim, ao comparar a pressão no interior da fratura para os dois modelos, cujas curvas estão ilustradas na Figura 5.16, conclui-se também que para fluidos mais viscosos o fator multiplicador 100x é suficiente para descrever essa propriedade. No caso de fluido pouco viscosos, o fator multiplicador de 1000x também é satisfatório para descrever o problema.

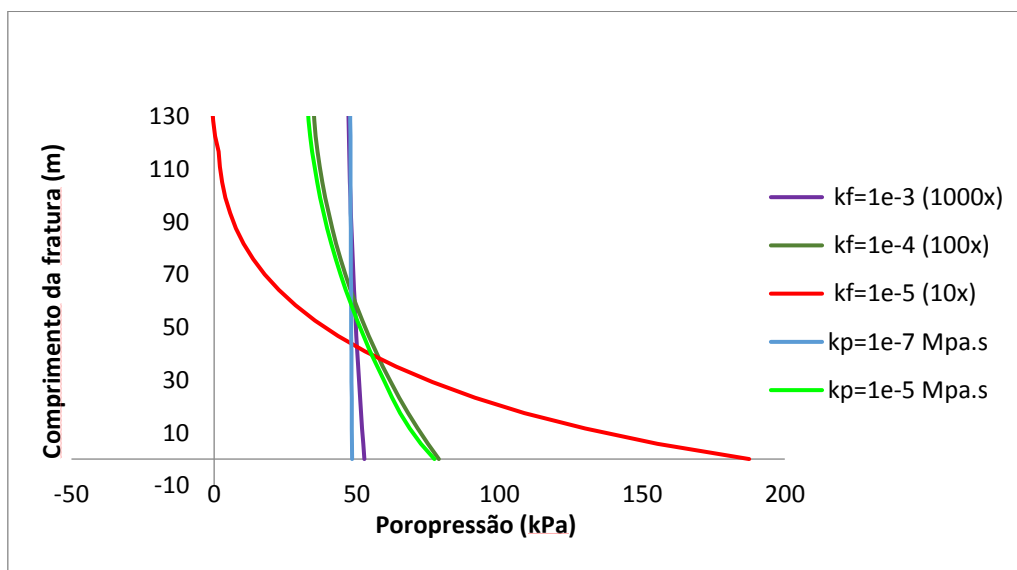


Figura 5.16 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ .

Uma última análise a ser extraída das Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16 é que quando é aplicada uma lei de fluxo em que há perda de carga ao longo da fratura, o fraturamento ocorre mais rapidamente. Além disso, focando nas Figuras 5.15 e 5.16, percebe-se que o gradiente de pressão em fraturas com baixa permeabilidade é maior do que em fraturas com alta

permeabilidade, isso faz com que a carga seja dissipada rapidamente, conseqüentemente, o fraturamento ocorre mais lentamente, apesar de a abertura da fratura ser maior nesse caso. Sendo assim, para um fraturamento mais eficiente, o ideal é aplicar um carregamento distribuído em toda a fratura, de forma que a pressão na ponta da fratura seja alta suficiente para romper a matriz.

Ademais, percebe-se que, ao comparar os gráficos das Figuras 5.15 e 5.16 a lei de fluxo cúbica fornece um resultado mais estável para a pressão dentro da fratura. Isso porque com a lei de fluxo cúbica é possível calcular o crescimento e a abertura da fratura sem que haja poropressões negativas no seu interior.

Ao diminuir a permeabilidade do meio para  $k_w = 10^{-7} \text{m/s}$ , torna-se evidente a importância da implementação de um modelo que descreva de forma mais aproximada o fluxo dentro da fratura. Conforme pode-se observar nas Figuras 5.17, 5.18, há grande discrepância no crescimento da fratura e na velocidade de propagação.

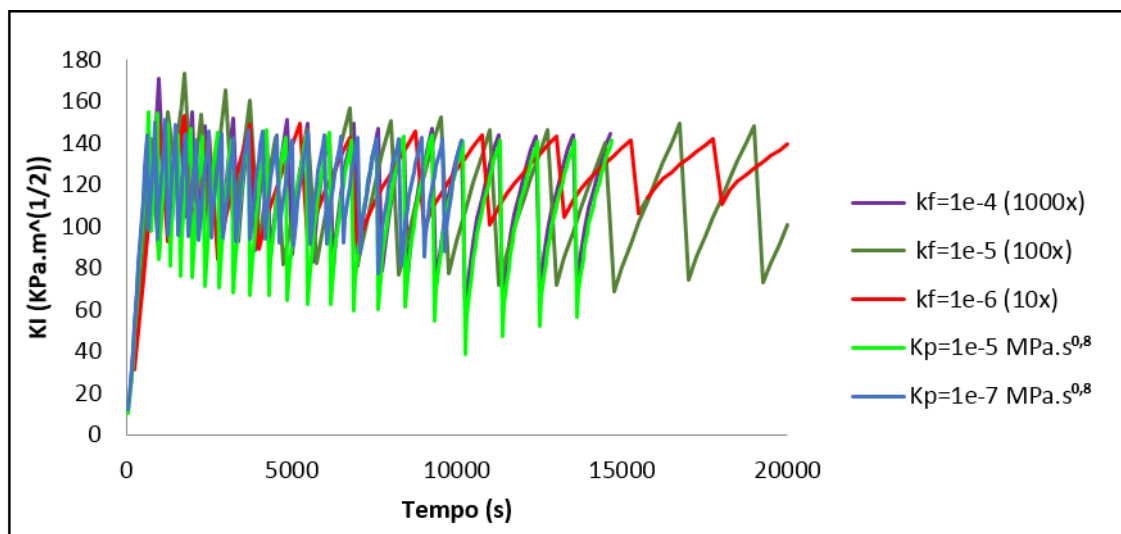


Figura 5.17 Comparação entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio igual a  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$ .

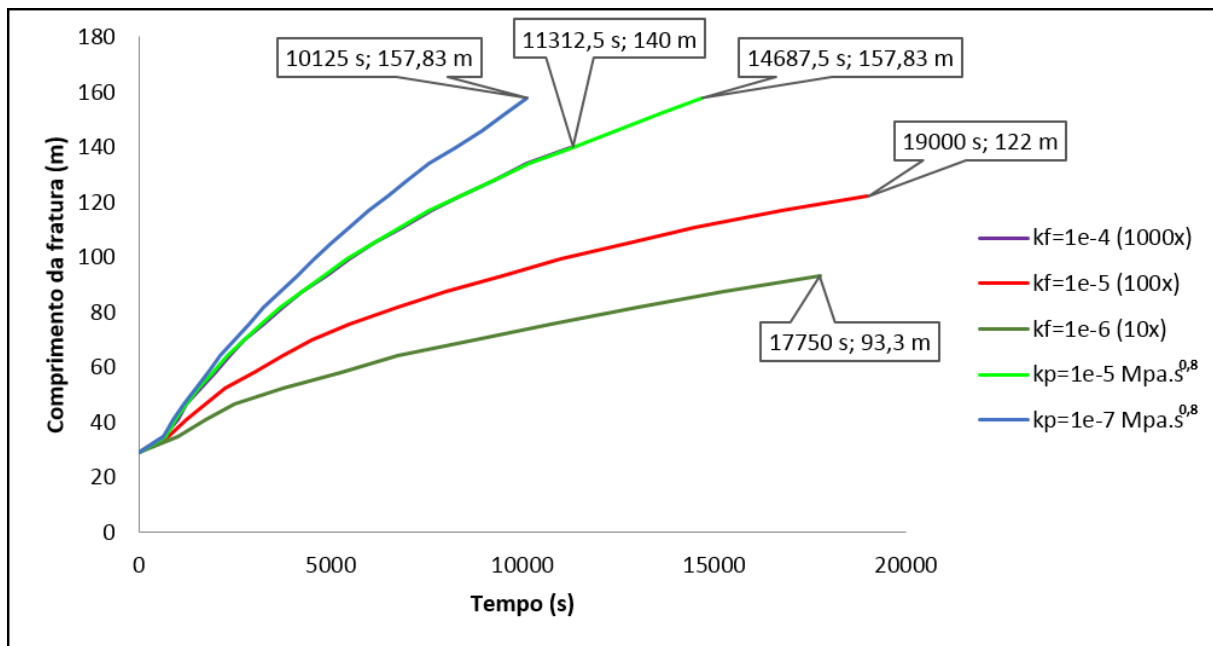


Figura 5.18 Comparação da velocidade de propagação da fatura entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10^{-7} \text{ m/s}$ .

Ao comparar as Figuras 5.19 e 5.20, é possível observar que quando a permeabilidade do meio é menor, o regime de fluxo dentro da fratura representado pelo modelo de Morais (2016) não coincide em momento algum com a solução que utiliza a lei cúbica para fluxo em fraturas. Há discrepância entre os resultados de Morais (2016) e os resultados dessa dissertação. Para analisar qual forma é mais próxima a realidade seria necessário comparar com resultados experimentais. Nas Figuras 5.19 e 5.20 está evidente que o cálculo da poropressão fica comprometido no modelo de Morais (2016). Isto ocorre porque há oscilação na curva, fazendo com que haja poropressão negativa dentro da fratura, o que é fisicamente impossível no caso desta análise, em que se injeta pressão dentro da fratura.

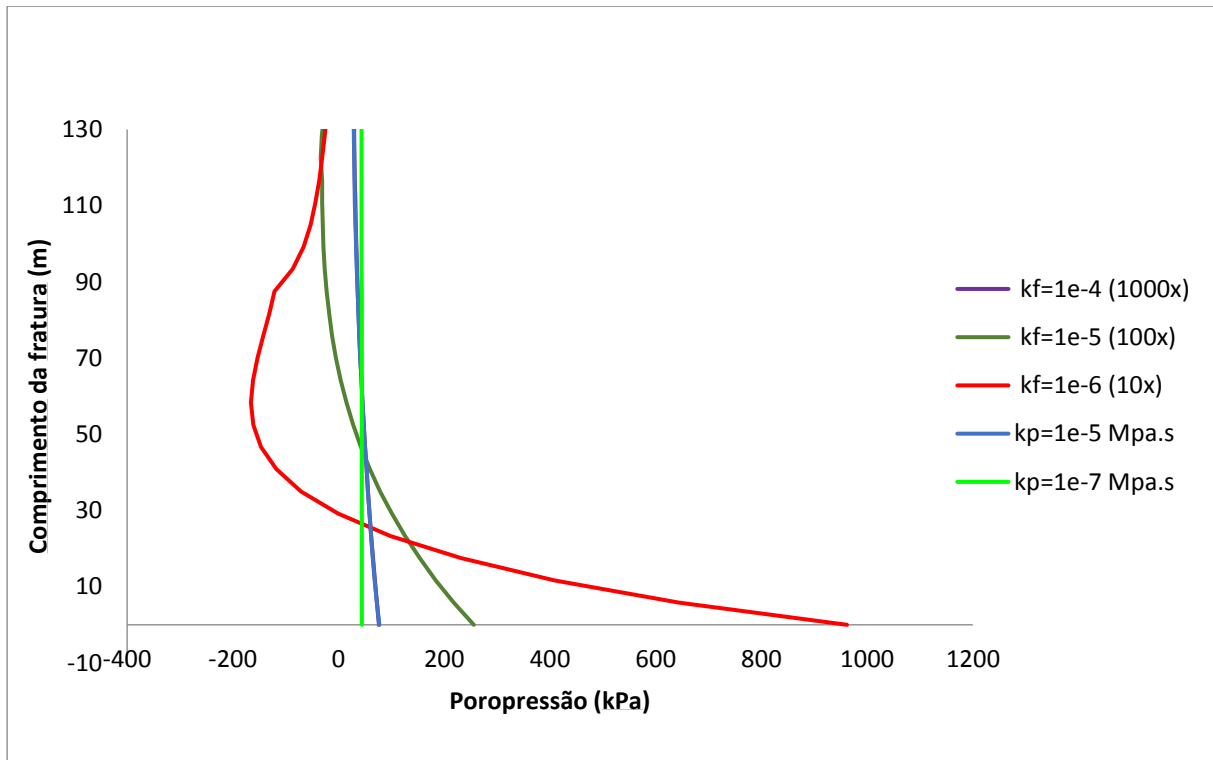


Figura 5.19 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10^{-7}$  m/s.

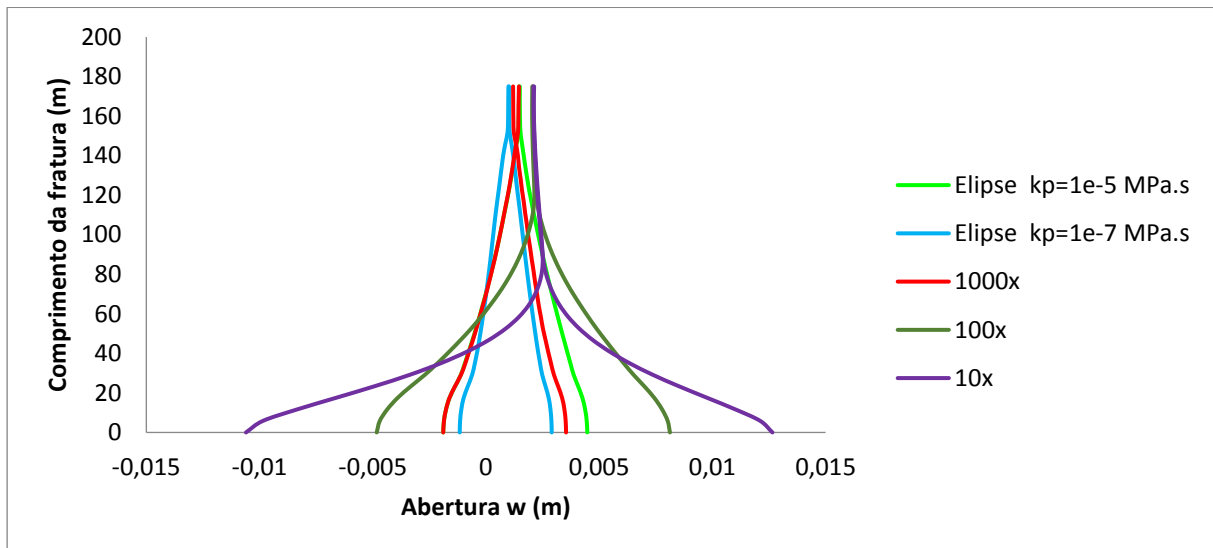


Figura 5.20 Comparação da abertura das paredes da fratura entre Morais (2016) e a lei cúbica de fluxo. Permeabilidade do meio é  $k_w = 10^{-7}$  m/s.



### 5.2.3 INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA DA SECÇÃO TRANSVERSAL DA FRATURA NO REGIME DE FLUXO

Esta análise tem por objetivo avaliar a influência da geometria da secção transversal da fratura no regime de fluxo. Ela foi feita variando os valores das funções de forma  $\Psi$  correspondentes à elipse, ao losango e ao retângulo, respectivamente. Além disso, a mesma análise foi feita para três valores de permeabilidade da matriz, são elas  $k_w = 10^{-6}m/s$ ,  $k_w = 10^{-7}m/s$  e  $k_w = 10^{-8}m/s$ . Todas as simulações foram feitas considerando os valores de  $k_p = 10^{-5}MPa \cdot s^{0,8}$  e de  $k_p = 10^{-7}MPa \cdot s^{0,8}$ .

Primeiramente foi investigada a velocidade de propagação da fratura, como pode ser observada nas Figuras 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24. Comparando essas quatro figuras, é possível afirmar que quando o  $k_p = 10^{-5}MPa \cdot s^{0,8}$ , ou seja, quando o fluido é mais viscoso, a geometria da secção transversal influencia no regime de fluxo. Por outro lado, quando o  $k_p \leq 10^{-7}MPa \cdot s^{0,8}$ , a forma da secção transversal é insignificante para avaliar o fluxo dentro da fratura. Isso ocorre, pois, a ordem de grandeza do fluxo torna-se muito maior do que a da função de forma  $\Psi$  quando o  $k_p \geq 10^{-7}MPa \cdot s^{0,8}$ . Ao analisar as Figuras 5.25, 5.26, 5.27 e 5.28, conclui-se o mesmo.

Sob outro ponto de vista, nessas simulações a relação entre o *leak-off*, evolução da fratura e a permeabilidade da matriz são novamente observadas. Quando a permeabilidade da matriz é menor, o *leak-off* também diminui, o que preserva a pressão do fluido no interior da fratura, resultando no aumento da eficiência do fraturamento. Essa análise se confirma nas curvas contidas nas Figuras 5.25, 5.26, 5.27 e 5.28 onde chega-se às mesmas conclusões.

Na Figura 5.26 observa-se que a velocidade de fraturamento se assemelha à da elipse, no entanto para o losango a velocidade é maior.

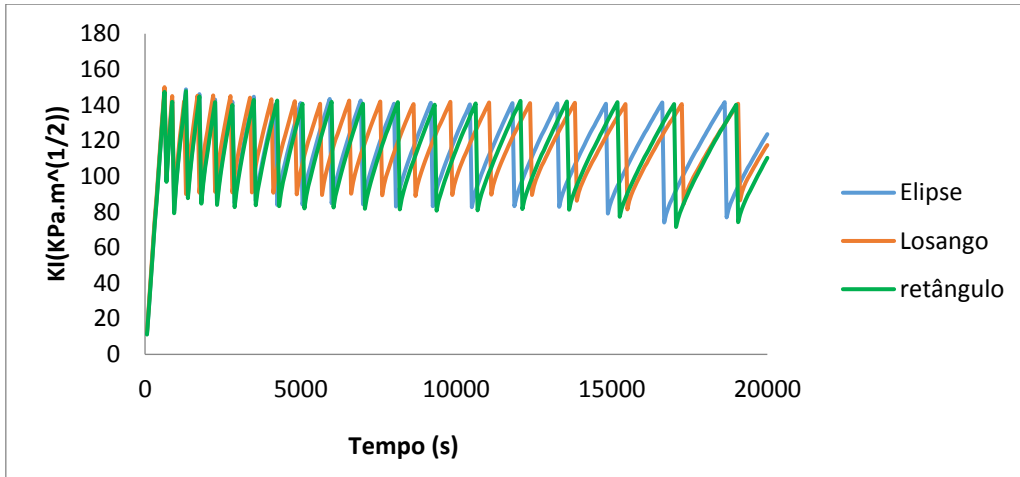


Figura 5.21 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$  e  $k_p = 10^{-5} \text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

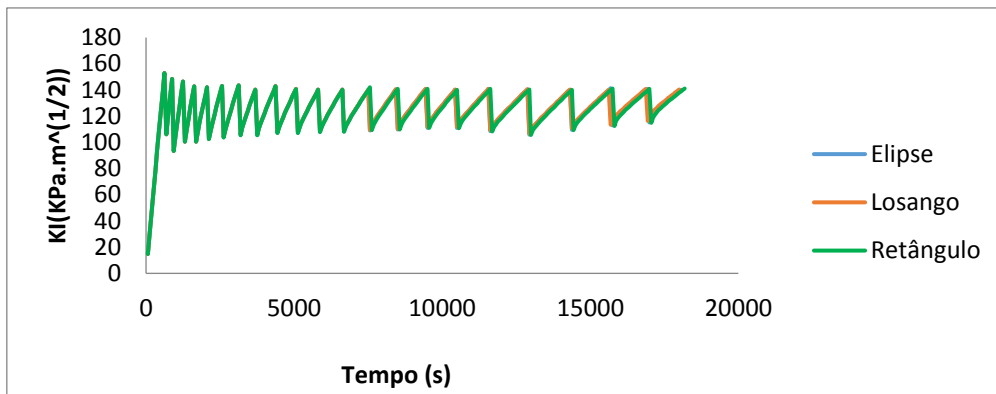


Figura 5.22 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10^{-6} \text{m/s}$  e  $k_p = 10^{-7} \text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

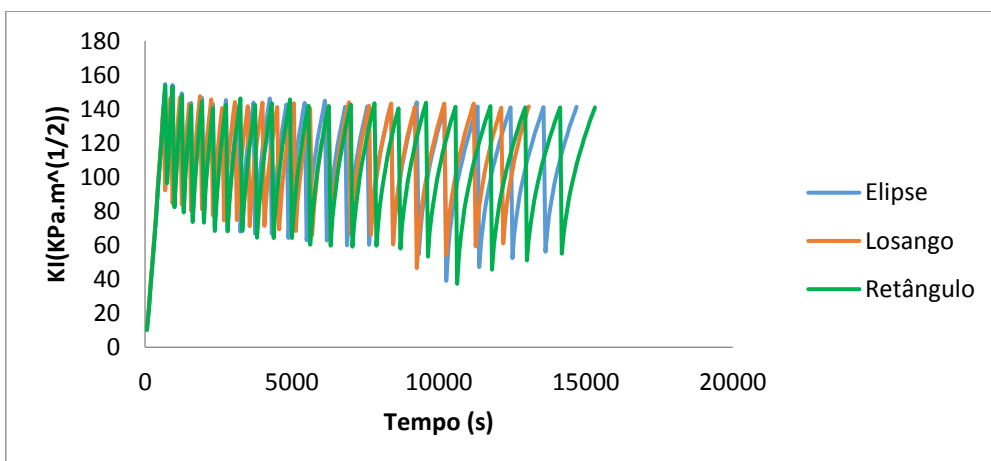


Figura 5.23 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10^{-7} \text{m/s}$  e  $k_p = 10^{-5} \text{MPa} \cdot \text{s}^{0,8}$ .

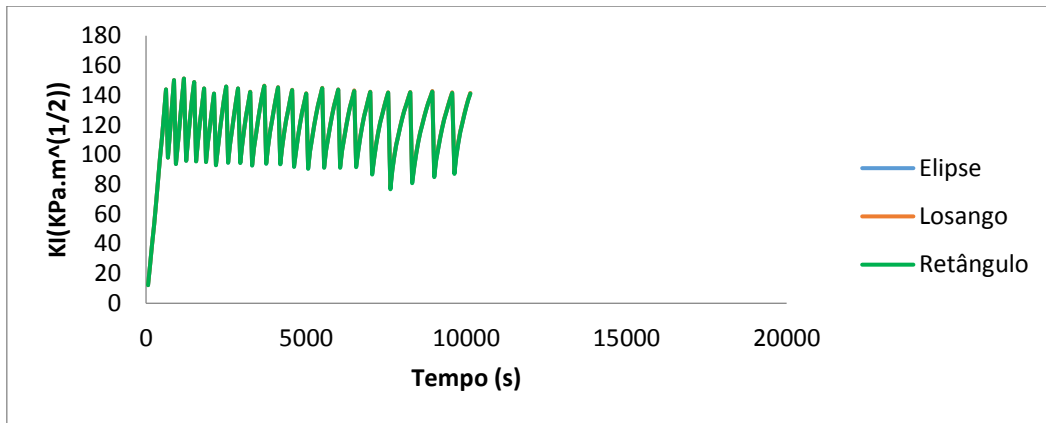


Figura 5.24 Evolução da fratura ao longo do tempo.  $k_w = 10^{-7} m/s$  e  $k_p = 10^{-7} MPa \cdot s^{0,8}$ .

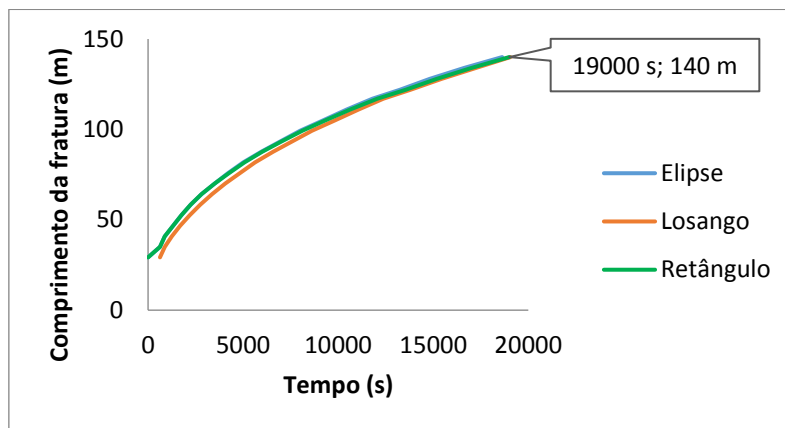


Figura 5.25 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10^{-6} m/s$  e  $k_p = 10^{-5} MPa \cdot s^{0,8}$ .

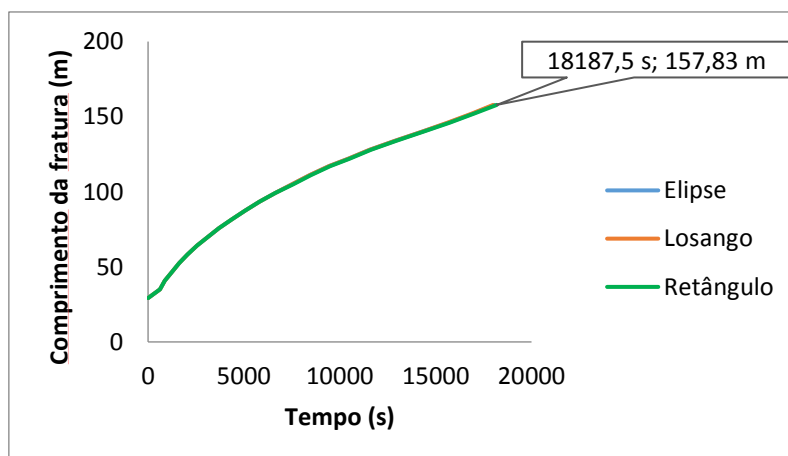


Figura 5.26 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10^{-6} m/s$  e  $k_p = 10^{-7} MPa \cdot s^{0,8}$ .

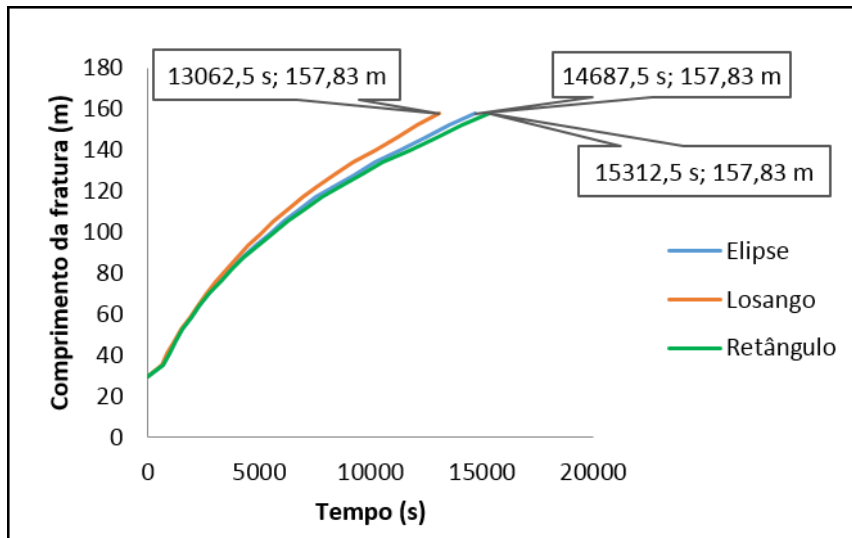


Figura 5.27 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10^{-7} m/s$  e  $k_p = 10^{-5} MPa \cdot s^{0,8}$ .

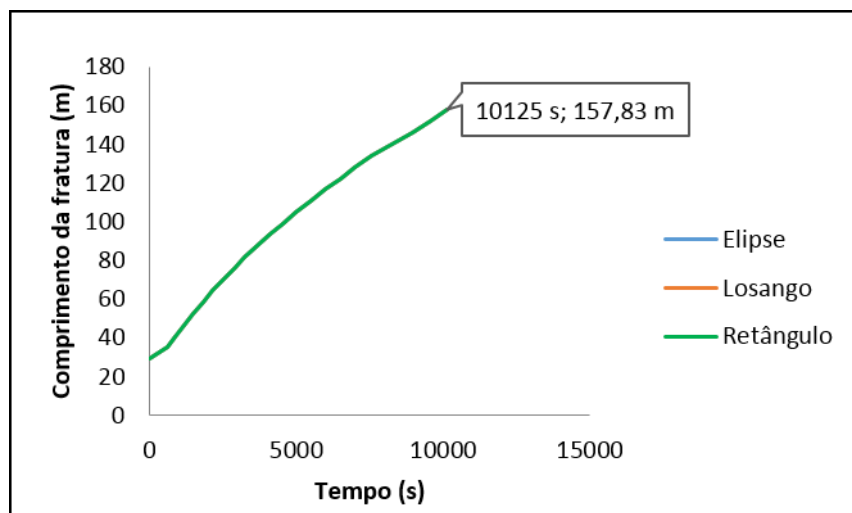


Figura 5.28 Velocidade de fraturamento.  $k_w = 10^{-7} m/s$  e  $k_p = 10^{-7} MPa \cdot s^{0,8}$ .

Com a análise das Figuras 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32 é possível confirmar algumas afirmações feitas neste Capítulo. Primeiramente, que quando a diferença entre a permeabilidade e da fratura e da matriz é grande, o gradiente de pressão ao longo da fratura é menor. Isso reduz a perda de carga e a torna quase constante, sendo assim, a pressão que alcança a ponta é semelhante à injetada, gerando um fraturamento mais eficiente. Em segundo lugar, nota-se que para  $k_p \leq 10^{-7}$ , a forma da seção transversal é insignificante. Por fim, é possível reafirmar que o regime de fluxo no retângulo e na elipse são semelhantes para uma permeabilidade  $k_w = 10^{-6} m/s$ .

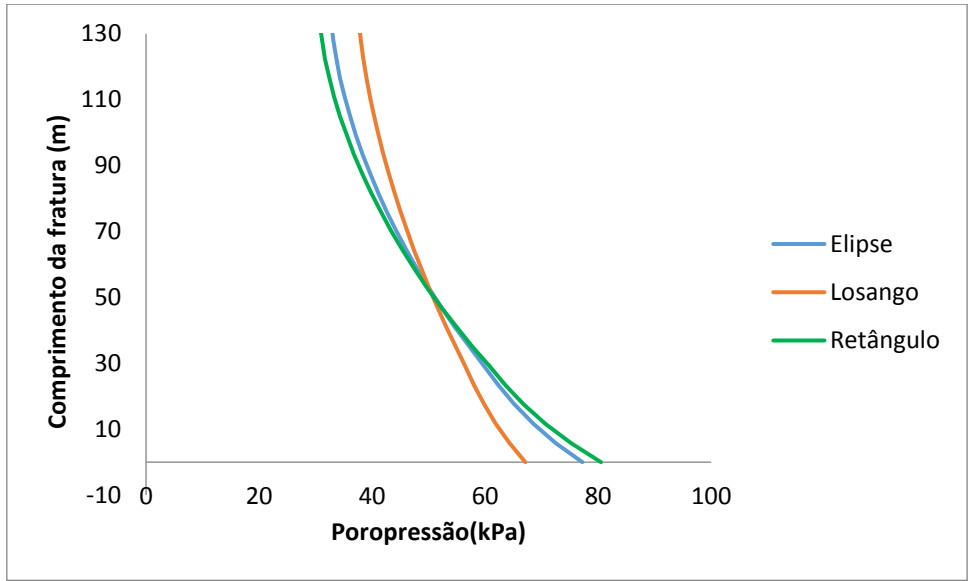


Figura 5.29 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10^{-6}m/s$  e  $k_p = 10^{-5}MPa.s^{0,8}$ .

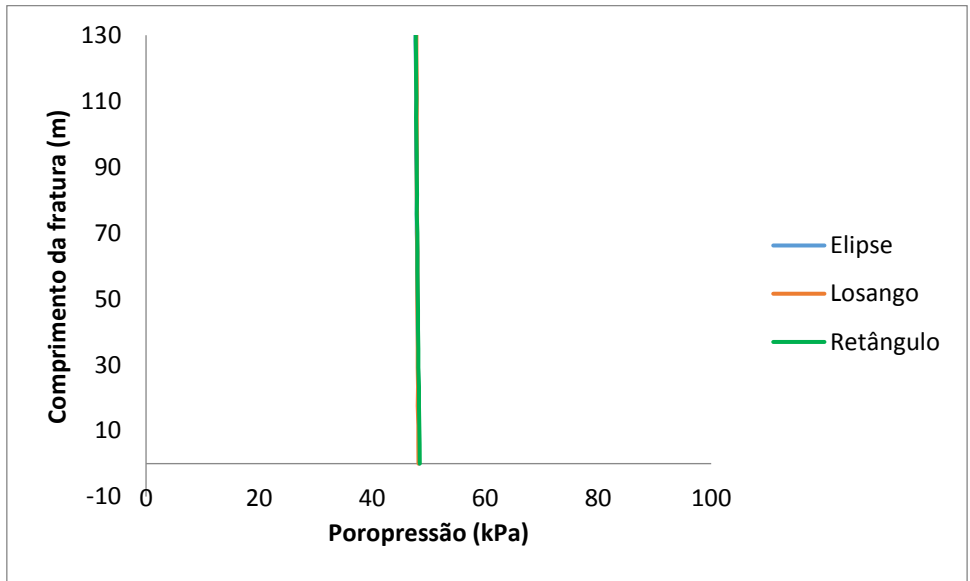


Figura 5.30 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10^{-6}m/s$  e  $k_p = 10^{-7}MPa.s^{0,8}$ .

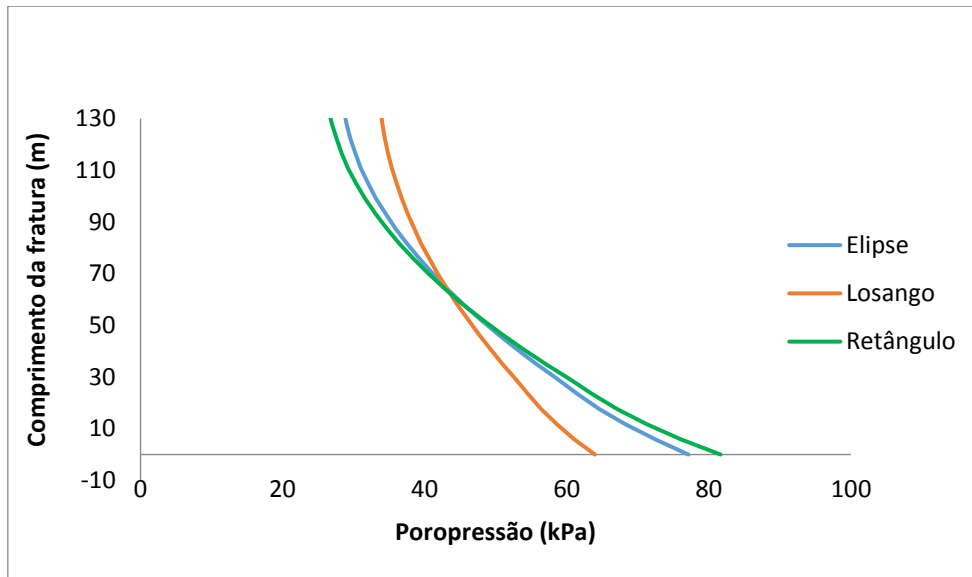


Figura 5.31 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10^{-7}m/s$  e  $k_p = 10^{-5}MPa.s^{0,8}$ .

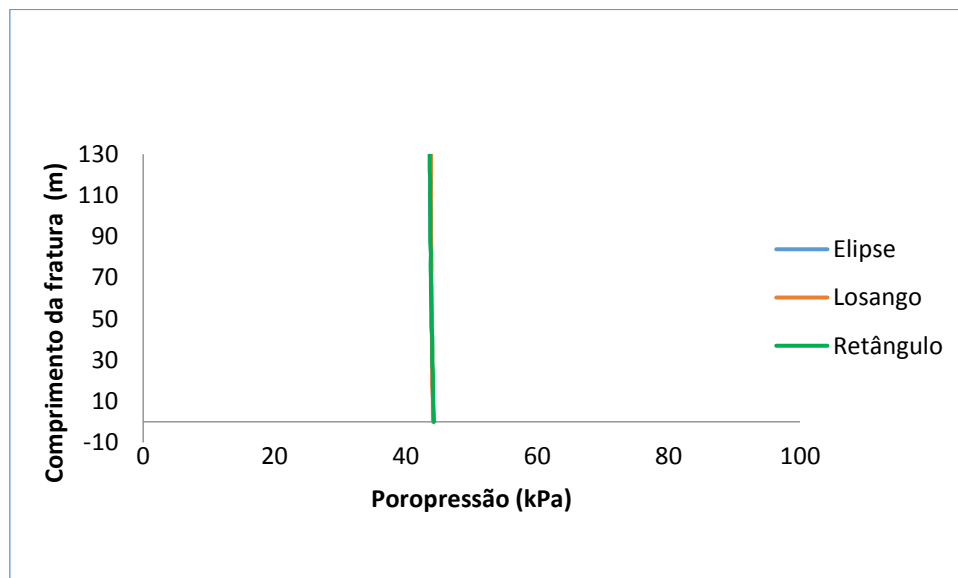


Figura 5.32 Poropressão no eixo da fratura ao longo de seu comprimento.  $k_w = 10^{-7}m/s$  e  $k_p = 10^{-7}MPa.s^{0,8}$ .

A última análise deste item considera a abertura da fratura para cada secção transversal. As Figuras 5.33, 5.34, 5.35 e 5.36 comparam os deslocamentos horizontais das paredes da fratura. Nas Figuras 5.33 e 5.35 houve maior diferença entre os resultados, quando a permeabilidade da matriz é mantida em  $k_w = 10^{-6}m/s$ . Observa-se que o comportamento do retângulo se aproxima mais da elipse, enquanto que a abertura das paredes para o losango é diferente. O

losango é uma aproximação para o modelo PKN, já a fratura de secção retangular se assemelha ao modelo KGD (Xiang, 2011).

Ao observar as Figuras 5.26 e 5.28, conclui-se novamente que para permeabilidades da matriz menores ou iguais a  $k_w = 10^{-7} m/s$ , o formato da fratura é desconsideravel.

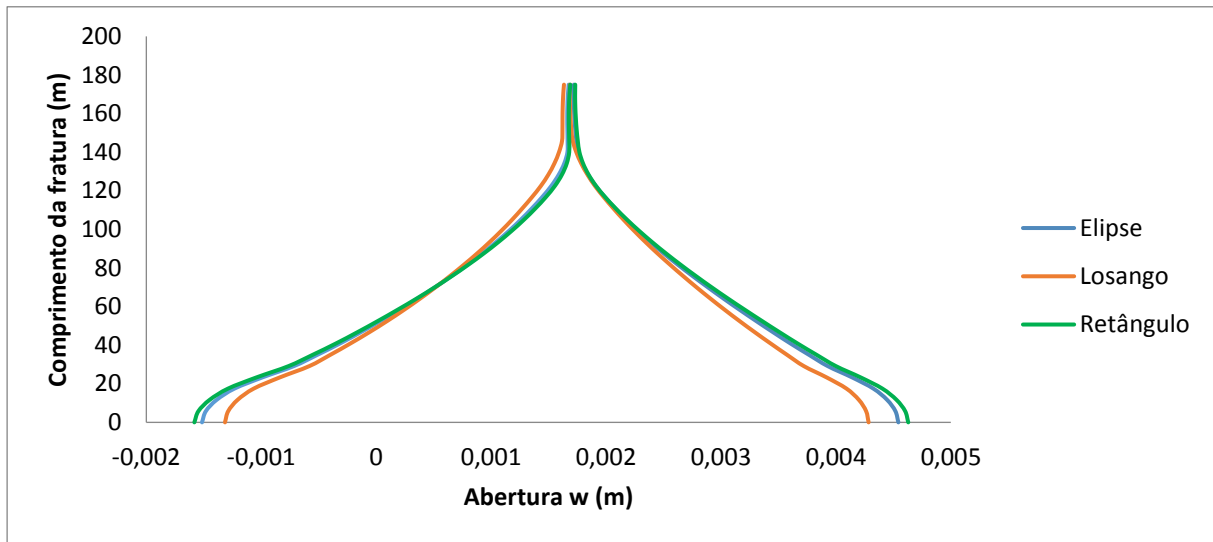


Figura 5.33 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10^{-6} m/s$  e  $k_p = 10^{-5} MPa. s^{0,8}$ .

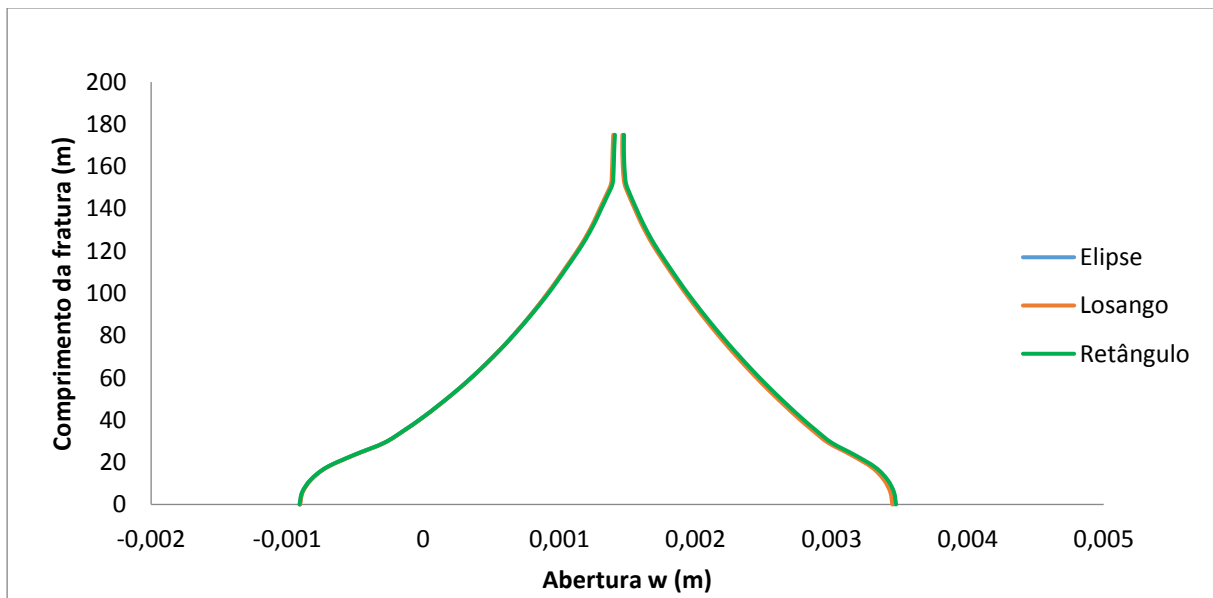


Figura 5.34 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10^{-6} m/s$  e  $k_p = 10^{-7} MPa. s^{0,8}$ .

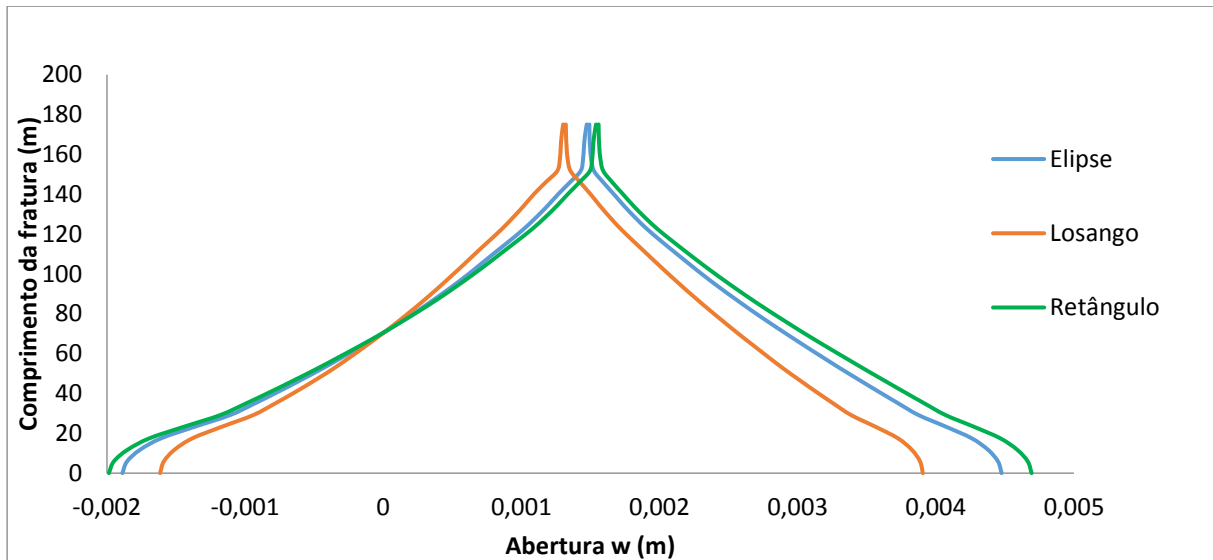


Figura 5.35 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10^{-7} m/s$  e  $k_p = 10^{-7} MPa \cdot s^{0,8}$ .

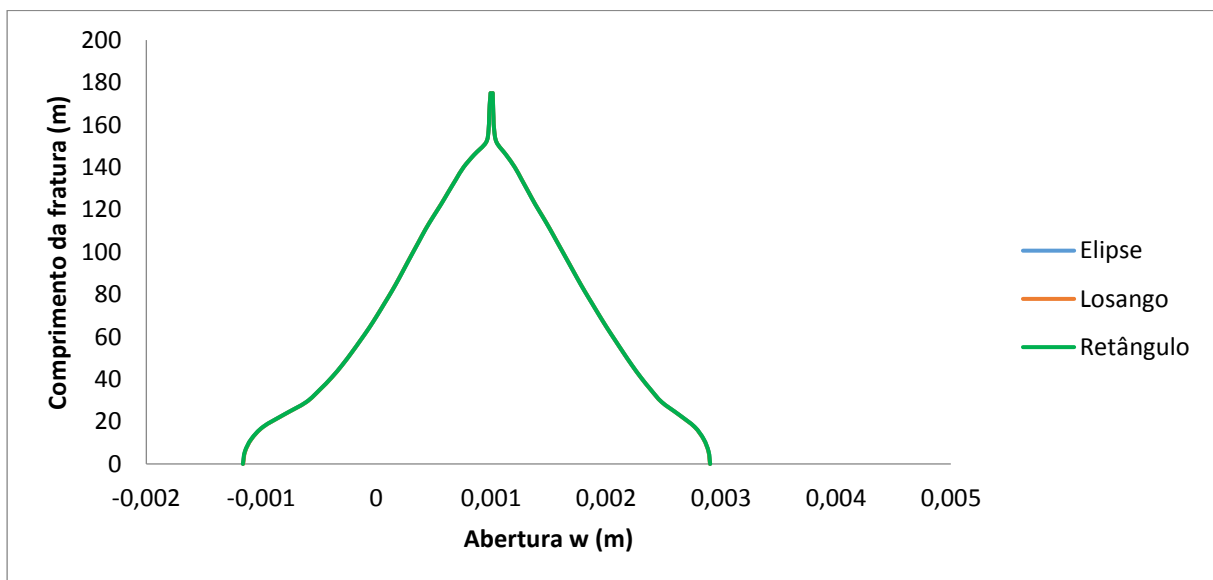


Figura 5.36 Abertura das paredes da fratura.  $k_w = 10^{-7} m/s$  e  $k_p = 10^{-7} MPa \cdot s^{0,8}$ .



## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo será realizado um resumo das conclusões desta dissertação, tal como sugestões para trabalhos futuros. É importante destacar que apesar do avanço alcançado na implementação de um código capaz de prever o comportamento de fraturas hidraulicamente induzidas, ainda há muitos fatores que não foram considerados e serão destacados como temas para pesquisas futuras.

Embora o petróleo seja uma fonte de energia não renovável e poluente, ele ainda é importante para todo o mundo, não sendo possível extinguir o seu uso, por enquanto. O ideal é buscar medidas mitigadoras de impactos ambientais. Estudar, prever e controlar o processo de fraturamento hidráulico é uma forma de reduzir os impactos que ele causaria no meio ambiente. Além disso, o fraturamento hidráulico permite a extração de gás de folhelho, cujo o potencial poluente é menor do que do óleo e do carvão.

As principais conclusões desta dissertação são:

- O fraturamento hidráulico ainda é uma técnica que causa controvérsias no mercado de energia. Muitos cientistas, líderes mundiais e sociedades são contra a sua aplicação. Isso ocorre pela desinformação e pelo fato de o risco desta técnica ser realmente elevado;
- Existem na literatura técnicas simples que permitem calcular o fraturamento hidráulico, como PKN, KGD e o modelo radial. Entretanto, apesar de simular com precisão a propagação da fratura, elas são incapazes de simular o efeito do fraturamento no meio. Uma formulação hidromecânica acoplada que considere uma lei de fluxo adequada se faz necessária, visando melhorar as análises;
- O uso da técnica de XFEM requer uma ordem de integração (número de pontos de Gauss) elevada. Para o elemento triangular, calcular a regra da quadratura de Gauss não é um problema trivial. Embora haja algumas formulações na literatura, nenhuma delas pode ser aplicada para qualquer número de pontos de Gauss, mas em geral são limitadas. Para este projeto foram testadas algumas regras da quadratura, e a que se mostrou mais precisa foi a de 88 pontos de Gauss.
- O elemento triangular quadrático apresentou dificuldades na implementação das funções de enriquecimento *crack tip* e *heaviside*, enquanto que o elemento quadrilátero de quatro nós

apresentou resultados mais satisfatórios e foi o escolhido para a implementação da lei de fluxo cúbica.

- Tendo em vista que o problema é transiente e não linear, fez-se necessário testar vários intervalos de tempo para a resolução do problema. Porém, torna-se necessária a implementação de um algoritmo que permita o cálculo automatizado desse processo;
- A lei de fluxo na fratura é diferente da lei de fluxo na matriz rochosa. Em alguns casos, como quando o fluido é mais viscoso, é possível aplicar um fator multiplicador à permeabilidade da matriz, de forma que o comportamento do regime de fluxo da fratura seja aproximado ao real, como foi feito por Morais (2016). No entanto, para fluidos menos viscosos, como a água, essa aproximação não é possível, já que os valores calculados por Morais se distanciam dos valores calculados ao aplicar a lei cúbica;
- A permeabilidade da matriz tem grande influência no crescimento da fratura. Isso ocorre porque o *leak off* (vazamento de fluido para a matriz) é diretamente proporcional à permeabilidade da matriz, conseqüentemente, a velocidade de propagação da fratura e o seu alcance são inversamente proporcionais à permeabilidade do meio;
- A viscosidade do fluido influencia no processo de fraturamento hidráulico. Quanto mais viscoso é um fluido, maior serão os gradientes de pressão dentro da fratura. Posto isso, a pressão na abertura da fratura é maior, enquanto que a pressão na ponta da fratura é menor. Conseqüentemente, a fratura propaga menos, mas a sua abertura é maior. Além disso, quando a viscosidade do fluido é baixa, reduzi-la ainda mais não afetaria o processo de fraturamento;
- A forma da secção transversal influencia nos casos em que a permeabilidade do meio é relativamente alta, ou seja, quando há mais *leak off*. No entanto, para matrizes com baixa permeabilidade a forma da secção transversal torna-se insignificante.
- As principais sugestões para pesquisas futuras são:
- Implementar algoritmos que permitam determinar a direção e a posição de novas fraturas;
- Implementar um algoritmo que permita tratar a não linearidade geométrica existente no problema;
- Implementar a formulação que considere a condição não saturada;
- Implementar um algoritmo que calcule o tamanho do passo de tempo de forma automatizada;
- Implementar uma formulação considerando o fluxo multifásico.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BABUSKA, I. & Melenk, J.M.. (1997). The partition of unit method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 40 (-), 727-758.

BELYTSCHKO T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1999; **45**(5):601{620

BIOT, M. A. (1940). General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 12:155-164

BORDAS, S.P.A., LEGAY A. (2005). X-FEM mini-course. EPFL, Lausanne.

BRITO, A. M. & GUNN, M. J (1987). *Critical State Soil Mechanics Via Finite Elements*. ELLIS HORWOOD LIMITED. Chichester West Sussex, England 82-140, 185-293.

CASTRO, A. O. S. (2004). Seleção de Poços de Petróleo para Operação de Fraturamento Hidráulico: uma Abordagem Comparativa entre Sistemas Fuzzy-genético e Neuro-Fuzzy, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, RJ, 172p.

CORDÃO NETO, m.p. (2005). Análise hidromecânica de barragens de terra construídas com materiais colapsíveis. Tese de Doutorado, Publicação G.TD – 028/05, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 152p.

DETOURNAY, E., CHENG, A. H. D., MCLENNAN, J.D. (1990). A Poroelastic PKN Hydraulic Fracture Model Based on an Explicit Moving Mesh Algorithm. *J. Energy Res.Tech.Trans. ASME* 112 (4): 7

EIA, U.S Energy Information Administration, (2013). Technically Recoverable Shale Oil and Shale Gas Resources: An assessment of 137 Shale Formations in 41 Countries Outside the United States. 2013. Washington DC - United States of America.

EPA. (2012). *Oil and Gas Production Wastes*. Disponível em: <http://www.epa.gov/radiation/tenorm/oilandgas.html>. Último acesso: 12 jun. 2016.

FARIAS, M. M. (1993). Numerical analysis of clay core dams. Ph. D Thesis, University of Wales, University College of Swansea.

GEOGRAFALANDO(2013). *I*. Disponível em: <http://geografalando.blogspot.com.br/2013/10/agua-aquiferos.html>. Último acesso 10 mar 2017.

GOSZ, M.. (2005). AN INTERACTION INTEGRAL METHOD FOR COMPUTATION OF T-STRESS ALONG THE FRONTS OF GENERAL NON-PLANAR CRACKS IN THREE-DIMENSIONS. *Mechanical, Materials and Aerospace Engineering Department Illinois Institute of Technology, Chicago, IL 60616 USA*. - (-), 1-6.

HORIZONTEGEOGRÁFICO. Disponível em: <http://horizontegeografico.com.br/exibirMateria/2169/conheca-os-piores-acidentes-petroliferos-registrados-no-brasil-nos-ultimos-anos>. Último acesso 10 mar 2017.

IHU. (2013). Isto:Implicações econômicas e ambientais. Entrevista especial com Luiz Fernando Scheibe. Disponível em: <http://www.ihu.unisinos.br/entrevistas/523572-xistoimplicacoes-economicas-e-ambientais-entrevista-especial-com-luiz-fernando-scheibe>. Último acesso 02 jun 2016.

IRWIN, G (1957). "Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate" Transactions ASME, J. Appl. Mech

KHOEI, A. R. (2015). Extended Finite Element Method, Theory and Applications, John Wiley, (584 pages) 2015, ISBN: 978-1-118-45768-9

MARTIN E ECONOMIDES “*Best practices for Candidate selection, Design and evaluation of hydraulic Fracture treatments*”, SPE Production and Operations Conference and Exhibition, Tunis, Tunisia (2010)

MARTÍNEZ, E.R., (2015). Modelagem Numérica de Fraturamento Hidráulico via Método dos Elementos Finitos Estendido. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM-253/2015, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 109 p.

MOËS, N., DOLBOW, J., BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, p.131–150.

MOHAMMADI, S. (2008). Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures. Malden, MA:,Blackwell Publishing

MORAIS, L.P. (2016). Análise hidromecânica do problema de Fraturamento Hidráulico. Dissertação de Mestrado, Publicação G.DM-268;2016, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF, 110p.

NORDGREN, R.P. (1972). Propagation of a Vertical Hydraulic Fracture. Society of Petroleum Engineering Journal 253, p. 306-314.

OLIVEIRA, A.A. (2012). Seleção de poços para operações de estimulação utilizando inteligência artificial. Projeto de Graduação, Curso de Engenharia de Petróleo, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 101p.

OLLER, S., (2001). Fractura Mecánica, Un enfoque global. CIMNE, Barcelona, Spain

SALIMZADEH, S. & KHALILI N.. (2016). An XFEM Model for HydraulicFracturing in PartiallySaturatedRocks. *E3S Web of Conferences / E-UNSAT* . 9 (08014), x.

SANTAMARINA, J.C. and CHO, G.C. (2011). Energy Geotechnonology, KSCE Journal of Civil Engineering, vol. 15, no. 4, pp. 607-610.

SALAS CACHAY, L. R. (2004) Fluxo de partículas de sustentação em poços de petróleo estimulados por fraturamento hidráulico, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 132p.

SMART K.J., OFOEGBU O.I, MORRIS A.M., MCGINNIS R. N. & FERRILL D.A.. (2014). Geomechanical modeling of hydraulic fracturing: Why mechanical stratigraphy, stress state, and pre-existing structure matter. *AAPG Bulletin*. 98 (-), 2237-2261.

SUNSHINE, W. L. (-). *Flowback and Produced Water Are Hazardous*. Disponível em: <http://energy.about.com/od/drilling/a/Waste-Water-Byproducts-Of-Shale-Gas-Drilling.htm>. Último acesso: 13 jun. 2016.

TOLLEFSON, J. (2013). *Gas drilling taints groundwater*. Disponível em: <http://www.nature.com/news/gas-drilling-taints-groundwater-1.13259>. Último acesso: 26 jun. 2016.

TUAN, B. M., FEI, C. Y. (2014), Analysis and prediction of crack propagation in plates by enriched free Galerkin method. *International Journal of Mechanical Engineering and Applications*, p.78-86

UNCC lectures. (2010). *Quadrature Formulas in Two Dimensions*. Available: [http://math2.uncc.edu/~shaodeng/TEACHING/math5172/Lectures/Lect\\_15.PDF](http://math2.uncc.edu/~shaodeng/TEACHING/math5172/Lectures/Lect_15.PDF). Último acesso: 30 dez 2016.

WITHERSPOON, P.A., Wang, J.S.Y., Iwai, K. and Gale, J.E.. Validity of Cubic Law for Fluid Flow in a Deformable Rock Fratura (1980). *Water Resources Research*, Vol. 16, pp. 1016-1024, (1980).

XIANG, J. (2011). A pkn hydraulic fracture model study and formation permeability determination, 16-43.

ZHANG, L., Cui, T., Liu, H.. (2009). A set of symmetric quadrature rules on triangles and tetrahedra. *Journal of computational Mathematics*. 27 (1), 89-96

ZIELONKA, M.G., SEARLES, K.H., NING, J. & BUECHLER, S.R.. (2014). development and Validation of Fully-Coupled Hydraulic Fracturing Simulation Capabilities. *ExxonMobil Upstream Research Company*. SIMULIA Community Conference (-), 1-31.



