Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre o Comportamento Aritmético de Funções Transcendentes

por

Josimar Joao Ramirez Aguirre

Orientador: Diego Marques Ferreira

Brasília
2016

Josimar Joao Ramirez Aguirre

Sobre o Comportamento Aritmético de Funções Transcendentes

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade de Brasília, para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Diego Marques Ferreira

Brasília
2016

Dedico este trabalho a meus pais e irmãos, que sempre
estiveram comigo, apesar da distância.

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer, em primeira instância, a Deus que me deu força, fé, saúde, sempre me apoiou, dotou-me de grandes dons e talentos, e que me deu esperança para alcançar meus objetivos.

Gostaria de agradecer, especialmente, aos meus pais Clemente Ramirez Rogriguez e Francisca Aguirre Tarazona, que sempre me apoiaram com grande espírito, mesmo estando longe de mim, contribuindo imensamente para eu alcançar minhas metas.

Agradeço, da mesma forma, a meus tios Samuel e Salomé, que são como segundos pais para mim. Estarei sempre grato por seus conselhos e por me tomarem como um filho na sua casa quando precisei. Também agradeço a meus irmãos, que sempre me apoiaram para continuar estudando, assim como ao resto da minha família e a meus amigos que me deram força e apoio nas horas difíceis.

Agradeço a meus grandes amigos, por todas as vivências neste tempo de doutorado:

Bruno, apesar de ser chato, mostrou ser um grande amigo nos momentos que precisei de você e me mostrou o que é "deixar para a emoção do momento". Jean, dificil esquecer das conversas matemáticas no il pan-drino, obrigado pela ajuda na última etapa da tese, lembrarei disso sempre. Lucimeire, foi bom demais ganhar de você na sinuca todas as vezes e sempre lembrarei o seu recorde de 8 horas. Anna's e Ana, como esquecer de aquele video #Josimarsalvação, de verdade, uma das maiores lembranças. Yerko, aprendi muito com as suas aulas de educação, obrigado TA BOM! Alessandra, minha conselheira do coração, tentarei seguir seus conselhos, menos aquele de dormir às 10 horas. Gersica e Filipe, membros do "lado negro da força"estou muito agradecido pela sua amizade. Roberto, você me mostrou o poder da dedicação e estou feliz pelo que você conseguiu até agora, espero que alguma vez possamos trabalhar juntos. Danilo, você é uma pessoa admirável em todos os aspetos da sua vida, espero que possamos manter a amizade agora morando mais perto. Lais, competir com você me ajudou a melhorar muito, obrigado. Thais, nunca vou esquecer aquela festa de aniversario na chácara de sua tia, com certeza temos que aguentar o Bruno por você. Da mesma forma, agradeço meus amigos Pedro, Jhoel, Dioscoros, Lelê, Valter, Cris, Flor, Minoru, Vanda, Memo, Irving, Valter, Elaine, Vinicius, Luan e muitos outros, por tornarem este período na UnB mais agradável. Sempre levarei uma lembrança grata de todos.

Agradecer a meus grandes amigos de Math Solution, Cesar, Rusbert, Omar, apesar de estar longe, sempre tivemos essa grande amizade.

Agradeço, de forma particular, a meu orientador Dr. Diego Marques Ferreira, que teve a paciência necessária para orientar-me e apoiar-me, e cujas contribuições ajudaram a melhorar este trabalho, assim como a me tornar uma grande pessoa e profissional, demonstrando-se um grande amigo nas situações difícies da minha vida.

Agradeço ao professor Leandro Cioletti, meu orientador de Mestrado e um grande amigo. Os conselhos e motivação que sempre me deu, foram imprescindível para este passo na vida.

Aos professores que estiveram comigo durante este longo caminho, sempre me fornecendo orientações profissionais e ética na aquisição de conhecimentos e, desta maneira, ajudaram na minha formação como estudante.

Obrigado.

A Matemática é a rainha das
ciências e a Teoria dos Números
é a rainha da Matemática.

Carl Friedrich Gauss

"Se os números não são bonitos, eu não sei o que é."

Paul Erdös

Resumo

Neste trabalho de doutorado, apresentamos diversos resultados sobre o comportamento aritmético de funções transcendentes. Kurt Mahler foi um dos mais interessados em estudar esse tipo de problema. No seu livro de 1976, ele propôs algumas questões que se tornaram de grande interesse em teoria transcendente dos números. Vamos apresentar a solução para um dos problemas que é relacionado a conjuntos excepcionais, bem como nossos avanços para outra pergunta relacionada aos números de Liouville.

Palavras-chave: Funções Transcendentes, Conjuntos Excepcionais, Números de Liouville, Comportamento Aritmético.

Abstract

In this doctoral thesis, we shall present many results about the arithmetic behavior of transcendental functions. Kurt Mahler was one of the most interested in this kind of problems. In his 1976 book, he raised some questions which became of wide interest in transcendental number theory. In this work, we shall present the solution for one of these problems which is related to exceptional sets as well our progress about another question concerning Liouville numbers.

Keywords: Transcendental Function, Exceptional Sets, Liouville Numbers, Arithmetic Behavior.

Sumário

Introdução

Existem funções transcendentes tal que a imagem de todo número racional seja racional? Essa foi a pergunta que, em 1886, Strauss tentou responder. De fato, ele achava que não existiam tais funções e passou um tempo na procura de uma demonstração disso. Contudo, Weiestrass lhe surpreendeu mostrando um contra-exemplo. Mas por que Strauss se interessou nessa questão?

A resposta vem do ano 1882, quando Lindemann estendeu o método de Hermite (quem mostrou que e era transcendente) e provou que:

"*Se α um número algébrico não nulo, então e^{α} é transcendente*".

Uma função transcendente é aquela que não satisfaz uma relação polinomial algébrica com a função identidade. Uma função que não é transcendente é chamada de algébrica. Em algum sentido, podemos dizer que uma função transcendente é "mal comportada" e, como veremos posteriormente, a função exponencial é um exemplo desse tipo de funções.

Desse modo, o resultado de Lindemann despertou a curiosidade dos matemáticos sobre a existência de funções transcendentes satisfazendo certas propriedades, mais especificamente, a natureza aritmética da imagem em pontos algébricos (como a questão de Strauss), ou de um subconjunto dos números complexos.

Depois do resultado de Weiestrass, muitos matemáticos começaram a estudar a natureza aritmética de funções transcendentes, entre eles podemos citar P. Stäckel, A. Van der Poorten, K. Mahler, etc. Muitos desses resultados são relacionados a funções inteiras, já que foi provado que: "*Uma função inteira é algébrica se e somente se é um polinômio*". Assim, caraterizadas as funções inteiras, surgiu, também, a necessidade de encontrar critérios de transcendência para funções analíticas, aparecendo a noção de funções lacunárias e fortemente lacunárias, cuja definição generaliza a ideia de uma rápida aproximação por racionais a partir de blocos grandes de zeros na expansão decimal de um número. Nesse caso, temos aproximação por funções racionais construídas a partir de blocos grandes de zeros na expansão em serie de Taylor da função, como veremos mais adiante.

Agora, dada uma função transcendente f, tome um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$. Como mencionamos acima, estamos interessados em estudar a natureza aritmética de $f(A)$. Nessa linha, os primeiros trabalhos foram sobre conjuntos enumeráveis, dado que a enumerabilidade do conjunto ajuda na construção de funções satisfazendo propriedades desejadas, como se verá no decorrer do trabalho. Até que, em 1984, Kurt Mahler começou a pesquisar sobre a natureza aritmética de funções inteiras transcendentes nos números de Liouville, que foram os primeiros exemplos de número transcendentes e que possuem a propriedade de ser não enumerável.

No Capítulo 1, apresentaremos definições e resultados básicos que serão necessários para o estudo dos capítulos seguintes. Veremos algumas propriedades dos certos espaços topológicos que vão ajudar a compreender a importância dos conjuntos a serem definidos, logo, vamos fazer um resumo dos importantes resultados em teoria transcendente que servirá de suporte para alguns resultados. Assim como a definição de função transcendente, a caraterização das funções inteiras algébricas mencionada acima, bem como um critério de transcendência para funções analíticas (funções lacunárias e fortemente lacunárias). Outrossim, daremos a definição de número de Liouville e suas principais propriedades. Explicaremos a classificação dos números transcendentes dada por Mahler.

Além do mais, vamos expor um breve resumo da teoria de alturas, seguindo de perto o livro de Waldschmidt [31]. Por último, veremos como estender o teorema de Roth em approximações diofantinas para o caso não arquimediano surgindo o teorema do subespaço de Schlickewei, o qual será usado no último capítulo do trabalho.

No Capítulo 2, estudaremos a influência da velocidade da aproximação diofantina de um número na natureza aritmética da imagem dele por uma função transcendente. Mais especificamente, a "rápida" aproximação por racionais de um número de Liouville ξ vai nos permitir obter informação sobre a natureza aritmética de $f(\xi)$.

Primeiro, abordaremos o problema de Mahler relacionado aos números de Liouville, i.e., a existência de funções inteiras transcendentes tal que a imagem de todo número de Liouville segue sendo um número de Liouville. Cabe mencionar que este ainda é um problema em aberto. Nessa direção, vamos mostrar nosso avanço, o qual consiste na construção de um subconjunto não enumerável de números de Liouville para o qual podemos garantir a existência de infinitas funções, satisfazendo estas propriedades. Essa parte do capítulo está baseada em nosso trabalho em [21].

Depois, demonstraremos um resultado concernente ao fato de construir funções inteiras transcendentes sobre um subconjunto de Liouville que satisfaz a conjectura de Erdös-Mahler, e que são levados em números de Liouville.

No Capítulo 3, veremos um outro problema de Mahler referente a conjuntos excepcionais, isto é, o conjunto de números algébricos levados em algébricos por funções inteiras. O estudo desses conjuntos tornou-se matéria de bastante pesquisa, isto é, tentar caraterizar-los para certas classes de funções transcendentes.

Mahler conseguiu mostrar que: *Todo subconjunto dos algébricos, fechado por conjugação algébrica, é conjunto excepcional de alguma função inteira.* Baseado nesse resultado, no ano de 1976, Mahler perguntou:

Todo subconjunto dos números algébricos, é conjunto excepcional de alguma função inteira com coeficientes racionais?.

Essa pergunta foi respondida de forma afirmativa em [17], mas nenhuma informação dos coeficientes da serie de Taylor foi obtida. Neste capítulo, apresentaremos nossa demostração da resposta afirmativa a este problema, trabalho realizado em [22]. Finalmente, no Capítulo 4, iremos tratar de um problema de Mahler concernente à existência de funções analíticas transcendentes do tipo limitado (com coeficientes inteiros limitados) usando as aproximações diofantinas p-ádicas, entendendo como influenciam ditas aproximações na natureza aritmética de funções transcendentes.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados que serão fundamentais em nosso estudo dos capítulos posteriores.

1.1 Conjuntos Topológicos G_δ densos

Antes de começar nosso estudo das funções transcendentes, que serão definidas na terceira seção, vamos ver algumas propriedades de uma classe de espaços topológicos, que vão ser de utilidade no decorrer deste trabalho

DEFINIÇÃO 1.1. *Seja X um espaço topológico, dizemos que $G \subset X$ é um conjunto G_δ de X, se G é uma interseção enumerável de abertos densos em X.*

OBSERVAÇÃO 1.1. *Alguns livros de topologia definem conjunto G_δ como uma interseção enumerável de abertos, não necessariamente densos. Entretanto, tendo em vista os objetivos deste trabalho, vamos considerar a definição como acima.*

EXEMPLO 1.1. *O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um conjunto G_δ de $\mathbb{R}$, pois*

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} - \{x\}.$$

Lembrando que podemos definir um espaço de Baire como aquele onde a interseção enumerável de abertos densos é um aberto denso, segue-se diretamente que:

PROPOSIÇÃO 1.1. *Se X é um espaço de Baire, todo subconjunto G_δ de X é denso.*

Dado que $\mathbb{R}$ é um espaço de Baire, pois é um espaço métrico completo, temos em particular que todo subconjunto que pudermos construir em $\mathbb{R}$ sendo G_δ vai ser grande no sentido topológico.

Outra importância desses conjuntos vem do fato sobre a numerabilidade, como veremos a seguir:

PROPOSIÇÃO 1.2. *Seja X um espaço métrico completo, não vazio e sem pontos isolados, e considere E um subconjunto G_δ de X. Se F é um subconjunto enumerável de E, então $E \setminus F$ é um conjunto G_δ de X.*

Demonstração. Note que
$$E \setminus F = \bigcap_{y \in F} E \setminus \{y\}.$$
Claramente a interseção enumerável de conjuntos G_δ continua sendo um conjunto G_δ. Assim, como F é enumerável, é suficiente mostrar que $E \setminus \{y\}$ é G_δ para cada $y \in F$. Sabe-se que
$$E \setminus \{y\} = \bigcap_{i \in I} A_i \setminus \{y\},$$
onde I é um conjunto enumerável de índices e cada A_i é aberto denso em X. Dado que $A_i \setminus \{y\}$ é aberto denso em X, para cada $i \in I$, obtemos o resultado desejado. □

COROLÁRIO 1.1. *Seja X um espaço métrico completo sem pontos isolados. Se E é um conjunto G_δ de X, então E é não enumerável.*

Quão bem distribuído está um conjunto G_δ? O seguinte resultado nos diz que ele está "estratégicamente" posicionado no espaço X.

PROPOSIÇÃO 1.3. *Se $G \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto G_δ, então dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existem $x, y \in G$ tais que $\alpha = x + y$.*

Demonstração. Por definição, sabemos que
$$G = \bigcap_{i \in I} A_i,$$
onde A_i é aberto denso em $\mathbb{R}$, para cada $i \in I$, sendo I, como antes, um conjunto enumerável de índices. Primeiro, mostraremos que
$$\alpha - G = \bigcap_{i \in I} (\alpha - A_i)$$
De fato, dado $t \in \alpha - G$, existe $s \in G$, tal que $t = \alpha - s$. Como $s \in G$, segue-se que $t = \alpha - s \in \alpha - A_i$, para todo $i \in I$. Reciprocamente, suponha que $t \in \alpha - A_i$, para cada $i \in I$. Assim, para cada $i \in I$, existe um $s_i \in A_i$ tal que $t = \alpha - s_i$. Pela unicidade do inverso aditivo, $s_i = s_j$ mesmo que $i \neq j$. Defina $s := s_1$, daí
$$t = \alpha - s \in \alpha - \bigcap_{i \in I} A_i = \alpha - G.$$
Da afirmação acima, obtemos que $\alpha - G$ é um conjunto G_δ, desde que cada conjunto $\alpha - A_i$ é denso. Agora, como G e $\alpha - G$ são G_δ, então $G \cap (\alpha - G)$ é G_δ e, consequentemente, não vazio. Conclui-se que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existe $y \in G \cap (\alpha - G)$. Portanto, existem $x, y \in G$ tal que $\alpha = x + y$. □

1.2 Alguns resultados importantes de Teoria de Números Transcendentes

A teoria dos números transcendentes foi originada por Liouville em sua famosa memória de 1844 na qual ele obteve, pela primeira vez, uma classe *trèsétendue*, como foi descrito no título do artigo, de números que não satisfazem nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Seja $L|K$ uma extensão de corpos. Dizemos que $\alpha \in L$ é algébrico sobre K quando existe $P \in K[x]$ não nulo, tal que $P(\alpha) = 0$. Caso contrário, α é dito transcendente sobre K. Mais geralmente, os números $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ são ditos algebricamente dependentes sobre K se existe $P \in K[x_1, \dots, x_n]$, não nulo tal que $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. Caso contrário, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sã chamados algebricamente independentes sobre K. Dizemos simplesmente que um número complexo é algébrico, quando for algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Números não algébricos são chamados de transcendentes.

Exemplo 1.2. *$i, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $\cos \frac{\pi}{1008} + i \sin \frac{\pi}{1008}$ são algébricos, pois são raizes, respectivamente, de $x^2 + 1$, $x^4 - 10x^2 + 1$ e $x^{2016} - 1$.*

Pode-se mostrar que o conjunto dos números algébricos, denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$, é enumerável, assim, temos que ele possui medida de Lebesgue nula e, portanto, quase todos os números são transcendentes. Mesmo tendo medida total, decidir se um número dado é transcendente ou não é um problema de muito trabalho. Na continuação, vamos apresentar uma série de resultados nessa direção, que são a base da teoria transcendente dos números.

Em 1873, Hermite provou que e é transcendente e, em 1882, Lindemann estendeu o método para provar que π também é transcendente, além disso, Lindemann mostrou que a transcendência de e e π são casos especiais de um teorema bem mais geral

Teorema 1.1 (Teorema de Hermite-Lindemann). *Se $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.*

Quando $m = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ não nulo, obtemos o seguinte resultado particular:

Corolário 1.2. *Se α é algébrico, não nulo, então $\exp(\alpha)$ é transcendente.*

Do teorema de Hermite-Lindemann podemos obter a transcendência de uma grande classe de números. Por exemplo: Como já dissemos, π é transcendente, $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \sinh \alpha, \cosh \alpha, \tanh \alpha$ são transcendentes para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$.

Em 1900, no congresso Internacional de Matemática em Paris, o matemático alemão David Hilbert propôs uma lista de 23 problemas. Até aquele momento todos eram problemas abertos, e vários deles acabaram se tornando muito influentes na matemática do século XX. O sétimo problema de Hilbert foi resolvida em 1934 por A. O. Gelfond e, independentemente em 1935, por T. Schneider, o qual afirma:

TEOREMA 1.2 (Teorema de Gelfond-Schneider). *Seja* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$ *e* $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$. *Então* α^β *é transcendente.*

O teorema acima encerou a questão sobre a natureza aritmética da potenciação de dois algébricos visto que se $\alpha \in \{0,1\}$ ou se $\beta \in \mathbb{Q}$, então α^β é algébrico. Por exemplo, como $e^{i\pi} = -1$, então $(e^{i\pi})^{-i} = (-1)^{-i}$ logo, $e^\pi = (-1)^{-i}$, conhecida como a *constante de Gelfond*, é transcendente.

COROLÁRIO 1.3. *Sejam* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ *números algébricos, não nulos, com* $\log\alpha_1$, $\log\alpha_2$ *linearmente independentes sobre* $\mathbb{Q}$. *Então* $\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 \neq 0$.

Demonstração. Suponha por absurdo que existem $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ satisfazendo as hipóteses do corolário e tais que

$$\beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 = 0. \tag{1.1}$$

Portanto,

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\log\alpha_2}{\log\alpha_1}$$

implicando que $\alpha_2 = \alpha_1^{-\beta_1/\beta_2}$ e, pelo teorema de Gelfond-Schneider, $\beta_1/\beta_2 \in \mathbb{Q}$. Então existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $\beta_1 = p\beta_2$. Substituindo em (1.1) obtemos $p\log\alpha_1 + \log\alpha_2 = 0$, contrariando a independência linear de $\log\alpha_1, \log\alpha_2$ sobre $\mathbb{Q}$. Assim, obtemos o resultado desejado. □

No corolário acima, vimos que o teorema de Gelfond-Schneider afirma que se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ são números algébricos, então sua independência linear sobre $\mathbb{Q}$ e $\overline{\mathbb{Q}}$ são equivalentes. Foi conjecturado que esse resultado seria válido para uma quantidade arbitrária de logaritmos. Essa conjectura foi provada por A. Baker em 1966 (e lhe rendeu a medalha Fields em 1970).

TEOREMA 1.3 (Teorema de Baker). *Se* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são números algébricos não nulos tais que* $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ *são linearmente independentes sobre* $\mathbb{Q}$. *Então,* $1, \log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ *são linearmente independentes sobre o corpo dos números algébricos.*

Como consequência do teorema de Baker, temos que qualquer combinação, finita e não nula, de logaritmos de números algébricos com coeficientes algébricos é um número transcendente. Para uma demonstração detalhada deste teorema recomendamos o livro [18], apêndice C.

Pode-se mostrar que os teoremas de Hermite-Lindemann e Gelfond-Scneider decorrem do teorema de Baker. Além do mais, Alan Baker fez a brilhante ligação entre teoria dos números e análise complexa, generalizando o teorema de Gelfond-Schneider. Na verdade, ele conseguiu mais que uma tal generalização quando deu uma cota inferior para formas lineares em logaritmos de algébricos. Várias aplicações do método de Baker foram dadas para resolver equações diofantinas exponenciais, métodos esses que até hoje vêm sendo aplicados para resolver certas equações ou até mesmo para obter resultados assintóticos.

Para finalizar esta seção, vamos apresentar o grande resultado a ser provado em teoria transcendente, conhecido como a conjectura de Schanuel. Para entender este problema, precisamos de algumas definições:

Seja $L|K$ uma extensão transcendente, isto é, $[L : K] = \infty$. Um conjunto $\mathcal{B} \subseteq L$ é chamado *base de transcendência* de $L|K$, se $\mathcal{B}$ é algebricamente independente sobre K e $L|K(\mathcal{B})$ é uma extensão algébrica, ou equivalentemente $\mathcal{B}$ é o conjunto algebricamente independente (sobre K) maximal relativo à inclusão, cuja existência é garantida via lema de Zorn. Pode-se provar que quaisquer duas bases de transcendência de uma extensão têm a mesma cardinalidade. Assim, podemos definir o *grau de transcendência* de uma extensão $L|K$ como a cardinalidade de $\mathcal{B}$ e denotamos por $grtr(L|K)$.

Temos que $grtr(K(x_1, \ldots, x_n)|K) \leqslant n$ e vale a igualdade se, e somente se, $x_1, \ldots, x_n$ são algebricamente independentes sobre K (A prova dessa desiguldade segue-se por indução sobre n). Com essa nomenclatura, temos

♦ ***Conjectura de Schanuel:*** *Se $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então*

$$grtr(\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})|\mathbb{Q}) \geqslant n.$$

A veracidade desta conjectura implica provas simples de generalizações para alguns dos mais importantes teoremas dessa teoria. Além do mais, mostraria que todos os números que esperamos ser transcendentes (ex: $e\pi$, $e + \pi$, e^e, $\pi^e, \ldots$) o são. De fato, escolhendo $x_1 = 1$ e $x_2 = i\pi$, a transcendência de π implica a $\mathbb{Q}$-indepência linear de x_1, x_2, assim, pela conjectura de Schanuel:

$$2 \leqslant grtr\ \mathbb{Q}(1, i\pi, e, -1) = grtr\ \mathbb{Q}(\pi, e) \leqslant 2$$

e, portanto, e, π são algebricamente independentes.

A motivação da conjectura de Schanuel parece vir de alguns resultados já sabidos. Por exemplo, quando $n = 1$ temos que se $\alpha \neq 0$, então, pelo teorema de Lindemann, pelo menos um dos números α, e^α é transcendente, assim $grtr(\mathbb{Q}(\alpha, e^\alpha)|\mathbb{Q}) \geqslant 1$. No caso de um n arbitrário, essa conjectura está resolvida apenas para $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, isto é,

Teorema 1.4 (Teorema de Lindemann-Weierstrass). *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números algébricos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ são algebricamente independentes.*

1.3 Funções Transcendentes

DEFINIÇÃO 1.2. *Dada uma função* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *se existe* $P \in \mathbb{C}[x, y]$, *não nulo, tal que*

$$P(z, f(z)) = 0, \text{ para todo } z \in \Omega,$$

então f *é dita algébrica, caso contrário* f *é chamada de transcendente.*

EXEMPLO 1.3. *Toda função racional em* $\mathbb{C}(z)$ *é algébrica.*

EXEMPLO 1.4. *As funções* $e^z, \log z$ *são transcendentes. Assim também as funções trigonométricas* $\cos z$, *sen* $z, \ldots$ *e suas inversas. Algumas funções dadas por equações funcionais são transcendentes, por exemplo* $\zeta(s)$ *e* $\Gamma(z)$.

1.3.1 Critério de transcendência para funções inteiras

O resultado a seguir fornece um critério de transcendência para funções inteiras, mais precisamente, vamos mostrar que "uma função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio" (esse resultado aparece na tese de Doutorado: O problema de Lang e uma generalização dos teoremas de Stäckel, do professor Diego Marques Ferreira [1]). Para conseguir mostrar este resultado, vamos provar alguns lemas que serão úteis na sua demonstração.

LEMA 1.1. *Se* f *é inteira não constante, então existe um número real* $R_0 > 0$, *tal que* $|f|_R := \sup_{|z|=R} |f(z)| \geqslant 1$ *para todo* $R \geqslant R_0$.

Demonstração. Suponha o contrário. Tome $z \in \mathbb{C}$. Logo, existe um $R > |z|$ tal que $|f|_R < 1$. Como

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)| = \sup_{|z|\leqslant R} |f(z)|$$

então $|f(z)| < 1$. Como z foi tomado arbitrário, segue-se que f é limitada e, portanto, constante pelo teorema de Liouville, ver [4, pag. 77]. □

LEMA 1.2. *Se* $P(z) \in \mathbb{C}[z]$, *não nulo, então existem números reais* $k > 0$ *e* $R_1 > 0$, *tais que* $|P(z)| > k$ *para todo* z *com* $|z| \geqslant R_1$.

Demonstração. Para o caso em que P é uma constante não nula, digamos $P(z) \equiv s$, o resultado segue trivialmente ($k = s/2$ e $R_1 = 1$). Seja P não constante e suponha que dados $k_n = \frac{1}{n}$ e $R_{1,n} = n$, existe z_n com $|z_n| \geqslant R_{1,n} = n$ tal que $|P(z_n)| \leqslant k_n = \frac{1}{n}$. Logo, quando $n \to \infty$, temos que $|z_n|$ tende a infinito e $|P(z_n)|$ tende a zero. Contradição, pois sendo P não constante, $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = \infty$. □

LEMA 1.3. *Se* f *é inteira e algébrica, então existem números reais* $c > 0$ *e* $R_2 > 0$, *tais que* $|f|_R \leqslant R^c$, *para todo* $R \geqslant R_2$.

---

[1] Veja [20].

Demonstração. Por hipótese sobre a função f, existe $P(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, não nulo, tal que

$$P(z, f(z)) = 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Colocando em evidência as potências de $f(z)$ que são iguais, podemos reescrever a igualdade acima como

$$a_0(z) + a_1(z)f(z) + \ldots + a_d(z)f(z)^d = 0 \tag{1.2}$$

onde $a_0(z), \ldots, a_d(z) \in \mathbb{C}[z]$ e $a_d(z)$ é não nulo (nesse caso, a função f é dita algébrica de grau d). Pelo lema 1.2, existem k e R_1 positivos, tais que $|a_d(z)| > k$ para todo z com $|z| \geqslant R_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que f é não constante, desde que, caso contrário, o resultado segue de maneira óbvia. Daí, pelo lema 1.1, existe $R_0 > 0$ tal que $|f|_R \geqslant 1$ para $R \geqslant R_0$. Adiante, todo R que aparecer será considerado maior ou igual do que $\max\{R_0, R_1\}$.

Já que $|f(z)|$ é contínua e $\partial B(0,R)$ é compacto, existe z' com $|z'| = R$, tal que $|f(z')| = \sup_{|z|=R} |f(z)| = |f|_R$. Substituindo z' na igualdade (1.2) obtemos

$$\underbrace{a_0(z')}_{z_1} + \underbrace{a_1(z')f(z') + \ldots + a_d(z')f(z')^d}_{z_2} = 0.$$

Como $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 + z_1| = 0$, então $|z_2| \leqslant |z_1|$ e assim

$$|a_1(z')f(z') + \ldots + a_d(z')f(z')^d| \leqslant |a_0(z')|$$

Colocando $f(z')$ em evidência no lado esquerdo da desigualdade acima e usando o fato de que $|f(z')| \geqslant 1$, temos

$$|a_1(z') + \ldots + a_d(z')f(z')^{d-1}| \leqslant |a_0(z')|.$$

Repetindo o mesmo processo $d-1$ vezes, segue-se que

$$|a_d(z')f(z')| \leqslant |a_0(z')| + \ldots + |a_{d-1}(z')|.$$

Agora, dado que $|z'| = R \geqslant R_1$, temos que $|a_d(z')| > k$. Daí

$$|f(z')| \leqslant \frac{1}{k}\big(|a_0(z')| + \ldots + |a_{d-1}(z')|\big) \leqslant |b_0| + \ldots + |b_s||z'|^s$$

onde $b_0, \ldots, b_s \in \mathbb{C}$ e $s = \max\{\mathrm{gr}(a_0), \ldots, \mathrm{gr}(a_{d-1})\}$. Lembrando que $|z'| = R$ e $|f(z')| = |f|_R$ obtemos

$$|f|_R \leqslant |b_0| + \ldots + |b_s|R^s \leqslant R^{s+1},$$

onde a última desigualdade é válida para R suficientemente grande, digamos, por exemplo, $R > R'$. Basta tomar $c > s+1$ e $R_2 = \max\{R_0, R_1, R'\}$ para concluir a demonstração. $\square$

Agora podemos provar o critério de transcendência mencionado anteriormente

TEOREMA 1.5. *Uma função inteira é algébrica se, e somente se, é um polinômio.*

Demonstração. Suponha que $f(z) \in \mathbb{C}[z]$. Defina $P(x, y) = f(x) - y$, então $P(z, f(z)) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Vamos supor agora que f é inteira e algébrica, assim, pelo lema 1.3, existem c e R_2 positivos tais que $|f|_R \leqslant R^c$ para $R \geqslant R_2$. Pela fórmula integral de Cauchy, (ver [4, corolário 2.13]), temos que, para todo $n \geqslant c+1$ e $R > R_2$,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi R^{n+1}} \int\limits_{|w|=R} |f(w)||dw| \\ &\leqslant \frac{n! R^c 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{R^{n-c}}. \end{aligned}$$

Como $n - c \geqslant 1$, fazendo R tender ao infinito, obtemos que $|f^{(n)}(0)| = 0$. Agora, dado que f é inteira, podemos fazer sua expansão em série de Taylor da forma

$$f(z) = f(0) + \cdots + \frac{f^{(c)}(0) z^c}{c!} + \sum_{j \geqslant c+1} \frac{f^{(j)}(0) z^j}{j!}.$$

Daí, pelo provado acima ($f^{(n)}(0) = 0$ para $n \geqslant c+1$), segue que o somatório do lado direito da última equação é nulo. Portanto, a função f é um polinômio de grau no máximo c. □

1.3.2 Um pouco de história

Dado que as funções inteiras algébricas estão perfeitamente caraterizadas pelo teorema anterior, surge um interesse maior no comportamento das funções inteiras transcendentes. Para analisar a natureza deste comportamento, lembremos a definição de número algébrico

DEFINIÇÃO 1.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Se existe um polinômio, não nulo, $p(z) \in \mathbb{Z}[z]$ tal que $p(\alpha) = 0$, α é chamado de número algébrico. Caso contrário, α é dito ser transcendente. O conjunto dos números algébricos é denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Como tínhamos comentado, em 1882 Lindemann provou que a função transcendente e^z assume valores transcendentes em todo algébrico não nulo. Esse resultado levantou à questão:

$$\text{Dado } f \text{ transcendente, } f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}} \text{ para quase todo } \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}?$$

Estudar as propriedades da imagem de uma função dada (se ela é racional, irracional, algébrica, etc) é conhecido como *natureza aritmética ou comportamento aritmético* de f.

Contra toda expectativa, como mencionamos anteriormente, em 1886 Weierstrass enviou uma carta a L. Koenigsberger (publicado em *Acta Math.* ***39****(1923), 238-239*) em que fez uma elegante construção na qual mostrou a existência de funções que não satisfazem essa propriedade. Mais especificamente, ele mostrou o seguinte resultado:

Teorema 1.6 (Weierstrass). *Existem funções inteiras transcendentes*

$$f(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$$

com $a_k \in \mathbb{Q}$ para todo k, tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Demonstração. Usando a enumerabilidade de $\mathbb{Z}[z]$, seus elementos não nulos podem ser enumerados da forma $p_1, p_2, \ldots$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $q_n := p_1 p_2 \cdots p_n$ e denote por r_n o grau do polinômio q_n. Definamos a sequência $m_n \in \mathbb{N}$ indutivamente por

$$m_0 := 0,\ m_1 = m_0 + r_0 + 1, \ldots, m_{n+1} := m_n + r_n + 1.$$

Para um número racional não nulo k_n, o polinômio $k_n q_n(z) z^{m_n}$ envolve somente potências de z_l com $l \in \{m_n, \ldots, m_n + r_n\}$, e o termo $z^{m_n + r_n}$ está presente com um coeficiente não nulo. Note que os polinômios acima não possuem potências de z iguais, assim

$$f(z) := \sum_{n \geqslant 0} k_n q_n(z) z^{m_n}$$

é uma série de potências com coeficientes racionais, que não é um polinômio. Agora, se escolhemos os k_n sendo suficientemente pequenos (em módulo) tal que os coeficientes de $k_n q_n(z) z^{m_n}$ sejam menores que $[(m_n + r_n)!]^{-1}$, daí $f(z)$ representa uma função inteira e, portanto, também transcendente, pelo teorema 1.5.

Dado $\alpha \in \mathbb{Q}$, logo α é um zero de algum polinômio p_s e, assim, $q_n(\alpha) = 0$ para todo $n \geqslant s$ e, portanto,

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{s-1} k_n q_n(\alpha) \alpha^{m_n} \in \mathbb{Q}.$$

$\square$

Se denotamos por

$$\Sigma_A(B) := \{f : B \to B \text{ analítica e transcendente tal que } f(A) \subseteq A\},$$

o resultado acima pode ser expresso da forma $\Sigma_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$. Partindo desse resultado, Weierstrass perguntou se $\Sigma_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$? Isso foi resolvido por P. Stäckel, o qual provou um resultado mais geral, TEOREMA 1.7 (P. Stäckel). *Para cada conjunto enumerável $\Sigma \subset \mathbb{C}$ e cada subconjunto denso $T \subset \mathbb{C}$, existem funções inteiras transcendentes f, tal que $f(\Sigma) \subset T$.*

Demonstração. Ver [28]. □

Assim, para responder à pergunta de Weierstrass, basta considerar os conjuntos $\Sigma = T = \overline{\mathbb{Q}}$. F. Gramain mostrou que o teorema de Stäckel continua sendo válido para Σ, T sendo subconjuntos de $\mathbb{R}$ [2]. Neste sentido de resultados relacionados ao comportamento aritmético de funções transcendentes, podemos mencionar alguns deles:

1. Uma outra construção devida a P. Stäckel [29] produz uma função inteira transcendente f cujas derivadas $f^{(t)}$, para $t = 0, 1, 2, \ldots$, aplicam $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$.

2. G. Faber refinou esse resultado mostrando a existência de uma função inteira transcendente tal que $f^{(t)}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \overline{\mathbb{Q}}(i)$, para todo $t \geqslant 0$.

3. A. J. Van der Poorten [30] provou a existência de funções transcendentes f, tal que $f^{(s)}(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}(\alpha)$, para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$.

4. Em 2011, D. Marques [17] provou alguns desses resultados no contexto hipertranscendente [3].

5. Recentemente, Marques e Moreira [19] mostraram a existencia de funções inteiras transcendentes f, tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ e $\mathrm{den}(f(p/q)) < q^{8q^2}$, para todo $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q > 1$.

1.4 Funções lacunárias e fortemente lacunárias

Dada uma função f analítica sobre $A \subset \mathbb{C}$, procuramos condições suficientes para que ela seja transcendente. Entre as condições que aparecem, podemos mencionar a noção de função lacunária.

DEFINIÇÃO 1.4. *Uma função analítica f é dita lacunária se não possui extensão analítica fora de sua região de convergência, onde é definida por uma serie de potências.*

[2] Note que a dificuldade do caso real é mostrar a transcendência das funções, pois não é possível aplicar mais o teorema 1.5.

[3] Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é hipotranscendente, se existe $n \geqslant 0$ e $P \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_{n+1}]$, não nulo, tal que

$$P(z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)) = 0, \ \forall\ z \in \Omega.$$

Caso contrário, f é dita hipertranscendente. Isto é, as funções hipertranscendentes não satisfazem uma equação diferencial algébrica com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.5. *Considere a função lacunária definida pela série de potências*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots .$$

A série de potências acima converge uniformemente na bola aberta $B(0,1)$. Assim, f define uma função holomorfa neste disco aberto. Entretanto, f possui uma singularidade em cada ponto do círculo unitário, e não pode ser estendida analíticamente fora do disco aberto. De fato, claramente f tem uma singularidade em $z = 1$. Agora como

$$f(z^2) = f(z) - z, \quad f(z^4) = f(z^2) - z^2, \quad f(z^8) = f(z^4) - z^4, \quad \ldots$$

podemos ver que f possui singularidade em $\{z \in \mathbb{C}; z^2 = 1\} = \{i, -i\}$. Analogamente, f possui singularidade em cada raiz 2^n-ésima da unidade, para todo natural n. O conjunto de tais pontos é denso no círculo unitário e, portanto, por extensão contínua, cada ponto no círculo unitário seria uma singularidade de f. Dizemos, nesse caso, que o círculo unitário é a ***fronteira natural*** *de f.*

Analogamente, podemos definir o conceito acima para série de potências.

Definição 1.5. *Dada uma série de potências $f(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k$, ela é dita lacunária [resp. Fortemente Lacunária] se existem duas sequências de inteiros $\{s_1, s_2, \ldots\}$ e $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ satisfazendo:*

1. $0 = t_0 \leqslant s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2 \leqslant \ldots,$

2. $$\lim_{n \to \infty} (t_n - s_n) = \infty \quad \left[\textit{resp.} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{t_n}{s_n} = \infty \right],$$

3. $a_{s_n} \neq 0,\ a_{t_n} \neq 0,$ *e* $a_k = 0$ *para* $s_n < k < t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

Naturalmente, toda série fortemente lacunária é lacunária, mas ela é definida uma vez que, em alguns problemas, o fato de ser lacunária não é suficiente para controlar o crecimento da cauda de uma série, isto será evidente no decorrer do trabalho. Usando esse conceito, podemos dar o seguinte critério de transcendência

Teorema 1.8. *Toda serie lacunária define uma função transcendente.*

Demonstração. Ver demonstração [14, pag. 42]. □

1.5 Números de Liouville

A definição de números transcendentes é do século XVIII e, segundo Euler (1707-1783), esses números são chamados transcendentes porque "transcendem" o poder das operações algébricas. Mas foi no século XIX que verificou-se a existência desses números quando, em 1844, Liouville apresentou, em uma comunição verbal, os primeiros exemplos de números transcendentes. Esses números são chamados de números de Liouville.

A ideia de Liouville para construir números transcendentes era ingênua, mas eficaz: encontrar uma propriedade que é satisfeita por todos os algébricos. Depois, bastava construir um número que não satisfizesse tal propriedade.

TEOREMA 1.9 (Liouville). *Seja α um número algébrico real de grau $n \geqslant 2$. Então existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c(\alpha)}{q^n},$$

para todo racional p/q.

Em certo sentido, o teorema de Liouville diz que um número algébrico irracional não pode ser "bem aproximado" por racionais, no sentido de que toda aproximação deve respeitar a desigualdade acima. Logo, Liouville construiu uma classe de números que são muito bem aproximados por racionais.

DEFINIÇÃO 1.6. *Um número real ξ é chamado de número de Liouville se existe uma sequência infinita de racionais $(p_j/q_j)_{j\geqslant 1}$ com $q_j > 1$ tais que*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots.$$

O conjunto dos números de Liouville será denotado por $\mathbb{L}$.

EXEMPLO 1.6. *Seja um inteiro $b \geqslant 2$. O número $\alpha = \sum_{n\geqslant 0} a_n b^{-n!}$ é um número de Liouville, para toda escolha de $a_n \in \{1, \ldots, b-1\}$.*

De fato, tome $q_j = b^{j!}$ e $p_j = \sum_{n=1}^{j} a_n b^{j!-n!}$. Então

$$\begin{aligned} 0 < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| &= \sum_{n\geqslant j+1} a_n b^{-n!} \leqslant (b-1) \sum_{n\geqslant j+1} b^{-n!} \\ &< (b-1) \sum_{n\geqslant (j+1)!} b^{-n} = \frac{b}{b^{(j+1)!}} < \frac{1}{q_j^j}. \end{aligned}$$

Em particular, o número

$$l = \sum_{n\geqslant 1} 10^{-n!}$$

é conhecido como a constante de Liouville.

O conjunto $\mathbb{L}$ é motivo de muita pesquisa, pelas interessantes propriedades que ele satisfaz [4]. Por exemplo, $\mathbb{L}$ possui medida de Lebesgue nula (é pequeno no sentido de teoria da medida), mas é grande de um ponto de vista topológico.

De fato, da definição de número de Liouville, podemos mostrar facilmente que, se definimos para cada n inteiro positivo o conjunto

$$U_n = \bigcup_{q\geqslant 2}\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^n},\frac{p}{q}+\frac{1}{q^n}\right)\setminus\{\frac{p}{q}\}$$

logo $\mathbb{L} = \bigcap_{n\geqslant 1} U_n$. Agora, como os U_n são abertos densos na reta real, desde que são abertos que contêm os racionais, segue por definição que $\mathbb{L}$ é um conjunto G_δ. Assim, obtemos por exemplo a propriedade dos números de Liouville ser não enumerável.

Além do mais, P. Erdös mostrou que todo número real pode ser escrito como soma e produto de dois número de Liouville, mostrando, assim, mais uma importância destes números.

Observação 1.2. *Note que o resultado de P. Erdös segue diretamente do fato de* $\mathbb{L}$ *ser* G_δ *(veja a proposição* 1.3*) , mas decidimos mencionar este resultado por ser historicamente mais antigo, surpreendendo a seus colegas da época.*

1.6 Classificação de Mahler

O conjunto dos números complexos é dividido em dois conjuntos: os números algébricos e os números transcendentes. No entanto, esses subconjuntos não têm o mesmo "tamanho", pois apenas um deles é não enumerável. O interessante seria particionar o conjunto dos números transcendentes em subconjuntos disjuntos e não enumeráveis com algumas propriedades interessantes. Em 1932, K. Mahler [16] dividiu os números complexos em quatro classes e chamou os números nestas classes de A-números, $S-$números, $T-$números e $U-$números, como segue:

Vamos considerar polinômios $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ com coeficientes inteiros. A altura $\mathcal{H}(P)$ de P é definida por $\mathcal{H}(P) = \max\{|a_n|, \ldots, |a_0|\}$ e vamos denotar o grau de P por $\deg(P)$.

Dado um número complexo ξ e números naturais n e H, Mahler definiu

$$w_n(H,\xi) := \min_{\substack{\deg(P)\leqslant n\\ \mathcal{H}(P)\leqslant H\\ P(\xi)\neq 0}} |P(\xi)|.$$

O polinômio $P(z) \equiv 1$ satisfaz as condições no mínimo acima, e assim nós temos $0 < w_n(H,\xi) \leqslant 1$. A função $w_n(H,\xi)$ é não crescente em ambos n e H.

[4] Veja [23] para um estudo mais completo das propriedades do conjunto $\mathbb{L}$.

Logo, Mahler considerou

$$w_n(\xi) = \limsup_{H\to\infty} \frac{-\log w_n(H,\xi)}{\log H} \quad \text{e} \quad w(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

A função $w_n(\xi)$ é não decrescente de n. Além do mais, mantêm-se as desigualdades $0 \leqslant w_n(\xi) \leqslant \infty$ e $0 \leqslant w(\xi) \leqslant \infty$. Se $w_n(\xi) = \infty$ para algum inteiro n, considere $\mu(\xi)$ como sendo o menor destes inteiros. Nesse caso, temos que $w_m(\xi) < \infty$ para $m < \mu(\xi)$ e $w_m(\xi) = \infty$ para $m \geqslant \mu(\xi)$. Se $w_n(\xi) < \infty$ para todo n, faça $\mu(\xi) = \infty$. Assim, $\mu(\xi)$ e $w(\xi)$ são unicamente determinados e nunca são finitos simultaneamente. Portanto, temos as seguintes quatro possibilidades para cada ξ, e ξ é chamado, para cada caso, de

$$\begin{aligned}
&A-\text{número, se } w(\xi) = 0,\ \mu(\xi) = \infty\\
&S-\text{número, se } 0 < w(\xi) < \infty,\ \mu(\xi) = \infty\\
&T-\text{número, se } w(\xi) = \infty,\ \mu(\xi) = \infty\\
&U-\text{número, se } w(\xi) = \infty,\ \mu(\xi) < \infty.
\end{aligned}$$

Cada número complexo ξ pertence precisamente a uma dessas quatro classes. Os $A-$números são precisamente os números algébricos. Portanto, os números transcendentes são distribuídos nas três classes disjuntas S, T e U. Se ξ é um $U-$número tal que $\mu(\xi) = m$, então ξ é chamado de U_m-número. Denotemos por $U_m := \{\xi \in U : \mu(\xi) = m\}$ (Note que o conjunto U_1 coincide com o conjunto dos números de Liouville). Obviamente, o conjunto U_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ é uma subclasse de U, e U é a união de todos os conjuntos disjuntos U_m, os quais foram provados a ser não vazios [13].

Em 1939, Koksma [11] fez uma outra clasificação dos números complexos. Ele dividiu os números complexos em quatro classes A^*, S^*, T^*, U^*, como segue:

Suponha que α é um número algébrico e $P(z)$ o polinômio minimal de α tal que seus coeficientes são inteiros, relativamente primos e seu coeficiente líder sendo positivo. Logo, a altura $\mathcal{H}(\alpha)$ de α é definida por $\mathcal{H}(\alpha) = \mathcal{H}(P)$ e o grau $\deg(\alpha)$ de α é definido como o grau de P. Dado um número algébrico ξ e números naturais n e H, Koksma considerou

$$w_n^*(H,\xi) = \min_{\substack{\alpha \text{ algébrico} \\ \deg(\alpha)\leqslant n \\ \mathcal{H}(\alpha)\leqslant H \\ \alpha\neq\xi}} |\xi - \alpha|.$$

Além disso, ele definiu

$$w_n^*(\xi) = \limsup_{H\to\infty} \frac{-\log\big(H w_n^*(H,\xi)\big)}{\log H} \quad \text{e} \quad w^*(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}.$$

A função $w_n^*(H,\xi)$ é não crescente em ambos n e H, e assim $w_n^*(\xi)$ é não decrescente em n. As funções $w_n^*(\xi)$ e $w^*(\xi)$ satisfazem $0 \leqslant w_n^*(\xi) \leqslant \infty$ e $0 \leqslant w^*(\xi) \leqslant \infty$. Se $w_n^*(\xi) = \infty$ para algum inteiro n, seja $\mu^*(\xi)$ o menor de estos inteiros. Se $w_n^*(\xi) < \infty$ para todo n, faça $\mu^*(\xi) = \infty$. Assim, $\mu^*(\xi)$ e $w^*(\xi)$ são unicamente determinados e nunca são finitos simultaneamente. Portanto, temos as seguintes quatro possibilidades para ξ, e ξ é chamado de

$$\begin{aligned}
&A^* - \text{número, se } w^*(\xi) = 0, \mu^*(\xi) = \infty \\
&S^* - \text{número, se } 0 < w^*(\xi) < \infty, \mu^*(\xi) = \infty \\
&T^* - \text{número, se } w^*(\xi) = \infty, \mu^*(\xi) = \infty \\
&U^* - \text{número, se } w^*(\xi) = \infty, \mu^*(\xi) < \infty.
\end{aligned}$$

Cada número complexo ξ pertence precisamente a uma dessas quatro classes. Portanto, os números complexos são distribuídos em quatro classes disjuntas A^*, S^*, T^*, U^*. Seja ξ um U^*-número tal que $\mu^*(\xi) = m$, equivalentemente ao feito por Mahler, vamos denotar por U_m^* o conjunto de todos esses números, i.e., $U_m^* = \{\xi \in U^* : \mu^*(\xi) = m\}$. Obviamente, o conjunto U_m^* $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ é uma subclasse de U^*, e U^* é a união todos os conjuntos disjuntos U_m^*.

As classificações de Koksma e de Mahler são equivalentes, no sentido que qualquer S-número (resp. T-número, U-número) é um S^*-número (resp. T^*-número, U^*-número). Para uma demonstração desse fato, veja [24].

1.7 Altura de números algébricos

Definição 1.7. *Um valor absoluto (arquimediano) sobre um corpo K é uma função real $\| \,.\, \|: K \to [0,\infty)$ que satisfaz as seguintes propriedades*

1. $\| x \| = 0$ *se e somente se* $x = 0$.
2. $\| xy \| = \| x \| \| y \|$.
3. $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

Um valor absoluto não arquimediano satisfaz a condição extra

3'. $\| x + y \| \leqslant \max\{\| x \|, \| y \|\}$.

O conjunto dos números racionais possui o valor absoluto arquimediano

$$|x|_\infty = \max\{x, -x\}.$$

Para cada número primo $p \in \mathbb{Z}$, existe um valor absoluto não arquimediano (usualmente chamado de valor absoluto p-ádico) definido para $x \in \mathbb{Q}^*$ por

$$|x|_p = p^{-\mathrm{ord}_p(x)},$$

onde $\mathrm{ord}_p(x)$ é o único inteiro tal que x pode ser escrito da forma

$$x = p^{\mathrm{ord}_p(x)} a/b \text{ com } a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } p \nmid ab.$$

Para o caso $x = 0$ definimos $|x|_p = 0$ para todo primo p.

OBSERVAÇÃO 1.3. *Dois valores absolutos são ditos equivalentes se definem a mesma topologia. Ostrowski mostrou que todos os valores absolutos em $\mathbb{Q}$ são equivalentes a um dos valores absolutos acima.*

Estendamos esses conceitos para um corpo de números algébricos K, isto é, para um subcorpo de $\mathbb{C}$ que, considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, é de dimensão finita. Seja $|\cdot|$ um valor absoluto não trivial sobre K. A restrição deste valor absoluto a $\mathbb{Q}$ é equivalente ao valor absoluto trivial sobre $\mathbb{Q}$ (neste caso é chamado de arquimediano) ou ao valor absoluto p-ádico (neste caso é chamado de ultramétrico).

Vamos denotar por M_K o conjunto de todos os valores absolutos sobre K.

Agora, em K temos os valores absolutos arquimedianos para cada imersão de K em $\mathbb{C}$, $\sigma : K \to \mathbb{C}$.

$$|x|_\sigma = |\sigma(x)|,$$

onde $|\sigma(x)|$ é o valor absoluto complexo de $\sigma(x)$. Como existem n imersões distintas de K em $\mathbb{C}$, K possui n valores absolutos arquimedianos, onde $n = [K : \mathbb{Q}]$.

Seja p um número primo. O valor absoluto $|.|_p$ em $\mathbb{Q}_p$ (corpo dos número p-ádicos, i.e., o completamento de $\mathbb{Q}$ com respeito ao valor absoluto p-ádico) possui uma única extensão a qualquer extensão finita K de $\mathbb{Q}_p$, pois $\mathbb{Q}_p$ é completo [Veja [8], teorema 1.3]. Esta extensão é dada como segue. Considere $m = [K : \mathbb{Q}_p]$, para $\alpha \in K$, seja

$$N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha) = \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(\alpha) \right)^m$$

a norma do $\mathbb{Q}_p$-endomorfismo de K, que aplica x em αx. A extensão $|.|_p$ do valor absoluto p-ádico de $\mathbb{Q}_p$ a K é definida por

$$|\alpha|_p = \left| N_{K/\mathbb{Q}_p}(\alpha) \right|_p^{1/m}.$$

Além disso, vamos associar a cada $\nu \in M_K$, o valor absoluto

$$\| x \|_\nu = |x|_\nu^{n_\nu},$$

onde $n_\nu = [K_\nu : \mathbb{Q}_\nu]$ e K_ν é o completamento de K com respeito ao valor absoluto ν.

OBSERVAÇÃO 1.4. *Os valores absolutos definidos acima são os únicos sobre um corpo de números algébricos, salvo equivalência. Também é possível mostrar que para todo $x \in K^*$, temos que $\prod_{\nu \in M_k} \| x \|_\nu = 1$ (fórmula do produto).*

Usando os valores absolutos sobre um corpo de números algébricos definidos acima, vamos definir o novo conceito de altura para um número algébrico. Para essa finalidade, precisamos "criar" o ambiente natural onde ela será definida, surgindo o espaço projetivo $\mathbb{P}^n(K)$, definido como

$$\mathbb{P}^n(K) := \left(K^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\}\right) / \sim$$

onde $(\alpha_0,\ldots,\alpha_n) \sim (\beta_0,\ldots,\beta_n)$ se existe algum $\lambda \in K^*$ tal que $\alpha_i = \lambda\beta_i$ para todo $i = 0,\ldots,n$. Um ponto de $\mathbb{P}^n(K)$ é denotado por $[\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n]$.

Denotamos a seguinte correspondência:

Definição 1.8. *A altura (multiplicativa) absoluta em $\mathbb{P}^n$ é a função, $W : \mathbb{P}^*(\overline{\mathbb{Q}}) \to [1,\infty)$ definida por*

$$W(P) = \left[\prod_{\nu \in M_K} \max\{\| x_0 \|_\nu, \ldots, \| x_n \|_\nu\}\right]^{1/[K:\mathbb{Q}]}$$

onde K é algum corpo de números algébricos tal que $P = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K)$. A altura (logarítmica) absoluta em $\mathbb{P}^n$ é a função $w : \mathbb{P}^*(\overline{\mathbb{Q}}) \to [0,\infty)$ definida por

$$w(P) = \log W(P).$$

Com as definições acima, definimos a altura de $\alpha \in K$ por usar o ponto $[x : 1] \in \mathbb{P}^n(K)$, isto é, $W(\alpha) = W([\alpha, 1])$ (similarmente definimos $w(\alpha)$).

Essas definições de alturas são devidas a H. Weyl, e a atura $W(\alpha)$ é comumente chamada de altura de Weyl de α.

Observação 1.5. *Note que, da segunda parte da observação 1.4, podemos mostrar que as alturas acimas estão bem definidas, pois não dependem da escolha do representante na classe de equivalência.*

Exemplo 1.7. *Para dois inteiros a, b que são relativamente primos, temos que*

$$W\left(\frac{a}{b}\right) = \max\{|a|, |b|\}.$$

Vejamos algumas propriedades básicas desta altura que serão úteis

Proposição 1.4. *Sejam α_1, α_2 números algébricos, logo*

a) $W(\alpha_1\alpha_2) \leqslant W(\alpha_1)W(\alpha_2)$.

b) $W(\alpha_1 + \alpha_2) \leqslant 2W(\alpha_1)W(\alpha_2)$.

c) Para todo número algébrico $\alpha \neq 0$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$, $W(\alpha^n) = W(\alpha)^{|n|}$.

Demonstração. O item (a) é uma consequência da estimativa

$$\max\{1, xy\} \leqslant \max\{1, x\} \max\{1, y\}$$

para todo $x, y \geqslant 0$. Enquanto a parte (b) segue da desigualdade

$$\max\{1, x+y\} \leqslant 2 \max\{1, x\} \max\{1, y\}$$

para todo $x, y \geqslant 0$. Agora como

$$\max\{1, x^n\} = \max\{1, x\}^n \quad \text{para todo } x > 0, n \in \mathbb{Z}^+,$$

o item (c) se reduz a mostrar que $W(\alpha) = W(1/\alpha)$ para $\alpha \neq 0$, que segue do fato que $\max\{1, x\} = x \max\{1, 1/x\}$ para $x > 0$ e a fórmula do produto. $\square$

Nosso objetivo, agora, é encontrar alguma relação entre a altura de Weyl $W(\alpha)$ e a altura usual $\mathcal{H}(\alpha)$. Com isso em mente, vamos definir a noção de medida de Mahler. Seja $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ um polinômio, não nulo, de grau d:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d = a_d \prod_{i=1}^{d} (z - \alpha_i), \tag{1.3}$$

definimos a medida de Mahler de P por

$$M(P) = \exp\left(\int_0^1 \log \left| P\left(e^{2\pi i t}\right) \right| dt \right).$$

Também definimos a medida de Mahler para um algébrico α como sendo $M(\alpha) = M(P_\alpha)$, onde P_α é o polinômio minimal de α sobre $\mathbb{Z}$.

LEMA 1.4. *Dado o polinômio*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d = a_d \prod_{i=1}^{d} (z - \alpha_i) \in \mathbb{C}[z]$$

temos que

$$\exp\left(\int_0^1 \log \left| P\left(e^{2\pi i t}\right) \right| dt \right) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}$$

Demonstração. Isto é um caso especial da fórmula de Jensen para funções analíticas. Dado que ambos os lados da equação acima são funções multiplicativas em P, é suficiente considerar o caso onde P é uma constante a_0 ou $x - \alpha$. No primeiro caso, ambos os lados resultam sendo $|a_0|$. No outro caso, teríamos que mostrar que, para todo número complexo α tem-se

$$\int_0^1 \log \left| e^{2\pi i t} - \alpha \right| dt = \log \max\{1, |\alpha|\},$$

que segue do fato que a média de uma função harmônica h sobre o bordo do círculo unitário é igual a $h(0)$ (veja, por exemplo, [14, pag. 5-6]). $\square$

Usaremos o seguinte resultado para encontrar a relação entre as alturas:

LEMA 1.5. *Seja α um número algébrico de grau d. Logo*

$$w(\alpha) = \frac{1}{d}\log M(\alpha).$$

Demonstração. Veja [31, lema 3.10] □

LEMA 1.6. *Seja α um número algébrico de grau d, (com polinômio minimal sobre $\mathbb{Z}$ dado por* (1.3)*) logo temos*

$$\frac{1}{d}\log \mathcal{H}(\alpha) - \log 2 \leqslant w(\alpha) \leqslant \frac{1}{d}\log \mathcal{H}(\alpha) + \frac{1}{2d}\log(d+1).$$

Demonstração. Note que a afirmação acima pode ser escrita da forma

$$2^{-d}\mathcal{H}(\alpha) \leqslant M(\alpha) \leqslant \mathcal{H}(\alpha)\sqrt{d+1}.$$

Agora, da identidade que relaciona os coeficientes de um polinômio com suas raízes, temos que

$$a_j = (-1)^j a_d \sum_{1\leqslant s_1<\ldots<s_j\leqslant d} \alpha_{s_1}\ldots\alpha_{s_j}, \quad (1 \leqslant j \leqslant d).$$

Como o número de termos na soma é $\binom{d}{j} \leqslant 2^d$, e usando o lema 1.4, cada um destes termos é limitado por $M(\alpha)/a_d$, obtemos desta forma que $|a_j| \leqslant 2^d M(\alpha)$ para $j = 0, \ldots, d$, donde segue a desigualdade da esquerda.

Para a desigualdade da direita, vamos usar a desigualdade aritmético-geométrico, que implica

$$M(\alpha) \leqslant \int_0^1 \left|P\left(e^{2\pi it}\right)\right| dt.$$

Da desigualdade de Hölder, obtemos que

$$M(\alpha) \leqslant \left(\int_0^1 \left|P\left(e^{2\pi it}\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

estimando $|P\left(e^{2\pi it}\right)|$ obtemos o resultado desejado. □

1.8 Aproximações Diofantinas e o Teorema do Subespaço

Um dos problemas fundamentais na teoria de Aproximações Diofantinas consiste em entender quão bem pode-se aproximar um número real por meio de números racionais ou, mais geralmente, números algébricos. A completude de

$\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ garante que se $\alpha \in \mathbb{R}$, a diferença $|\alpha - p/q|$ pode ser tão pequena quanto quisermos para algum p/q adequado.

Reformulemos nossa pergunta na tentativa de entender com que precisão podemos aproximar a α por meio de racionais, por exemplo, podemos tentar responder para que valores de $\epsilon > 0$ a inequação

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{\epsilon}} \tag{1.4}$$

possui infinitas soluções racionais $p/q \in \mathbb{Q}$ com $q > 0$. Quanto maior for ϵ, mais precisa será a aproximação. Compreender esta pergunta para um número real vai nos permitir estabelecer se dito número é racional ou irracional, ou se ele é algébrico ou transcendente. Técnicas de aproximações diofantinas têm sido aplicadas para resolver problemas de Inequações Diofantinas, Equações Diofantinas, Geometria Diofântica e Teoria de Transcendência.

Nessa linha, sabemos que Liouville 1.9 provou que números algébricos não podem ser "bem aproximados" por racionais, ao mostrar que ϵ da equação (1.4) é menor do que ou igual ao grau do algébrico α. Muitos Matemáticos tentaram melhorar essa estimativa como Thue, Siegel, Dyson, Gelfond, Schneider e Mahler, até que em 1955 K. F. Roth mostrou o seguinte resultado:

TEOREMA 1.10 (Roth). *Seja α um número algébrico irracional, para todo $\epsilon > 0$ a desigualdade*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{|q|^{2+\epsilon}}$$

possui somente um número finito de soluções $p, q \in \mathbb{Z}$.

Esse resultado é o melhor possível, pois pelo teorema de Dirichlet para aproximações diofantinas a desigualdade $|\alpha - p/q| \leqslant |q|^{-2}$ possui infinitas soluções.

Este surpreendente resultado rendeu a medalha Fields a Roth em 1958. Com ajuda deste fato, é possível provar que a constante de Champernowne

$$\mathrm{M} := 0,12345678910111213\ldots$$

é transcendente e não um número de Liouville.

Kurt Mahler, que foi um dois proponentes das aproximações diofantinas p-ádicas, propôs a seu estudante D. Ridout estender o teorema de Roth para domínios não arquimedianos. Para isso, considere S um conjunto finito de primos, incluindo $p = \infty$, e para cada primo $p \in S$ fixamos um número algébrico α_p. Ridout mostrou que para qualquer $\epsilon > 0$ a desigualdade

$$\prod_{p \in S} \min\{1, |\alpha_p - \xi|_p\} < \frac{1}{W(\xi)^{2+\epsilon}}$$

possui um número finito de soluções $\xi \in \mathbb{Q}$.

Uma consequência deste resultado é que a expansão decimal de um número algébrico não pode ter blocos de zeros "muito grandes". Mais precisamente, seja $0.a_1a_2a_3\ldots$ a expansão de um número algébrico, e para cada n defina $l(n)$ como o mínimo $l \geqslant 0$ tal que $a_{n+l} \neq 0$; logo $l(n) = o(n)$ quando $n \to \infty$. Para mostrar isso, aplique o teorema de Ridout com $S = \{2, 5, \infty\}$. Mais geralmente, a expansão decimal de um número algébrico não pode ter blocos periódicos "muito grandes".

Agora temos suficiente motivação para estabelecer o Teorema do Subespaço que, em algum sentido generaliza o teorema de Ridout para o caso n-dimensional. Começamos com o teorema original de Schmidt [Veja [27] para uma prova detalhada].

Teorema 1.11 (Schmidt). *Sejam $L_1, \ldots, L_m$ formas lineares linearmente independentes em m variáveis com coeficientes algébricos reais. Logo, para qualquer $\epsilon > 0$ as soluções $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ da desigualdade*

$$|L_1(\boldsymbol{x}) \ldots L_m(\boldsymbol{x})| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|^{-\epsilon}$$

estão contidas em um número finito de subespaços lineares próprios de $\mathbb{Q}^m$. (onde $\|\boldsymbol{x}\| = \max_i\{|x_i|\}$.)

Pondo $m = 2, L_1(x, y) = x\alpha - y$ e $L_2(x, y) = x$, obtemos o teorema de Roth. O Teorema de Schmidt não é suficiente para várias aplicações. Precisamos de generalizações para domínios não arquimedianos, análogo à generalização de Ridout do teorema de Roth. Este resultado foi obtido por Schlickewei [[26]]. Como anteriormente, seja S um conjunto finito de números primos, incluindo $p = \infty$ e escolha uma extensão de cada valoração p-ádica para $\overline{\mathbb{Q}}$.

Teorema 1.12 (Schlickewei). *Para cada $p \in S$ sejam $L_{1,p}, \ldots, L_{m,p}$ formas lineares linearmente independentes em m variáveis com coeficientes algébricos. Logo, para qualquer $\epsilon > 0$ as soluções $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^m$ da desigualdade*

$$\prod_{p \in S} \prod_{i=1}^{m} |L_{i,p}(\boldsymbol{x})|_p \leqslant \|\boldsymbol{x}\|^{-\epsilon}$$

estão contidos em um número finito de subespaços lineares próprios de $\mathbb{Q}^m$.

Durante a última década, o teorema do Subespaço encontrou muitas aplicações inesperadas, principalmente no análise diofântina e na teoria transcendente, no meio de uma grande variedade de resultados espetaculares.

Podemos mencionar os tópicos:

1. O trabalho de Adamczewski e Bugeaud na complexidade de números algébricos.

2. O trabalho de Corvaja e Zannier em equações diofantinas com soma de potências.

3. O trabalho de Corvaja e Zannier sobre pontos inteiros em curvas e superfícies, e o desenvolvimento subsequente devido a Levin e Autissier.

Esses resultados e outras importantes aplicações do teorema do Subespaço podem ser encontrados no artigo de Y. Bilu [Veja [1]].

Originalmente, Schmidt provou esse teorema pela necessidade de resolver equações diofantinas, como as exponenciais (incluindo a equação exponencial-polinomial e sequências recorrentes lineares). Existem várias generalizações do teorema de Schmidt, das quais a interessante para nossos propósitos é a devida a Schlickewei mencionada acima.

Capítulo 2

Funções Transcendentes e Números de Liouville

Neste capítulo estudaremos alguns problemas relacionados ao comportamento aritmético de funções transcendentes aplicadas em números de Liouville. Veremos como a aproximação por racionais desses números pode nos ajudar a obter informação sobre a natureza aritmética da imagem.

2.1 Problema de Mahler sobre números de Liouville

Os resultados citados no capítulo anterior correspondem a resultados sobre existência de funções inteiras transcendentes com certas propriedades sobre conjuntos enumeráveis, e na prova deles é usada fortemente a enumerabilidade destes conjuntos. K. Mahler começou a perguntar-se sobre resultados nessa linha, mas sobre conjuntos não enumeráveis. O conjunto dos números de Liouville (lembre-se que $\mathbb{L}$ é não enumerável, desde que ele é um conjunto G_δ em $\mathbb{R}$) foi o escolhido por Mahler. Baseado em resultados existentes sobre este conjunto [1].

1) Se $f \in \mathbb{Q}(x)$ é uma função racional não constante, então $f(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$.

2) Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ com interior não-vazio, $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua não localmente constante. Então existe um conjunto não enumerável dos números de Liouville $\xi \in I$ tal que $\phi(\xi) \in \mathbb{L}$.

Em 1984, em um de seus últimos artigos, fez a seguinte pergunta:

- ♦ ***Pergunta 1:*** *Existem funções analíticas transcendentes f tais que $f(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$?*

[1]veja [23] para as demonstrações destes resultados.

Além do mais, ele também diz: "A dificuldade deste problema vem do fato de que o conjunto $\mathbb{L}$ é não enumerável". Este problema ainda continua em aberto. Note que o resultado 2 mencionado acima, é um teorema de existência, não fornece o conjunto. A seguir, mostraremos a existência, de forma explícita, de um subconjunto não enumerável de $\mathbb{L}$, para o qual existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentes aplicando este subconjunto sobre os números de Liouville [2].

Vamos introduzir, agora, algumas notações que serão utilizadas ao longo desta seção. Primeiro, vamos denotar por $\overline{\mathbb{Q}}_m$ o conjunto dos números algébricos reais de grau m.

LEMA 2.1. *Para todo $m \geqslant 1$, o conjunto $\overline{\mathbb{Q}}_m$ é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Defina o conjunto $\mathcal{P}_m := \{Q(1+\sqrt[m]{2}) : Q \in \mathbb{Q}\}$. Note que tal conjunto é denso em $\mathbb{R}$, pois se $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, então existe um $Q \in \mathbb{Q}$ no intervalo $(\frac{a}{1+\sqrt[m]{2}}, \frac{b}{1+\sqrt[m]{2}})$. Portanto, $\mathcal{P}_m \cap (a,b) \neq \emptyset$. Agora, o resultado segue pois $1+\sqrt[m]{2}$ é raiz de $P(x) = (x-1)^m - 2$ que é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, visto que $P(x+1)$ é irredutível pelo critério de Einsentein. $\square$

Além disso, considere a função $\exp^{[3]}(x) := e^{e^{e^x}}$. Com ajuda dessas notações, em [21] nós definimos a seguinte classe de números:

DEFINIÇÃO 2.1. *Um número real ξ é chamado de m-ultra número se existe uma sequência infinita de números algébricos reais de grau m, $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ tais que*

$$0 < |\xi - \alpha_n| < [\exp^{[3]}(\mathcal{H}(\alpha_n))]^{-n}, \text{ para } n = 1, 2, \ldots.$$

O conjunto dos m-ultra números será denotado por $\mathbf{U}_{m-ultra}$.

Da definição de $\mathbf{U}_{m-\text{ultra}}$, podemos ver que estes números são "bem aproximados" por algébricos de grau m, assim é um subconjunto dos $U-$números do tipo no máximo m na classificação de Mahler (ver seção 1.6). Este conjunto é grande, no sentido topológico, como mostra o seguinte resultado.

LEMA 2.2. *O conjunto dos m-ultra números é um conjunto G_δ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Dado que $\overline{\mathbb{Q}}_m$ é um conjunto enumerável, podemos considerar a seguinte enumeração $\overline{\mathbb{Q}}_m = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Chamemos de $d_n := [\exp^{[3]}(\mathcal{H}(\alpha_n))]^{-n}$. Temos que $d_n > 0$ e, portanto, para todo N natural o conjunto V_N definido por

$$V_N := \bigcup_{n>N} (\alpha_n - d_n, \alpha_n + d_n).$$

[2] Em [19], D. Marques e C. Moreira construiram um subconjunto de $\mathbb{L}$ não enumerável aplicado nele mesmo por funções inteiras transcendentes.

é um conjunto aberto denso, desde que $\overline{\mathbb{Q}}_m$ é denso. Note que $(\alpha_n - d_n, \alpha_n + d_n) = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - \alpha_n| < d_n\}$. Além do mais, é claro que

$$\mathbf{U}_{m-\text{ultra}} = \bigcap_{N\geqslant 1} V_N.$$

Portanto, $\mathbf{U}_{m-\text{ultra}}$ é uma interseção enumerável de abertos densos, isto é, $\mathbf{U}_{m-\text{ultra}}$ é um conjunto G_δ em $\mathbb{R}$. □

Usando este último resultado, podemos obter importantes propriedades desta classe de números, que segue direto da seção 1.1.

Corolário 2.1. *O conjunto* $\mathbf{U}_{m-ultra}$ *é não enumerável.*

Corolário 2.2. *Todo número real pode ser escrito como soma de dois m-ultra números.*

A seguir, desejamos mostrar que o problema de Mahler acima é válido para esse conjunto. Para isso, vamos provar um resultado sobre a existência de uma classe de funções. Lembremos que, como $\overline{\mathbb{Q}}_m$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis densos de $\mathbb{R}$, o teorema de Gramain nos assegura a existência de funções analíticas transcendentes ϕ com $\phi(\overline{\mathbb{Q}}_m) \subset \mathbb{Q}$. O próximo teorema fornece uma classe de tais funções, tendo uma cota superior para o denominador de $\phi(\alpha)$ em termos de $\mathcal{H}(\alpha)$. Mais precisamente, temos:

Teorema 2.1. *Para cada inteiro positivo* $m \geqslant 1$, *existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentes* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $|\phi'(x)| < 0.0001$, $\phi(\overline{\mathbb{Q}}_m) \subset \mathbb{Q}$ *e tal que, para todo* $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_m$ *tem-se*

$$den\ (\phi(\alpha)) \leqslant (2q)^{450m^5 2^{18m^2} q^{6m}},$$

onde $q = \mathcal{H}(\alpha)$.

Antes de provar o teorema, veremos alguns fatos que serão úteis na prova.

Lema 2.3. *Para quaisquer* $y, b \in [-1, 1]$ *distintos, temos que*

$$|sen(y - b)| > \frac{|y - b|}{3}.$$

Demonstração. Para mostrar isso, basta observar que a função $\sin(x)/x$ é decrescente para $x \in (0, \pi]$ e que $\frac{\text{sen}(2)}{2} > \frac{1}{3}$. □

Lema 2.4. *Para quaisquer* $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}_m$ *temos que*

$$\mathcal{H}(y - x) \leqslant 2^{4m^2} \mathcal{H}(x)^m \mathcal{H}(y)^m.$$

Demonstração. Pelo lema 1.6, temos que para qualquer $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_m$,

$$\frac{1}{m}\log\mathcal{H}(\alpha) - \log 2 \leqslant w(\alpha) \leqslant \frac{1}{m}\log\mathcal{H}(\alpha) + \frac{1}{2m}\log(m+1).$$

Dessas desigualdades, podemos deduzir facilmente que

$$\frac{1}{2^m}W(\alpha)^m \leqslant \mathcal{H}(\alpha) \leqslant 2^m W(\alpha)^m. \tag{2.1}$$

Além disso, das propriedades da altura de Weyl, mostradas na proposição 1.4, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(y-x) &\leqslant 2^{m^2}W(y-x)^{m^2} \leqslant 2^{2m^2}W(y)^{m^2}W(x)^{m^2}\\ &\leqslant 2^{2m^2}[2^m\mathcal{H}(y)]^m[2^m\mathcal{H}(x)]^m\\ &= 2^{4m^2}\mathcal{H}(x)^m\mathcal{H}(y)^m.\end{aligned}$$

□

COROLÁRIO 2.3. *Para quaisquer $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}_m \cap [0, 1/2]$ distintos, com $\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y) \leqslant n$, temos que*

$$|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| \geqslant \frac{\pi}{2^{4m^2+1}n^{2m+1}}.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $x < y$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe $\xi \in (x, y)$, satisfazendo

$$\begin{aligned}|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| &= \pi|\mathrm{sen}(\pi\xi)|(\pi y - \pi x) \geqslant \mathrm{sen}(\pi x)(\pi y - \pi x)\\ &\geqslant 2\pi x(y-x),\end{aligned}$$

onde usamos o fato que a função $\mathrm{sen}(\pi x)$ é crescente no intervalo $[0, 1/2]$. Agora, se consideramos algum $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_m \cap [0, 1/2]$, com polinômio minimal $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in \mathbb{Z}[x]$, temos que

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant \left|\frac{a_0}{\alpha}\right| \leqslant |a_1| + |a_2|\alpha + \cdots + |a_m|\alpha^{m-1} \leqslant (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1})\mathcal{H}(\alpha),$$

mas como $\alpha \leqslant 1/2$, então $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1} < 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots = 2$. Daí $\alpha \geqslant \frac{1}{2\mathcal{H}(\alpha)}$. Portanto, usando essas estimativas e o lema 2.4 obtemos

$$\begin{aligned}|\cos(\pi x) - \cos(\pi y)| &\geqslant 2\pi x(y-x) \geqslant \frac{\pi}{2\mathcal{H}(x)\mathcal{H}(y-x)}\\ &\geqslant \frac{\pi}{2\mathcal{H}(x)2^{4m^2}\mathcal{H}(x)^m\mathcal{H}(y)^m}\\ &\geqslant \frac{\pi}{2^{4m^2+1}n^{2m+1}}.\end{aligned}$$

□

Lema 2.5. *Para cada $\epsilon > 0$, todo intervalo $[a, b]$ com $b - a > \epsilon$ contém pelo menos dois números racionais com denominador no máximo $\lceil 2/\epsilon \rceil$.*

Demonstração. Denotemos por $m = \lceil 2/\epsilon \rceil$. Da hipóteses segue que $b - a > \epsilon \geqslant 2/m$, logo, para $k = \lfloor ma \rfloor + 1$, temos $ma < k \leqslant ma + 1$, o que implica

$$ma < k < k + 1 \leqslant ma + 2 < ma + m(b - a) = mb.$$

Portanto, $a < k/m < (k + 1)/m < b$. □

A seguir, vamos mostrar um par de resultados sobre transcendência de funções reais, o primeiro fornece um critério de transcendência e o segundo nos fornece informação sobre a transcendência da composição de funções.

Proposição 2.1. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica que assume infinitos valores. Então, f é transcendente.*

Demonstração. Suponha que f seja algébrica, e $P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^i$ seja o polinômio de grau minimal n na variável y tal que $a_n(x)$ possui grau minimal e $P(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_n(x)$ é mônico.

Como f assume infinitos valores, logo $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ não podem ser todos constantes. Sejam l o maior índice com $a_l(x)$ não sendo constante e t o período de f, logo definamos o polinômio

$$\begin{aligned} Q_k(x, f(x)) &:= P(x + tk, f(x + tk)) - P(x, f(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{l} [a_i(x + tk) - a_i(x)] f(x)^i = 0, \end{aligned}$$

para todo $(x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Note que, pela escolha de l, temos que para algum inteiro k_0, $a_l(x + tk_0) - a_l(x)$ é não nulo.

Se $l = n$, então $a_n(x + tk) - a_n(x)$ é não nulo, tendo grau menor do que $a_n(x)$ (pois $a_n(x)$ é mônico), o que contradiz a minimalidade do grau de $a_n(x)$. Agora, se $l < n$, logo $Q_{k_0}(x, f(x)) = 0$ e Q_{k_0} tem grau $l < n$, em y, que contradiz nossa suposição da minimalidade de n. Esta contradição mostra que f não pode ser algébrica. □

Lema 2.6. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função transcendente e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função algébrica não constante. Logo, $f \circ g$ é uma função transcendente.*

Demonstração. Basta notar que, por hipótese, $\mathbb{C}(y, f(y))$ é transcendente sobre $\mathbb{C}(y)$. Tomando $y = g(x)$ temos que $\mathbb{C}(g(x), f(g(x)))$ é transcendente sobre $\mathbb{C}(g(x))$. Portanto, a torre

$$\mathbb{C}(g(x), f(g(x))) \supset \mathbb{C}(g(x)) \supset \mathbb{C}(x)$$

é transcendente, assim $f(g(x))$ é transcendente sobre $\mathbb{C}(x)$. □

Usando os resultados acima, vamos provar o teorema.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1

Demonstração. Considere a seguinte enumeração de $A := \overline{\mathbb{Q}}_m \cap [0, 1/2]$:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$$

construído como segue:

Sejam $\mathcal{S}_k$ o conjunto dos polinômios primitivos e irredutíveis em $\mathbb{Z}[x]$ com grau m e altura k, e $t_k = |\mathcal{S}_k|$. Dado que os módulos dos coeficientes destes polinômios são no máximo k, temos que $t_k \leqslant (m+1)(2k+1)^m$. Considere agora o conjunto $\mathcal{R}_k$, de todas as raízes dos polinômios pertencentes a $\mathcal{S}_k$, restrito ao intervalo $[0, 1/2]$ e defina $l_k := |\mathcal{R}_k|$. Note que, ao considerar polinômios irredutíveis e primitivos na definição dos conjuntos $\mathcal{S}_j$, segue que $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{R}_t = \emptyset$, para $k \neq t$. Logo, $\mathcal{R}_k = \{\gamma_1^{(k)}, \ldots, \gamma_{l_k}^{(k)}\}$ com $\gamma_i^{(k)} < \gamma_{i+1}^{(k)}$, para todo $k \geqslant 1$. Assim, a enumeração desejada é dada por

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \ldots\}.$$

Agora desejamos dar estimativas para a altura dos números algébricos em A, dependendo da posição na enumeração anterior. Apesar de que as estimativas dadas não sejam as melhores, elas vão ser suficientes para nossos propósitos.

Seja $\alpha_n \in \mathcal{R}_{k+1}$. Por definição, temos que $\mathcal{H}(\alpha_n) = k+1$. Assim, obtemos $n \leqslant l_1 + \cdots + l_{k+1} \leqslant t_1 + \cdots + t_{k+1} \leqslant (m+1)(2k+3)^{m+1}$, daí

$$\mathcal{H}(\alpha_n) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt[m+1]{\frac{n}{m+1}} - 2. \tag{2.2}$$

Por outro lado, $n \geqslant l_1 + \ldots + l_k$. Seja j um número ímpar com $4 < j \leqslant k$, logo $l_j \geqslant 1$ (pois $(2/j)^{(1/m)} \in \mathcal{R}_j$). Assim, no caso que $k \geqslant 5$, temos que $n \geqslant \lfloor \frac{k-4}{2} \rfloor > \frac{k-6}{2}$ e, portanto, $\mathcal{H}(\alpha_n) < 2n + 7$ para todo $n \geqslant 1$, pois para os casos $k = 1, 2, 3, 4$ esta desigualdade é satisfeita automaticamente.

Agora vamos construir a função desejada de forma indutiva:

Defina $B_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ com $y_k := \cos(\pi\alpha_k)$. Considere $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$h(z) = g\big(\cos(\pi z)\big),$$

onde

$$g(y) = \sum_{n \geqslant 1} c_n g_n(y), \text{ com } g_n(y) = \prod_{b \in B_n} \operatorname{sen}(y - b).$$

Primeiro, desejamos impor condições sobre os coeficientes c_n para garantir que a função h defina uma função inteira. Para isso, considere $c_n = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant 5$ e

$|c_n| < n^{-n}$ para todo $n \geqslant 6$. Desse modo, para todo y que pertence à bola aberta $B(0, R)$ temos que

$$|g_n(y)| < \prod_{b \in B_n} e^{|y-b|} \leqslant e^{n(R+1)}.$$

Portanto, $|c_n g_n(y)| < \left(e^{R+1}/n\right)^n$. Implicando que g (e daí h) define uma função inteira, desde que a série $g(y) = \sum c_n g_n(y)$, que define g, converge uniformemente sobre todas estas bolas (M-teste de Weierstrass).

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a restrição de h a $\mathbb{R}$. Em particular, f é analítica e

$$|f'(x)| \leqslant \sum_{n \geqslant 6} |c_n| n \leqslant \sum_{n \geqslant 6} \frac{1}{n^{n-1}} < 0.0002,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora vamos escolher indutivamente os coeficientes c_n's de forma conveniente tal que f satisfaça:

$$f(\alpha_k) \in \mathbb{Q}, \quad \mathrm{den}(f(\alpha_k)) < (72m^2(6q)^{4m})^{10m^3(6q)^{2m}},$$

para todo $k \geqslant 1$, onde $q = \mathcal{H}(\alpha_k)$.

Suponha que $c_1, \ldots, c_{n-1}$ foram escolhidos tais que $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ possuem as propriedades desejadas. Note que as escolhas de $c_1, \ldots, c_{n-1}$ determinam os valores de $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$, independentemente dos valores de c_k, $k \geqslant n$, desde que $g_k(\alpha_n) = 0$, para $k \geqslant n$. Em particular, como $c_k = 0$ para $1 \leqslant k \leqslant 5$, temos que $f(\alpha_n) = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant 6$. Agora vamos escolher c_n tal que $f(\alpha_{n+1})$ satisfaça os requerimentos.

Seja $t \leqslant n$ um inteiro positivo com $n \geqslant 5$. Logo, pelas estimativas acima, $\mathcal{H}(\alpha_{n+1}), \mathcal{H}(\alpha_t) \leqslant 2n + 9$. Como a função cosseno é injetiva no intervalo $[0, \pi/2]$, segue que $\cos(\pi\alpha_{n+1}) \neq \cos(\pi\alpha_t)$, desta forma, pelo corolário 2.3

$$|y_{n+1} - y_t| \geqslant \frac{\pi}{2^{4m^2+1}(2n+9)^{2m+1}}.$$

Portanto, usando o lema 2.3

$$|\mathrm{sen}(y_{n+1} - y_t)| > \frac{|y_{n+1} - y_t|}{3} \geqslant \frac{\pi/3}{2^{4m^2+1}(2n+9)^{2m+1}},$$

daí

$$|g_n(y_{n+1})| > \left(\frac{\pi/3}{2^{4m^2+1}(2n+9)^{2m+1}}\right)^n.$$

Assim, $c_n g_n(y_{n+1})$ percorre um intervalo de comprimento maior do que

$$2\pi^n(3n)^{-n}2^{-n(4m^2+1)}(2n+9)^{-3mn}.$$

Agora, do lema 2.5, podemos escolher (no mínimo de duas maneiras) $c_n \neq 0$ tal que $g(y_{n+1})$ seja um número racional com denominador no máximo $n^n 2^{n(4m^2+1)}(2n+9)^{3mn}$. Portanto, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\operatorname{den}(f(\alpha_k)) &= \operatorname{den}(g(\cos(\pi\alpha_k))) = \operatorname{den}(g(y_k)) \\
&\leqslant (k-1)^{k-1} 2^{(k-1)(4m^2+1)}(2k+7)^{3m(k-1)} \\
&< k^k 2^{k(4m^2+1)}(2k+7)^{3mk}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Além disso, da equação (2.2), obtemos que $k \leqslant (2q+4)^{m+1}(m+1)$, onde $q := \mathcal{H}(\alpha_k)$. Substituindo esta estimativa na desigualdade (2.3) temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{den}(f(\alpha_k)) &< \left[(2q+4)^{m+1}(m+1)\right]^{(2q+4)^{m+1}(m+1)} 2^{(2q+4)^{m+1}(m+1)(4m^2+1)} \\
&\quad \times \left[2(2q+4)^{m+1}(m+1)+7\right]^{3m(2q+4)^{m+1}(m+1)} \\
&< \left[72m^2(6q)^{4m}\right]^{10m^3(6q)^{2m}}.
\end{aligned}$$

Agora, considere a função $\psi(x) := \frac{x}{2(1+x^2)}$. Note que $\psi(\overline{\mathbb{Q}}_m) \subset \overline{\mathbb{Q}}_m \cap [0,1/2]$. Portanto, a função desejada será $\phi := f \circ \psi$. De fato, $\phi(\overline{\mathbb{Q}}_m) \subset \mathbb{Q}$, $|\phi'(x)| = |f'(\psi(x))||\psi'(x)| < 0.0001$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Além do mais, pelo argumento acima, se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_m$, então

$$\operatorname{den}(\phi(\alpha)) = \operatorname{den}(f(\psi(\alpha))) < \left[72m^2(6t)^{4m}\right]^{10m^3(6t)^{2m}},$$

onde $t = \mathcal{H}(\psi(\alpha))$. Por outro lado, usando a relação (2.1) e as duas últimas estimativas na proposição 1.4, obtemos que $t \leqslant 2^{6m}q^3$, onde $q = \mathcal{H}(\alpha)$. De fato

$$\begin{aligned}
t = \mathcal{H}(\psi(\alpha)) &\leqslant 2^m W\left(\frac{\alpha}{2(1+\alpha^2)}\right)^m \leqslant 2^m W(\alpha)^m W(2(1+\alpha^2))^m \\
&\leqslant 2^{3m} q \left[W(1+\alpha^2)\right]^m \leqslant 2^{4m} q W(\alpha)^{2m} \\
&\leqslant 2^{6m} q^3.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{den}(\phi(\alpha)) &< \left[72m^2(6t)^{4m}\right]^{10m^3(6t)^{2m}} \\
&\leqslant \left[72m^2(6\cdot 2^{6m}q^3)^{4m}\right]^{10m^3(6.2^{6m}q^3)^{2m}} \\
&< (2q)^{450m^5 2^{18m^2} q^{6m}}.
\end{aligned}$$

Note que, como existe uma árvore binária de diferentes possibilidades para construir a função f (se temos escolhido $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, diferentes escolhas de c_n

dão diferentes valores de $f(y_{n+1})$, que não depende dos valores de c_k para $k > n$, e assim diferentes funções f), portanto, existe uma quantidade não enumerável de funções f e, logo, uma quantidade não enumerável de funções ϕ (já que ψ não é constante).

Resta mostrar que todas as funções construídas acima são transcendentes. De fato, como f é uma função contínua e não constante, temos que f assume infinitos valores. Agora, já que f é periódica (de período 2), segue que f é transcendente, pela proposicão 2.1. Além do mais, $\phi = f \circ \psi$ é transcendente desde que ψ é uma função racional não constante (veja lema 2.6). Isto conclui a prova. $\square$

Usando o teorema 2.1, provaremos que o problema de Mahler é válido para o conjunto $\mathbf{U}_{m-\text{ultra}}$. Mais precisamente

Teorema 2.2. *Existe uma quantidade não enumerável de funções analíticas transcendentes* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\phi(\mathbf{U}_{m-ultra}) \subset \mathbb{L}$.

Demonstração. Dado um m-ultra número ξ, existem infinitos $\alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}_m$, com altura no mínimo $\max\{m, 8\}$ e tal que

$$0 < |\xi - \alpha_n| < \frac{1}{[\exp^{[3]}(\mathcal{H}(\alpha_n))]^n}, \text{ para } n = 1, 2, \ldots.$$

Seja ϕ uma função como no teorema 2.1. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$\begin{aligned} 0 < |\phi(\xi) - \phi(\alpha_n)| &\leqslant 0.0001|\xi - \alpha_n| \\ &< \frac{1}{[\exp^{[3]}(\mathcal{H}(\alpha_n))]^n}. \end{aligned}$$

Note que a primeira desigualdade acima resulta do fato que $\phi'(x) = f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) \neq 0$, para x pertencendo a uma vizinhança de ξ, pois $\psi'(x) \neq 0$ (já que $\psi'(x) = 0$ implica $x = \pm 1$) e $f'(x) \neq 0$ (dado que f é a restrição de uma função inteira h não identicamente nula). Agora sabemos que $\phi(\alpha_n) = p_n/q_n$ satisfazendo

$$q_n \leqslant (2t_n)^{450m^2 2^{18m^2} t_n^{6mn}}, \text{ onde } t_n = \mathcal{H}(\alpha_n).$$

Como $t_n \geqslant \max\{m, 8\}$, uma conta simples mostra que $q_n \leqslant \exp^{[3]}(t_n)$ e, portanto,

$$\left|\phi(\xi) - \frac{p_n}{q_n}\right| = |\phi(\xi) - \phi(\alpha_n)| < \frac{1}{q_n^n}, \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

Isso implica que $\phi(\xi)$ é um número de Liouville, como desejamos. $\square$

Observação 2.1. *Em particular,* $\mathbf{U}_{1-ultra}$ *é um subconjunto não enumerável dos números de Liouville aplicando em números de Liouville por funções analíticas transcendentes. Isso dá uma "intuição" de que a pergunta de Mahler poderia ter resposta positiva.*

2.2 Funções transcendentes sobre conjuntos de Erdös-Mahler

Nesta seção vamos mostrar que, dadas certas condições nos convergentes de um número de Liouville, podemos construir funções analíticas transcendentes na bola unitária para uma quantidade infinita de subconjuntos G_δ dos números de Liouville. Essa restrição vai nos permitir "controlar" o comportamento destas funções de tal maneira que a imagem continue sendo números de Liouville.

Kurt Mahler e Paul Erdös estudaram o comportamento de certa classe de números, nos quais seus aproximantes que vêm da fração contínua satisfazem a propriedade que são divisíveis apenas por uma quantidade finita de primos.

Mais precisamente, dado um número real α, considere sua expressão por fração contínua da forma:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Vamos definir

$$\frac{A_n}{B_n} := [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \tag{2.4}$$

Os racionais A_n/B_n são chamados de convergentes de α e os inteiros a_n são chamados de quocientes parciais. Observamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$ se, e somente se, a expansão em fração continua é finita [18, Teorema 2.1].
Recomendamos ao leitor o livro [2] para um estudo mais detalhado sobre o assunto de frações contínuas.

Com essas definições, em 1939, em [6], eles provaram o seguinte resultado:

TEOREMA 2.3 (Erdös-Mahler). *Suponha que para infinitos índices distintos*

$$n = n_1, n_2, n_3, \ldots$$

os denominadores B_{n-1}, B_n, B_{n+1} de três convergentes consecutivos de α são divisíveis apenas por um conjunto finito de primos. Então, α é um número de liouville.

O resultado acima motivou a seguinte questão:

- ***Conjectura de Erdös-Mahler:*** *Seja ξ um número real transcendente, para o qual existe um número positivo M e infinitos convergentes A_n/B_n tal que o maior fator primo de A_nB_n é menor que M. Então, ξ é um número de Liouville.*

Esse problema ainda continua em aberto, mas ele motivou o estudo dessa classe de números. Por exemplo, podemos mencionar que, em 1965, Fraenkel e Borosh mostraram que o conjunto de números com a propriedade da pergunta acima, possui dimensão de Hausdorff nula [Veja [7]]. Nessa linha, cabe mencionar que, em [12], J. Lelis e D. Marques provaram que a conjectura é verdadeira se assumimos um certo crescimento nos índices dos convergentes com esta propriedade.

Considere, agora, um subconjunto com esta propriedade, definido como segue:

Sejam $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ sequências de inteiros positivos que tendem para o infinito. Para um inteiro $k\geqslant 1$ definimos o conjunto

$$\mathbb{L}^k_{p,q}=\{\xi\in\mathbb{R}:0<\left|\xi-\frac{p^{s_n}}{q^{t_n}}\right|<\frac{1}{q^{t_n^k}}\}$$

com p,q sendo primos distintos.

Note que estamos pondo uma convergência "rápida" nos aproximantes, para que dessa maneira ela satisfaça a conjectura acima. Isto é, para qualquer inteiro $k\geqslant 1$ e p,q primos distintos, segue-se que $\mathbb{L}^k_{p,q}\subset\mathbb{L}$.

O conjunto definido acima, é grande no sentido topológico como mostra o seguinte resultado:

Lema 2.7. *Dado um inteiro $k\geqslant 1$ e p,q primos distintos, o conjunto $\mathbb{L}^k_{p,q}$ é G_δ em $\mathbb{R}$, portanto, é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que p,q são primos distintos, assim, $\log p$ e $\log q$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Caso contrário $p^a=q^b$ para alguns inteiros a,b, o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética. Logo, suponha que $\alpha:=\log p/\log q\in\overline{\mathbb{Q}}$, então teríamos que $\log p-\alpha\log q=0$, contrariando o corolário 1.3. Essa contradição mostra, em particular, que $\alpha\notin\mathbb{Q}$.

Portanto, do Teorema de aproximação de Kronecker, temos que o conjunto $\{m\alpha+n:m,n\in\mathbb{Z}\}$ é denso em $\mathbb{R}$. Agora, como a função exponencial é injetora, temos que o conjunto

$$\{p^a/q^b:a,b\in\mathbb{Z}\}$$

também é denso em $\mathbb{R}$. Então, se definimos o conjunto

$$U_N=\bigcup_{n>N}\left(\frac{p^{s_n}}{q^{t_n}}-\frac{1}{q^{t_n^k}},\frac{p^{s_n}}{q^{t_n}}+\frac{1}{q^{t_n^k}}\right)\setminus\{\frac{p^{s_n}}{q^{t_n}}\}$$

obtemos que U_N é um aberto denso de $\mathbb{R}$ para cada $N\in\mathbb{N}$. Para concluir a demonstração, basta notar que

$$\mathbb{L}^k_{p,q}=\bigcap_{N\geqslant 1}U_N.$$

$\square$

Por que definimos este conjunto? Vamos mostrar que se restringimos nosso estudo ao intervalo $(-1,1)$, podemos construir funções analíticas transcendentes satisfazendo o problema de Mahler sobre esses conjuntos.

Antes de enunciar o teorema, lembremos uma definição: Seja $P \in \mathbb{C}[z]$, definimos o comprimento do polinômio P, como a soma dos valores absolutos dos coeficientes de P, que será denotado por $L(P)$. Temos claramente que $|P(z)| \leqslant L(P)\max\{1,|z|\}^{\deg \mathrm{P}}$ e que se $Q \in \mathbb{C}[z]$, então $L(PQ) \leqslant L(P)L(Q)$.

TEOREMA 2.4. *Dado um inteiro $k \geqslant 7$, existe uma função analítica na bola unitária, transcendente f tal que $f\left(\mathbb{L}^k_{p,q} \cap (-1,1)\right) \subset \mathbb{L}$.*

Demonstração. Considere a enumeração de:

$$\{\frac{p^s}{q^t} \in (0,1),\ s,t \in \mathbb{Z}^+\} = \{\frac{1}{q}, \frac{p}{q}, \dots, \frac{p^{x_1}}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots, \frac{p^{x_2}}{q^2}, \dots\} = \{r_1, r_2, \dots\},$$

onde x_i é o maior inteiro positivo tal que $p^{x_i}/q^i < 1$. Agora, como $p^s/q^t < 1$ então $s \leqslant t\frac{\log q}{\log p}$. Portanto, se $r_k = \frac{p^s}{q^t}$, denotando por $\alpha := \log q/\log p$ temos que

$$k \leqslant \sum_{i=1}^{t}(x_i+1) \leqslant \alpha\sum_{i=1}^{t}(i+1) = \alpha\left[\frac{t(t+3)}{2}\right]. \tag{2.5}$$

Considere os polinômios:

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= (z^2 - r_1^2)\\
P_2(z) &= (z^2 - r_1^2)(z^2 - r_2^2)\\
&\vdots\\
P_k(z) &= (z^2 - r_1^2)(z^2 - r_2^2)\dots(z^2 - r_k^2).
\end{aligned}$$

e defina a funcão

$$f(z) = \sum_{k\geqslant 1} a_k z^{2k^2} P_k(z),$$

onde $a_k = 2^{-2k}$, para todo $k \geqslant 1$. Note que $f(z)$ é lacunária, pois $2(k+1)^2 - 2k^2 - 2k = 2k+2$ tende para o infinito quando k cresce. Daí f define uma função transcendente.

Agora, da definição dos polinômios P_k, temos que $L(P_k) \leqslant 2^k$. Daí se $z \in B(0,R)$ com $R < 1$ temos que

$$|a_k z^{2k^2} P_k(z)| \leqslant \frac{L(P_k)}{2^{2k}} \leqslant \frac{1}{2^k},$$

assim, f é uma função analítica na bola unitária, desde que a série que define f converge uniformemente em cada uma dessas bolas.

A seguir, suponha que $r_{k+1} = \frac{p^s}{q^t}$ então

$$f\left(\frac{p^s}{q^t}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{2j}} \left(\frac{p^s}{q^t}\right)^{2j^2} P_j\left(\frac{p^s}{q^t}\right)$$

donde,

$$den\left[f\left(\frac{p^s}{q^t}\right)\right] \leqslant q^{2k^2t+2kt+2k^2} \leqslant q^{2(k+1)^2(t+1)}.$$

Usando a equação (2.5) obtemos que, para t suficientemente grande,

$$den\left[f\left(\frac{p^s}{q^t}\right)\right] \leqslant q^{t^6}.$$

Portanto, se tomamos um $\xi \in \mathbb{L}^k_{p,q}$ com $k \geqslant 7$, pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left|f(\xi) - f\left(\frac{p^{s_n}}{q^{t_n}}\right)\right| \leqslant C\left|\xi - \frac{p^{s_n}}{q^{t_n}}\right| < \frac{C}{q^{t_n^k}} = \frac{C}{[q^{t_n^6}]^{t_n^{k-6}}},$$

assim, definindo $\gamma_n := f(p^{s_n}/q^{t_n}) \in \mathbb{Q}$ temos, das últimas duas estimativas, que

$$|f(\xi) - \gamma_n| \leqslant \frac{C}{\text{den } \gamma_n^{t_n^{k-6}}}.$$

Finalmente, dado que $k \geqslant 7$, a sequência t_n^{k-6} diverge e, assim, $f(\xi) \in \mathbb{L}$ como queriamos. $\square$

Dessa maneira, cada escolha de primos p, q fornece um conjunto "grande" de Erdös-Mahler para o qual é válida a conjectura mencionada.

Capítulo 3

Conjuntos Excepcionais de Funções Transcendentes

Definição 3.1. *Seja f uma função inteira. O conjunto excepcional de f, denotado por S_f, é definido por*

$$S_f = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

Na teoria transcendente dos números, é de muito interesse estudar o seguinte problema: Dada uma função inteira f, determinar o conjunto S_f, ou, pelo menos, encontrar propriedades desse conjunto.

Em geral, esse problema não é simples. Existem vários resultados nesta direção, sugerimos ao leitor o livro [14, cap.4] para o cálculo de alguns conjuntos excepcionais, quando $f(z)$ satisfaz uma equação diferencial algébrica, obtendo como casos particulares a transcendência de π e e.

Exemplo 3.1. *Considere a função $f_1(z) = e^{(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)}$, então o teorema de Lindemann implica que $S_{f_1} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Usando o teorema de Lindemann-Weierstrass pode-se mostrar que $S_{f_2} = \emptyset$, onde $f_2(z) = e^z + e^{z+1}$.*

Exemplo 3.2. *Seja a função $f_3(z) = e^{\pi z+1}$, o teorema de Baker mostra que $S_{f_3} = \emptyset$. Além disso, se assumimos que a conjectura de Schanuel é verdadeira, o conjunto excepcional das funções $f_4(z) = sen(\pi z)e^z$, $f_5(z) = 2^{2^z}$ é o conjunto dos números inteiros.*

Vejamos, com o resultado seguinte, uma das propriedades do conjunto excepcional de funções algébricas.

Proposição 3.1. *Suponha que f é inteira e algébrica, então $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$ ou S_f é finito.*

Demonstração. Como f é inteira e algébrica, então, pelo teorema 1.5 temos que ela é um polinômio. Seja

$$f(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$$

Se $f(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z]$, claramente $S_f = \overline{\mathbb{Q}}$ (pois $\overline{\mathbb{Q}}$ é um corpo). A outra possibilidade é que pelo menos um dos a_j's seja transcendente, digamos a_k. Vamos mostrar que neste caso S_f é finito. Caso contrário, existiriam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \overline{\mathbb{Q}}$ distintos, e tais que $f(\alpha_j) = \beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}$, para $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Escrevendo em notação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n+1} & \ldots & \alpha_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

Como a matriz $A = (\alpha_i^j)_{1 \leqslant i \leqslant n+1, 0 \leqslant j \leqslant n}$ é de Vandermonde, temos que seu determinante

$$\det A = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} (\alpha_i - \alpha_j)$$

é não nulo, pois os α's são distintos. Assim, A é invertível. Sabemos que

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det M_{ij},$$

onde M_{ij} é definida como a submatriz de A obtida por remover a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A. Segue-se que as entradas de A^{-1} são números algébricos. No entanto, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

Daí, $a_k = \sum_{j=1}^{n+1} (A^{-1})_{kj} \beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}$, contradizendo a transcendência de a_k. Portanto, $|S_f| < \infty$. □

Outra pergunta interessante a respeito desses conjuntos é: quando um conjunto de números algébricos é conjunto excepcional de alguma função inteira? Chamaremos esses conjuntos de *conjuntos excepcionais*. Do primeiro exemplo acima, os conjunto finitos de algébricos são conjuntos excepcionais, assim como também o conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$. Que outros conjuntos o são? Esse é o foco deste capítulo.

Dado o resultado acima, sabemos que os conjuntos excepcionais das funções inteiras algébricas estão bem caraterizadas. Portanto, vamos restringir nosso estudo às funções transcendentes.

3.1 Mahler e os conjuntos excepcionais

K. Mahler [14] estudou condições suficientes para que um conjunto de números algébricos seja o conjunto excepcional de alguma função inteira transcendente. Para entender o estudo de Mahler nessa direção, vamos dar algumas definições e resultados:

Definição 3.2. *Uma série de potências $f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k \in \mathbb{Z}[[z]]$ fortemente lacunária com raio de convergência R_f (note que obviamente $0 < R_f \leqslant 1$) é chamado de admissível.*

Desejamos agora um teste simples para decidir quando o valor $f(\alpha)$ é algébrico ou transcendente para $|\alpha| < R_f$. A resposta depende do comportamento dos polinômios

$$P_n(z) = \sum_{k=t_n}^{s_{n+1}} a_k z^k, \tag{3.1}$$

onde as sequências $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ satisfazem as condições da definição 1.5.

O critério de transcendência para este tipo de funções em pontos algébricos foi dado por Mahler em [15]. Para provar isso, necessitaremos do seguinte lema (onde $L(A)$ denota, como antes, o comprimento do polinômio $A \in \mathbb{Z}[z]$, isto é, a soma dos valores absolutos dos coeficientes de A):

Lema 3.1. *Seja α um número algébrico que satisfaz a equação $A(\alpha) = 0$, onde $A(z) = A_0 + A_1 z + \cdots + A_M z^M$ ($A_M \neq 0$) é um polinômio irredutível com coeficientes inteiros. Se $a(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ é um segundo polinômio com coeficientes inteiros, então ou $a(\alpha) = 0$ ou $|a(\alpha)| \geqslant (L(a)^{M-1} L(A)^m)^{-1}$.*

Demonstração. Ver [9]. □

Proposição 3.2 (Mahler). *Seja $f(z)$ uma serie de potências admissível, e seja α um número algébrico satisfazendo $|\alpha| < R_f$. A valor $f(\alpha)$ é algébrico se e somente se existe um inteiro positivo $N = N(\alpha)$ tal que*

$$P_n(\alpha) = 0, \quad \textit{para todo } n \geqslant N.$$

Demonstração. Se $P_n(\alpha) = 0$, para todo $n \geqslant N$, então $f(z)$ seria um polinômio. Daí, como $\overline{\mathbb{Q}}$ é algebricamente fechado, temos que $f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Suponha, agora, que $f(\alpha) = \sum_{k\geqslant 0} a_k \alpha^k =: \beta^{(0)}$ é um número algébrico, digamos de grau l sobre o corpo dos números racionais. Sejam

$$\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(l-1)}$$

seus conjugados, e c_0 um inteiro positivo tal que os produtos $c_0\beta^{(0)}, c_0\beta^{(1)}, \ldots, c_0\beta^{(l-1)}$ são inteiros algébricos. Denotamos por $c_1, c_2, \ldots$ constantes positivas que dependem de $\alpha, \beta^{(0)}, \ldots, \beta^{(l-1)}$, mas independente de n. Em particular, escolhemos c_1 tal que

$$|\alpha| < \frac{1}{c_1} < R_f, \text{ portanto } c_1 > 1, \ |c_1\alpha| < 1, \tag{3.2}$$

e c_2 tal que

$$|a_k| \leqslant c_1^k c_2 \text{ para todo } k \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Definamos os polinômios

$$p_{n\lambda}(z) := -\beta^{(\lambda)} + \sum_{k=0}^{s_n} a_k z^k \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, l-1) \tag{3.4}$$

e

$$p_n(z) = c_0^l \prod_{\lambda=0}^{l-1} p_{n\lambda}(z).$$

Logo, $p_n(z)$ é um polinômio em z de grau ls_n com coeficientes inteiros. Desta maneira,

$$L(p_n) \leqslant c_0^l \prod_{\lambda=0}^{l-1} L(p_{n\lambda}).$$

Agora, das estimativas acima, (3.2) e (3.3), obtém-se

$$L(p_{n\lambda}) \leqslant |\beta^{(\lambda)}| + \sum_{k=0}^{s_n} |a_k| \leqslant c_1^{s_n} c_3 \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, l-1).$$

Portanto,

$$L(p_n) \leqslant c_1^{ls_n} c_4. \tag{3.5}$$

Como α é algébrico, é uma raiz de uma equação irredutível $A(\alpha) = 0$, onde $A(z)$ é, digamos, de grau M. Aplicando o lema 3.1 com $a(z) = p_n(z)$, deduzimos de (3.5) que ou $p_n(\alpha) = 0$ ou

$$|p_n(\alpha)| \geqslant \left[(c_1^{lt_n} c_4)^{M-1} L(A)^{ls_n}\right]^{-1} \geqslant c_5^{-ls_n}.$$

Mas esta última desigualdade não pode se manter se n for suficientemente grande, pois da definição de $\beta^{(0)}$ e das equações (3.3), (3.4) temos que

$$|p_{n0}(\alpha)| = \left| \sum_{k \geqslant t_n} a_k \alpha^k \right| \leqslant |c_1 \alpha|^{t_n} c_6.$$

Além disso, como α está dentro da região de convergência de f, $|p_{n\lambda}(\alpha)| \leqslant c_7$ para $\lambda = 1, \ldots, l-1$. Combinando essas estimativas obtemos

$$|p_n(\alpha)| \leqslant c_0^l |c_1 \alpha|^{t_n} c_6 c_7^{l-1} < c_5^{-ls_n}$$

para n suficientemente grande, desde que $t_n/s_n \to \infty$ e por (3.2), temos $|c_1 \alpha| < 1$.

Consequentemente, existe um inteiro N_0 tal que $p_n(\alpha) = 0$ para todo $n \geqslant N_0$. Isto implica que, para cada inteiro $n \geqslant N_0$, existe um sufixo λ_n que tem um dos valores $0, 1, \ldots, l-1$ tal que

$$\sum_{k=0}^{s_n} a_k \alpha^k = \beta^{\lambda_n}.$$

Assim,

$$P_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{s_{n+1}} a_k \alpha^k - \sum_{k=0}^{s_n} a_k \alpha^k = \beta^{(\lambda_{n+1})} - \beta^{(\lambda_n)}, \quad \text{se } n \geqslant N_0. \tag{3.6}$$

Agora $f(\alpha)$ é uma série convergente, segue que $P_n(\alpha) = o(1)$. Por outro lado, os conjugados de $\beta^{(0)}$ são todos distintos, logo, existe um inteiro $N \geqslant N_0$ com a propriedade que $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ se $n \geqslant N$. De (3.6), isto implica que $P_n(\alpha) = 0$ se $n \geqslant N$ como queríamos mostrar. $\square$

Usando essa caracterização, K. Mahler conseguiu dar uma condição suficiente para que um subconjunto dos algébricos seja excepcional de alguma função inteira transcendente. Para isso, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.3. *Seja Σ um conjunto de números algébricos, S um subconjunto de Σ. Para cada elemento α de Σ denote por $A(\alpha)$ o conjunto de todos os conjugados algébricos $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ de α que pertencem a Σ. Dizemos que o conjunto S é completo relativo a Σ se*

$$\alpha \in S \text{ implica que } A(\alpha) \subset S.$$

Considere uma série de potências admisível $f(z)$. Denote por Σ_f o conjunto de todos os números algébricos α satifazendo $|\alpha| < R_f$ e por S_f o conjunto de todos os $\alpha \in \Sigma$ para os quais $f(\alpha)$ é algébrico.

Lema 3.2. *Se $f(z)$ é admissível, logo S_f é completo relativo a Σ_f.*

Demonstração. Seja $\alpha \in S_f$. Denote por $q(z)$ o polinômio irredutível primitivo com coeficientes inteiros e maior coeficiente positivo com $q(\alpha) = 0$. Pela proposição 3.2,

$$P_n(\alpha) = 0 \text{ para } n \geqslant N,$$

e, portanto, $P_n(z)$ é divisível por $q(z)$ para todo $n \geqslant N$. Agora, se α' é algum conjugado de α, temos que $P_n(\alpha') = 0$ para todo $n \geqslant N$. Assuma, em particular, que $\alpha' \in \Sigma_f$, daí $f(\alpha')$ converge. Logo, pela proposição 3.2, $f(\alpha')$ é algébrico e, portanto, $\alpha' \in S$. $\square$

Estamos prontos para mostrar o resultado de Mahler.

TEOREMA 3.1 (Mahler). *Sejam R uma constante positiva não maior do que 1, e Σ o conjunto de todos os números algébricos α satisfazendo $|\alpha| < R$; e seja S algum subconjunto de Σ que contém o elemento 0 e que é completo relativo a Σ. Logo, existe uma série de potências admisível $f(z)$ com a propriedade que*

$$R_f = R \text{ e } S_f = S.$$

Demonstração. Como um conjunto de números algébricos, S é enumerável. Portanto é possível definir uma sequência infinita de polinômios $\{q_n(z)\}_{n\geqslant 0}$ satisfazendo as seguintes propriedades.

Se S consiste somente do elemento 0, considere $q_n(z) \equiv 1$ para todo índice n. Se S é um conjunto finito, tome os primeiros termos da sequência como sendo os polinômios irredutíveis e primitivos com maior coeficiente positivo que anulam pelo menos, a um $\alpha \in S$, e pondo os restantes $q_n(z) \equiv 1$. Se, finalmente, S é um conjunto infinito, seja $\{q_n(z)\}_{n\geqslant 0}$ todos os polinômios primitivos, irredutíveis com coeficientes inteiros e coeficiente maior positivo que anula no mínimo a algum $\alpha \in S$.

Agora considere

$$Q_n(z) = q_0(z)q_1(z)\cdots q_n(z), \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

e denote por d_n o grau de $Q_n(z)$; e por $H_n = \mathcal{H}(Q_n)$ (altura de Q_n). Agora escolhemos uma sequência de inteiros $\{s_n\}_{n\geqslant 0}$ onde $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{d_n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} H_n^{1/s_n} = 1 \tag{3.7}$$

e

$$s_{n+1} > s_n + d_n, \text{ para } n = 0, 1, \ldots. \tag{3.8}$$

Portanto, denotando por $t_{n+1} = s_n + d_n$, temos duas sequências $\{t_n\}_{n\geqslant 1}$ e $\{s_n\}_{n\geqslant 0}$ satisfazendo as propriedades

$$0 = s_0 \leqslant t_1 < s_1 \leqslant t_2 < s_2 \leqslant t_3 < s_3 \leqslant \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \infty.$$

Considere $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$ uma sequência de inteiros positivos satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} K_n^{1/s_n} = \frac{1}{R}. \tag{3.9}$$

Desta maneira, definindo os polinômios

$$P_n(z) = K_n Q_n(z) z^{s_n} = \sum_{k=s_n}^{t_{n+1}} a_k z^k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} P_n(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k.$$

Temos que $f(z)$ é uma série de potências fortemente lacunária segundo a definição 1.5, portanto $f(z)$ é transcendente segundo o teorema 1.8. Distintos polinômios $P_n(z)$ evidentemente envolvem diferentes potências de z, assim as contribuções destas potências para $f(z)$ não se superpõem. Para provar que f é admissível temos que provar que o raio R_f de convergência de $f(z)$ é positivo. De fato, sabemos que o raio de convergência pode ser calculado por

$$\frac{1}{R_f} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k},$$

e isto, pelas fórmulas (3.7), é igual a

$$\frac{1}{R_f} = \lim_{\substack{s_n \leqslant k \leqslant t_{n+1} \\ n\to\infty}} |a_k|^{1/s_n}.$$

Além disso, $|a_k| \leqslant H_n K_n$ para $s_n \leqslant k \leqslant t_{n+1}$, com igualdade no mínimo para um índice k neste intervalo. Portanto, das equações (3.7), (3.9) temos que

$$\frac{1}{R_f} = \limsup_{n\to\infty} (H_n K_n)^{1/s_n} = \frac{1}{R},$$

assim $R_f = R > 0$.
A segunda afirmação $S_f = S$ é uma consequência imediata da proposição 3.2 e a construção dos polinômios $P_n(z)$. Para $\alpha \in S$, evidentemente $P_n(z)$, para n suficientemente grande, será divisível pelo polinômio $q_\nu(z)$ que possui α como raiz, daí $\alpha \in S_f$. Por outro lado, se α não é um elemento de S, não existe polinômio $q_\nu(s)$ que se anule em α, donde não existe $P_n(z)$ anulando-se para $z = \alpha$, implicando, nesse caso, que $\alpha \notin S_f$ $(f(\alpha) \notin \overline{\mathbb{Q}})$. $\square$

3.2 Problema de Mahler sobre conjuntos excepcionais

Note que, na demonstração do último resultado da seção anterior, usa-se fortemente o fato de que o conjunto S é completo relativo a $\overline{\mathbb{Q}}$ (isto é, fechado por conjugação algébrica), pois a função construída é dada por produto dos polinômios irredutíveis e primitivos. Portanto, é logico se perguntar se essa hipótese pode ser pulada. Assim, K. Mahler, no ano de 1976, sugeriu a seguinte pergunta

- ***Pergunta 3:*** *Existe, para cada escolha de S, uma série de potências $f(z) \in \mathbb{Q}[[z]]$, tal que $S_f = S$?*

Cabe mencionar que essa pergunta foi parcialmente respondida em [10]: *Todo subconjunto de números algébricos é o conjunto excepcional de alguma função inteira transcendente*(isto respondeu a uma pergunta de Weierstrass). Entretanto, nenhuma informação sobre a natureza aritmética dos coeficientes da série de Taylor de f é obtida nessa construção.

Nosso propósito, agora, é dar uma resposta a essa questão. Vamos mostrar que, de fato, existem essas funções para qualquer subconjunto de números algébricos. A seguinte observação é muito importante.

OBSERVAÇÃO 3.1. *O conjunto S mencionado na pergunta acima precisa ser fechado com respeito à conjugação complexa, pois o conjunto excepcional de uma função inteira com coeficientes racionais deve ser fechado com respeito a esta conjugação, desde que $\overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$.*

Com o objetivo de mostrar que a resposta a essa pergunta é afirmativa, mostramos primeiro um resultado sobre o comportamento de algumas funções em $\mathbb{K}[[z]]$ para um subconjunto denso $\mathbb{K}$.

TEOREMA 3.2. *Sejam A um conjunto enumerável e $\mathbb{K}$ um subconjunto denso de $\mathbb{C}$. Para cada $\alpha \in A$ fixe um subconjunto denso $E_\alpha \subset \mathbb{C}$. Então existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes $f \in \mathbb{K}[[z]]$ tal que $f(\alpha) \in E_\alpha$, para todo $\alpha \in A$.*

Demonstração. Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ uma enumeração de A (sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \notin A$). Vamos construir a função

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \epsilon_n P_n(z),$$

onde $P_n(z) \in \mathbb{K}[z]$ possui grau m_n. Os polinômios P_n e as constantes ϵ_n serão escolhidos convenientemente tal que f satisfaça as condições desejadas. [1]

A primeira condição é $0 < |\epsilon_n| < (L(P_n)m_n!)^{-1} =: t_n$ para todo $n \geqslant 0$. Como $|P_n(z)| \leqslant L(P_n)\max\{1, |z|\}^{m_n}$, segue que para todo z pertencendo à bola aberta $B(0, R)$

$$|\epsilon_n P_n(z)| < \frac{1}{L(P_n)m_n!} L(P_n)\max\{1, R\}^{m_n} = \frac{\max\{1, R\}^{m_n}}{m_n!}.$$

Assim, $f(z)$ é uma função inteira, desde que a série $\sum_{n \geqslant 0} \epsilon_n P_n(z)$, que define f, converge uniformemente em cada uma dessas bolas.

Defina $f_1(z) := \epsilon_0 + \epsilon_1 P_1(z) = \epsilon_0 + \epsilon_1(z - \alpha_1)$, para algum $\epsilon_0 \in E_{\alpha_1} \cap B(0, 1)$ e escolha $\epsilon_1 \in B(0, t_1)$ tal que $a_0 := \epsilon_0 - \epsilon_1\alpha_1 \in \mathbb{K}^*$. Dessa maneira, $f_1(\alpha_1) \in E_{\alpha_1}$ e o termo constante de f_1 pertence a $\mathbb{K}^*$.

[1] Note que, no caso em que $\alpha_1 = 0 \in A$, podemos fazer a mesma construção, sem o coeficiente independente na função f

Seja $f_{2,1}(z)$ a função definida por $f_{2,1}(z) := f_1(z) + \epsilon_2 P_2(z)$ onde o polinômio $P_2(z) := z(z - \alpha_1)$. Logo, $f_{2,1}(\alpha_1) = f_1(\alpha_1) \in E_{\alpha_1}$. Além disso, pela densidade de E_{α_2}, podemos escolher $\epsilon_2 \in B(0, t_2) \setminus \{0\}$ tal que

$$f_{2,1}(\alpha_2) = f_1(\alpha_2) + \epsilon_2 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \in E_{\alpha_2}.$$

Agora, considere a função $f_2(z) = f_{2,1}(z) + \epsilon_3 P_3(z)$, onde $P_3(z) = P_2(z)(z - \alpha_2)$. Nosso objetivo é escolher ϵ_3 tal que o coeficiente de z em f_2 pertença a $\mathbb{K}^*$. Observe que este coeficiente é $a_1 := e_3 \alpha_1 \alpha_2 - \epsilon_2 \alpha_1 + \epsilon_1$. Já que $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$, podemos escolher $\epsilon_3 \in B(0, t_3) \setminus \{0\}$ tal que $a_1 \in \mathbb{K}^*$. Note que $f_2(\alpha_i) \in E_{\alpha_i}$, pata $i \in \{1, 2\}$ e os dois primeiros coeficientes de f_2 (a_0 e a_1) pertencem a $\mathbb{K}^*$.

Suponha, por hipótese de indução, que a função

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k + \sum_{k=n}^{2n-1} b_k z^k$$

foi construída tal que $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ $\mathbb{K}^*$ e $f_n(\alpha_i) \in E_{\alpha_i}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Agora, vamos construir f_{n+1} com as propriedades desejadas. Defina $f_{n+1,1}$ por

$$f_{n+1,1}(z) = f_n(z) + \epsilon_{2n} z^n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i). \tag{3.10}$$

Note que $f_{n+1,1}(\alpha_i) \in E_{\alpha_i}$, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Além do mais, os primeiros n coeficientes de $f_{n+1,1}$ e f_n são iguais (pelo fator z^n no lado direito da equação (3.10)) e eles pertencem a $\mathbb{K}^*$. Tomando $P_{2n}(z) = z^n (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$, podemos escolher $\epsilon_{2n} \in B(0, t_{2n}) \setminus \{0\}$ tal que $f_{n+1,1}(\alpha_{n+1}) \in E_{\alpha_{n+1}}$.

O seguinte passo é perturbar a função prévia para forçar o coeficiente de z^n (nesta nova função) a estar em $\mathbb{K}^*$. Para isso, definimos

$$f_{n+1}(z) = f_{n+1,1}(z) + \epsilon_{2n+1} P_{2n+1}(z),$$

onde $P_{2n+1}(z) := P_{2n}(z)(z - \alpha_{n+1})$.

Como $a_n := b_n + (-1)^{n+1} \epsilon_{2n+1} \alpha_1 \cdots \alpha_{n+1}$ é o coeficiente de z^n em f_{n+1}, pela densidade de $\mathbb{K}$, podemos escolher $\epsilon_{2n+1} \in B(0, t_{2n+1}) \setminus \{0\}$ tal que $a_n \in \mathbb{K}^*$.

Em conclusão, nossa função desejada

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \epsilon_n P_n(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$$

aplica α em E_α, para todo $\alpha \in A$ e seus coeficientes pertencem a $\mathbb{K}^*$. Esta função é transcendente, desde que não é um polinômio (ver teorema 1.5), pois $a_n \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$. Além do mais, existem infinitas possibilidades de escolha para cada ϵ_n, logo existe uma quantidade não enumérave de tais funções. Isso conclui a prova. $\square$

Usando o resultado anterior, podemos finalmente responder à pergunta de Mahler deste capítulo

TEOREMA 3.3. *Todo subconjunto de $\overline{\mathbb{Q}}$, fechado com respeito à conjugação complexa, é o conjunto excepcional de uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes.*

Demonstração. Considere $A = \overline{\mathbb{Q}}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}^* + i\mathbb{Q}$ na afirmação do teorema 3.2. Escreva $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ e $\overline{\mathbb{Q}} \setminus S = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$ (um deles pode ser finito). Agora, defina

$$E_\alpha = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}, & \text{se } \alpha \in S \\ \mathbb{K} \cdot e^n, & \text{se } \alpha = \beta_n \end{cases} \tag{3.11}$$

Portanto, pelo teorema 3.2, existe uma quantidade não enumerável de funções inteiras transcendentes

$$f(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k \in \mathbb{K}[[z]],$$

tal que $f(\alpha) \in E_\alpha$ para todo $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Considere agora a função $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(z) = \frac{f(z) + \overline{f(\overline{z})}}{2}.$$

Note que $\psi(z) = \sum_{k \geqslant 0} \Re(a_k) z^k$ é uma função inteira transcendente com coeficientes racionais (desde que $\Re(a_k) \neq 0$ para todo $k \geqslant 0$). Assim, é suficiente provar que $S_\psi = S$. De fato, se $\alpha \in S$, logo $\overline{\alpha} \in S$ e daí $f(\alpha)$ e $f(\overline{\alpha})$ são números algébricos e, portanto, também $\psi(\alpha)$ é algébrico.

No caso que $\alpha = \beta_n$, distinguimos dois casos: Quando $\beta_n \in \mathbb{R}$ temos que $\psi(\beta_n) = \Re(f(\beta_n))$ é transcendente, dado que $f(\beta_n) \in \mathbb{K} \cdot e^n$. Quando $\beta_n \notin \mathbb{R}$, logo $\overline{\beta_n} = \beta_m$ para algum $m \neq n$. Consequentemente, existem números algébricos não nulos γ_1, γ_2 tal que

$$\psi(\beta_n) = \frac{\gamma_1 e^n + \gamma_2 e^m}{2},$$

que é transcendente, pela transcendência do e. Em conclusão, temos mostrado que $S_\psi = S$, como queríamos.

$\square$

Capítulo 4

Funções Transcendentes com Coeficientes Inteiros

Como mencionamos anteriormente, em 1904, G. Faber construiu uma função inteira transcendente com coeficientes racionais com a propriedade que ela e todas as suas derivadas levam algébricos em algébricos. Mais precisamente, ele mostrou os seguintes resultados, cujas provas seguem uma mesma ideia.

TEOREMA 4.1 (Faber). *Existe uma função inteira transcendente*

$$f(z) = \sum_{h \geqslant 0} f_h z^h$$

com coeficientes racionais f_h tal que $f(z)$ e todas as suas derivadas são algébricos em todos os pontos algébricos.

TEOREMA 4.2 (Faber). *Existe uma função transcendente*

$$g(z) = \sum_{h \geqslant 0} g_h z^h$$

com coeficientes inteiros g_h que converge dentro do círculo unitário e que todas as suas derivadas assumem valores algébricos em pontos algébricos.

DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS 4.1 E 4.2

Demonstração. Considere as duas séries de potências

$$F = \sum_{h \geqslant 0} F_h z^h \text{ e } G = \sum_{h \geqslant 0} G_h z^h$$

com coeficientes positivos tais que a primeira série converge para todo z, e a segunda converge exatamente para $|z| < 1$, com os coeficientes satisfazendo

$$\lim_{h \to \infty} G_h = \infty$$

Seja $z, A_1(z), A_2(z), A_3(z), \ldots$ uma sequência dos polinômios irredutíveis com coeficientes inteiros e defina $B_r(z) := [A_1(z)A_2(z)\cdots A_r(z)]^r$ para $r = 1, 2, \ldots$. Denote por $d_r = \partial(B_r)$, assumindo que este polinômio tem forma explicita

$$B_r(z) = b_{r0} + b_{r1}z + \ldots + b_{rd_r}z^{d_r},$$

onde $b_{r0} \neq 0$ e $b_{rd_r} \neq 0$, pois B_r não é divisível por z.

Considere agora $\{a_1, a_2, \ldots\}$, $\{s_1, s_2, \ldots\}$ e $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ três sequências de inteiros. Para as duas últimas sequências assumimos que

$$s_r = t_{r-1} + d_r \text{ para } r = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

$$0 = t_0 \leqslant s_1 < t_1 \leqslant s_2 < t_2 \leqslant s_3 < t_3 \ldots, \tag{4.2}$$

$$\lim_{r\to\infty} (t_r - s_r) = \infty. \tag{4.3}$$

Dessas condições, os polinômios sucessivos

$$z^{t_{r-1}}B_r(z) = b_{r0}z^{t_{r-1}} + b_{r1}z^{t_{r-1}+1} + \ldots + b_{rd_r}z^{s_r} \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

envolvem diferentes potências de z.

Agora, pondo

$$f = \sum_{h\geqslant 0} f_h z^h = \sum_{r\geqslant 1} \frac{z^{t_{r-1}}B_r(z)}{a_r},$$

onde os inteiros a_r são escolhidos tais que os coeficientes satisfaçam $|f_h| \leqslant F_h$ para todo h. Logo, a convergência de F implica que $f(z)$ é uma função inteira em z, e $f(z)$ é transcendente pois ela é lacunária.

Similarmente, pondo

$$g = \sum_{h\geqslant 0} g_h z^h = \sum_{r\geqslant 1} z^{t_{r-1}}B_r(z),$$

onde é assumido que os inteiros t_r crescem rapidamente tal que $|g_h| \leqslant G_h$ para $h \geqslant t_1$. Da convergência de G segue-se que $g(z)$ é regular no círculo $|z| < 1$. Logo, $g(z)$ é transcendente pois a serie também é lacunária.

Ambas as séries f e g podem ser diferenciadas termo a termo qualquer número de vezes. Para r suficientemente grande, a n-ésima derivada

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{t_{r-1}}B_r(z)\right]$$

é divisível por z e algum outro polinômio $A_k(z)$. Portanto, quando α é um número algébrico, a série para a n-ésima derivada de $f(z)$ e $g(z)$ em $z = \alpha$ consiste de, no máximo, uma quantidade finita de termos, e estes termos são polinômios em α com coeficientes racionais, o que conclui a demonstração. $\square$

A demonstração de 4.2 sugeriu a K. Mahler fazer a seguinte pergunta, a qual aparece no seu livro [[14], pag. 50]

♦ ***Pergunta 4:*** *Existe uma série transcendente*

$$f = \sum_{h \geqslant 0} f_h z^h$$

com coeficientes inteiros limitados tal que assume valores algébricos em pontos algébricos do círculo $|z| < 1$*?*

Vale mencionar que Mahler conjeturou que esta pergunta possui resposta negativa. O próprio Mahler provou um caso particular, quando a função for fortemente lacunária, usando o critério mencionado no capítulo anterior [Veja proposição 3.2] como segue:

Teorema 4.3 (Mahler). *Seja $f(z)$ uma série fortemente lacunária com coeficientes inteiros limitados. Se $S_f = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ é um conjunto infinito, então*

$$\lim_{k \to \infty} |\alpha_k| = 1.$$

Demonstração. Sejam R, r duas constantes satisfazendo $0 < r < R < R_f = 1$, e $S_f(r) = \{\alpha \in S_f \mid |\alpha| \leqslant r\}$. Definindo $P_n^*(z) = z^{-t_n} P_n(z)$ [1], temos que $P_n^*(0) = f_{s_n} \neq 0$ e pela fórmula de Jensen

$$\log |f_{s_n}| = \sum_{\alpha} \log \left(\frac{|\alpha|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P_n^*(Re^{i\theta})| d\theta,$$

onde $\sum_\alpha$ percorre sobre todos os zeros de $P_n^*(z)$ para os quais $|\alpha| \leqslant R < 1$. Reescrevendo a equação acima

$$\sum_{\alpha} \log \frac{R}{|\alpha|} = \log \frac{1}{|f_{s_n}|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P_n^*(Re^{i\theta})| d\theta,$$

temos que

$$\log \frac{1}{|f_{s_n}|} \leqslant 0, \quad |P_n^*(Re^{i\theta})| \leqslant M(1 + R + R^2 + \cdots) = \frac{M}{1-R} \text{ para todo } \theta,$$

onde M é a constante que limita em módulo os coeficientes de f. Agora, assuma que $|\alpha| \leqslant r$ temos que $\log \frac{R}{|\alpha|} \geqslant \log \frac{R}{r}$, donde, denotando por Z o conjunto de zeros de $P_n^*(z)$ satisfazendo $|\alpha| \leqslant r$ obtemos que

$$|Z| \leqslant \frac{\log(M/1-R)}{\log(R/r)}.$$

Dado que a última estimativa é independente de n, permitindo a r, R se aproximar de 1. Daí temos que $\sum_{\alpha \in S_f} \log \frac{R}{|\alpha|} < \infty$ mostrando o resultado. □

[1] os polinômios $P_n(z)$ são aqueles da proposição 3.2.

Provado que a pergunta 4 de Mahler é negativa para as funções fortemente lacunárias, o seguinte passo natural é tentar mostrar para um conjunto maior. Nessa direção, provamos que ela continua sendo negativa para um subconjunto maior das funções lacunárias usando o teorema do subespaço de Schlickewei tratado anteriormente. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

TEOREMA 4.4. *Seja f analítica na $B(0,1)$, lacunária com $t_n/s_n = 1+\delta$, para $\delta > 0$ qualquer, com coeficientes inteiros limitados por uma constante $M > 0$. Logo, $f(1/b)$ é transcendente para todo $b > 2M+1$.*

Demonstração. Considere a função

$$f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{Z},$$

tal que $|a_k| \leqslant M$ para todo $k = 0,1,2,\ldots$. Vamos mostrar primeiro que, tomando um inteiro $b > 1$, temos $f(1/b)$ é um número transcendente ou é um número racional. Para isso, suponhamos que $\alpha := f(1/b)$ é um número algébrico, devemos mostrar que, nesse caso, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

De fato, considere as sequências $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ e $\{t_n\}_{n\geqslant 0}$ da definição de série de potências lacunárias. Logo,

$$\alpha - \sum_{k=0}^{s_N} \frac{a_k}{b^k} = \sum_{k\geqslant t_N} \frac{a_k}{b^k}$$

e daí, usando o fato que $|a_k| \leqslant M$ e que $b \geqslant 2$, temos que

$$\left|\alpha - \sum_{k=0}^{s_N} \frac{a_k}{b^k}\right| \leqslant \frac{2M}{b^{t_N}}.$$

Multiplicando a equação acima por b^{s_N+1} obtemos que

$$\left|b^{s_N+1}\alpha - \sum_{k=0}^{s_N} a_k b^{s_N+1-k}\right| \leqslant 2Mb^{s_N+1-t_N}. \tag{4.4}$$

Agora, vamos usar o teorema de subespaço devido a Schlickewei [teorema 1.12]. Para isso, vamos definir o vetor

$$\mathbf{x} = \left(b^{s_N+1}, \beta\right) \in \mathbb{Z}^2, \text{ onde } \beta = \sum_{k=0}^{s_N} a_k b^{s_N+1-k}.$$

Note que $|\beta| \leqslant M(s_N+1)b^{s_N+1}$, assim

$$\|\mathbf{x}\| = \max\{|b^{s_N+1}|, |\beta|\} \leqslant M(s_N+1)b^{s_N+1}. \tag{4.5}$$

Considere o conjunto finito de primos $S = \{\infty, p : p|\beta\}$, i.e., S consiste do primo infinito e todos os primos que dividem β.

Agora, para $p \in S$, definamos as formas lineares $L_{1,p}, L_{2,p}$ nas variáveis $\overline{x} = (x_1, x_2)$ como segue:

Para $p = \infty$, sejam $L_{1,\infty}(\overline{x}) = \alpha x_1 - x_2,\ L_{2,\infty}(\overline{x}) = x_2$.

Para $p < \infty$, sejam $L_{i,p}(\overline{x}) = x_i$ para $i = 1, 2$. Note que as formas lineares assim definidas são linearmente independentes para cada $p \in S$.

Logo,

$$\prod_{p\in S}\prod_{i=1,2} |L_{i,p}(\mathbf{x})|_p = \left|\alpha b^{s_N+1} - \beta\right|_\infty \prod_{\substack{p\in S\\ p\neq\infty}} \left|b^{s_N+1}\right|_p \prod_{p\in S} |\beta|_p. \tag{4.6}$$

Se $p \notin S$, então $p \nmid \beta$, daí $v_p(\beta) = 0$ e $|\beta|_p = 1$. Pela fórmula do produto temos que

$$\prod_{p\in S} |\beta|_p = \prod_{p} |\beta|_p = 1.$$

Além disso, como $b^{s_N+1} \in \mathbb{Z}$ segue que $\left|b^{s_N+1}\right|_p \leqslant 1$, para todo $p < \infty$. Portanto, das equações (4.4) e (4.6), temos que

$$\prod_{p\in S}\prod_{i=1,2} |L_{i,p}(\mathbf{x})|_p \leqslant \left|\alpha b^{s_N+1} - \beta\right| \leqslant 2Mb^{s_N+1-t_N}. \tag{4.7}$$

Tome $\delta = 2\epsilon$ para $\epsilon > 0$ qualquer, como por definição, $s_N \to \infty$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geqslant N_0$ temos que

$$\log_b(2M^{1+\epsilon}(s_N+1)^\epsilon) \leqslant t_N - (\epsilon+1)(s_N+1),$$

donde segue-se a seguinte estimativa

$$2Mb^{s_N+1-t_N} \leqslant \left[M(s_N+1)b^{s_N+1}\right]^{-\epsilon}.$$

Usando esta última desigualdade, junto com as equações (4.5) e (4.7), obtemos que

$$\prod_{p\in S}\prod_{i=1,2} |L_{i,p}(\mathbf{x})| \leqslant \|\mathbf{x}\|^{-\epsilon}.$$

Podemos repetir esse argumento para infinitos $N \geqslant N_0$ e encontrar infinitos vetores $\mathbf{x} = \mathbf{x}(N)$ distintos satisfazendo a última desigualdade. Pelo teorema 1.12, temos que estes vetores $\mathbf{x}(N)$ pertencem a um número finito de planos do espaço $\mathbb{Q}^2$. Portanto, infinitos deles pertencem ao mesmo plano; i.e., existem $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ não todos nulos tais que, para infinitos N, temos

$$\lambda b^{s_N+1} + \mu\beta = 0.$$

Dividindo por b^{s_N+1}, obtemos que

$$\lambda + \mu \sum_{k=0}^{s_N} \frac{a_k}{b^k} = 0,$$

fazendo $s_N \to \infty$ obtemos $\lambda + \mu\alpha = 0$, implicando que $\alpha = f(1/b) \in \mathbb{Q}$.

Para concluir a demonstração, basta provar agora que α não pode ser racional para $b > 2M+1$. De fato, como $-M \leqslant a_k \leqslant M$, para todo $k \geqslant 0$, temos que $1 \leqslant a_k + M + 1 \leqslant 2M+1$. Escrevendo

$$\alpha + (M+1)\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{b^k} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_k + M + 1}{b^k}.$$

Como $b > 2M+1 \geqslant a_k + M + 1 \geqslant 1$, logo o lado direito acima é uma expansão $b-$ádica. Suponha que $\alpha \in \mathbb{Q}$, isto implica que o lado direito da igualdade acima é racional. Assim, a sequência $\{a_k\}_{k \geqslant 0}$ é ultimamente periódica, o que implica que a função f é racional, o que é uma contradição pois f é transcendente, desde que ela é lacunária.

$\square$

Vamos concluir este capítulo mencionamos que se nós supormos a veracidade da conhecida conjetura: "Todo número algébrico é normal", é possível mostrar que a *pergunta 4* possui resposta negativa. Essa relação do problema com os números normais nos faz pensar na dificuldade de mostrar o problema completamente.

OBSERVAÇÃO 4.1. *Podemos mencionar que o último resultado pode ser obtido diretamente se aplicarmos o teorema de Ridout, na forma mais explicita [Veja [5]].*

Referências Bibliográficas

[1] Yuri Bilu. *The many faces of the Subespace theorem.* University of Bordeaux, 2009.

[2] J. Borwein, A. Van der Poorten, J. Shallit, W. Zudilin. *Neverending Fractions: An Introduction to Continued Fractions.* Cambridge University Press, United Kingdom, 2014.

[3] Y. Bugeaud. *Approximation by algebraic Number.* Cambridge Tracts in Mathematics Vol. **160**, Cambridge University Press, New York, 2004.

[4] J. B. Conway. *Functions of a Complex Variable.* Springer, New York, 1973.

[5] P. Corvaja. *An explicit version of the theorem of Roth-Ridout.* Rend. Sem. Mat. Univ. Poi. Torino **53** (1995).

[6] Erdös, P., Mahler K. *Some arithmetical properties of the convergents of a continued fraction.* J. London Math. Soc., **14** (1939), 12-18.

[7] Fraenkel, A. S., Borosh, I. *Fractional dimension of a set of transcendental numbers.* Proc. London Math. Soc., **15** (1965), 458-470;

[8] García Lomely Ana. *Aplicación del teorema del Subespacio a puntos enteros sobre curvas.* Tesis de Maestria, Zacatecas, 2011.

[9] R. Güting. *Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers.* Michigan Math. J. **8** (1961), 149-159.

[10] J. Huang, D. Marques and M. Mereb. *Algebric values of transcendental functions at algebric points.* Bull. Austral. Math. Soc. **82** (2010), 322-327.

[11] J.F. Koksma. *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen.* Monatsh. Math. Phys. **48**, 176-189, 1939.

[12] Lelis J., Marques D.. *On a problem of Erdos and Mahler concerning continued fractions.* Bulletin of the Australian Mathematical Society (pre-print 2016).

[13] J. W. LeVeque. *On Mahler's U -Numbers*. J. of the London Math. Soc. **28**, 220-229, 1953.

[14] K. Mahler. *Lectures on Transcendental Numbers*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1976.

[15] K. Mahler. *Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients*. Journal Austr. Math. Soc. **4** (1965), no 1, 56-64.

[16] K. Mahler. *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus*. I,II, J. Reine Angew. Math. **166**, 118-150, 1932.

[17] D. Marques. *On the arithmetic nature on hypertranscendental functions at complex points*. Expo. Math. **29** (2011), no 3, 361-370.

[18] D. Marques. *Teoria dos Números Transcendentes*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[19] D. Marques, C.G. Moreira. *On a variant of a question proposed by K. Mahler concerning Liouville Numbers*. Bull. Austral. Math. Soc. **91** (2015), no.1, 29-33.

[20] D. Marques. *O problema de Lang e uma generalização dos teoremas de Stäckel*. Tese de Doutorado. UnB, Brasília (2009).

[21] D. Marques, J. Ramirez. *On transcendental analytic functions mapping an uncountable class of U-numbers into Liouville numbers*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **91** (2015) 29-33.

[22] D. Marques, J. Ramirez. *On Exceptional Sets: A Problem Posed by Mahler*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, **94** (2016) 15-19.

[23] E. Silva. *Alguns resultados relacionados aos Números de Liouville*. Dissertação de mestrado, UnB, Brasília, 2015.

[24] T. Schneider. *Einführung in die transzendenten Zahlen*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heierlberg, 1957.

[25] J. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2009.

[26] H. P. Schlickewei. *Die p-adische Verallgemeinerung des Satzes von Thue-Siegel-Roth-Schmidt*. J. Reine Angew. Math. **288** (1976), 86?105.

[27] W. M. Schmidt. *Diophantine Approximations*. Lecture Notes in Mathematics **785**, Springer, Berlin, 1980.

[28] P. Stäckel. *Ueber arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen.* Math. Ann. **46** (1895), no. 4, 513-520.

[29] P. Stäckel. *Arithmetische Eigenschaften Analytischer Functionen.* Acta Math. **25** (1902), no. 1, 371-383.

[30] A. J. der Poorten. *Transcendental entire function mapping every algebraic number field into itself.* J. Austral. Math. Soc. **8** (1968), 192-193.

[31] M. Waldschmidt. *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups.* Springer, Verlag Berlin Heilderberg, 2000.