

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM NUMÉRICA DE FLUXOS TURBULENTOS
PARIETAIS DE CALOR EM ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS

RODRIGO CARRIJO LINO

ORIENTADOR: JOSÉ LUIZ ALVES DA FONTOURA RODRIGUES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: DM 101

BRASÍLIA, 18 de SETEMBRO de 2006.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM NUMÉRICA DE FLUXOS TURBULENTOS
PARIETAIS DE CALOR EM ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS

RODRIGO CARRIJO LINO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

Prof. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues, Dr. (ENM-UnB)
(Orientador)

Prof. Roberto Bobenrieth Miserda, Dr. (ENM-UnB)
(Examinador)

Prof. Aristeu da Silveira Neto, Dr. (FEMEC-UFU)
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 18 DE SETEMBRO DE 2006.

FICHA CATALOGRÁFICA

LINO, RODRIGO CARRIJO

**MODELAGEM NUMÉRICA DE FLUXOS TURBULENTOS
PARIETAIS DE CALOR EM ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS**

[Distrito Federal] 2006. (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2006)

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Transferência de calor
2. Convecção
3. Métodos Numéricos
4. Elementos Finitos

I.ENM/FT/UnB

II.Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LINO, R.C. (2006). “**MODELAGEM NUMÉRICA DE FLUXOS TURBULENTOS PARIETAIS DE CALOR EM ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS**”.
Dissertação de Mestrado, Publicação DM - 101, Departamento de Engenharia Mecânica,
Universidade de Brasília, Brasília, DF, 126 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Rodrigo Carrijo Lino.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Modelagem Numérica de Fluxos Turbulentos Parietais de Calor em escoamentos Incompressíveis.

GRAU/ANO: Mestre/2006

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

DEDICATÓRIA

A minha família, amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me possibilitou chegar até aqui.

RESUMO

MODELAGEM NUMÉRICA DE FLUXOS TURBULENTOS PARIETAIS DE CALOR EM ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Autor: Rodrigo Carrijo Lino

Orientador: José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 18 Setembro de 2006

Este trabalho apresenta a modelagem numérica das camadas limites fluidodinâmica e de temperatura, criadas por escoamentos forçados, turbulentos e incompressíveis de ar, sobre placas planas horizontais, tendo como meta a determinação do fluxo de calor que se estabelece entre a placa e o escoamento. Na situação física analisada as camadas limites de velocidade e de temperatura não se iniciam no mesmo ponto da placa, sendo separadas por um comprimento pré-estabelecido. No início da placa a formação de camada limite térmica é inibida pela igualdade entre as temperaturas do escoamento e da placa. A camada limite térmica tem início a partir do ponto em que a temperatura da placa plana se diferencia da temperatura do escoamento. Em todas as situações estudadas a camada limite térmica se desenvolve sobre parede isotérmica. São ensaiadas dez placas que se diferenciam pelo comprimento do trecho adiabático da placa, pela temperatura do trecho aquecido e pela velocidade do escoamento externo. A faixa de variação para os números de Reynolds locais, definidos pelo comprimento longitudinal das placas é definida no intervalo $5 \times 10^5 < Re < 10^7$. Os baixos números de Mach e as pequenas diferenças de temperatura dos escoamentos analisados permitem que sejam desconsiderados, respectivamente, os efeitos de compressibilidade e de variação das propriedades termodinâmicas do ar. As principais conseqüências destas condições são: desacoplamento entre as camadas limites fluidodinâmica e térmica e o comportamento linear da equação da energia. O objetivo deste trabalho é analisar, de forma qualitativa e quantitativa, o desempenho operacional do código computacional proposto para a modelagem de fluxos turbulentos de calor em escoamentos parietais. O fechamento do sistema de equações médias é obtido com o emprego do modelo $\kappa - \varepsilon$

para a representação do tensor de Reynolds, sendo a correlação entre as flutuações de velocidade e temperatura que definem o fluxo turbulento de calor, modelada algebricamente a partir de um número de Prandtl turbulento com valor constante. As condições de contorno de velocidade e de temperatura no contorno físico do domínio de cálculo são calculadas, respectivamente, por duas leis de parede de velocidade e duas de temperatura. A discretização temporal é obtida por uma aproximação de primeira ordem baseada em um algoritmo de diferenças finitas do tipo semi-implicito seqüencial com erro de truncamento de primeira ordem, que permite a linearização do sistema de equações a cada passo no tempo. A discretização espacial do domínio de cálculo é obtida com elementos finitos triangulares P1-isoP2. A resolução das equações acopladas de continuidade e quantidade de movimento é feita por uma variante do algoritmo de Uzawa. Os resultados obtidos numericamente são confrontados a soluções analíticas complementadas por correlações empíricas e a dados experimentais.

ABSTRACT

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO FLUXO DE CALOR EM CAMADA LIMITE TURBULENTA INCOMPRESSÍVEL - SUPERFÍCIES PARCIALMENTE AQUECIDAS

Autor: Rodrigo Carrijo Lino

Orientador: José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues

Programa de Pós-graduação em Ciências Mecânicas

Brasília, 18 de Setembro de 2006

This work presents a numerical study of both hydrodynamics and thermal boundary layers in forced incompressible turbulent flows over an horizontal flat plate. The main goal of the work is to determine the turbulent heat flux between the plate and the flow. The starting point of the hydrodynamic boundary layers are not necessarily the same but along the thermal boundary layer. Ten different cases are analyzed where the distance between the starting points of the boundary layers, the plate temperature and the non-disturbed velocity intensity are the parameters of the study. A Reynolds averaged Navier-Stokes approach is employed. The closure problem is achieved by a $\kappa - \epsilon$ model associated with a constant turbulent Prandtl assumption in order to predict the the temperature/velocity correlations. Two different law of the wall for velocity and temperature are used for modeling of the turbulent boundary conditions. The temporal discretization is made by an first-order approximation based on a semi-implicit finite-differences algorithm. The spatial domain is discretized by a finite-element technic with P1-isoP2 elements. The velocity-pressure coupling is made by the Uzawa algorithm. The ability of the proposed model in predict the heat flux through the plate is analyzed both qualitatively and quantitatively by confronting numerical and experimental results.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos, metodologia e estrutura do trabalho	1
1.2	Pesquisa bibliográfica	4
2	Modelo físico e formulação matemática	8
2.1	Equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia	8
2.2	Sistema de equações instantâneas	11
2.3	Adimensionalização do sistema de equações instantâneas	11
2.4	Hipóteses simplificativas	15
2.5	O Sistema de equações médias para escoamento turbulento	17
2.6	O problema de fechamento e os modelos de turbulência	20
2.7	O sistema fechado de equações	22
2.8	Aplicação para escoamentos com pequenas variações de temperatura . .	23
3	A Camada limite	24

3.1	Equações do movimento e energia	24
3.2	As equações da Camada limite	25
3.3	Formulação integral para a camada limite laminar	29
3.4	A camada limite turbulenta	33
3.4.1	O sistema de equações médias	33
3.5	Fluxo de calor na camada limite turbulenta	37
3.6	Fluxo de calor em camadas limites turbulentas com um comprimento inicial de parede adiabática	42
3.7	Leis de parede	44
3.7.1	leis de parede de velocidade	45
3.7.2	Lei de parede de temperatura	49
3.8	Condições de contorno para o modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$	52
4	Método de resolução numérica	54
4.1	Discretização temporal	54
4.2	Discretização espacial - Método dos Elementos Finitos	55
4.2.1	Formulação fraca do problema	56
4.2.2	Equações discretizadas	60
4.2.3	Escolha do tipo de elemento	63

5	Resultados	66
5.1	Descrição do modelo físico	67
5.2	O domínio computacional e a malha de discretização	69
5.2.1	Malha de Cálculo	70
5.3	Casos teste	73
5.4	Metodologia de análise resultados	75
5.5	Resultados quantitativos	77
5.5.1	Estudo de Malha	77
5.5.2	Leis de Parede	80
5.5.3	Perfil de Velocidade	83
5.5.4	Método para cálculo de Camada Limite	86
5.5.5	Espessura de Camada Limite	97
5.5.6	Fluxos turbulentos parietais de calor	99
5.5.7	Efeito da defasagem entre as camadas limites de velocidade e de temperatura	104
5.5.8	Fluxos turbulentos de calor e a analogia de Chilton-Colburn(1933)	106
5.6	Resultados qualitativos	111
5.6.1	Campos de Velocidade e Temperatura	111
6	Conclusões	115

Referências bibliográficas 121

APÊNDICES 122

Lista de Tabelas

5.1	Caso teste 3 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	88
5.2	Caso teste 4 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	89
5.3	Caso teste 5 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	90
5.4	Caso teste 6 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	91
5.5	Caso teste 7 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	92
5.6	Caso teste 8 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	93
5.7	Caso teste 9 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	94
5.8	Caso teste 10 - Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	95
5.9	Erro no cálculo numérico do Número de Stanton	96
5.10	Melhores valores para a constante m	97
5.11	Erro - Número de Stanton - $u_\infty=28\text{m/s}$	101
5.12	Erro - Número de Stanton - $u_\infty=67\text{m/s}$	103

Lista de Figuras

2.1	Placa plana parcialmente aquecida.	9
3.1	Sistema de coordenadas bidimensional	25
3.2	Escalas características da camada limite sobre placa plana	26
3.3	Relação coeficiente de fricção e número de Reynolds	40
3.4	Placa plana - Não isotérmica	43
3.5	Estrutura da camada limite turbulenta	45
3.6	Variação da velocidade de atrito u_f em função do comprimento adimensional y^+	46
4.1	Domínio de Cálculo	56
4.2	Domínio de cálculo discretizado	61
4.3	Domínio de cálculo discretizado em elementos triangulares	63
4.4	Elementos triangulares - P1/IsoP2	64
5.1	Domínio de Cálculo e Condições de Contorno	69
5.2	Malha 1 - Pressão	70

5.3	Malha 1 - Velocidade	71
5.4	Malha 2 - Pressão	72
5.5	Malha 2 - Velocidade	72
5.6	Montagem experimental	73
5.7	Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 3 - $u_\infty = 28m/s$ e $\xi = 0m$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.	77
5.8	Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 6 - $u_\infty = 28m/s$ e $\xi =$ $1.36m$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.	78
5.9	Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 7 - $u_\infty = 67m/s$ e $\xi = 0m$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.	79
5.10	Efeitos de refinamento de malha - Caso teste 10 - $u_\infty = 67m/s$ e $\xi =$ $1.36m$. Figura (a): Perfil de velocidade - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (b): Perfil de temperatura - Corte na posição $x=1,8m$. Figura (c): Espessura de camada limite. Figura (d): Número de Stanton local em função do número de Reynolds local.	80

5.11	Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 3. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8m$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8m$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8m$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8m$	82
5.12	Perfis adimensionais de velocidade retirados na posição $x=1,8m$, $Re_x = 3,2 \times 10^6$. (a) Caso teste 3 - Velocidade $28m/s$ $\xi = 0m$. (b) Caso teste 4 - Velocidade $28m/s$ $\xi = 0,36m$. (c) Caso teste 5 - Velocidade $28m/s$ $\xi = 0,76m$. (d) Caso teste 6 - Velocidade $28m/s$ $\xi = 1,36m$	84
5.13	Perfis adimensionais de velocidade retirados na posição $x=1,8m$, $Re_x = 7,6 \times 10^6$. (a) Caso teste 7 - Velocidade $67m/s$ $\xi = 0m$. (b) Caso teste 8 - Velocidade $67m/s$ $\xi = 0,36m$. (c) Caso teste 9 - Velocidade $67m/s$ $\xi = 0,76m$. (d) Caso teste 9 - Velocidade $67m/s$ $\xi = 1,36m$	85
5.14	Perfis adimensionais de velocidade retirados na posição $x=1,8m$. (a) Caso teste 1 - $Re_x = 2,2 \times 10^6$, Velocidade $19,5m/s$ $\xi = 0,415m$. (b) Caso teste 2 - $Re_x = 2,5 \times 10^6$, Velocidade $21,9m/s$ $\xi = 0,724m$	85
5.15	Caso teste 3 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = $0m$, com $u_\infty=28m/s$	87
5.16	Caso teste 4 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = $0,36m$, com $u_\infty=28m/s$	89
5.17	Caso teste 5 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = $0,76m$, com $u_\infty=28m/s$	90
5.18	Caso teste 6 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = $1,36m$, com $u_\infty=28m/s$	91
5.19	Caso teste 7 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = $0m$, com $u_\infty=67m/s$	92

5.20	Caso teste 8 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0,56m, com $u_\infty=67\text{m/s}$	93
5.21	Caso teste 9 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 0,86m, com $u_\infty=67\text{m/s}$	94
5.22	Caso teste 10 - Influência das camadas limites no número de Stanton, para a placa com defasagem = 1,36 m, com $u_\infty=67\text{m/s}$	95
5.23	Influência das camadas limites no número de Stanton. A) Caso teste 1 - Placa com defasagem = 0,415 m, com $u_\infty=19,5\text{m/s}$. B) Caso teste 2 - Placa com defasagem = 0,724cm, com $u_\infty=21,9\text{m/s}$	96
5.24	Espessura das camadas limites térmica e fluidodinâmica ao longo do comprimento da placa. (a) Caso teste 3 - $u_\infty = 28\text{m/s}$ e $\xi = 0\text{m}$. (b) Caso teste 4 - $u_\infty = 28\text{m/s}$ e $\xi = 0,36\text{m}$. (c) Caso teste 5 - $u_\infty = 28\text{m/s}$ e $\xi = 0,76\text{m}$. (d) Caso teste 6 - $u_\infty = 28\text{m/s}$ e $\xi = 1,36\text{m}$	98
5.25	Espessura das camadas limites térmica e fluidodinâmica ao longo do comprimento da placa. (a) Caso teste 1 - $u_\infty = 19,5\text{m/s}$ e $\xi = 0,415\text{m}$. (b) Caso teste 2 - $u_\infty = 21,9\text{m/s}$ e $\xi = 0,724\text{m}$	98
5.26	Espessura das camadas limites térmica e fluidodinâmica ao longo do comprimento da placa. (a) Caso teste 7 - $u_\infty = 67\text{m/s}$ e $\xi = 0\text{m}$. (b) Caso teste 8 - $u_\infty = 67\text{m/s}$ e $\xi = 0,56\text{m}$. (c) Caso teste 9 - $u_\infty = 67\text{m/s}$ e $\xi = 0,86\text{m}$. (d) Caso teste 10 - $u_\infty = 67\text{m/s}$ e $\xi = 1,36\text{m}$	99
5.27	Variação do Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 3 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 0\text{m}$, (b) Caso teste 4 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 0,36\text{m}$, (c) Caso teste 5 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 0,76\text{m}$, (d) Caso teste 6 - $u_\infty=28\text{m/s}$, $\xi = 1,36\text{m}$,	100
5.28	Variação do Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 7 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 0\text{m}$, (b) Caso teste 8 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 0,56\text{m}$, (c) Caso teste 9 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 0,86\text{m}$, (d) Caso teste 10 - $u_\infty=67\text{m/s}$, $\xi = 1,36\text{m}$,	103

5.29	Variação do Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 1 - $u_{\infty}=19,5\text{m/s}$, $\xi = 0,415\text{m}$, (b) Caso teste 2 - $u_{\infty}=21,9\text{m/s}$, $\xi = 0,0,724\text{m}$	104
5.30	Relação entre o número de Stanton local e número de Stanton da placa isotérmica - $u_{\infty} = 28\text{m/s}$. (a) Caso teste 4 parametrizado por caso teste 3. (b) Caso teste 5 parametrizado por caso teste 3. (c) Caso teste 6 parametrizado por caso teste 3.	105
5.31	Relação entre o número de Stanton local e número de Stanton da placa isotérmica - $u_{\infty} = 67\text{m/s}$. (a) Caso teste 8 parametrizado por caso teste 7. (b) Caso teste 9 parametrizado por caso teste 7. (c) Caso teste 10 parametrizado por caso teste 7.	106
5.32	Coefficiente de atrito local em função do número Reynolds local. (a) Caso teste 1. (b) Caso teste 2. (c) Caso teste 3. (d) Caso teste 7. . . .	108
5.33	Número de Stanton local em função do número de Reynolds local - $u_{\infty}=28\text{m/s}$. (a) Caso teste 3. (b) Caso teste 4. (c) Caso teste 5. (d) Caso teste 6.	109
5.34	Número de Stanton local em função do número de Reynolds local - $u_{\infty}=67\text{m/s}$. (a) Caso teste 7. (b) Caso teste 8. (c) Caso teste 9. (d) Caso teste 10.	110
5.35	Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (a) Caso teste 1. (b) Caso teste 2.	110
5.36	Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 3- $u_{\infty}=28\text{m/s}$ e $\xi = 0\text{m}$	111
5.37	Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 4- $u_{\infty}=28\text{m/s}$ e $\xi = 0,36\text{m}$	112
5.38	Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 5- $u_{\infty}=28\text{m/s}$ e $\xi = 0,76\text{m}$	113

5.39	Campo de Velocidade e de Temperatura, Caso teste 6- $u_\infty=28\text{m/s}$ e $\xi = 1,36\text{m}$	114
6.1	Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 6. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8\text{m}$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8\text{m}$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8\text{m}$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8\text{m}$	124
6.2	Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 7. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8\text{m}$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8\text{m}$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8\text{m}$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8\text{m}$	125
6.3	Gráficos comparativos para leis de parede - Caso teste 10. (a) - Perfil de velocidade em $x=1,8\text{m}$. (b) Perfil de temperatura em $x=1,8\text{m}$. (c) Espessura de camadas limites de velocidade e de temperatura. (d) Número de Stanton local em função do número de Reynolds local. (e) Perfil de energia cinética de turbulência em $x=1,8\text{m}$. (f) Perfil de taxa de dissipação turbulenta em $x=1,8\text{m}$	126

Lista de Símbolos

Símbolos latinos

x	Direção longitudinal ao escoamento
y	Direção transversal ao escoamento
u	Componente de velocidade na direção longitudinal ao escoamento
v	Componente de velocidade na direção transversal ao escoamento
\bar{u}	Componente média da velocidade pela decomposição de Reynolds
u'	Componente de flutuação da velocidade pela decomposição de Reynolds
\tilde{u}	Componente média da velocidade pela decomposição de Favre
u''	Componente de flutuação da velocidade pela decomposição de Favre
u_f	Velocidade de atrito
U_o	Velocidade de referência
U_∞	Velocidade do escoamento não perturbado
u^+	Velocidade adimensional na camada limite
p	Campo de pressão
\bar{p}	Componente média da pressão
p'	Componente de flutuação da pressão
p_o	Pressão de referência
T	Temperatura
\bar{T}	Componente média da temperatura pela decomposição de Reynolds
\tilde{T}	Componente média da temperatura pela decomposição de Favre
T'	Componente de flutuação da temperatura pela decomposição de Reynolds
T''	Componente de flutuação da temperatura pela decomposição de Favre
T_F	Temperatura de atrito
T_p	Temperatura na parede
T_∞	Temperatura do escoamento não perturbado
T_o	Temperatura de referência
t	Tempo

y^+	Distância adimensional na camada limite
h	Coefficiente de transferência de calor
R	Constante universal dos gases
g	Aceleração da gravidade
q''	Fluxo de calor
L	Comprimento de referência
Q	Quantidade de movimento média
\hat{n}	Vetor unitário de superfície
c_p	Calor específico à pressão constante
c_v	Calor específico à volume constante
C_o	Velocidade do som
k	Condutividade térmica
k_o	Condutividade térmica de referência
k_t	Condutividade térmica turbulenta
K	Constante de Von Kàrman
l	Comprimento de mistura
Re	Número de Reynolds
Re_t	Número de Reynolds turbulento
Fr	Número de Froud
Pr	Número de Prandtl
Pr_t	Número de Prandtl turbulento
M_∞	Número de Mach de referência
St	Número de Stanton
Nu	Número de Nusselt

Símbolos gregos

ν	Viscosidade cinemática
τ	Tensão cisalhante
τ_p	Tensão cisalhante na parede
ν_t	Viscosidade cinemática turbulenta
ρ	Massa específica
$\bar{\rho}$	Massa específica média
ρ'	Flutuação de massa específica
μ	Viscosidade dinâmica
μ_t	Viscosidade dinâmica turbulenta
μ_o	Viscosidade dinâmica de referência
κ	Energia cinética de turbulência
ε	Taxa de dissipação da energia cinética de turbulência
δ_{ij}	Delta de Kronecker
Π	Termo de produção
δ	Espessura da camada limite fluidodinâmica
δ_t	Espessura da camada limite térmica
ξ	Comprimento inicial não-aquecido
γ	Razão de calores específicos
ϵ_m	Difusividade turbulenta de quantidade de movimento
ϵ_h	Difusividade turbulenta de calor
τ_{ij}	Tensor de tensões viscosas

Capítulo 1 Introdução

1.1 Objetivos, metodologia e estrutura do trabalho

Este trabalho integra a etapa inicial de um projeto mais amplo que se consolida no âmbito do Vortex: Grupo de Mecânica dos Fluidos de escoamentos Complexos do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília, destinado a fundamentar uma linha de estudo voltada para a modelagem numérica da transferência de calor em escoamentos turbulentos parietais.

A extensão e a complexidade do acoplamento existente entre os campos turbulentos de quantidade de movimento e de energia térmica variam com a intensidade dos gradientes de velocidade, pressão e temperatura existentes, com a geometria do contorno físico do escoamento e também com o comportamento termodinâmico dos fluidos envolvidos no processo. O grau de dificuldade e o custo computacional da modelagem numérica do problema crescem com a intensidade e a complexidade do acoplamento existente entre os campos turbulentos de quantidade de movimento e de energia.

O problema físico em estudo é formado por escoamentos forçados, turbulentos e incompressíveis de ar, sobre placas planas, lisas e horizontais. Os campos de temperaturas são especificados de modo que as camadas limites de velocidade e de temperatura não se iniciem no mesmo ponto da placa, sendo separadas por um comprimento pré-estabelecido ξ . No início de cada placa existe um trecho adiabático criado pela igualdade entre as temperaturas da parede e do escoamento. A camada limite térmica se inicia no ponto onde as temperaturas da parede e do escoamento se diferenciam, originando fluxo de calor entre parede e escoamento. Em todas as situações estudadas a camada limite térmica se desenvolve sobre parede isotérmica.

O objetivo do estudo é a determinação do fluxo convectivo forçado de calor que se desenvolve entre a placa plana e o escoamento turbulento. Os escoamentos de ar simulados têm velocidades de 19,5 m/s, 21,9 m/s, 28 m/s e 67 m/s. As diferenças de temperatura consideradas entre a placa e o ar não perturbado variam entre 12 K e 18 K. Os números de Reynolds locais, Re_x , dos escoamentos ensaiados, calculados com base

nas posições locais da placa, oscilam entre $10^5 < Re_x < 10^7$. Para caracterização do comprimento do trecho adiabático das placas ensaiadas é definido um número de Reynolds, Re_ξ , definido com base no comprimento ξ deste trecho, que variam no intervalo $10^6 < Re_\xi < 10^7$.

As placas planas consideradas são de alumínio polido com 2,4 m de comprimento e se diferenciam pelo comprimento da região adiabática, pela temperatura do trecho aquecido e pela velocidade do escoamento. Em uma das placas a região adiabática é suprimida, permitindo que as camadas limites de velocidade e temperatura se originem no mesmo ponto. Nas outras situações os comprimentos ξ são diferentes de zero e as distâncias entre os pontos iniciais das camadas limite de velocidade e de temperatura são distintas.

Os escoamentos turbulentos de ar estudados acontecem com velocidade tais que, nos escoamentos mais velozes, o número de Mach é inferior a 0,2. A geometria da fronteira sólida do escoamento é incapaz de provocar descolamentos de camada limite ou curvatura em suas linhas de corrente. Sob estas condições os gradientes de pressão existentes são de fraca intensidade. As diferenças de temperatura impostas, de no máximo 18 K, são insuficientes para alterar, de forma significativa, a massa específica, a condutividade térmica e viscosidade dinâmica do ar.

Na ausência de gradientes significativos de pressão e de temperatura é consistente a adoção da hipótese de não variação das propriedades termodinâmicas do fluido em escoamento, condição capaz de romper o acoplamento existente entre as equações de quantidade de movimento e de energia e de tornar linear a equação de conservação da energia.

O sistema de equações governantes, simplificado pela invariância das propriedades termodinâmicas, admite solução analítica e permite o emprego de algoritmos de resolução numérica menos dispendiosos, do ponto de vista computacional.

Apesar da limitação representada pela hipótese de não variação das propriedades termodinâmicas do fluido em escoamento, muitos problemas de interesse tecnológico são passíveis de serem modelados desta forma, destacando-se por sua atualidade e importância, o problema criado pela necessidade de resfriamento das placas de circuitos eletrônicos usadas na fabricação de computadores.

A metodologia numérica empregada na simulação dos escoamentos acima descritos baseia-se na adoção da técnica de elementos finitos, sob a formulação de resíduos ponderados proposta por Galerkin, adotando na discretização espacial do domínio de cálculo elementos triangulares tipo P1-isoP2, conforme o proposto por Brison, Buffat, Jeandel e Serres (1985).

Considerando as incertezas normalmente existentes a respeito das condições iniciais dos problemas a serem simulados numericamente, adota-se como padrão a integração temporal do sistema de equações governantes. No processo de integração temporal o instante inicial corresponde ao início do escoamento, quando os campos de velocidade e pressão são considerados nulos. O fim do processo ocorre quando cessam as variações temporais dos campos de velocidade, pressão, temperatura e demais variáveis turbulentas.

A discretização temporal do sistema de equações governantes, implementada pelo algoritmo de Brun (1988), usa diferenças finitas semi-implícitas seqüenciais, com erro de truncamento da primeira ordem e permite a linearização do sistema de equações a cada passo de tempo.

A resolução das equações acopladas de continuidade e quantidade de movimento é feita por uma variante do algoritmo de Uzawa proposta por Buffat (1981).

A formulação estatística, responsável pela obtenção do sistema de equações médias que representam o escoamento turbulento, é obtida com o emprego da combinação das decomposições de Favre(1965) e de Reynolds(1895).

O tensor das tensões turbulentas de Reynolds é calculado por meio do modelo $\kappa - \varepsilon$ proposto por Jones e Launder (1972) com as modificações introduzidas por Launder e Spalding (1974). O fluxo turbulento de calor é modelado algebricamente a partir de um número de Prandtl turbulento constante.

As condições de contorno de velocidade e de temperatura nas fronteiras sólidas do domínio são calculadas, respectivamente, por duas leis de parede de velocidade e duas de temperatura. As leis de parede de velocidade adotadas são: lei logarítmica clássica e lei de Cruz e Silva Freire (1998). As leis de parede de temperatura empregadas são: lei de Cheng e Ng (1982) e lei de Cruz e Silva Freire (1998).

A instabilidade numérica resultante do cálculo explícito das condições de contorno de velocidade, ao longo do processo evolutivo temporal, é controlada pelo algoritmo proposto por Fontoura Rodrigues (1990). As oscilações numéricas induzidas pela formulação de Galerkin, marcadamente centrada e simétrica, aplicada ao fenômeno parabólico que é o escoamento modelado, são amortecidas pela técnica de dissipação balanceada proposta por Huges e Brooks (1979) e Kelly, Nakazawa e Zienkiewicz (1976) e implementada por Brun (1988).

Os resultados obtidos numericamente apresentam os perfis de velocidade, de temperatura, de energia cinética de turbulência, da taxa de dissipação da energia cinética de turbulência e os fluxos de calor que se estabelecem em todos os casos teste estudados. Os principais resultados obtidos são comparados às soluções analíticas e aos dados experimentais de Reynolds, Kays e Kline (1958) e Taylor, Love, Coleman e Hosni (1990).

1.2 Pesquisa bibliográfica

Entre os trabalhos experimentais sobre fluxos de calor que se originam pelo contato entre escoamentos turbulentos e incompressíveis de ar e placas planas lisas, horizontais, submetidas a diferentes condições de contorno de temperatura, destaca-se inicialmente à pesquisa de Scesa (1951). Este estudo é pioneiro na avaliação experimental dos fluxos de calor que se estabelecem em função do comprimento ξ da região adiabática. Os escoamentos analisados, considerando o número de Reynolds local como parâmetro de caracterização, situam-se abaixo de 8×10^5 .

Na mesma linha, ainda na década de 50, é publicado o trabalho de Reynolds, Kays e Kline (1958). Esta investigação, financiada pela NASA (National Aeronautics and Space Administration) necessitou três anos para ser concluído e diferencia-se das demais obras sobre este assunto pela utilização dos resultados experimentais obtidos para o aperfeiçoamento e implementação da metodologia de cálculo analítico de fluxos convectivos turbulentos de calor. O trabalho foi implementado em quatro etapas sucessivas, diferenciadas pelas condições de contorno de temperatura impostas ao escoamento: inicialmente foram abordadas placas totalmente isotérmicas; na segunda parte o estudo foi dirigido para placas inicialmente adiabáticas que, a partir de um comprimento estipulado, eram submetidas a um nível constante de temperatura, configurando a aplicação de uma função degrau de temperatura; na terceira parte da pesquisa após

o degrau térmico com as mesmas condições da segunda etapa, a temperatura imposta na placa variava de diferentes formas; na quarta e última etapa, é avaliado o fluxo de calor associado ao regime de transição laminar - turbulento. Este trabalho, pela extensão e qualidade dos resultados experimentais obtidos e pela contribuição para a quantificação analítica dos fluxos de calor provocado por escoamentos turbulentos e incompressíveis de ar, sobre placas planas lisas e horizontais é a obra mais completa existente sobre o assunto.

Os resultados do trabalho de Reynolds, Kays e Kline (1958) foram posteriormente complementados por Taylor, Love, Coleman e Hosni (1990), somente no que se relaciona à análise dos fluxos de calor causados por degraus isotérmicos impostos na placa. No trabalho de Reynolds et. al.(1958), considerando o número de Reynolds local, os escoamentos analisados situam-se entre $1 \times 10^5 < Re_x < 3,5 \times 10^6$, considerando o número de Reynolds definido a partir do comprimento da região adiabática, ξ , os escoamentos ensaiados oscilam entre $1 \times 10^6 < Re_\xi < 3 \times 10^6$. No trabalho de Taylor et. al.(1990), o número de Reynolds local oscila entre $1 \times 10^5 < Re_x < 1 \times 10^7$, e o número de Reynolds definido a partir do comprimento ξ , oscila entre $6 \times 10^5 < Re_\xi < 5,6 \times 10^6$.

Os fracos gradientes de pressão e de temperatura, comuns aos escoamentos estudados experimentalmente por Scesa (1951), Reynolds et. al. (1958) e Taylor et. al. (1990), levam ao desacoplamento entre as equações de quantidade de movimento e energia e comportamento linear da equação de energia. Nestas circunstâncias são possíveis soluções analíticas para o cálculo do fluxo de calor.

A determinação analítica do fluxo de calor pode ser feita por três diferentes metodologias: métodos integrais; métodos de similaridade; métodos das analogias. Nos métodos integrais as formas gerais dos perfis de velocidade e de temperatura são assumidas como conhecidas e a equação integral da energia é usada para a determinação de uma relação local entre os coeficientes de troca de calor e o coeficiente de atrito. Os métodos de similaridade pressupõem que os perfis de velocidade e de temperatura possam se desenvolver, ao longo da direção longitudinal do escoamento, conservando uma razão de aspecto constante. O método das analogias presume o conhecimento das taxas de difusão de quantidade de movimento e de calor e emprega um perfil empírico de velocidade na determinação da taxa de transferência de calor em função do coeficiente de atrito local.

Para escoamentos laminares, ($Re_x < 5 \times 10^5$), as três metodologias acima cita-

das fornecem bons resultados. Para placas planas aquecidas, com defasagem entre as origens das camadas limites de velocidade e temperatura, a solução analítica é eficaz sempre que prevaleça a similaridade entre os perfis de velocidade e de temperatura. A aplicação desta metodologia é tema obrigatório da literatura clássica sobre convecção, destacando-se as obras de Burmeister (1982), Bejan (1984), Arpaci e Larsen (1984) e Kays e Crawford (1980).

Soluções analíticas para escoamentos laminares não-similares são propostas por Sparrow e Yu (1971), considerando a não-similaridades das camadas limites de velocidade e de temperatura e por Drake e Riley (1974) que propõem solução para situações de não-similaridade da camada limite térmica, originadas por distribuições arbitrárias da temperatura na placa.

Para os escoamentos turbulentos enfocados neste trabalho, embora sejam viáveis as técnicas de análise integral, a melhor solução disponível, segundo Reynolds et. al. (1958), é baseada na analogia entre transferência de calor e de quantidade de movimento proposta por von Kármán (1939), complementada pela determinação do fator de atrito feita por análise integral, a partir do perfil de velocidade exponencial com potência de $1/7$. Aperfeiçoamentos desta técnica, considerando as características do escoamento, Número de Reynolds (Re), e do fluido, Numero de Prandtl (Pr), no processo de troca térmica, são possíveis graças aos trabalhos de Colburn (1933) e Schultz-Grunow (1941).

Um desdobramento destes estudos é sua aplicação industrial na área de transferência de calor em circuitos eletrônicos. Neste contexto, diversos trabalhos vêm sendo realizados atualmente visando otimizar os processos de transferência de calor em componentes eletrônicos, visto que o retrospecto histórico da evolução técnica nesta área, aponta para o uso de potências cada vez maiores nos processadores. Guven et al.(1997) realizaram um trabalho baseado em elementos de contorno com objetivo de investigar os efeitos da temperatura gerada por circuitos eletrônicos constituídos por materiais diversos em uma mesma estrutura, variando assim a forma de condução de calor dentro do componente, gerando uma distribuição não uniforme de temperatura na superfície do corpo. Um trabalho semelhante foi apresentado por Wang e Saulnier(1993) onde o efeito da condutividade térmica dos materiais sobre os campos de temperatura e de fluxo de calor foi analisada. Em 2003, Kim et al.(2003) realizaram trabalhos experimentais sobre a transferência de calor em uma placa de alumínio aquecida em um canal, simulando os efeitos de uma fonte de calor de circuitos eletrônicos. Em outro trabalho, Kehoe et al.(2003) estudaram os efeitos do resfriamento por convecção mista

em placas de circuitos impressos.

Capítulo 2 Modelo físico e formulação matemática

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática e o modelo físico adotados no trabalho, iniciando pela apresentação das equações evolutivas instantâneas com base nos princípios fundamentais da conservação de massa, quantidade de movimento e de energia. Aos quais se acrescenta a equação de estado para gases perfeitos, por meio da descrição Euleriana de um escoamento monofásico de fluidos newtonianos. Todas as equações serão expressas em notação indicial considerando referencial cartesiano ortogonal.

Posteriormente o sistema de equações é adimensionalizado a partir de escalas características do escoamento, o que leva ao surgimento dos números adimensionais de Reynolds, que representa uma razão entre as forças de inércia e forças viscosas, Número de Prandtl, que exprime a razão entre a difusão de momento e a difusão térmica, Número de Froude, representando a razão das forças de inércia e forças gravitacionais, além do Número de Mach que permite analisar o grau de compressibilidade do escoamento.

Neste estudo, por se tratar da análise de fenômenos convectivos turbulentos que se desenvolvem em um regime subsônico, onde o número de Mach é menor que 0,3, pode-se desprezar alguns termos referentes a dissipação viscosa, conforme apresentado adiante.

2.1 Equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia

O objetivo deste trabalho é o estudo da transferência de calor por convecção em escoamentos turbulentos e forçados de ar, que se desenvolvem sobre placas planas horizontais parcialmente aquecidas, como mostra a figura (2.1).

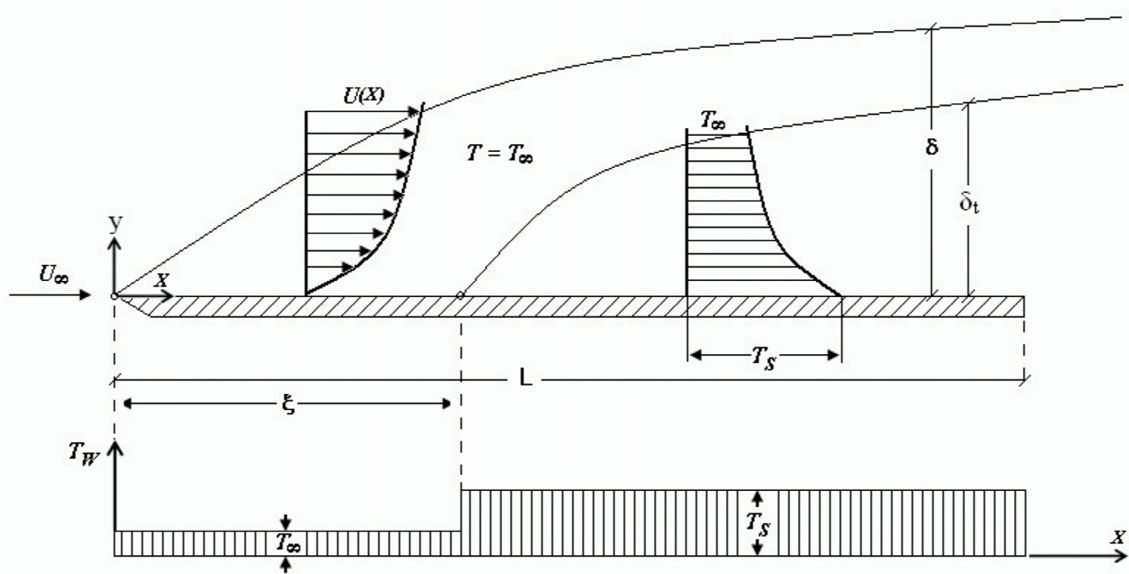


Figura 2.1: Placa plana parcialmente aquecida.

Na figura (2.1) x é a direção tangencial à placa aquecida e também é a direção principal do escoamento, y é a direção normal à placa, u_∞ é a velocidade não perturbada do escoamento, $u(x)$ representa o perfil de velocidade na direção normal à placa, T_∞ é o valor da temperatura do escoamento na região não perturbada pela placa, T_s representa a temperatura da superfície aquecida, δ é a espessura da camada limite fluidodinâmica, δ_t é a espessura da camada limite térmica, L representa o comprimento total da placa e ξ o comprimento do trecho inicial não aquecido.

Para a formulação do modelo físico do problema estudado considera-se o fluido monofásico e homogêneo. Adicionalmente admite-se que no escoamento não existam fontes internas de geração de energia e que o comportamento termodinâmico do fluido possa ser representado pela equação de estado para gases perfeitos.

O sistema de equações que rege esta situação é constituído pelos princípios fundamentais da conservação da massa, quantidade de movimento e conservação da energia aplicado a fluidos newtonianos. Desta forma, o princípio da conservação de massa é expresso por,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 . \quad (2.1)$$

A relação (2.1), também conhecida como equação da continuidade deve ser satisfeita em todos os pontos do domínio. Nessa relação ρ representa a massa específica

do fluido, u_i são as componentes do vetor velocidade, x_i representam as coordenadas espaciais e t o tempo. A quantidade de movimento é representada, na forma conservativa, por,

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (2.2)$$

Nesta equação o termo (ρg_i) representa a atuação das forças de campo por unidade de volume, (g_i) é a componentes da aceleração da gravidade na direção (i) , a variável p representa a pressão e τ_{ij} é o tensor de tensões viscosas, que para um fluido newtoniano é definido como,

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]. \quad (2.3)$$

Na relação (2.3), μ é a viscosidade dinâmica do fluido, δ_{ij} é o operador delta de Kronecker.

O princípio fundamental da conservação da energia em função da temperatura T e calor específico a pressão constantes, (c_p) , desconsiderando-se a possibilidade de fontes internas de geração de calor é representada pela relação

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p u_i T)}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.4)$$

Na relação (2.4), a condutividade térmica do material é representada por k . Por fim, para completar o sistema de equações representativos do fenômeno físico, assumimos que a variação termodinâmica da massa específica seja representada pela equação de estado para gases perfeitos,

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (2.5)$$

onde R é a constante do gás, que para o caso do ar R vale 287 J/KgK .

2.2 Sistema de equações instantâneas

O sistema fechado de equações que representa o escoamento de um fluido newtoniano, compressível e que obedeça a relação de Stokes, não afetado pela presença de fontes de geração interna de calor, tendo como única força de campo a gravidade é composto pelas equações,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 ,$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\} + \rho g_i ,$$

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p u_i T)}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ,$$

$$p = \rho R T ,$$

$$\mu = a \cdot T^n$$

respectivamente, a equação da continuidade, as equações de Navier-Stokes, a equação da energia e a equação de estado para gás perfeito e a relação constitutiva da viscosidade, em que "a" e "n" são constantes.

2.3 Adimensionalização do sistema de equações instantâneas

No sistema das equações instantâneas que rege a evolução das variáveis dependentes u , p , ρ e T , a introdução de escalas características do escoamento permite

reescrever as equações instantâneas sob forma adimensional, facilitando o trabalho de análise do sistema.

Considera-se L , U_0 , T_0 , μ_0 e k_0 , respectivamente, como escalas características de comprimento de referência, velocidade de referência e temperatura de referência, viscosidade dinâmica e condutividade térmica de referência. Com estes valores são definidas as variáveis adimensionais correspondentes, às quais se acrescenta o valor adimensional do tensor de tensões viscosas τ_{ij}^*

$$x_i^* = \frac{x_i}{L}, \quad t^* = \frac{U_0}{L}t, \quad u_i^* = \frac{u_i}{U_0}, \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_0}.$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad k^* = \frac{k}{k_0} \quad \text{e} \quad \tau_{ij}^* = \frac{L\tau_{ij}}{U_0\mu_0},$$

Para o campo de pressão o processo de adimensionalização é conduzido de forma a diferenciar e definir suas componentes mecânica e termodinâmica. Inicialmente o campo de pressão $p(x_i, t)$ é dividido em duas parcelas distintas compostas pela média espacial desse campo $\bar{p}(t)$ e por seu complemento $p'(x_i, t)$ que representa as variações locais de pressão em relação a média, tal que

$$p(x_i, t) = \bar{p}(t) + p'(x_i, t). \quad (2.6)$$

Com base nas componentes média $\bar{p}(t)$ e flutuante $p'(x_i, t)$ são definidas parcelas adimensionais de pressão \underline{p} e \hat{p} , tal que

$$\underline{p} = \frac{p - \bar{p}}{\rho_0 U_0^2} \quad (2.7)$$

e

$$\hat{p} = \frac{p}{p_0}, \quad (2.8)$$

onde p_0 é a pressão de referência, definida pela equação de estado de gás perfeito, $p_0 = \rho_0 R T_0$

As equações (2.7) e (2.8) definem as componentes mecânica \underline{p} e termodinâmica \hat{p} de pressão.

A parcela \underline{p} representa as flutuações adimensionais de pressão, provocadas pela dinâmica do escoamento. A parcela \hat{p} corresponde ao valor médio do campo de pressão e pode ser representada sob argumentação termodinâmica como mostra o desenvolvimento que se segue:

Considerando o número de Mach de referência M_o , tal que

$$M_o = \frac{U_o}{C_o}, \quad (2.9)$$

onde C_o é a velocidade sônica de referência, definida como

$$C_o = \sqrt{\gamma RT_o}, \quad (2.10)$$

com γ representando a relação entre calores específicos, c_p e c_v , de modo que

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (2.11)$$

e a constante de gás perfeito representada por

$$R = c_p - c_v. \quad (2.12)$$

A equação (2.7) permite representar o campo total de pressão $p(x_i, t)$ como

$$p = \underline{p}\rho_o U_o^2 + \bar{p}. \quad (2.13)$$

Substituindo na equação (2.8) o valor de $p(x_i, t)$ definido na equação (2.13), obtém-se

$$\hat{p} = \frac{\rho_0 U_o^2}{p_o} + \frac{\bar{p}}{p_o}. \quad (2.14)$$

Substituindo na equação (2.14) o valor de U_o definido em (2.9), o valor de C_o definido em (2.10), o valor de R definido em (2.12) e o valor de p_o definido por meio da equação de estado para gás perfeito, obtém-se

$$\hat{p} = M_o^2 \gamma \bar{p} + \frac{\bar{p}}{p_o}. \quad (2.15)$$

No processo de adimensionalização são formados os conjuntos de números adimensionais constituídos pelo número de Reynolds,

$$Re = \frac{\rho_0 U_o L}{\mu_0}, \quad (2.16)$$

que representa uma razão entre forças de inércia e forças viscosas. O número de Prandtl:

$$Pr = \frac{\mu_0 C_p}{k_0}, \quad (2.17)$$

que representa a razão entre difusão de momento e a difusão térmica. O número de Froude,

$$Fr = \frac{U_o^2}{\|\mathbf{g}\|L}, \quad (2.18)$$

que relaciona forças de inércia e forças da gravidade. E por fim o número de Mach,

$$M_o = \frac{U_o}{C_o}. \quad (2.19)$$

e por questão de comodidade, visando a simplificação da notação passamos a representar as variáveis adimensionais por u_i , x_i , ρ , T , μ , k e τ_{ij} .

O sistema de equações resultante do processo de adimensionalização, considerando como variáveis adimensionais u_i , x_i , ρ , T , μ , k e τ_{ij} , é dado por,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial \underline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{Fr} \rho \frac{g_i}{\|g\|},$$

$$\frac{\partial (\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i T)}{\partial x_i} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d\hat{p}}{dt} + \frac{1}{RePr} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{M_o^2 (\gamma - 1)}{Re} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$\hat{p} = \rho(T + 1). \quad (2.20)$$

2.4 Hipóteses simplificativas

Neste trabalho o escoamento em estudo é sempre turbulento e acontece sob números de Mach muito baixos. Segundo Fulachier (1972), nesta condição o termo de dissipação viscosa pode ser desprezado. Na equação de energia, para baixos números de Mach, a pressão termodinâmica, definida em (2.15), se reduz a

$$\hat{p} = \frac{\bar{p}}{p_o}. \quad (2.21)$$

Para os escoamentos permanentes em geometria fixa a média espacial do campo de pressão é independente do tempo, sendo definida como $\bar{p}=p_o$.

A equação de energia se reduz a:

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i T)}{\partial x_i} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (2.22)$$

A equação de estado fica reduzida a uma relação direta entre a massa específica ρ e a temperatura T :

$$\rho(T + 1) = 1. \quad (2.23)$$

Ela traduz a dilatabilidade térmica do fluido. Considera-se também que μ e k são invariantes com a temperatura. Esta hipótese nos permite dizer que, quando adimensionalizados, μ e k assumem valores unitários.

$$\mu = 1 \quad \text{e} \quad k = 1. \quad (2.24)$$

O sistema de equações instantâneas simplificadas resulta em

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = & -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{2}{3Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{Fr} \rho \frac{g_i}{\|g\|}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i T)}{\partial x_i} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \quad (2.27)$$

$$\rho(T + 1) = 1. \quad (2.28)$$

2.5 O Sistema de equações médias para escoamento turbulento

Para tornar possível a modelagem numérica da turbulência, com custo computacional aceitável é adotada uma formulação estatística para as variáveis instantâneas baseada na decomposição de Reynolds (1985), segundo a qual as variáveis instantâneas podem ser consideradas como funções randômicas do espaço e do tempo, sendo representadas por duas componentes, uma média temporal e uma flutuação em torno da média.

Para uma variável instantânea genérica $\phi(x, t)$ define-se o valor médio temporal por,

$$\bar{\phi}(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \phi(x_0, t) dt , \quad (2.29)$$

que se aplica ao caso de turbulência estacionária, cuja média deve ser integrada com relação ao tempo.

Nos escoamentos em que a massa específica é constante, a modelagem estatística das variáveis é feita de forma eficiente apenas com a decomposição de Reynolds (1895). Nela define-se a variável $\phi(x, t)$ por,

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x, t) , \quad (2.30)$$

onde $\bar{\phi}(x)$ é a média temporal definida por (2.29) e ϕ' é uma variável aleatória centrada que representa as flutuações de $\phi(x, t)$ em torno de $\bar{\phi}(x)$.

Para escoamentos cuja massa específica não é constante a modelagem estatística é feita por meio da decomposição de Favre (1965). A decomposição de Favre (1965) propõe que

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' , \quad (2.31)$$

onde $\tilde{\phi}$ é definida como

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}, \quad (2.32)$$

a flutuação ϕ'' é uma variável aleatória, não centrada, em torno da média ponderada $\tilde{\phi}$.

As decomposições de Reynolds(1895) e de Favre (1965) são equivalentes

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' = \tilde{\phi} + \phi'', \quad (2.33)$$

porém,

$$\overline{\phi'} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\phi''} \neq 0. \quad (2.34)$$

Se $\phi = \tilde{\phi} + \phi''$ e $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, então:

$$\overline{\rho\phi} = \overline{\bar{\rho}\tilde{\phi}} + \overline{\bar{\rho}\phi''} + \overline{\rho'\tilde{\phi}} + \overline{\rho'\phi''}, \quad (2.35)$$

em que

$$\overline{\rho'\tilde{\phi}} = 0; \quad \overline{\bar{\rho}\tilde{\phi}} = \bar{\rho}\tilde{\phi} \quad \text{e} \quad \overline{\bar{\rho}\phi''} = \bar{\rho}\overline{\phi''}, \quad (2.36)$$

logo a equação (2.37) pode ser escrita como

$$\overline{\rho\phi} = \bar{\rho}\tilde{\phi} + \bar{\rho}\overline{\phi''} + \overline{\rho'\phi''}, \quad (2.37)$$

e com a definição da componente média de Favre (1965), apresentada na equação (2.32), podemos verificar que a média da flutuação da componente ϕ , obtida pela decomposição ponderada pela massa específica pode ser escrita como

$$\overline{\phi''} = -\frac{\overline{\rho' \phi''}}{\bar{\rho}} \quad (2.38)$$

Aplicando a decomposição de Favre (1965) nas componentes de velocidade e temperatura e a decomposição de Reynolds para as demais variáveis do sistema de equações composto por (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28), Brun (1988) mostra que o mesmo pode ser representado por

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = & -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u_i'' u_j''} \right] \\ & - \frac{2}{3Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{Fr} \bar{\rho} \frac{g_i}{\|g\|}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{T})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - \overline{\rho u_i'' T''} \right), \quad (2.41)$$

$$\bar{\rho}(\tilde{T} + 1) = 1. \quad (2.42)$$

Verifica-se que surgem novas incógnitas no sistema de equações representadas por correlações entre flutuações de velocidade, $\overline{\rho u_i'' u_j''}$, e por correlações entre flutuações de velocidade e temperatura, $\overline{\rho u_i'' T''}$, tanto na equação da conservação do momento linear como na equação da energia.

O termo $(\overline{u_i'' u_j''})$ corresponde a correlação entre as flutuações de velocidade. Esta nova incógnita é o tensor de Reynolds. Fisicamente o tensor de Reynolds pode

ser interpretado como tensões geradas pelas flutuações turbulentas do escoamento. De forma semelhante, na equação de energia as flutuações de velocidade e temperatura, $(\overline{u_i'' T''})$, representam o vetor fluxo turbulento de calor.

2.6 O problema de fechamento e os modelos de turbulência

A presença das incógnitas suplementares que compõe o tensor de Reynolds e o fluxo turbulento de calor tornam o sistema de equações médias indeterminado, já que o número de variáveis é maior que o número de equações.

O fechamento do sistema de equações médias é feito por meio de relações capazes de modelar as correlações que definem o tensor de Reynolds e o fluxo turbulento de calor.

Nesta seção, a modelagem apresentada para o tensor de Reynolds é resultante da hipótese da viscosidade turbulenta de Boussinesq (1877), complementado posteriormente por Kolmogorov (1942), por meio da equação

$$\overline{\rho u_i'' u_j''} = \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} - \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) , \quad (2.43)$$

em que μ_t representa a viscosidade turbulenta e κ representa a energia cinética de turbulência dada por

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\overline{u_i'' u_i''} \right) . \quad (2.44)$$

O vetor de correlação entre as flutuações de temperatura e velocidade, que representa um fluxo de calor turbulento, é modelado neste trabalho pela hipótese da difusividade turbulenta,

$$\overline{\rho u_i'' T''} = -\alpha_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} , \quad (2.45)$$

onde Pr_t representa o número de Prandtl turbulento, considerado neste trabalho uma constante de valor 0,9, definido como

$$Pr_t = \frac{C_p \mu_t}{k_t} . \quad (2.46)$$

Com os termos de correlação modelados, resta definir um modelo capaz de determinar os valores da viscosidade turbulenta. Neste trabalho, foi empregado o modelo $\kappa-\varepsilon$, proposto por Jones e Launder (1972) e complementado posteriormente por Launder e Spalding (1974). Este modelo baseia-se no cálculo da viscosidade turbulenta por meio da relação de Prandtl e Kolmogorov, dada por

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (2.47)$$

onde C_μ é uma constante de calibração do modelo, de valor 0,09, κ representa a energia cinética de turbulência e ε é a taxa de dissipação da energia cinética de turbulência. Uma vez que κ e ε são incógnitas suplementares, são necessárias suas equações de transporte dadas respectivamente por

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \bar{\rho} \Pi - \bar{\rho} \varepsilon , \quad (2.48)$$

e

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + \frac{\varepsilon}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} \bar{\rho} \Pi - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon) , \quad (2.49)$$

com

$$\Pi = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\left(\frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\bar{\rho} \kappa + \frac{1}{Re_t} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} , \quad (2.50)$$

onde σ_κ , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$ e $C_{\varepsilon 2}$ são constantes de calibração e o termo Π representa o termo de produção de cisalhamento devido à turbulência.

2.7 O sistema fechado de equações

O sistema fechado de equações para a descrição de um escoamento dilatável de fluido newtoniano, sem geração interna de energia, com termos turbulentos determinados por meio do uso do modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$, é dado por

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{Re Pr} + \frac{1}{Re_t Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right], \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_i} \right] + \Pi - \varepsilon, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + \frac{\varepsilon}{\kappa} (C_{\varepsilon 1} \Pi - C_{\varepsilon 2} \varepsilon), \quad (2.55)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{1 + \tilde{T}}, \quad (2.56)$$

onde,

$$p^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} + \bar{\rho} \kappa \right], \quad (2.57)$$

e as constantes do modelo dadas por, $C_\mu = 0,09$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $\sigma_\kappa = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $Pr_t = 0,9$.

2.8 Aplicação para escoamentos com pequenas variações de temperatura

Nas situações em que as variações de temperatura são pequenas, os efeitos de dilatação do fluido em escoamento podem ser negligenciados, permitindo, a simplificação do sistema de equações composto por (2.39), (2.59), (2.41) e (2.42) para,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.58)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j} \right] + \frac{1}{Fr} \rho \frac{g_i}{\|g\|}, \quad (2.59)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{T})}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \overline{\rho u'_i T'} \right), \quad (2.60)$$

em que ρ assume um valor constante. Nesta situação a média de Favre(1965) se reduz, de forma espontânea, a média de Reynolds(1895). Os termos de correlação entre flutuações de velocidades e temperatura são modelados pelas relações

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.61)$$

e

$$\overline{u'_i T'} = -\frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}, \quad (2.62)$$

onde

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}. \quad (2.63)$$

Capítulo 3 A Camada limite

Este capítulo mostra a formulação analítica considerada neste trabalho para a representação dos princípios de conservação de massa, quantidade de movimento e de energia, dos escoamentos de camada limite. São considerados regimes laminar e turbulento, com destaque para soluções analíticas complementadas por analogias, fundamentadas em conhecimentos empíricos e experimentais, entre difusão de quantidade de movimento e de calor.

O sistema de equações para a camada limite é obtido por simplificações do sistema composto pelas equações (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28), a partir de argumentos de escala.

As leis de parede de temperatura e velocidade apresentadas são as leis clássicas obtidas por integração das equações de quantidade de movimento e de energia, além das leis propostas por Cruz e Silva Freire (1998).

Para escoamentos laminares são apresentadas as soluções integrais de Von-Kàrman (1921) e Pohlhausen (1921). Para escoamentos turbulentos são utilizadas soluções desenvolvidas a partir de analogias para a modelagem do tensor de Reynolds e do fluxo turbulento de calor.

3.1 Equações do movimento e energia

Tomando como ponto de partida as equações da continuidade, quantidade de movimento e equação da energia, representadas por (2.25), (2.26), (2.27), e considerando fluido newtoniano em escoamento bidimensional permanente e incompressível, sem geração de energia interna, é possível representar, em notação cartesiana ortogonal, o sistema simplificado de equações, como

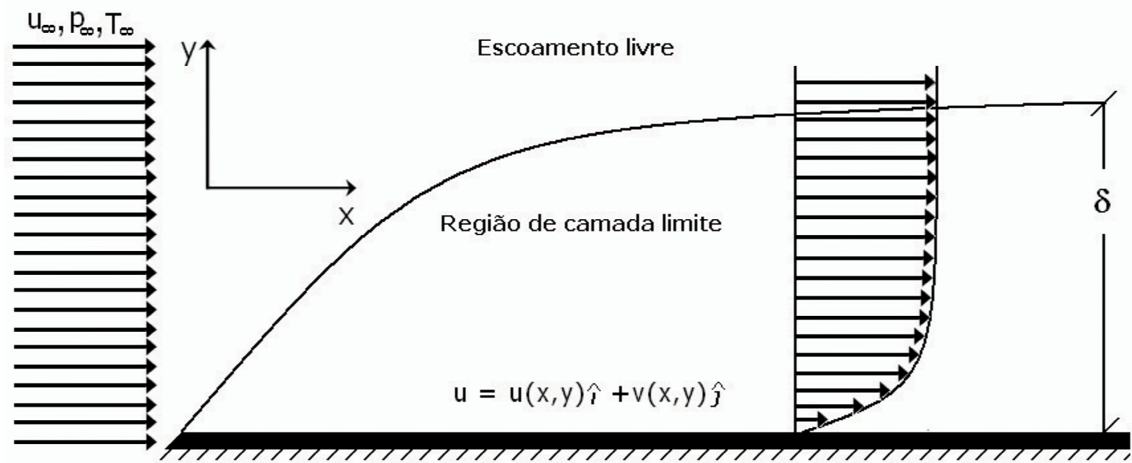


Figura 3.1: Sistema de coordenadas bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (3.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (3.4)$$

onde u é a componente de velocidade na direção tangencial a parede x , e v é a componente de velocidade na direção normal a parede y , conforme mostra a figura (3.1).

3.2 As equações da Camada limite

A redução das equações gerais (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) para o escoamento de camada limite é feita por um processo baseado na análise de ordens de grandeza dos termos que compõe estas equações, segundo a teoria da camada limite de Prandtl(1904).

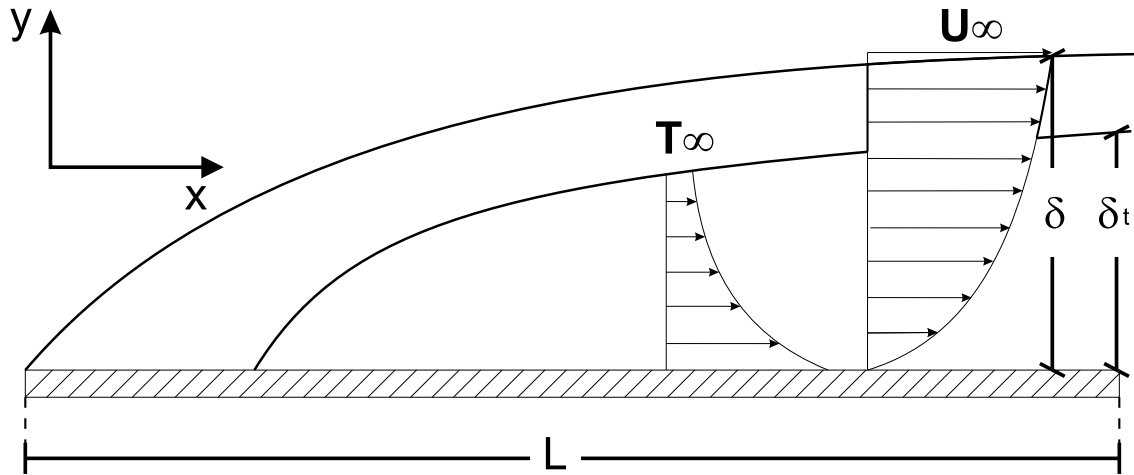


Figura 3.2: Escalas características da camada limite sobre placa plana

Para tanto define-se para o problema de escoamento sobre placa plana aquecida, disposta na posição horizontal, conforme mostra a figura 3.2, as seguintes escalas características:

- Comprimento da direção x : L (comprimento da placa)
- Comprimento na direção y : δ (espessura da camada limite fluidodinâmica)
- Velocidade na direção x : u_∞ (velocidade no escoamento não perturbado)

Da equação da continuidade pode-se verificar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

como

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_\infty}{L} \quad (3.6)$$

pode-se obter para a escala de velocidade na direção normal a parede y

$$v \sim \frac{\delta}{L} u_\infty, \quad (3.7)$$

como admite-se $L \gg \delta$, tem-se, em conseqüência

$$u \gg v, \quad (3.8)$$

ou seja, a velocidade na direção tangencial a placa u apresenta ordem de grandeza superior a da componente de velocidade na direção perpendicular v . A teoria da camada limite de Prandtl(1904) estabelece que os gradientes normais a parede são sempre mais intensos que os gradientes na direção principal do escoamento

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u_\infty}{\delta}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_\infty}{L}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{u_\infty}{L}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\delta}{L} \frac{u_\infty}{L}, \quad (3.12)$$

logo

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Já para a temperatura, na análise da equação da energia tem-se,

$$\frac{\partial T}{\partial y} \sim \frac{T}{\delta_t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{T}{L}. \quad (3.14)$$

Como

$$\frac{T}{\delta_t} \gg \frac{T}{L}, \quad (3.15)$$

então

$$\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Considerando apenas os termos com ordem de grandeza equivalentes a (u_∞^2/L) e o termo de pressão, a componente da equação da quantidade de movimento, segundo a direção x paralela a superfície da placa, assume a forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.17)$$

A análise das ordens de grandeza dos termos que integram a componente da equação de quantidade de movimento ao longo da direção y , normal a superfície da placa, mostra que sua influência é pequena na modelagem do escoamento, podendo ser desprezada. Em coerência com esta simplificação a pressão é assumida como variável apenas ao longo da direção principal do escoamento,

$$p(x, y) \cong p(x) \quad (3.18)$$

A mesma análise dimensional para a equação da energia resulta na formulação

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.19)$$

O sistema de equações resultante, considerando as escalas da camada limite, é composto por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.20)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.21)$$

e

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.22)$$

As equações(3.20), (3.21) e (3.22) representam a evolução das variáveis u , v e T na camada limite, para escoamentos incompressíveis, onde não são consideradas variações nas propriedades físicas. As equações (3.20) e (3.21) são desacopladas da equação (3.22), ou seja, o campo de velocidade pode ser resolvido independentemente da equação (3.22).

3.3 Formulação integral para a camada limite laminar

A solução integral das equações da camada limite proposta originalmente por Kàrman(1921) e aplicada por Pohlhausen(1921) para o sistema de equações (3.20), (3.21), (3.18) e (3.22) é válida para escoamentos incompressíveis, com fluidos com propriedades físicas constantes e dissipação viscosa desprezível.

Partindo da forma diferencial das equações da continuidade, quantidade de movimento e conservação da energia, a integração do sistema na direção y , perpendicular a parede, ao longo da espessura da camada limite, com os limites definidos entre $y = 0$ até $y = Y$, para $Y = \max\{\delta, \delta_T\}$ em que δ é a espessura da camada limite fluidodinâmica e δ_t é o a espessura da camada limite térmica, aplicada inicialmente na equação da continuidade leva a:

$$\int_0^Y \frac{du}{dx} dy + \int_0^Y \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0, \quad (3.23)$$

cuja integração resulta em

$$\int_0^Y \frac{du}{dx} dy + v(Y) - v(0) = 0, \quad (3.24)$$

na parede $y = 0$ e $v = 0$, logo

$$v(y) = - \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (3.25)$$

A aplicação da mesma metodologia a equação da quantidade de movimento na direção x leva a

$$\int_0^Y u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^Y v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \int_0^Y \frac{dp}{dx} dy + \nu \int_0^Y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy, \quad (3.26)$$

como foi verificado através da análise de escala da equação da quantidade de movimento na direção y , o gradiente de pressão não varia de forma sensível nessa direção, portanto pode-se obter da integração do termo do pressão:

$$\int_0^Y u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^Y v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{Y}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \int_0^Y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy, \quad (3.27)$$

Integrando por partes o segundo termo do lado esquerdo da equação acima tem-se:

$$\int_0^Y u \frac{\partial u}{\partial x} dy + uv \Big|_0^Y - \int_0^Y u \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{Y}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^Y \quad (3.28)$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.25) obtém-se:

$$\int_0^Y u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u_\infty \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^Y u \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{Y}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^Y, \quad (3.29)$$

ou

$$u_\infty \int_0^Y \frac{\partial u}{\partial y} - \int_0^Y 2u \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{Y}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3.30)$$

e através da regra da cadeia pode-se reescrever esta equação da seguinte forma:

$$\int_0^Y \frac{\partial}{\partial y} (u_\infty \cdot u - u \cdot u) dy = -\frac{Y}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3.31)$$

Para escoamento sobre placa plana,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dP_\infty}{dx} = 0, \quad (3.32)$$

o que permite que a equação (3.31) possa ser reorganizada sob a forma

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^Y (u_\infty - u) u dy \right] = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (3.33)$$

que representa a forma integral da equação da quantidade de movimento da camada limite.

De forma semelhante pode-se obter para a equação da energia o seguinte resultado:

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^Y (T_\infty - T) u dy \right] = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (3.34)$$

As equações 3.33 e 3.34 representam as forma integrais para a equação da quantidade de movimento e energia na camada limite.

As condições de contorno de velocidade do problema de convecção que se desenvolve em regime laminar sobre placa plana horizontal são, na parede, em $y = 0$

$$u \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.35)$$

$$v \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.37)$$

e na extremidade superior da camada limite, em $y = \delta$

$$u \Big|_{y=\delta} = u_\infty \quad (3.38)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = 0 \quad (3.39)$$

Para a obtenção de uma solução integral para a camada limite de velocidade com as condições de contorno anteriormente descritas, aproxima-se o perfil de velocidade por um polinômio de terceiro grau do tipo

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (3.40)$$

Substituindo o perfil(3.40) na equação (3.33) e procedendo a integração obtém-se

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{39}{280} u_\infty^2 \delta \right) = \frac{3 \nu u_\infty}{2 \delta}, \quad (3.41)$$

cuja integração em x leva a:

$$\delta = 4.64 \left(\frac{\nu x}{u_\infty} \right)^{1/2} = 4.64 x (Re_x)^{-1/2} \quad (3.42)$$

Com a substituição de (3.42) em (3.40) é possível obter uma expressão para o coeficiente de fricção Cf_x do tipo

$$Cf_x = \frac{\tau_p}{\rho u_\infty / 2} = \frac{0.646}{(Re_x)^{1/2}} \quad (3.43)$$

O tratamento para a equação da energia é similar ao realizado para a equação da quantidade de movimento, onde o perfil de temperatura pode ser aproximado por um polinômio de terceiro grau, do tipo:

$$\theta = \frac{T_p - T}{T_p - T_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_t} \right)^3. \quad (3.44)$$

Cujas condições de contorno são na parede, em $y = 0$

$$\theta \Big|_{y=0} = 0 \quad (3.45)$$

e para a região superior da camada limite de temperatura, em $y = \delta_t$

$$\theta \Big|_{y=\delta_t} = 1, \quad (3.46)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=\delta_t} = 0 \quad (3.47)$$

e

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right|_{y=\delta_t} = 0 \quad (3.48)$$

O coeficiente de transferência de calor, h , é definido por

$$h = \frac{-k \partial T / \partial y|_{y=0}}{T_p - T_\infty} = \frac{3}{2} \frac{k}{\delta_t}. \quad (3.49)$$

Através da substituição da equação (3.40) e (3.44) em (3.34) obtém-se uma relação entre as espessuras de camada limite em função do número de Prandtl expressa por:

$$\frac{\delta_t}{\delta} = 0.975 Pr^{(-1/3)}. \quad (3.50)$$

Com este resultado obtém-se o número de Nusselt, para o caso em que as camadas limites térmica e fluidodinâmica iniciam seu desenvolvimento no mesmo ponto em $x = 0$, definido por:

$$Nu_x = \frac{hx}{k} = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}, \quad (3.51)$$

que é o resultado apresentado pela solução exata dada por similaridade.

Já para o caso onde as camadas limites não tem o ponto de início coincidentes, com comprimento inicial não aquecido ($\xi \neq 0$) como mostra a figura(3.2), Kays e Crawford(1980)propõem uma relação para o Número de Nusselt, dada por

$$Nu = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{3/4} \right]^{(-1/3)} \quad (3.52)$$

3.4 A camada limite turbulenta

3.4.1 O sistema de equações médias

Neste tópico do trabalho são apresentadas inicialmente as equações médias que representam os princípios da conservação de massa, quantidade de movimento e energia

para a camada limite turbulenta. Posteriormente são mostradas as leis de parede de velocidade e de temperatura necessárias à aplicação do modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$ de Launder e Jones(1974).

Na seqüência são desenvolvidos, a partir de analogias entre dissipação de quantidade de movimento e de calor, relações necessárias a determinação do Número de Stanton local e do coeficiente de atrito local que serão usados na avaliação dos resultados numéricos.

O sistema de equações médias que modela a camada limite turbulenta é resultado do processo de substituição das variáveis instantâneas das equações (3.20), (3.21), (3.18) e (3.22) pela decomposição de Reynolds, complementado pela obtenção do valor médio destas equações. Deste processo resultam

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0, \quad (3.53)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right), \quad (3.54)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \overline{T'v'} \right). \quad (3.55)$$

Conforme apresentado na seção (2.5), os novos termos que aparecem no sistema de equações representam as correlações entre a flutuação de velocidade $\overline{u'v'}$ e flutuação de temperatura e de velocidade $\overline{T'v'}$.

Modelando a correlação $\overline{u'v'}$ por meio da hipótese de Boussinesq, onde ν_t é a viscosidade turbulenta

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3.56)$$

que substituído na equação (3.54) resulta em

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right], \quad (3.57)$$

A difusão molecular turbulenta de quantidade de movimento na camada limite turbulenta, dada por

$$\frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.58)$$

substituída em (3.57) resulta em

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{d\bar{p}}{dx} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0. \quad (3.59)$$

Na região interna da camada limite turbulenta sobre placa plana, o gradiente longitudinal de pressão, $(\partial p / \partial x)$ e o termo de convecção, $\rho \bar{u} (\partial \bar{u} / \partial x)$ são desprezíveis, permitindo que a equação (3.59) seja simplificada de forma que

$$\rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad (3.60)$$

como $\bar{u} = u(y)$ e para camadas limites turbulentas é possível considerar que a tensão cisalhante total τ seja constante na região interna da camada limite e igual a seu valor na parede, τ_p , é possível integrar a equação (3.60) ao longo de y , determinando a função que descreve o campo de velocidade média como função de y .

O processo de integração da equação (3.60) deve ser feito considerando que na sub-camada laminar a tensão cisalhante é resultante, basicamente, da difusão molecular de quantidade de movimento

$$\tau = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3.61)$$

e que na região turbulenta o cisalhamento é causado principalmente pela difusão turbulenta de quantidade de movimento

$$\tau = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3.62)$$

com

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (3.63)$$

onde "l" é o comprimento de mistura de Prandtl.

Para a obtenção da função $\bar{u} = u(y)$, que será apresentada mais adiante, é conveniente definir-se a variável u_f , conhecida como velocidade de atrito,

$$u_f^2 = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (3.64)$$

e as escalas de velocidade e comprimento adimensionais

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_f} \quad \text{e} \quad y^+ = \frac{u_f y}{\nu}, \quad (3.65)$$

onde "y" é um comprimento referente a distância normal a parede.

A correlação $\overline{T'v'}$, que representa o fluxo difusivo turbulento de calor é modelada, como na equação (2.45), de forma similar à difusão molecular de calor de Fourier, por meio de uma difusividade térmica turbulenta α_t e pelo gradiente médio de temperatura, segundo a direção normal a parede,

$$\overline{T'v'} = -\alpha_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (3.66)$$

onde o sinal negativo representa a direção do fluxo de calor difusivo, sempre na direção de diminuição do gradiente de temperatura média. A substituição de (3.66) na equação da energia resulta em

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right]. \quad (3.67)$$

Na ausência de gradientes de pressão significativos é razoável a pressuposição básica da analogia de Reynolds, segundo a qual as difusões turbulentas de quantidade de movimento e de calor são equivalentes, ou seja,

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} = 1. \quad (3.68)$$

O fluxo difusivo de calor por unidade de área, considerando as difusividades molecular e turbulenta, é então representado por

$$q'' = -\rho c_p (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (3.69)$$

com

$$k = \rho c_p \alpha \quad \text{e} \quad k_t = \rho c_p \alpha_t. \quad (3.70)$$

A equação de conservação da energia, na camada limite turbulenta, equação (3.67), pode então ser representada como

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q''}{\partial y} = 0. \quad (3.71)$$

3.5 Fluxo de calor na camada limite turbulenta

Fluidos com número de Prandtl aproximadamente unitários apresentam, na camada limite turbulenta, perfis de velocidade e temperatura similares. Ainda na região interna da camada limite turbulenta, os valores do fluxo de calor e da tensão cisalhante são aproximadamente constantes e iguais a seus valores na parede.

O fluxo de calor na parede pode ser representado por

$$q_p = -(k + \rho c_p \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (3.72)$$

e a tensão cisalhante na parede por

$$\tau_p = (\mu + \rho \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (3.73)$$

A razão entre o fluxo de calor e a tensão cisalhante na parede é

$$-\frac{\tau_p}{q_p} = \frac{\rho(\nu + \nu_t)}{\rho c_p(\alpha + \alpha_t)} \frac{d\bar{u}}{d\bar{T}}. \quad (3.74)$$

Admitindo-se que $Pr \sim 1$ e $Pr_t \sim 1$, ou seja, $\alpha = \nu$ e $\alpha_t = \nu_t$, tem-se

$$\frac{1}{c_p} \frac{d\bar{u}}{d\bar{T}} = -\frac{\tau_p}{q_p}. \quad (3.75)$$

Integrando esta relação da parede, onde $\bar{u} = 0$ e $\bar{T} = T_p$, até um ponto genérico y onde $\bar{u} \cong u_\infty$ e $\bar{T} \cong T_\infty$, obtém-se

$$\frac{u_\infty}{c_p(T_\infty - T_p)} = -\frac{\tau_p}{q_p}. \quad (3.76)$$

Esta relação entre fluxo de calor e tensão cisalhante na parede pode ser expressa por meio de parâmetros adimensionais a partir do número de Stanton local que representa o fluxo de calor adimensional local

$$St_x = \frac{-q_p}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} \quad (3.77)$$

Da equação (3.76)

$$-q_p = \tau_p \frac{c_p(T_p - T_\infty)}{u_\infty} \quad (3.78)$$

Fazendo a substituição de q_p , definido em (3.78) em (3.77), obtém-se

$$St_x = \tau_p \cdot \frac{c_p(T_p - T_\infty)}{u_\infty} \cdot \frac{1}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)}, \quad (3.79)$$

logo

$$St_x = \frac{\tau_p}{\rho u_\infty^2}, \quad (3.80)$$

como

$$\frac{Cf_x}{2} = \frac{\tau_p}{\rho u_\infty^2}, \quad (3.81)$$

então

$$St_x = \frac{Cf_x}{2}. \quad (3.82)$$

Uma solução aproximada para a determinação do coeficiente de atrito local, Cf_x bem apresentada por Kays e Crawford(1993) e baseada em uma representação da camada limite pela lei de potência

$$u^+ = 8.75y^{+1/7}, \quad (3.83)$$

que apresenta ótimo resultado até $y^+ = 1500$ é dada pela relação

$$\frac{Cf_x}{2} = 0.0287 Re_x^{-0.2} Pr^{-0.4}. \quad (3.84)$$

Outra forma de determinação do coeficiente de atrito local Cf_x , baseada em sua definição, equação (3.81), pode ser calculada numericamente por

$$\frac{\tau_p}{\rho} = u_\infty^2. \quad (3.85)$$

Segundo Reynolds et al.(1958) a solução integral

$$\frac{Cf_x}{2} = 1,6[\ln Re_x]^{-2,58} \quad (3.86)$$

é a que melhor representa o estudo experimental de Schultz-Grunow(1941) feito sobre placas planas horizontais lisas até $Re_x = 10^9$.

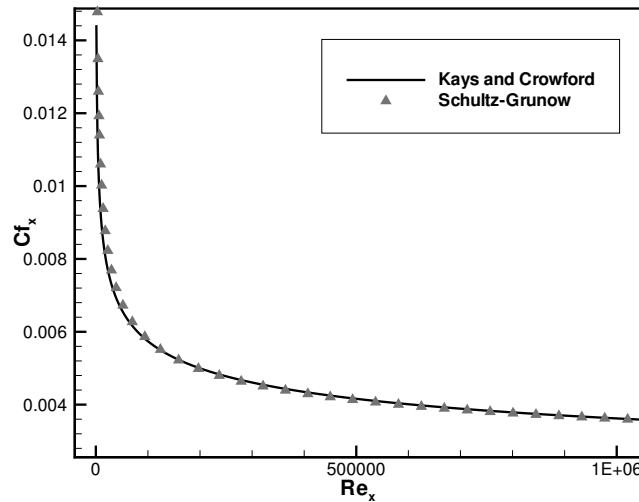


Figura 3.3: Relação coeficiente de fricção e número de Reynolds

Na figura (3.3) são apresentados os valores do coeficiente de atrito local Cf_x em função do número de Reynolds local Re_x , calculados com as relações (3.84) e (3.86).

Um desenvolvimento semelhante ao feito para a camada limite de velocidade é implementado para a camada limite de temperatura, tomando como ponto de partida os perfis empíricos de temperatura

$$\frac{T_p - \bar{T}}{T_p - T_\infty} = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{1/7} \quad (3.87)$$

e de tensão cisalhante

$$\frac{\tau}{\tau_p} = 1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{9/7}. \quad (3.88)$$

Com base nestas relações empíricas e considerando, para escoamentos com Pr_t unitário, as relações (3.58), (3.69) e (3.84), obtém-se

$$\frac{q''}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} = \frac{Cf_x}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{9/7} \right] \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^{-1/7}, \quad (3.89)$$

que na parede, em $y = 0$, se reduz a

$$St_x = \frac{q_p''}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} = \frac{Cf_x}{2} \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^{-1/7}, \quad (3.90)$$

que relaciona o fluxo adimensional de calor representado pelo número de Stanton com características geométricas e dinâmicas das camadas limites de velocidade e de temperatura.

Em 1939 Von-Kàrman propôs uma relação geral para o número de Stanton em função de propriedades termodinâmicas do fluido em escoamento, representada pelo número de Prandtl, e de propriedades dinâmicas do escoamento, representadas pelo coeficiente de atrito local, Cf_x , sob a forma

$$St = \frac{Cf_x/2}{1 + \sqrt{Cf_x/2} \cdot [5 \cdot Pr + 5 \cdot \ln(5 \cdot Pr + 1) - 14]} \quad (3.91)$$

Para números de Prandtl unitários a equação (3.91) recai na relação clássica $St = Cf_x/2$.

Através da análise integral das equações de movimento e energia, Reynolds et. al(1958) mostram que, para perfis de velocidade que sigam a lei de potência de 1/7, tem-se

$$Cf_x/2 = 0.0228.Re_x^{-0.25}, \quad (3.92)$$

que foi a relação proposta por Blasius em seus estudos em escoamentos que se desenvolviam em tubos.

A relação de Stanton proposta por Von-Kàrman, equação (3.91), combinada com a solução integral (3.86) leva a forma

$$St = \frac{1,6(\ln Re_x)^{-2,58}}{1 + 1,26(\ln Re_x)^{-1,29}[5.Pr + 5.\ln(5.Pr + 1) - 14]}. \quad (3.93)$$

3.6 Fluxo de calor em camadas limites turbulentas com um comprimento inicial de parede adiabática

Para escoamentos cujas propriedades termodinâmicas não variem sensivelmente com a temperatura e os números de Prandtl e Prandtl turbulento sejam unitários é possível obter-se uma solução analítica quando existe defasagem entre o início da camada limite térmica e fluidodinâmica, conforme indicado na figura (3.4),

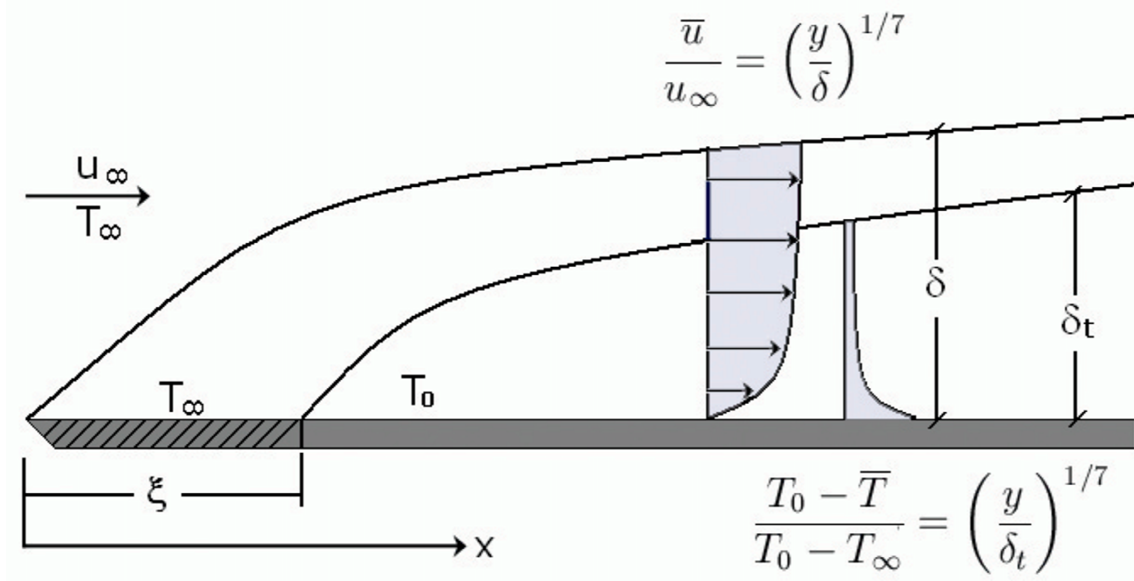


Figura 3.4: Placa plana - Não isotérmica

a resolução recai em um problema de valor inicial em δ_t , com a condição inicial de $\delta_t = 0$ em $x = \xi$, cuja solução mostrada por Kays e Crawford(1980) é:

$$St_x = \frac{C_f}{2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9}. \quad (3.94)$$

Através de correlações empíricas e aplicando uma correção para a faixa $0.5 < Pr < 1.0$, Kays e Crawford(1980), chegam a uma relação para o número de Stanton local expressa por:

$$St_x = 0.0287 Pr^{-2/5} Re_x^{-1/5} \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1/9} \quad (3.95)$$

Existem diversas maneiras de para a realização da análise dos dados e para a sua apresentação, quando se trata de um problema de convecção com defasagem entre o início da camada limite térmica e fluidodinâmica. Uma das formas que torna mais fácil a visualização dos efeitos desta defasagem é a apresentação da relação St/St_T , onde o número de Stanton, St , dado pela relação (3.95) e St_T representa o número de Stanton para uma configuração onde as duas camadas limite tem o início simultâneo, ou seja, com $\varepsilon = 0$. A relação entre os números de Stanton, de forma geral, podem ser representadas por:

$$\frac{St}{St_T} = f\left(\frac{\xi}{x}\right) \quad (3.96)$$

onde a função $f\left(\frac{\xi}{x}\right)$ representa a correção que se faz devido aos efeitos de um comprimento inicial não aquecido. Taylor et al.(1990) mostra que esta relação, para escoamentos de ar, pode ser representada por:

$$\frac{St}{St_T} = \left[1 - \left(\frac{\xi}{x}\right)^{0,9}\right]^{-1/9} \quad (3.97)$$

3.7 Leis de parede

Neste trabalho foi utilizado o modelo $\kappa - \varepsilon$ de Launder e Jones (1974), que calcula as condições de contorno parietais de velocidade e de temperatura com o auxílio de leis de parede. As leis de parede são capazes de modelar o comportamento da região interna da camada limite, por meio de uma expressão analítica explícita para o cálculo da velocidade tangencial e da temperatura na vizinhança imediata do contorno sólido do escoamento estudado.

O gráfico abaixo mostra a estrutura da camada limite turbulenta típica de um escoamento incompressível sobre placa plana. O modelo $\kappa - \varepsilon$ não é capaz de modelar corretamente o escoamento parietal plenamente turbulento. Na sub-camada laminar, região de transição e no início da região logarítmica, a importância da viscosidade molecular associada aos fortes gradientes de velocidade e às altas taxas de produção de turbulência impedem que o modelo $\kappa - \varepsilon$ funcione de forma coerente.

Para contornar esta deficiência a parte inicial da região interna da camada limite turbulenta, onde é falha a modelagem do $\kappa - \varepsilon$, é excluída do domínio de cálculo. A nova fronteira do domínio fica afastada do contorno sólido uma distância capaz de garantir a exclusão da região de difícil simulação a as condições de contorno de velocidade, temperatura e demais variáveis turbulentas passam a ser calculadas por meio de relações denominadas leis de parede.

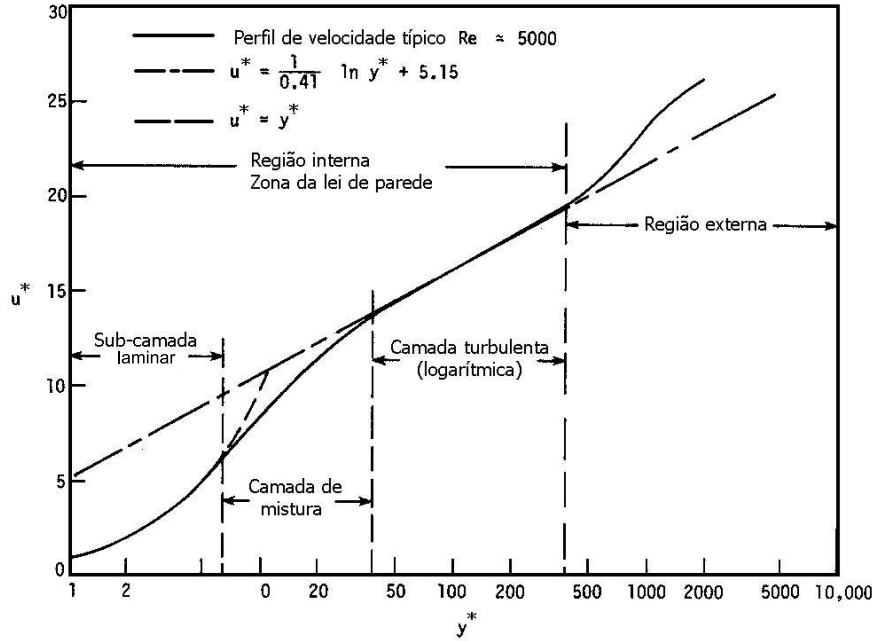


Figura 3.5: Estrutura da camada limite turbulenta

3.7.1 leis de parede de velocidade

3.7.1.1 Lei de parede logarítmica clássica

A lei de parede logarítmica clássica é obtida pela integração da equação (3.64) considerando que o valor da tensão cisalhante na parede, τ_p , se mantenha constante ao longo da região interna da camada limite turbulenta e que as participações das difusões molecular e turbulenta de quantidade de movimento sejam tal que obedeçam o comportamento ilustrado na figura (3.6).

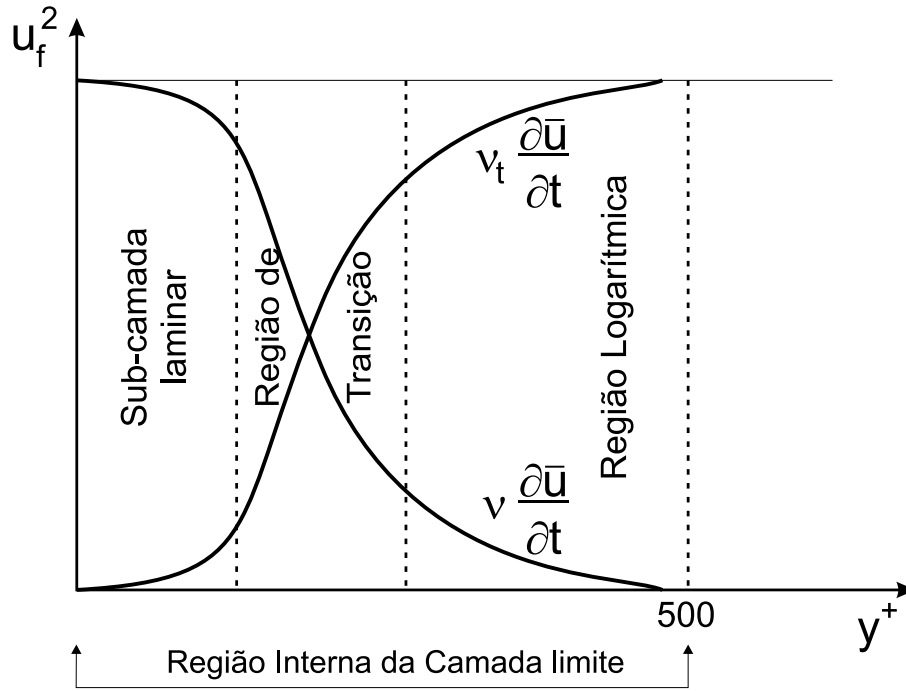


Figura 3.6: Variação da velocidade de atrito u_f em função do comprimento adimensional y^+

Para efeito de cálculo a região de transição é considerada como puramente molecular até $y^+ = 11,6$ e puramente turbulenta para valores maiores que $y^+ = 11,6$, que é o único ponto capaz de satisfazer aos comportamentos laminar e turbulento.

A partir do conceito das tensões cisalhantes, tem-se para uma região próxima a parede

$$d\bar{u} = \frac{\tau_p}{\rho\nu} dy, \quad (3.98)$$

onde o resultado da integração dada pela relação abaixo

$$\int_0^{\bar{u}} d\bar{u} = \frac{\tau_p}{\mu} \int_0^y dy \quad (3.99)$$

leva a $(u^+ = y^+)$, que é a expressão que representa o comportamento do escoamento na região interna da camada limite, conhecida como sub-camada laminar.

Já para as regiões um pouco mais afastadas da parede onde $\nu_t \gg \nu$ temos:

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \nu_t \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (3.100)$$

Da equação (3.65) pode-se verificar que

$$\frac{\tau_p}{\rho} = l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = K^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (3.101)$$

Utilizando as variáveis u^+ e y^+ temos

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{Ky^+}, \quad (3.102)$$

cuja resolução através da integração nos leva a

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln(y^+) + C_{ln}, \quad (3.103)$$

onde K é a constante de Von Kármán e C_{ln} é uma constante de calibração, valendo respectivamente 0,419 e 5,445.

3.7.1.2 Lei Cruz e Silva Freire

Por meio de uma análise da camada limite em escoamentos com gradientes adversos de pressão, regiões de descolamento e recolamento de camada limite, Cruz e Silva Freire (1998) propuseram, por expansões assintóticas, as seguintes representações para o campo de velocidade média, pressão e flutuação de velocidade

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \epsilon u_2(x, y), \\ v(x, y) &= \frac{\eta}{\Delta} [v_1(x, y) + \epsilon v_2(x, y)], \\ p(x, y) &= p_1(x, y) + \epsilon p_2(x, y), \\ u'_i(x, y) &= \epsilon u'_{i1}(x, y) + \epsilon^2 u'_{i2}(x, y), \end{aligned}$$

complementadas pelas seguintes representações

$$x_{\Delta} = \frac{x}{\Delta(\epsilon)}, \quad y_{\eta} = \frac{y}{\eta(\epsilon)}, \quad \hat{u}_i(x_{\Delta}, y_{\eta}) = u_i(x, y). \quad (3.104)$$

Cruz e Silva Freire(1998) mostram que tais variáveis aplicadas às equações de quantidade de movimento e de conservação de massa, juntamente com as condições de contorno de tensão na parede e balanço entre as tensões turbulentas e viscosas, levam a

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w \quad e \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{\rho u_i' v_i2'} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.105)$$

Próximo ao ponto de descolamento, a velocidade de atrito, (u_f) , não é um bom parâmetro de referência, uma vez que tende a zero. Por meio da análise assintótica, Cruz e Silva Freire (1998) determinaram uma velocidade de referência u_R que se aplica a tal situação, sendo definida como a maior raiz real da equação algébrica

$$u_R^3 - \frac{\tau_p}{\rho} u_R - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.106)$$

que é dada quando o termo $-(\tau_p/\rho)u_R$ tende a zero, logo

$$u_R \rightarrow \left(\frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.107)$$

recuperando, assim, o resultado proposto por Stratford (1959) e Townsend (1976), que estudaram experimentalmente e analiticamente a estrutura da camada limite turbulenta em regiões de baixa velocidade, próximas a situação de descolamento.

Com este trabalho Cruz e Silva Freire(1998) propõem como lei de parede de velocidade a relação

$$u = \frac{\tau_p}{|\tau_p|} \frac{2}{K} \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} y} + \frac{\tau_p}{|\tau_p|} \frac{u_f}{K} \ln \left(\frac{y}{L_c} \right), \quad (3.108)$$

em que L_c representa uma escala característica de comprimento, definida por:

$$L_c = \frac{\sqrt{\left(\frac{\tau_p}{\rho}\right)^2 + 2\frac{\nu}{\rho} \frac{dp}{dx} u_R - \frac{\tau_p}{\rho}}}{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}}, \quad (3.109)$$

onde $K = 0,4$ é a constante de von Kármán.

A lei de parede de Cruz e Silva Freire(1998), equação (3.108), tende a forma da lei logarítmica clássica, equação (3.103), na medida em que os gradientes longitudinais de pressão tendem a zero.

3.7.2 Lei de parede de temperatura

3.7.2.1 Lei de parede de temperatura de Cheng e Ng(1982)

De forma similar ao apresentado para a difusão de quantidade de movimento, pode-se verificar, através de argumentos de escala que, nas regiões internas da camada limite, o termo $\partial \bar{T} / \partial x$ tem ordem de grandeza inferior ao termo $\partial \bar{T} / \partial y$, levando, desta forma, a uma variação da temperatura apenas na direção normal a superfície, $\bar{T} = \bar{T}(y)$, segundo a equação da energia (3.71).

A partir da integração da expressão (3.69), que representa o fluxo de calor na direção normal a parede, nos limites de temperatura $\bar{T} = T_p$ e $\bar{T} = T$ e de comprimento $y = 0$ e $y = y$, em que T_p representa a temperatura na parede e \bar{T} uma temperatura no ponto genérico y , tem-se

$$\int_{\bar{T}_p}^{\bar{T}} dT = -\frac{q_p''}{\rho c_p} \int_0^y \frac{dy}{(\alpha + \alpha_t)} \quad (3.110)$$

Analogamente ao caso de difusão de quantidade de movimento, define-se agora uma variável adimensional de temperatura, representada por T^+ , através da relação

$$T^+ = u_f(\rho c_p) \frac{(T_p - \bar{T})}{q_p''}. \quad (3.111)$$

Substituindo, na relação (3.110), os valores das variáveis adimensionais T^+ e y^+ , permite reescrever a relação como

$$T^+ = \int_0^{y^+} \frac{dy^+}{(Pr^{-1} + \frac{\alpha_t}{\nu})} \quad (3.112)$$

Da mesma forma como realizado para leis de parede de velocidade, o respeito as características físicas da camada limite, são, para as leis de parede de temperatura, trazidos pela integração em regiões distintas até a altura crítica, y_t^+ , situada na região de transição. Na região da sub-camada laminar predominam os efeitos da difusão molecular de calor e quantidade de movimento, já na região logarítmica da camada limite predominam os efeitos da difusão turbulenta de calor e de quantidade de movimento.

A integral (3.112), resolvida em duas etapas considera para as regiões de maior proximidade da parede, internamente à sub-camada laminar, apenas os efeitos moleculares, desprezando os efeitos turbulentos. A segunda etapa de integração deve ser feita de forma a caracterizar a predominância dos efeitos turbulentos sobre os efeitos moleculares nesta região, levando a equação (3.112) a

$$T^+ = Pr \int_0^{y_t^+} dy^+ + \int_{y_t^+}^{y^+} \frac{dy^+}{\frac{\alpha_t}{\nu}}, \quad (3.113)$$

que pode ser reescrita em função da difusividade térmica turbulenta ν_t por meio da relação

$$T^+ = Pr \int_0^{y_t^+} dy^+ + \int_{y_t^+}^{y^+} Pr_t \frac{dy^+}{\frac{\nu_t}{\nu}}. \quad (3.114)$$

Conforme realizado para as leis de parede de velocidade, utiliza-se a teoria do comprimento de mistura de Prandtl para a substituição do termo

$$\frac{\nu_t}{\nu} = Ky^+, \quad (3.115)$$

na equação (3.114), resultando em

$$T^+ = Pr \int_0^{y_t^+} dy^+ + \int_{y_t^+}^{y^+} Pr_t \frac{dy^+}{Ky^+}, \quad (3.116)$$

cujo resultado leva a

$$T^+ = Pr y^+ + \frac{Pr_t}{K} \ln y^+ + C \quad (3.117)$$

As leis de parede adotadas para este trabalho foram calibradas experimentalmente e propostas por Cheng e Ng (1982).

$$T^+ = 0.8 \ln y^+ + 12.5 \quad (3.118)$$

Para a implementação numérica, o limite entre estas duas expressões para a região interna da camada limite é de $y^+ = 15,96$.

3.7.2.2 Lei Cruz e Silva Freire - Temperatura

De forma análoga proposta para a velocidade, Cruz e Silva Freire (1998) propõem para a temperatura a seguinte expansão:

$$T(x, y) = T_1(x, y) + \epsilon T_2(x, y) , \quad (3.119)$$

Utilizando os mesmos princípios empregados na obtenção da lei que modela o perfil de velocidade nas regiões próximas as superfícies sólida, Cruz e Silva Freire (1998) apresentam uma lei de parede para a temperatura, posteriormente corrigida por Cruz e Silva Freire (2002), cujo resultado é

$$\frac{T_p - T}{q_p} = \frac{Pr_t}{K\rho c_p u_f} \ln \frac{\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} y} - \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} y} + \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}} + C_q , \quad (3.120)$$

com os seguintes parâmetros:

$$C_q = \frac{Pr_t}{K\rho C_p u_R} \ln \frac{4Eu_R^3}{\nu \left| \frac{dp}{dx} \right|} + AJ , \quad (3.121)$$

$$AJ = 1.11 Pr_t \sqrt{\frac{AX}{K}} \left(\frac{Pr}{Pr_t} - 1 \right) \left(\frac{Pr}{Pr_t} \right)^{0,25} , \quad (3.122)$$

$$AX = 26 \frac{\left| \frac{\tau_p}{\rho} \right|^{\frac{1}{2}}}{u_R} , \quad (3.123)$$

considerando, ainda, que $K = 0,4$ é a constante de von Kármán e $E = 9,8$ é uma constante da lei de parede.

3.8 Condições de contorno para o modelo de turbulência $\kappa - \epsilon$

Na região interna da camada limite, as equações de transporte para a energia cinética de turbulência e para sua taxa de dissipação são reduzidas ao equilíbrio entre produção e dissipação, levando às seguintes relações para κ e para ϵ na parede:

$$\kappa_p = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_p = \frac{u_f^3}{K y} . \quad (3.124)$$

A velocidade de atrito, em todas as relações para as leis de parede anteriores, é calculada de acordo com a seguinte expressão:

$$u_f^2 = \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \frac{\partial (\bar{u} \cdot t)}{\partial n} \right]_y , \quad (3.125)$$

onde t representa o vetor tangencial à superfície da parede e n é o vetor normal à parede, ambos no ponto considerado para o cálculo. Esta metodologia para a obtenção de valores de κ e ε na parede é válida somente na ausência de gradientes adversos de pressão. Porém, nesta condição, a hipótese de equilíbrio não é mais válida como mostrado no trabalho de Arora e Azad (1980).