



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**ENTROPIA DE BURACOS NEGROS EXTREMAIS E
SIMETRIA $SL(2, \mathbb{R})$**

Neymar José Nepomuceno Cavalcante

BRASÍLIA

- 2016 -

“ENTROPIA DE BURACOS NEGROS EXTREMAIS E SIMETRIA $SL(2,R)$.”

Por

Neymar José Nepomuceno Cavalcante

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

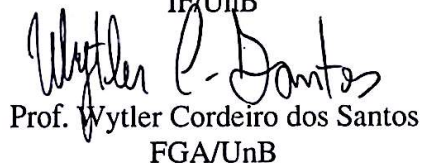
Aprovada por:



Prof. Annibal Dias de Figueiredo Neto
IF/UnB



Prof. José Francisco da Rocha Neto
IF/UnB



Prof. Wytler Cordeiro dos Santos
FGA/UnB



Prof. Daniel Ordine Vieira Lopes
IFG

Prof. Dr. Fernando de Oliveira Albuquerque
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
TESE DE DOUTORADO

**ENTROPIA DE BURACOS NEGROS EXTREMAIS E
SIMETRIA $SL(2, \mathbb{R})$**

Neymar José Nepomuceno Cavalcante

Tese de doutorado realizada sob a orientação do Prof. Dr. Amílcar Rabelo de Queiroz, apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília em complementação aos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

BRASÍLIA

- 2016 -

*Se hoje aqui chego,
Foi porque nunca estive Só!
A meus Pais,
Sr. Luiz Nepomuceno Neto
Sra. Margarida M^a C. Nepomuceno
Dedico este trabalho!*

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por acreditar nos meus sonhos e abdicar dos próprios em favor dos meus.

Ao Prof. Amilcar Rabelo de Queiroz, pela orientação, sugestão, estímulo, paciência e competência com que conduziu este trabalho.

Aos professores constituintes da Banca Examinadora que contribuíram para que fosse alcançado o objetivo do trabalho.

Aos colegas de pós-graduação e funcionários do Instituto de Física pela grata convivência durante a minha permanência nesta Unidade.

Aos meus familiares e a todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho pelo apoio, confiança e incentivo.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

A dúvida é o princípio da sabedoria.
(Aristóteles)

A persistência é o caminho do êxito.
(Charles Chaplin)

RESUMO

Neste trabalho, a entropia de buraco negro foi determinada partindo do pressuposto de que próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro extremal existe uma simetria $SL(2, \mathbb{R})$ que é gerada pelos vetores de Killing nessa região. Tanto para buracos negros em $(3+1)$ -dimensões quanto para buracos negros em dimensões maiores essa abordagem é válida. Considerando uma partícula quântica, mostramos que o processo de quantização quebra a simetria de escala da mecânica quântica conforme e que esta mesma simetria pode ser restaurada por meio de um estado misto apropriado e associado a entropia de von Neumann. Exploramos também os principais aspectos do espaço Anti-de Sitter e do buraco negro de BTZ e discutimos a relação entre os mesmos. Em seguida, estudamos as propriedades do espaço-tempo de Kerr subtraído, obtendo a Eq.(6.2.49) para a auto-força, agindo sobre uma carga escalar estática neste espaço-tempo.

Palavra-Chave: Entropia. Buraco Negro Extremal. Simetria $SL(2, \mathbb{R})$. Geometria Subtraída. Auto-força.

ABSTRACT

In this work the black hole entropy was determined on the assumption that on the event horizon of a extremal black hole there is a symmetry $SL(2, \mathbb{R})$ that is generated by the Killing vectors in this region. This approach is applied for the (3+1)-dimensional black hole and higher dimensions. By considering a quantum particle we showed that the quantization process breaks the scale of symmetry of quantum mechanics and that the same symmetry might be restored by using a suitable mixed state that is associated with von Neumann entropy. We studied the properties of the subtracted Kerr spacetime obtaining the Eq.(6.2.49) for the self-force acting on a static scalar charge in this background.

Keywords: Entropy. Extremal Black Hole. $SL(2, \mathbb{R})$ Symmetry. Subtracted Geometry. Self-Force.

Sumário

Lista de Figuras	x
Introducao	1
1 Buraco Negro em 3+1 dimensões	7
1.1 Buraco Negro de Schwarzschild	7
1.1.1 A Métrica de Schwarzschild	7
1.1.2 Geodésicas	9
1.1.3 Cargas Conservadas	15
1.1.4 Coordenadas de Kruskal	16
1.1.5 Diagrama de Penrose	20
1.1.6 Termodinâmica	22
1.2 Buraco negro de Reissner-Nordström	23
1.2.1 Extremal	26
1.2.2 Geodésicas	26
1.2.3 Cargas Conservadas	31
1.2.4 Diagrama de Kruskal	32
1.2.5 Termodinâmica	36
1.3 Buraco negro de Kerr	38
1.3.1 Extremal	40
1.3.2 Geodésicas	40
1.3.3 Cargas Conservadas	51
1.3.4 Coordenadas de Kruskal	54
1.3.5 Termodinâmica	56
2 Geometria próximo ao horizonte de buraco negro extremal	57
2.1 Geometria Próximo ao Horizonte do Buraco Negro de Reissner-Nordström Extremal (NHERN)	57
2.2 Geometria Próximo ao Horizonte do Buraco Negro de Kerr Extremal (NHEK)	59
3 SU(2) e SL(2,ℝ)	64
3.1 SU(2)	64
3.2 SL(2,ℝ)	70
4 Anti-de Sitter	82
4.1 Métrica	82
4.2 Isometrias	86

4.3	Geodésica	87
4.4	Parametrização AdS_3	90
5	Buraco Negro de BTZ	94
5.1	Métrica	94
5.2	Identificações	96
5.3	Extremal	102
5.4	Geodésica	103
5.5	Termodinâmica	105
5.6	Espaço de Lens	107
6	Trabalhos	118
6.1	Entropia a partir da Quebra de Simetria Conforme	118
6.1.1	Partícula sobre um Plano com Defeito: Um Modelo para Mecânica Quântica Conforme	119
6.1.2	Estados mistos em Mecânica Quântica Conforme	122
6.1.3	Entropia	123
6.2	Auto Força	126
6.2.1	Auto Força sobre uma Carga Escalar no Buraco Negro de Kerr .	126
6.2.2	Geometria Subtraída	127
6.2.3	Auto Força sobre uma Carga Escalar no Espaço-Tempo de Kerr Subtraído	130
A	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Minkowski	139
B	Hamiltoniana gravitacional	144
C	Superfície de Gravidade	147
D	Fórmula de Komar	151
E	Termodinâmica de Buraco Negro	154
E.1	Formula de Smarr	154
E.2	Leis da Mecânica de Buracos Negros	157
F	Extensão Auto-Adjunta	160
	Referências Bibliográficas	164

Lista de Figuras

1.1	Coordenadas radiais tipo-luz.	18
1.2	Diagrama de Kruskal para o espaço-tempo de Schwarzschild maximalmente estendido.	20
1.3	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Schwarzschild.	21
1.4	Diagramas de Kruskal para o espaço-tempo de Reissner-Nordström.	35
1.5	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Reissner-Nordström com $M > Q $	36
5.1	Representação geométrica do espaço de Lens.	109
5.2	Representação geométrica do espaço de Lens: a esfera unitária \mathcal{D}^3	110
5.3	Representação geométrica do espaço de Lens: o Poliedro.	110
5.4	Modelo geométrico do espaço de Lens.	111
5.5	Plano Complexo	112
5.6	Toro sólido T	112
5.7	Cilindro sólido em (a); esfera sólida \mathcal{D}^3 em (b).	113
5.8	T_c sendo representado pelo quadrado com lados identificados.	114
5.9	Classes de equivalência de T_c	115
5.10	Espaço das órbitas.	115
5.11	T_0 : o círculo de $r_1 = 0$	116
5.12	Espaço quociente S^3/\mathbb{Z}_p	116
5.13	Coleção de tubos com $0 \leq r < 1$	117
A.1	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Minkowski.	142
E.1	Uma hipersuperfície (Σ) no espaço-tempo de um buraco negro. \mathcal{H} é a fronteira interna dado por uma seção bidimensional do horizonte de eventos e S é a fronteira externa.	155

Introdução

Os conceitos abordados na teoria clássica da relatividade geral são totalmente expressados pelas equações de Einstein. Na busca por uma teoria quântica da gravitação, é importante compreender a formulação Hamiltoniana e Lagrangeana da relatividade geral [1, 2, 3, 4, 5].

Na formulação Lagrangeana de uma teoria de campos, introduzimos uma ação funcional que geralmente é definida como uma integral de uma densidade Lagrangeana sobre um região finita do espaço-tempo. A densidade lagrangiana é definida como uma função dos campos e de suas derivadas que compõem a teoria. Contudo, na relatividade geral, esta ação envolve termos de fronteira necessários para manter o princípio variacional consistente.

Por sua vez, a formulação Hamiltonina de uma teoria de campos consiste em decompor o espaço-tempo em espaço e tempo. Geometricamente, isto corresponde a foliações do espaço-tempo por hipersuperfícies tipo-espaço [2, 3]. Nesta decomposição, a métrica do espaço-tempo $g_{\alpha\beta}$ é quebrada em uma métrica induzida h_{ab} sobre a hipersuperfície Σ , um vetor shift N^a , uma função lapso N e o Hamiltoniano é descrito como o funcional das configurações de campos e dos momentos conjugados sobre Σ . Neste caso, o hamiltoniano da relatividade geral é escrito como um funcional de h_{ab} e do momento conjugado p^{ab} que, no entanto, está relacionado com a curvatura extrínseca sobre a hipersuperfície [2].

O estudo dos buracos negros é certamente uma das mais elegantes e relevantes

aplicações da relatividade geral. Pode-se afirmar que o aspecto mais importante do espaço-tempo de um buraco negro reside no fato de que este objeto contém um horizonte de eventos e também apresenta propriedades termodinâmicas. O horizonte de eventos é definido como uma hipersuperfície tipo-luz que delimita a fronteira do buraco negro. Nesta hipersuperfície as congruências compostas por geodésicas tipo-luz desempenham o papel de geradores do horizonte de eventos e o comportamento dos geradores está diretamente relacionado ao comportamento do horizonte. Em geral, ao estudar as propriedades dos buracos negros, muitas quantidades físicas importantes são definidas em termos da integração sobre o horizonte.

Os buracos negros talvez sejam objetos perfeitamente termais no universo, entretanto, suas propriedades termais ainda não estão totalmente compreendidas. Tais objetos são descritos precisamente pelos parâmetros macroscópicos de massa, carga e momento angular. Os parâmetros microscópicos, responsáveis pelo comportamento termal desses objetos, ainda não possuem uma definição adequada. As informações sobre as propriedades termais dos buracos negros veem do comportamento das propriedades macroscópicas que, por sua vez, estão formalizadas nas quatro leis da mecânica de buracos negros. Essas leis são análogas às leis da termodinâmica.

A lei zero da mecânica de buraco negro afirma que a superfície de gravidade κ de um buraco negro estacionário é constante sobre seu horizonte de eventos. Isto é análogo a lei zero da termodinâmica, na qual a temperatura T é constante para um sistema em equilíbrio térmico. A primeira lei da mecânica de buracos negros, escrita na forma [1, 2, 3, 4, 5, 6]

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q,$$

expressa a conservação da energia por meio da relação entre a variação da massa do buraco negro com variações em sua área, momento angular e carga elétrica.

O teorema de Hawking para a área do horizonte constitui a segunda lei da mecânica de buracos negros. Segundo este teorema, a área do horizonte de eventos não diminui.

Isto é análogo a segunda lei da termodinâmica; a entropia de um sistema fechado não diminui. A terceira lei da mecânica de buracos negros afirma que a superfície de gravidade não pode ser anulada considerando uma sequência finita de operações. Isto é análogo à forma fraca da terceira lei da termodinâmica, na qual a temperatura de um sistema não pode ser reduzida ao zero absoluto considerando um número finito de operações. No entanto, esta lei não é análoga a forma forte da terceira lei da termodinâmica; a entropia de um sistema se reduz a zero quando $T = 0$.

Assim, as leis da mecânica de buracos negros são análogas às leis da termodinâmica quando implementam-se as analogias entre a temperatura e algum múltiplo da superfície de gravidade e entre a entropia e o inverso de um múltiplo da área do buraco negro, ou seja, pode-se dizer então que

$$T = \epsilon\kappa \quad \text{e} \quad S = \eta A,$$

com $8\pi\epsilon\eta = 1$, de modo que o termo $\kappa\delta A/(8\pi)$ na primeira lei da mecânica de buracos negros torna-se o termo de transferência de calor $T\delta S$ na primeira lei da termodinâmica.

Antes da formulação das leis da mecânica de buracos negros, Bekenstein propôs que a entropia de um buraco negro é dada por algum múltiplo η de sua área. Bekenstein não determinou o valor exato de η , mas conjecturou que este múltiplo seria $(\ln 2)/(8\pi)$ em unidades de Planck ($\hbar = c = G = k = 4\pi\epsilon_0 = 1$).

Contudo, a equivalência entre a primeira lei da mecânica de buracos negros e a primeira lei da termodinâmica, implica que a temperatura será um múltiplo da superfície de gravidade κ . Se $\eta = (\ln 2)/(8\pi)$, como Bekenstein propôs, então teríamos $\epsilon = 1/(\ln 2)$, de modo que $T = \kappa/(\ln 2)$. Uma vez que os buracos negros eram pensados como objetos que apenas absorviam e nunca emitiam radiação, tais objetos teriam temperatura nula, ou $\epsilon = 0$, então a proposta de Bekenstein seria inconsistente para qualquer valor finito de η .

No entanto, seguindo a abordagem de Parker e Fulling, Hawking descobriu que

buracos negros podem emitir radiação e que a energia irradiada tem um espectro termal. Segundo Hawking, sua descoberta tornava a proposta de Bekenstein consistente, embora com o valor de η diferente. Hawking mostrou que temperatura de um buraco negro é dada por $T = \kappa/(2\pi)$, com $\epsilon = 1/(2\pi)$ e $\eta = 1/4$. Assim, a fórmula de Bekenstein-Hawking para a entropia de um buraco negro é expressa na forma [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

$$S_{\text{buraco negro}} = S_{\text{Bekenstein-Hawking}} \equiv \frac{1}{4}A. \quad (0.0.1)$$

No estudo das propriedades termodinâmicas de buracos negros extremais (temperatura zero), devemos analisar a métrica no limite próximo ao horizonte impondo condições de fronteira adequadas. Uma vez que conhecemos as condições de fronteira, as simetrias assintóticas desse espaço-tempo podem ser calculadas. Para cada simetria assintótica temos as cargas totais conservadas e, respectivamente, a álgebra de Dirac das cargas assintóticas. A partir das cargas assintóticas associadas aos geradores da álgebra, podemos obter a álgebra de Virasoro e, conseqüentemente, a carga central. O surgimento de cargas centrais indica que podemos obter a entropia de buracos negros a partir da contagem de microestados associados a métrica [9, 10].

Outra maneira de estudar um certo espaço-tempo é através da análise de suas geodésicas. Podemos estudar também o movimento de partículas quânticas, o qual requer a definição adequada de observáveis. Na mecânica quântica, os observáveis são quantidades físicas importantes que são representados por operadores lineares e auto-adjuntos no espaço de Hilbert dos estados do sistema em consideração. A construção de operadores auto-adjuntos gera alguns problemas interessantes. Por exemplo, o problema da conservação da helicidade no espalhamento de Aharonov-Bohm de uma partícula de Dirac pode ser resolvido usando algumas técnicas empregadas no estudo do operador auto-adjunto [11, 12, 13].

Os fundamentos da gravidade quântica e clássica foram inicialmente explorados tendo como base o espaço-tempo em três dimensões. Esse modelo de gravidade em

(2+1)-dimensões foi amplamente reconhecido como a plataforma de estudos das questões conceituais relacionadas à gravidade. No entanto, do ponto de vista físico, esse modelo não fornece uma descrição realística de sistemas gravitacionais em (3+1)-dimensões. Entre alguns aspectos negativos desse modelo destaca-se o fato que em (2+1)-dimensões a relatividade geral não tem limite Newtoniano. Apesar disso e, surpreendentemente, os físicos Bañados, Teitelboim e Zanelli (BTZ) mostraram em 1992 que a gravidade em (2+1)-dimensões tem uma solução de buraco negro que em alguns aspectos difere de outras soluções das equações de campos [14].

O principal objetivo deste trabalho é calcular entropia de buraco negro. Partimos do pressuposto que existe uma simetria $SL(2, \mathbb{R})$ no horizonte de eventos de um buraco negro extremal e que essa simetria é gerada pelos vetores de Killing nessa região. Essa abordagem é válida tanto para buracos negros em (3+1) -dimensões quanto para buracos negros em dimensões maiores. Próximo ao horizonte de eventos, a geometria surge com um espaço AdS_2 ou um buraco negro de BTZ ambos, em geral, são multiplicados por uma variedade compacta e são setores de outras soluções em dimensões maiores [15].

Na presente abordagem, um ponto importante que deve ser destacado reside no fato de que um dos geradores da álgebra quebra a simetria de escala. A compreensão desse processo de quebra de simetria desempenha um papel importante na determinação da entropia [16]. Na implementação dos conceitos até então tratados no estudo dos buracos negros, as seguintes abordagens equivalentes são consideradas: uma abordagem algébrica fundamentada na teoria das representações e outra analítica que faz uso das extensões auto-adjuntas.

Em outra parte desse trabalho, reproduzimos o resultado analítico de Ottewil e Taylor [50] para a auto-força que age sobre uma carga escalar estática no espaço-tempo de Kerr

$$f_b^{auto} = \frac{a\Delta q^2 M^2 \sin^2 \theta}{3(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)^{5/2} \Sigma^{1/2}} \delta_b^\phi.$$

A motivação para o estudo da auto-força reside no fato de que, na relatividade geral, o movimento de um pequeno objeto é descrito por uma geodésica e, portanto, os efeitos das correções impostas ao movimento geodésico devido a ação da auto-força devem ser considerados [17]. No que segue, obtemos a Eq.(6.2.49) para a auto-força agindo sobre uma carga escalar estática no espaço-tempo de Kerr subtraído. Um buraco negro subtraído é obtido tomando um limite de escala particular no fator conforme. A estrutura interna de um buraco negro subtraído é invariante frente a essa transformação de escala do fator conforme [18].

Esta tese está organizada como segue:

Capítulo 1: Revisamos as propriedades dos buracos negros em (3+1)-dimensões.

Capítulo 2: Tem como foco o estudo da geometria do espaço-tempo próximo ao horizonte de eventos dos buracos negros de Reissner-Nordström e Kerr.

Capítulo 3: Estudamos a estrutura dos grupos $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{R})$.

Capítulo 4: Aborda-se as propriedades do espaço Anti-de Sitter.

Capítulo 5: Versa sobre as propriedades do buraco negro de BTZ. Mostramos que o mesmo pode ser obtido fazendo identificações de pontos do espaço AdS_3 .

Capítulo 6: Apresentamos um trabalho sobre entropia de buraco negro extremal e uma expressão para a auto-força agindo sobre uma carga escalar estática no espaço-tempo de Kerr subtraído.

Capítulo 7: Apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 1

Buraco Negro em 3+1 dimensões

Nesta seção, vamos estudar as três soluções das equações de Einsteins que descrevem buracos negros estáticos, estacionários e carregados.

1.1 Buraco Negro de Schwarzschild

A compreensão completa do espaço-tempo de Schwarzschild, como consistindo de um horizonte de eventos e uma singularidade essencial localizada no centro levou várias décadas de trabalho de excelentes físicos matemáticos. Em relatividade geral, esta é a única solução de vácuo das equações de Einstein que descreve o espaço-tempo em torno de um buraco negro estático esfericamente simétrico. Vamos analisar as propriedades fundamentais desta solução que auxiliará na compreensão da natureza desse espaço-tempo. [1, 2, 4, 5]

1.1.1 A Métrica de Schwarzschild

Para descrever a geometria do espaço-tempo em torno de um buraco negro esfericamente simétrico, devemos resolver as equações de Einstein no vácuo impondo-se essa simetria. Ao definir uma fonte de campo gravitacional como sendo estática e esfericamente simétrica, devemos analisar as soluções que tenham essas mesmas propriedades.

A interpretação de uma solução estática implica que as componentes da métrica devem ser independentes da coordenada temporal e que não deve existir termos cruzados.

Para impor simetria esférica na solução, inicialmente, devemos considerar a métrica do espaço de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.1.1)$$

Um dos pré-requisitos para que a solução preserve a simetria esférica é que a métrica sobre a esfera, $d\Omega^2$, seja invariante frente as transformações. Podemos multiplicar todos os termos da métrica por coeficientes que são funções de r , ou seja

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2. \quad (1.1.2)$$

As funções exponenciais multiplicando os coeficientes na Eq.(1.1.2) mantém a assinatura da métrica inalterada.

Por conveniência, vamos implementar a mudança de coordenada $\bar{r} = e^{\gamma(r)} r$ de modo que a métrica dada pela Eq.(1.1.2) toma a forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2. \quad (1.1.3)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \bar{r} &\rightarrow r, \\ \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} &\rightarrow e^{2\beta}, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

a Eq.(1.1.3) torna-se

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.5)$$

onde as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ são obtidas resolvendo as equações de Einstein. Neste espaço-tempo o escalar de curvatura é dado por

$$R = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right]. \quad (1.1.6)$$

Sendo R_{tt} e R_{rr} nulos independentemente do escalar de curvatura, podemos escrever

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta), \quad (1.1.7)$$

que implica $\alpha = -\beta + c$, onde c é uma constante. Definindo $c = 0$, obtemos $\alpha = -\beta$.

Agora, tomando $R_{\theta\theta} = 0$, temos

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1, \quad (1.1.8)$$

que implica

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r}, \quad (1.1.9)$$

onde R_S é uma constante. Usando a relação $\alpha = -\beta$, a métrica Eq.(1.1.5) torna-se

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.1.10)$$

Sabendo que no limite de campo fraco a componente g_{tt} tem a forma

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \quad (1.1.11)$$

e que a métrica de Schwarzschild deve se reduzir a este caso quando $r \gg 2GM$, podemos identificar

$$R_S = 2M. \quad (1.1.12)$$

Logo, a métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas tem a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.13)$$

onde $d\Omega^2$ é a métrica sobre a esfera S^2 [1, 2, 4, 5].

1.1.2 Geodésicas

- **Geodésicas tipo-tempo**

No estudo das geodésicas tipo-tempo e tipo-luz no espaço-tempo de Schwarzschild vamos considerar a assinatura $(+, -, -, -)$. As equações que descrevem as geodésicas no espaço-tempo com elemento de linha, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, são obtidas a partir da Lagrangiana

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (1.1.14)$$

que, no espaço-tempo de Schwarzschild, é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \right]. \quad (1.1.15)$$

O ponto sobre as coordenadas representa a derivada em relação ao parâmetro afim τ . Para geodésicas do tipo-tempo, o parâmetro afim pode ser identificado com o tempo próprio da partícula .

A partir da Eq.(1.1.15), obtêm-se os momentos canônicos

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, \quad (1.1.16)$$

$$p_r = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}, \quad (1.1.17)$$

$$p_\phi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (1.1.18)$$

$$p_\theta = r^2 \dot{\theta}, \quad (1.1.19)$$

e, conseqüentemente, a Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \mathcal{L}, \quad (1.1.20)$$

onde a ausência da energia potencial é evidenciada pela igualdade, $\mathcal{H} = \mathcal{L}$ [1, 2].

Considerando as equações

$$\frac{dp_t}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dp_\phi}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (1.1.21)$$

e restringindo o movimento geodésico ao plano equatorial (plano invariante, $\theta = \pi/2$), obtemos

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = E, \quad (1.1.22)$$

$$p_\phi = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = L, \quad (1.1.23)$$

onde L é o momento angular. Explicitando \dot{t} e $\dot{\phi}$ nas Eqs.(1.1.16), (1.1.18) e considerando as Eqs.(1.1.22) e (1.1.23), temos

$$2\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2}, \quad (1.1.24)$$

onde

$$2\mathcal{L} = \begin{cases} 1, & \text{geodésicas do tipo-tempo} \\ 0, & \text{geodésicas do tipo-luz.} \end{cases} \quad (1.1.25)$$

Para geodésicas do tipo-tempo, as Eqs.(1.1.23) e (1.1.24) são dadas na forma

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \quad (1.1.26)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (1.1.27)$$

Considerando $r = f(\phi)$, a expressão para $dr/d\phi$ toma a forma

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{L} \frac{dr}{d\tau}, \quad (1.1.28)$$

ou ainda

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{(E^2 - 1)r^4}{L^2} + \frac{2Mr^3}{L^2} - r^2 + 2Mr. \quad (1.1.29)$$

Implementando a mudança de variável $u = r^{-1}$, obtemos a equação que descreve as geodésicas no plano equatorial

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{2Mu}{L^2} - \frac{(1 - E^2)}{L^2}. \quad (1.1.30)$$

Para geodésicas radiais, cujo momento angular é nulo, a Eq.(1.1.27) é dada por

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{r} - (1 - E^2). \quad (1.1.31)$$

A Eq.(1.1.22), escrita na forma

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - 2M/r}, \quad (1.1.32)$$

juntamente com a Eq.(1.1.31), descrevem trajetórias de geodésicas radiais.

Vamos analisar a trajetória de uma partícula que parte do repouso ($\dot{r} = 0$) e alcança a singularidade ($r = 0$) de um buraco negro. Fazendo $r = r_0$ na Eq.(1.1.31), temos

$$r_0 = \frac{2M}{1 - E^2}, \quad (1.1.33)$$

onde r_0 é o ponto de repouso. Considerando a mudança de coordenada

$$\begin{aligned} r &= \frac{M}{1 - E^2}(1 + \cos \xi) \\ &= r_0 \cos^2(\xi/2), \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

com

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{em } r = r_0 \\ 2 \sin^{-1} E \equiv \xi_h & \text{em } r = 2M \\ \pi & \text{em } r = 0, \end{cases} \quad (1.1.35)$$

as equações que governam o movimento geodésico tomam a forma

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (1 - E^2) \tan^2(\xi/2), \quad (1.1.36)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E \cos^2(\xi/2)}{\cos^2(\xi/2) - \cos^2(\xi_h/2)}, \quad (1.1.37)$$

$$\frac{dr}{d\xi} = -r_0 \sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2}. \quad (1.1.38)$$

Uma vez que a partícula move-se em direção ao buraco negro, a partir da Eq.(1.1.36), temos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= -(1 - E^2)^{1/2} \tan(\xi/2) \\ &= -\left(\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \tan(\xi/2). \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

Para obter o tempo próprio medido pela partícula

$$\tau = \left(\frac{r_0^3}{8M}\right)^{1/2} (\xi + \sin \xi), \quad (1.1.40)$$

substituímos as Eqs.(1.1.38) e (1.1.39) na expressão

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{d\tau}{d\xi} \frac{dr}{d\tau}, \quad (1.1.41)$$

obtendo

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\xi} &= \left(\frac{r_0^3}{2M} \right)^{1/2} \cos^2(\eta/2) \\ &= \left(\frac{r_0^3}{8M} \right)^{1/2} (1 + \cos \xi), \end{aligned} \quad (1.1.42)$$

que é integrada na variável ξ . Da Eq.(1.1.40), temos que $\tau = 0$ no ponto de repouso ($\xi = 0$ neste ponto). Além disso, a partícula passa pelo horizonte de eventos em

$$\tau_h = \left(\frac{r_0^3}{8M} \right)^{1/2} (\xi_h + \sin \xi_h), \quad (1.1.43)$$

e alcança a singularidade em

$$\tau_0 = \left(\frac{r_0^3}{8M} \right)^{1/2} \pi. \quad (1.1.44)$$

O tempo medido por um observador externo é obtido a partir da equação

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{d\tau}{d\xi} \frac{dt}{d\tau}, \quad (1.1.45)$$

fazendo a substituição das Eqs.(1.1.37) e (1.1.42), de modo que

$$\frac{dt}{d\xi} = E \left(\frac{r_0^3}{2M} \right)^{1/2} \frac{\cos^4(\xi/2)}{\cos^2(\xi/2) - \cos^2(\xi_h/2)}, \quad (1.1.46)$$

e integrando na variável ξ para obter

$$\begin{aligned} t &= E \left(\frac{r_0^3}{2M} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{2}(\xi + \sin \xi) + (1 - E^2)\xi \right] \\ &+ 2M \log \left[\frac{\tan(\xi_h/2) + \tan(\xi/2)}{\tan(\xi_h/2) - \tan(\xi/2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.1.47)$$

Para um observador estacionário no infinito, a partícula descrevendo uma trajetória tipo-tempo leva um tempo infinito para alcançar o horizonte, enquanto que, para a partícula, a mesma cruza o horizonte em um tempo finito [21].

• **Geodésicas tipo-luz**

O movimento de partículas sem massa é descrito por geodésicas tipo-luz, onde $2\mathcal{L} = 0$. Neste caso, da Eq.(1.1.24), temos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2} = 0, \quad (1.1.48)$$

ou

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}. \quad (1.1.49)$$

Na análise dessas geodésicas deve-se considerar as Eqs.(1.1.22), (1.1.26) e a Eq.(1.1.49).

Fazendo $r = f(\phi)$, a expressão para $dr/d\phi$ toma a forma

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{L} \frac{dr}{d\tau}, \quad (1.1.50)$$

ou seja

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2 r^4}{L^2} - r^2 + 2Mr. \quad (1.1.51)$$

Fazendo a mudança de variável $u = r^{-1}$, obtemos a equação que descreve as geodésicas no plano equatorial

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{E^2}{L^2}. \quad (1.1.52)$$

Para geodésicas radiais, cujo momento angular é nulo, a Eq.(1.1.49) é dada por

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E. \quad (1.1.53)$$

A equação

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - 2M/r}, \quad (1.1.54)$$

juntamente com a Eq.(1.1.53), descrevem trajetórias de geodésicas radiais.

Para um observador externo, a taxa dr/dt é dada por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dr}{d\tau}, \quad (1.1.55)$$

isto é

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (1.1.56)$$

Integrando em t , temos

$$t = \pm r^* + \text{constante}_{\pm}, \quad (1.1.57)$$

onde

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad -\infty < r^* < \infty. \quad (1.1.58)$$

A variável r^* é importante porque cobre a região do espaço-tempo que é acessível ao observador externo ao horizonte de eventos. Assim, temos

$$\begin{aligned} r \rightarrow 2M & & r^* \rightarrow -\infty, \\ r \rightarrow +\infty & & r^* \rightarrow r. \end{aligned} \quad (1.1.59)$$

Comparando as Eqs.(1.1.58) e (1.1.53), obtemos

$$r = \pm E\tau + \text{constante}_{\pm}, \quad (1.1.60)$$

notamos que a geodésica radial cruza o horizonte de eventos em τ finito mas, para um observador externo, a geodésica leva um tempo t infinito para alcançar o horizonte [21].

1.1.3 Cargas Conservadas

A massa de Komar, ou energia total de um espaço-tempo estacionário, está relacionado ao vetor de Killing do tipo-tempo $\xi_{(t)}^\alpha$. A Eq.(D.1) define esta carga conservada na forma

$$M_{Komar} = \frac{1}{4\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \nabla^\alpha \xi_{(t)}^\beta n_\alpha r_\beta \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (1.1.61)$$

onde n_α e r_β são os vetores perpendiculares a hipersuperfície e a fronteira, respectivamente. Substituindo as componentes não nulas desses vetores

$$n_0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \quad r_1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \quad (1.1.62)$$

no integrando da Eq.(1.1.61), obtemos

$$\begin{aligned} n_\alpha r_\beta \nabla^\alpha \xi^\beta &= -\nabla^0 \xi^1. \\ &= -g^{00} \nabla_0 \xi^1 \\ &= -g^{00} (\partial_0 \xi^1 + \Gamma_{0\lambda}^1 \xi^\lambda) \\ &= -g^{00} \Gamma_{00}^1 \xi^0 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ &= \frac{M}{r^2}. \end{aligned} \quad (1.1.63)$$

A métrica sobre a fronteira no infinito espacial tem a forma

$$\sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B = r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.64)$$

e, portanto

$$\sqrt{\sigma} = r^2 \sin \theta. \quad (1.1.65)$$

Substituindo as Eqs.(1.1.63) e (1.1.65) na Eq.(1.1.61) obtemos a energia para o espaço-tempo de Schwarzschild na forma [2]

$$\begin{aligned} M_{Komar} &= \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{M}{r^2}\right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \\ &= M. \end{aligned} \quad (1.1.66)$$

1.1.4 Coordenadas de Kruskal

A métrica de Schwarzschild é esfericamente simétrica e, portanto, devemos considerar apenas as coordenadas t e r na análise da natureza das singularidades. Para entender a natureza desse espaço-tempo, devemos explorar sua estrutura causal, que é

definida pelo cone de luz. Neste sentido, vamos considerar geodésicas radiais (tipo-luz) onde [3]

$$ds^2 = 0. \quad (1.1.67)$$

Substituindo a Eq.(1.1.13) na Eq.(1.1.67), obtemos a inclinação do cone de luz sobre o diagrama do espaço-tempo

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (1.1.68)$$

A Eq.(1.1.68) nos diz que

$$r \rightarrow \infty, \quad \frac{dt}{dr} \rightarrow \pm 1, \quad (1.1.69)$$

$$r \rightarrow 2M, \quad \frac{dt}{dr} \rightarrow \pm \infty, \quad (1.1.70)$$

portanto, nesse sistema de coordenadas, um raio de luz parece nunca alcançar a superfície $r = 2M$.

Da Eq.(1.1.68), obtemos as geodésicas radiais do espaço-tempo de Schwarzschild

$$t = \pm r^* + \text{constante}, \quad (1.1.71)$$

onde a coordenada tortoise

$$\begin{aligned} r^* &\equiv \int \frac{dr}{f(r)} \\ &= \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} \\ &= r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (1.1.72)$$

Por definição, o sistema de coordenadas radiais tipo-luz é dado por

$$v = t + r^* \quad u = t - r^*, \quad (1.1.73)$$

como ilustrado na Fig.(1.1).

O movimento de partículas sem massa em direção ao buraco negro é descrito pelas curvas $v = \text{constante}$ enquanto o movimento de afastamento é descrito pelas curvas $u = \text{constante}$.

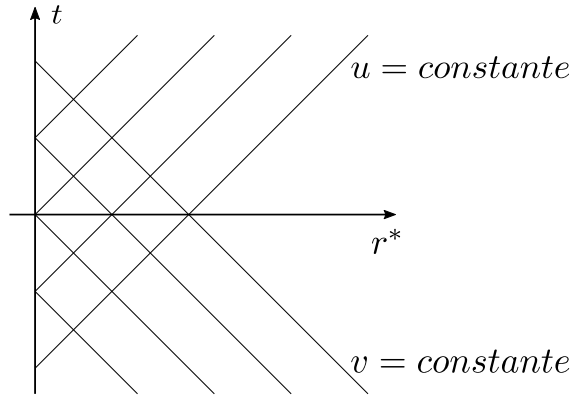


Figura 1.1: Coordenadas radiais tipo-luz.

Nas coordenadas (u, v) , a métrica de Schwarzschild torna-se

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.74)$$

com r definido implicitamente em termos de u e v

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right).$$

A coordenada singular $r = 2M$ é agora representada por $v - u = -\infty$. Para remover esta coordenada singular, fazemos uma expansão em torno da superfície $r = 2M$ de modo a obter a aproximação

$$r^* \simeq 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (1.1.75)$$

Da Eq.(1.1.75), escrevemos

$$\frac{r}{2M} \simeq 1 \pm e^{r^*/2M} = 1 \pm e^{(v-u)/4M} \quad \text{e} \quad f \simeq \pm e^{(v-u)/4M}, \quad (1.1.76)$$

onde os sinais superior e inferior correspondem as regiões $r > 2M$ e $r < 2M$, respectivamente.

Substituindo a Eq.(1.1.76) na Eq.(1.1.74), obtemos a métrica na forma

$$ds^2 = \mp (e^{-u/4M} du)(e^{v/4M} dv) + r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.77)$$

com a coordenada singular, $r = 2M$, representada por $v - u = +\infty$. A métrica representada na Eq.(1.1.77), nos motiva a introduzir as coordenadas de Kruskal (U, V) ,

definidas na forma

$$U = \mp e^{-u/4M} \quad \text{e} \quad V = e^{v/4M}. \quad (1.1.78)$$

Nessas coordenadas a Eq.(1.1.77) é regular em $r = 2M$. Da Eq.(1.1.72), temos que

$$e^{r^*/2M} = e^{(v-u)/4M} = \mp UV, \quad (1.1.79)$$

ou ainda

$$e^{r/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) = -UV, \quad (1.1.80)$$

onde, implicitamente, temos r como função de UV . Nas coordenadas de Kruskal, a métrica de Schwarzschild toma a forma

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} dU dV + r^2 d\Omega^2, \quad (1.1.81)$$

onde a regularidade da métrica na coordenada $r = 2M$ torna-se evidente. Implementando-se a transformação de coordenadas

$$T = \frac{1}{2}(V + U) = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right), \quad (1.1.82)$$

$$R = \frac{1}{2}(V - U) = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \left(\frac{t}{4M} \right), \quad (1.1.83)$$

a métrica na Eq.(1.1.81) torna-se

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (1.1.84)$$

No diagrama de Kruskal na Fig.(1.2), as curvas de V constante descrevem trajetórias tipo-luz que cruzam o horizonte de eventos e alcança a singularidade, enquanto que as curvas de U constante descrevem trajetórias tipo-luz que afastam-se do buraco negro [2].

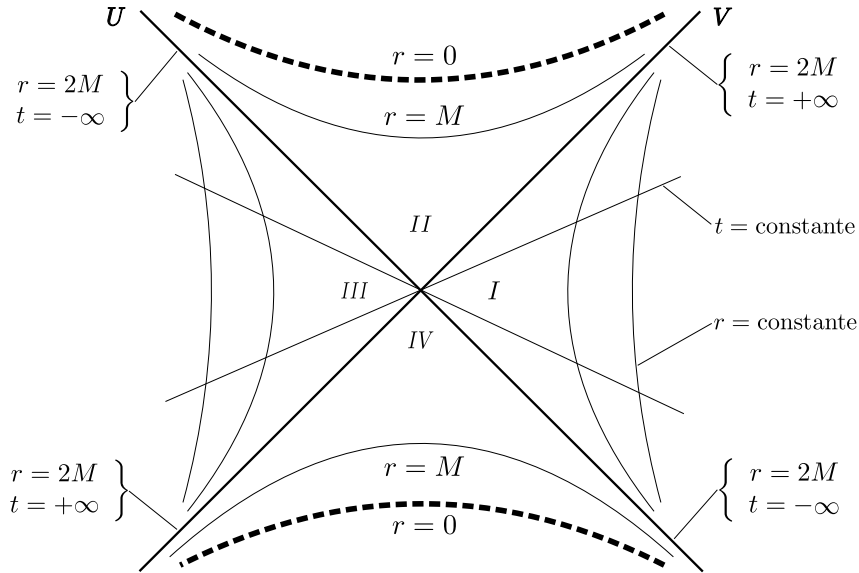


Figura 1.2: Diagrama de Kruskal para o espaço-tempo de Schwarzschild maximalmente estendido.

1.1.5 Diagrama de Penrose

O diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Schwarzschild pode ser obtido realizando procedimentos semelhantes ao adotado na construção do diagrama conforme para o espaço-tempo de Minkowski. Neste caso a Eq.(A.15) tem a forma [1, 2, 5]

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \frac{1}{4 \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V}} \left[-2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (d\tilde{U} d\tilde{V} + d\tilde{V} d\tilde{U}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{r}{r^*} \right)^2 \sin^2(\tilde{V} - \tilde{U}) d\Omega^2 \right], \tag{1.1.85}
 \end{aligned}$$

onde \tilde{U} e \tilde{V} são essencialmente as mesmas coordenadas dadas na Eq.(A.13), apenas com algumas modificações. É evidente a partir da Eq.(1.1.85) que, quando $r \rightarrow \infty$, recuperamos a métrica do espaço-tempo de Minkowski. Em outras palavras, o espaço-tempo de Schwarzschild é assintoticamente plano.

Vamos considerar a métrica nas coordenadas de Kruskal, Eq.(1.1.81), onde a relação entre as coordenadas (U, V) e a coordenada r é dada pela Eq.(1.1.80). Vamos considerar a seguinte transformação de escala

$$\bar{U} = \arctan \left(\frac{U}{\sqrt{2M}} \right), \quad \bar{V} = \arctan \left(\frac{V}{\sqrt{2M}} \right), \tag{1.1.86}$$

com

$$\bar{U} > -\frac{\pi}{2}, \quad \bar{V} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{e} \quad -\pi < \bar{U} + \bar{V} < \pi. \quad (1.1.87)$$

A partir do diagrama de Kruskal, construímos o diagrama de Penrose ilustrado na Fig.(1.3). Notamos algo importante ao analisarmos este diagrama: os pontos i^+ e i^- são distintos de $r = 0$ pelo fato de existir curvas tipo-tempo que não alcançam a singularidade. As quatro seções desse diagrama correspondem as quatro seções do diagrama de Kruskal exatamente na mesma ordem.

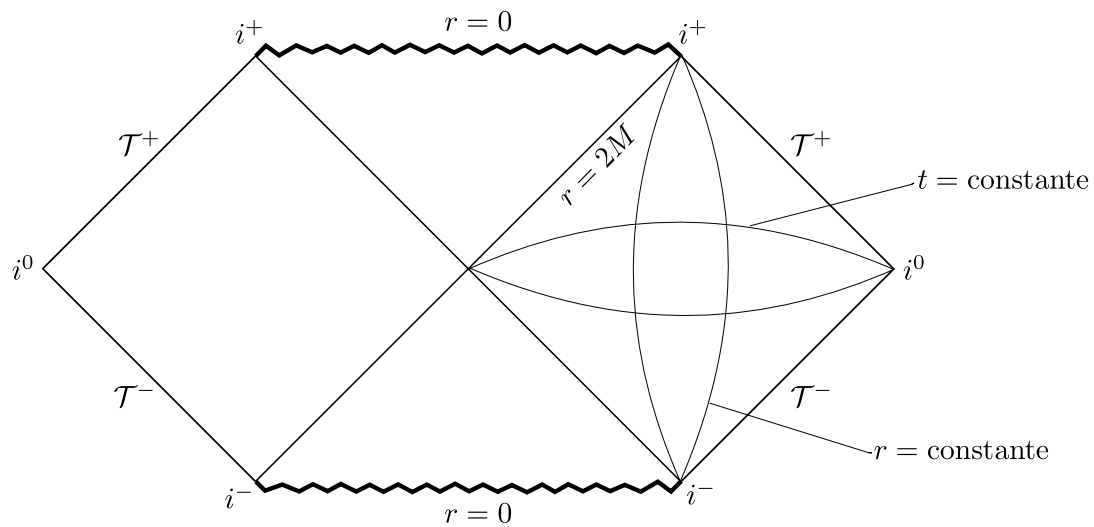


Figura 1.3: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Schwarzschild.

1.1.6 Termodinâmica

Se considerarmos um buraco negro como sendo um sistema termodinâmico, naturalmente, podemos aplicar as leis da termodinâmica. No entanto, devemos enfatizar que um buraco negro é um objeto gravitacional cuja entropia é proporcional a área do mesmo e, portanto, isto constitui uma diferença crucial em relação a outro sistema termal [22].

Implementando a rotação de Wick, $t \rightarrow i\tau$, escrevemos a métrica de Schwarzschild na forma

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.1.88)$$

com

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (1.1.89)$$

Por conveniência, vamos considerar as equações

$$\rho d\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} d\tau, \quad (1.1.90)$$

$$d\rho = \left(1 - \frac{2M}{r'}\right)^{-1/2} dr', \quad (1.1.91)$$

definidas nos intervalos

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad 0 \leq \tau \leq \beta \quad \text{e} \quad 2M \leq r' \leq r. \quad (1.1.92)$$

Integrando as Eqs.(1.1.90) e (1.1.91), obtemos as relações

$$2\pi\rho \cong (2M)^{-1/2}(r - 2M)^{1/2}\beta, \quad (1.1.93)$$

$$\rho \cong 2(2M)^{1/2}(r - 2M)^{1/2}. \quad (1.1.94)$$

Dividindo a Eq.(1.1.93) pela Eq.(1.1.94), a periodicidade é obtida

$$\beta = 8\pi M. \quad (1.1.95)$$

$$(1.1.96)$$

A periodicidade abordada na termodinâmica também é definida pela variável β . A temperatura de um buraco negro de Schwarzschild é então expressada na forma

$$T = \frac{1}{8\pi M}. \quad (1.1.97)$$

No cálculo da entropia, consideramos a primeira lei da termodinâmica na qual relaciona energia e entropia na forma

$$dE = TdS. \quad (1.1.98)$$

Usando a relação $E = m$ ($c \equiv 1$), a primeira lei da termodinâmica para um buraco negro estático e esfericamente simétrico é obtida na forma

$$dM = TdS. \quad (1.1.99)$$

Substituindo a Eq.(1.1.97) na Eq.(1.1.99) chegamos a relação

$$MdM = \frac{1}{8\pi}dS, \quad (1.1.100)$$

que ao ser integrada fornece

$$\frac{M^2}{2} = \frac{1}{8\pi}S. \quad (1.1.101)$$

Portanto, a entropia de um buraco negro de Schwarzschild é dada por

$$S = 4\pi M^2. \quad (1.1.102)$$

1.2 Buraco negro de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström é uma solução simetricamente esférica das equações de Einstein e Maxwell e descreve a geometria do espaço-tempo em torno de um buraco negro com massa M e carga Q . Uma vez que não se espera que qualquer corpo macroscópico tenha uma carga líquida, a existência de buraco negro carregado parece

estar fora da realidade. No entanto, o estudo da solução de Reissner-Nordström fornece importantes contribuições para o entendimento da natureza do espaço e do tempo [1, 2, 4, 5].

A métrica que descreve o espaço-tempo em torno de um corpo esfericamente simétrico e carregado é dada na forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r,t)} dt^2 + e^{2\beta(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.2.1)$$

Neste espaço-tempo o tensor energia-momento para o campo eletromagnético é dado por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad (1.2.2)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de campo eletromagnético. Devido à simetria esférica, as componentes não nulas do tensor eletromagnético são escritas na forma

$$F_{tr} = f(r, t) = -F_{rt} \quad (1.2.3)$$

e

$$F_{\theta\phi} = g(r, t) \sin\theta = -F_{\phi\theta}, \quad (1.2.4)$$

onde as funções $f(r, t)$ e $g(r, t)$, são obtidas a partir das equações de campo. Para uma métrica com simetria esférica as equações do campo eletromagnético são dadas na forma

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} F_{\nu\sigma} &= 0 \\ \nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

que são as equações de Maxwell. A solução destas equações mais as equações de Einstein é conhecida como métrica de Reissner-Nordström

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{r^2} \right)^{-1} dr^2 \\ &+ r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ é a métrica sobre a esfera S^2 . Os parâmetros M , Q e P são a massa do buraco negro, a carga elétrica e a carga magnéticas, respectivamente. Os campos eletromagnéticos associados com esta métrica são dados por

$$E_r = F_{rt} = \frac{Q}{r^2}, \quad B_r = \frac{F_{\theta\phi}}{r^2 \sin\theta} = \frac{P}{r^2}. \quad (1.2.7)$$

A métrica na Eq.(1.2.6) é singular em $r = 0$, uma vez que $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \infty$, e possui horizonte de eventos em

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - G(Q^2 + P^2)}. \quad (1.2.8)$$

A partir deste ponto, podemos analisar três situações diferentes. Primeiramente, quando $GM^2 < Q^2 + P^2$ a métrica é completamente regular nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) . A coordenada t é sempre tipo-tempo e r é sempre tipo-espaço e ainda existe uma singularidade em $r = 0$, que agora é uma curva tipo-tempo. Uma vez que não existe horizonte de eventos, um observador pode se mover em direção a singularidade sem problemas. Analisando o comportamento da geodésica neste espaço-tempo notamos que a singularidade é repulsiva. Uma geodésica tipo-tempo nunca intercepta $r = 0$; na verdade, aproxima-se deste ponto e depois inverte seu movimento. Neste caso, diz-se que $r = 0$ é uma singularidade nua, uma vez que não há um horizonte de eventos protegendo essa singularidade.

Para $r \rightarrow \infty$ a solução aproxima-se do espaço-tempo plano e a estrutura causal é a mesma em qualquer ponto. O diagrama conforme é semelhante ao do espaço-tempo de Minkowski, exceto que agora a coordenada $r = 0$ é uma singularidade.

No caso onde $GM^2 = Q^2 + P^2$, obtemos a solução de Reissner-Nordström extremal. Esta solução é frequentemente analisada no estudo de buraco negro em gravidade quântica.

Por fim, quando $GM^2 > Q^2 + P^2$, a energia do campo eletromagnético é menor que a energia total e espera-se que este caso se aplique a colapsos gravitacionais relativísticos. A métrica tem singularidades em r_+ e r_- que podem ser removidas por uma mudança

de coordenadas. Além disso, as superfícies tipo-luz r_{\pm} são ambos horizontes de evento [21, 1].

1.2.1 Extremal

A métrica de Reissner-Nordström pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.2.9)$$

onde r_{\pm} é dado pela Eq.(1.2.8). A métrica de Reissner-Nordström extremal tem a forma

$$ds^2 = -\frac{(r-r_+)^2}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{(r-r_+)^2}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.2.10)$$

onde tomamos $r_+ = r_-$ na Eq.(1.2.9) ou, equivalentemente, $GM^2 = Q^2 + P^2$ na Eq.(1.2.8).

1.2.2 Geodésicas

• Geodésicas do tipo-tempo

No estudo das geodésicas do tipo-tempo e tipo-luz no espaço-tempo de Reissner-Nordström vamos considerar a assinatura $(+, -, -, -)$. As equações que governam as geodésicas tipo-tempo no espaço-tempo de Reissner-Nordström são

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Er^2}{\Delta}, \quad (1.2.11)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \quad (1.2.12)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \frac{\Delta}{r^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (1.2.13)$$

Essas equações diferem das equações geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild apenas pela forma da função Δ que, neste caso, é dado por

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2, \quad (1.2.14)$$

com $P = 0$. Para analisar as propriedades dessas geodésicas, vamos aplicar o mesmo procedimento adotado para o espaço-tempo de Schwarzschild, ou seja, considerar $r = f(\phi)$ e depois implementar a substituição da variável $u = 1/r$. Fazendo isto, obtemos

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -Q^2u^4 + 2Mu^3 - \left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right)u^2 + \frac{2Mu}{L^2} - \frac{(1 - E^2)}{L^2} = f(u). \quad (1.2.15)$$

Do ponto de vista da geometria, a diferença essencial entre as geodésias no espaço-tempo de Reissner-Nordström e Schwarzschild reside nas órbitas que cruzam o horizonte de eventos: em Schwarzschild tais órbitas alcançam a singularidade, enquanto em Reissner-Nordström, as órbitas terminam em algum ponto no horizonte de Cauchy.

Para ilustrar essa diferença, uma das maneiras consiste em analisar as órbitas do segundo tipo associadas as órbitas circulares (estável e instável). A ocorrência de órbitas circulares está restrita as condições $f(u) = 0$ e $f'(u) = 0$, ou seja

$$Q^2u^4 - 2Mu^3 + \left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right)u^2 - \frac{[2Mu - (1 - E^2)]}{L^2} = 0, \quad (1.2.16)$$

e

$$4Q^2u^3 - 6Mu^2 + 2u\left(1 + \frac{Q^2}{L^2}\right) - \frac{2M}{L^2} = 0, \quad (1.2.17)$$

respectivamente. Das Eqs.(1.2.16) e (1.2.17), o momento angular e a energia para a órbita circular de raio $r_c = 1/u_c$ são dados por

$$E^2 = \frac{(1 - 2Mu_c + Q^2u_c^2)^2}{1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2}, \quad (1.2.18)$$

e

$$L^2 = \frac{M - Q^2u_c}{u_c(1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2)}. \quad (1.2.19)$$

Em particular, das Eqs.(1.2.18) e (1.2.19), surge a restrição

$$1 - 3Mu_c + 2Q^2u_c^2 > 0. \quad (1.2.20)$$

Comparando está restrição com a equação

$$f'(u) = -2u(1 - 3Mu + 2Q^2u^2) = 0, \quad (1.2.21)$$

temos que o raio mínimo para a órbita circular (tipo-tempo) é igual ao raio da órbita circular instável do próton.

Para uma órbita circular a Eq.(1.2.15) torna-se

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = (u - u_c)^2 \left[-Q^2 u^2 + 2u(M - Q^2 u_c) + u_c(M - Q^2 u_c - \frac{M}{L^2 u_c^2}) \right]. \quad (1.2.22)$$

A Eq.(1.2.22) ainda fornece uma órbita do segundo tipo determinada por

$$\phi = \pm \int [-Q^2 u^2 + 2u(M - Q^2 u_c) + u_c(M - Q^2 u_c - \frac{M}{L^2 u_c^2})]^{-1/2} \frac{du}{u - u_c}. \quad (1.2.23)$$

Fazendo a mudança de variável

$$\xi = (u - u_c)^{-1}, \quad (1.2.24)$$

obtemos

$$\mp \phi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \log \{ 2[c(-Q^2 + b\xi + c\xi^2)]^{1/2} + 2c\xi + b \} & c > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \left\{ \frac{2c\xi + b}{(4Q^2 c + b^2)^{1/2}} \right\} & c < 0, \end{cases} \quad (1.2.25)$$

onde

$$b = 2(M - 2Q^2 u_c) \quad e \quad c = u_c \left(3M - 4Q^2 u_c - \frac{M^2}{L^2 u_c^2} \right). \quad (1.2.26)$$

Quando a órbita circular é instável, as órbitas de ambos os tipos podem ser obtidas da Eq.(1.2.25) para $c < 0$. O menor valor do raio para se obter uma órbita circular estável ocorre nos pontos de inflexão da função $f(u)$, ou seja

$$f''(u) = -12Q^2 u^2 + 12Mu - 2 \left(1 + \frac{Q^2}{L^2} \right) = 0. \quad (1.2.27)$$

Substituindo a Eq.(1.2.19) na Eq.(1.2.27) obtemos

$$4Q^4 u_c^3 - 9MQ^2 u_c^2 + 6M^2 u_c - M = 0. \quad (1.2.28)$$

A Eq.(1.2.28) pode ser escrita na forma

$$r_c^3 - 6Mr_c^2 + 9Q^2 r_c - \frac{4Q^4}{M} = 0, \quad (1.2.29)$$

onde, por exemplo, para $Q^2 = 0$ temos $r_c = 6M$. Este resultado está de acordo com o obtido para o espaço-tempo de Schwarzschild.

Quando as Eqs.(1.2.16), (1.2.17) e (1.2.27) são satisfeitas, a Eq.(1.2.15) toma a forma

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = (u - u_c)^3(2M - 3Q^2u_c - Q^2u), \quad (1.2.30)$$

cuja solução é dada por

$$u = u_c + \frac{2(M - 2Q^2u_c)}{(M - 2Q^2u_c)^2(\phi - \phi_0)^2 + Q^2}. \quad (1.2.31)$$

• Geodésicas do tipo-luz

A geodésicas do tipo-luz são descritas pelas equações

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \frac{\Delta L^2}{r^4}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{Er^2}{\Delta}, \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \quad (1.2.32)$$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -Q^2u^4 + 2Mu^3 - u^2 + \frac{E^2}{L^2} = f(u), \quad (1.2.33)$$

As Eq.(1.2.15) e (1.2.33) diferem das Eq.(1.1.30) e (1.1.52) pela forma da função $f(u)$, que é cúbica no espaço-tempo de Schwarzschild e de quarta ordem em Reissner-Nordström. Essa diferença desempenha um papel essencial na análise das órbitas que cruzam o horizonte de eventos.

Para geodésicas radiais, temos

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{Er^2}{\Delta}, \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (1.2.34)$$

logo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dr}{d\tau} = \pm \frac{\Delta}{r^2}. \quad (1.2.35)$$

A Eq.(1.2.35) tem como solução

$$t = \pm r_* + \text{constante}. \quad (1.2.36)$$

O valor do parâmetro de impacto $D = L/E$ para os quais $f(u) = 0$ é determinado por

$$f(u) = \frac{1}{D^2} - u^2(Q^2u^2 - 2Mu + 1) = 0, \quad (1.2.37)$$

e

$$f'(u) = -2u(1 - 3Mu + 2Q^2u^2) = 0. \quad (1.2.38)$$

As raízes da Eq.(1.2.38) são

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ u &= \frac{3M}{4Q^2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{8Q^2}{9M^2} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

sendo o ponto de mínimo da função dado por

$$u = \frac{3M}{4Q^2} \left[1 + \left(1 - \frac{8Q^2}{9M^2} \right)^{1/2} \right] = u_c, \quad (1.2.40)$$

ou

$$r_c = \frac{3M}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{8Q^2}{9M^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.2.41)$$

Em $r = r_c$, as órbitas circulares instáveis são permitidas pelas equações geodésicas.

Da Eq.(1.2.37), deriva-se a relação entre r_c e D_c . Neste caso, temos

$$D_c = \frac{r_c^2}{\Delta_c}, \quad (1.2.42)$$

onde

$$\Delta_c = r_c^2 - 2Mr_c + Q^2 = Mr_c - Q^2. \quad (1.2.43)$$

Quando $D = D_c$

$$f(u) = (u - u_c)^2[-Q^2u^2 + 2u(M - Q^2u_c) + u_c(M - Q^2u_c)], \quad (1.2.44)$$

e a solução em ϕ é dado por

$$\phi = \pm \int [-Q^2u^2 + 2u(M - Q^2u_c) + u_c(M - Q^2u_c)]^{-1/2} \frac{du}{u - u_c}. \quad (1.2.45)$$

Fazendo a mudança de variável, Eq.(1.2.24), a Eq.(1.2.45) torna-se

$$\phi = \mp \int \frac{d\xi}{(-Q^2 + b\xi + c\xi^2)^{1/2}}, \quad (1.2.46)$$

onde

$$b = 2(M - 2Q^2u_c) \quad e \quad c = u_c(3M - 4Q^2u_c). \quad (1.2.47)$$

A solução da Eq.(1.2.46) é dada por

$$\mp \phi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \log \{2[c(-Q^2 + b\xi + c\xi^2)]^{1/2} + 2c\xi + b\} & c > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1} \left\{ \frac{2c\xi + b}{(4Q^2c + b^2)^{1/2}} \right\} & c < 0 \end{cases}, \quad (1.2.48)$$

sendo

$$\infty > r > r_c, \quad 0 \leq u \leq u_c, \quad e \quad -u_c^{-1} > \xi > -\infty, \quad (1.2.49)$$

para órbitas do primeiro tipo, e

$$r_c > r > r_{min} \quad u_c < u \leq u_{max}, \quad e \quad +\infty > \xi > \xi_{min}, \quad (1.2.50)$$

para órbitas do segundo tipo, onde r_{min} é a raiz positiva da equação

$$u_c r^2 (M - Q^2 u_c) + 2r(M - Q^2 u_c) - Q^2 = 0. \quad (1.2.51)$$

1.2.3 Cargas Conservadas

A massa de Komar, ou energia total de um espaço-tempo estacionário, está relacionado ao vetor de Killing tipo-tempo $\xi_{(t)}^\alpha$. A Eq.(D.1) define esta carga conservada na forma [1, 2]

$$M_{Komar} = \frac{1}{4\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \nabla^\alpha \xi_{(t)}^\beta n_\alpha r_\beta \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (1.2.52)$$

onde n_α e r_β são os vetores perpendiculares a hipersuperfície e a fronteira, respectivamente. Substituindo as componentes não nulas desses vetores

$$n_0 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{1/2}, \quad r_1 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1/2}, \quad (1.2.53)$$

no integrando da Eq.(1.2.52), obtemos

$$\begin{aligned}
n_\alpha r_\beta \nabla^\alpha \xi^\beta &= -\nabla^0 \xi^1. \\
&= -g^{00} \nabla_0 \xi^1 \\
&= -g^{00} (\partial_0 \xi^1 + \Gamma_{0\lambda}^1 \xi^\lambda) \\
&= -g^{00} \Gamma_{00}^1 \xi^0 \\
&= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \\
&= \frac{M}{r^2} - \frac{q^2}{r^3}.
\end{aligned} \tag{1.2.54}$$

A métrica sobre a fronteira no infinito espacial tem a forma

$$\sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B = r^2 d\Omega^2, \tag{1.2.55}$$

e, portanto

$$\sqrt{\sigma} = r^2 \sin \theta. \tag{1.2.56}$$

Substituindo as Eqs.(1.2.54) e (1.2.56) na Eq.(1.2.52) obtemos a energia para o espaço-tempo de Schwarzschild no limite $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
M_{Komar} &= \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{M}{r^2}\right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \\
&= M.
\end{aligned} \tag{1.2.57}$$

1.2.4 Diagrama de Kruskal

A métrica na Eq.(1.2.6) descreve a região externa ao buraco negro de Reissner-Nordström. Para contornar o problema de singularidade da métrica nas coordenadas dos horizontes de eventos, inicialmente, devemos estender a métrica para além da superfície $r = r_+$ (horizonte externo), usando as coordenadas de Kruskal (U_+, V_+) e, posteriormente, estender a métrica para além da superfície $r = r_-$ (horizonte interno), usando as coordenadas de Kruskal (U_-, V_-).

Próximo ao horizonte de eventos, $r = r_+$, temos

$$f(r) \simeq 2\kappa_+(r - r_+), \quad (1.2.58)$$

$$r^* \simeq \frac{1}{2\kappa_+} \ln |\kappa_+(r - r_+)|, \quad (1.2.59)$$

onde

$$\kappa_+ \equiv \frac{1}{2}f'(r_+). \quad (1.2.60)$$

Por conveniência, introduzimos as coordenadas tipo-luz

$$u = t - r^*, \quad (1.2.61)$$

$$v = t + r^*, \quad (1.2.62)$$

onde o horizonte de eventos externo é a superfície $v - u = -\infty$. As coordenadas de Kruskal (U_+, V_+) são obtidas a partir de uma transformação de escala das coordenadas (u, v) da forma

$$\begin{aligned} U_+ &= -e^{-\kappa_+u} & V_+ &= e^{\kappa_+v} & (r > r_+), \\ U_+ &= +e^{-\kappa_+u} & V_+ &= e^{\kappa_+v} & (r < r_+). \end{aligned} \quad (1.2.63)$$

Nas coordenadas (U_+, V_+) , a métrica é regular no horizonte externo e tem a forma

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_+^2} dU_+ dV_+ + r_+^2 d\Omega^2, \quad (1.2.64)$$

com

$$f \simeq -2U_+V_+ \quad (r = r_+). \quad (1.2.65)$$

Por outro lado, na Eq.(1.2.59), para $r^* \rightarrow \infty$ no horizonte interno temos $v - u = +\infty$, isto é, $U_+V_+ = \infty$. Logo, as coordenadas de Kruskal (U_+, V_+) são definidas apenas em uma região do espaço-tempo, ou seja, no intervalo $r_1 < r < \infty$, onde $r_1 > r_-$.

A região do espaço-tempo definida no intervalo $r_- < r < r_+$, é descrita pelo sistema de coordenadas original (t, r) com a métrica na forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.2.66)$$

com $P = 0$. A métrica é singular no horizonte interno, logo, coordenadas de Kruskal devem ser introduzidas para contornar este problema. Realizando o mesmo procedimento, anteriormente descrito para o horizonte de eventos externo, obtemos

$$f(r) \simeq -2\kappa_-(r - r_-), \quad (1.2.67)$$

$$r^* \simeq -\frac{1}{2\kappa_-} \ln |\kappa_-(r - r_-)|, \quad (1.2.68)$$

onde

$$\kappa_- \equiv \frac{1}{2} |f'(r_-)|. \quad (1.2.69)$$

Nas coordenadas (u, v) , o horizonte de eventos interno é descrito pela superfície $v - u = +\infty$. As coordenadas de kruskal (U_-, V_-) são definidas pela transformação de escala das coordenadas (u, v)

$$\begin{aligned} U_- &= -e^{\kappa_- u} & V_- &= -e^{-\kappa_- v} & (r > r_-), \\ U_- &= +e^{\kappa_- u} & V_- &= -e^{-\kappa_- v} & (r < r_-). \end{aligned} \quad (1.2.70)$$

Nas coordenadas (U_-, V_-) , a métrica é regular no horizonte interno e tem a forma

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_-^2} dU_- dV_- + r_-^2 d\Omega^2, \quad (1.2.71)$$

com

$$f \simeq -2U_- V_-, \quad (r = r_-). \quad (1.2.72)$$

Na Eq.(1.2.70), as coordenadas de Kruskal (U_-, V_-) são singulares no horizonte de eventos externo.

Vamos analisar a trajetória de um observador no diagrama de Kruskal, ilustrado na Fig.(1.4). Sendo $g_{00} < 0$, na região $r < r_-$, a coordenada radial é tipo-espaço e, portanto, um observador pode cair na singularidade ou evitá-la. Devido a singularidade ser uma superfície tipo-tempo, assim como qualquer superfície com r constante nessa região, um observador dentro do buraco negro poderá escapar da singularidade fazendo o caminho inverso cruzando a outra cópia de $r = r_-$.

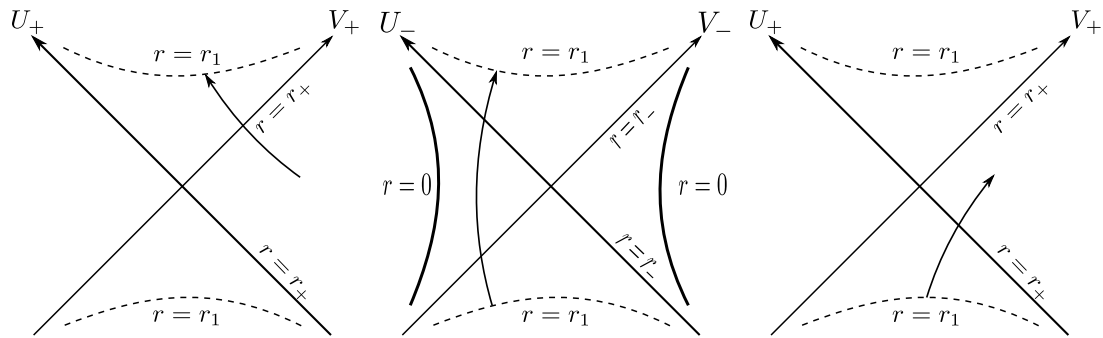


Figura 1.4: Diagramas de Kruskal para o espaço-tempo de Reissner-Nordström.

Após passar pela segunda cópia da superfície $r = r_-$, o observador cruza a superfície $r = r_+$. Tendo em vista que na vizinhança de $r = r_+$ a métrica pode ser estendida via coordenadas de Kruskal (U_+, V_+) , o observador pode escolher entre ficar neste novo universo ou iniciar o ciclo novamente. Neste sentido, pode-se dizer que a métrica de Reissner-Nordström descreve um número infinito de universos assintoticamente planos conectados via buracos negros [2]. No caso $M > |Q|$, a estrutura causal para o buraco negro de Reissner-Nordström é descrita pelo diagrama de Penrose na Fig.(1.5).

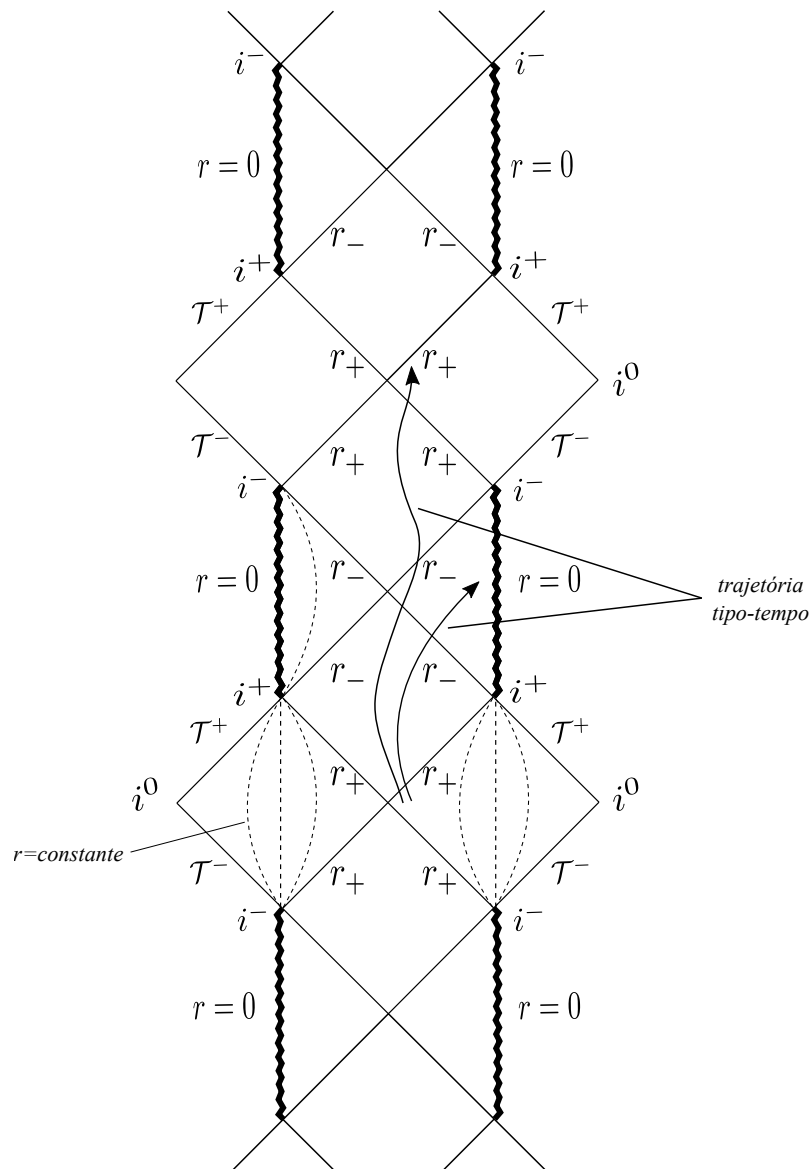


Figura 1.5: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Reissner-Nordström com $M > |Q|$.

1.2.5 Termodinâmica

Vamos considerar a seguinte definição para a entropia

$$S \equiv \frac{A}{4l_P^2}, \quad (1.2.73)$$

onde A é a área do horizonte. Nesta definição, a entropia se relaciona com a área do horizonte de eventos por unidade do comprimento de Planck $l_P = \sqrt{\hbar G_N}$. Por enquanto, trata-se apenas de uma definição, mas veremos que existe uma conexão com a entropia real.

No horizonte de eventos a métrica tem a forma

$$ds^2 = r_+^2 d\Omega_2^2. \quad (1.2.74)$$

A área deste horizonte é dada por

$$\begin{aligned} A &= 4\pi r_+^2 \\ &= 4\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2. \end{aligned} \quad (1.2.75)$$

A variação da entropia é expressada pela equação

$$dS = \left(\frac{4\pi}{f'(r_+)} \right) dM - \left(\frac{4\pi Q}{f'(r_+)r_+} \right) dQ. \quad (1.2.76)$$

A Eq.(1.2.76) pode ser colocada na forma da primeira lei da termodinâmica

$$dM = TdS + \Phi dQ, \quad (1.2.77)$$

onde

$$T \equiv \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}, \quad (1.2.78)$$

$$\Phi = \frac{Q}{r_+} = \frac{Q}{M + \sqrt{M^2 - Q^2}}. \quad (1.2.79)$$

O parâmetro M pode ser interpretado como a energia total deste espaço-tempo da mesma forma que Φ é visto como o potencial elétrico no horizonte de eventos

$$\Phi = -A_0|_{r=r_+}. \quad (1.2.80)$$

Neste ponto da discussão ainda não é possível afirmar que T e S são, respectivamente, temperatura e a entropia. A primeira lei da termodinâmica descreve duas configurações de equilíbrio que podem ser pensadas como: (1) uma relação matemática sobre o espaço de soluções das equações, (2) o que acontece com a entropia se jogarmos alguma energia e carga no buraco negro.

1.3 Buraco negro de Kerr

Vamos estudar as propriedades do espaço-tempo em torno de um buraco negro com rotação e sem carga. A solução de Kerr, que descreve este espaço-tempo, foi obtida em 1963 após a descoberta das soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström. Esta é a única solução fornecida pela relatividade geral que descreve buracos negros originados a partir do colapso gravitacional de estrelas massivas, sendo o único exemplo de uma teoria física que fornece uma descrição exata de um objeto macroscópico [1, 2, 4, 5]

A métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist tem a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2, \quad (1.3.1)$$

na qual

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2, \quad \rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

As constantes M e a são, respectivamente, a massa (de Komar) e o momento angular J por unidade de massa J/M . Podemos ainda considerar cargas elétricas e magnéticas no espaço-tempo de Kerr, substituindo $2GMr$ por

$$2GMr - G(Q^2 + P^2). \quad (1.3.2)$$

A partir dessa substituição, obtemos a métrica de Kerr-Newman. Analisando a métrica de Kerr, notamos que quando $a \rightarrow 0$ reproduzimos a métrica de Schwarzschild e quando $M \rightarrow 0$, mantendo a fixo, obtemos a métrica do espaço-tempo plano. Uma vez que os coeficientes da métrica Eq.(1.3.1) são independentes de t e ϕ , temos os campos vetoriais de Killing

$$K = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad R = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (1.3.3)$$

associados, respectivamente, as simetrias temporal e axial da métrica. No espaço-tempo de Kerr, podemos definir o tensor de Killing

$$\sigma_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu}, \quad (1.3.4)$$

que satisfaz a expressão

$$\nabla_{(\lambda}\sigma_{\mu_1\dots\mu_n)} = 0. \quad (1.3.5)$$

Na Eq.(1.3.4), os vetores contravariante

$$l^\mu = \frac{1}{\Delta}(r^2 + a^2, \Delta, 0, a) \quad \text{e} \quad n^\mu = \frac{1}{2\rho^2}(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \quad (1.3.6)$$

satisfazem as relações

$$l^\mu l_\mu = 0, \quad n^\mu n_\mu = 0, \quad l^\mu n_\mu = -1. \quad (1.3.7)$$

O horizonte de eventos do buraco negro de Kerr ocorre quando $\Delta(r) = 0$. Neste caso, fazendo uma analogia com o buraco negro de Reissner-Nordström, temos três situações possíveis. Quando $GM < a$, não existe raízes reais e dizemos que a singularidade é nua. No caso extremal, quando $GM = a$, notamos que o buraco negro é instável. Por fim, quando $GM > a$ temos

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - a^2}, \quad (1.3.8)$$

onde r_\pm são superfícies tipo-luz. Os horizontes de eventos do buraco negro de Kerr não constituem um horizonte de Killing em relação a $K = \partial_t$, uma vez que este buraco negro é estacionário. A partir da norma do vetor de Killing K^μ

$$K^\mu K_\mu = -\frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2 \sin^2 \theta), \quad (1.3.9)$$

notamos que para $r = r_+$, temos

$$K^\mu K_\mu = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \geq 0. \quad (1.3.10)$$

Logo, o vetor de Killing é tipo-espaço neste horizonte de eventos, exceto nos polos ($\theta = 0, \pi$), onde o mesmo é tipo-luz. Os pontos onde $K^\mu K_\mu = 0$, constitui uma superfície estacionária dada por

$$(r - GM)^2 = G^2M^2 - a^2 \cos^2 \theta, \quad (1.3.11)$$

enquanto que no horizonte de evento $r = r_+$, temos

$$(r_+ - GM)^2 = G^2 M^2 - a^2. \quad (1.3.12)$$

A região entre o horizonte de eventos externo e a superfície estacionária é chamada de ergosfera. No interior da ergosfera, um observador pode se deslocar na mesma direção de rotação do buraco negro. Este mesmo observador pode se aproximar e se afastar do horizonte de eventos sem necessariamente cair na singularidade [2, 1].

1.3.1 Extremal

No caso extremal ($a = M$), a métrica de Kerr torna-se

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GM^2 r \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) \\ & + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + M^2)^2 - M^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2, \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2GMr + M^2, \quad \rho^2 = r^2 + M^2 \cos^2 \theta.$$

1.3.2 Geodésicas

As geodésicas no plano equatorial são obtidas seguindo um procedimento semelhante ao adotado nos casos anteriormente descritos. Contudo, devemos enfatizar as diferenças essenciais em relação aos casos anteriores. A primeira delas está relacionada à distinção entre órbitas diretas e órbitas retrógradas cuja rotação em torno do eixo de simetria se dá na mesma direção de rotação do buraco negro ou em direção oposta, respectivamente. Outra diferença essencial reside no fato que, assim como a coordenada temporal t , a coordenada espacial ϕ não é uma boa coordenada para descrever o que realmente acontece a um observador co-móvel: a trajetória de uma partícula ao se aproximar do horizonte de eventos irá descrever uma trajetória em forma de espiral com um número infinito de voltas levando um tempo infinito para cruzar o horizonte.

No estudo das geodésicas tipo-tempo e tipo-luz no espaço-tempo de Kerr vamos considerar a assinatura $(+, -, -, -)$. A Lagrangiana para movimentos no plano equatorial é dada por

$$2\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aM}{r} \dot{t}\dot{\phi} - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \left[r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right] \dot{\phi}^2. \quad (1.3.14)$$

Os momentos generalizados são

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} + \frac{2aM}{r} \dot{\phi} = \text{constante}, \quad (1.3.15)$$

$$-p_\phi = -\frac{2aM}{r} \dot{t} + \left[(r^2 + a^2) + \frac{2a^2M}{r}\right] \dot{\phi} = \text{constante}, \quad (1.3.16)$$

$$-p_r = \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}, \quad (1.3.17)$$

onde se deriva em relação a um parâmetro afim.

A Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = p_t \dot{t} + p_r \dot{r} + p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (1.3.18)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{2aM}{r} \dot{t}\dot{\phi} - \frac{r^2}{2\Delta} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right) \dot{\phi}^2, \quad (1.3.19)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} 2\mathcal{H} &= \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} + \frac{2aM}{r} \dot{\phi}\right] \dot{t} - \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right) \dot{\phi} - \frac{2aM}{r} \dot{t}\right] \dot{\phi} - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 \\ &= E\dot{t} - L\dot{\phi} - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 = \delta, \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

onde

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{geodésicas tipo-tempo} \\ 0, & \text{geodésicas tipo-luz.} \end{cases} \quad (1.3.21)$$

Das Eqs.(1.3.15) e (1.3.16), obtemos

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) L + \frac{2aM}{r} E\right], \quad (1.3.22)$$

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right) E - \frac{2aM}{r} L\right]. \quad (1.3.23)$$

Substituindo as duas soluções na Eq.(1.3.20), a equação radial é obtida na forma

$$r^2 \dot{r}^2 = r^2 E^2 + \frac{2M}{r} (aE - L)^2 + (a^2 E^2 - L^2) - \delta \Delta. \quad (1.3.24)$$

• **Geodésicas tipo-tempo**

A Eq.(1.3.24) para geodésicas tipo-tempo é dada por

$$r^2\dot{r}^2 = -\Delta + r^2E^2 + \frac{2M}{r}(L - aE)^2 - (L^2 - a^2E^2), \quad (1.3.25)$$

onde E é interpretado como a energia por unidade de massa da partícula que descreve a trajetória. As Eqs.(1.3.25), (1.3.22) e (1.3.23) formam o conjunto de equações que descrevem as geodésicas tipo-tempo.

Em particular, para $L = aE$, temos

$$r^2\dot{r}^2 = (E^2 - 1)r^2 + 2Mr - a^2, \quad (1.3.26)$$

e

$$\dot{\phi} = \frac{aE}{\Delta}, \quad \dot{t} = \frac{(r^2 + a^2)E}{\Delta}. \quad (1.3.27)$$

As equações para $\dot{\phi}$ e \dot{t} são idênticas às equações geodésicas tipo-luz. Da Eq.(1.3.26) e considerando $M^2 > a^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \tau = \frac{1}{E^2 - 1} \left\{ [(E^2 - 1)r^2 + 2Mr - a^2]^{1/2} - \frac{M}{\sqrt{E^2 - 1}} \log \left[[(E^2 - 1)r^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2Mr - a^2]^{1/2} + r\sqrt{E^2 - 1} + \frac{M}{\sqrt{E^2 - 1}} \right] \right\} \quad \text{para } E^2 > 1, \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

e

$$\begin{aligned} \tau = -\frac{1}{1 - E^2} \left\{ [-(1 - E^2)r^2 + 2Mr - a^2]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{1 - E^2}} \times \right. \\ \left. \times \sin^{-1} \frac{M - (1 - E^2)r}{[M^2 - a^2(1 - E^2)]^{1/2}} \right\} \quad \text{para } E^2 < 1. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

As equações para \dot{r} e $\dot{\phi}$ podem ser combinadas de modo que

$$\frac{du}{d\phi} = \pm \frac{a}{E}(u - u_+)(u - u_-)[(E^2 - 1)r^2 + 2Mr - a^2]^{1/2}, \quad (1.3.30)$$

onde $u = 1/r$ e $u_{\pm} = 1/r_{\pm}$. A solução dessa equação é

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{a(u_+ - u_-)} \left\{ \log \left[2E \left(E^2 \xi_+^2 + 2(M - a^2 u_+) \xi_+ - a^2 \right)^{1/2} + 2E^2 \xi_+ \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(M - a^2 u_+) \right] - \log \left[2E \left(E^2 \xi_-^2 + 2(M - a^2 u_-) \xi_- - a^2 \right)^{1/2} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2E^2 \xi_- + 2(M - a^2 u) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

onde

$$\xi_{\pm} = (u - u_{\pm})^{-1}. \quad (1.3.32)$$

Agora, vamos considerar a Eq.(1.3.25) na forma geral. Em termos da variável u temos

$$u^{-4} \dot{u}^2 = -(a^2 u^2 - 2Mu + 1) + E^2 + 2M(L - aE)^2 u^3 - (L^2 - a^2 E^2) u^2. \quad (1.3.33)$$

Em particular, vamos direcionar os estudos para as órbitas circulares $\dot{r} = 0$, uma vez que as mesmas desempenham um papel importante no processo de classificação geral das órbitas. Para valores específicos de L e E na Eq.(1.3.33), teremos duas raízes advindas do polinômio no segundo membro. As condições para a ocorrência dessas raízes são expressas por

$$-(a^2 u^2 - 2Mu + 1) + E^2 + 2Mx^2 u^3 - (x^2 + 2aEx) u^2 = 0, \quad (1.3.34)$$

$$-(a^2 u - M) + 3Mx^2 u^2 - (x^2 + 2aEx) u = 0, \quad (1.3.35)$$

onde

$$x = L - aE. \quad (1.3.36)$$

As Eqs.(1.3.34) e (1.3.35) podem ser combinadas na forma

$$E^2 = (1 - Mu) + Mx^2 u^3, \quad (1.3.37)$$

e

$$2axEu = (3Mu - 1)x^2 u - (a^2 u - M). \quad (1.3.38)$$

Eliminando E nas Eqs.(1.3.37) e (1.3.38) , obtemos

$$\begin{aligned} x^4 u^2 [(3Mu - 1)^2 - 4a^2 Mu^3] - 2x^2 u [(3Mu - 1)(a^2 u - M) \\ - 2a^2 u(Mu - 1)] + (a^2 u - M)^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

A partir da expressão do discriminante da Eq.(1.3.39), temos

$$4a^2 M \Delta_u^2 u^3,$$

onde

$$\Delta_u = a^2 u^2 - 2Mu + 1. \quad (1.3.40)$$

A solução da Eq.(1.3.39) é dada por

$$(3Mu - 1)^2 - 4a^2 Mu^3 = Q_+ Q_-, \quad (1.3.41)$$

com

$$Q_{\pm} = 1 - 3Mu \pm 2a\sqrt{Mu^3}. \quad (1.3.42)$$

Logo, obtemos

$$x^2 u^2 = \frac{Q_{\pm} \Delta_u - Q_+ Q_-}{Q_+ Q_-} = \frac{\Delta_u - Q_{\mp}}{Q_{\mp}}. \quad (1.3.43)$$

Considerando a relação

$$\Delta_u - Q_{\mp} = u(a\sqrt{u} \pm \sqrt{M})^2, \quad (1.3.44)$$

a solução torna-se

$$x = -\frac{a\sqrt{u} \pm \sqrt{M}}{\sqrt{u} Q_{\mp}}. \quad (1.3.45)$$

Órbitas retrogradas e diretas são representadas pelos sinais superior e inferior, respectivamente.

Substituindo a Eq.(1.3.45) na Eq.(1.3.37), obtemos a energia por unidade de massa para uma partícula descrevendo uma órbita circular de raio u

$$E = \frac{1 - 2Mu \mp a\sqrt{Mu^3}}{\sqrt{Q_{\mp}}}. \quad (1.3.46)$$

Por outro lado, o momento angular por unidade de massa para uma partícula descrevendo uma órbita circular de raio recíproco u é obtida da Eq.(1.3.36) na forma

$$L = \mp \frac{\sqrt{M}(a^2u^2 + 1 \pm 2a\sqrt{Mu^3})}{\sqrt{uQ_{\mp}}}. \quad (1.3.47)$$

No cálculo das velocidades angular Ω e rotacional v^ϕ devemos considerar as equações para energia e momento angular, além das Eqs.(1.3.22) e (1.3.23), de modo a obter

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{d\phi}{dt} \\ &= \frac{L - 2Mux}{(r^2 + a^2)E - 2aMxu} \\ &= \frac{(L - 2Mux)u^2}{(1 + a^2u^2)E - 2aMux^3}, \end{aligned} \quad (1.3.48)$$

e

$$\begin{aligned} v^\phi &= e^{\psi-\nu}(\Omega - \omega) \\ &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \frac{\Omega}{\sqrt{\Delta}} - \frac{2aM}{r\sqrt{\Delta}}. \end{aligned} \quad (1.3.49)$$

Fazendo uso das relações

$$L - 2Mux = \frac{\mp\sqrt{M}}{\sqrt{uQ_{\mp}}}\Delta_u, \quad (1.3.50)$$

$$(1 + a^2u^2)E - 2aMux^3 = \frac{\Delta_u}{\sqrt{Q_{\mp}}}[1 \mp a\sqrt{Mu^3}], \quad (1.3.51)$$

as Eqs.(1.3.48) e (1.3.49) tornam-se

$$\Omega = \frac{\mp\sqrt{Mu^3}}{1 \mp a\sqrt{Mu^3}}, \quad (1.3.52)$$

$$v^\phi = \frac{\mp\sqrt{Mu}(1 + a^2u^2 \pm 2a\sqrt{Mu^3})}{\sqrt{\Delta_u}(1 \mp a\sqrt{Mu^3})}. \quad (1.3.53)$$

Nota-se que podemos obter a condição para a ocorrência de geodésica circular do tipo-luz (instável) fazendo $E \rightarrow \infty$ na Eq.(1.3.46)

$$Q_{\mp} = 1 - 3Mu_{\mp} \mp 2a\sqrt{Mu^3} = 0, \quad (1.3.54)$$

ou

$$r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \mp 2a\sqrt{M} = 0. \quad (1.3.55)$$

Vamos analisar o movimento de uma partícula descrevendo uma órbita circular de raio $u = u_c$ com energia E_c e momento angular L_c . A Eq.(1.3.33) torna-se

$$u^{-4}\dot{u}^2 = 2M(L_c - aE_c)^2(u - u_c)^2 \left[u + 2u_c - \frac{L_c^2 - a^2E_c^2 + a^2}{2M(L_c - aE_c)^2} \right]. \quad (1.3.56)$$

Das Eqs.(1.3.46) e (1.3.47), obtemos

$$\frac{L_c^2 - a^2E_c^2 + a^2}{2Mx_c^2} = \frac{1 + 3a^2u_c^2 \pm 4a\sqrt{Mu_c^3}}{2(a\sqrt{u_c} \pm \sqrt{M})^2}, \quad (1.3.57)$$

$$u_c - \frac{L_c^2 - a^2E_c^2 + a^2}{2Mx_c^2} = -\frac{\Delta_{u_c}}{2(a\sqrt{u_c} \pm M)^2}. \quad (1.3.58)$$

A Eq.(1.3.56) pode ser colocada na forma

$$\dot{u}^2 = 2Mx_c^2u^4(u - u_c)^2(u - u_*), \quad (1.3.59)$$

onde o raio da órbita de segundo tipo u_* está associado ao raio da órbita circular estável u_c pela equação

$$u_* = -u_c + \frac{\Delta_{u_c}}{2(a\sqrt{u_c} \pm \sqrt{M})^2}. \quad (1.3.60)$$

A Eq.(1.3.59) tem como solução

$$\tau = \frac{1}{x_c\sqrt{2M}} \int \frac{du}{u^2(u - u_c)(u - u_*)^{1/2}}. \quad (1.3.61)$$

Como alternativa, pode-se combinar a Eq.(1.3.59) com

$$\dot{\phi} = \frac{u^2}{\Delta_u}(L_c - 2Mx_cu), \quad (1.3.62)$$

para obter

$$\phi = \frac{1}{a^2 x_c \sqrt{2M}} \int \frac{(L_c - 2M x_c u) du}{(u - u_+)(u - u_-)(u - u_c)(u - u_*)^{1/2}}. \quad (1.3.63)$$

É evidente a partir da condição de instabilidade da órbita circular $u_* = u_c$, que

$$4u_c(a\sqrt{u_c} \pm \sqrt{M})^2 = \Delta_{u_c} = a^2 u_c^2 - 2M u_c + 1, \quad (1.3.64)$$

onde a condição $u_* = u_c$ foi aplicada na Eq.(1.3.60). Expandindo a Eq.(1.3.64) e descartando o índice c , obtemos

$$3a^2 u^2 + 6M u \pm 8a\sqrt{M} u^3 - 1 = 0. \quad (1.3.65)$$

Em termos da coordenada r , a Eq.(1.3.65) torna-se

$$r^2 - 6Mr \mp 8a\sqrt{Mr} - 3a^2 = 0. \quad (1.3.66)$$

• Geodésicas tipo-luz

A Eq.(1.3.24) para geodésicas tipo-luz é dada por

$$\dot{r}^2 = E^2 + \frac{2M}{r^3}(L - aE)^2 - \frac{1}{r^2}(L^2 - a^2 E^2). \quad (1.3.67)$$

Por conveniência, vamos usar o parâmetro de impacto $D = L/E$ para distinguir as geodésicas ao invés de considerar apenas o momento angular para este fim.

Notamos inicialmente que as geodésicas com $D = a$ (quando $L = aE$), desempenham o mesmo papel das geodésicas radiais no espaço-tempo de Schwarzschild e no espaço-tempo de Reissner-Nordström. Neste caso, as Eqs.(1.3.22), (1.3.23) e (1.3.67) são

$$\dot{\phi} = \frac{aE}{\Delta}, \quad \dot{r} = \pm E \quad \text{e} \quad \dot{t} = \frac{E(r^2 + a^2)}{\Delta}. \quad (1.3.68)$$

A coordenada radial é descrita uniformemente em termos do parâmetro afm enquanto as equações que descrevem t e ϕ são dadas por

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad \text{e} \quad \frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{a}{\Delta}. \quad (1.3.69)$$

As soluções das Eqs.(1.3.69) são

$$\pm t = r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_-} - 1 \right), \quad (1.3.70)$$

$$\pm \phi = \frac{a}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) - \frac{a}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_-} - 1 \right). \quad (1.3.71)$$

Analisando essas soluções, nota-se que $t \rightarrow \pm\infty$ e $\phi \rightarrow \pm\infty$ quando $r \rightarrow r_+$ ou $r \rightarrow r_-$.

As geodésicas tipo-luz descritas pela Eq.(1.3.69) são membros de uma congruência de geodésicas desse tipo que estão confinadas no plano equatorial. Em geral, assim como no espaço-tempo de Schwarzschild, devemos distinguir as órbitas com base em um parâmetro de impacto crítico D_c .

Em relação a D_c temos as seguintes situações:

- Para $D < D_c$, apenas as órbitas do primeiro tipo são permitidas. A geodésica parte do infinito, cruza o horizonte e alcança a singularidade.
- Para $D = D_c$, as órbitas dos dois tipos se “fundem”. Indefinidamente, ambas as órbitas passam a descrever um movimento em espiral com mesma órbita circular instável de raio $r = r_c$.
- Para $D > D_c$, os dois tipos de órbitas são permitidas, ou seja, as órbitas do primeiro tipo (vindas do infinito) cujo periélio é maior que r_c e as órbitas do segundo tipo (que alcançam a singularidade em $r = 0$) cujo afélio é menor que r_c .

O raio crítico da órbita circular instável é determinado pelas equações

$$E^2 + \frac{2M}{r_c^3}(L - aE)^2 - \frac{1}{r_c^2}(L^2 - a^2E^2) = 0, \quad (1.3.72)$$

$$-\frac{6M}{r_c^4}(L - aE)^2 - \frac{2}{r_c^3}(L^2 - a^2E^2) = 0. \quad (1.3.73)$$

Da Eq.(1.3.73), temos

$$\begin{aligned} r_c &= \frac{3M(L - aE)}{L + aE} \\ &= \frac{3M(D_c - a)}{D_c + a}. \end{aligned} \quad (1.3.74)$$

Substituindo a Eq.(1.3.74) na Eq.(1.3.72), obtemos

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{(L + aE)^3}{27M^2(L - aE)} \\ &= \frac{E^2(D_c + a)^3}{27M^2(D_c - a)}. \end{aligned} \quad (1.3.75)$$

Fazendo $y = D_c + a$ na Eq.(1.3.75), temos

$$y^3 - 27M^2y + 54aM^2 = 0. \quad (1.3.76)$$

Agora, vamos distinguir as órbitas analisando o intervalo no qual a está definido.

Para $a > 0$, temos as órbitas diretas com

$$y = -6M \cos(\theta + 120^\circ), \quad (1.3.77)$$

onde

$$\cos 3\theta = \frac{a}{M} \quad (1.3.78)$$

e

$$D_c = y - a, \quad (1.3.79)$$

$$r_c = 3M \left(1 - \frac{2a}{y} \right). \quad (1.3.80)$$

Para $a < 0$, temos as órbitas retrógradas com

$$y = 6M \cos \theta, \quad (1.3.81)$$

onde

$$\cos 3\theta = \frac{|a|}{M} \quad (1.3.82)$$

e

$$D_c = y + |a|, \quad (1.3.83)$$

$$r_c = 3M \left(1 + \frac{2|a|}{y} \right). \quad (1.3.84)$$

A solução em termos de θ é dada por

$$\begin{aligned} r_c &= 4M \cos^2 \theta \\ &= 2M \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \cos^{-1} \left(\pm \frac{a}{M} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.85)$$

Na Eq.(1.3.85), o sinal superior é considerado ao tratarmos de órbitas retrógradas enquanto o sinal inferior é usado quando analisamos órbitas diretas.

Das equações para r_c e D_c , temos

$$\begin{aligned} a &= 0; & D_c &= 3M\sqrt{3} & \text{e} & r_c &= 3M, \\ a &= M; & D_c &= 2M & \text{e} & r_c &= M, \\ a &= -M; & D_c &= 7M\sqrt{3} & \text{e} & r_c &= 4M. \end{aligned}$$

A Eq.(1.3.67) pode ainda ser reescrita na forma

$$\dot{u}^2 = ME^2(D_c - a)^2(u - u_c)^2(2u + u_c)u^4, \quad (1.3.86)$$

onde

$$u = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad u_c = \frac{1}{r_c} = \frac{D_c + a}{3M(D_c - a)}. \quad (1.3.87)$$

Integrando a Eq.(1.3.86), obtemos

$$(D_c - a)\sqrt{ME} \tau = \pm \int \frac{du}{u^2(u - u_c)(2u + u_c)^{1/2}} \quad (1.3.88)$$

$$= \pm \frac{1}{u_c^2} \left\{ \frac{1}{u}(2u + u_c)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3u_c}} \log \left| \frac{\sqrt{2u + u_c} - \sqrt{3u_c}}{\sqrt{2u + u_c} + \sqrt{3u_c}} \right| \right\}. \quad (1.3.89)$$

Para descrever a órbita no plano equatorial, pode-se combinar a Eq.(1.3.89) com a equação que segue diretamente da Eq.(1.3.22), isto é

$$\dot{\phi} = \frac{Eu^2[3D_c u_c - 2(D_c + a)u]}{3(a^2 u^2 - 2Mu + 1)u_c}, \quad (1.3.90)$$

para então obter

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{(D_c + a)(a^2 u^2 - 2Mu + 1)(u - u_c)(2u + u_c)^{1/2}}{\sqrt{M}[3D_c u_c - 2(D_c + a)u]} \quad (1.3.91)$$

ou

$$\phi = \pm \frac{\sqrt{M}}{a^2(D_c + a)} \int \frac{3D_c u_c - 2(D_c + a)u}{(u - u_+)(u - u_-)(u - u_c)(2u + u_c)^{1/2}} du, \quad (1.3.92)$$

onde $u_{\pm} = 1/r_{\pm}$.

1.3.3 Cargas Conservadas

A métrica que descreve a geometria de um espaço-tempo com simetria axial, estacionário e assintoticamente plano é dada por [2]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) - \frac{4j \sin^2 \theta}{r} dt d\phi, \quad (1.3.93)$$

onde m e j são os parâmetros de massa e momento angular, respectivamente. A massa geométrica obtida a partir da Eq.(B.1), com $N = 1$ e $N^a = 0$, tem a forma

$$M = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (k - k_0) \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (1.3.94)$$

onde

- k curvatura extrínseca da fronteira S_t incorporada na hipersuperfície tipo-espaço Σ_t ;
- k_0 curvatura extrínseca da fronteira S_t incorporada ao espaço-tempo plano;
- σ determinante da métrica induzida sobre a hipersuperfície S_t .

A métrica induzida sobre a hipersuperfície Σ_t é dada por

$$\begin{aligned} ds_{\Sigma_t}^2 &= h_{ab} dy^a dy^b \\ &= \left(1 + \frac{2m}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (1.3.95)$$

com $a, b = r, \theta, \phi$. Fazendo $r = R$ na Eq.(1.3.95), obtemos a métrica induzida sobre a fronteira S_t da hipersuperfície Σ_t

$$\begin{aligned} ds_{S_t}^2 &= \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B \\ &= \left(1 + \frac{2m}{R}\right) (R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \quad (1.3.96)$$

com $A, B = \theta, \phi$. O determinante da métrica induzida é

$$\begin{aligned}\sigma &= \det \sigma_{AB} \\ &= \left(1 + \frac{2m}{R}\right)^2.\end{aligned}\quad (1.3.97)$$

As curvaturas extrínseca da fronteira S_t e da 2-esfera são, respectivamente

$$k = \frac{2(1 - 2m/R)}{R}, \quad k_0 = \frac{2(1 - m/R)}{R}.\quad (1.3.98)$$

A equação para k_0 é obtida quando, sobre a superfície considerada, fazemos

$$\sigma_{AB}^0 d\theta^A d\theta^B = R'^2 d\Omega^2,\quad (1.3.99)$$

com

$$R' \equiv R \left(1 + \frac{m}{R}\right),\quad (1.3.100)$$

de modo que $\sigma_{AB}^0 = \sigma_{AB}$. Substituindo as Eqs.(1.3.98) na Eq.(1.3.94), a expressão para massa gravitacional torna-se

$$M = \frac{m}{4\pi R^2} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \sqrt{\sigma} d^2\theta.\quad (1.3.101)$$

O elemento de volume na Eq.(1.3.101) tem a forma

$$\sqrt{\sigma} d^2\theta = \left(1 + \frac{2m}{R}\right) R^2 \sin\theta d\theta d\phi,\quad (1.3.102)$$

e, portanto, a Eq.(1.3.101) fornece como resultado

$$M = m.\quad (1.3.103)$$

Para obter o momento angular do espaço-tempo devemos considerar a Eq.(B.1) com $N = 0$ e $N^a = \phi^a$. Neste caso, temos

$$J = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (K_{ab} - Kh_{ab}) \phi^a r^b \sqrt{\sigma} d^2\theta.\quad (1.3.104)$$

A curvatura extrínseca é dada por

$$K_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\beta n_\alpha,\quad (1.3.105)$$

onde o vetor normal a hipersuperfície Σ_t é dado por

$$n_\alpha = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} \partial_\alpha t. \quad (1.3.106)$$

Considerando o termo $\mathcal{O}(m/r)$ na expansão da Eq.(1.3.106), temos

$$n_\alpha = - \left(1 - \frac{m}{r}\right) \partial_\alpha t. \quad (1.3.107)$$

O segundo termo do integrando na Eq.(1.3.104) é nulo devido a ortogonalidade entre os vetores

$$r_a = \left(1 + \frac{m}{r}\right) \partial_a r \quad \text{e} \quad \phi^a \equiv \frac{\partial y^a}{\partial \phi}. \quad (1.3.108)$$

O vetor r^a é normal a superfície S_t (fronteira). Substituindo a Eq.(1.3.108) no primeiro termo do integrando, obtemos

$$K_{ab} \phi^a r^b = K_{\phi r} \left(1 - \frac{m}{r}\right). \quad (1.3.109)$$

A componente da curvatura extrínseca, relevante para o cálculo, é dada por

$$K_{\phi r} = \left(1 - \frac{m}{r}\right) \Gamma_{\phi r}^t, \quad (1.3.110)$$

onde

$$\Gamma_{\phi r}^t = - \frac{3j \sin^2 \theta}{r^2} \quad (1.3.111)$$

e

$$g^{tt} = - \left(1 + \frac{2m}{r}\right), \quad g^{t\phi} = - \frac{2j}{r^3}. \quad (1.3.112)$$

Por fim, substituindo a Eq.(1.3.111) na Eq.(1.3.110), temos

$$K_{\phi r} = - \frac{3j \sin^2 \theta}{R^2}, \quad (1.3.113)$$

e fazendo as devidas substituições, a Eq.(1.3.104) torna-se

$$J = \frac{3j}{4} \oint \sin^3 \theta d\theta, \quad (1.3.114)$$

e, portanto

$$J = j. \quad (1.3.115)$$

1.3.4 Coordenadas de Kruskal

Para $\theta = 0$, a métrica de Kerr torna-se

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) dt^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr^2, \quad (1.3.116)$$

com horizontes de eventos nos pontos

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.3.117)$$

Nas coordenadas (u, v) a métrica toma a forma

$$ds^2 = -f dudv, \quad (1.3.118)$$

onde

$$\begin{aligned} f &= \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \\ &= \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (1.3.119)$$

A métrica de Kerr, Eq.(1.3.116), nas coordenadas de Kruskal é obtida seguindo os mesmos procedimentos adotados para escrever a métrica de Reissner-Nordström nessas coordenadas [1, 2, 4, 5].

A métrica nas coordenadas (t, r) , descreve a região externa ao buraco negro sendo singular nos horizontes interno e externo. Para contornar este problema, inicialmente, devemos estender a métrica para além do ponto $r = r_+$ (horizonte externo), usando as coordenadas de Kruskal (U_+, V_+) e, posteriormente, estender a métrica para além do ponto $r = r_-$ (horizonte interno), usando as coordenadas de Kruskal (U_-, V_-) .

Próximo ao horizonte de eventos, $r = r_+$, temos

$$\begin{aligned} f(r) &\simeq 2\kappa_+(r - r_+) \\ &\simeq \pm 2e^{2\kappa_+ r^*} \\ &= \pm 2e^{\kappa_+(v-u)}, \end{aligned} \quad (1.3.120)$$

onde

$$\kappa_+ \equiv \frac{1}{2}f'(r_+), \quad \text{e} \quad r^* \simeq \frac{1}{2\kappa_+} \ln |\kappa_+(r - r_+)|. \quad (1.3.121)$$

As coordenadas de Kruskal (U_+, V_+) são introduzidas a partir de uma transformação de escala das coordenadas (u, v) da forma

$$\begin{aligned} U_+ &= -e^{-\kappa_+u} & V_+ &= e^{\kappa_+v} & (r > r_+), \\ U_+ &= +e^{-\kappa_+u} & V_+ &= e^{\kappa_+v} & (r < r_+). \end{aligned} \quad (1.3.122)$$

Nessas coordenadas a métrica torna-se

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_+^2} dU_+ dV_+, \quad (1.3.123)$$

sendo regular próximo ao horizonte externo.

Por outro lado, as coordenadas (U_+, V_+) não são regulares no horizonte interno e, portanto, outras coordenadas são necessárias para estender a métrica além de $r = r_-$.

Realizando o mesmo procedimento, anteriormente descrito para o horizonte de eventos externo, temos

$$\begin{aligned} f(r) &\simeq -2\kappa_-(r - r_-) \\ &\simeq \mp 2e^{-2\kappa_-r^*} \\ &= \mp 2e^{\kappa_-(u-v)}, \end{aligned} \quad (1.3.124)$$

onde

$$\kappa_- \equiv \frac{1}{2}|f'(r_-)|. \quad (1.3.125)$$

Neste caso, a transformação de coordenadas apropriada é dada por

$$\begin{aligned} U_- &= -e^{\kappa_-u} & V_- &= -e^{-\kappa_-v} & (r > r_-), \\ U_- &= +e^{\kappa_-u} & V_- &= -e^{-\kappa_-v} & (r < r_-). \end{aligned} \quad (1.3.126)$$

Em (U_-, V_-), a métrica é regular no horizonte interno e tem a forma

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_-^2} dU_- dV_-. \quad (1.3.127)$$

1.3.5 Termodinâmica

A superfície de gravidade é definida pela equação

$$\nabla_\alpha(-\xi^\beta\xi_\beta) = 2\kappa\xi_\alpha, \quad (1.3.128)$$

onde o vetor ξ^α é a combinação linear dos vetores de Killing t^α e ϕ^α expressa na forma

$$\xi^\alpha = t^\alpha + \Omega_H\phi^\alpha. \quad (1.3.129)$$

O vetor ξ^α é do tipo-luz no horizonte sendo tangente aos geradores nesta superfície.

A norma de ξ^α é dada por

$$\xi^\beta\xi_\beta = -\frac{\rho^2\Delta}{\Sigma} + \frac{\Sigma\sin^2\theta(\Omega_H - \omega)^2}{\rho^2}, \quad (1.3.130)$$

logo, temos

$$\nabla_\alpha(-\xi^\beta\xi_\beta) = \frac{\rho^2}{\Sigma}\partial_\alpha\Delta. \quad (1.3.131)$$

Substituindo as expressões definidas no horizonte

$$\partial_\alpha\Delta = 2(r_+ - M)\partial_{\partial r} \quad \text{e} \quad \xi_\alpha = (1 - a\Omega_H\sin^2\theta)\partial_\alpha r, \quad (1.3.132)$$

na Eq.(1.3.131), obtemos a superfície de gravidade

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2}. \quad (1.3.133)$$

Capítulo 2

Geometria próximo ao horizonte de buraco negro extremal

2.1 Geometria Próximo ao Horizonte do Buraco Negro de Reissner-Nordström Extremal (NHERN)

A solução de Reissner-Nordström dada pela Eq.(1.2.6) pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -\frac{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{(\rho - \rho_+)(\rho - \rho_-)} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2, \quad (2.1.1)$$

$$A = \frac{Q}{\rho} dt,$$

com horizonte de eventos em $\rho_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Tomando o limite extremal $\rho_+ = \rho_- = M$ na Eq.(2.1.1), a métrica de Reissner-Nordström torna-se

$$ds^2 = -\frac{(\rho - \rho_+)^2}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{(\rho - \rho_+)^2} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2. \quad (2.1.2)$$

Implementando o limite próximo ao horizonte $\rho \rightarrow M + \lambda\tilde{\rho}$ e $t \rightarrow \tilde{t}/\lambda$ na Eq.(2.1.2), obtemos a métrica de Bertotti-Robinson [23]

$$ds^2 = -\left(\frac{\tilde{\rho}}{M}\right)^2 d\tilde{t}^2 + \left(\frac{M}{\tilde{\rho}}\right)^2 d\tilde{\rho}^2 + M^2 d\Omega^2, \quad (2.1.3)$$

onde M é o raio da esfera S^2 . Por conveniência, define-se a transformação de coordenada

$$\frac{\tilde{\rho}}{M} = \left(\frac{2M}{r}\right)^2, \quad (2.1.4)$$

de modo que a métrica NHERN torna-se

$$ds^2 = -\left(\frac{2M}{r}\right)^4 dt^2 + \left(\frac{2M}{r}\right)^2 dr^2 + M^2 d\Omega^2. \quad (2.1.5)$$

Nessa geometria, a Hamiltoniana da partícula é dada por

$$H = -p_t,$$

com p_t satisfazendo a condição

$$(p - qA)^2 + m^2 = 0. \quad (2.1.6)$$

Da Eq.(2.1.6), obtemos a Hamiltoniana associada a geodésica na geometria NHERN

$$-\left(\frac{r}{2M}\right)^4 \left[H + q \left(\frac{2M}{r}\right)^2 \right]^2 + \left(\frac{r}{2M}\right)^2 p_r^2 + \frac{L^2}{M^2} + m^2 = 0$$

$$H + q \left(\frac{2M}{r}\right)^2 = \left(\frac{2M}{r}\right)^2 \sqrt{m^2 + \frac{r^2 p_r^2 + 4L^2}{4M^2}},$$

logo

$$H = \left(\frac{2M}{r}\right)^2 \left[\sqrt{m^2 + \frac{r^2 p_r^2 + 4L^2}{4M^2}} - q \right], \quad (2.1.7)$$

onde

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\phi^2.$$

Multiplicando o numerador e o denominador da Eq.(2.1.7) pela expressão

$$4M^2 m^2 + r^2 p_r^2 + 4L^2 - 4M^2 q^2,$$

a Hamiltoniana toma a forma

$$H = \frac{p_r^2}{2f} + \frac{mg}{2r^2 f},$$

onde

$$f = \frac{1}{2} \left[\sqrt{m^2 + \frac{r^2 p_r^2 + 4L^2}{4M^2}} + q \right] \quad \text{e} \quad g = \frac{4M^2(m^2 - q^2)}{m} + \frac{4L^2}{m}.$$

Implementando o limite $M \rightarrow \infty$ e $(m - q) \rightarrow 0$, com $M^2(m - q)$ fixado, obtemos [23]

$$f \rightarrow m \quad \text{e} \quad g = 8M^2(m - q) + \frac{4l(l + 1)}{m}.$$

2.2 Geometria Próximo ao Horizonte do Buraco Negro de Kerr Extremal (NHEK)

Vamos analisar a geometria do espaço-tempo próximo ao horizonte de um buraco negro de Kerr extremal. Seja a métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Linquist dada na forma

$$ds^2 = -e^{2\nu} d\tilde{t}^2 + e^{2\psi} (d\tilde{\phi} - w d\tilde{t})^2 + \rho^2 (\Delta^{-1} d\tilde{r}^2 + d\tilde{\theta}^2) \quad (2.2.1)$$

onde

$$\rho^2 \equiv \tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv \tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + a^2, \quad (2.2.2)$$

e

$$e^{2\nu} = \frac{\Delta \rho^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}, \quad e^{2\psi} = \Delta \sin^2 \theta e^{-2\nu}, \quad w = \frac{2M\tilde{r}a}{\Delta \rho^2} e^{2\nu}, \quad (2.2.3)$$

sendo M a massa total, w a velocidade angular do horizonte de eventos e $J = Ma$ o momento angular. No limite extremal $a^2 = M^2$, o horizonte de eventos ($\Delta = 0$) está em $\tilde{r} = M$ com velocidade $w = 1/2M$. Em analogia com buracos negros carregados queremos extrair a geometria próximo ao horizonte deste espaço-tempo [15].

Para descrever a geometria próximo ao horizonte de Kerr extremal, definimos as seguintes coordenadas

$$\tilde{r} = M + \lambda r, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\lambda}, \quad \tilde{\phi} = \phi + \frac{t}{2M\lambda}, \quad (2.2.4)$$

e tomamos o limite $\lambda \rightarrow 0$.

Dessa forma, obtemos a geometria NHEK (Near Horizon Extremal Kerr) em coordenadas co-móvel

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \left[-\frac{r^2}{r_0^2} dt^2 + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\theta^2 \right] + \frac{2r_0^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \left(d\phi + \frac{r}{r_0^2} dt \right)^2, \quad (2.2.5)$$

onde $r_0^2 \equiv 2M^2$. Tal espaço-tempo não é assintoticamente plano e o mesmo possui propriedades similares as do espaço $AdS_2 \times S^2$.

A métrica Eq.(2.2.5) tem simetria de dilatação como a do AdS_2 , ou seja, é invariante por

$$r \rightarrow cr, \quad t \rightarrow \frac{t}{c} \quad (2.2.6)$$

para qualquer c constante. A geometria NHEK ainda possui uma simetria extra global associada a translação temporal que pode ser encontrada fazendo a transformação de coordenadas

$$r = (\sqrt{1 + y^2} \cos \tau + y)^{-1}, \quad t = r \sqrt{1 + y^2} \sin \tau, \quad (2.2.7)$$

$$\phi = \varphi + \log \left| \frac{\cos \tau + y \sin \tau}{1 + \sqrt{1 + y^2}} \sin \tau \right|.$$

Nesse novo sistema de coordenadas a métrica Eq.(2.2.5) cobre todo o espaço-tempo, e tem a seguinte forma [10, 15]

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \left[-(1 + y^2) d\tau^2 + \frac{dy^2}{1 + y^2} + d\theta^2 \right] + \frac{2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} (d\varphi + y d\tau) \quad (2.2.8)$$

com

$$-\infty < \tau < \infty, \quad -\infty < y < \infty. \quad (2.2.9)$$

Dessa forma, a geometria passa a ter, explicitamente, o grupo de isometria $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$. Neste cenário, todas as quantidades geométricas dependem apenas de θ .

Vamos agora mostrar que a métrica Eq.(2.2.8) é geodesicamente completa. Primeiramente, note que as superfícies de τ constante são sempre tipo-espaço, então τ é

uma função global do tempo e este espaço-tempo não tem curvas tipo-tempo fechadas. No entanto, o campo vetorial de Killing $\partial/\partial\tau$, é tipo-tempo apenas quando $y^2 < 1/3$ para todo θ , e assintoticamente tipo-espaço quando $\sin\theta > (1 + \cos^2\theta)/2$.

Por conveniência, definimos o vetor de Killing

$$\chi = \frac{\partial}{\partial\tau} - y \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad (2.2.10)$$

onde χ está orientado para o futuro em qualquer ponto.

Uma vez que estamos interessados nas propriedades assintóticas das geodésicas, vamos considerar geodésicas com θ constante ($\theta = 0, \pi/2$). Neste sentido, partículas que se movem ao longo do eixo $\theta = 0$ se comportam exatamente como em AdS_2 . Para $\theta = \pi/2$, temos um espaço tridimensional homogêneo com grupo de simetria $SL(2, \mathbb{R}) \times U(1)$.

As quantidades conservadas associadas a uma dada geodésica com momento

$$P = \dot{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} \right) + \dot{y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \dot{\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad (2.2.11)$$

tem a seguinte forma [15]

$$L = P \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} = 2(\dot{\varphi} + y\dot{\tau}), \quad E = -P \cdot \frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{1 + y^2}{2} \dot{\tau} - Ly \quad (2.2.12)$$

Para geodésicas tipo-tempo, temos $g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -\mu^2$ e obtemos

$$\dot{y}^2 - 4(E + Ly)^2 + (2\mu^2 + L^2)(1 + y^2) = 0 \quad (2.2.13)$$

Note que geodesicas com momento angular nulo comportam-se como geodésicas em AdS_2 . Neste caso, partículas massivas sentem uma barreira de potencial e ficam confinadas em $|y|$. No caso das partículas sem massa ($\mu = 0$), as mesmas podem alcançar o infinito.

Vamos verificar que essas geodésicas alcançam o infinito em um τ finito. As geodésicas tipo-tempo com $L^2 < 2\mu^2/3$ estão confinadas, enquanto que geodésicas com $L^2 > 2\mu^2/3$ podem escapar para o infinito. Esta é uma característica qualitativa do espaço-tempo Eq.(2.2.8) que não está presente em $AdS_2 \times S^2$.

Uma vez que o vetor de Killing χ da Eq.(2.2.10) é tipo-tempo direcionado para o futuro em qualquer ponto, temos que

$$-P \cdot \chi > 0,$$

que implica

$$E + yL > 0.$$

Assim, geodésicas com $L > 0$ podem alcançar $y = \infty$, mas não $y = -\infty$. Para $L < 0$ a situação é reversa. Tais geodésicas são completas e alcançam o infinito em um τ finito.

Para o espaço-tempo $AdS_2 \times S^2$, podemos remover as coordenadas angulares e por meio de uma transformação de escala, trazer a fronteira do infinito para um ponto finito. Este procedimento não pode ser feito para a Eq.(2.2.5), uma vez que essa geometria não é descrita como um fibrado trivial.

Considere a métrica Eq.(2.2.5) em coordenadas de Poincaré. Multiplicando está métrica por $1/r^2$ e definindo $x = 1/r$, obtemos

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) [-dt^2 + dx^2 + x^2 d\theta^2] + \frac{2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} (xd\phi + dt)^2. \quad (2.2.14)$$

Apesar de sua simples aparência, esta métrica apresenta uma singularidade em $x = 0$. Os vetores de Killing da Eq.(2.2.5), são agora campos de Killing conformes da Eq.(2.2.14), onde $\mathcal{L}_\xi g = \alpha g$, na forma

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - r \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.2.15)$$

$$\xi_4 = \left(\frac{1}{2r^2} + \frac{t^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial t} - tr \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2.2.16)$$

As translações no tempo tornam-se parte do grupo de isometria $SL(2, \mathbb{R})$, gerado pelos vetores de Killing

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= 2 \sin \tau \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\tau - 2 \cos \tau \sqrt{1+r^2} \partial_r + \frac{2 \sin \tau}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\phi \\ \tilde{J}_2 &= -2 \cos \tau \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\tau - 2 \sin \tau \sqrt{1+r^2} \partial_r - \frac{2 \cos \tau}{\sqrt{1+r^2}} \partial_\phi \\ \tilde{J}_3 &= 2 \partial_\tau \end{aligned}$$

A partir da condição $p^2 + m^2 = 0$, obtemos a hamiltoniana associada à geodésica na geometria NHEK

$$H = \frac{r}{r_0} \left[\sqrt{(C_1 m r_0)^2 + (r p_r)^2 + p_\theta^2 + C_2 p_\phi^2} - p_\phi \right], \quad (2.2.17)$$

onde

$$r_0^2 \equiv 2M^2, \quad C_1^2 \equiv \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \quad \text{e} \quad C_2 \equiv \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \sin \theta} \right)^2.$$

Implementando a transformação de coordenada $r = 1/\rho^2$ na Eq.(2.2.17), escrevemos a Hamiltoniana na forma

$$H = \frac{C_1}{\rho^2} \left[\sqrt{m^2 + \frac{\rho^2 p_\rho^2 + 4\tilde{L}^2}{(2r_0 C_1)^2}} - \frac{p_\phi}{r_0 C_1} \right], \quad (2.2.18)$$

com

$$\tilde{L}^2 \equiv p_\theta^2 + C_2 p_\phi^2.$$

Multiplicando o numerador e o denominador da Eq.(2.2.18) pela expressão

$$(2r_0 C_1)^2 m^2 + \rho^2 p_\rho^2 + 4\tilde{L}^2 - 4p_\phi^2,$$

obtemos

$$H = \frac{p_\rho^2}{2f} + \frac{mg}{2\rho^2 f},$$

onde

$$f = \frac{1}{2C_1} \left[\sqrt{m^2 + \frac{\rho^2 p_\rho^2 + 4\tilde{L}^2}{(2r_0 C_1)^2}} + \frac{p_\phi}{r_0 C_1} \right] \quad \text{e} \quad g = \frac{4(C_1^2 r_0^2 m^2 - p_\phi^2)}{m} + \frac{4\tilde{L}^2}{m}. \quad (2.2.19)$$

Capítulo 3

$SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{R})$

3.1 $SU(2)$

Nesta seção, discute-se as propriedades do grupo de simetria unitário especial $SU(2)$. O respectivo grupo surge em diversas áreas da física e da matemática. As operações contínuas de simetria podem ser vistas como funções analíticas de seus parâmetros. Por exemplo, a rotação em torno de um eixo tem um ângulo como parâmetro contínuo. Exceto por razões topológicas, essas operações são aplicações repetidas de um operador que gera rotações infinitesimais em torno de um eixo e que, geralmente, não comutam.

Grupo

O grupo unitário especial, cujos elementos são matrizes 2×2 , satisfaz as condições

$$\det g = 1 \quad \text{unimodular,} \quad (3.1.1)$$

$$g^\dagger g = 1 \quad \text{unitário,} \quad (3.1.2)$$

onde g^\dagger é o conjugado hermitiano de g . O $SU(2)$ é um subgrupo das matrizes lineares especiais $SL(2, \mathbb{C})$ formada por matrizes complexas 2×2 de determinante unitário [25].

Vamos considerar um elemento geral

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (3.1.3)$$

e uma transformação $R(g)$. Esta transformação pertence a uma região conectada de $O(4)$, isto é, ao grupo $SO(4)$ e, portanto, é uma rotação em \mathbf{R}^4 .

Álgebra de Lie

O produto interno de duas matrizes A e B é definido na forma

$$(A, B) = \text{Tr}(AB^\dagger). \quad (3.1.4)$$

A norma de A definida por $\|A\| = \sqrt{(A, A)}$ satisfaz a inequação

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (3.1.5)$$

e, portanto, a exponencial de A é definida pela série convergente

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \quad (3.1.6)$$

Suponha que cada componente de uma matriz $g \in SL(2, \mathbb{C})$ é uma função contínua de um parâmetro t . Então g pode ser colocado na forma

$$g(t) = e^{-itA}, \quad (3.1.7)$$

onde a matriz A é o gerador infinitesimal do grupo a 1-parâmetro de $g(t)$

$$A = -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dg(t)}{dt}. \quad (3.1.8)$$

Para $g \in SU(2)$, A é uma matriz hermitiana 2×2 . Essa matriz é a representação da álgebra $su(2)$ de $SU(2)$. As matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.1.9)$$

fornecem uma base ortogonal para a álgebra de Lie $su(2)$, isto é, qualquer elemento A de $su(2)$ pode ser decomposto na forma

$$A = a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3, \quad (3.1.10)$$

onde

$$J_k = \frac{1}{2}\sigma_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3.1.11)$$

As matrizes J_k satisfaz a relação de comutação simétrica da álgebra $su(2)$

$$[J_1, J_2] = iJ_3 \quad [J_3, J_1] = iJ_2 \quad [J_2, J_3] = iJ_1. \quad (3.1.12)$$

O invariante de Casimir do grupo

$$Q = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (3.1.13)$$

comuta com todos os J_k . Os três conjuntos de elementos de $SU(2)$ que correspondem as matrizes J_k de $su(2)$ são

$$g_1 = e^{itJ_1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & i \sin \frac{t}{2} \\ i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.1.14)$$

$$g_2 = e^{itJ_2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & \sin \frac{t}{2} \\ -\sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.1.15)$$

$$g_3 = e^{itJ_3} = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.1.16)$$

Cada um desses conjuntos de elementos forma um subgrupo a 1-parâmetro do $SU(2)$.

A partir dessas relações, um elemento $g(\phi, \theta, \psi)$, expressado em termos dos ângulos de Euler, pode ser escrito também na forma

$$g(\phi, \theta, \psi) = e^{i\phi J_3} e^{i\theta J_1} e^{i\psi J_3}. \quad (3.1.17)$$

Representação

A representação do $SU(2)$ é um caso especial da representação do $SL(2, \mathbb{C})$. O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ age sobre o espaço linear complexo bidimensional \mathbb{C}^2 de todos os vetores $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, onde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Um elemento

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (3.1.18)$$

age como

$$\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}' = \mathbf{z}g \in \mathbb{C}^2. \quad (3.1.19)$$

Explicitamente, isto corresponde a uma transformação linear de \mathbb{C}^2

$$(z_1, z_2)g = (\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2), \quad (3.1.20)$$

que satisfaz

$$\mathbf{z}(gg') = (\mathbf{z}g)g', \quad (3.1.21)$$

para qualquer $g, g' \in SL(2, \mathbb{C})$ e $\mathbf{z}\mathbf{1} = \mathbf{z}$, onde $\mathbf{1}$ é a matriz unitária 2×2 . A ação de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre \mathbb{C}^2 é transferida para o espaço V de funções $f(\mathbf{z})$ de duas variáveis complexas através da definição de um operador $T(g)$ tal que

$$T(g)f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}g) \quad (3.1.22)$$

ou

$$T(g)f(z_1, z_2) = f(\alpha z_1 + \gamma z_2, \beta z_1 + \delta z_2), \quad (3.1.23)$$

e ainda

$$T(gg') = T(g)T(g'), \quad T(\mathbf{1}) = 1. \quad (3.1.24)$$

Assim, $T(g)$ é uma representação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$. Uma representação irredutível $T^J(g)$ pode ser construída no espaço V_J de todos os polinômios homogêneos de grau $2J = 0, 1, 2, \dots$

$$p(z_1, z_2) = \sum_{m=-J}^J a_m z_1^{J+m} z_2^{J-m}. \quad (3.1.25)$$

Por conveniência, a representação $T^J(g)$ pode ser realizada no espaço de todos os polinômios de grau $2J$ de uma variável complexa $z_1/z_2 = z$. Para $\phi(z) = p(z, 1)$, temos

$$p(z_1, z_2) = z_2^{2J} \phi(z_1/z_2). \quad (3.1.26)$$

Logo, no espaço de $\phi(z)$, a representação $T^J(g)$ é dada por

$$T^J(g)\phi(z) = (\beta z + \delta)^{2J} \phi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \quad (3.1.27)$$

A representação $D^J(g)$ para o grupo $SU(2)$ pode ser obtida a partir da Eq.(3.1.27) fazendo as substituições $\gamma = -\beta^*$ e $\delta = \alpha^*$

$$D^J(g)\phi(z) = (\beta z + \alpha^*)^{2J} \phi\left(\frac{\alpha z - \beta^*}{\beta z + \alpha^*}\right), \quad (3.1.28)$$

onde

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (3.1.29)$$

Se o produto interno (ϕ_a, ϕ_b) sobre V_J é definido por

$$\left(\sum_{m=-J}^J a_m z^{J+m}, \sum_{m=-J}^J b_m^* z^{J+m} \right) = \sum_{m=-J}^J (J+m)!(J-m)! a_m b_m^*, \quad (3.1.30)$$

então para qualquer $g \in SU(2)$, temos

$$(D^J(g)\phi_a, D^J(g)\phi_b) = (\phi_a, \phi_b), \quad (3.1.31)$$

isto é, que a representação $D^J(g)$ é unitária.

Da Eq.(3.1.28), vemos que

$$D^J(g)z^{J+m} = (\beta z + \alpha^*)^{J-m} (\alpha z - \beta^*)^{J+m}. \quad (3.1.32)$$

Assim, as matrizes J_k da base ortogonal de $su(2)$ dada pela Eq.(3.1.9) pode ser realizada sobre o espaço de monômios

$$\psi_J^m(\chi) = N_m \chi^{J+m} \quad (-J \leq m \leq J), \quad (3.1.33)$$

sobre um círculo

$$S^1 = \{\chi = e^{i\phi} | 0 \leq \phi < 2\pi\} \quad (3.1.34)$$

com o auxílio das Eqs.(3.1.7), (3.1.8), (3.1.14) e (3.1.28)

$$\begin{aligned}
D^J(J_1)\chi^{J+m} &= -i\frac{d}{dt}D^J(g_1)\chi^{J+m}|_{t=0} \\
&= -i\frac{d}{dt}\left[(i\chi\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2})^{J-m}(\chi\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2})^{J+m}\right]|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}[(J+m)\chi^{J+m-1} + (J-m)\chi^{J+m+1}].
\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

De modo similar, temos

$$\begin{aligned}
D^J(J_2)\chi^{J+m} &= -i\frac{d}{dt}D^J(g_2)\chi^{J+m}|_{t=0} \\
&= -\frac{i}{2}[(J+m)\chi^{J+m-1} - (J-m)\chi^{J+m+1}]
\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

e

$$\begin{aligned}
D^J(J_3)\chi^{J+m} &= -i\frac{d}{dt}D^J(g_3)\chi^{J+m}|_{t=0} \\
&= m\chi^{J+m}.
\end{aligned} \tag{3.1.37}$$

Definido a matriz

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2, \tag{3.1.38}$$

obtemos

$$D^J(J_{\pm})\chi^{J+m} = (J \mp m)\chi^{J+m\pm 1}. \tag{3.1.39}$$

Assim, com a função $\chi = e^{i\phi}$, temos

$$\psi_J^m(\chi) = [(J+m)!(J-m)!]^{-1/2}\chi^{J+m}, \tag{3.1.40}$$

ortogonalizado por

$$(\chi^{J+m}, \chi^{J+m'}) = (J+m)!(J-m)!\delta_{mm'}. \tag{3.1.41}$$

Logo, obtemos a relação

$$D^J(J_{\pm})\psi_J^m(\chi) = [(J \mp m)(J \pm m + 1)]^{1/2}\psi_J^{m\pm 1}(\chi), \tag{3.1.42}$$

$$D^J(J_3)\psi_J^m(\chi) = m\psi_J^m(\chi). \tag{3.1.43}$$

O conjunto das funções ortonormais $\{\psi_J^m(\chi)\}$, com $(-J \leq m \leq J)$, forma a base canônica para a representação $D^J(g)$ de $SU(2)$. Qualquer representação unitária irredutível de $SU(2)$ é equivalente a uma dessas representações $D^J(g)$ com

$$\begin{aligned} J &= 0, 1, 2, \dots & m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm J, \\ J &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots & m &= \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots, \pm J. \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

As Eqs.(3.1.42) e (3.1.43), podem ser expressas na forma

$$J_{\pm}|Jm\rangle = [(J \mp m)(J \pm m + 1)]^{1/2}|Jm \pm 1\rangle, \quad (3.1.45)$$

$$J_3|Jm\rangle = m|Jm\rangle. \quad (3.1.46)$$

A representação em χ

$$\langle \chi | J_{\pm} | \chi' \rangle = D^J(J_{\pm})\delta(\chi - \chi'),$$

$$\langle \chi | J_3 | \chi' \rangle = D^J(J_3)\delta(\chi - \chi'),$$

$$\langle \chi | Jm \rangle = \psi_J^m(\chi),$$

leva as Eqs.(3.1.45) e (3.1.46) nas Eqs.(3.1.42) e (3.1.43), respectivamente.

3.2 $SL(2, \mathbb{R})$

Nesta seção, estudamos as propriedades do grupo pseudo-unitário especial $SL(2, \mathbb{R})$. O referido grupo é isomórfico ao grupo unitário especial $SU(1, 1)$. Em alguns sistemas físicos o grupo $SU(1, 1)$ desempenha um papel para os quais o grupo $SU(2)$ não tem correspondência.

Grupo

O grupo pseudo-unitário especial $SL(2, \mathbb{R})$, isomórfico ao grupo $SU(1, 1)$ e cujos elementos são matrizes 2×2 , satisfaz as condições

$$\det g = 1 \quad \text{unimodular}, \quad (3.2.1)$$

$$g^\dagger \sigma_3 g = \sigma_3 \quad \text{pseudo-unitário}, \quad (3.2.2)$$

onde σ_3 é a matriz de Pauli. Um elemento $g \in SL(2, \mathbb{R})$ é uma matriz pseudo-unitária unimodular dada por

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad (3.2.3)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ satisfaz a condição unimodular

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \quad (3.2.4)$$

Parametrização

Os elementos do grupo $SL(2, \mathbb{R})$ podem ser parametrizados de várias formas. Como sabemos, o grupo $SU(2)$ pode ser parametrizado pelos ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) . No caso do $SL(2, \mathbb{R})$, fazendo $\theta \rightarrow -i\theta$, temos três parâmetros reais (ϕ, θ, ψ) com $0 < \theta < \infty$. Em geral, fazendo a transformação $\theta \rightarrow -i\theta$, todo elemento de $SU(2)$ pode ser convertido em um elemento de $SL(2, \mathbb{R})$. As matrizes de grupo $SL(2, \mathbb{R})$ são parametrizadas na forma

$$g(\phi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta}{2} e^{i(\phi+\psi)/2} & \sinh \frac{\theta}{2} e^{i(\phi-\psi)/2} \\ \sinh \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi-\psi)/2} & \cosh \frac{\theta}{2} e^{-i(\phi+\psi)/2} \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

onde

$$0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \infty, \quad \text{e} \quad 0 \leq \psi < 4\pi. \quad (3.2.6)$$

Assim como em $SU(2)$, podemos implementar a decomposição de Cartan

$$g(\phi, \theta, \psi) = g(\phi, 0, 0)g(0, \theta, 0)g(0, 0, \psi), \quad (3.2.7)$$

onde

$$g(\phi, 0, 0) = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (3.2.8)$$

$$g(0, 0, \psi) = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}, \quad (3.2.9)$$

$$g(0, \theta, 0) = \begin{pmatrix} \cosh \theta/2 & \sinh \theta/2 \\ \sinh \theta/2 & \cosh \theta/2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Álgebra de Lie

Todo elemento $g \in SL(2, \mathbb{R})$ pode ser gerado por um elemento A da álgebra de Lie $su(1, 1)$ dado por

$$g = e^{itA}. \quad (3.2.11)$$

Se A é hermitiano, temos uma representação unitária de $SL(2, \mathbb{R})$. Em geral, todas as representações irredutíveis unitárias de um grupo não-compacto são infinito dimensionais.

Todos os elementos dessa álgebra podem ser escritos em termos da combinação linear de J_1 , J_2 e J_3 , que satisfazem as relações de comutação

$$[J_1, J_2] = -iJ_3, \quad [J_3, J_1] = iJ_2, \quad [J_2, J_3] = iK_1. \quad (3.2.12)$$

Os elementos de $su(1, 1)$ que satisfazem essas relações de comutação podem ser representados em termos das matrizes de Pauli

$$J_1 = \frac{1}{2}i\sigma_1, \quad J_2 = \frac{1}{2}i\sigma_2, \quad J_3 = \frac{1}{2}\sigma_3. \quad (3.2.13)$$

Estes são os geradores de uma representação não-unitária bidimensional do grupo $SL(2, \mathbb{R})$, isto é

$$e^{itJ_1} = \begin{pmatrix} \cosh t/2 & \sinh t/2 \\ \sinh t/2 & \cosh t/2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.14)$$

$$e^{itJ_2} = \begin{pmatrix} \cosh t/2 & -i \sinh t/2 \\ i \sinh t/2 & \cosh t/2 \end{pmatrix}, \quad (3.2.15)$$

$$e^{itJ_3} = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Os elementos da álgebra, J_1 e J_2 , geram os elementos do grupo que pertence à classe hiperbólica dos subgrupos não-compactos, enquanto que J_3 é responsável por gerar os elementos da classe elíptica do subgrupo compacto.

A Eq.(3.2.5) pode ser escrita na forma

$$g(\phi, \theta, \psi) = e^{i\phi J_3} e^{i\theta J_1} e^{i\psi J_3}. \quad (3.2.17)$$

O invariante de Casimir da álgebra de Lie $su(1, 1)$

$$Q = J_3^2 - J_1^2 - J_2^2, \quad (3.2.18)$$

é hermitiano (não é positivo definido). Por definição, temos

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2, \quad (3.2.19)$$

que satisfaz as relações de comutação

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad \text{e} \quad [J_+, J_-] = -2J_3. \quad (3.2.20)$$

Os geradores (J_1, J_2) são anti-hermitiano na representação unitária, logo, é evidente que

$$J_{\pm}^{\dagger} = -J_{\mp}. \quad (3.2.21)$$

Um operador não-compacto também é definido

$$K_+ = J_1 + J_3, \quad (3.2.22)$$

de modo que a relação de comutação

$$[K_+, J_2] = -iK_+, \quad (3.2.23)$$

é satisfeita. Na representação não-unitária bidimensional dada pela Eq.(3.2.13), o operador não-compacto K_+ gera os elementos do subgrupo parabólico de $SL(2, \mathbb{R})$

$$e^{itK_+} = \begin{pmatrix} 1 + it/2 & -t/2 \\ -t/2 & 1 - it/2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.24)$$

Representação Irredutível Unitária

As representações irredutíveis unitárias do grupo não-compacto $SL(2, \mathbb{R})$, que são todas infinito dimensionais, podem ser caracterizadas pelos autovalores dos operadores

Q e J_3 . Na base $|Jm\rangle$

$$Q|Jm\rangle = J(J+1)|Jm\rangle \quad (3.2.25)$$

$$J_3|Jm\rangle = m|Jm\rangle \quad (3.2.26)$$

$$J_+|Jm\rangle = [m(m+1) - J(J+1)]^{1/2}|Jm+1\rangle \quad (3.2.27)$$

$$J_-|Jm\rangle = [m(m-1) - J(J+1)]^{1/2}|Jm-1\rangle \quad (3.2.28)$$

onde

$$\langle Jm|Jm'\rangle = \delta_{mm'}, \quad (3.2.29)$$

as representações irredutíveis unitárias caracterizadas por J e m_0 são classificadas em:

- Série contínua principal

$$C_J: \quad J = -\frac{1}{2} + is \quad (s > 0); \quad m = m_0 \pm n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \quad (3.2.30)$$

- Série discreta principal

$$D_J^+: \quad J = -|m_0| - \tilde{n} \quad (\tilde{n} \in \mathbf{N}_0); \quad m = -J + n \quad (n \in \mathbf{N}_0), \quad (3.2.31)$$

$$D_J^-: \quad J = -|m_0| - \tilde{n} \quad (\tilde{n} \in \mathbf{N}_0); \quad m = J - n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \quad (3.2.32)$$

- Série suplementar

$$E_J: \quad -\frac{1}{2} < J < -|m_0|; \quad m = m_0 \pm n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \quad (3.2.33)$$

Nesta classificação considera-se

$$|m_0| \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3.2.34)$$

As representações de Bargmann constituem um caso especial onde $m_0 = 0$ ou $1/2$, isto é

- Série contínua principal

$$C_J^0: \quad J = -\frac{1}{2} + is \quad (0 < s < \infty); \quad m = \pm n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \quad (3.2.35)$$

$$C_J^1: \quad J = -\frac{1}{2} + is \quad (0 \leq s < \infty); \quad m = \pm \frac{1}{2} \pm n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \quad (3.2.36)$$

- Série discreta principal

$$D_J^+ : 2J = -\tilde{n} \quad (\tilde{n} \in \mathbf{N}_0); \quad m = -J + n \quad (n \in \mathbf{N}_0), \quad (3.2.37)$$

$$D_J^- : 2J = -\tilde{n} \quad (\tilde{n} \in \mathbf{N}_0); \quad m = J - n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \quad (3.2.38)$$

- Série suplementar

$$E_J : -\frac{1}{2} < J < 0; \quad m = m_0 \pm n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \quad (3.2.39)$$

Base Contínua para a Representação

As aplicações do grupo $SL(2, \mathbb{R})$ são normalmente expressas em termos das bases que diagonalizam o gerador compacto J_3 . Além dessas aplicações, vamos estudar as que estão fundamentadas em bases que diagonalizam o gerador não-compacto da classe parabólica. Tendo em vista que o procedimento de diagonalização de um gerador não compacto é algo não trivial, devemos revisar o processo de construção dos autovetores generalizados do gerador K_+ e dos elementos de matriz do grupo $SL(2, \mathbb{R})$ sobre a nova base.

O espaço de uma representação irredutível unitária de $SL(2, \mathbb{R})$ sobre a base padrão $|Jm\rangle$ é convenientemente denotado por

$$\mathcal{H} = \{|\psi\rangle = \sum_m \psi_m |Jm\rangle; \quad \langle\psi|\psi\rangle < \infty\}. \quad (3.2.40)$$

Vamos introduzir o espaço de “sequências que decrescem rapidamente”

$$\mathcal{D} = \{|\psi\rangle = \sum_m \psi_m |Jm\rangle; \quad \lim_{|m| \rightarrow \infty} m^n \psi_m = 0 \text{ para todo } n \in \mathbf{N}\}, \quad (3.2.41)$$

e o espaço de “sequências que decrescem lentamente”

$$\mathcal{D}' = \{|\psi'\rangle = \sum_m \psi'_m |Jm\rangle; \quad \lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{m^n \psi'_m}{m^N} = 0 \text{ para algum } N = N(\psi')\}, \quad (3.2.42)$$

de modo que o espaço \mathcal{D} é denso em \mathcal{H} e $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$. Podemos então definir um produto escalar generalizado

$$\langle\psi'|\psi\rangle = \sum_m \psi'_m^* \psi_m = \langle\psi|\psi'\rangle^*, \quad (3.2.43)$$

onde $\psi \in \mathcal{D}$ e $\psi' \in \mathcal{D}'$. Uma topologia é definida sobre \mathcal{D} pelo conjunto de normas $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, onde

$$p_n = \left[\sum_m (m^2 + 1)^n |\psi_m|^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2.44)$$

Esses espaços possuem algumas propriedades importantes:

- A ação de todos os J_i e $g \in SL(2, \mathbb{R})$ deixam \mathcal{D} invariante; e são contínuos nesse espaço;
- Todos os geradores J_i são auto-adjuntos sobre \mathcal{D} ;
- O espaço \mathcal{D}' é o dual de \mathcal{D} e \mathcal{H} é denso em \mathcal{D}' ;
- Se A é um operador em \mathcal{H} , de modo que seu adjunto A^\dagger deixa \mathcal{D} invariante e é contínuo no mesmo, então A pode ser estendido a um operador contínuo A' em \mathcal{D}' por meio da relação

$$\langle \psi | A' | \psi' \rangle^* = \langle \psi' | A^\dagger | \psi \rangle. \quad (3.2.45)$$

Se A é um operador auto-adjunto que deixa \mathcal{D} invariante sendo contínuo no mesmo, então A tem um conjunto completo de autovetores generalizados em \mathcal{D}' de modo que

$$A' |ka\rangle = a |ka\rangle \quad (k = 1, 2, \dots, n_a), \quad (3.2.46)$$

onde a pertence ao espectro de A e $n_a \leq \infty$ é a multiplicidade do espectro de A no valor de a . Para qualquer $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ em \mathcal{D} temos a seguinte relação

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \sum_{k=1}^{n_a} \langle \psi | ka \rangle \langle ka | \phi \rangle d\mu(a), \quad (3.2.47)$$

onde $\mu(a)$ é a medida do espectro de A .

Diagonalização do K_+

Podemos agora construir autovetores generalizados dos geradores não compactos de $SL(2, \mathbb{R})$. Vamos considerar apenas a diagonalização dos operadores não compactos

$K_+ = J_1 + J_3$. Seja $|J\eta\rangle$ um autovetor de K_+

$$K_+|J\eta\rangle = \eta|J\eta\rangle. \quad (3.2.48)$$

Suponha que $|J\eta\rangle$ é um vetor generalizado em \mathcal{D}' dado por

$$|J\eta\rangle = \sum_m X_m(J, \eta)|Jm\rangle. \quad (3.2.49)$$

Nossa tarefa é determinar as funções $X_m(J, \eta) = \langle Jm|J\eta\rangle$ como funções suaves de m .

Das Eqs.(3.2.19), (3.2.22) e (3.2.48), temos

$$\langle Jm|K_+|J\eta\rangle = \langle Jm|J_3 + \frac{1}{2}(J_+ + J_-)|J\eta\rangle = \eta\langle Jm|J\eta\rangle, \quad (3.2.50)$$

de onde segue a equação

$$2(m - \eta)X_m + \sqrt{(m - J)(m + J + 1)}X_{m+1} + \sqrt{(m + J)(m - J - 1)}X_{m-1} = 0. \quad (3.2.51)$$

Certamente, a função desejada é uma solução dessa equação. Se $X_m(J, \eta)$ é uma solução, então

$$X'_m(J, \eta) = (-1)^m X_{-m}(J, -\eta). \quad (3.2.52)$$

Assumindo que $m - J \neq -n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), temos

$$X_m(J, \eta) = N(J, \eta) \sqrt{\frac{\Gamma(m - J)}{\Gamma(m + J + 1)}} \frac{1}{\Gamma(m - J)} W_m(\eta) \quad (3.2.53)$$

e a Eq.(3.2.51), torna-se

$$2(m - \eta)W_m(\eta) + W_{m+1}(\eta) - \left[\left(J + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 \right] W_{m-1}(\eta) = 0. \quad (3.2.54)$$

Comparando está equação com a relação de recorrência da função de Whittaker (ou função W), obtemos

$$(2m - z)W_{m,\mu}(z) + W_{m+1,\mu}(z) - \left[\mu^2 - \left(m - \frac{1}{2} \right)^2 \right] W_{m-1,\mu}(z) = 0. \quad (3.2.55)$$

Podemos afirmar que

$$W_m(\eta) \sim W_{m, J+1/2}(2\eta). \quad (3.2.56)$$

Alternativamente, se considerarmos

$$X'_m(J, \eta) = N(J, \eta) \sqrt{\frac{\Gamma(m-J)}{\Gamma(m+J+1)} \frac{1}{\Gamma(-m-J)}} V_m, \quad (3.2.57)$$

obtemos

$$2(m-\eta)V_m(\eta) - V_{m+1}(\eta) + \left[\left(J + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \right] V_{m-1}(\eta) = 0. \quad (3.2.58)$$

Essa relação pode ser reduzida à relação de recorrência Eq.(3.2.54) da função W se

$$V_m(\eta) \sim V_{-m, J+1/2}(-2\eta). \quad (3.2.59)$$

Note que $W_{\lambda, \nu}(z)$ e $W_{-\lambda, \nu}(-z)$ são soluções independentes da equação de Whittaker

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} - \frac{\mu^2 - (1/4)}{z^2} \right) W = 0. \quad (3.2.60)$$

Quando $\text{Re } m \gg 1$, $\text{Re } m \gg |z|$, $\text{Re } m \gg |\mu|$ e $\text{Re } z > 0$ a função W comporta-se como

$$W_{m, \mu}(z) \sim \left(-\frac{4z}{m} \right)^{1/4} e^{-m} m^m \sin(\sqrt{4mz} - m\pi - \pi/4), \quad (3.2.61)$$

$$W_{-m, \mu}(z) \sim \left(-\frac{z}{4m} \right)^{1/4} e^m m^{-m} e^{-\sqrt{4mz}}. \quad (3.2.62)$$

A representação assintótica da função Γ para grandes valores de ξ é

$$\Gamma(\xi) \sim \sqrt{2\pi} \xi^{\xi-1/2} e^{-\xi}. \quad (3.2.63)$$

Portanto, a função $X_m(J, \eta)$ cresce lentamente com $m \rightarrow \pm\infty$ apenas se

$$X_m(J, \eta) = N(J, \eta) \sqrt{\frac{\Gamma(m-J)}{\Gamma(m+J+1)} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\epsilon m - J)}} W_{\epsilon m, J+1/2}(2|\eta|), \quad (3.2.64)$$

onde $\epsilon = \text{sign } \eta$.

O fator de normalização $N(J, \eta)$ pode ser determinado, a menos de uma fase, pela expressão

$$\langle J\eta | J\eta' \rangle = \sum_m \langle J\eta | Jm \rangle \langle Jm | J\eta' \rangle = \delta(\eta - \eta'). \quad (3.2.65)$$

O resultado normalizado obtido por Lindblad e Nagel para todas as séries é

$$\langle Jm | J\eta \rangle = \sqrt{\frac{\Gamma(m - J)}{\Gamma(m + J + 1)} \frac{|\eta|^{-1/2}}{\Gamma(\epsilon m - J)}} W_{\epsilon m, J+1/2}(2|\eta|). \quad (3.2.66)$$

No caso D_J^+ , temos $m + J = n$ ($n \in \mathbf{N}_0$), de modo que $\Gamma(\epsilon m - J) \rightarrow \infty$ se $\epsilon = -1$.

Portanto, para D_J^+

$$\langle Jm | J\eta \rangle = [n! \Gamma(n - 2J) |\eta|]^{-1/2} W_{n-J, J+1/2}(2\eta) \quad \text{para } \eta \geq 0, \quad (3.2.67)$$

$$\langle Jm | J\eta \rangle = 0 \quad \text{para } \eta < 0. \quad (3.2.68)$$

No caso D_J^- , temos $m - J = -n$ ($n \in \mathbf{N}_0$) e, portanto, a solução Eq.(3.2.53) não é apropriada. Assim, para D_J^- usamos a solução alternativa Eq.(3.2.57), ou seja

$$\langle Jm | J\eta \rangle = (-1)^m X_{-m}(J, -\eta) \quad (3.2.69)$$

ou, explicitamente

$$\langle Jm | J\eta \rangle = (-1)^{J-n} [n! \Gamma(n - 2J) |\eta|]^{-1/2} W_{n-J, J+1/2}(2\eta) \quad \text{para } \eta \geq 0, \quad (3.2.70)$$

$$\langle Jm | J\eta \rangle = 0 \quad \text{para } \eta < 0. \quad (3.2.71)$$

Essas funções normalizadas satisfazem as relações

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle Jm | J\eta \rangle \langle J\eta | Jm' \rangle d\eta = \delta_{mm'} \quad \text{para } C_J^\delta \text{ e } E_J, \quad (3.2.72)$$

$$\int_0^{\infty} \langle Jm | J\eta \rangle \langle J\eta | Jm' \rangle d\eta = \delta_{mm'} \quad \text{para } D_J^\pm. \quad (3.2.73)$$

Para cada série a condição de completude é mantida

$$\int |J\eta\rangle \langle J\eta| d\eta = 1. \quad (3.2.74)$$

Elemento de Matriz na Base Contínua

O elemento de matriz de interesse é dado por

$$v_{\eta\eta'}^J(\theta) = \langle J\eta | e^{-i\theta J_3} | J\eta' \rangle, \quad (3.2.75)$$

que pode ser determinado substituindo a Eq.(3.2.65) na Eq.(3.2.75)

$$v_{\eta\eta'}^J(\theta) = \sum_m e^{-im\theta} \langle J\eta | Jm \rangle \langle Jm | J\eta' \rangle. \quad (3.2.76)$$

No caso D_J^+ , é relativamente simples efetuar o procedimento de soma. Usando as Eqs.(3.2.67) e (3.2.68), juntamente com as relações

$$\begin{aligned} W_{\lambda,\mu}(z) &= W_{\lambda,-\mu}(z), \\ W_{n+\mu+1/2,\mu}(z) &= (-1)^n n! z^{\mu+1/2} e^{-z/2} L_n^{2\mu}(z) \text{ para } (n \in \mathbf{N}_0), \end{aligned}$$

a Eq.(3.2.76) torna-se

$$v_{\eta\eta'}^J(\theta) = 4^{-J} (\eta\eta')^{-J-1/2} e^{-(\eta+\eta')\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! e^{-i(n-J)\theta}}{\Gamma(n-2J)} L_n^{-2J-1}(2\eta) L_n^{-2J-1}(2\eta'), \quad (3.2.77)$$

onde $L_\mu^\alpha(z)$ é o polinômio de Laguerre. Assim, usando a fórmula da soma (bem comportada)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! \zeta^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(z) L_n^\alpha(z') = \frac{(zz'\zeta)^{-\alpha/2}}{1-\zeta} e^{-\frac{\zeta(z+z')}{1-\zeta}} I_\alpha \left(\frac{2\sqrt{zz'\zeta}}{1-\zeta} \right), \quad (3.2.78)$$

válida no intervalo $|\zeta| < 1$, obtemos

$$v_{\eta\eta'}^J(\theta) = -i \csc \frac{\theta}{2} e^{i(\eta+\eta') \cot \frac{\theta}{2}} I_{-2J-1} \left(-2i \sqrt{\eta\eta'} \csc \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.2.79)$$

Em D_J^- , o elemento de matriz tem a mesma forma do elemento de matriz em D_J^+ . Em ambos os casos, temos

$$-2J - 1 \geq 2|m_0| - 1. \quad (3.2.80)$$

O procedimento para determinar os elementos de matriz nos casos C_J^σ e E_J é um pouco mais detalhado e, portanto, não será tratado. Vamos considerar as expressões para o cálculo dos elementos de matriz com algumas modificações em relação ao

resultado originalmente obtido por Lindblad e Nagel, ou seja

$$v_{\eta\eta'}(\theta) = \frac{1}{\pi} \left[\omega_{-2J-1}(\eta, \eta'; \frac{\theta}{2}) + (-1)^\sigma \omega_{-2J^*-1}^*(-\eta, -\eta'; \frac{\theta}{2}) \right], \quad (3.2.81)$$

onde definimos

$$\omega_\nu(\eta, \eta'; \varphi) = e^{-i\pi(\epsilon-\epsilon')\nu} \csc \varphi e^{i(\eta+\eta') \cot \varphi} K_\nu(2\sqrt{|\eta\eta'|}) e^{i\pi(\epsilon+\epsilon')/4} \csc \varphi, \quad (3.2.82)$$

onde $\sigma = 0$ para C_J^0 e E_J , e $K_\nu(z)$ é a função de Bessel ou função Macdonald.

Capítulo 4

Anti-de Sitter

O espaço Anti-de Sitter (AdS) é uma solução maximalmente simétrica das equações de Einstein com constante cosmológica negativa. Este, por sua vez, pertence a um conjunto de espaços homogêneos que se definem como superfícies quádricas no espaço vetorial plano. Entende-se por espaço homogêneo aquele onde, dado dois pontos quaisquer do mesmo, podemos conectá-los através de uma curva integral de algum campo vetorial de Killing. Uma vez que todas as formas quádricas podem ser diagonalizadas sobre o conjunto dos reais, apenas as quádricas diagonais são consideradas.

4.1 Métrica

O espaço AdS_{d+1} é definido pela superfície quádrica

$$X_A X^A \equiv X_0^2 + X_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^d X_i^2 = R^2, \quad (4.1.1)$$

imersa no espaço plano em $(d+2)$ -dimensões com métrica

$$ds^2 = dX_0^2 + dX_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^d dX_i^2, \quad (4.1.2)$$

onde R é a escala de comprimento AdS . Nessas coordenadas, todas as simetrias do espaço AdS são apenas rotações e boosts de X_A . Em particular, temos:

- $\frac{1}{2}d(d-1)$ rotações entre as coordenadas X_i , com $(1 \leq i \leq d)$;

- 1 rotação entre as duas direções tipo-tempo X_0 e X_{d+1} ;
- $2d$ boosts que misturam X_0 e X_{d+1} com X_i .

As transformações acima descritas, podem ser representadas por

$$L_B^A = X^A \frac{\partial}{\partial X^B} - X^B \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad (4.1.3)$$

onde L_B^A gera o grupo $SO(2, d)$, isto é, o grupo de isometrias do AdS_{d+1} , formado pelas transformações lineares de X_A que deixam a Eq.(4.1.1) invariante. É importante destacar que em d -dimensões, $SO(2, d)$ é o grupo conforme.

Ao analisar a rotação nas direções X_0 e X_{d+1} , notamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial X^A}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X^A} \\ &= \frac{\partial X^0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X^0} + \frac{\partial X^{d+1}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X^{d+1}} \\ &= L_{d+1}^0, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

logo, L_{d+1}^0 e L_{ij} são os geradores de translação no tempo e rotação espacial em AdS , respectivamente. Ambos os geradores formam o grupo de isometrias da esfera S^{d-1} , intitulado $SO(d)$.

O espaço AdS é sempre descrito em termos de um sistema de coordenadas conveniente. Neste sentido, as "coordenadas esféricas", (t, ρ, Ω_i) , são particularmente úteis para descrever este espaço.

Usando as equações

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{e} \quad \sec^2 \rho - \tan^2 \rho = 1, \quad (4.1.5)$$

obtemos o mapeamento entre as coordenadas esféricas e X_A

$$\begin{aligned} X_0 &= R \frac{\cos t}{\cos \rho}, \\ X_{d+1} &= R \frac{\sin t}{\cos \rho}, \\ X_i &= R \tan \rho \Omega_i. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Substituindo o mapeamento na Eq.(4.1.2), a métrica torna-se

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\rho}{R}\right)} \left(dt^2 - d\rho^2 - \sin^2\left(\frac{\rho}{R}\right) d\Omega_{d-1}^2 \right), \quad (4.1.7)$$

onde

$$\rho \in [0, \pi/2], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (4.1.8)$$

e a coordenada Ω cobre a esfera S^{d-1} .

A curvatura não nula do espaço AdS implica na existência de uma escala de comprimento natural e, portanto, a consistência desse espaço depende da escolha dessa escala. Após a especificação da mesma, as grandezas como energia e distância podem ser medidas. Deve-se notar que embora a coordenada ρ “cubra” um intervalo finito, a distância espacial a partir de qualquer $\rho < \pi/2$ na direção de $\pi/2$ diverge e, neste sentido, o espaço-tempo AdS_{d+1} não é compacto.

Em coordenadas esféricas o AdS pode ser pensado como a parte interior de um cilindro com topologia $\mathbf{S}^d \otimes \mathbf{R}$. Nessas coordenadas, é evidente que o espaço é invariante por translações no tempo e rotações espaciais; simetria de rotação $SO(d)$.

O espaço AdS_{d+1} é maximalmente simétrico, portanto, possui o mesmo número de simetrias do espaço-tempo plano em $(d + 1)$ -dimensões que, por sua vez, é o número máximo de simetrias de um espaço-tempo, ou seja

$$\frac{1}{2}(d + 1)(d + 2). \quad (4.1.9)$$

Neste caso, temos $(d + 1)$ traslações, d boosts e $d(d - 1)/2$ rotações.

Em três dimensões, a superfície quádrlica que define o espaço AdS é escrita na forma

$$x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = -l^2, \quad (4.1.10)$$

onde l é o raio AdS e

$$X_A = (X_0, X_1, X_2, X_3) = (x, u, v, y). \quad (4.1.11)$$

O métrica do espaço de imersão é dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= dX_0^2 + dX_3^2 - dX_1^2 - dX_2^2 \\ &= dx^2 + dy^2 - du^2 - dv^2. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Substituindo o mapeamento dado pela Eq.(4.1.6), em três dimensões

$$\begin{aligned} x &= R \frac{\cos t}{\cos \rho}, \\ y &= R \frac{\sin t}{\cos \rho}, \\ u &= R \tan \rho \Omega_i, \\ v &= R \tan \rho \Omega_i, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

na Eq.(4.1.12), obtemos

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\rho}{R}\right)} \left(dt^2 - d\rho^2 - \sin^2\left(\frac{\rho}{R}\right) d\theta^2 \right), \quad (4.1.14)$$

com ρ e t definidos na Eq.(4.1.8).

A fim de obter uma análise completa a cerca das propriedade globais do espaço AdS_3 , devemos introduzir o sistema de coordenada global que “cobre” toda a variedade. Neste caso, por definição temos

$$u = l \cosh \mu \sin \lambda, \quad v = l \cosh \mu \cos \lambda, \quad (4.1.15)$$

onde

$$l \sinh \mu = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (0 \leq \mu < \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq \lambda < 2\pi). \quad (4.1.16)$$

Substituindo a Eq.(4.1.15) na Eq.(4.1.12), obtemos

$$ds^2 = l^2 \left(-\cosh^2 \mu d\lambda^2 + \frac{dx^2 + dy^2}{l^2 + x^2 + y^2} \right). \quad (4.1.17)$$

Por conveniência, a Eq.(4.1.17) pode ser escrita em coordenadas polares

$$ds^2 = l^2 (-\cosh^2 \mu d\lambda^2 + d\mu^2 + \sinh^2 \mu d\theta^2), \quad (4.1.18)$$

onde as coordenadas

$$x = l \sinh \mu \cos \theta, \quad y = l \sinh \mu \sin \theta, \quad (4.1.19)$$

foram substituídas na Eq.(4.1.17).

Devido ao caráter angular da variável λ , temos a presença de curvas tipo-tempo fechada no espaço AdS . Podemos representar λ no espaço de cobertura, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fazendo $\lambda = t$ e $R = l \sinh \mu$, obtemos

$$ds^2 = - (R^2 + l^2) dt^2 + \left(\frac{R^2}{l^2} + 1 \right)^{-1} dR^2 + R^2 d\theta^2, \quad (4.1.20)$$

com

$$R \geq 0, \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (4.1.21)$$

4.2 Isometrias

O espaço AdS é invariante pela ação do grupo $SO(2, 2)$. Os geradores desse espaço são expressos na forma

$$J_{ab} = x_b \frac{\partial}{\partial x^a} - x_a \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad (4.2.1)$$

ou, explicitamente, na forma

$$J_{01} = v \partial_u - u \partial_v,$$

$$J_{02} = x \partial_v + v \partial_x,$$

$$J_{03} = y \partial_v + v \partial_y,$$

$$J_{12} = x \partial_u + u \partial_x,$$

$$J_{13} = y \partial_u + u \partial_y,$$

$$J_{23} = x \partial_y - y \partial_x.$$

onde $x^a = (v, u, x, y)$.

O vetor J_{01} é o gerador de translação temporal enquanto que o vetor J_{23} gera rotações no plano $x - y$. A forma geral do vetor de Killing ξ é dada em termos de um tensor antissimétrico ω^{ab} em \mathbf{R}^4 na forma

$$\xi = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}, \quad \omega^{ab} = -\omega^{ba}. \quad (4.2.2)$$

4.3 Geodésica

As equações geodésicas neste espaço-tempo tem a forma

$$\ddot{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta} \coth \rho = 0, \quad (4.3.1)$$

$$\ddot{\rho} + \sinh \rho \cosh \rho (\dot{t}\dot{t} - \dot{\theta}\dot{\theta}) = 0, \quad (4.3.2)$$

$$\ddot{t} + \dot{\rho}\dot{t} \tanh \rho = 0. \quad (4.3.3)$$

Essas equações diferenciais acopladas de segunda ordem são de difícil resolução. Vamos encontrar algumas geodésicas em $SL(2, \mathbb{R})$ que agem sobre essas equações com as isometrias dadas pelo grupo de multiplicação à direita (ou à esquerda) e que elevam essas geodésicas ao “universal cover” (espaço de cobertura) [43].

A métrica é bi-invariante e as geodésicas através da origem são precisamente os subgrupos a 1-parâmetro. Talvez o subgrupo mais simples seja

$$g = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix}, \quad (4.3.4)$$

ou, no hiperboloide (AdS_3)

$$t = s, \quad \rho = 0. \quad (4.3.5)$$

A Eq.(4.3.5) descreve uma partícula em repouso na origem e se “deslocando” no tempo. Uma geodésica tipo-tempo geral é dada pela Eq.(4.3.4) multiplicada à direita (ou à esquerda) por matrizes arbitrárias e constantes do grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Para elevar essas geodésicas até o AdS_3 , devemos expressá-las em termos das coordenadas (t, θ, ρ) de modo que t cubra todos os reais [43].

Uma geodésica tipo-tempo não trivial, por exemplo, pode ser obtida pela multiplicação (à esquerda) de um elemento do grupo de isometria

$$g = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \alpha \cos s - \sinh \alpha \sin s & \cosh \alpha \sin s + \sinh \alpha \cos s \\ \sinh \alpha \cos s - \cosh \alpha \sin s & \sinh \alpha \sin s + \cosh \alpha \cos s \end{pmatrix}, \quad (4.3.7)$$

ou, no hiperboloide (AdS_3)

$$\rho = \alpha, \quad t = s \quad \text{e} \quad \theta = -s - \frac{\pi}{2}. \quad (4.3.8)$$

Note que estas equações são soluções das Eqs.(4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3).

Similarmente, a geodésica tipo-espaço mais simples é dada por

$$g = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix}, \quad (4.3.9)$$

ou

$$t = 0, \quad \rho = s \quad \text{e} \quad \theta = 0. \quad (4.3.10)$$

Todas as geodésica tipo-espaço podem ser obtidas pela multiplicação à esquerda (ou à direita) da Eq.(4.3.9) por elementos (constantes) do grupo $SL(2, \mathbb{R})$ [43]

$$g = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix} \quad (4.3.11)$$

$$= \begin{pmatrix} e^s \cos \alpha & e^s \sin \alpha \\ -e^s \sin \alpha & e^s \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.3.12)$$

ou

$$\rho = s, \quad t = \theta = \alpha. \quad (4.3.13)$$

Essas geodésicas são curvas de t constante com ângulo que se estende ao horizonte.

Para geodésicas tipo-luz vamos considerar $\theta = 0$ de modo que

$$ds^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 = 0, \quad (4.3.14)$$

e, portanto

$$dt^2 = \frac{1}{\cosh^2 \rho} d\rho^2. \quad (4.3.15)$$

Usando condições de contorno específicas, temos

$$s = \tan \frac{t}{2} = \tanh \frac{\rho}{2}, \quad (4.3.16)$$

onde s é a variável que será usada para parametrizar a geodésica tipo-luz. Após o uso de algumas identidades trigonométricas, a inclusão da folha-mundo é vista como

$$g = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1+2s-s^2 & 2s \\ -2s & 1-2s-s^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.17)$$

ou alternativamente

$$t = \sin \left(\frac{2s}{1+s^2} \right), \quad \rho = \sinh \left(\frac{2s}{1-s^2} \right), \quad \text{e} \quad \theta = 0. \quad (4.3.18)$$

Note que em $s = 0$ a geodésica está na origem enquanto que em $s = 1$ a mesma alcança o horizonte. Isso corresponde a $t = 0$ e $t = \pi/2$, respectivamente; a luz pode alcançar o horizonte no tempo finito.

Outro exemplo de geodésica tipo-luz é dado por

$$g = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.19)$$

ou equivalentemente

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \sinh \rho = \frac{s}{2}, \quad \text{e} \quad \sin t = \frac{s}{2\sqrt{1+\frac{s^2}{4}}}. \quad (4.3.20)$$

Em $s = 0$ a luz parte da origem e em $s = \infty$ alcança o horizonte. Isso corresponde a $t = 0$ e $t = \pi/2$, respectivamente. Na verdade, por homogeneidade, todos os observadores acreditam que a luz emitida por eles alcança o horizonte em $t = \pi/2$, embora que os mesmos não vão concordar com a direção do eixo do tempo.

Isso pode parecer um problema devido ao sistema de coordenadas adotado, mas na verdade isto tem consequência que são aparentemente estranhas para qualquer

residente de um espaço AdS_3 . A luz emitida por um observador alcança o horizonte em todas as direções e reflete quando $t = \pi$. Isso significa que se o universo é relativamente vazio, independente da forma como o observador ver, ele vai se ver como se estivesse a π momentos antes.

4.4 Parametrização AdS_3

O espaço AdS_3 , dado pela superfície quádrlica

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 = -l^2, \quad (4.4.1)$$

define o espaço das matrizes do grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Assim, qualquer $g \in SL(2, \mathbb{R})$ pode ser escrito na forma

$$g = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} X_0^2 + X_1^2 & X_3^2 - X_2^2 \\ X_2^2 + X_3^2 & X_1^2 - X_0^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} X_+ & U \\ V & X_- \end{pmatrix}. \quad (4.4.2)$$

Os geradores da álgebra $su(2, \mathbb{R})$ satisfazem as relações

$$[T_a, T_b] = \epsilon_{ab}{}^c T_c, \quad \text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \eta_{ab}, \quad (4.4.3)$$

com $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1)$ e $\epsilon^{012} = 1$. Os geradores podem ser representados por

$$T_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.4)$$

O elemento do grupo g e seu inverso são escritos em termos desses geradores

$$g = \frac{1}{l} (X_0 \mathbf{1} + 2X_3 T_0 + 2X_2 T_1 + 2X_1 T_2), \quad (4.4.5)$$

$$g^{-1} = \frac{1}{l} (X_0 \mathbf{1} - 2X_3 T_0 - 2X_2 T_1 - 2X_1 T_2). \quad (4.4.6)$$

O horizonte de eventos é localizado pela coordenada $r = 0$. Vamos alterar esta coordenada para $X_+ = 0$ que, por sua vez, está relacionado com as coordenadas

$$U = \frac{ur}{l}, \quad V = \frac{vr}{l}, \quad \text{e} \quad X_+ = r. \quad (4.4.7)$$

Nessas coordenadas a métrica toma a forma

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 \quad (4.4.8)$$

$$= -dX_+dX_- + dUdV. \quad (4.4.9)$$

Usando a Eq.(4.4.1) obtemos a expressão para X_- . Substituindo esta expressão na Eq.(4.4.9), obtemos uma métrica em três dimensões

$$ds^2 = \left(\frac{r}{l}\right)^2 dudv + \left(\frac{l}{r}\right)^2 dr^2. \quad (4.4.10)$$

O buraco negro BTZ é assintoticamente AdS_3 com métrica idêntica à Eq.(4.4.10). Em geral, podemos substituir

$$u \rightarrow \theta_L l, \quad v \rightarrow \theta_R l, \quad e \quad r \rightarrow e^\lambda l \quad (4.4.11)$$

na Eq.(4.4.7) de modo que $g \in SL(2, \mathbb{R})$ torna-se

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta_L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \theta_R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & \theta_R e^\lambda \\ \theta_L e^\lambda & e^{-\lambda} + \theta_L \theta_R e^\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

Outra parametrização importante consiste em escrever (X_0, X_1, X_2, X_3) em termos das coordenadas polares

$$\begin{aligned} X_0 &= R \cosh \theta_1, \\ X_1 &= \sqrt{R^2 - l^2} \cosh \theta_2, \\ X_2 &= R \sinh \theta_1, \\ X_3 &= \sqrt{R^2 - l^2} \sinh \theta_2. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Para ser mais preciso, esta parametrização é válida apenas na região

$$-X_0^2 + X_2^2 < 0. \quad (4.4.14)$$

A superfície

$$-X_0^2 + X_2^2 = 0, \quad (4.4.15)$$

é uma superfície tipo-luz que separa o espaço em duas regiões. No caso, onde

$$-X_0^2 + X_2^2 = -R^2 > 0, \quad (4.4.16)$$

é necessário substituir R por $\sqrt{-R^2}$ na parametrização. De maneira similar, da Eq.(4.4.13), temos

$$X_1^2 - X_3^2 = R^2 - l^2. \quad (4.4.17)$$

Para a região onde $R^2 - l^2 < 0$, devemos substituir $\sqrt{R^2 - l^2}$ por $\sqrt{l^2 - R^2}$. Outra maneira seria escrever os dois planos (X_0, X_3) e (X_1, X_2) em coordenadas polares.

$$X_0 = l \cosh \lambda \sin \theta_1, \quad (4.4.18)$$

$$X_1 = l \sinh \lambda \sin \theta_2, \quad (4.4.19)$$

$$X_2 = l \sinh \lambda \cos \theta_2, \quad (4.4.20)$$

$$X_3 = l \cosh \lambda \cos \theta_1. \quad (4.4.21)$$

Neste sentido, o espaço AdS_3 passa a ser totalmente coberto. Nesta parametrização as curvas tipo-tempo são visíveis. Para evitá-las, consideramos o espaço de cobertura do AdS_3 . A métrica agora torna-se

$$\begin{aligned} ds^2 &= l^2(d\lambda^2 + \sinh^2 \lambda d\theta_2^2 - \cosh^2 \lambda d\theta_1^2) \\ &= -\left(\frac{R^2}{l^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{R^2}{l^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + \frac{R^2}{l^2} dy^2, \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

onde identificamos

$$R = l \sinh \lambda, \quad l\theta_2 = y, \quad e \quad l\theta_1 = t. \quad (4.4.23)$$

A métrica coincide com a Eq.(4.4.10) no limite $R \rightarrow \infty$.

Tomando a Eq.(4.4.13), o elemento do grupo dado pela Eq.(4.4.2) torna-se

$$\begin{aligned} g &= e^{\theta_L T_1} e^{\lambda T_2} e^{\theta_R T_1} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta_L}{2} & \sinh \frac{\theta_L}{2} \\ \sinh \frac{\theta_L}{2} & \cosh \frac{\theta_L}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda/2} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta_R}{2} & \sinh \frac{\theta_R}{2} \\ \sinh \frac{\theta_R}{2} & \cosh \frac{\theta_R}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

onde

$$\theta_{R/L} = \theta_1 \pm \theta_2. \quad (4.4.25)$$

Das Eqs.(4.4.5) e (4.4.6), temos a corrente na forma

$$\begin{aligned} g^{-1}dg &= \frac{2}{l^2}(X_0dX_3 - X_3dX_0 + X_1dX_2 - X_2dX_1)T_0 \\ &+ \frac{2}{l^2}(X_0dX_2 - X_2dX_0 + X_1dX_3 - X_3dX_1)T_1 \\ &+ \frac{2}{l^2}(X_0dX_1 - X_1dX_0 + X_3dX_2 - X_2dX_3)T_2. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Em termos das coordenadas cone-de-luz

$$T_{\pm} = T_1 \pm T_2, \quad (4.4.27)$$

a corrente é expressa por

$$\begin{aligned} g^{-1}dg &= \frac{1}{l^2}(X_+dV - VdX_+)T_+ + \frac{1}{l^2}(X_-dU - UdX_-)T_- \\ &+ \frac{1}{l^2}(X_-dX_+ - X_+dX_- + VdU - UdV)T_2, \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

e em termos das coordenadas Eq.(4.4.13), a mesma torna-se

$$\begin{aligned} g^{-1}dg &= (-\sinh \theta_L d\lambda + \sinh \lambda \cosh \theta_L d\theta_R)T_0 \\ &+ (\cosh \lambda d\theta_R + d\theta_L)T_1 \\ &+ (\cosh \theta_L d\rho - \sinh \lambda \sinh \theta_L d\theta_R)T_2. \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

Capítulo 5

Buraco Negro de BTZ

Buraco negro BTZ é obtido fazendo identificações periódicas no espaço AdS . Esse objeto termodinâmico é visto como um exemplo simples de uma classe mais geral de orbifolds Lorentzianas construídos a partir do espaço AdS [44]. Strominger mostrou como a entropia de Bekenstein do buraco negro BTZ pode ser obtida e, juntamente com Maldacena [45], analisou outros aspectos importantes. Em particular, segundo Strominger e Maldacena, a teoria de campo conforme na fronteira tem um estado de vácuo natural análogo ao vácuo de Minkowski no espaço de Rindler; nas coordenadas BTZ isso surge como um estado termal de muitas partículas. Esses resultados são importantes para o compreensão do processo de evaporação do buraco negro.

5.1 Métrica

A região externa ao buraco negro é descrita pelas coordenadas

$$\begin{aligned}
 x &= \tilde{r} \sinh \tilde{\phi}, \\
 y &= \sqrt{\tilde{r}^2 - l^2} \cosh \tilde{t}, \\
 u &= \tilde{r} \cosh \tilde{\phi}, \\
 v &= \sqrt{\tilde{r}^2 - l^2} \sinh \tilde{t}.
 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Nessas coordenadas a Eq.(4.1.20) torna-se

$$ds^2 = -(\tilde{r}^2 - l^2) d\tilde{t}^2 + \left(\frac{\tilde{r}^2}{l^2} - 1\right)^{-1} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2. \quad (5.1.2)$$

A Eq.(5.1.2) para um buraco negro não-extremal é obtida fazendo a transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= l \left(\frac{r^2 - r_-^2}{r_+^2 - r_-^2} \right)^{1/2}, & (r^2 \geq r_+^2) \\ \tilde{t} &= \frac{1}{l} \left(\frac{r_+ t}{l} - r_- \phi \right), & (\phi \in \mathbb{R}) \\ \tilde{\phi} &= \frac{1}{l} \left(-\frac{r_- t}{l} + r_+ \phi \right). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Nessas coordenadas a métrica toma a forma

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{r^2 l^2} dt^2 + \frac{r^2 l^2}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_+ r_-}{l r^2} dt \right)^2, \quad (5.1.4)$$

onde os parâmetros que correspondem aos horizontes de eventos são escritos em termos da massa e do momento angular do buraco negro

$$r_{\pm} = lM^{1/2} \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2}}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.1.5)$$

Da Eq.(5.1.5), a relação entre os parâmetros r_{\pm} e (M, J) pode ser explicitamente escrita como

$$J = \frac{2r_+ r_-}{l^2} \quad \text{e} \quad M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2}. \quad (5.1.6)$$

Para obter um buraco negro *BTZ* fazemos a identificação $\phi \sim \phi + 2\pi$, que nas coordenadas dadas na Eq.(5.1.1), equivale a um boost de Lorentz nos planos $x - v$ e $u - y$, isto é

$$(\tilde{t}, \tilde{\phi}) \sim \left(\tilde{t} - \frac{2\pi r_-}{l}, \tilde{\phi} - \frac{2\pi r_+}{l} \right). \quad (5.1.7)$$

Se $J = 0$ ($r_- = 0$), apenas a coordenada $\tilde{\phi}$ é periódica. Para $J \neq 0$, a identificação atua em ambas as coordenadas \tilde{t} e $\tilde{\phi}$.

5.2 Identificações

Vamos estudar a construção de soluções de buraco negro como quocientes do AdS_3 . É importante destacar que AdS_3 pode ser visto como uma variedade de grupo $SL(2, \mathbb{R})$ enquanto que o grupo de identificações pode ser pensado como um grupo discreto de $SL(2, \mathbb{R})_L \otimes SL(2, \mathbb{R})_R$ (o grupo de isometria do $SL(2, \mathbb{R})$). Localmente, todas as soluções das equações de Einstein em (2+1)-dimensões com constante cosmológica negativa

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (5.2.1)$$

correspondem a AdS_3 . No entanto, uma vez que podemos fazer identificações discretas, a solução pode diferir globalmente. Como sabemos, o AdS_3 é descrito em termos de uma hipersuperfície em três dimensões

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 = -l^2, \quad (5.2.2)$$

imersa no espaço plano em quatro dimensões com métrica

$$ds^2 = dX_0^2 - dX_1^2 - dX_2^2 + dX_3^2. \quad (5.2.3)$$

Na Eq.(5.2.2) a topologia é dada por $\mathbb{R}^2 \times S^1$ com S^1 correspondendo a círculos tipo-tempo $X_1^2 + X_2^2 = \text{constante}$. O espaço AdS é o espaço de cobertura obtido ao desenrolar o círculo.

O grupo de isometria do AdS_3 é o subgrupo do grupo de isometria do espaço plano dado pela Eq.(??) que deixa a Eq.(5.2.2) invariante. Este é o grupo $SO(2, 2)$ com rotações no plano $X_1 - X_2$ que diferem por $2\pi n$ não identificados. A hipersuperfície na Eq.(5.2.2), que descreve o AdS_3 , é a variedade de grupo $SL(2, \mathbb{R})$ como visto na imersão

$$g = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} X_1 + X_0 & X_3 - X_2 \\ X_3 + X_2 & X_1 - X_0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.4)$$

onde

$$\det g = \frac{X_1^2 - X_0^2 + X_2^2 - X_3^2}{l^2} = 1. \quad (5.2.5)$$

A Eq.(??) é a métrica bi-invariante

$$ds^2 = \frac{l^2}{2} \text{Tr}(g^{-1} dg)^2. \quad (5.2.6)$$

Nessa representação, as isometrias $SO(2, 2)$ são induzidas pelo grupo de cobertura $SL(2, \mathbb{R})_L \otimes SL(2, \mathbb{R})_R$

$$g \rightarrow AgB, \quad A, B \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (5.2.7)$$

Vamos considerar os seguintes geradores de $SL(2, \mathbb{R})$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.8)$$

Os buracos negros são obtidos identificando pontos no espaço AdS sobre a ação de um subgrupo discreto de $SL(2, \mathbb{R})_L \otimes SL(2, \mathbb{R})_R$.

- **M > 0**

Neste caso as soluções de buraco negro são obtidas fazendo a identificação

$$g \sim A^n g B^n, \quad \text{com } n \text{ inteiro} \quad (5.2.9)$$

onde

$$A = e^{\pi(r_+ + r_-)L_3/l} = \begin{pmatrix} e^{\pi(r_+ + r_-)/l} & 0 \\ 0 & e^{-\pi(r_+ + r_-)/l} \end{pmatrix}, \quad (5.2.10)$$

$$B = e^{\pi(r_+ - r_-)L_3/l} = \begin{pmatrix} e^{\pi(r_+ - r_-)/l} & 0 \\ 0 & e^{-\pi(r_+ - r_-)/l} \end{pmatrix}. \quad (5.2.11)$$

A identificação é gerada por [3]

$$L_1 = \frac{(r_+ + r_-)L_3^L}{l} + \frac{(r_+ - r_-)L_3^R}{l}, \quad (5.2.12)$$

com $L_1 \in sl(2, \mathbb{R})_L \otimes sl(2, \mathbb{R})_R$ e $M > |J|/l$.

Para $J \neq 0$, g não tem pontos fixos sob a ação dada pelas Eqs.(5.2.10) e (5.2.11) consistentes com o fato de que buraco negro com rotação não é singular. Contudo, para buraco negro sem rotação ($J = 0$) existem pontos fixos na identificação, Eq.(5.2.9), que correspondem a singularidade $r = 0$.

- **M = J = 0**

Nesse caso a métrica é dada por

$$ds^2 = -\frac{r^2}{l^2}dt^2 + \frac{l^2}{r^2}dr^2 + r^2d\phi^2, \quad (5.2.13)$$

com $0 < \phi < 2\pi$. Por conveniência, definimos a coordenada

$$v = 2t + \frac{2l^2}{r}, \quad (5.2.14)$$

e substituímos na Eq.(5.2.13) obtendo

$$ds^2 = -\frac{r^2}{4l^2}dv^2 - dvdr + r^2d\phi^2. \quad (5.2.15)$$

Tomando o limite $l \rightarrow \infty$, a Eq.(5.2.15) toma a forma

$$ds^2 = -dvdr + r^2d\phi^2. \quad (5.2.16)$$

O espaço descrito pela Eq.(5.2.16) possui curvatura nula e pode ser obtido via identificação do espaço de Minkowski em três dimensões sob a ação de um boost tipo-luz. Essa métrica também tem sido estudada no contexto de teoria de cordas tendo em vista que a mesma descreve um orbifold tipo-luz. Assim como acontece para o orbifold tipo-luz, a métrica de vácuo do buraco negro também pode ser obtida via identificações de pontos sob a ação de um boost tipo-luz, a diferença é que temos o espaço AdS_3 ao invés do espaço plano.

Considere as seguintes coordenadas em AdS_3

$$\begin{aligned}
 U &\equiv X_1 - X_0 = r, \\
 V &\equiv X_1 + X_0 = v - \frac{rv^2}{4l^2} + r\phi^2, \\
 X_2 &\equiv \frac{vr}{2l} - l, \\
 X_3 &\equiv r\phi.
 \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Nas coordenadas (U, V, X_3) , as translações $\phi \rightarrow \phi + E$ correspondem a boosts tipo-luz

$$\begin{aligned}
 U \rightarrow U' &= U, \\
 V \rightarrow V' &= V + 2EX_3 + E^2U, \\
 X_3 \rightarrow X'_3 &= X_3 + EU, \\
 X_2 \rightarrow X'_2 &= X_2.
 \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Identificar pontos sobre a ação de $I = \{N_{2\pi n}, n \text{ inteiro}\}$, corresponde a fazer ϕ periódico com período 2π . Substituindo as Eqs.(5.2.17) em (5.2.3), obtemos a métrica de buraco negro no vácuo dada pela Eq.(5.2.15). É evidente, a partir da Eq.(5.2.18), que $\mathcal{L} = \{U = X_3 = 0, X_2 = -l\}$ é o conjunto dos pontos que se mantém invariante sob a transformação. É evidente também que isso corresponde a singularidade $r = 0$.

Das Eqs.(5.2.18), (5.2.4) e (5.2.5) vemos que soluções de buraco negro no vácuo são obtidas fazendo a identificação

$$g \sim A^n g B^n, \quad \text{com } n \text{ inteiro} \tag{5.2.19}$$

onde

$$A = e^{2\pi L_+} = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.2.20}$$

$$B = e^{2\pi L_-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2.21}$$

As identificações são gerada por

$$L_2 = L_+^L + L_-^R, \quad (5.2.22)$$

com $L_2 \in sl(2, \mathbb{R})_L \otimes sl(2, \mathbb{R})_R$.

- $M = |\mathbf{J}|/l$

Agora vamos obter a solução de buraco negro extremal como um quociente via a ação de um subgrupo discreto $SL(2, \mathbb{R})_L \otimes SL(2, \mathbb{R})_R$. Inicialmente, devemos entender o processo de construção de soluções de buraco negro via identificação de pontos no espaço *AdS* [3].

Fazendo $M = J/l$ na solução de buraco negro com $\Lambda < 0$

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - M \right) dt^2 - J dt d\phi + \left(\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (5.2.23)$$

obtemos a solução extremal

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} - M \right) dt^2 - M l dt d\phi + \left(\frac{r}{l} - \frac{Ml}{2r} \right)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (5.2.24)$$

com $0 < \phi < 2\pi$. Fazendo o mesmo procedimento com $t \rightarrow -t$ obtemos a solução extremal para o caso $M = -J/l$.

Por conveniência, vamos considerar as coordenadas de Poincaré

$$\begin{aligned} X_1 + X_0 &= \frac{l}{z}, \\ X_1 - X_0 &= l \left(z + \frac{\lambda_+ \lambda_-}{z} \right), \\ X_2 &= -\frac{l(\lambda_+ - \lambda_-)}{2z}, \\ X_3 &= \frac{l(\lambda_+ + \lambda_-)}{2z}. \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Da Eq.(??), a métrica do espaço *AdS* nas coordenadas de Poincaré torna-se

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (d\lambda_+ d\lambda_- + dz^2). \quad (5.2.26)$$

Vamos considerar o subgrupo a 1-parâmetro do grupo $SO(2,2)$ que deixa a métrica do espaço AdS invariante, isto é

$$\begin{aligned}\lambda_+ &\rightarrow \lambda_+ + \chi, \\ \lambda_- &\rightarrow e^{\sqrt{2M}\chi}\lambda_- + \frac{1}{\sqrt{2M}}(e^{\sqrt{2M}\chi} - 1), \\ z &\rightarrow e^{\sqrt{\frac{M}{2}}\chi}z,\end{aligned}\tag{5.2.27}$$

onde χ é o parâmetro. A solução de buraco negro extremal dada na Eq.(5.2.24) é obtida realizando identificações na Eq.(5.2.27) com $\chi = 2\pi$.

A partir da Eqs.(5.2.25), (5.2.4) e (5.2.5), o buraco negro extremal é obtido fazendo a identificação

$$g \sim A^n g B^n, \quad \text{com } n \text{ inteiro}\tag{5.2.28}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2M}\pi} & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{M}} \sinh \sqrt{2M}\pi & e^{\sqrt{2M}\pi} \end{pmatrix},\tag{5.2.29}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{5.2.30}$$

Essas identificações são geradas por

$$L_3 = L_-^L - \sqrt{\frac{M}{2}}L_3^L + L_+^R,\tag{5.2.31}$$

onde $L_3 \in sl(2, \mathbb{R})_L \otimes sl(2, \mathbb{R})_R$.

- **M < J, J = 0**

Neste caso, vamos usar coordenadas estáticas

$$\begin{aligned}X_0 &= \tilde{r} \cos \tilde{\phi}, \\ X_1 &= \sqrt{\tilde{r}^2 + l^2} \cos \left(\frac{\tilde{t}}{l} \right), \\ X_2 &= \sqrt{\tilde{r}^2 + l^2} \sin \left(\frac{\tilde{t}}{l} \right), \\ X_3 &= \tilde{r} \sin \tilde{\phi}.\end{aligned}\tag{5.2.32}$$

Nessas coordenadas, a métrica do espaço AdS torna-se

$$ds^2 = - \left(\frac{\tilde{r}^2}{l^2} + 1 \right) d\tilde{t}^2 + \left(\frac{\tilde{r}^2}{l^2} + 1 \right)^{-1} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2, \quad (5.2.33)$$

com \tilde{t} e $\tilde{\phi}$ parametrizando as rotações nos planos $X_1 - X_2$ e $X_0 - X_3$.

A solução de buraco negro é obtida por meio da identificação de $\tilde{\phi}$; que passa a ter período igual a $2\pi\sqrt{|M|}$. Vamos tomar a seguinte transformação de escala das coordenadas

$$\tilde{r} = \frac{r}{\sqrt{|M|}}, \quad \tilde{t} = \sqrt{|M|}t, \quad \tilde{\phi} = \sqrt{|M|}\phi. \quad (5.2.34)$$

A Eq.(5.2.23), com ϕ periódico (período igual a 2π), é recuperada após a implementação dessa transformação de escala. Das Eqs.(5.2.4) e (5.2.5), a rotação no plano $X - Y$ de um ângulo θ toma a forma da Eq.(5.2.7)

$$g \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}, \quad (5.2.35)$$

e, portanto, a solução quando $J = 0$ e $M < 0$ é obtida fazendo a identificação

$$g \sim A^{-n} g A^n, \quad (5.2.36)$$

onde

$$A = e^{\pi\sqrt{|M|(L_+ - L_-)} = \begin{pmatrix} \cos \pi\sqrt{|M|} & \sin \pi\sqrt{|M|} \\ -\sin \pi\sqrt{|M|} & \cos \pi\sqrt{|M|} \end{pmatrix}. \quad (5.2.37)$$

A identificação é gerada por

$$L_4 = L_+^L - L_-^L - L_+^R + L_-^R, \quad (5.2.38)$$

com $L_4 \in sl(2, \mathbb{R})_L \otimes sl(2, \mathbb{R})_R$. Os pontos $\{X_0 = X_3 = 0\}$ são invariantes pela ação do grupo. Da Eq.(5.2.32), nota-se que estes pontos correspondem a singularidade $r = 0$.

5.3 Extremal

No caso extremal, onde $r_+ = r_-$, a coordenada \tilde{r} na Eq.(5.1.3) diverge. Por outro lado, a Eq.(5.1.4) continua regular e torna-se

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_+^2)^2}{r^2 l^2} dt^2 + \frac{r^2 l^2}{(r^2 - r_+^2)^2} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_+^2}{lr^2} dt \right)^2. \quad (5.3.1)$$

A massa e o momento angular do buraco negro neste limite são dadas por

$$J = \frac{2r_{\pm}^2}{l^2} \quad \text{e} \quad M = \frac{2r_{\pm}^2}{l^2}. \quad (5.3.2)$$

5.4 Geodésica

A ação considerada em [42] é dada por

$$I = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} \left(R + \frac{2}{l^2} \right) d^2x dt + B, \quad (5.4.1)$$

onde B é um termo de superfície o raio da curvatura

$$l^2 = -\frac{1}{\Lambda} \quad (5.4.2)$$

fornece a escala de comprimento necessária para termos um horizonte. Das equações de Einstein obtemos

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (5.4.3)$$

onde

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \quad \text{e} \quad N^\phi = -\frac{J}{2r^2}, \quad (5.4.4)$$

com

$$-\infty < t < \infty \quad \text{e} \quad 0 < \phi < 2\pi. \quad (5.4.5)$$

A constante de integração M é a carga conservada associada a invariância por translação no tempo e J está associada com a invariância por rotação. A função lapse é nula nos pontos

$$r_{\pm} = lM^{1/2} \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2}}{2} \right)^{1/2}, \quad (5.4.6)$$

onde r_+ é o horizonte do buraco negro ($M > 0$ e $|J| \leqslant Ml$).

Os vetores de Killing associados com a métrica BTZ são $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial\phi$. Assim as constantes de movimento ao longo da geodésica são

$$E = -g_{ab}\xi^a u^b = \left(-M + \frac{r^2}{l^2}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right) + \left(\frac{J}{2}\right) \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) \quad (5.4.7)$$

onde $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ denota o vetor de Killing estático e,

$$L = g_{ab}\Phi^a u^b = r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) - \left(\frac{J}{2}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right), \quad (5.4.8)$$

onde $\Phi^a = (\partial/\partial\phi)^a$ denota o vetor de Killing rotacional e $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ é tangente a curva parametrizada por λ que é normalizado pela condição

$$u^a u_a = -m^2, \quad (5.4.9)$$

onde $m = 1$ para geodésicas tipo-tempo e $m = 0$ para geodésicas tipo-luz. A constante E não pode ser interpretada como a energia da partícula no infinito uma vez que o campo do buraco negro não é assintoticamente plano.

Fazendo as transformações de escala

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{r}{l\sqrt{M}}, & \hat{\phi} &= \phi\sqrt{M}, & \hat{t} &= \frac{\sqrt{M}}{l}t, & \hat{\lambda} &= \frac{\lambda}{l}, \\ \hat{E} &= \frac{E}{\sqrt{M}}, & \hat{L} &= \frac{L}{l\sqrt{M}}, & \hat{J} &= \frac{J}{lM}, \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

e usando as Eqs.(5.4.7), (5.4.8) e (5.4.9), obtemos as equações geodésicas

$$r^2 \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = -m^2 \left(r^4 - r^2 + \frac{J^2}{4}\right) + (E^2 - L^2)r^2 + L^2 - JEL, \quad (5.4.11)$$

$$\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) = \frac{(r^2 - 1)L + \frac{1}{2}JE}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}, \quad (5.4.12)$$

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right) = \frac{Er^2 - \frac{1}{2}JL}{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}, \quad (5.4.13)$$

As Eqs.(5.4.11), (5.4.12) e (5.4.13) descrevem o movimento de partículas no espaço-tempo de um buraco negro em $(2 + 1)$ -dimensões e fornecem as órbitas das partículas massivas (e sem massa) e o potencial radial efetivo.

5.5 Termodinâmica

Em termos do horizonte externo r_+ , a massa e o momento angular do buraco negro são dados por

$$M = \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r_+^2}, \quad (5.5.1)$$

$$J = 2r_+ \sqrt{M - \frac{r_+^2}{l^2}}. \quad (5.5.2)$$

A velocidade angular do horizonte tem a forma

$$\begin{aligned} \Omega &= 2r_+^2 \frac{\partial M}{\partial J} \Big|_{r=r_+} \\ &= \frac{J}{2r_+^2} \\ &= \frac{1}{r_+} \sqrt{M - \frac{r_+^2}{l^2}}. \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

A temperatura de Hawking no horizonte de eventos é

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4\pi} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_+}, \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2r_+}{l^2} - \frac{J^2}{2r_+^3} \right), \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

com

$$f(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}. \quad (5.5.5)$$

e o potencial elétrico é dado por

$$\phi = \frac{\partial M}{\partial Q} \Big|_{r=r_+} = 0. \quad (5.5.6)$$

Usando o postulado fundamental da termodinâmica de buraco negro, a entropia é definida em termos do comprimento do círculo do horizonte

$$S = 4\pi r_+. \quad (5.5.7)$$

Em termos da entropia escrevemos as equações

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_J = \frac{S}{8\pi^2 l^2} - \frac{8\pi^2 J^2}{S^3}. \quad (5.5.8)$$

$$M = \left(\frac{S}{4\pi l} \right)^2 + \left(\frac{2\pi J}{S} \right)^2. \quad (5.5.9)$$

As quantidades termodinâmicas T , S , J e M satisfazem a primeira lei da termodinâmica [3]

$$dM = TdS + \Omega dJ. \quad (5.5.10)$$

Uma quantidade importante para o estudo das propriedades termodinâmicas é a capacidade térmica do buraco negro [4], que é dada por

$$C_J = \frac{S(S^4 - 64\pi^4 l^2 J^2)}{S^4 + 192\pi^4 l^2 J^2}, \quad (5.5.11)$$

ou em termos da coordenada do horizonte

$$C_J = \frac{4\pi r_+(4r_+^4 - l^2 J^2)}{4r_+^4 + 3l^2 J^2}. \quad (5.5.12)$$

Outra quantidade importante que pode fornecer informações sobre o comportamento termodinâmico do buraco negro é a capacitância

$$C_S = \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega} \right)_S, \quad (5.5.13)$$

que, usando a Eq.(5.5.1), pode ser expressa na forma

$$C_S = \frac{S^2}{4\pi}. \quad (5.5.14)$$

A partir das Eqs.(5.5.4) e (5.5.7) e usando o fato que $T > 0$, obtemos a seguinte condição

$$S^4 - 64\pi^4 l^2 J^2 > 0. \quad (5.5.15)$$

Para uma temperatura positiva definida, esta condição deve ser satisfeita. Esta é uma exigência que segue diretamente das leis da termodinâmica de buraco negro. A partir desta condição e da Eq.(5.5.11), vemos que a capacidade térmica é sempre positiva definida.

5.6 Espaço de Lens

Nesta seção, vamos discutir alguns exemplos de identificações de pontos na esfera S^3 que levam ao espaço de Lens. Em discussões anteriores, identificações análogas foram realizadas entre pontos do espaço AdS_3 para gerar soluções de buraco negro de BTZ.

Em 1908, H. Tieze desenvolveu alguns trabalhos no que hoje é conhecido como espaço de Lens. Esse termo tal como conhecemos hoje foi introduzido em 1930 por Seifert e Threlfall. Desde então, o estudo desses espaços tem sido frequentemente abordado em vários aspectos, em particular, no estudo sobre variedades em três dimensões. O espaço de Lens é o primeiro conjunto não-trivial de variedades em três dimensões totalmente classificados como homeomorfismos. Esses espaços desempenham um papel importante na construção da esfera de homologia de Poincaré e são comumente usados como exemplos no estudo da teoria de homologia, dentre outros. Devido a sua ampla aplicabilidade existem várias definições distintas do espaço de Lens em três dimensões na literatura atual sobre topologia moderna que diferem entre si pelo tipo de contexto no qual o mesmo está inserido.

No que segue, vamos abordar alguns dos principais modelos que descrevem o espaço de Lens. Na construção dos modelos é importante entender as propriedades da esfera S^3 . Por definição, todos os pontos $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$ que constituem uma superfície quádrlica onde

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1, \quad (5.6.1)$$

formam a esfera S^3 . Considere o grupo cíclico com p elementos

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad (5.6.2)$$

onde p não é necessariamente um número primo. Agora, considere um elemento $g \in \mathbb{Z}_p$, com $0 \leq g < p$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. A ação do elemento g sobre S^3 é dada por

$$g_n \cdot (z_0, z_1) = (e^{2\pi i n/p} \cdot z_0, e^{2\pi i n q/p} \cdot z_1). \quad (5.6.3)$$

A Eq.(5.6.3) constitui uma ação do grupo se

$$g_0 \cdot (z_0, z_1) = (e^0 \cdot z_0, e^0 \cdot z_1) = (z_0, z_1), \quad (5.6.4)$$

$$g_m \cdot (g_n \cdot (z_0, z_1)) = g_m \cdot (e^{2\pi in/p} \cdot z_0, e^{2\pi iqn/p} \cdot z_1) \quad (5.6.5)$$

$$= (e^{2\pi i(n+m)/p} \cdot z_0, e^{2\pi i(n+m)q/p} \cdot z_1) \quad (5.6.6)$$

$$= (m+n) \cdot (z_0, z_1). \quad (5.6.7)$$

Considere a aplicação $\Phi_n : \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3$ definida por

$$\Phi_n(z_0, z_1) = g_n \cdot (z_0, z_1) = (e^{2\pi in/p} \cdot z_0, e^{2\pi inq/p} \cdot z_1), \quad (5.6.8)$$

onde Φ_n pode ser visto como uma aplicação inversa contínua para cada n . A aplicação Φ_n é bijetiva e, portanto, é um homeomorfismo. A esfera \mathcal{S}^3 é conseqüentemente um espaço \mathbb{Z}_p . Esse espaço age sobre \mathcal{S}^3 tendo em vista que $g_n(z_0, z_1) = (z_0, z_1)$, ou seja

$$e^{2\pi in/p} \cdot z_0 = z_0, \quad (5.6.9)$$

$$e^{2\pi inq/p} \cdot z_1 = z_1. \quad (5.6.10)$$

Da Eq.(5.6.9), temos os dois casos

$$e^{2\pi in/p} = 1 \quad \text{ou} \quad z_0 = 0.$$

No primeiro caso, temos

$$e^{2\pi in/p} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 0 \in \mathbb{Z}_p, \quad (5.6.11)$$

e no segundo caso

$$\begin{aligned} z_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad |z_1| = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2\pi inq/p} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{nq}{p} \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad \frac{nq}{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 0 \in \mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

Em relação a essa ação vamos definir o espaço de Lens, $L(p, q)$, como o espaço das órbitas $\mathcal{S}^3/\mathbb{Z}_p$. Considere os pontos $z_0 = x_1 + ix_2$ e $z_1 = x_3 + ix_4$, de modo que

$$\mathcal{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}, \quad (5.6.12)$$

ou seja, \mathcal{S}^3 é uma esfera unitária no espaço Euclidiano em quatro dimensões. Segundo o teorema de Heine-Borel, a esfera \mathcal{S}^3 é compacta e, portanto, é um subconjunto não limitado fechado de \mathbb{R}^4 . Além disso, pode-se usar o método da projeção estereográfica para mostrar que \mathcal{S}^3 é uma 3-variedade. Até este ponto, vimos que \mathcal{S}^3 é um espaço \mathbb{Z}_p no qual o grupo finito \mathbb{Z}_p age livremente. Portanto, $L(p, q)$ é uma 3-variedade compacta.

Agora, vamos descrever outro método de construção do espaço de Lens. Esse espaço pode ser definido em termos de um modelo puramente geométrico dado nas três versões a seguir:

1. O espaço de Lens é obtido fazendo a identificação das superfícies superior e inferior. Após à implementação da identificação, efetua-se a rotação positiva $e^{2\pi q/p}$ da superfície superior em relação a parte inferior como ilustrada na Fig.(5.1) [30, 32].

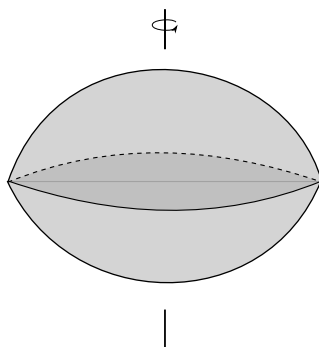


Figura 5.1: Representação geométrica do espaço de Lens.

2. O espaço de Lens ilustrado na Fig.(5.2) é definido como a esfera unitária $\mathcal{D}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ com identificações análogas às realizadas na primeira versão [32].

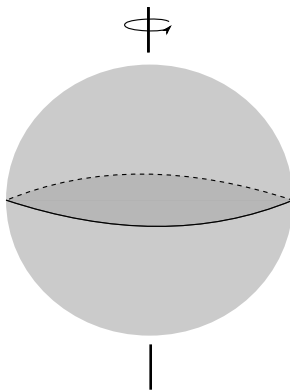


Figura 5.2: Representação geométrica do espaço de Lens: a esfera unitária \mathcal{D}^3 .

3. Na Fig.(5.3), o espaço de Lens é definido pelo poliedro constituído de duas pirâmides com bases $p - q$ unidas e com faces superior e inferior identificadas de modo análogo à primeira versão [31].

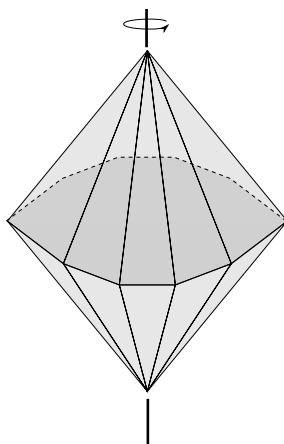


Figura 5.3: Representação geométrica do espaço de Lens: o Poliedro.

As três versões geométricas do espaço de Lens são homeomórficas entre si e compartilham das mesmas identificações. A partir deste ponto, vamos analisar a versão geométrica do espaço de Lens descrita pelo item 1.

Considere o sólido da Fig.(5.4) cuja face consiste de duas superfícies idênticas e radialmente simétricas. Os polos norte e o sul do sólido são rotulados pelas letras N e S , respectivamente. A superfície do sólido é particionada em p áreas iguais

e separadas pelos pontos x_0, \dots, x_{p-1} . Os pontos x_i estão conectados aos polos por segmentos curvilíneos que dividem cada superfície em p setores triangulares idênticos. Fazendo uma projeção e implementando uma rotação de $2\pi/q$, obtemos como resultado a identificação entre $\Delta N x_i x_{i+1}$ e $\Delta S x_{q+i} x_{q+i+1}$. Uma vez que $\gcd(p, q) = 1$, notamos que os pontos $\{x_0, x_q, x_{1q}, \dots, x_{(p-1)q}\}$ estão identificados e, portanto, constituem o conjunto de pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_{(p-1)}\}$.

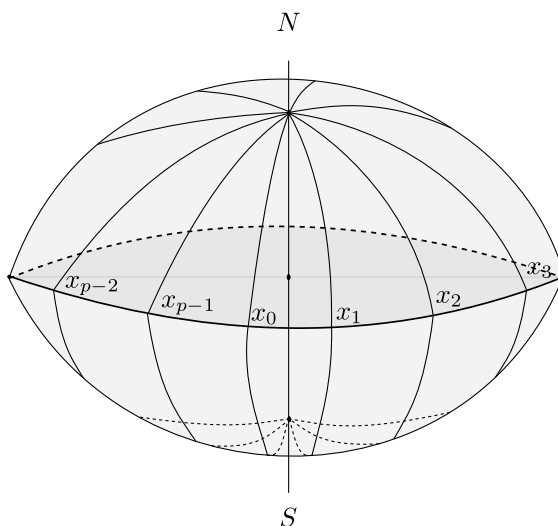


Figura 5.4: Modelo geométrico do espaço de Lens.

Vamos agora mostrar que as duas descrições abordadas são equivalentes, ou seja, que o espaço das identificações descrito acima é equivalente ao espaço das órbitas de $\mathcal{S}^3/\mathbb{Z}_p$. Como sabemos \mathcal{S}^3 é o conjunto ordenado de pares de números complexos (z_0, z_1) onde

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1. \quad (5.6.13)$$

Usando a representação modular

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \quad \text{e} \quad z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad (5.6.14)$$

a Eq.(5.6.13) torna-se

$$|r_0|^2 + |r_1|^2 = 1, \quad (5.6.15)$$

com $0 \leq r_1 \leq 1$, $0 \leq \theta_0, \theta_1 < 2\pi$. Podemos ainda usar a relação $r_0 = (1 - r_1^2)^{1/2}$ para associar a cada ponto (z_0, z_1) uma coordenada $(r_1, \theta_0, \theta_1)$. O conjunto dos pontos $(r_1, \theta_0, \theta_1)$ sugere um Toro em \mathbb{R}^4 que, quando sutilmente adaptado, torna-se de fato o nosso modelo para \mathcal{S}^3 . Para $r_1 = 0$ ou $r_1 = 1$, a correspondência $(z_0, z_1) \leftrightarrow (r_1, \theta_0, \theta_1)$

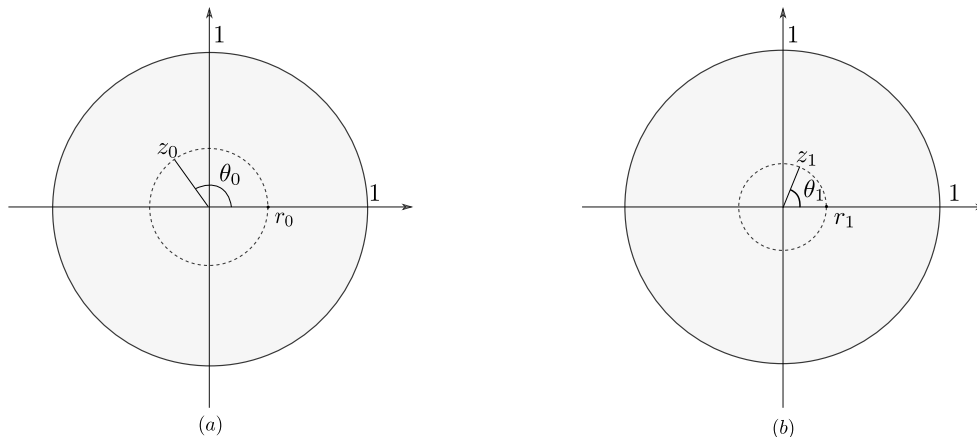


Figura 5.5: Plano Complexo

não é mantida:

- Se $r_1 = 0$, então $r_0 = 1$ e $(z_0, z_1) = (e^{i\theta_0}, 0)$ que é independente de θ_1 . Portanto, é necessário que $(0, \theta_0, \theta_1) = (0, \theta_0, \theta'_1)$ para todo $0 \leq \theta_1, \theta'_1 < 2\pi$.
- Se $r_1 = 1$, então $r_0 = 0$ e $(z_0, z_1) = (0, e^{i\theta_1})$ que é independente de θ_0 . Portanto, é necessário que $(1, \theta_0, \theta_1) = (1, \theta'_0, \theta_1)$ para todo $0 \leq \theta_0, \theta'_0 < 2\pi$.

Se considerarmos o Toro T de raio meridional igual a 1, como ilustrado na Fig.(5.6), então a primeira condição é automaticamente satisfeita, uma vez que os pontos sobre o círculo central são independentes de θ_1 .

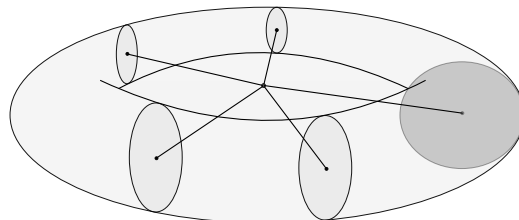


Figura 5.6: Toro sólido T

Para que a segunda condição seja satisfeita, deve-se identificar apropriadamente os pontos sobre $r_1 = 1$ que formam o Toro $\partial T = S^1 \times S^1$. Analisando esta condição, vemos que para cada ponto c com $0 \leq c < 2\pi$ todos os pontos sobre $\{(r_1, \theta_0, \theta_1) : \theta_1 = c, r_1 = 1\}$ são igualmente identificados e constituem a latitude de ∂T . Portanto, cada latitude torna-se um único ponto e a fronteira é efetivamente reduzida a um único meridiano. Cortando T ao longo de um plano apropriado obtemos o cilindro sólido da Fig.(5.5a) cujas extremidades e segmentos verticais são identificados a um único ponto. O resultado desse processo é homeomórfico à esfera sólida \mathcal{D}^3 com hemisférios identificados via projeção ortogonal como ilustrado na Fig.(5.5b). Na obtenção da esfera sólida os segmentos verticais ilustrados na Fig.(5.5a) foram colapsados simultaneamente. O procedimento até então descrito é amplamente usado na topologia.

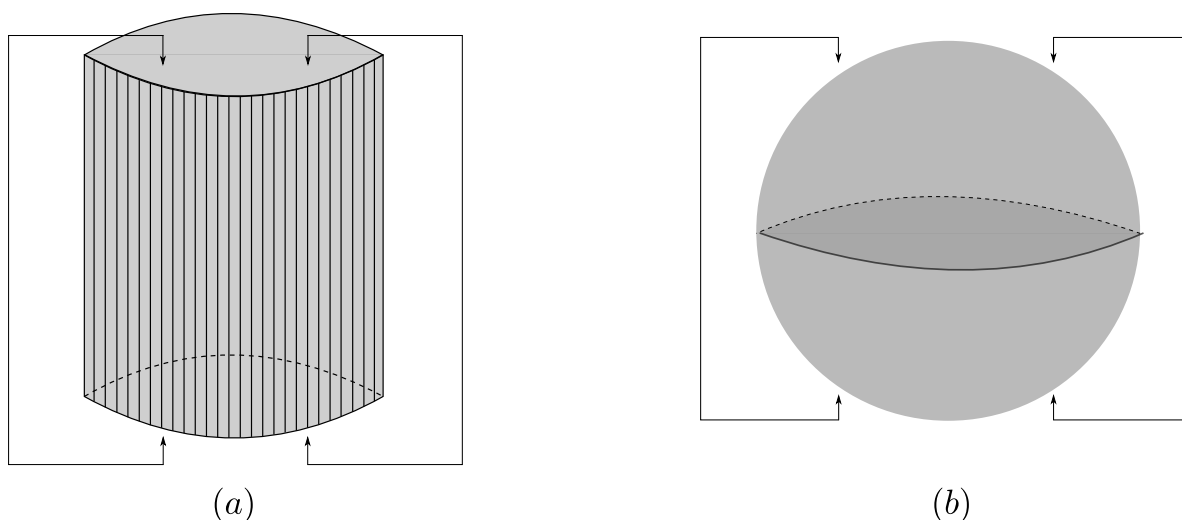


Figura 5.7: Cilindro sólido em (a); esfera sólida \mathcal{D}^3 em (b).

Agora, vamos mostrar que de fato isto representa a esfera \mathcal{S}^3 . Note que podemos escolher uma representação na forma de Lens com identificações análogas. Isso sugere que $L(1, q) \cong \mathcal{S}^3$ quando consideramos um modelo válido (o primeiro modelo válido). A demonstração descrita anteriormente será útil para visualizar as órbitas induzidas pela ação de \mathbb{Z}_p , que serão determinadas a partir deste ponto.

Primeiramente, é necessário determinar a classe de equivalência de T e, portanto,

de \mathcal{S}^3 , sobre a ação de \mathbb{Z}_p dado por

$$g_n \cdot (z_0, z_1) = (z_0 \cdot e^{2\pi i n/p}, z_1 \cdot e^{2\pi i n q/p}) = (r_0 e^{i(\theta_0 + 2\pi n/p)}, r_1 \cdot e^{2\pi i n q/p}), \quad (5.6.16)$$

ou nas coordenadas do Toro

$$g_n \cdot (r, \theta_0, \theta_1) = \left(r, \theta_0 + \frac{2\pi n}{p}, \theta_1 + \frac{2\pi q n}{p} \right). \quad (5.6.17)$$

Note que o valor de r é invariante pela ação de \mathbb{Z}_p . Portanto, podemos restringir nossa análise para o caso de um Toro com $r = c$ ($0 \leq c \leq 1$). O Toro em particular será denominado por T_c .

Quando $0 < c < 1$, T_c pode ser representado pelo quadrado da Figa.(5.8) com lados identificados e $0 \leq \theta_0, \theta_1 \leq 2\pi$.

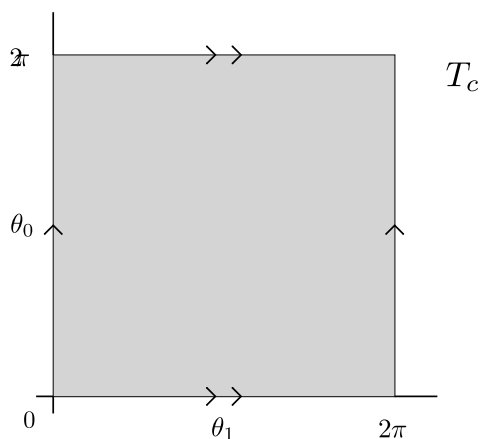


Figura 5.8: T_c sendo representado pelo quadrado com lados identificados.

A ação g_n sobre o ponto (θ_0, θ_1) resulta em $(\theta_0 + 2\pi n/p, \theta_1 + 2\pi q n/p)$ e, portanto, a ação de \mathbb{Z}_p gera translações ao longo da linha com gradiente $1/q$. Como exemplo, considere o caso onde $p = 5$ e $q = 3$. Se uma linha de gradiente $1/3$ é desenhada sobre o T_c , a classe de equivalência do ponto contém $p = 5$ pontos igualmente separados ao longo da linha.

Note que a classe de equivalência contém exatamente um ponto em cada banda horizontal da decomposição mostrada na Figa.(5.9 b). Teremos resultados análogos para qualquer p, q com $\text{mdc}(p, q) = 1$. Uma única banda horizontal de largura $2\pi/p$

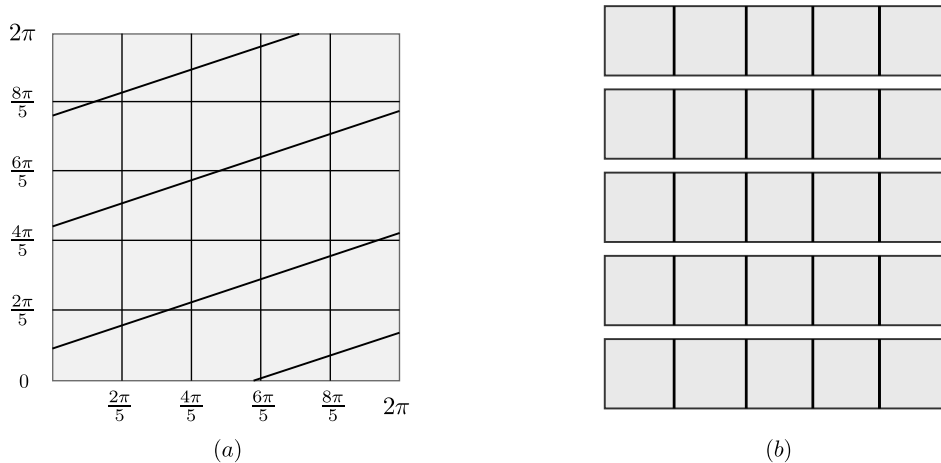


Figura 5.9: Classes de equivalência de T_c .

contém exatamente um ponto de cada classe de equivalência de T_c . Neste sentido, define-se o espaço de órbitas como sendo

$$T_c/\mathbb{Z}_p = \{(r, \theta_0, \theta_1) : r = c, 0 \leq \theta_0 < 2\pi/p, 0 \leq \theta_1 < 2\pi\}, \quad (5.6.18)$$

ou seja, um pequeno tubo com extremidades identificadas pela rotação $2\pi q/p$.

Existem dois casos especiais a serem considerados e ambos são toros degenerados e, portanto, os espaços das órbitas não podem ser ilustrados na Fig.(5.10).

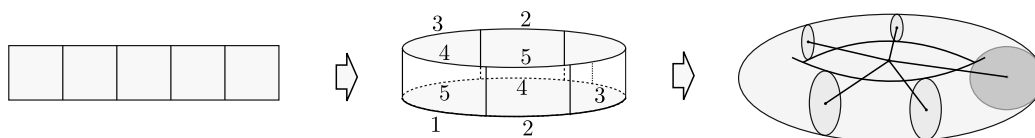


Figura 5.10: Espaço das órbitas.

- No primeiro caso temos T_0 como sendo um círculo de $r_1 = 0$. A ação de g_n sobre um ponto de T_0

$$\theta_0 \rightarrow \theta_0 + 2\pi n/p, \quad (5.6.19)$$

induz uma rotação $2\pi n/p$. Cada classe de equivalência contém exatamente um ponto em cada $2\pi/p$ radianos. Em particular, quando $0 \leq \theta_0 < 2\pi/p$, temos

exatamente um ponto a partir de cada classe de equivalência, e T_0/\mathbb{Z}_p pode ser visto como um arco com extremidades identificadas.

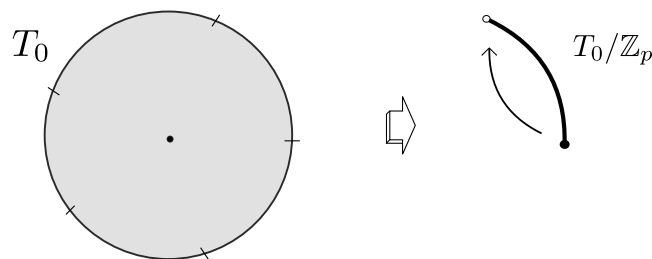


Figura 5.11: T_0 : o círculo de $r_1 = 0$.

- No segundo caso temos T_1 como a fronteira ∂T com latitudes identificadas em cada ponto. Isto pode ser visto como um círculo S^1 . A ação de g_n sobre um ponto (latitude) de T_1

$$\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi qn/p, \quad (5.6.20)$$

induz uma rotação $2\pi qn/p$. Uma vez que $\gcd(p, q) = 1$, se particionarmos S^1 em p áreas iguais

$$0 \leq \theta_1 < \frac{2\pi}{p}, \dots, \frac{2(p-1)\pi}{p} \leq \theta_1 < 2\pi, \quad (5.6.21)$$

teremos todas as áreas identificados.

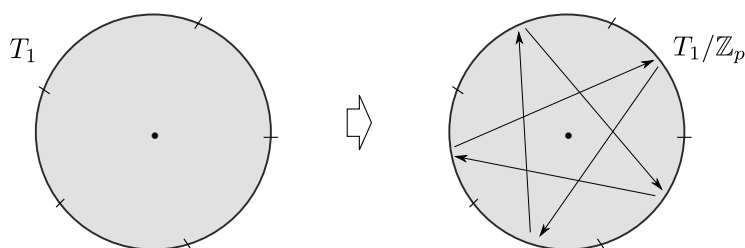


Figura 5.12: Espaço quociente S^3/\mathbb{Z}_p .

Uma vez que a ação de \mathbb{Z}_p leva a pontos sobre seu respectivo toro T_c , fica evidente que $\mathcal{S}^3/\mathbb{Z}_p = \bigcup_{0 \leq c \leq 1} T_c/\mathbb{Z}_p$. Isso é uma coleção de tubos com raio $0 \leq r < 1$ cujas extremidades são identificadas após uma rotação de $2\pi q/p$.

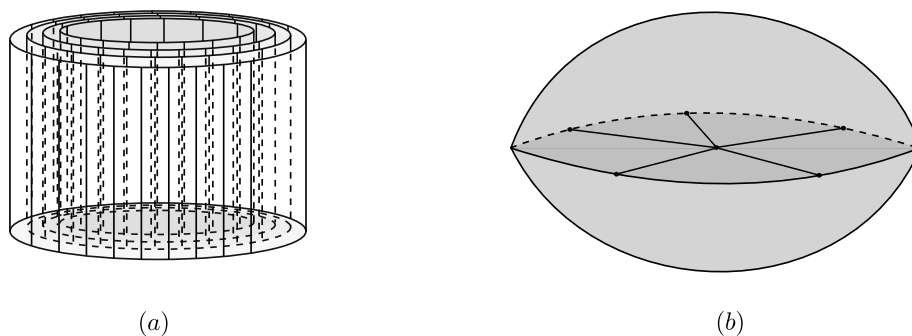


Figura 5.13: Coleção de tubos com $0 \leq r < 1$.

Ao colapsar a latitude em pontos, obtemos o espaço de Lens cujo círculo é dividido em p arcos iguais, todos igualmente identificados. As superfícies superior e inferior do espaço de lens correspondem às extremidades do cilindro sólido da Fig.(15) e, portanto, são identificados via uma rotação de $2\pi q/p$. Isso é o espaço de Lens $L(p, q)$ como descrito inicialmente pelo primeiro modelo. Conclui-se então que então os dois modelos descritos até então descrevem o mesmo espaço e são conseqüentemente equivalentes.

Capítulo 6

Trabalhos

6.1 Entropia a partir da Quebra de Simetria Conforme

Quando os estados físicos de um sistema satisfazem as leis da Mecânica Quântica Conforme (MQC), os mesmos podem ser descritos pelas representações da álgebra de Lie $so(2,1)$ [20]. Esta álgebra é formada pelos geradores de translação temporal, dilatação e transformação conforme especial e surge em uma grande variedade de sistemas físicos.

A Hamiltoniana (H) na Mecânica Quântica Conforme é um operador não limitado sobre o espaço de Hilbert, cujo domínio precisa ser especificado. O domínio deste operador, são obtidos a partir da evolução temporal unitária, que é gerada por uma Hamiltoniana auto-adjunto. As condições de fronteira ou, equivalentemente, o domínio do operador, levam a uma evolução temporal unitária na MQC. Para certos valores dos parâmetros do sistema, a Hamiltoniana da MQC pode admitir uma família de extensões auto-adjuntas. Os correspondentes domínios são rotulados pelo parâmetro dessas extensões. Neste caso, a ação do operador dilatação, em geral, não preserva o domínio da Hamiltoniana e, portanto, a simetria de escala da mecânica quântica é

quebrada. Em outras palavras, a simetria unitária não pode ser implementada sobre uma representação irredutível unitária, rotulada por um dado domínio, ou, equivalentemente, por uma dada extensão auto-adjuntada. A ação da dilatação mapeia um parâmetro em outro, o que indica a quebra da simetria de escala que, por sua vez, esta associada puramente a efeitos quânticos.

Assim, naturalmente, indagamos se é possível restaurar a simetria de escala da MQC. O processo de restauração pode ser implementado via o uso de estados mistos apropriados compatíveis com a evolução unitário no tempo. Em geral, podemos ainda calcular a entropia de von Neumann associada a um estado misto geral [16].

6.1.1 Partícula sobre um Plano com Defeito: Um Modelo para Mecânica Quântica Conforme

Um sistema é descrito pela MQC quando a Hamiltoniana H , o gerador de dilatação G e o gerador de transformações conformes especiais K satisfazem a relação de comutação da álgebra de Lie $so(2, 1)$ [20]

$$i[G, H] = H, \quad (6.1.1)$$

$$i[K, G] = K, \quad (6.1.2)$$

$$i[H, K] = -2G. \quad (6.1.3)$$

A Hamiltoniana de uma partícula sobre um plano com defeito é da forma [47]

$$H(\alpha) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\alpha}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (6.1.4)$$

onde α está associado a intensidade do potencial. Por redefinição de variável, temos

$$H(\alpha) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1 - 4\alpha}{4r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (6.1.5)$$

Considerando a equação de autovalor

$$H(\alpha)\psi = E(\alpha)\psi, \quad (6.1.6)$$

com $\psi(r, \phi) = f(r)\chi(\phi)$, a parte angular da Hamiltoniana efetiva é

$$H_\phi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (6.1.7)$$

sendo auto-adjunto no domínio

$$D_\theta = \{L^2(S^1, d\phi) : \varsigma(2\pi) = e^{i\theta}\varsigma(0), \varsigma'(2\pi) = e^{i\theta}\varsigma'(0)\}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (6.1.8)$$

A partir do espectro do operador angular

$$\lambda_n = \left(n + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.1.9)$$

temos uma família de quantizações não equivalentes deste operador rotuladas por um parâmetro.

O parâmetro da extensão auto-adjunta quebra as simetrias de paridade e reversão temporal, exceto quando $\theta = 0, \pi$. As simetrias podem ser restauradas por meio do uso de estados mistos apropriados [38, 39].

Vamos mostrar que a simetria de escala de um sistema físico pode ser quebrada com a escolha de condições de contorno adequadas. Primeiramente, vamos considerar o problema de autovalor

$$H_r g(r) \equiv \left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\delta}{r^2}\right] g(r) = E g(r), \quad (6.1.10)$$

onde

$$\delta = -\frac{1}{4} + \lambda_n + \alpha \quad (6.1.11)$$

e H_r é simétrico no domínio

$$D(H_r) \equiv \{\phi, \phi' \in L^2(dr) | \phi(0) = \phi'(0) = 0\}. \quad (6.1.12)$$

De acordo com o valor do parâmetro δ , temos

- $\delta \geq \frac{3}{4}$. O operador H_r é essencialmente auto-adjunto em $D(H_r)$;

- $-\frac{1}{4} \leq \delta < \frac{3}{4}$. O operador H_r não é auto-adjunto em $D(H_r)$ mas admite uma família a 1-parâmetro de extensões auto-adjuntas. As extensões auto-adjuntas são caracterizadas por um parâmetro real $\gamma \in [0, 1]$;
- $\delta < -\frac{1}{4}$. Não existe um valor mínimo para a energia do estado fundamental e, portanto, não temos um sistema físico.

No segundo caso, as condições de fronteira surgem quando a extensão auto-adjunta quebra a simetria de escala para valores genéricos do parâmetro γ [40]. Isso acontece quando o domínio no qual H_r é auto-adjunto varia sob a ação do gerador de dilatação. Isso fica mais evidente quando consideramos a ação do operador dilatação

$$G = -\frac{i}{2} \left(r \frac{d}{dr} + \frac{d}{dr} r \right), \quad (6.1.13)$$

sobre um elemento genérico

$$\phi(r) = \phi_+(r) + e^{i\gamma} \phi_-(r) \quad \phi(r) \in \mathcal{D}_\gamma(H_r), \quad (6.1.14)$$

onde

$$\phi_+(r) = \sqrt{r} H_\nu^{(1)}(r e^{i\pi/4}), \quad (6.1.15)$$

$$\phi_-(r) = \sqrt{r} H_\nu^{(2)}(r e^{-i\pi/4}), \quad (6.1.16)$$

e $H_\nu^{(k)}$ são as funções de Hankel com

$$\nu^2 = \gamma + \frac{1}{4}. \quad (6.1.17)$$

Tomando o limite $r \rightarrow 0$, obtemos

$$G\phi(r) \rightarrow \frac{1}{\sin \nu\pi} \left[(1 + \nu) \frac{r^{\nu+1/2} (e^{-i\frac{3\nu\pi}{4}} - e^{i(\gamma+\frac{3\nu\pi}{4})})}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)} + (1 - \nu) \frac{r^{-\nu+1/2} (e^{i(\gamma+\frac{\nu\pi}{4})} - e^{-i\frac{\nu\pi}{4}})}{2^{-\nu} \Gamma(1 - \nu)} \right], \quad (6.1.18)$$

onde $G\phi(r) \in \mathcal{D}_\gamma(H_r)$ apenas se $G\phi(r) \sim C\phi(r)$, com C constante. Isso não é possível, uma vez que, em geral, temos $G\phi(r) \notin \mathcal{D}_\gamma(H_r)$. Portanto, a simetria de escala é quebrada no nível quântico para valores genéricos do parâmetro γ .

6.1.2 Estados mistos em Mecânica Quântica Conforme

Para alguns modos, em particular, para o modo $n = 0$ quando $\theta = 0$ e $n = 0, 1$ quando $\theta > 0$, o operador G altera as condições de fronteira de H_r . Portanto, não faz sentido implementar a relação de comutação entre G e H_r sobre estados físicos.

A simetria quebrada pode ser restaurada via o uso do mecanismo sugerido por Balachandran e Amilcar [38]. A idéia é construir um estado misto apropriado de modo que o comutador entre $H_r(\gamma) \equiv (H_r, \mathcal{D}_\gamma)$ e G seja implementado sem nenhum problema. Um estado misto apropriado consiste na média sobre todas as condições de fronteira possíveis obtidas a partir da ação do operador G .

Para um dado \mathcal{D}_γ , com $0 \leq \gamma \leq 1$, fixamos um estado geral $|\cdot; \gamma\rangle$. O estado misto que restaura a simetria de escala é dado por

$$\omega = \int d\mu(\gamma) |\cdot; \gamma\rangle \langle \cdot; \gamma| \equiv \int d\mu(\gamma) \hat{\omega}_\gamma, \quad (6.1.19)$$

onde $\hat{\omega}_\gamma \equiv |\cdot; \gamma\rangle \langle \cdot; \gamma|$ representa um estado puro, $\hat{\omega}_\gamma^2 = \hat{\omega}_\gamma$, sobre o domínio \mathcal{D}_γ e $d\mu(\gamma)$ é a medida invariante normalizada em relação a G . O valor esperado de qualquer observável \mathcal{O} sobre o estado ω é dado por

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\omega = \text{Tr } \omega \mathcal{O}, \quad (6.1.20)$$

onde o traço é tomado sobre o espaço de Hilbert. Se \mathcal{O} é um observável invariante sobre a ação de G , então $\langle \mathcal{O} \rangle_\omega$ é necessariamente nulo. Em particular, o comutador $[G, \omega]$ é nulo por construção de modo que

$$\langle [H_r(\gamma), G] \rangle_\omega = 0. \quad (6.1.21)$$

A quebra da simetria de escala também pode ser implementada usando representação projetiva. Implementar a quebra de simetria de escala usando estados mistos simplifica consideravelmente o cálculo da entropia de von Neumann.

6.1.3 Entropia

Considere um estado misto geral dado por

$$\omega = \int d\mu(\gamma) \lambda_\gamma \hat{\omega}_\gamma, \quad (6.1.22)$$

onde $d\mu(\gamma)$ é a medida de Haar $U(1)$ -invariante, sendo o grupo $U(1)$ isomorfo ao espaço de todas as extensões auto-adjuntas, $\hat{\omega}_\gamma$ é um estado puro ($\hat{\omega}_\gamma^2 = \hat{\omega}_\gamma$) no domínio \mathcal{D}_γ e λ_γ é o peso

$$\lambda_\gamma \geq 0, \quad \int d\mu(\gamma) \lambda_\gamma = 1. \quad (6.1.23)$$

A entropia de von Neumann de ω é dada por

$$S(\omega) = - \int d\mu(\gamma) \lambda_\gamma \log \lambda_\gamma. \quad (6.1.24)$$

Quando exigimos a covariância de ω sobre a ação de G , forçamos a Eq.(6.1.22) a ser uniforme para qualquer γ , ou seja

$$\lambda_\gamma = \frac{1}{\mathcal{N}}, \quad (6.1.25)$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização apropriado. O fator de normalização está associado ao volume da órbita de G na família $U(1)$ do domínio. A entropia associada à decomposição uniforme do estado misto ω é escrita como

$$S(\omega) = \log \mathcal{N}. \quad (6.1.26)$$

Ingenuamente, \mathcal{N} seria o volume da família $U(1)$ dos domínios auto-adjuntos da Hamiltoniana. Se $U(1)$ for modelado após um intervalo de comprimento 1 o fator de normalização é 1. Contudo, a uniformidade dos pesos nos estados mistos implica em ambiguidades na determinação de \mathcal{N} . A ambiguidade é resolvida usando um fator tipo-Gibbs associado com o volume do grupo de simetria responsável por gerar tal ambiguidade.

Inicialmente vamos considerar um intervalo finito como modelo para a família $U(1)$ de condições de fronteira, isto é, $0 \leq \gamma \leq 1$. Fazemos uma discretização uniforme desse

intervalo. Cada ponto discreto desse intervalo é rotulado por j e a distância entre j e $j + 1$ é dada por a . Outras regularizações do intervalo levam às mesmas conclusões.

O estado misto regularizado torna-se

$$\omega_N = \frac{1}{\mathcal{N}_N} \sum_{j=1}^N \hat{\omega}_j, \quad (6.1.27)$$

onde N é o número de pontos discretos do intervalo. Os pontos discretos j podem ser reformulados sem afetar a contagem. Isso implica em uma ambiguidade na contagem associada com o grupo de simetria S_N . Deve-se então fixar a escolha de j , ou seja, uma órbita particular de S_N . O resultado é que \mathcal{N}_N é proporcional ao número de classes de conjugação do grupo S_N . Isso é similar a contagem do volume do espaço de órbitas de um grupo de gauge e ao fato de que este volume é igual ao número de classes de conjugação de S_N . Devemos lembrar que o número de classes de conjugação de S_N é igual ao número de representações irredutíveis inequivalentes do grupo S_N . Portanto, o fator de normalização é

$$\mathcal{N}_N = (aN)|\mathcal{C}_{S_N}|, \quad (6.1.28)$$

onde $|\mathcal{C}_{S_N}|$ é o número de classes de conjugação do grupo de simetria S_N . De acordo com [], $|\mathcal{C}_{S_N}| = p(N)$ com $p(N)$ sendo o número de partições. Isso significa que cada representação irredutível inequivalente de S_N é rotulada por uma partição de N .

Como resultado do exposto anteriormente, temos

$$S(\omega_N) = \log \mathcal{N}_N = \log[(aN)p(N)]. \quad (6.1.29)$$

A Eq.(6.1.29) é renormalizada tomando o limite $N \rightarrow \infty$ de modo que $a \rightarrow 0$ enquanto o comprimento do intervalo não varia. O limite $N \rightarrow \infty$ leva à fórmula assintótica de Hardy-Ramanujan [] e Rademacher []

$$p(N) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}N} e^{\pi\sqrt{\frac{2N}{3}}}. \quad (6.1.30)$$

A entropia é portanto

$$S(\omega_{N \rightarrow \infty}) \sim \pi\sqrt{\frac{2N}{3}} - \log(4\sqrt{3}). \quad (6.1.31)$$

Neste limite, a entropia normalizada por \sqrt{N} torna-se

$$S_{\sqrt{N}}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(\omega_N)}{\sqrt{N}} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (6.1.32)$$

Essa expressão é similar a fórmula de Cardy para uma teoria de campo conforme com carga central $c = 1$ [1].

Argumentos similares também se aplicam a outras regularizações. O resultado final depende da soma contínua e uniforme S_∞ do estado puro na Eq.(6.1.19).

A origem da ambiguidade na determinação da entropia de certos estados mistos foi extensivamente analisada do ponto de vista algébrico em [1]. Nesses trabalhos a degenerescência levam a ambiguidades da representação irredutível da álgebra de observáveis.

Vamos agora analisar a situação anteriormente descrita para o caso de muitas partículas. Inicialmente, considere c partículas independentes e indistinguíveis. Por independência entende-se que as partículas não interagem entre si. Obviamente, cada partícula distinta independentemente obedece as leis da mecânica conforme.

Para esse sistema devemos substituir N por cN de modo que cada partícula transporta uma família $U(1)$ de extensões auto-adjuntas. A independência entre as partículas implica na fixação da forma da família auto-adjunta. Em princípio, teríamos uma família $U(c)$ sugerindo a existência de condições de fronteira que levam uma partícula em outra. Esse caso mais geral está também associado à alterações quânticas na topologia [1]. Portanto, temos

$$S(\omega_N^c) = \log \mathcal{N}_N^c = \log(c(Na)p(cN)), \quad (6.1.33)$$

$$p(cN) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}cN} e^{\pi\sqrt{\frac{2cN}{3}}}, \quad (6.1.34)$$

$$S(\omega_{N \rightarrow \infty}^c) \sim \pi\sqrt{\frac{2cN}{3}} - \log(4\sqrt{3}). \quad (6.1.35)$$

No limite $N \rightarrow \infty$, obtemos

$$S_{\sqrt{N}}(\omega) = \frac{S(\omega_{N \rightarrow \infty}^c)}{\sqrt{N}} = \pi\sqrt{\frac{2c}{3}}. \quad (6.1.36)$$

Essa fórmula é semelhante a fórmula de Cardy para um c geral.

Sendo as partículas indistinguíveis, a estatística das mesmas deve ser analisada cuidadosamente. Uma vez que a estatística do grupo é considerada no processo de contagem, o procedimento de contar é o mesmo descrito anteriormente [16].

6.2 Auto Força

Uma partícula ao acelerar em um espaço-tempo, emite radiação e perde energia e momento angular para o campo radiado. Uma pequena fração dessa radiação é “refletida” pela curvatura do espaço e retorna para a posição da partícula. A interação da partícula com está radiação refletida da origem a chamada “auto força”. Inicialmente essa auto força parece ser divergente na posição da partícula. De modo similar ao que acontece na teoria quântica de campos, a definição do campo exige um procedimento de renormalização a fim de separar a parte física (finita) da parte renormalizável (infinita). Nesta seção, obtemos uma expressão para a auto força agindo sobre uma carga escalar estática (sem massa) no espaço-tempo de Kerr subtraído.

6.2.1 Auto Força sobre uma Carga Escalar no Buraco Negro de Kerr

A auto força que age sobre uma carga escalar estática no espaço-tempo de Kerr foi numericamente obtida por Burko e Liu [49] na forma

$$f_b^{auto} = \frac{a\Delta q^2 M^2 \sin^2 \theta}{3(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)^{5/2} \Sigma^{1/2}} \delta_b^\phi. \quad (6.2.1)$$

Posteriormente, essa expressão foi obtida analiticametne por Ottewil e Taylor [50] e usada para validar a expressão da função de Green de uma carga escalar estática neste espaço-tempo.

No espaço-tempo de Kerr o estudo da função de Green é fundamental para a compreensão de alguns problemas fundamentais da física. Em geral, no espaço-tempo

de um buraco negro a função de Green satisfaz uma equação de onda relativamente complicada. Mesmo no espaço-tempo de Schwarzschild, não existe soluções fechadas para a função de Green. Contudo, a forma fechada da função de Green estática é conhecida e foi usada para determinar a auto força sobre uma carga escalar estática.

No que segue, vamos obter uma expressão para a auto força sobre uma carga escalar no espaço-tempo de Kerr subtraído aplicando procedimento semelhante ao adotado no cálculo que levou a obtenção da Eq.(6.2.1).

6.2.2 Geometria Subtraída

Vamos considerar a solução de buraco negro (com rotação) de uma teoria de cordas em quatro dimensões com quatro cargas $U(1)$ independentes. A parametrização das cargas assintóticas do buraco negro é dada por

$$\begin{aligned} G_4 \tilde{M} &= \frac{1}{4} M \sum_{I=0}^3 \cosh 2\delta_I, \\ G_4 Q_I &= \frac{1}{4} M \sinh 2\delta_I, \\ G_4 J &= M a (\Pi_c - \Pi_s). \end{aligned}$$

A métrica em quatro dimensões pode ser escrita como um fibrado sobre um espaço em três dimensões [18]

$$ds_4^2 = -\frac{G}{\Delta_0^{1/2}} (dt + \mathcal{A})^2 + \Delta_0^{1/2} \left(\frac{dr^2}{X} + d\theta^2 + \frac{X}{G} \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (6.2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} X &= r^2 - 2Mr + a^2, & G &= r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta, \\ \mathcal{A} &= \frac{a \sin^2 \theta A_{red}}{G} d\phi, & A_{red} &= 2M[(\Pi_c - \Pi_s)r + 2M\Pi_s], \\ \Delta_0 &= \prod_{I=0}^3 (r + 2M \sinh^2 \delta_I) + 2a^2 \cos^2 \theta \left[r^2 + Mr \sum_{I=0}^3 \sinh^2 \delta_I \right. \\ &\quad \left. + 4M^2 (\Pi_c - \Pi_s) \Pi_s - 2M^2 \sum_{I < J < K} \sinh^2 \delta_I \sinh^2 \delta_J \sinh^2 \delta_K \right] \\ &\quad + a^4 \cos^4 \theta, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

e

$$\Pi_c \equiv \prod_{I=0}^3 \cosh \delta_I, \quad \Pi_s \equiv \prod_{I=0}^3 \sinh \delta_I. \quad (6.2.4)$$

Para obter a equação de onda com separabilidade deve-se tomar a Eq.(6.2.2) com valores arbitrários de X , G , Δ_0 e \mathcal{A}_ϕ e assumir que o \mathcal{A}_{red} introduzido na Eq.(6.2.3) é função apenas de r .

Da Eq.(6.2.2), obtemos o Laplaciano

$$\Delta_0^{-1/2} \left[\partial_r X \partial_r + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta - \frac{\Delta_0}{G} \partial_t^2 + \frac{G}{X \sin^2 \theta} (\partial_\phi - \mathcal{A}_\phi \partial_t)^2 \right]. \quad (6.2.5)$$

Nota-se na Eq.(6.2.5) que a separabilidade é comprometida devido a mistura entre r e θ nos últimos dois termos. Usando a equação

$$G = X - a^2 \sin^2 \theta, \quad (6.2.6)$$

e a expressão para \mathcal{A}_{red} dada pela Eq.(6.2.3), o Laplaciano torna-se

$$\begin{aligned} \Delta_0^{-1/2} \left[\partial_r X \partial_r - \frac{1}{X} (\mathcal{A}_{red} \partial_t + a \partial_\phi)^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{A}_{red}^2 - \Delta_0}{G} \partial_t^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Na combinação $\Delta_0 - \mathcal{A}_{red}^2$, surge a função G e, conseqüentemente, podemos fazer a seguinte fatoração

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0 - \mathcal{A}_{red}^2}{G} &= r^2 + 2Mr \left(1 + \sum_{I=0}^3 s_I^2 \right) + 8M^2 (\Pi_c - \Pi_s) \Pi_s \\ &- 4M^2 \sum_{I < J < K} s_I^2 s_J^2 s_K^2 + a^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

com $s_i^2 \equiv \sinh^2 \delta_i$. A separabilidade do Laplaciano na Eq.(6.2.7) e, conseqüentemente, a separabilidade da equação de onda (sem massa) é implementada ao considerarmos a Eq.(6.2.8).

A equação radial tem duas singularidades regulares, $r = r_\pm$, e uma singularidade irregular, $r = \infty$. Os índices das singularidades regulares são as temperaturas externa,

$i\beta_+/2\pi$, e interna $i\beta_-/2\pi$, que estão associadas aos horizontes externo e interno, respectivamente. A singularidade irregular no infinito, que é consequência do comportamento assintótico de $\Delta_0 \sim r^4$, impede que a equação radial seja uma equação hipergeométrica com simetria $SL(2, \mathbf{R})$ permutando entre as singularidades e, portanto, afasta a possibilidade de termos simetria conforme.

A singularidade no infinito na equação radial torna-se regular se, ao invés de Δ_0 , considerarmos um Δ com comportamento assintótico $\Delta \sim r$. Neste caso, temos:

- A equação radial pode ser colocada na forma hipergeométrica;
- A equação angular toma a forma

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) \chi(\theta, \phi) = -l(l+1)\chi(\theta, \phi); \quad (6.2.9)$$

- A geometria indica uma quebra de simetria $SU(2)$;
- Os índices da singularidade regular no infinito são $(l, -l-1)$.

A transformação $\Delta_0 \rightarrow \Delta$ altera o ambiente externo do buraco negro original mas não altera a estrutura interna do mesmo. Isto significa que a estrutura causal e a termodinâmica do buraco negro não depende do fator conforme Δ_0 .

Tomando o limite de escala [48]

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r\epsilon, & \tilde{M} &= M\epsilon, & \tilde{t} &= \frac{t}{\epsilon}, \\ 2\tilde{M} \sinh^2 \tilde{\delta} &\equiv Q = \frac{2M(\Pi_c^2 - \Pi_s^2)^{1/3}}{\epsilon^{1/3}}, \\ \sinh^2 \tilde{\delta}_0 &= \frac{\Pi_s^2}{\Pi_c^2 - \Pi_s^2}, \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

o fator conforme Δ_0 torna-se

$$\Delta_0 \rightarrow \Delta = (2M)^3(\Pi_c^2 - \Pi_s^2)r + (2M)^4\Pi_s^2 - (2M)^2(\Pi_c - \Pi_s)^2 a^2 \cos^2 \theta, \quad (6.2.11)$$

com Δ preservando a separabilidade e a analiticidades nas coordenadas. A Eq.(6.2.8) torna-se

$$\frac{\Delta_0 - \mathcal{A}_{red}^2}{G} = -4M^2(\Pi_c - \Pi_s)^2. \quad (6.2.12)$$

Vamos aplicar explicitamente alguns dos conceitos até então discutidos no caso do buraco negro de Kerr. Os parâmetros de massa e momento angular são $G_4\tilde{M} = M$ e $J = aM$, respectivamente. O fator conforme e o potencial reduzido são dados por

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2, \\ \mathcal{A}_{red} &= 2Mr.\end{aligned}$$

A Eq.(6.2.8) é então escrita na forma

$$\frac{\Delta_0 - \mathcal{A}_{red}^2}{G} = r^2 + 2Mr + a^2 \cos^2 \theta. \quad (6.2.13)$$

O fator conforme na geometria subtraída dado na Eq.(6.2.11) é então

$$\Delta_0 \rightarrow \Delta = 4M^2(2Mr - a^2 \cos^2 \theta), \quad (6.2.14)$$

e o potencial efetivo que implica na separabilidade da equação de onda torna-se [48]

$$\frac{\Delta - \mathcal{A}_{red}^2}{G} = -4M^2. \quad (6.2.15)$$

6.2.3 Auto Força sobre uma Carga Escalar no Espaço-Tempo de Kerr Subtraído

O buraco negro de Kerr com geometria subtraída tem métrica dada por [48]

$$ds_4^2 = -\frac{G}{\Delta^{1/2}}(dt + \mathcal{A})^2 + \Delta^{1/2} \left(\frac{dr^2}{X} + d\theta^2 + \frac{X}{G} \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (6.2.16)$$

where

$$\begin{aligned}X &= r^2 - 2Mr + a^2, \\ G &= r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta, \\ \mathcal{A} &= \frac{a \sin^2 \theta A_{red}}{G} d\phi, \\ A_{red} &= 2Mr, \\ \Delta &= 4M^2(2Mr - a^2 \cos^2 \theta).\end{aligned} \quad (6.2.17)$$

A função de Green para uma partícula escalar no espaço-tempo de Kerr com métrica dada pela Eq.(6.2.16) satisfaz a relação

$$\square G(x, x') = -\frac{\delta^4(x - x')}{\sqrt{-g}}, \quad (6.2.18)$$

onde

$$\square = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\partial_r X \partial_r - \frac{1}{X} (\mathcal{A}_{red} \partial_t + a \partial_\phi)^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 + \frac{\mathcal{A}_{red}^2 - \Delta}{G} \partial_t^2 \right], \quad (6.2.19)$$

e

$$\sqrt{-g} = X^{1/2} \sin \theta.$$

Para uma fonte estática, a derivada temporal é nula na Eq.(6.2.19), logo a Eq.(6.2.18) torna-se

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\partial_r X \partial_r - \frac{a^2}{X} \partial_\phi^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right] G_{static}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\sqrt{-g}}. \quad (6.2.20)$$

A representação da função de Green estática, considerando apenas o modo de frequência nula, é dada na forma

$$G_{static}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') e^{im(\phi-\phi')} \psi_{lm}(r, r'), \quad (6.2.21)$$

onde a função radial $\psi_{lm}(r, r')$ satisfaz a equação

$$\left[\frac{d}{dr} \left(X \frac{d}{dr} \right) + \frac{m^2 a^2}{X} - l(l+1) \right] \psi_{lm}(r, r') = -\frac{\delta(r-r')}{X^{1/2} \sin \theta}. \quad (6.2.22)$$

Por conveniência, implementa-se a mudança de coordenada

$$z = \frac{r - \frac{1}{2}(r_+ + r_-)}{r_+ - r_-},$$

onde

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (6.2.23)$$

Nesta nova coordenada a Eq.(6.2.22) torna-se

$$\left[(z^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} + 2z \frac{d}{dz} + \frac{\gamma^2 m^2}{(z^2 - 1)} - l(l + 1) \right] \psi_{lm}(z, z') = -\frac{\delta(z - z')}{X^{1/2} \sin \theta}. \quad (6.2.24)$$

A solução da Eq.(6.2.24) pode ser escrita na forma

$$\psi_{lm}(z, z') = \frac{1}{(r_+ - r_-)(1 - z^2)} \frac{P_l^{-\nu}(z_<) Q_l^{\nu}(z_>)}{W[P_l^{-\nu}(z), Q_l^{\nu}(z)]}, \quad (6.2.25)$$

onde o Wronskian é

$$W[P_l^{-\nu}, Q_l^{\nu}] = -\frac{e^{i\nu\pi}}{(z^2 - 1)}. \quad (6.2.26)$$

Substituindo a Eq.(6.2.26) na Eq.(6.2.25) e usando a expressão para o produto de funções de Legendre associadas

$$e^{-i\nu\pi} P_l^{-\nu}(z_<) Q_l^{\nu}(z_>) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{e^{-\nu \cosh^{-1}(\chi)} P_l(x)}{(z^2 + z'^2 - 2zz'x - 1 + x^2)^{1/2}} dx \quad (6.2.27)$$

com

$$\chi = \frac{zz' - x}{(z^2 - 1)^{1/2}(z'^2 - 1)^{1/2}}, \quad (6.2.28)$$

a Eq.(6.2.21) torna-se

$$G_{static}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi b} \int_{-1}^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} e^{-im(\Delta\phi + \gamma \cosh^{-1}(\chi))} \frac{P_l^m(\cos \theta') P_l^m(\cos \theta) P_l(x)}{(z^2 + z'^2 - 2zz'x - 1 + x^2)^{1/2}} dx, \quad (6.2.29)$$

onde

$$b = r_+ - r_-. \quad (6.2.30)$$

Seguindo o procedimento descrito em [50], a expressão da função de Green para uma fonte estática no buraco negro de Kerr subtraído é

$$G_{static}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{b}{4\pi X^{1/2} X'^{1/2}} \frac{1}{\sinh\left(\frac{b}{a}|\psi_0 - \Delta\phi|\right) - ab \sin \theta \sin \theta' \sin \psi_0}. \quad (6.2.31)$$

Vamos agora determinar as distâncias avançada e retardada para uma partícula estática no espaço-tempo de Kerr subtraído. Para este fim, devemos avaliar a distância geodésica nos pontos avançado e retardado. Esses pontos estão conectados ao ponto do campo por geodésicas tipo-luz

$$\sigma(x, \bar{x}) = 0, \quad (6.2.32)$$

cuja expansão em coordenadas é obtida substituindo o ansatz

$$2\sigma(x, \bar{x}) = g_{ab}\Delta x^a \Delta x^b + A_{abc}\Delta x^a \Delta x^b \Delta x^c + B_{abcd}\Delta x^a \Delta x^b \Delta x^c \Delta x^d \quad (6.2.33)$$

na equação que define σ

$$2\sigma = g^{ab}\sigma_{;a}\sigma_{;b}. \quad (6.2.34)$$

Seguindo o procedimento realizado em [50], as componentes dos tensores na Eq.(6.2.33) são dados por

$$A_{abc} = \frac{1}{2}g_{(ab,c)}, \quad (6.2.35)$$

$$B_{abcd} = \frac{1}{6}g_{(ab,cd)} - \frac{1}{12}g_{ef}\Gamma_{(ab}^e\Gamma_{cd)}^f, \quad (6.2.36)$$

e as distâncias avançada e retardada toma a forma

$$r_{ret} = \frac{1}{2\sqrt{-\bar{g}_{tt}}}(P_{ret}\epsilon + Q_{ret}\epsilon^2 + R_{ret}\epsilon^3), \quad (6.2.37)$$

$$r_{adv} = -\frac{1}{2\sqrt{-\bar{g}_{tt}}}(P_{adv}\epsilon + Q_{adv}\epsilon^2 + R_{adv}\epsilon^3), \quad (6.2.38)$$

onde

$$\begin{aligned}
P_{ret} &= 2\bar{g}_{tt}\Delta t_{1,ret} + 2\bar{g}_{t\alpha}\Delta x^\alpha \\
Q_{ret} &= 3\bar{A}_{ttt}\Delta t_{1,ret}^2 + (6\bar{A}_{tt\alpha} - 2\bar{g}_{tt,\alpha})\Delta t_{1,ret}\Delta x^\alpha \\
&\quad + (3\bar{A}_{t\alpha\beta} - 2\bar{g}_{t\alpha,\beta})\Delta x^\alpha\Delta x^\beta + 2\bar{g}_{tt}\Delta t_{2,ret} \\
R_{ret} &= 4\bar{B}_{tttt}\Delta t_{1,ret}^3 + (12\bar{B}_{ttt\alpha} - 3\bar{A}_{ttt,\alpha})\Delta t_{1,ret}^2\Delta x^\alpha \\
&\quad + (12\bar{B}_{tt\alpha\beta} - 6\bar{A}_{tt\alpha,\beta} + \bar{g}_{tt,\alpha\beta})\Delta t_{1,ret}\Delta x^\alpha\Delta x^\beta \\
&\quad + (4\bar{B}_{t\alpha\beta\gamma} - 3\bar{A}_{t\alpha\beta,\gamma} + \bar{g}_{t\alpha,\beta\gamma})\Delta x^\alpha\Delta x^\beta\Delta x^\gamma \\
&\quad + 6\bar{A}_{ttt}\Delta t_{1,ret}\Delta t_{2,ret} + (6\bar{A}_{tt\alpha} - 2\bar{g}_{tt,\alpha})\Delta t_{2,ret}\Delta x^\alpha \\
&\quad + 2\bar{g}_{tt}\Delta t_{3,ret}. \tag{6.2.39}
\end{aligned}$$

Substituindo Δt_{ret} por Δt_{adv} na Eqs.(6.2.39), obtemos P_{adv} , Q_{adv} e R_{adv} .

Vamos considerar a expressão para a auto força sobre uma partícula estática em um espaço-tempo estacionário [50]

$$\begin{aligned}
f_a^{SF} &= q^2 \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \nabla_a \left[\frac{4\pi}{u^{\bar{t}}} G_{w=0}^{(3)}(x, \bar{x}) - \frac{\Delta^{1/2}(x, x')}{2r_{ret}} - \frac{\Delta^{1/2}(x, x'')}{2r_{adv}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\tau_{ret}}^{\tau_{adv}} V(x, \bar{x}(\tau)) d\tau \right]. \tag{6.2.40}
\end{aligned}$$

Para o campo sem massa os bitensores na Eq.(6.2.40) são dados por

$$\Delta^{1/2}(x, \bar{x}) = 1 + O(\Delta x^4) \quad V(x, \bar{x}) = O(\Delta x^2). \tag{6.2.41}$$

Substituindo as Eqs.(6.2.37), (6.2.38) e Eq.(6.2.41) na Eq.(6.2.40), obtemos a auto força sobre uma carga escalar estática (sem massa) em um espaço-tempo estacionário

$$f_a^{SF} = 4\pi q^2 \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \left[\sqrt{-\bar{g}_{tt}} \nabla_a \left(G_{w=0}^{(3)}(x, \bar{x}) - G_{sing}(x, \bar{x}) \right) \right]. \tag{6.2.42}$$

onde

$$\begin{aligned}
G_{sing}(x, \bar{x}) &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{P_{ret}} - \frac{1}{P_{adv}} - \frac{Q_{ret}}{P_{ret}^2} + \frac{Q_{adv}}{P_{adv}^2} + \frac{(Q_{ret}^2 - P_{ret}R_{ret})}{P_{ret}^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(Q_{adv}^2 - P_{adv}R_{adv})}{P_{adv}^3} \right]. \tag{6.2.43}
\end{aligned}$$

Vamos usar a Eq.(6.2.42) para obter a componente ϕ da auto força agindo sobre uma carga escalar estática (sem massa) no espaço-tempo de Kerr subtraído. A função de Green para a variação $\Delta\phi$ tem a forma

$$G_{static}^{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \Delta\phi) = \frac{b}{4\pi \bar{X}} \frac{1}{\sinh \left[\frac{b}{a} (\psi_0 - \Delta\phi) \right] - ab \sin^2 \bar{\theta} \sin \psi_0}. \quad (6.2.44)$$

Para um pequeno $\Delta\phi$, a expansão em série da função de Green é dada por

$$\begin{aligned} G_{static}^{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \Delta\phi) = & \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\bar{X}^{1/2} \sin \bar{\theta} \Delta\phi} + \frac{\Delta\phi}{24\bar{X}^{1/2}(\bar{X} - a^2 \sin^2 \bar{\theta})^3} \right. \\ & \{ \bar{X}^3 \csc \bar{\theta} - 3\bar{X}^2 \sin \bar{\theta} (M^2 + a^2) - 8aM^2 \bar{X}^{3/2} \times \\ & \times \sin^2 \bar{\theta} - 3a^2 \bar{X} \sin^3 \bar{\theta} (2M^2 - a^2) + a^4 b^2 \sin^5 \bar{\theta} \} \\ & \left. + O(\Delta\phi^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.45)$$

A expansão em série para o campo singular é

$$\begin{aligned} G_{sing}^{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \Delta\phi) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\bar{X}^{1/2} \sin \bar{\theta} \Delta\phi} - \frac{\Delta\phi}{(a^2 + \csc^2 \bar{\theta} (\bar{r}^2 - \bar{X}))^2} \times \right. \\ & \times \frac{1}{192(a^2 - \csc^2 \bar{\theta} \bar{X})^3 \bar{X}^{1/2}} \left[\csc^5 \bar{\theta} \left(a^4 \left(-63a^6 + 3a^4(9M^2 \right. \right. \right. \\ & + 96M\bar{r} - 28\bar{r}^2) + 32M\bar{r}^2(5M^3 - 3M\bar{r}^2 + \bar{r}^3) - 8a^2\bar{r}(16M^3 \\ & + 43M^2\bar{r} - 29M\bar{r}^2 + 3\bar{r}^3) - 4a^2(4a^4 - a^2(3M - \bar{r})(3M + \bar{r}) \\ & \left. \left. \left. + 2M\bar{r}(4M^2 - 3M\bar{r} + \bar{r}^2) \right) \cos 2\bar{\theta} + a^4(M^2 - a^2) \cos 4\bar{\theta} \right) \right. \\ & + 8 \csc^2 \bar{\theta} \bar{X} \left(a^2(10a^6 - 2a^4(M^2 + 23M\bar{r} - 4\bar{r}^2) + a^2\bar{r}(8M^3 \right. \\ & + 66M^2\bar{r} - 28M\bar{r}^2 + \bar{r}^3) - 2M\bar{r}^2(4M^3 + 14M^2\bar{r} - 11M\bar{r}^2 \\ & + 3\bar{r}^3) + \csc^2 \bar{\theta} \bar{X} \left(-5a^6 + 2a^4(12M - \bar{r})\bar{r} + 3M^2\bar{r}^3(4M - 3\bar{r}) \right. \\ & \left. \left. \left. + 2Ma^2\bar{r}^2(-17M + 4\bar{r}) + \csc^2 \bar{\theta} \bar{X} (\bar{r}^2 - \bar{X})^2 \right) \right) \right] + O(\Delta\phi^2) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.46)$$

Tomando a diferença entre as Eqs.(6.2.45) e (6.2.46), obtemos

$$\begin{aligned}
G_{static}^{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \Delta\phi) - G_{sing}^{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \Delta\phi) &= \frac{\csc \bar{\theta} \Delta\phi}{768\pi \bar{X}^{1/2}} \times \\
&\left\{ 8 - \frac{8M^2(a - 3 \csc \bar{\theta} \bar{X}^{1/2})}{(a - \csc \bar{\theta} \bar{X}^{1/2})^3} + \frac{\csc^4 \bar{\theta}}{(a^2 + \csc^2 \bar{\theta}(\bar{r}^2 - \bar{X}))^2} \times \right. \\
&\frac{1}{(a^2 - \csc^2 \bar{\theta} \bar{X})^3} \left[a^4(-63a^6 + 3a^4(9M^2 + 96M\bar{r} - 28\bar{r}^2) + 32M \times \right. \\
&\times \bar{r}^2(5M^3 - 3M\bar{r}^2 + \bar{r}^3) - 8a^2\bar{r}(16M^3 + 43M^2\bar{r} - 29M\bar{r}^2 + 3\bar{r}^3) \\
&- 4a^2(4a^4 - a^2(3M - \bar{r})(3\bar{r} + M) + 2M\bar{r}(4M^2 - 3M\bar{r} + \bar{r}^2)) \times \\
&\times \cos 2\bar{\theta} + a^4 \cos 4\bar{\theta}(M^2 - a^2)) + 8 \csc^2 \bar{\theta} \bar{X}(a^2(10a^6 - 2a^4(M^2 + \\
&+ 23M\bar{r} - 4\bar{r}^2) + a^2\bar{r}(8M^3 + 66M^2\bar{r} - 28M\bar{r}^2 + \bar{r}^3) - 2M\bar{r}^2 \times \\
&(4M^3 + 14M^2\bar{r} - 11M\bar{r}^2 + 3\bar{r}^3)) + \csc^2 \bar{\theta} \bar{X}(-5a^6 + 2a^4\bar{r}(12M - \bar{r}) \\
&+ 3M^2\bar{r}^3(4M - 3\bar{r}) + 2Ma^2\bar{r}^2(4\bar{r} - 17M) + \csc^2 \bar{\theta} \bar{X}(\bar{r}^2 - \bar{X})^2)) \left. \right] \left. \right\} \\
&+ O(\Delta\phi^2). \tag{6.2.47}
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq.(6.2.47) na Eq.(6.2.42) para a componente ϕ da auto força

$$f_{\phi}^{SF} = 4\pi q^2 \lim_{\phi \rightarrow \bar{\phi}} \left[\sqrt{-\bar{g}_{tt}} \partial_{\phi} \left(G_{static}^{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \Delta\phi) - G_{sing}^{\phi}(\bar{r}, \bar{\theta}, \Delta\phi) \right) \right], \tag{6.2.48}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
f_{\phi}^{SF} &= \frac{q^2 \csc \bar{\theta}}{192} \sqrt{\frac{\bar{G}}{2\bar{X}M\sqrt{\bar{r}^2 - \bar{G}}}} \left\{ 8 - \frac{8M^2(a - 3 \csc \bar{\theta} \bar{X}^{1/2})}{(a - \csc \bar{\theta} \bar{X}^{1/2})^3} \right. \\
&+ \frac{\csc^4 \bar{\theta}}{(a^2 + \csc^2 \bar{\theta}(\bar{r}^2 - \bar{X}))^2 (a^2 - \csc^2 \bar{\theta} \bar{X})^3} \left[a^4(-63a^6 + 3a^4 \times \right. \\
&\times (9M^2 + 96M\bar{r} - 28\bar{r}^2) - 8a^2\bar{r}(16M^3 + 43M^2\bar{r} - 29M\bar{r}^2 \\
&+ 3\bar{r}^3) + \cos 4\bar{\theta} a^4(M^2 - a^2) - 4a^2 \cos 2\bar{\theta}(4a^4 - a^2(3M - \bar{r}) \times \\
&\times (M + 3\bar{r}) + 2M\bar{r}(4M^2 - 3M\bar{r} + \bar{r}^2)) + 32M\bar{r}^2(5M^3 \\
&- 3M\bar{r}^2 + \bar{r}^3)) + 8 \csc^2 \bar{\theta} \bar{X}(a^2(10a^6 - 2a^4(M^2 + 23M\bar{r} - 4\bar{r}^2) \\
&+ a^2\bar{r}(8M^3 + 66M^2\bar{r} - 28M\bar{r}^2 + \bar{r}^3) - 2M\bar{r}^2(4M^3 + 14M^2\bar{r} \\
&- 11M\bar{r}^2 + 3\bar{r}^3)) + \csc^2 \bar{\theta} \bar{X}(-5a^6 + 2a^4\bar{r}(12M - \bar{r}) + 2Ma^2\bar{r}^2 \\
&\times (4\bar{r} - 17M) + 3M^2\bar{r}^3(4M - 3\bar{r}) + \bar{X} \csc^2 \bar{\theta}(\bar{r}^2 - \bar{X})^2)) \left. \right] \left. \right\}. \tag{6.2.49}
\end{aligned}$$

Assim, a única componente não nula da auto força agindo sobre uma carga escalar estática (sem massa) no espaço-tempo de Kerr subtraído é dada pela Eq.(6.2.49).

Conclusões

O processo de quantização pode quebrar a simetria de escala da mecânica quântica conforme, podendo esta mesma simetria ser restaurada a partir da escolha de um estado misto adequado que, por sua vez, está associado à entropia de von Neumann. Essa quebra de simetria acontece quando o domínio da Hamiltoniana não é preservado pela ação do operador dilatação [47]. Em nossa discussão estabelecemos uma conexão entre a entropia de von Neumann e o processo de restauração da simetria de escala da mecânica quântica conforme.

Na relatividade geral o movimento de um pequeno objeto é descrito por uma geodésica e, portanto, as correções impostas ao movimento geodésico devido a ação da auto-força devem ser considerados [17]. Neste trabalho, reproduzimos o resultado analítico de Ottewil e Taylor [50] para a auto-força que age sobre uma carga escalar estática no espaço-tempo de Kerr e obtemos a Eq.(6.2.49) para a auto-força agindo sobre uma carga escalar estática no espaço-tempo de Kerr subtraído.

Apêndice A

Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Minkowski

O diagrama conforme é uma representação padrão do espaço-tempo onde as propriedades globais e a estrutura causal estão codificadas. A estrutura causal é definida pelo cone-de-luz sobre o diagrama do espaço-tempo e estabelece a relação entre o passado e o futuro de um evento.

A construção do diagrama conforme, também conhecido como diagrama de Penrose, consiste em considerar um sistema de coordenadas na qual a métrica de interesse está conformalmente relacionada com a métrica cuja estrutura do cone-de-luz é conhecida.

A métrica de Minkowski nas coordenadas polares é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (\text{A.2})$$

Inicialmente, vamos considerar a transformação de escala

$$\tilde{t} = \text{arctg } t, \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{r} = \text{arctg } r, \quad (\text{A.4})$$

Em termos de (\tilde{t}, \tilde{r}) , a métrica de Minkowski torna-se

$$ds^2 = -\frac{1}{\cos^4 \tilde{t}} d\tilde{t}^2 + \frac{1}{\cos^4 \tilde{r}} d\tilde{r}^2 + \tan^2 \tilde{r} d\Omega^2, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$-\frac{\pi}{2} < \tilde{t} < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \tilde{r} < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Uma vez que

$$\frac{d\tilde{t}}{d\tilde{r}} = \pm \frac{\cos^2 \tilde{t}}{\cos^2 \tilde{r}}, \quad (\text{A.7})$$

a região de propagação dos raios de luz não é evidente.

Para contornar os problemas encontrados nas coordenadas (t, r) e (\tilde{t}, \tilde{r}) , vamos considerar o sistema de coordenadas tipo-luz

$$u = t - r, \quad (\text{A.8})$$

$$v = t + r, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty, \quad u \leq v. \quad (\text{A.10})$$

Para cada ponto no gráfico, onde as curvas radiais tipo-luz são representadas, temos uma 2-esfera de raio

$$r = \frac{1}{2}(v - u). \quad (\text{A.11})$$

A métrica de Minkowski nas coordenadas (u, v) torna-se

$$ds^2 = -\frac{1}{2}(dudv + dvdu) + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2. \quad (\text{A.12})$$

O objetivo principal na construção do diagrama de Penrose é obter a métrica na forma conforme “mapeando o infinito” em valores finitos das coordenadas. Isto é realizado através da transformação

$$U = \text{arctg } u, \quad V = \text{arctg } v, \quad (\text{A.13})$$

onde

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2}, \quad U \leq V. \quad (\text{A.14})$$

A métrica nessas coordenadas tem a forma

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 U \cos^2 V} [-2(dU dV + dV dU) + \sin^2(V - U) d\Omega^2], \quad (\text{A.15})$$

onde notamos que, em princípio, o objetivo principal foi alcançado. A Eq.(A.15) está escrita em termos de dois pares de coordenadas tipo-luz e tipo-espaço. Por conveniência, implementando a transformação de coordenadas

$$T = V + U, \quad 0 \leq R < \pi, \quad (\text{A.16})$$

$$R = V - U, \quad |T| + R < \pi, \quad (\text{A.17})$$

obtemos a Eq.(A.15) em termos de uma coordenada tipo-tempo e três coordenadas tipo-espaço

$$ds^2 = \frac{1}{\omega^2(T, R)} (-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2), \quad (\text{A.18})$$

onde

$$\omega = 2 \cos U \cos V \quad (\text{A.19})$$

$$= 2 \cos \left[\frac{T - R}{2} \right] \cos \left[\frac{T + R}{2} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$= \cos T + \cos R. \quad (\text{A.21})$$

Podemos ainda escrever a métrica conforme sobre a variedade $\mathbb{R} \times S^3$ na forma

$$\begin{aligned} \tilde{ds}^2 &= \omega^2(T, R) ds^2 \\ &= -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Esta métrica descreve um espaço-tempo com curvatura e, portanto, não é uma solução das equações de Einstein no vácuo. Essencialmente isto não é um problema tendo

em vista que o objetivo é apenas descrever o espaço-tempo de Minkowski limitado pelo “range” das coordenadas nas Eqs.(A.16) e (A.17).

O espaço-tempo de Minkowski, incluindo os infinitos, é conforme à região triangular ilustrada na Fig.(A.1), onde

$$\pi \leq T \leq -\pi, \quad 0 \leq R \leq \pi. \quad (\text{A.23})$$

A região triangular é exatamente o diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Minkowski. Neste diagrama, cada ponto representa uma 2-esfera; exceto nos pontos i^0 , i^+ e i^- . Isto pode ser visto quando $\sin^2 R = 0$ em $R = 0, \pi$, ou seja, o raio da esfera neste ponto é nulo.

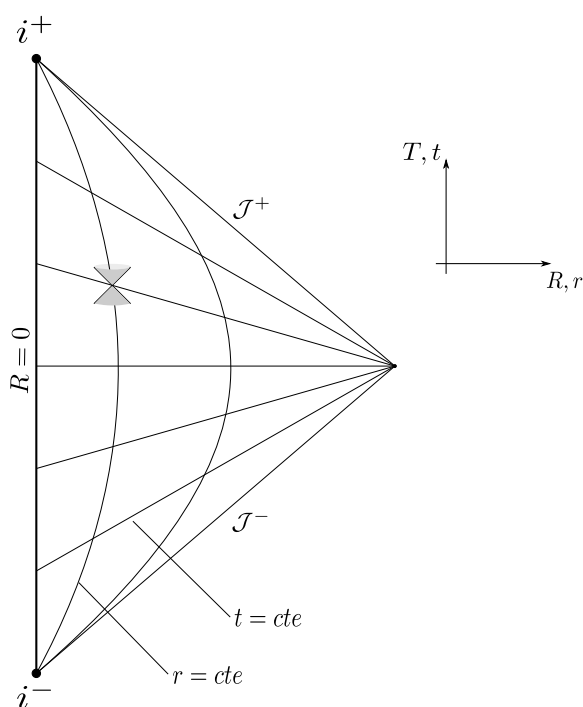


Figura A.1: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Minkowski.

Os infinitos conformes no diagrama de Penrose podem ser classificados da seguinte forma:

- i^+ = Infinito tipo-tempo futuro ($T = \pi, R = 0$);
- i^- = Infinito tipo-tempo passado ($T = -\pi, R = 0$);

- i^0 = Infinito tipo-espaço ($T = 0, R = \pi$);
- \mathfrak{S}^+ = Infinito tipo-luz futuro ($T = \pi - R, 0 < R < \pi$);
- \mathfrak{S}^- = Infinito tipo-luz passado ($T = -\pi - R, 0 < R < \pi$).

O diagrama conforme apresenta algumas características importantes que devem ser destacadas:

- As geodésicas tipo-luz (radiais) são as curvas em $\pm 45^\circ$ no diagrama;
- As geodésicas tipo-tempo começam em i^- e terminam em i^+ ;
- Geodésicas tipo-luz começam em \mathfrak{S}^- e terminam em \mathfrak{S}^+ ;
- Todas as geodésicas tipo-espaço começam e terminam em i^0 ;
- Existem curvas tipo-tempo que terminam no infinito tipo-luz, desde que sejam assintoticamente tipo-luz (curvas de aceleração constante).

Apêndice B

Hamiltoniana gravitacional

A Hamiltoniana gravitacional (H_G) é definida por integrais de fronteira e expressa pela equação

$$H_G = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_t} [N(k - k_0) - N_a(K^{ab} - Kh^{ab})r_b] \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (\text{B.1})$$

onde

- $k = \sigma^{AB}k_{AB}$ é a curvatura extrínseca da fronteira S_t incorporada na hipersuperfície tipo-espaço Σ_t ;
- k_0 curvatura extrínseca da fronteira S_t incorporada ao espaço-tempo plano;
- σ determinante da métrica induzida sobre a fronteira S_t ;
- K^{ab} curvatura extrínseca da hipersuperfície Σ_t ;
- h_{ab} métrica induzida sobre a hipersuperfície Σ_t ;
- N^a vetor shift;
- N função lapse.

H_G depende do comportamento assintótico das quantidades Σ_t , N e N_a . Assintoticamente, a função lapse e o vetor shift são sempre arbitrários, enquanto a hipersuperfície é sempre tipo-espaço. Este comportamento assintótico da hipersuperfície

está relacionado ao comportamento assintótico do espaço-tempo de Minkowski. Para mostrar que a Hamiltoniana gravitacional pode ser vista como uma função de N e N_a , ou do vetor de fluxo t^α , vamos exigir que o comportamento assintótico de uma porção de Σ_t coincida com uma superfície de $t = \text{constante}$. Considere um referencial de Lorentz no infinito (t, x, y, z) . As coordenadas y^a da porção de Σ_t , assintoticamente, estão relacionadas com as coordenadas espaciais de Minkowski

$$y^a \rightarrow y^a(x, y, z), \quad (\text{B.2})$$

e, da mesma forma

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha(t, x, y, z), \quad (\text{B.3})$$

onde t é o tempo próprio medido pelo observador em repouso na região assintótica. Em relação ao referencial de Lorentz, o observador está se deslocando com uma quadravelocidade

$$u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}. \quad (\text{B.4})$$

Uma vez que u^α é normalizado e ortogonal a superfície $t = \text{constante}$, o mesmo deve ser igual ao vetor normal n^α , logo

$$n^\alpha \rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}. \quad (\text{B.5})$$

e, conseqüentemente, obtemos o comportamento assintótico do vetor de fluxo

$$t^\alpha \rightarrow N \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y^a} + N^a \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t. \quad (\text{B.6})$$

Isto mostra que, uma vez que o comportamento assintótico de Σ_t é especificado, existe uma correspondência unívoca entre a escolha de (N, N^a) e do vetor de fluxo.

Fazendo $N = 1$ e $N^a = 0$ na Eq.(B.6), o vetor de fluxo torna-se

$$t^\alpha \rightarrow \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}, \quad (\text{B.7})$$

ou seja, assintoticamente, gera translações no tempo. Neste caso, a massa gravitacional, ou a massa ADM (Arnowitt, Deser e Misner) do espaço-tempo assintoticamente plano, é o limite da Hamiltoniana gravitacional quando a fronteira S_t é uma 2-esfera no infinito espacial, sendo expressa na forma

$$M = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (k - k_0) \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (\text{B.8})$$

A massa ADM pode ser interpretada como a hamiltoniana gravitacional associada ao vetor de fluxo Eq.(B.9), portanto, uma conexão formal entre energia total e translação no tempo é estabelecida.

Fazendo $N = 0$ e $N^a = \phi^a \equiv dy^a/d\phi$ na Eq.(B.6), o vetor de fluxo torna-se

$$\begin{aligned} t^\alpha &\rightarrow \phi^a \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right) \\ &\rightarrow \left(\frac{\partial y^a}{\partial \phi} \right) \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right) \\ &\rightarrow \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi} \right) \equiv \phi^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ou seja, assintoticamente, gera translação espacial (rotação). Neste caso, o momento angular do espaço-tempo assintoticamente plano, é o limite da Hamiltoniana gravitacional quando a fronteira S_t é uma 2-esfera no infinito espacial, isto é

$$J = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (K_{ab} - Kh_{ab}) \phi^a r^b \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (\text{B.10})$$

onde a regra da mão direita para o momento angular é retratada pelo uso do sinal negativo que está relacionado com a escolha do eixo de rotação.

Apêndice C

Superfície de Gravidade

Considere uma partícula de massa unitária no ponto r do espaço-tempo estático e esfericamente simétrico com métrica

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (\text{C.1})$$

Os vetores u^α e a^α são

$$u^\alpha = \frac{1}{\sqrt{f}} t^\alpha, \quad a^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha. \quad (\text{C.2})$$

A componente a^r e a magnitude da aceleração são dados por

$$a^r = \frac{1}{2} f', \quad (\text{C.3})$$

e

$$a(r) \equiv (g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta)^{1/2} \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{1}{2} f^{-1/2} f'(r). \quad (\text{C.5})$$

A força aplicada à partícula para mantê-la na posição r é dada pela Eq.(C.5). Nota-se que força diverge no limite $r \rightarrow r_+$.

Suponha que a partícula fosse mantida no ponto r por um observador no infinito usando uma corda sem massa. O mesmo ao realizar um deslocamento infinitesimal δs

produziria um trabalho $\delta W_\infty = a_\infty \delta s$. Vamos supor que o trabalho seja convertido em radiação que, posteriormente, é medida no infinito. A variação da energia medida no infinito é então

$$\delta E_\infty = \sqrt{f} a \delta s, \quad (\text{C.6})$$

onde o redshift é dado por \sqrt{f} .

Da conservação de energia

$$\delta E_\infty = \delta W_\infty, \quad (\text{C.7})$$

obtemos a força aplicada pelo observador localizado no infinito

$$\begin{aligned} a_\infty(r) &= \sqrt{f} a(r) \\ &= \frac{1}{2} f'(r), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

sendo $a_\infty(r)$ regular no limite $r \rightarrow r_+$.

Portanto, a superfície de gravidade é definida como sendo a força exercida por um observador, estando no infinito, para manter uma partícula estacionária no horizonte, ou seja

$$\begin{aligned} \kappa &\equiv a_\infty(r_+) \\ &= \frac{1}{2} f'(r_+). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

A superfície de gravidade pode ser expressa em termos dos vetores de Killing. Quando o espaço-tempo é estático, o horizonte de eventos é um horizonte de Killing. Neste caso, um vetor t^α tangencia os geradores tipo-luz do horizonte. Sendo este vetor ortogonal a si mesmo no horizonte, o mesmo também é normal a esta superfície.

Vamos considerar a seguinte definição

$$\Phi \equiv -t^\alpha t_\alpha = 0, \quad (\text{C.10})$$

de modo que

$$\nabla_\alpha (-t^\nu t_\nu) = 2\kappa t_\alpha, \quad (\text{C.11})$$

onde usamos o fato de que o vetor normal é proporcional a $\partial_\alpha\Phi$ e, portanto, deve existir um escalar κ no horizonte de eventos.

Considerando as coordenadas (v, r) no horizonte de eventos, temos

$$\partial_v = t^\alpha \partial_\alpha, \quad dr = t_\alpha dx^\alpha. \quad (\text{C.12})$$

Para $\Phi = -g_{vv} = f$, obtemos a Eq.(C.11) na forma

$$\partial_\alpha\Phi = f' \partial_\alpha r, \quad (\text{C.13})$$

com

$$\kappa = \frac{1}{2} f'(r_+). \quad (\text{C.14})$$

Nota-se a partir deste procedimento que os geradores tipo-luz do horizonte são parametrizados por v .

Uma consequência imediata da Eq.(C.11) e da equação de Killing é que o vetor t^α deve satisfazer a equação geodésica em $r = r_+$. Logo

$$t^\beta \nabla_\beta t^\alpha = \kappa t^\alpha \quad (\text{C.15})$$

sobre o horizonte e, portanto, o parâmetro v não é um parâmetro afim dos geradores.

Um parâmetro afim pode ser obtido pela integração da equação

$$\frac{d\lambda}{dv} = e^{\kappa v}. \quad (\text{C.16})$$

Neste caso, teremos

$$\lambda = \frac{V}{\kappa}, \quad (\text{C.17})$$

onde

$$V \equiv e^{\kappa v}, \quad (\text{C.18})$$

é uma coordenada de Kruskal. Portanto, o vetor tipo-luz

$$k^\alpha = \frac{1}{V} t^\alpha, \quad (\text{C.19})$$

satisfaz a equação geodésica com um parâmetro afim.

Vamos obter uma forma explícita para a superfície de gravidade considerando que a congruência dos geradores tipo-luz é necessariamente uma hipersuperfície ortogonal. Neste sentido, o teorema de Frobenius garante que

$$t_{[\alpha}\nabla_{\beta}t_{\gamma]} = 0 \quad (\text{C.20})$$

é satisfeito no horizonte. Usando a equação de Killing, temos

$$t_{\alpha}\nabla_{\beta}t_{\gamma} + t_{\gamma}\nabla_{\alpha}t_{\beta} + t_{\beta}\nabla_{\gamma}t_{\alpha} = 0. \quad (\text{C.21})$$

Fazendo a contração com $\nabla^{\beta}t^{\alpha}$

$$(\nabla^{\beta}t^{\alpha})(\nabla_{\beta}t_{\alpha})t_{\gamma} = -(\nabla_{\alpha}t_{\gamma})(\nabla_{\beta}t^{\alpha})t^{\beta} + (\nabla_{\gamma}t_{\beta})(\nabla_{\alpha}t^{\beta})t^{\alpha} \quad (\text{C.22})$$

$$= -\kappa(\nabla_{\alpha}t_{\gamma})t^{\alpha} + \kappa(\nabla_{\gamma}t_{\beta})t^{\beta} \quad (\text{C.23})$$

$$= -2\kappa^2t_{\gamma}, \quad (\text{C.24})$$

obtemos a expressão [2]

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^{\beta}t^{\alpha})(\nabla_{\beta}t_{\alpha}). \quad (\text{C.25})$$

As Eqs.(C.11), (C.15) e (C.25) são equivalentes.

Apêndice D

Fórmula de Komar

A definição de massa e momento angular no formalismo hamiltoniano não envolve uma escolha específica de coordenadas. Para espaços-tempo estacionários e axialmente simétricos, as fórmulas de Komar são definições alternativa de massa e momento angular que compartilham da mesma propriedade. Segundo está definição, temos

$$M_{\text{Komar}} = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \nabla^\alpha \xi_t^\beta dS_{\alpha\beta}, \quad (\text{D.1})$$

e

$$J_{\text{Komar}} = \frac{1}{16\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} \nabla^\alpha \xi_\phi^\beta dS_{\alpha\beta}, \quad (\text{D.2})$$

onde ξ_t^β e ξ_ϕ^β são vetores de Killing tipo-tempo e tipo-espaço, respectivamente [1, 2, 3].

O elemento de superfície é dado por

$$dS_{\alpha\beta} = -2n_{[\alpha} r_{\beta]} \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (\text{D.3})$$

onde n_α (tipo-tempo) e r_α (tipo-espaço) são vetores normais a superfície S_t (fronteira da hipersuperfície Σ_t).

Para mostrar que as fórmulas de Komar implicam em $M_{\text{Komar}} = m$ e $J_{\text{Komar}} = j$, devemos provar que no espaço-tempo com métrica Eq.(1.3.93) as expressões

$$-2\nabla^\alpha \xi_t^\beta n_\alpha r_\beta = -\frac{2m}{r^2} = k - k_0 \quad (\text{D.4})$$

e

$$\nabla^\alpha \xi_\phi^\beta n_\alpha r_\beta = K_{ab} \phi^a r^b \quad (\text{D.5})$$

se mantêm válidas assintoticamente, ou seja, no limite $r \rightarrow \infty$. De fato, isto acontece, como podemos verificar em

$$\begin{aligned} -2\nabla^\alpha \xi_t^\beta n_\alpha r_\beta &= 2\nabla_\beta \xi_t^\alpha n_\alpha r^\beta \\ &= 2\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha n_\alpha r^\beta \xi_t^\gamma \\ &= -2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \Gamma_{rt}^t \\ &= -\frac{2m}{r^2} \\ &= k - k_0 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \xi_\phi^\beta n_\alpha r_\beta &= -\nabla_\beta \xi_\phi^\alpha n_\alpha r^\beta \\ &= \xi_\phi^\alpha (\nabla_\beta n_\alpha) r^\beta \\ &= \nabla_\beta n_\alpha (\phi^a e_a^\alpha) (r^b e_b^\beta) \\ &= (e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\beta n_\alpha) \phi^a r^b \\ &= K_{ab} \phi^a r^b. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Usando o teorema de Stokes, a fórmula de Komar pode ser escrita na forma

$$\oint_S B^{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} = 2 \int_\Sigma \nabla_\beta B^{\alpha\beta} d\Sigma_\alpha, \quad (\text{D.8})$$

onde S é a fronteira bidimensional de uma hipersuperfície Σ . O teorema de Stokes pode ser usado porque o tensor

$$B^{\alpha\beta} = \nabla^\alpha \xi^\beta \quad (\text{D.9})$$

é necessariamente antissimétrico (isso acontece apenas quando ξ^α é um vetor de Kil-

ling). Neste caso, temos

$$\begin{aligned}\nabla_\beta B^{\alpha\beta} &= \nabla_\beta(\nabla^\alpha \xi^\beta) \\ &= -\nabla_\beta(\nabla^\beta \xi^\alpha) \\ &= -\square \xi^\alpha,\end{aligned}$$

onde

$$\square \equiv \nabla_\beta \nabla^\beta. \quad (\text{D.10})$$

Uma vez que os vetores de Killing satisfazem a relação

$$\square \xi^\alpha = -R^\alpha{}_\beta \xi^\beta, \quad (\text{D.11})$$

podemos escrever

$$\oint_S \nabla^\alpha \xi^\beta dS_{\alpha\beta} = 2 \int_\Sigma R^\alpha{}_\beta \xi^\beta d\Sigma_\alpha. \quad (\text{D.12})$$

Tendo em vista que a hipersuperfície Σ é tipo-espaço, temos

$$d\Sigma_\alpha = -n_\alpha \sqrt{h} d^3y. \quad (\text{D.13})$$

Usando as equações de campo de Einstein, podemos escrever

$$\oint_S \nabla^\alpha \xi^\beta dS_{\alpha\beta} = -16\pi \int_\Sigma \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) n^\alpha \xi^\beta \sqrt{h} d^3y. \quad (\text{D.14})$$

Logo, combinando as Eqs.(D.1) e (D.2) temos

$$M_{\text{Komar}} = 2 \int_\Sigma \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) n^\alpha \xi_t^\beta \sqrt{h} d^3y \quad (\text{D.15})$$

e

$$J_{\text{Komar}} = - \int_\Sigma \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) n^\alpha \xi_\phi^\beta \sqrt{h} d^3y, \quad (\text{D.16})$$

onde Σ é qualquer hipersuperfície tipo-espaço que se estende ao infinito espacial. Para uma hipersuperfície com duas fronteiras, um termo extra devido a fronteira interna é adicionado ao lado direito das Eqs.(D.15) e (E.2). Isto acontece quando o espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico contém um buraco negro. As quantidades M_{Komar} e J_{Komar} são definidas como integrais de hipersuperfície apenas quando o espaço-tempo é estacionário e axialmente simétrico [1, 2, 3].

Apêndice E

Termodinâmica de Buraco Negro

Segundo Stephen Hawking, os processos quânticos são os responsáveis pelo surgimento da radiação (fluxo termal de partículas) proveniente do buraco negro. Esta descoberta mostra que de fato um buraco negro comporta-se como um sistema termodinâmico. Na primeira parte desta seção, demonstramos a fórmula de Smarr. No que segue, estudamos a analogia entre as leis da mecânica de buracos negros e as leis da termodinâmica.

E.1 Formula de Smarr

A fórmula de Smarr generalizada relaciona a massa do buraco negro com as grandezas: momento angular, velocidade angular, superfície de gravidade e área do horizonte de eventos. Na obtenção desta fórmula, inicialmente, consideramos as expressões da massa e do momento angular obtidas a partir da fórmula de Komar dada nas Eqs.(D.1) e (D.2) [1, 2, 3]. Sendo assim, temos

$$M_{\text{Komar}} = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) n^{\alpha} t^{\beta} \sqrt{h} d^3 y, \quad (\text{E.1})$$

$$J_{\text{Komar}} = - \int_{\Sigma} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) n^{\alpha} \phi^{\beta} \sqrt{h} d^3 y. \quad (\text{E.2})$$

Na definição da massa e do momento angular do buraco negro, devemos considerar

uma hipersuperfície do tipo-espaço (Σ) que se estende do horizonte de eventos (\mathcal{H}) até o infinito i^0 (tipo-espaço), como mostra a Fig.(E.1).

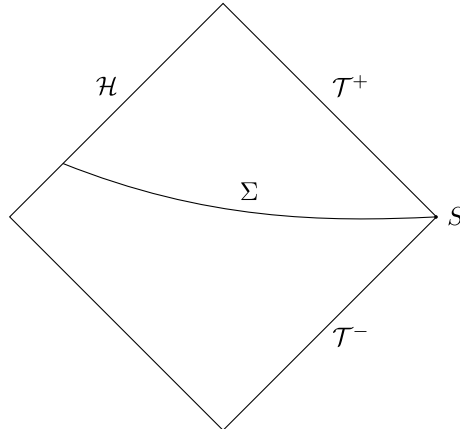


Figura E.1: Uma hipersuperfície (Σ) no espaço-tempo de um buraco negro. \mathcal{H} é a fronteira interna dado por uma seção bidimensional do horizonte de eventos e S é a fronteira externa.

A partir dessas considerações, tanto a massa quanto o momento angular do buraco negro podem ser expressados em termos das integrais de superfície

$$M_{\text{hor}} = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{H}} \nabla^{\alpha} t^{\beta} dS_{\alpha\beta}, \quad (\text{E.3})$$

$$J_{\text{hor}} = \frac{1}{16\pi} \oint_{\mathcal{H}} \nabla^{\alpha} \phi^{\beta} dS_{\alpha\beta}, \quad (\text{E.4})$$

onde o elemento de superfície é dado por

$$dS_{\alpha\beta} = 2\xi_{[\alpha} N_{\beta]} dS, \quad (\text{E.5})$$

com $dS = \sqrt{\sigma} d^2\theta$ e N^{α} sendo um vetor do tipo-luz normalizado pela relação $N_{\alpha}\xi^{\alpha} = -1$. Assim, a massa e o momento angular total são determinados somando as contribuições provenientes do buraco negro ($M_{\text{hor}}, J_{\text{hor}}$) e da distribuição de matéria ($M_{\text{Komar}}, J_{\text{Komar}}$), isto é

$$M = M_{\text{hor}} + M_{\text{Komar}}, \quad (\text{E.6})$$

$$J = J_{\text{hor}} + J_{\text{Komar}}. \quad (\text{E.7})$$

Para demonstrar a fórmula de Smarr devemos realizar alguns procedimentos. Primeiramente, fazemos

$$\begin{aligned} M_{\text{hor}} - 2\Omega_{\text{hor}}J_{\text{hor}} &= -\frac{1}{8\pi} \left(\oint_{\mathcal{H}} \nabla^\alpha t^\beta dS_{\alpha\beta} + \Omega_{\text{hor}} \oint_{\mathcal{H}} \nabla^\alpha \phi^\beta dS_{\alpha\beta} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{H}} \nabla^\alpha (t^\beta + \Omega_{\text{hor}}\phi^\beta) dS_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Substituindo o vetor de Killing

$$\xi^\beta = t^\beta + \Omega_{\text{hor}}\phi^\beta, \quad (\text{E.9})$$

na Eq.(E.8), chegamos a relação

$$\tilde{M} = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{H}} \nabla^\alpha \xi^\beta dS_{\alpha\beta}, \quad (\text{E.10})$$

com $\tilde{M} \equiv M_{\text{hor}} - 2\Omega_{\text{hor}}J_{\text{hor}}$. Usando a equação que define o elemento de superfície na Eq.(E.5), escrevemos a Eq.(E.10) na forma

$$\tilde{M} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{H}} \xi^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha N_\alpha dS, \quad (\text{E.11})$$

e considerando a definição da superfície de gravidade do buraco negro

$$\xi^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = \kappa \xi^\alpha, \quad (\text{E.12})$$

escrevemos a Eq.(E.11) em termos dessa grandeza

$$\tilde{M} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{H}} \kappa \xi^\alpha N_\alpha dS. \quad (\text{E.13})$$

Uma vez que κ é constante sobre o horizonte (\mathcal{H}) e que $\xi^\alpha N_\alpha = -1$, temos

$$\tilde{M} = \frac{\kappa}{4\pi} \oint_{\mathcal{H}} dS. \quad (\text{E.14})$$

A integral na Eq.(E.14) fornece a área da superfície e, portanto, chegamos a expressão [2, 3, 6, 8]

$$M_{\text{hor}} = \frac{\kappa A}{4\pi} + 2\Omega_{\text{hor}}J_{\text{hor}}. \quad (\text{E.15})$$

E.2 Leis da Mecânica de Buracos Negros

Lei zero

Embora κ seja definido localmente sobre o horizonte de eventos, o mesmo sempre é constante sobre o horizonte de um buraco negro estacionário. Essa constância de κ é advinda da lei zero da termodinâmica; a temperatura é uniforme em todos os pontos de um sistema em equilíbrio térmico. O fato da superfície de gravidade ser constante está associado a propriedades especiais do horizonte de um buraco negro estacionário. Isto pode ser demonstrado assumindo que o horizonte de eventos é um horizonte de Killing, ou seja, que não existe campo vetorial tangente aos geradores (tipo-luz) do horizonte e que o buraco negro deve ser estático ou assimétrico. Empregando as equações de campo de Einstein e assumindo a analiticidade do espaço-tempo, S. Hawking mostrou que o horizonte de eventos é um horizonte de Killing e que o espaço-tempo é estático e assimétrico.

Primeira Lei

Considere duas soluções estacionárias com simetria axial contendo um fluido perfeito descrevendo uma órbita circular em torno de um buraco negro. Ambas as soluções estão relacionadas pela Eq.(E.15). As quantidades $\kappa/(4\pi)$ e A são análogas às grandezas, temperatura e entropia, respectivamente. No entanto, deve-se enfatizar que tais quantidades são distintos da temperatura e da entropia de um buraco negro. De fato, a temperatura efetiva de um buraco negro é o zero absoluto. Isso é visto ao notarmos que a uma temperatura diferente zero, o equilíbrio térmico entre o buraco negro e a radiação de corpo negro não é estabelecido; isto acontece pelo fato de que a radiação não pode ser emitida pelo buraco negro mas parte da radiação pode ser absorvida pelo mesmo através do horizonte de eventos.

Para um comprimento de onda da radiação considerável, o que corresponderia ao corpo negro a baixas temperaturas, a taxa de absorção da radiação seria lenta e o equilíbrio seria possível apenas na ausência de radiação. Isto corresponderia ao corpo

negro com temperatura nula.

A temperatura efetiva *red shifted* de um objeto (matéria) orbitando um buraco negro tende a zero nas proximidades do horizonte de eventos, uma vez que, o fator de dilatação no tempo, $(-u^\mu u_\mu)^{1/2}$, tende a zero próximo a está superfície. Esta percepção implica em duas maneira diferentes de entender o porque da temperatura nula de um buraco negro. Devido a esta propriedade, pode-se em princípio adicionar entropia a um buraco negro sem alterar suas características. Neste sentido, um buraco negro se sobrepõe à segunda lei da termodinâmica. Na prática, a adição de entropia resultaria em aumento na área do horizonte de eventos. Portanto, podemos supor que adicionando algum múltiplo da área à entropia total de toda a matéria exterior ao buraco negro obteríamos uma quantidade que nunca decresce. No entanto, isto não é possível tendo em vista que o aumento na área, em virtude da adição de entropia, é arbitrariamente pequeno.

Segunda Lei

A segunda lei da mecânica de buraco negro afirma que a área do horizonte de eventos nunca diminui, isto é

$$\delta A \geq 0. \tag{E.1}$$

Esta afirmação constitui o teorema da área que foi formulado por Stephen Hawking em 1971. De acordo com este teorema, no colapso de dois buracos negros, a área do horizonte de eventos após o colapso é maior que a soma das áreas dos horizontes iniciais

$$A_3 > A_1 + A_2. \tag{E.2}$$

Assim, esta lei estabelece a analogia entre a área do horizonte de eventos e a entropia. A segunda lei da mecânica de buracos negros é mais forte que a correspondente lei da termodinâmica, no sentido que, no último caso a entropia pode ser transferida de um sistema para outro exigindo apenas que a energia total não diminua. No caso

de um buraco negro, no entanto, a área não pode ser transferida de um buraco negro para outro. Portanto, a segunda lei da mecânica de buracos exige que a área de um buraco negro não decresça.

Terceira Lei

É impossível anular κ considerando uma sequência finita de operações. Uma diferença importante entre a formulação desta lei e das demais leis reside na ausência de uma demonstração rigorosamente matemática para a mesma. No entanto, existem razões para acreditar que esta lei é válida. Por exemplo, no caso de um buraco negro de Kerr, se tentarmos reduzir o valor de κ pela adição de partículas, aumentando o momento angular, encontraríamos que a variação (diminuição) da superfície de gravidade seria cada vez menor, com a massa e o momento angular tendendo a um raio crítico $J/M^2 = 1$, para os quais teríamos $\kappa = 0$. Existem processos de acreção idealizados no qual $J/M^2 \rightarrow 1$ com a adição de uma quantidade finita de massa de repouso. Esses processos exigem uma divisibilidade infinita da matéria e um tempo infinito.

Outro ponto importante que nos leva a acreditar na terceira lei é que se pudéssemos κ a zero por uma sequência finita de operações, então poderíamos levar ainda mais o processo, assim criando uma singularidade nua. Se isso acontecesse, seria uma quebra da suposição de previsibilidade assintótica que é a base de muitos resultados em teoria de buraco negro, incluindo a lei que diz que a área não decresce..

Apêndice F

Extensão Auto-Adjunta

Na mecânica quântica os observáveis são representados por operadores lineares auto-adjuntos no espaço de Hilbert dos estados de um sistema em consideração [11, 12, 13]. Para operadores não-limitados (unbounded), a definição de auto-adjunto requer cuidados extras. Na busca por um extensão auto-adjunta do operador momento $P = -i\hbar D$, consideramos o seguinte domínio (condição de contorno)

$$\mathcal{D}(P) = \{\phi, \phi' \in \mathcal{L}^2([0, L]); \phi(0) = \phi(L) = 0\}. \quad (\text{F.1})$$

Agora, observando a identidade

$$(\psi, -i\hbar D\phi) - (-i\hbar D\psi, \phi) = -i\hbar[\bar{\psi}(L)\phi(L) - \bar{\psi}(0)\phi(0)] \quad (\text{F.2})$$

implica que P é um operador simétrico, isto é, $P = P^\dagger$. No entanto, este operador não é auto-adjunto. De fato, o domínio ou condição de contorno do operador adjunto de P é dado por

$$\mathcal{D}(P^\dagger) = \{\psi, \psi' \in \mathcal{L}^2([0, L])\}, \quad (\text{F.3})$$

que é distinto de $\mathcal{D}(P)$.

Da Eq.(F.2), vemos que o adjunto do operador $P_\lambda = -i\hbar D$ agindo sobre o subespaço de $\mathcal{L}^2([0, L])$ é o operador $P_{\lambda'}$, onde $\lambda' = 1/\bar{\lambda}$. Logo, dado um operador

diferencial simétrico agindo em um determinado espaço de funções, o mesmo não é automaticamente um operador auto-adjunto e pode ter outras extensões auto-adjuntas.

Segundo o teorema de Von Neumann para cada situação física correspondente ao espaço das coordenadas, o domínio máximo sobre a qual o operador $P = -i\hbar D$ tem uma ação bem definida será chamado $\mathcal{D}_{max}(a, b)$. Considerando o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(a, b)$ e usando as condições impostas pelo teorema de von Neumann, obtemos $\psi_{\pm}(x) = C_{\pm}e^{\mp x/d}$ como solução da equação

$$P^{\dagger}\psi_{\pm}(x) = -i\hbar D\psi_{\pm}(x) = \pm i\frac{\hbar}{d}\psi_{\pm}(x). \quad (\text{F.4})$$

Quando P está sobre o eixo real, nenhuma função $\psi_{\pm}(x)$ pertence ao espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Portanto, o operador $(P, \mathcal{D}_{max}(\mathbb{R}))$ é auto-adjunto. Agora, quando P está sobre o semi-eixo positivo, apenas as funções ψ_+ pertencem a $L^2(0, +\infty)$ e, conseqüentemente, o operador não possui extensão auto-adjunta. Por fim, para P sobre um intervalo finito, as funções $\psi_{\pm}(x) \in L^2(0, L)$ e do teorema de von Neumann sabemos que as extensões auto-adjuntas são parametrizadas pelo grupo $U(1)$.

Denotando estas extensões por $P_{\theta} = (P, \mathcal{D}_{\theta})$, temos as seguintes condições de contorno (ou domínios)

$$\mathcal{D}_{\theta} = \{\psi \in \mathcal{D}_{max}(0, L), \psi(L) = e^{i\theta}\psi(0)\}, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (\text{F.5})$$

Usando esta condição de contorno, os autovalores e autovetores são dados na forma

$$\begin{aligned} P_{\theta}\phi_n(x, \theta) &= \frac{2\pi\hbar}{L}\nu\phi_n(x, \theta), & \nu &= n + \frac{\theta}{2\pi}, & n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \phi_n(x, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{L}}\exp\left[2i\pi\nu\frac{x}{L}\right], & (\phi_m, \phi_n) &= \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Logo, qualquer medida do momento de um sistema dependerá da fase θ .

Agora, vamos analisar as extensões auto-adjuntas do Hamiltoniano $H = -D^2$ no espaço de Hilbert $L^2(a, b)$. Os índices de deficiência são obtidos a partir da equação

$$-D^2\phi(x) = \pm ik_0^2\phi(x), \quad k_0 > 0, \quad (\text{F.7})$$

com

$$\phi_{\pm} = a_{\pm}e^{k_{\pm}x} + b_{\pm}e^{-k_{\pm}x}, \quad k_{\pm} = \frac{(1 \mp i)}{\sqrt{2}}k_0. \quad (\text{F.8})$$

Para uma partícula que se move em uma dimensão sobre o eixo real, existe apenas uma extensão auto-adjunta do Hamiltoniano. Agora, vamos considerar uma partícula livre em frente a uma parede infinita em $x < 0$. No espaço de Hilbert, as soluções da Eq.(F.7) são dadas por

$$\phi_{\pm} = b_{\pm}e^{-k_0x/\sqrt{2}}e^{\pm ik_0x/\sqrt{2}}, \quad (\text{F.9})$$

Neste caso, temos infinitas extensões auto-adjuntas parametrizadas por $U(1)$. As correspondentes condições de fronteira são dadas da forma

$$(\phi'(0) - i\phi(0)) = e^{i\alpha}(\phi'(0) + i\phi(0)), \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad (\text{F.10})$$

ou ainda [5]

$$\phi(0) = \lambda\phi'(0), \quad \lambda = -\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (\text{F.11})$$

Agora, vamos analisar o espectro de energia de uma partícula confinada na região $x \geq 0$. Quando a energia da partícula é positiva, podemos calcular o coeficiente de repulsão da barreira infinita, considerando a função de onda

$$\phi(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}, \quad E = \frac{\hbar^2k^2}{2m}, \quad k > 0. \quad (\text{F.12})$$

Definindo a amplitude e a probabilidade de reflexão, respectivamente, na forma

$$r(k) = \frac{A}{B}, \quad R(k) = |r(k)|^2 \quad (\text{F.13})$$

e impondo as condições de contorno Eq.(F.11), obtemos $R = 1$. Neste caso, a onda é completamente refletida. Isto não acontece quando temos estados ligados com energia

$$E = -\frac{\hbar^2\rho^2}{2m}, \quad \rho > 0, \quad \phi(x) = Ae^{-\rho x}. \quad (\text{F.14})$$

Da Eq.(F.11) temos que $(1 + \lambda\rho)A = 0$, ou seja, existe um estado ligado com $\rho = -1/\lambda$ apenas para $\lambda < 0$ com energia e função de onda

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m\lambda^2}, \quad \lambda < 0, \quad \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{|\lambda|}} e^{-x|\lambda|}. \quad (\text{F.15})$$

Para $\lambda \geq 0$ ou $\lambda = \infty$ deve existir mais extensões possíveis [11, 12, 13].

Referências Bibliográficas

- [1] S. Carroll, *An Introduction to General Relativity spacetime and geometry*, Chicago University Press, Chicago, Illinois, (2003).
- [2] E. Poisson, *The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- [3] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago U.S.A., 1984
- [4] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., New York, 1992.
- [5] J. Plebaski and A. Krasiski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [6] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [7] D. N. Page, “Hawking radiation and black hole thermodynamics,” *New J. Phys.* **7**, 203 (2005) [hep-th/0409024].
- [8] S. F. Ross, “Black hole thermodynamics,” [hep-th/0502195].
- [9] B. C. da Cunha and A. R. de Queiroz, *Kerr-CFT From Black-Hole Thermodynamics*, *JHEP* **1008**, 076 (2010) [arXiv:1006.0510].

- [10] M. Guica, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, *The Kerr/CFT Correspondence*, Phys. Rev. D **80**, 124008 (2009) [arXiv:0809.4266].
- [11] V. S. Araujo, F. A. B. Coutinho, and J. F. Perez, *Operator domains and self-adjoint operators*, Am. J. Phys. **72**, 203-213 (2004).
- [12] A. M. Essin, D. J. Griffiths, *Quantum mechanics of the $1/x^2$ potential*, Am. J. Phys. **74**, (2006).
- [13] G. Bonneau, J. Faraut and G. Valent, *Quantum mechanics of the $1/x^2$ potential*, Am. J. Phys., Vol. 69 (2001).
- [14] S. Carlip, *The (2+1)-Dimensional black hole*, Class. Quant. Grav. **12**, 2853 (1995) [gr-qc/9506079].
- [15] J. M. Bardeen and G. T. Horowitz, *The Extreme Kerr throat geometry: A Vacuum analog of $AdS_2 \times S^2$* , Phys. Rev. D **60**, 104030 (1999) [hep-th/9905099].
- [16] N. Cavalcante, S. Diles, K. S. Gupta and A. R. de Queiroz, “Entropy from Scaling Symmetry Breaking,” Europhys. Lett. **110**, no. 4, 48002 (2015) [arXiv:1411.6648 [hep-th]].
- [17] R. M. Wald, *Introduction to Gravitational Self-Force*, Fundam. Theor. Phys. **162**, 253 (2011) [arXiv:0907.0412].
- [18] M. Cvetič and F. Larsen, *Conformal Symmetry for Black Holes in Four Dimensions*, JHEP **1209**, 076 (2012) [arXiv:1112.4846].
- [19] S. M. Carroll, *Lecture notes on general relativity*, (1997), [arXiv:gr-qc/9712019v1].
- [20] V. de Alfaro, S. Fubini and G. Furlan, “Conformal Invariance in Quantum Mechanics,” Nuovo Cim. A **34**, 569 (1976).

- [21] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, New York, 1983.
- [22] R. Tharanath and V. C. Kuriakose, *Thermodynamics and Spectroscopy of Schwarzschild black hole surrounded by Quintessence*, Mod. Phys. Lett. A **28**, 1350003 (2013) [arXiv:1301.2571].
- [23] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P. K. Townsend and A. Van Proeyen, *Black holes and superconformal mechanics*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4553 (1998) [hep-th/9804177].
- [24] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].
- [25] P. Ramond, *Group theory: A physicist's survey*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2010) 310 p
- [26] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, New York, 1981
- [27] G. 't Hooft, *Dimensional reduction in quantum gravity*, [gr-qc/9310026].
- [28] J. D. Brown and M. Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity*, Commun. Math. Phys. **104**, 207 (1986).
- [29] D. Anninos, W. Li, M. Padi, W. Song and A. Strominger, *Warped AdS(3) Black Holes*, JHEP **0903**, 130 (2009) [arXiv:0807.3040 [hep-th]].
- [30] H. Seifert and W. Threlfall: *A textbook of Topology*, Academic Press, Orlando, (1980).
- [31] M. A. Armstrong: *Basic Topology*, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [32] J. Stillwell: *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, New Your, (1980).

- [33] B. G. Carneiro da Cunha, *Three-dimensional de Sitter gravity and the correspondence*, Phys. Rev. D **65**, 104025 (2002) [arXiv:hep-th/0110169].
- [34] S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space*, Annals Phys. **152**, 220 (1984).
- [35] T. Regge and C. Teitelboim, *Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity*, Annals Phys. **88**, 286 (1974).
- [36] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, AIP Conf. Proc. **484**, 51 (1999) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)].
- [37] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Gauge theory correlators from noncritical string theory*, Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109].
- [38] A. P. Balachandran and A. R. de Queiroz, *Mixed States from Anomalies*, Phys. Rev. D **85**, 025017 (2012) [arXiv:1108.3898].
- [39] K. S. Gupta and A. de Queiroz, *Anomalies and renormalization of mixed states in quantum theories*, Mod. Phys. Lett. A **29**, no. 13, 1450064 (2014) [arXiv:1306.5570].
- [40] B. Basu-Mallick, P. K. Ghosh and K. S. Gupta, *Novel quantum states of the rational Calogero models without the confining interaction*, Nucl. Phys. B **659**, 437 (2003) [hep-th/0207040].
- [41] N. Cruz, C. Martinez and L. Pena, *Geodesic structure of the $(2+1)$ black hole*, Class. Quant. Grav. **11**, 2731 (1994) [gr-qc/9401025].
- [42] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *The Black hole in three-dimensional space-time*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992) [hep-th/9204099].

- [43] J. M. Maldacena, H. Ooguri and J. Son, *Strings in AdS_3 and the $SL(2, \mathbb{R})$ WZW model. Part 2. Euclidean black hole*, J. Math. Phys. **42**, 2961 (2001) [hep-th/0005183].
- [44] G. T. Horowitz and D. Marolf, *A New approach to string cosmology*, JHEP **9807**, 014 (1998) [hep-th/9805207].
- [45] J. M. Maldacena and A. Strominger, *AdS_3 black holes and a stringy exclusion principle*, JHEP **9812**, 005 (1998) [hep-th/9804085].
- [46] M. Cvetič and G. W. Gibbons, *Conformal Symmetry of a Black Hole as a Scaling Limit: A Black Hole in an Asymptotically Conical Box*, JHEP **1207**, 014 (2012) [arXiv:1201.0601].
- [47] J. G. Esteve, *Origin of the anomalies: The Modified Heisenberg equation*, Phys. Rev. D **66**, 125013 (2002) [hep-th/0207164].
- [48] M. Cvetič and G. W. Gibbons, *Conformal Symmetry of a Black Hole as a Scaling Limit: A Black Hole in an Asymptotically Conical Box*, JHEP **1207**, 014 (2012) [arXiv:1201.0601].
- [49] L. M. Burko and Y. T. Liu, *Selfforce on a scalar charge in the space-time of a stationary, axisymmetric black hole*, Phys. Rev. D **64**, 024006 (2001)
- [50] A. C. Ottewill and P. Taylor, *Static Kerr Green's Function in Closed Form and an Analytic Derivation of the Self-Force for a Static Scalar Charge in Kerr Space-Time*, Phys. Rev. D **86**, 024036 (2012) [arXiv:1205.5587].