

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Simetrias Não-Clássicas de Equação a Derivada
Fracionária do Tipo Riemann–Liouville**

Por

WENDSON MEDEIROS DA SILVA

Brasília, 16 de agosto de 2016

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Simetrias Não-Clássicas de Equação a Derivada
Fracionária do Tipo Riemann–Liouville**

Por

WENDSON MEDEIROS DA SILVA

Orientador

Prof. Dr. Tarcísio Marciano da Rocha Filho

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília
como requisito para obtenção do título de Mestre em Física

A ciência é aquilo que aprendemos
sobre como não deixar enganar a nós
mesmos.

Richard Feynman

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me proporcionar o conhecimento e maturidade para concluir mais uma etapa da minha vida. Agradeço a minha mãe, Arlete Teresa Alves Medeiros, por me ajudar ao longo de minha trajetória de estudos muitas das vezes abrindo mão de sonhos próprios para viver os meus, aos meus familiares em especial meu irmão Klendson Medeiros da Silva e minha avó Maria Valdete Alves Medeiros, pelos conselhos dados durante essa fase e por acreditarem em mim. Agradeço a minha futura noiva Manuela Karoline Brito Santos pelo apoio, amor e carinho dado desde quando estamos juntos. Agradeço também todos os meus amigos tanto os que moram em Brasília quanto os que ficaram em minha cidade natal pelos momentos de alegria com eles tantas vezes compartilhados, e por fim agradeço o professor Tarcísio Marciano da Rocha Filho e seu filho Paulo Magalhães Marciano da Rocha por terem me orientado tão bem e ajudado durante todo o trabalho.

Resumo

Neste trabalho utilizamos as ferramentas matemáticas da teoria das simetrias de Lie e simetrias não-clássicas e suas soluções invariantes. Antes de utilizar tais ferramentas para poder encontrar as simetrias de equações diferenciais e então tentar resolvê-las, precisamos dominar os conceitos matemáticos para o tratamento das simetrias. A mais importante forma de estudar simetrias é utilizando a teoria de grupos, esta álgebra é adaptada para o tratamento de um conjunto de transformações. Por possuir tal característica ela é importante para físicos e matemáticos. A ideia principal desse trabalho é mostrar através do estudo de conceitos básicos de simetrias de Lie como obter simetrias não-clássicas de equações diferenciais a derivadas fracionárias, e como a partir destas encontrar soluções analíticas particulares para estas equações.

Abstract

In this work we use the mathematical tools of the theory of Lie symmetries and non-classical symmetries and their invariant solutions. Before using such tools in order to find the symmetries of differential equations and then try to solve them, we need to master the mathematical concepts for the treatment of symmetries. The most important way to study symmetries is using the theory of groups, this algebra is adapted for the treatment of a number of transformations. By having such a feature it is important to physicists and mathematicians. The main idea of this work is to show through the study of basic concepts of Lie symmetries getting nonclassical symmetries of differential equations with fractional derivatives, and how from these individuals find analytical solutions to these equations.

Sumário

1	Introdução	9
2	Grupos e Álgebras de Lie	12
2.1	Grupos	12
2.2	Espaços Topológicos	13
2.3	Grupos Topológicos	14
2.4	Atlas	14
2.5	Variiedades Diferenciáveis	14
2.6	Grupos de Lie	15
2.7	Grupo de Transformações	16
2.8	Transformações Infinitesimais	17
2.9	Geradores Infinitesimais	17
2.10	Álgebra de Lie	19
3	Simetrias	21
3.1	Simetrias de Objetos Geométricos	21
3.2	Simetrias de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)	26
3.3	Simetrias de Lie de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)	33
3.4	Coordenadas Canônicas	41
3.5	Geradores Infinitesimais	48
3.6	Condição de Simetria Linearizada	52
3.7	Equações Determinantes para Simetrias de Lie	60
3.8	Soluções invariantes	69

3.9	Simetrias de Equações Diferenciais Parciais (EDPs)	74
3.10	Soluções Invariantes de Equações Diferenciais Parciais (EDPs)	86
4	Simetrias Não-Clássicas e Soluções Invariantes	91
4.1	Simetrias Não-Clássicas de Equação a Derivada Fracionária do Tipo Rie- mann–Liouville	96
4.2	Soluções Invariantes de Equação a Derivada Fracionária do tipo Riemann–Liouville	105
5	Conclusões e Perspectivas	109

Capítulo 1

Introdução

A teoria de transformações de simetrias de equações diferenciais foi introduzida por Lie no final do século XIX. Soluções que não mudam sobre transformações de simetria são chamadas de soluções invariantes, e diferentes métodos de como encontrá-las são descritos na literatura [1],[2] e [3]. Olver e Rosenau mostram que novas soluções podem ser obtidas exigindo que elas sejam invariantes sob transformações infinitesimais de simetrias e ao mesmo tempo preservar condições adicionais laterais. Simetrias não-clássicas baseiam-se na ideia de que a solução analítica necessária é invariante sob transformações de simetria, preservando tanto a forma da equação diferencial quanto a condição de solução invariante. Esta abordagem é menos restritiva no sentido de que existem geralmente mais simetrias não-clássicas do que simetrias de Lie (clássicas), sendo estas últimas, um subconjunto da primeira.

Os grupos de Lie formam uma classe especial de grupos, que são estudados via os métodos do cálculo diferencial e integral. Como estrutura matemática um grupo de Lie é a combinação da estrutura algébrica de grupo com a estrutura de variedade diferenciável. Os grupos de Lie começaram a ser estudados por volta de 1870 como grupos de simetrias de equações diferenciais. Desde essa época a teoria dos grupos de Lie, ou o que se chama mais geralmente de teoria de Lie, teve um grande desenvolvimento e estabeleceu ramificações nas mais diversas áreas da matemática e Física e de suas aplicações. Os métodos para estudar os grupos de Lie estão baseados na construção de suas álgebras de Lie, o

que foi feito inicialmente por Sophus Lie na década de 1870. Uma vez tendo a álgebra de Lie de um grupo de Lie a ideia toda consiste em transferir propriedades da álgebra de Lie a propriedades do grupo de Lie. Esse processo de transferência é muito bem sucedido, o que permite descrever os grupos de Lie, que são objetos tipicamente não lineares, através da álgebra linear embutida nas álgebras de Lie [4].

Os elementos da álgebra de Lie de um grupo de Lie são equações diferenciais ordinárias (campos vetoriais) no grupo, que satisfazem uma propriedade de simetria proveniente da estrutura multiplicativa do grupo (campos vetoriais invariantes por translações). Enquanto que os elementos do grupo são obtidos através das soluções dessas equações dadas pelos seus fluxos. Em outras palavras, a álgebra de Lie é um objeto linear que aproxima o grupo, para se obter os elementos da álgebra de Lie deve-se derivar curvas no grupo. O procedimento contrário consiste em resolver equações diferenciais.

Uma simetria de Lie é uma transformação que mapeia todas as soluções de uma dada equação diferencial em outras soluções da mesma equação. Simetrias não-clássicas transformam uma solução, ainda a determinar, em si própria, sem se preocupar com o que ocorre com o resto das soluções. Desta forma, como foi dito anteriormente, simetrias não-clássicas são simetrias mais gerais, que as simetrias de Lie usuais. Neste trabalho vamos tentar encontrar simetrias não-clássicas de uma equação a derivada fracionária (EDF) do tipo Riemann–Liouville que nesse caso pode ser tratada como uma equação integro-diferencial (EID) na qual descreve processos de sub-difusão, difusão normal, difusão de onda e propagação de onda. E a partir disso tentar encontrar soluções invariantes, as quais que são soluções analíticas particulares dessa equação. Simetrias não-clássicas desses tipos de equações são pouco discutidas na literatura, embora, sejam bastante importantes para o estudo e análise dessa classe de equações.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira, no segundo capítulo mostramos conceitos básicos para o desenvolvimento do trabalho tais como: grupos, espaços topológicos,

grupos de Lie, transformações infinitesimais e etc. No terceiro capítulo damos uma visão geral do que é simetria enfatizando simetrias de objetos geométricos, simetrias de equações diferenciais ordinárias, simetrias de Lie de equações diferenciais ordinárias e parciais e soluções invariantes de equações diferenciais ordinárias e parciais. No quarto capítulo falamos sobre simetrias não-clássicas abordando também soluções invariantes sobre estas simetrias. Descrevemos também neste capítulo o método utilizado para encontrar as simetrias não-clássicas de uma equação a derivada fracionária e suas soluções invariantes explicitando a eficácia e importância deste método. E por fim terminamos com o capítulo cinco mostrando nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Grupos e Álgebras de Lie

Começaremos esse capítulo dando uma visão geral do que são grupos e enfatizando o grupo de Lie e sua álgebra mostrando suas propriedades e axiomas bem como a conexão entre o grupo e a álgebra. Esses conceitos são discutidos mais detalhadamente em [4], [5], [6] e [7].

2.1 Grupos

Um grupo G é um conjunto composto de elementos $g_1, g_2, g_3, \dots, g_n \in G$, munido de uma operação de grupo chamada de multiplicação (\circ) na qual os elementos do mesmo devem obedecer as seguintes propriedades

1. $g_i \in G, g_j \in G \rightarrow g_i \circ g_j \in G$ Fechamento
2. $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ Associatividade
3. $g_1 \circ g_i = g_i = g_i \circ g_1$ Elemento Identidade
4. $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = g_1$ Inversão

Um grupo pode ser classificado em relação ao número de elementos (finito ou infinito) e a natureza contável ou incontável de seus elementos (discretos ou contínuos).

Exemplos

1. Um conjunto de rotações em um círculo por múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$ radianos forma um grupo com n operações distintas. Grupos finitos como esse são ditos de ordem n

2. O conjunto dos números reais forma um grupo sob a adição. A identidade é o número zero e o elemento inverso de α é $-\alpha$.

2.2 Espaços Topológicos

Um espaço topológico T é formado por um conjunto de pontos, denominados D , sobre o qual se aplica uma topologia Υ . Uma topologia é formada por subconjuntos $D_1, D_2, D_3, \dots \subset D$ que obedece alguns axiomas

1. O conjunto vazio (\emptyset) e o conjunto D pertencem a Υ .

$$\emptyset \in \Upsilon, D \in \Upsilon$$

2. Intersecções finitas de elementos de Υ são elementos de Υ .

$$\bigcap_i^{\text{finita}} D_i \in \Upsilon$$

3. Uniões arbitrárias de elementos de Υ são elementos de Υ .

$$\bigcup_i^{\text{qualquer}} D_i \in \Upsilon$$

Os elementos D_i da topologia são chamados de conjuntos abertos.

4. Se $m \in \Upsilon, n \in \Upsilon, m \neq n$, então existem $D_m \in \Upsilon, D_n \in \Upsilon$ que obedecem as propriedades $m \in D_m, n \in D_n, D_m \cap D_n = \emptyset$. Um espaço topológico que obedece ao axioma 4 é chamado de espaço Hausdorff. Um conjunto aberto D_m contendo m é chamado uma vizinhança de m .

2.3 Grupos Topológicos

Um grupo topológico é um grupo cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia compatível com o produto no grupo, no sentido em que

1. o produto $p: G \times G \rightarrow G, (g, h) = gh$, é uma aplicação contínua, quando se considera $G \times G$ com a topologia produto e
2. a aplicação $\nu: G \rightarrow G, \nu(g) = g^{-1}$, é contínua (e, portanto, um homeomorfismo, já que $\nu^{-1} = \nu$).

2.4 Atlas

Um atlas de Classe C^k numa superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é um coleção ϖ de parametrizações $U_0 \rightarrow U \subset M$, de classe A^k , tal que os conjuntos abertos U formam uma cobertura de M . Um atlas ϖ sobre um espaço topológico é diferenciável de classe A^k ($k \in \mathbb{N}^*$) se qualquer mudança de coordenadas num ponto $(x, y) \in \varpi$ são aplicações de classe A^k . Como $(x, y) = \frac{1}{(y, x)}$, (x, y) é um difeomorfismo de classe A^k . Escrevendo (x, y) como $(x^1, x^2, \dots, x^m) \mapsto (y^1, y^2, \dots, y^m)$, então o jacobiano é não nulo em todo x . As mudanças de coordenadas em um atlas são possíveis se e somente se $\varpi \cup z$ (onde z é a nova coordenada) é também um atlas de classe A^k em M .

Um atlas ϖ de dimensão m e classe A^k , sobre M , é máximo quando contem todos os sistemas locais de coordenadas que são possíveis para ϖ . Se o atlas não for máximo, o mesmo pode ser ampliado acrescentando todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

2.5 Variedades Diferenciáveis

Sabendo o que é um atlas, agora podemos definir variedade diferenciável. Uma variedade diferenciável de m -ésima dimensão e de classe A^k , pode ser descrita como um par

ordenado (M, ϖ) onde M é um espaço topológico de Hausdorff e ϖ é um atlas máximo.

As variedades diferenciáveis obedecem as seguintes propriedades

1. M é espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.
2. ϖ é uma coleção de homeomorfismos $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de conjuntos abertos $U \subset M$ sobre abertos $x(U) \subset \mathbb{R}^m$.
3. Os domínios U dos homeomorfismos $x \in \varpi$ cobrem M .
4. Dados $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $U \cap V \neq \emptyset$, então $(x, y): x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ é um homeomorfismo de classe C^k .
5. Dado um homeomorfismo $z: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de um aberto $W \cap M$ sobre um aberto $z(W) \cap \mathbb{R}^m$, tal que (z, x) e (x, z) são de classe A^k para cada $x \in \varpi$, então $z \in \varpi$.

2.6 Grupos de Lie

Um grupo de Lie consiste de uma variedade diferenciável n -dimensional denotada por M e uma função ψ que leva dois pontos (β, α) em outro ponto γ dentro da mesma variedade, então podemos escrever

$$\gamma^\mu = \psi^\mu(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n; \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) \quad (2.1)$$

onde $\mu = 1, 2, \dots, n$

a função $\psi: \beta \times \alpha \rightarrow \gamma = \beta \alpha$ deve ser contínua, e α deve ser inversível. Os grupos de Lie possuem dois tipos de estrutura, uma algébrica e uma topológica. Portanto devem obedecer a todos os axiomas de ambas as estruturas. Aplicando as propriedades em ψ , ou seja,

Fechamento. $\gamma^\mu = \psi^\mu(\beta, \alpha); \quad \alpha, \beta, \gamma \in M$

Associatividade. $\psi^\mu(\gamma, \psi(\beta, \alpha)) \equiv \psi^\mu(\psi(\gamma, \beta), \alpha)$

Identidade. $\psi^\mu(\epsilon, \alpha) = \alpha^\mu = \psi^\mu(\alpha, \epsilon)$

Inversa. $\psi^\mu(\alpha, \alpha^{-1}) = \epsilon^\mu = \psi^\mu(\alpha^{-1}, \alpha)$

Portanto um grupo de Lie é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável, de tal forma que a aplicação produto

$$p : (g, h) \in G \times G \rightarrow gh \in G \quad (2.2)$$

é uma aplicação diferenciável. Tanto a estrutura de variedade diferenciável de G , quanto a diferenciabilidade de p , pressupõem um grau de diferenciabilidade $C^k, 1 \leq k \leq \omega$.

2.7 Grupo de Transformações

Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ situado na região $D \subset \mathbb{R}^n$. O conjunto de transformações

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon) \quad (2.3)$$

definido para cada \mathbf{x} em D e o parâmetro ϵ no conjunto $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}$ com $\Phi(\epsilon, \delta)$ definindo uma lei de composição dos parâmetros ϵ e δ em \mathbf{S} , forma um grupo de transformações a um parâmetro em D da seguinte maneira

- (i) Para cada ϵ em \mathbf{S} as transformações são uma-a-uma em D
- (ii) \mathbf{S} com a lei de composição Φ forma um grupo G
- (iii) Para cada \mathbf{x} em D , $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ quando $\epsilon = \epsilon_0$ correspondendo a identidade, isto é, $\mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon) = \mathbf{x}$
- (iv) Se $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)$, $\hat{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\hat{\mathbf{x}}; \delta)$, então $\hat{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \Phi(\epsilon, \delta))$
- (v) ϵ é um parâmetro contínuo, ou seja, \mathbf{S} é um intervalo em \mathbb{R} . Sem perda de generalidade, $\epsilon = 0$ corresponde ao elemento identidade \mathbf{e} .
- (vi) \mathbf{X} é infinitamente diferenciável com respeito a \mathbf{x} em D e uma função analítica de ϵ em \mathbf{S} .

(vii) $\Phi(\epsilon, \delta)$ é uma função analítica de ϵ e δ , $\epsilon \in \mathbf{S}$, $\delta \in \mathbf{S}$.

2.8 Transformações Infinitesimais

Considere um grupo de transformações de Lie a um parâmetro (ϵ)

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon) \quad (2.4)$$

com identidade $\epsilon = 0$ e lei de composição Φ . Expandindo a transformação em torno de $\epsilon = 0$, na vizinhança de $\epsilon = 0$ temos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + \epsilon \left(\left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\left. \frac{\partial^2 \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=0} \right) + \dots \\ &= \mathbf{x} + \epsilon \left(\left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde podemos definir

$$\xi(\mathbf{x}) = \epsilon \left(\left. \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}; \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) \quad (2.6)$$

A transformação $\mathbf{x} + \epsilon \xi(\mathbf{x})$ é chamada de transformação infinitesimal do grupo de Lie de transformações (2.4). As componentes de $\xi(\mathbf{x})$ são chamadas de infinitesimais da (2.4).

2.9 Geradores Infinitesimais

Seja um grupo de Lie que atua num espaço geométrico G , por meio de uma transformação de coordenadas. Agora escolhendo uma função $F(p)$ onde qualquer p pertença ao espaço G . Dado o sistema de coordenadas para G , podemos escrever p como sendo

$$p \rightarrow (x^1(p), x^2(p), \dots, x^N(p))$$

A função F pode ser escrita em função dos parâmetros $x^i(p)$ no sistema de coordenada S

$$F(p) = F^S[x^1(p), x^2(p), \dots, x^N(p)]$$

Em um outro sistema de coordenadas S' as coordenadas de p vão mudar. Para que o valor de $F(p)$ se mantenha fixo a função F deve mudar de forma

$$F(p) = F^{S'}[x'^1(p), x'^2(p), x'^3(p), \dots, x'^N(p)]$$

Os dois sistemas de coordenadas estão relacionados por um elemento do grupo de transformações

$$x'^i(p) = f^i[\alpha, x(p)]$$

Podemos relacionar $F^{S'}$ com F^S , escrevendo $x'^i(p)$ em função de $x^i(p)$ resultando em

$$F^{S'}[x'^1(p), x'^2(p), \dots, x'^N(p)] = F^S[f^1(\alpha^{-1}, x'(p)), f^2(\alpha^{-1}, x'(p)), \dots, f^N(\alpha^{-1}, x'(p))] \quad (2.7)$$

Esta solução ainda não está na forma particular que seja útil para usarmos, dessa forma iremos convenientemente usar transformações próximas a identidade. Para os grupos de Lie usaremos $\delta\alpha^\mu$, cuja inversa é $\delta\alpha^{-\mu} = -\delta\alpha^\mu$. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} x^i(p) &= f^i[-\delta\alpha, x'(p)] & (2.8) \\ &= f^i[0, x'(p)] + \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} (-\delta\alpha) + \dots \\ &= x'^i(p) - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} \end{aligned}$$

Substituindo a (2.8) na (2.7) encontramos

$$F^{S'}[x'(p)] = F^S[x'^i(p) - \delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x'^i} F^S[x'(p)]. \quad (2.9)$$

Em primeira ordem, a variação em F é dada por

$$\begin{aligned} F^{S'}[x'(p)] - F^S[x'^i(p)] &= -\delta\alpha \frac{\partial f^i[\beta, x'(p)]}{\partial \beta^\mu} \Big|_{\beta=0} \frac{\partial}{\partial x'^i} F^S[x'(p)] & (2.10) \\ &= \delta\alpha X_\mu(x') F^S[x'] \end{aligned}$$

Onde X_μ é o gerador infinitesimal do grupo de Lie, através da aplicação repetida destes operadores podemos obter todos os elementos do grupo de Lie gerados por eles, devido a natureza de variedade diferenciável e conexa do Grupo de Lie, isso faz com que o teorema de Taylor seja válido e aproximações próximas a identidade possam ser feitas. Os geradores infinitesimais de um grupo formam uma base de um espaço vetorial, de modo que qualquer combinação linear dos mesmos também é um gerador infinitesimal, portanto um elemento finito do grupo de transformações pode ser escrito em termos de seu gerador como

$$T = e^{\epsilon^\mu X_\mu}. \quad (2.11)$$

2.10 Álgebra de Lie

Se a propriedade comutativa vale para um determinado grupo, que possui elementos α e β , então a seguinte relação é válida

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \beta \quad (2.12)$$

Se o grupo não é comutativo, ou seja, $[\alpha, \beta] = \gamma$, temos portanto

$$\alpha\beta\alpha^{-1} = \gamma\beta \quad (2.13)$$

onde γ é necessariamente um elemento do grupo. Para α e β próximos a identidade, podemos expandir em torno dos geradores infinitesimais da seguinte forma

$$\begin{aligned} \alpha &= I + \delta\alpha^\mu X_\mu + \frac{1}{2}\delta\alpha^\mu X_\mu \delta\alpha^\nu X_\nu \\ \beta &= I + \delta\beta^\mu X_\mu + \frac{1}{2}\delta\beta^\mu X_\mu \delta\beta^\nu X_\nu \end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo as (2.14) na (2.13) e ignorando os termos iguais ou maiores que terceira ordem.

$$(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1} = I + \delta\alpha\delta\beta[X_\mu, X_\nu] \quad (2.15)$$

Como $(\alpha\beta)(\beta\alpha)^{-1}$ é um elemento do grupo, o comutador deve estar no espaço vetorial dos geradores do grupo e pode ser expandido como uma combinação linear da base. Logo

$$[X_\mu, X_\nu] = C_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda \quad (2.16)$$

Onde $C_{\mu\nu}^\lambda$ são constantes a serem especificadas de acordo com o grupo. Quando eu adiciono à um espaço vetorial qualquer, a operação comutador, é possível construir uma álgebra, neste caso os geradores formam um espaço vetorial e como demonstrado ele possui a propriedade de comutação, dessa forma pode-se construir Álgebra de Lie.

A álgebra de Lie obedece também a identidade de Jacob, na equação (2.17) e a propriedade anticomutativa

$$[X_\mu[X_\nu, X_\rho]] + [X_\nu[X_\rho, X_\mu]] + [X_\rho[X_\mu, X_\nu]] = 0 \quad (2.17)$$

Embora todo Grupo de Lie possua uma álgebra de Lie associada, a correspondência não é 1-1. Inúmeros Grupos de Lie diferentes possuem a mesma álgebra de Lie, duas álgebras com as mesmas constantes $C_{\mu\nu}^\lambda$ são necessariamente, a mesma álgebra.

Capítulo 3

Simetrias

3.1 Simetrias de Objetos Geométricos

Para entendermos as simetrias de equações diferenciais, é útil considerarmos simetrias de objetos simples. A grosso modo podemos dizer que, uma simetria de um objeto geométrico, por exemplo, é uma transformação que deixa o objeto aparentemente inalterado. Por exemplo, considere o resultado da rotação em um triângulo equilátero no sentido anti-horário sobre seu centro. Depois de uma rotação de $\frac{2\pi}{3}$, o triângulo parece o mesmo de antes da rotação, por isso esta transformação é uma simetria. Rotações de $\frac{4\pi}{3}$ e 2π também são simetrias em um triângulo equilátero. De fato a rotação de 2π no triângulo é equivalente a não fazer nenhuma rotação, porque cada ponto no triângulo é mapeado em si mesmo [8].

A transformação que mapeia cada ponto em si mesmo é uma simetria de qualquer objeto geométrico, e esta é chamada de simetria trivial. Simetrias são comumente usadas para classificar objetos geométricos. Suponha que o triângulo ilustrado na figura (3.1) é feito de um material rígido, com lados indistinguíveis. As simetrias destes triângulos são facilmente encontradas pela experiência. O triângulo equilátero mostrado na figura 3.1 (a) tem as simetrias trivial dadas pelas rotações descritas acima de modo as mesmas são equivalentes a reflexões nos eixos, portanto um triângulo equilátero tem seis simetrias distintas. O triângulo isósceles na figura 3.1 (b) tem duas uma rotação e a simetria trivial. E o triângulo com três lados desiguais na figura 3.1 (c) tem apenas a simetria trivial.

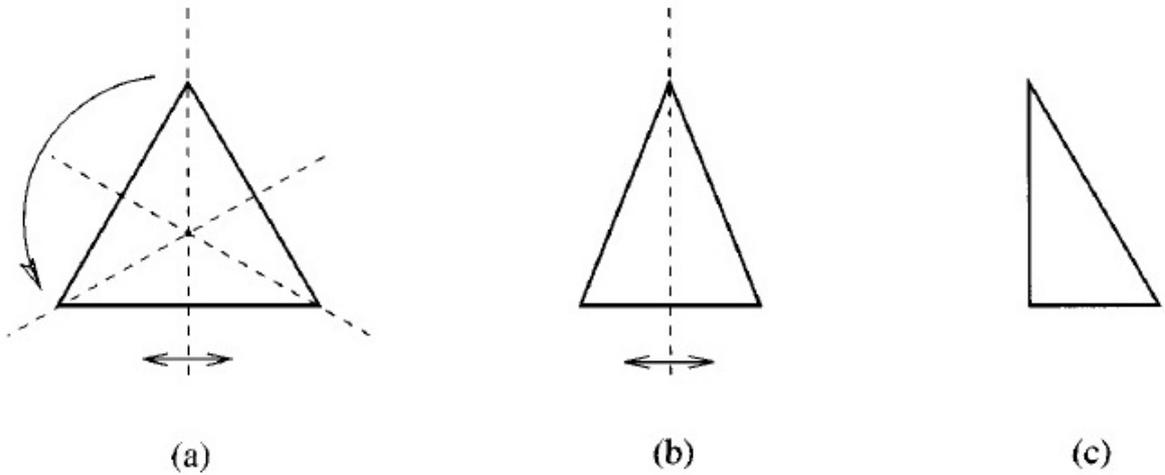


Figura 3.1: Algumas simetrias de triângulos [8].

Existem certas restrições sobre simetrias de objetos geométricos. Cada simetria tem uma única inversa, que por si só é uma simetria. Uma simetria e sua inversa agindo simultaneamente sobre um objeto deixa o mesmo inalterado. Por exemplo, vamos denotar Γ uma rotação do triângulo equilátero por $\frac{2\pi}{3}$. Então Γ^{-1} (inversa da Γ) é uma rotação por $\frac{4\pi}{3}$. Para simplificar, nós restringimos a atenção para simetrias que são suaves. Se x denota a posição de um ponto geral do objeto, e se

$$\Gamma : x \mapsto \hat{x}(x) \tag{3.1}$$

é qualquer simetria, então assumimos que \hat{x} é infinitamente diferenciável em relação a x . Além disso, uma vez que Γ^{-1} é também uma simetria, x é infinitamente diferenciável em relação a \hat{x} . Assim Γ é um difeomorfismo (C^∞), isto é, um mapeamento invertível suave cuja inversa também é suave. Simetrias também preservam a estrutura dos objetos geométricos a qual mostram realmente do que o objeto é feito. A princípio, consideramos simetrias de triângulos feitos a partir de um material rígido. As únicas transformações em que um triângulo permanece rígida são aqueles que preservam a distância entre quaisquer dois pontos no triângulo, ou seja, translações, rotações e reflexões.

Estas transformações são as únicas simetrias possíveis, porque todas as outras transformações falham para preservar a estrutura rígida. No entanto, se os triângulos são feitos de um material elástico tal como borracha, a classe de transformações que preservam a estrutura é maior, e novas simetrias podem ser encontradas. Por exemplo, um triângulo com três lados desiguais pode ser esticada em um triângulo equilátero, em seguida, rodado por $\frac{2\pi}{3}$ em torno do seu centro e finalmente esticada de modo a aparecer a ter a sua forma original. Claramente, a estrutura associada a um objeto geométrico tem uma influência considerável sobre o conjunto de simetrias do mesmo. Em resumo, uma transformação é uma simetria se satisfizer as seguintes condições

- (S1) A transformação preserva estrutura
- (S2) A transformação é um difeomorfismo
- (S3) A transformação mapeia o objeto em si mesmo, ou seja, um objeto no plano (x, y) e sua imagem no plano (\hat{x}, \hat{y}) são indistinguíveis.

Daí em diante, nós restringimos a atenção para as transformações satisfazendo (S1) e (S2). Tais transformações são simetrias se também satisfazem (S3), o qual é chamado a condição de simetria. Um triângulo rígido tem um conjunto finito de simetrias. Muitos objetos possuem um conjunto infinito de simetrias. Por exemplo, um círculo unitário rígido

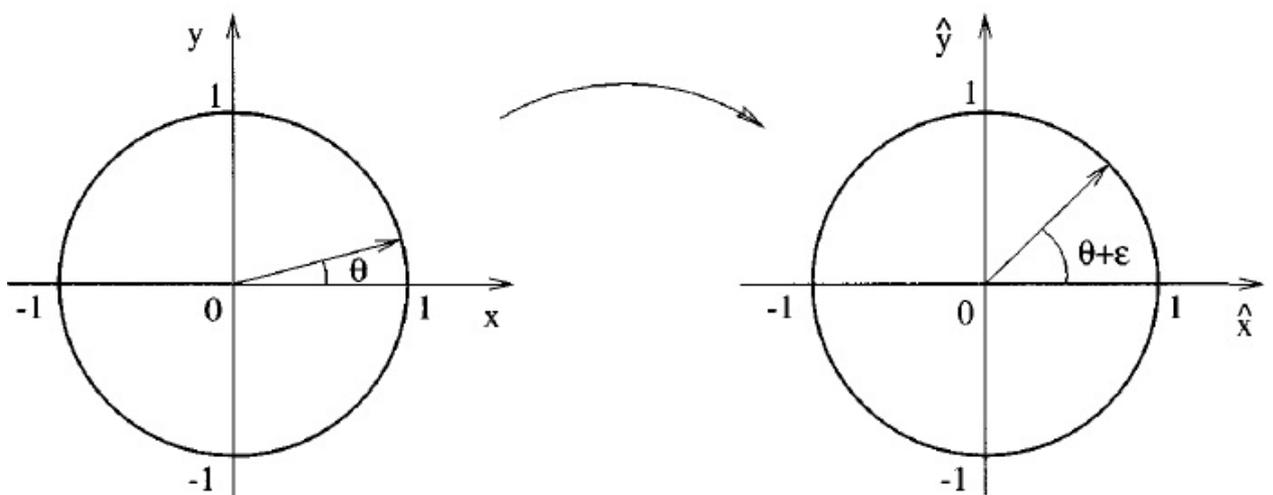


Figura 3.2: Rotação em um círculo unitário [8].

que tem como equação

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.2}$$

o qual tem simetria

$$\Gamma_\epsilon : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}) = (x \cos(\epsilon) - y \sin(\epsilon), x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon)) \tag{3.3}$$

para cada $\epsilon \in (-\pi, \pi]$. Em termos das coordenadas polares temos,

$$\Gamma_\epsilon : (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto (\cos(\theta + \epsilon), \sin(\theta + \epsilon)) \tag{3.4}$$

como mostrado na figura (3.2), a transformação é uma rotação de ϵ em torno do centro do círculo. Essa transformação além de preservar a estrutura é suave e invertível (o inverso de uma rotação por ϵ é uma rotação por $-\epsilon$). Para provar que a condição de simetria (S3) é satisfeita, observamos que

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = x^2 + y^2 \tag{3.5}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \hat{x}^2 + \hat{y}^2 &= 1 \\ (\cos(\theta + \epsilon))^2 + (\sin(\theta + \epsilon))^2 &= 1 \\ \sin^2 \theta (\sin^2(\epsilon) + \cos^2(\epsilon)) + \cos^2 \theta (\sin^2(\epsilon) + \cos^2(\epsilon)) &= 1 \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

e portanto

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1 \quad \text{quando} \quad x^2 + y^2 = 1$$

O círculo unitário tem outras simetrias, como por exemplo reflexões em cada linha reta que passa pelo centro. Da forma

$$\Gamma_R : (x, y) \mapsto (-x, y) \quad (3.7)$$

O conjunto infinito de simetrias Γ_ϵ é um exemplo de um grupo de Lie de um parâmetro. Esta classe de simetrias é imensamente útil e é a chave para a construção de soluções exatas de muitas equações diferenciais. Suponha que um objeto que ocupa um subconjunto de \mathbb{R}^N possui um conjunto infinito de simetrias

$$\Gamma_\epsilon : x^s \mapsto \hat{x}^S(x^1, \dots, x^N; \epsilon) \quad S = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

onde ϵ é um parâmetro real, e as seguintes condições são satisfeitas.

(L1) Γ_0 é uma simetria trivial, de modo que, $\hat{x}^S = x^S$, quando $\epsilon = 0$

(L2) Γ_ϵ é uma simetria para todo ϵ na vizinhança de zero

(L3) $\Gamma_\epsilon \Gamma_\delta = \Gamma_{\epsilon+\delta}$ para todo ϵ, δ suficientemente próximo de zero

(L4) Cada \hat{x} pode ser representado por uma série de Taylor em ϵ (na vizinhança de $\epsilon = 0$), e portanto

$$\hat{x}^s(x^1, \dots, x^N; \epsilon) = x^s + \epsilon \xi^s(x^1, \dots, x^N) + O(\epsilon^2) \quad S = 1, \dots, N$$

Em seguida, o conjunto de simetrias Γ_ϵ é um grupo de Lie local de um parâmetro. O termo "local" refere-se ao fato de que as condições só são aplicadas na vizinhança de $\epsilon = 0$. Além disso, o tamanho máximo vizinhança pode depender $x^S, S = 1, \dots, N$. O termo "grupo" é usado porque as simetrias Γ_ϵ satisfazem os axiomas de um grupo, pelo menos para ϵ suficientemente perto de zero. Em particular, (L3) implica que $\Gamma_\epsilon^{-1} = \Gamma_{-\epsilon}$.

As condições (L1) a (L4) são ligeiramente mais restritivas do que o necessário, mas eles nos permitem começar a resolver equações diferenciais sem se emaranhar em complexidades. Simetrias que pertencem a um grupo de Lie de um parâmetro depende continuamente sobre o parâmetro. Como vimos, um objeto também pode ter simetrias que pertencem a um grupo discreto. Estas simetrias discretas não podem ser representadas por um parâmetro contínuo. Por exemplo, o conjunto de simetrias do triângulo equilátero tem a estrutura do grupo diedro D_3 , enquanto que as duas simetrias do triângulo isósceles, formam o grupo cíclico Z_2 . Até então, vamos nos concentrar em grupos de Lie de simetrias com parâmetros contínuos ou somente simetrias de Lie.

3.2 Simetrias de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Vamos começar essa seção considerando uma equação diferencial ordinária (EDO) bem simples da forma

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.9}$$

O conjunto de soluções da (EDO) acima é o conjunto de linhas

$$y(x) = c \quad c \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

que preenche o plano (x, y) . A EDO é representada geometricamente pelo conjunto de todas as soluções, e assim qualquer simetria da mesma deve necessariamente mapear a solução definida para si. Mais formalmente, a condição de simetria (S3) requer que o conjunto de curvas de solução no plano (x, y) deve ser indistinguível da sua imagem no plano (\hat{x}, \hat{y}) , e por isso temos

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = 0 \quad \text{quando} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.11}$$

Uma transformação de um plano pode ser invertida se o seu Jacobiano é diferente de zero, por isso, impomos a condição adicional

$$\hat{x}_x \hat{y}_y - \hat{x}_y \hat{y}_x \neq 0 \quad (3.12)$$

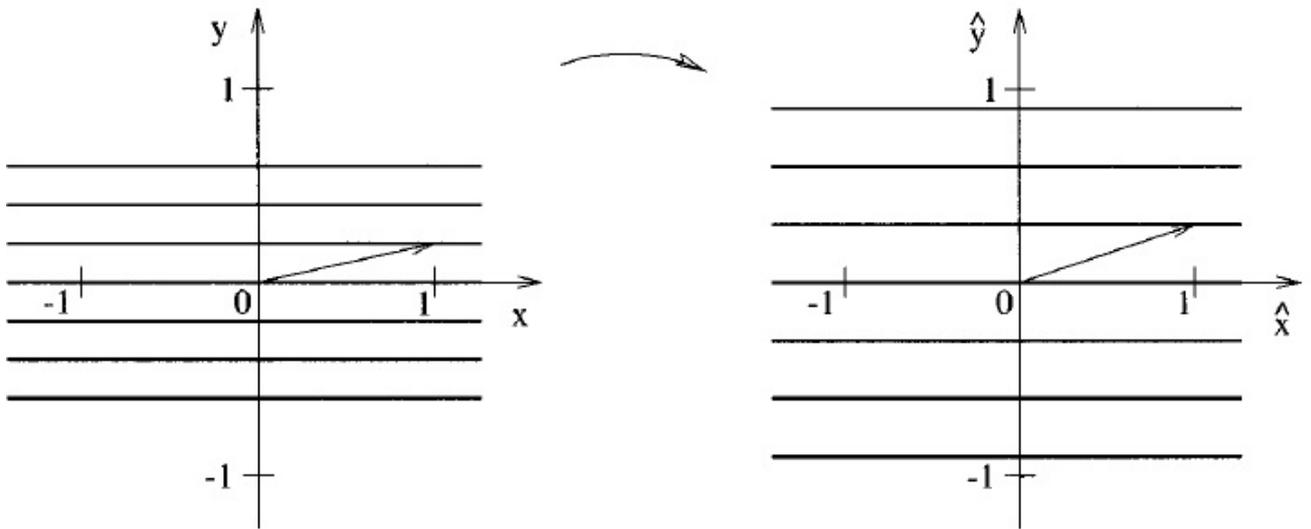


Figura 3.3: Soluções da equação (3.10), transformadas por escalas da (3.15) [8].

Uma curva de solução particular vai ser mapeado para uma curva de solução (eventualmente diferentes), e assim,

$$\hat{y}(x, c) = \hat{c}(c) \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

Aqui x é considerada como uma função de \hat{x} e c , que é obtida através da inversão

$$\hat{x} = \hat{x}(x, c) \quad (3.14)$$

A (EDO) (3.9) tem muitas simetrias, algumas das quais são óbvias a partir da figura (3.3). Existem também simetrias discretas, tais como reflexões nos eixos x e y . Simetrias de Lie incluem escalas de forma,

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^\epsilon y) \quad \epsilon \in \mathbb{R} \quad (3.15)$$

A figura (3.3) mostra o efeito de escalas (3.15) sobre apenas algumas curvas de solução. Cada translação,

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon_1, y + \epsilon_2) \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

é uma simetria. O conjunto de todas as translações depende de dois parâmetros, ϵ_1 e ϵ_2 . Ao definir ϵ_1 como zero, obtém-se o grupo de Lie de um parâmetro de translações na direção y . Do mesmo modo, o grupo de Lie de um parâmetro de translação na direção x é obtido através da fixação de ϵ_2 como zero. O conjunto de translações (3.16) é um grupo de Lie a dois parâmetros, que pode ser considerado como uma composição dos grupos de Lie de um parâmetro de translações parametrizadas por ϵ_1, ϵ_2 respectivamente. A grosso modo, simetrias pertencentes a uma grupo de Lie a R parâmetros podem ser consideradas como uma composição de R grupos de simetrias a um parâmetro.

Nem todo grupo de Lie de um parâmetro é útil. Por exemplo, uma translação (3.16) mapeia uma solução curva $y = c$ para $\hat{y} = c + \epsilon_2$. Se $\epsilon_2 = 0$, qualquer curva de solução é mapeado nela mesma pela simetria. Isso é óbvio, porque translações movem pontos ao longo de x a curvas de y constantes. Simetrias que mapeiam cada curva solução para si são chamadas de triviais, mesmo se eles se movem pontos ao longo das curvas.

A EDO (3.9) é extremamente simples, e assim todas as suas simetrias podem ser encontrados. Diferenciando (3.13) em relação a x , obtemos

$$\hat{y}_x(x, c) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Temos então,

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (f(x, y), g(y)), \quad f_x \neq 0, \quad g_y \neq 0, \quad (3.18)$$

onde f e g são consideradas funções suaves de seus argumentos. A EDO tem uma família muito grande de simetrias. No entanto, este resultado também poderia ser obtido diretamente da (3.11). Nas curvas de solução, y é uma função de x , e, portanto, $\hat{x}(x, y)$ e $\hat{y}(x, y)$ podem ser consideradas como funções de x . Então, pela regra da cadeia, podemos reescrevê-la como

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = 0 \quad \text{quando} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad (3.19)$$

onde D_x é denominado como derivada total com respeito a x

$$D_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \dots \quad , \quad (3.20)$$

podemos escrever também,

$$\frac{\hat{y}_x + y' \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y} = 0 \quad \text{quando} \quad y' = 0 \quad , \quad (3.21)$$

isto, é

$$\frac{\hat{y}_x}{\hat{x}_x} = 0 \quad . \quad (3.22)$$

A vantagem de utilizar a condição de simetria na forma (3.11) é que se pode obter informações sobre as simetrias sem ter de conhecer a solução da equação diferencial de antecedência. Esta observação é fundamental, pois sugere que pode ser possível encontrar simetrias de uma equação diferencial dada cuja solução é desconhecida.

As simetrias de $y' = 0$ são facilmente visualizados, porque as curvas de solução são linhas paralelas. Pode não ser possível encontrar simetrias de uma EDO de primeira ordem complicada olhando para uma imagem de suas curvas de solução. No entanto, a condição de simetria exige que qualquer simetria mapeia o conjunto de curvas de solução no plano (x, y) para um conjunto idêntico de curvas no (\hat{x}, \hat{y}) plano. Vamos considerar a equação diferencial ordinária de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \quad . \quad (3.23)$$

Para simplificar, vamos restringir a atenção para as regiões do plano no qual ω é uma função suave de seus argumentos. Então temos

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{quando} \quad \frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \quad . \quad (3.24)$$

Neste caso, podemos escrever,

$$\frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = \frac{\hat{y}_x + y' \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{quando} \quad \frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \quad (3.25)$$

portanto a condição de simetria para a EDO anterior é,

$$\frac{\hat{y}_x + \omega(x, y) \hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x, y) \hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad , \quad (3.26)$$

em conjunto com o requisito de que o mapeamento deve ser um difeomorfismo. Pode ser possível determinar algumas ou todas as simetrias de uma determinada EDO a partir de (3.26). Uma abordagem é utilizar um ansatz, isto é, para procurar uma simetria de uma forma particular.

Exemplo: Vamos considerar a EDO

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (3.27)$$

A restrição anterior implica que toda simetria desta EDO satisfaz a equação diferencial

parcial (EDP)

$$\frac{\hat{y}_x + y\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = \hat{y} \quad (3.28)$$

Ao invés de tentar encontrar a solução geral da EDP, vamos ver se ou não existem simetrias que satisfazem um ansätz simples. Por exemplo, se houver mapeamento de y em si mesmo, então

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), y) \quad (3.29)$$

Então a equação se reduz a,

$$\frac{y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = y \quad (3.30)$$

portanto

$$\hat{x}_x + y\hat{x}_y = 1, \quad \hat{x}_x \neq 0 \quad (3.31)$$

Existem muitas simetrias desse tipo, as mais simples são as simetrias de Lie correspondentes a translações do tipo

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon, y), \quad \epsilon \in \mathbb{R} \quad (3.32)$$

Notamos que as translações na direção de x para a EDO $y' = 0$ são simetrias triviais, mas elas não são simetrias triviais da EDO $y' = y$ da qual a solução geral é,

$$y = c_1 e^x, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad (3.33)$$

A translação na direção de x mapeia a curva de solução correspondente a um determinado valor de c_1 ,

$$\hat{y} = y = c_1 e^x = c_1 e^{\hat{x}-\epsilon} = c_2 e^{\hat{x}}, \quad \text{onde } c_2 = c_1 e^{-\epsilon} \quad (3.34)$$

portanto as translações na direção de x para a EDO $y' = y$ não são triviais, porque em geral $c_1 \neq c_2$. Obviamente, que se $\epsilon = 0$ voltaremos a ter um simetria trivial para a mesma. Curiosamente, uma curva de solução é mapeada em si por cada translação, isto é, $y = 0$. As curvas que são mapeadas em si por uma simetria são ditas como sendo invariante sob a simetria. A solução de $y = 0$ decompõe o conjunto de curvas de solução $y = c_1 e^x$, como mostrado na figura abaixo.

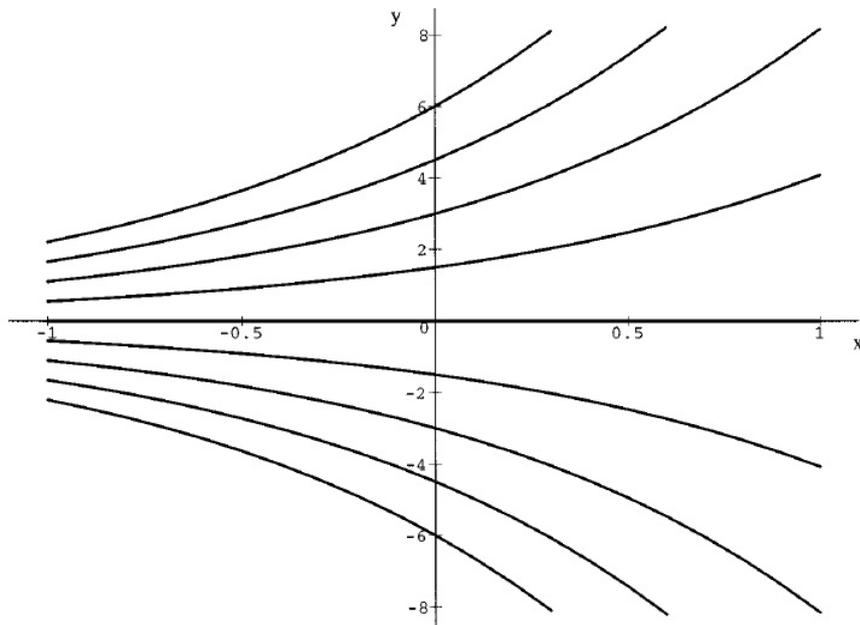


Figura 3.4: Soluções da equação $y' = y$ [8].

As simetrias translacionais $(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon, y), \epsilon \in \mathbb{R}$ não são capazes de mapear soluções com $c_1 > 0$ a soluções com $c_1 < 0$. No entanto, a EDO tem simetrias que trocam as soluções constantes dos semiplanos superiores e inferiores. A simetria

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, -y) \tag{3.35}$$

é uma simetria discreta. Até agora, vimos simetrias de EDOs muito simples, mas os métodos de simetria podem ser aplicáveis a quase qualquer EDO.

3.3 Simetrias de Lie de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Até agora, temos considerado apenas algumas equações diferenciais ordinárias da forma,

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \quad (3.36)$$

Vamos desenvolver agora técnicas que sejam aplicáveis a qualquer EDO do tipo (3.36). Começamos examinando a ação da simetria em um plano. Suponha que $y = f(x)$ é a solução da equação (3.36) e que uma simetria particular mapeia esta solução à curva $\hat{y} = \tilde{f}(\hat{x})$, que é solução da,

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad (3.37)$$

A função \tilde{f} é obtida do seguinte modo. A simetria transforma a curva para o conjunto de pontos (\hat{x}, \hat{y}) , onde

$$\hat{x} = \hat{x}(x, f(x)), \quad \hat{y} = \hat{y}(x, f(x)) \quad (3.38)$$

Esta é uma curva no plano (\hat{x}, \hat{y}) , escrita na forma paramétrica (x é o parâmetro). Agora nós a resolvemos para obter x como função de \hat{x} , e substituímos o resultados na segunda equação das equações anteriores. Isto nos dá,

$$\tilde{f} = \hat{y}(x(\hat{x}), f(x(\hat{x}))) \quad (3.39)$$

Se a simetria pertence a um grupo de Lie a um parâmetro, então \tilde{f} é uma função de \hat{x} e o parâmetro ϵ .

Exemplo A solução da EDO,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad (3.40)$$

é

$$y = cx^2 \quad (3.41)$$

Vamos restringir a atenção ao quadrante $x > 0, y > 0$, no qual cada curva de solução (3.41) corresponde a um particular $c > 0$. O conjunto de soluções nessa região é mapeado em si pelas simetrias discretas

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y} \right) \quad (3.42)$$

Especialmente, a curva de solução correspondente a $c = c_1$ é mapeada a curva

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{1}{c_1 x}, \frac{1}{c_1 x^2} \right) \quad (3.43)$$

Portanto $x = \frac{1}{c_1 \hat{x}}$ assim a curva de solução $y = c_1 x^2$ é mapeada para

$$\hat{y} = c_1 \hat{x}^2 \quad (3.44)$$

A EDO (3.40) tem muitas outras simetrias, incluindo o grupo de Lie a um parâmetro de escala

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{-\epsilon} y) \quad (3.45)$$

Qualquer simetria desta forma mapeia a curva de solução $y = c_1 x^2$ para a a curva

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, c_1 e^\epsilon x^2) \quad (3.46)$$

Resolvendo para x , nós obtemos $x = e^{-\epsilon \hat{x}}$, e portanto a solução transformada é

$$\hat{y} = c_1 e^{-3\epsilon \hat{x}^2} \quad (3.47)$$

O plano (x, y) e o plano (\hat{x}, \hat{y}) contém o mesmo conjunto de curvas de soluções. Ao invés de trabalhar com dois planos idênticos, é mais conveniente para sobrepô-los. Portanto a simetria é considerada como um mapeamento do plano (x, y) em si mesmo, chamada ação de simetria do plano (x, y) . Especificamente, o ponto com coordenadas (x, y) é mapeado para o ponto cujas coordenadas são

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)) \quad (3.48)$$

A curva de solução $y = f(x)$ é o conjunto de pontos com coordenadas $(x, f(x))$. Esta é mapeada para o conjunto de pontos com coordenadas $(\hat{x}, \tilde{f}(\hat{x}))$, isso é, para a curva de solução $y = \tilde{f}(x)$. Portanto a curva $y = f(x)$ é invariante sob a simetria se $\tilde{f} = f$ é uma simetria trivial, ou seja, se sua ação deixa cada curva de solução invariante. A órbita do grupo a (x, y) é o conjunto de pontos para os quais (x, y) podem ser mapeados por uma escolha apropriada de ϵ .

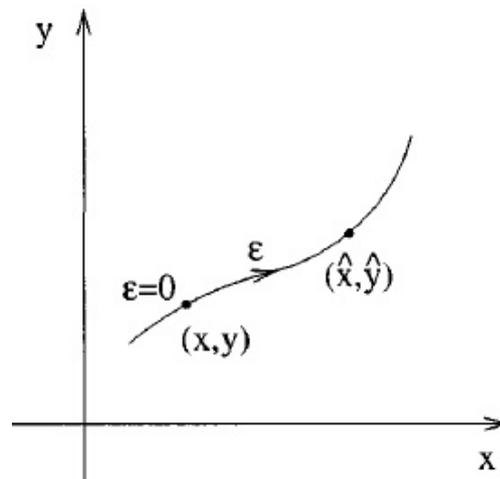


Figura 3.5: Parte de uma órbita unidimensional [8].

A órbita através de um ponto típico é uma curva suave, conforme mostrado na figura acima. No entanto também pode haver um ou mais pontos invariantes, cada um dos

quais é mapeado para si pelas simetrias de Lie. Um ponto invariante é uma órbita de dimensão zero do grupo de Lie. As coordenadas dos pontos da órbita a (x, y) são

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \epsilon), \hat{y}(x, y; \epsilon)), \quad (3.49)$$

onde

$$(\hat{x}(x, y; 0), \hat{y}(x, y; 0)) = (x, y). \quad (3.50)$$

Exemplo Agora considerando a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - y - x}{xy^2 + x^3 + y - x} \quad (3.51)$$

suas simetrias incluem as rotações

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, x \sin \epsilon + y \cos \epsilon) \quad (3.52)$$

em coordenadas polares são,

$$(\hat{r}, \hat{\theta}) = (r, \theta + \epsilon) \quad (3.53)$$

A órbita através de qualquer ponto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ é um círculo $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, enquanto que $(0, 0)$ é mapeada em si e portanto a um ponto invariante. A ação de um grupo de Lie mapeia cada ponto sobre uma órbita para um ponto na mesma órbita. Em outras palavras, toda orbita é invariante sob a ação do grupo de Lie.

Nos consideramos agora uma órbita através de um ponto não invariante (x, y) . O vetor tangente a órbita no ponto (\hat{x}, \hat{y}) é $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$, onde

$$\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}), \quad \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}) \quad (3.54)$$

Em particular, o vetor tangente no (x, y) é

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) . \quad (3.55)$$

Portanto podemos escrever para primeira ordem em ϵ a série de Taylor para a ação do grupo de Lie

$$\hat{x} = x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2) \quad (3.56)$$

$$, \hat{y} = y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2) . \quad (3.57)$$

Um ponto invariante é mapeado para si por cada simetria Lie. Portanto, para a expansões acima o ponto (x, y) só é invariante se o vetor tangente é zero, isso é, se

$$\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0 \quad (3.58)$$

Essa condição é necessária e suficiente e pode ser provada derivando repetidamente a (3.54) em seguida fazendo $\epsilon = 0$. O conjunto de vetores tangentes para um grupo de Lie particular é um exemplo de um campo de vetores tangentes, porque os vetores tangentes variam suavemente com (x, y) .

É útil pensar em (3.54) como a descrição de um fluxo constante de partículas em um avião. Nessa analogia, ϵ seria o "tempo" e o vetor tangente num ponto representa a velocidade de uma partícula naquele ponto. A órbita é a trajetória da partícula. Os pontos invariantes são os pontos fixos do fluxo. Se uma órbita cruza qualquer curva C transversalmente em um ponto (x, y) então existem simetrias de Lie que o mapeiam (x, y) em pontos que não estão em C . Portanto uma curva é invariante se e somente se não houver órbita cruzada. Em outras palavras, C é uma curva invariante se e só se a tangente de C em cada ponto (x, y) é paralela ao vetor tangente $(\xi(x, y), \eta(x, y))$. Esta condição

pode ser expressa matematicamente pela introdução da característica,

$$Q(x, y, y') = \eta(x, y) - y' \xi(x, y) \quad . \quad (3.59)$$

Se C é a curva $y = y(x)$, a tangente a C em $(x, y(x))$ é na direção $(1, y'(x))$ isto é paralelo a $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ se e somente se

$$Q(x, y, y') = 0 \quad \text{em } C \quad . \quad (3.60)$$

Este resultado nos permite caracterizar as soluções invariantes por exemplo da equação $y' = \omega(x, y)$, do seguinte modo. Em todas as soluções desta equação a característica é equivalente a

$$\bar{Q} = Q(x, y, \omega(x, y)) = \eta(x, y) - \omega(x, y)\xi(x, y) \quad . \quad (3.61)$$

Nós chamamos $\bar{Q}(x, y)$ de característica reduzida. A curva de solução $y = f(x)$ é invariante se e somente se

$$\bar{Q}(x, y) = 0 \quad \text{quando } y = f(x) \quad . \quad (3.62)$$

A simetria é trivial se e somente se $\bar{Q}(x, y)$ é identicamente zero, isso é,

$$\eta(x, y) \equiv \omega(x, y)\xi(x, y) \quad . \quad (3.63)$$

Se $\bar{Q}_y \neq 0$ então é possível determinar as curvas $y = f(x)$ que satisfazem a (3.60). Cada um dessas curvas é uma solução da equação $y' = \omega(x, y)$. Portanto a (3.60) pode ser usada para encontrar todas as soluções que são invariantes sob um dado grupo de Lie não trivial, sem que seja necessário realizar qualquer integração.

Exemplo Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (3.64)$$

tem escala de simetria da forma

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^\epsilon y) \quad (3.65)$$

O vetor tangente em (x, y) é encontrado derivando a equação acima com respeito a ϵ em $\epsilon = 0$:

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (0, y) \quad (3.66)$$

Portanto a característica reduzida será

$$\bar{Q} = Q(x, y) = \eta(x, y) - y\xi(x, y) = y \quad (3.67)$$

Por conseguinte, este grupo de Lie atua não trivialmente sobre as soluções de (3.64).

A única solução invariável é $y = 0$, que é composta inteiramente de pontos invariantes.

Outro grupo de simetria de Lie a um parâmetro da EDO acima é

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, \exp(e^\epsilon - 1)xy) \quad (3.68)$$

que tem vetor tangente em (x, y) igual a

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x, xy) \quad (3.69)$$

Cada ponto na linha $x = 0$ é invariante, além disso,

$$\bar{Q}(x, y) = \eta(x, y) - y\xi(x, y) = 0 \quad (3.70)$$

Então as simetrias de Lie da (3.68) atuam trivialmente nas soluções da equação (3.64).

Exemplo Considere a equação de Riccati

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad (x \neq 0) \quad (3.71)$$

tem um grupo de Lie de escala de simetria

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y) \quad (3.72)$$

O campo vetorial tangente é

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x, -2y) \quad (3.73)$$

então a característica reduzida é

$$\bar{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 \quad (3.74)$$

Com a condição $\bar{Q}(x, y) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - x^2 y^2 &= 0 \\ y^2 &= \frac{1}{x^4} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Portanto as simetrias de Lie são não triviais, e existem duas soluções invariantes

$$y = \pm x^{-2} \quad (3.76)$$

A maioria dos métodos de simetria usam os vetores tangentes, em vez das próprias simetrias. No entanto, as simetrias podem ser reconstruídos a partir dos vetores tangentes, integrando as EDOs acopladas $\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y})$ e $\frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y})$ sujeita às condições iniciais como $(\hat{x}(x, y; 0), \hat{y}(x, y; 0)) = (x, y)$. Então, (localmente), há uma correspondência de um-para-um entre cada grupo de Lie de um parâmetro e seu campo vetorial tangente.

3.4 Coordenadas Canônicas

Cada EDO do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ cuja as simetrias incluem as translações do tipo $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \epsilon)$, podem ser integradas diretamente. Mais geralmente, se a EDO tem simetrias de Lie que são equivalentes a translações (sob mudança de coordenadas), a EDO pode ser reescrita em termos de novas coordenadas. Todas as órbitas de $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \epsilon)$ tem o mesmo vetor tangente em cada ponto

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (0, 1) \quad (3.77)$$

As órbitas de $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \epsilon)$ são linhas que levam o mesmo x em um $y + \epsilon$. Dado qualquer grupo de simetrias de Lie a um parâmetro, visamos introduzir as coordenadas

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y)) \quad (3.78)$$

tal que

$$(\hat{r}, \hat{s}) \equiv (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \epsilon) \quad (3.79)$$

Se isso for possível, então o vetor tangente em um ponto (r, s) nas novas coordenadas é $(0, 1)$, isso é

$$\left. \frac{d\hat{r}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0, \quad \left. \frac{d\hat{s}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 1 \quad (3.80)$$

Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\hat{r}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= 0 \\ \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) \left(\frac{dr}{dx} \right) + \left(\left. \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) \left(\frac{dr}{dy} \right) &= 0 \\ \xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\hat{s}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= 1 \\
\left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) \left(\frac{ds}{dx} \right) + \left(\left. \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right) \left(\frac{ds}{dy} \right) &= 1 \\
\xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y &= 1
\end{aligned} \tag{3.82}$$

e portanto temos

$$\begin{aligned}
\xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y &= 0 \\
\xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y &= 1
\end{aligned} \tag{3.83}$$

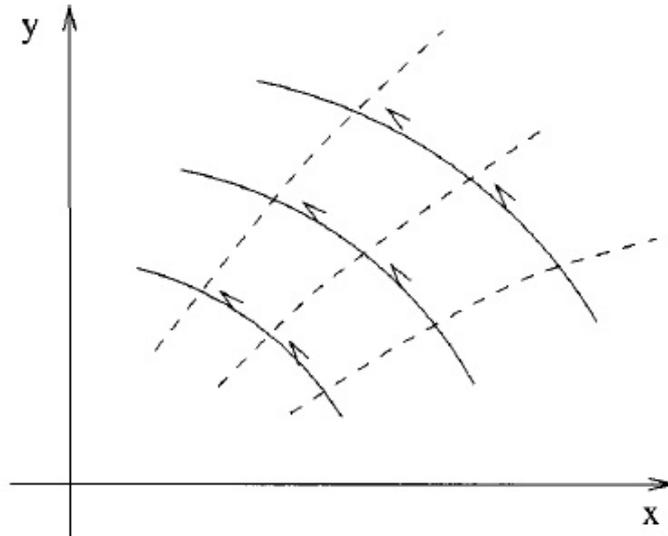


Figura 3.6: Alguns vetores tangentes para as curvas constantes $r(-)$ e $s(-)$

A mudança de coordenadas deve ser invertida na vizinhança de (x, y) , por isso, vamos impor uma condição chamada de condição de não degenerescência

$$r_x s_y - r_y s_x \neq 0 \tag{3.84}$$

Essa condição garante que se duas curvas r e s constantes se encontram num ponto, elas se cruzam transversalmente. Qualquer par de funções $r(x, y)$, $s(x, y)$ que satisfazem as equações acima são chamadas de coordenadas canônicas. Por definição, o vetor tangente a

qualquer ponto invariante não é paralelo à curva constante de r que passa por este ponto. Portanto a curva constante de r coincide (localmente) com a órbita através do ponto.

A órbita é invariante sob o grupo de Lie, então r é muitas vezes referida como uma canônica invariante de coordenadas. As curvas de s constantes não são invariantes, porque elas cruzam as órbitas unidimensionais transversalmente. Coordenadas canônicas não podem ser definidas em um ponto invariante, porque a equação determinante para s em (3.83) não tem solução se

$$\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0 \quad (3.85)$$

No entanto, coordenadas canônicas existem em alguma vizinhança de qualquer ponto não trivial. Em outras palavras, é sempre possível normalizar o vetor tangente (pelo menos localmente) desde que sejam diferentes de zero. Coordenadas canônicas não são definidas exclusivamente pelo (3.83). Na verdade, se (r, s) satisfaz a mesma, então

$$(\tilde{r}, \tilde{s}) = (F(r), s + G(r)) \quad (3.86)$$

para funções suaves arbitrárias F e G . A condição não degenerescência imposta a restrição de $F'(r) \neq 0$, mas ainda há muita liberdade. Temos a intenção de reescrever a EDO $y' = \omega(x, y)$ em termos de coordenadas canônicas. Isso envolve a diferenciação, por isso é aconselhável usar a liberdade acima para fazer r e s tão simples quanto possível. Por exemplo, é muito comum encontrar simetrias de Lie com η linear em y e ξ independente do y . Para estas simetrias, se $\xi \neq 0$, há coordenadas canônicas com r linear em y e s independente de y . Sempre que possível, vamos tentar usar uma solução simples não degenerada da (3.83). Coordenadas canônicas podem ser obtidas a partir da (3.83), utilizando o método das características. As equações características são

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = ds \quad (3.87)$$

A primeira integral de uma dada equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.88)$$

é uma função $\phi(x, y)$ cujo valor é constante em qualquer solução $y = y(x)$ desta EDO.

Portanto

$$\phi_x + f(x, y)\phi_y = 0, \quad \phi_y \neq 0 \quad (3.89)$$

A solução geral desta equação é

$$\phi(x, y) = c \quad (3.90)$$

Suponha que, $\xi(x, y) \neq 0$, vemos que a coordenada canônica invariante é uma primeira integral de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} \quad (3.91)$$

Então $r = \phi(x, y)$ é encontrada resolvendo a equação anterior. Muito frequentemente, uma solução $s(x, y)$ pode ser encontrada pela (3.83). De outra forma podemos usar $r = r(x, y)$ para escrever y como função de r e x . Então a coordenada $s(r, x)$ é obtida por

$$s(r, x) = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))} \right) \Big|_{r=r(x, y)} \quad (3.92)$$

aqui a integral é avaliada com r sendo tratado como uma constante. Similarmente, se $\xi = 0$ e $\eta \neq 0$ então

$$r = x, \quad s = \left(\int \frac{dy}{\eta(r, y)} \right) \Big|_{r=x} \quad (3.93)$$

são coordenadas canônicas

Exemplo Considere as seguintes simetrias de Lie, com escalamentos

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{k\epsilon} y), \quad k > 0 \quad (3.94)$$

O vetor tangente é

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x, ky) \quad (3.95)$$

e portanto r é primeira integral de

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{ky}{x} \\ \frac{dy}{ky} &= \frac{dx}{x} \\ \frac{1}{k} \ln |y| &= \ln |cx| \\ \ln |y^{\frac{1}{k}}| &= \ln |cx| \\ y &= cx^k \end{aligned} \quad (3.96)$$

A solução da EDO é $y = cx^k$, então nós escolhemos $r = x^{-k}y$, por simplicidade. Como o ξ é diferente de zero e independe de y , nós obtemos o s por

$$\begin{aligned} s &= \int \frac{dx}{\xi} \\ &= \int \frac{dx}{x} \\ s &= \ln |x| \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$(r, s) = (x^{-k}y, \ln |x|) \quad (3.98)$$

Essa coordenada canônica não pode ser usada em todo o plano, $s = \ln |x|$ falha na linha $x = 0$. As seguintes coordenadas canônicas podem ser usadas adequadamente perto de

$x = 0$, exceto na linha $y = 0$

$$(r, s) = (x^k y^{-1}, k^{-1} \ln |y|) \quad (3.99)$$

coordenadas canônicas não existem no ponto invariante $(0, 0)$. O exemplo acima ilustra uma dificuldade menor com coordenadas canônicas. Elas não podem ser definidas por um ponto invariante, e por isso é necessário utilizar várias coordenadas fragmentadas (patches) para cobrir todos os pontos não invariantes.

Suponha que temos sido capazes de encontrar simetrias não triviais de Lie de uma determinada $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$. Vamos recordar que as simetrias de Lie são não-triviais se e somente

$$\eta(x, y) \neq \omega(x, y)\xi(x, y) \quad (3.100)$$

Então a equação $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ pode ser reescrita em termos das coordenadas canônicas como

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \omega(x, y)s_y}{r_x + \omega(x, y)r_y} \quad (3.101)$$

podemos também escrever $\frac{s_x + \omega(x, y)s_y}{r_x + \omega(x, y)r_y}$ como uma função de r e s . Para uma mudança geral de variáveis $(x, y) \mapsto (r, s)$, podendo ser da forma

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r, s) \quad (3.102)$$

Contudo, (r, s) são coordenadas canônicas, assim a EDO acima é invariante sob o grupo de translações na direção de s

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (r, s + \epsilon) \quad (3.103)$$

portanto podemos escrever a equação como

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r) \quad (3.104)$$

Resolvendo a equação temos

$$s - \int \Omega(r) dr = c \quad (3.105)$$

onde c é uma constante arbitrária. Portanto a solução geral da equação $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ é

$$s(x, y) - \int^{r(x,y)} \Omega(r) dr = c \quad (3.106)$$

Este método muito simples pode ser aplicado a qualquer equação diferencial ordinária do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ com um grupo de Lie não trivial conhecido um parâmetro de simetrias. Claro, é preciso primeiro determinar as coordenadas canônicas resolvendo o EDO (3.91). Tipicamente, (3.91) é muito mais fácil de resolver do que $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$. Os exemplos que se seguem demonstram a eficácia do método em lidar com EDOs cujas soluções não são óbvias. Em [8] é mostrado como podemos usar coordenadas canônicas para reduzir a ordem de uma equação diferencial ordinária (EDO).

Exemplo Vamos considerar a equação de Riccati da qual já encontramos as soluções

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad (x \neq 0) \quad (3.107)$$

que são invariantes sob simetrias de Lie

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^{-2\epsilon} y) \quad (3.108)$$

Agora vamos completar as soluções da mesma. Como as coordenadas canônicas adequadas

são

$$(r, s) = (x^2y, \ln|x|) \quad (3.109)$$

Então a equação (3.107) se reduz a

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r^2 - 1} \quad (3.110)$$

Resolvendo diretamente e escrevendo r e s em termos de x e y temos que a solução geral para a equação de (3.107) é

$$y = \frac{c + x^2}{x^2(c - x^2)} \quad (3.111)$$

A curva de solução invariante $y = x^{-2}$ pode ser considerada no limite que c tende a infinito e a outra curva de solução $y = -\frac{1}{x^2}$ quando $c = 0$.

3.5 Geradores Infinitesimais

Até agora, restringimos a atenção para EDOs de primeira ordem da forma $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$. Isso nos permitiu discutir muitas das idéias geométricas que são a base dos métodos de simetria. Precisamos estender essas idéias para equações diferenciais ordinárias de ordem superior e equações diferenciais parciais, para isso não será mais possível usar imagens bidimensionais para representar tudo de importante. Em vez disso, nós introduzimos uma notação compacta que pode ser facilmente estendida para lidar com equações diferenciais de ordem arbitrária, com qualquer número de variáveis dependentes e independentes. Suponha que uma EDO de primeira ordem tem um grupo de Lie de um parâmetro de simetrias, cujo vetor tangente em (x, y) é (ξ, η) . Em seguida, o operador diferencial parcial

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y \quad (3.112)$$

é chamado de gerador infinitesimal do grupo de Lie. Assim podemos reescrever as equações que definem as coordenadas canônicas como

$$\begin{aligned} Xr &= 0 \\ \xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y &= 0 \end{aligned} \tag{3.113}$$

e

$$\begin{aligned} Xs &= 1 \\ \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y &= 0 \end{aligned} \tag{3.114}$$

Para ver como o gerador infinitesimal afeta as coordenadas vamos considerar agora uma função $F(u, v)$ onde $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ sendo uma função arbitrária suave, e aplicando o gerador na mesma temos

$$\begin{aligned} XF(u, v) &= XF(u(x, y), v(x, y)) \\ &= \xi \{u_x F_u + v_x F_v\} + \eta \{u_y F_u + v_y F_v\} \\ &= (Xu) F_u + (Xv) F_v \end{aligned} \tag{3.115}$$

Contudo $F(u, v)$ é arbitrária e portanto, o gerador em termos das novas coordenadas é

$$X = (Xu) \partial_u + (Xv) \partial_v \tag{3.116}$$

Em particular, se $(u, v) = (r, s)$, ou seja, igual as coordenadas canônicas temos então

$$X = (Xr) \partial_r + (Xs) \partial_s \tag{3.117}$$

e das equações (3.113) e (3.114) temos

$$X = (Xr) \partial_r + (Xs) \partial_s = \partial_s \tag{3.118}$$

Nas coordenadas canônicas o vetor tangente é $(0, 1)$, e portanto (3.118) é consistente com nossa definição de gerador infinitesimal. De fato o X representa o campo vetorial tangente em todos os sistemas de coordenadas. Se considerarmos $\{\partial_x, \partial_y\}$ como uma base para o espaço de campos vetoriais no plano, X é o vetor tangente em (x, y) . O gerador infinitesimal fornece uma maneira coordenada independente de caracterizar a ação de simetrias de Lie de funções. Suponhamos que $G(r, s)$ é um função suave,

$$F(x, y) = G(r(x, y), s(x, y)) \quad (3.119)$$

Em qualquer ponto não invariante (x, y) , as simetrias de mapeiam $F(x, y)$ para

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = G(\hat{r}, \hat{s}) = G(r, s + \epsilon) \quad (3.120)$$

Aplicando o teorema de Taylor e comparando com a (3.118) temos

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} \frac{\partial^j G}{\partial s^j}(r, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} X^j G(r, s) \quad (3.121)$$

voltando para as coordenadas (x, y) temos então

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} X^j F(x, y) \quad (3.122)$$

Se a expansão converge, esta é chamada de série de Lie de F sobre (x, y) . Assumimos que (x, y) não é um ponto invariante, mas a (3.122) também é válida em todos os pontos invariantes. A razão disto é que $X = 0$, em qualquer ponto invariante, de modo que a série de Lie tem apenas o termo $j = 0$, que é $F(x, y)$. Que nos leva a escrever as simetrias de Lie da serie (3.122) como

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = e^{\epsilon X} F(x, y) \quad (3.123)$$

Podemos então reconstruir as simetrias de Lie da seguinte maneira

$$\hat{x} = e^{\epsilon X} x, \tag{3.124}$$

$$\hat{y} = e^{\epsilon X} y$$

então podemos reescrever a (3.123) como

$$F(e^{\epsilon X} x, e^{\epsilon X} y) = e^{\epsilon X} F(x, y) \tag{3.125}$$

Generalizando para um numero qualquer de variáveis, z^1, \dots, z^L , com simetrias de Lie da forma

$$\hat{z}^s(z^1, \dots, z^L; \epsilon) = z^s + \epsilon \zeta^s(z^1, \dots, z^L) + O(\epsilon^2), \quad s = 1, \dots, L \tag{3.126}$$

O gerador infinitesimal do grupo de Lie a um parâmetro é

$$X = \zeta^s(z^1, \dots, z^L) \frac{\partial}{\partial z^s} \tag{3.127}$$

Aqui convenção de somatório é usada para indicar que se um índice é repetido, deve-se somar sobre todos os valores possíveis do mesmo. As simetrias de Lie podem ser reconstruídas a partir da série de Lie da mesma maneira

$$\hat{z}^s = e^{\epsilon X} z^s, \quad s = 1, \dots, L \tag{3.128}$$

Mais geral, se F é uma função suave temos,

$$F(e^{\epsilon X} z^1, \dots, e^{\epsilon X} z^L) = e^{\epsilon X} F(z^1, \dots, z^L) \tag{3.129}$$

Usaremos estes resultados no estudo de equações diferenciais de ordens mais altas.

3.6 Condição de Simetria Linearizada

Já sabemos que podemos encontrar simetrias de Lie de uma equação do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ utilizando a condição de simetria equivalente a

$$\frac{\hat{y}_x + \omega(x, y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x, y)\hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad (3.130)$$

Em geral, isto é uma equação diferencial parcial não-linear muito complicada. No entanto, as simetrias de Lie podem ser derivadas a partir de uma condição muito mais simples no campo vetorial tangente. Aqui lembramos que uma vez que os vetores tangentes forem encontrados, as simetrias de Lie podem ser reconstruídas. Por definição, as simetrias de Lie da equação $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$ são da forma

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\xi(x, y) + O(\epsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.131)$$

vamos agora substituir a (3.131) na (3.130) temos

$$\begin{aligned} \frac{\omega(x, y) + \epsilon\{\eta_x + \omega(x, y)\eta_y\} + O(\epsilon^2)}{1 + \epsilon\{\xi_x + \omega(x, y)\xi_y\} + O(\epsilon^2)} &= \omega(x + \epsilon\xi(x, y) \\ &+ O(\epsilon^2), y + \epsilon\eta(x, y) + O(\epsilon^2)) \end{aligned} \quad (3.132)$$

Expandindo como série de Taylor em $\epsilon = 0$, e assumindo que cada série converge temos

$$\omega + \epsilon\{\eta_x(\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2\} + O(\epsilon^2) = \omega + \epsilon\{\xi\omega_x + \eta\omega_y\} + O(\epsilon^2) \quad (3.133)$$

desprezando os termos de ordem mais alta em ϵ temos

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2 = \xi\omega_x + \eta\omega_y \quad (3.134)$$

Que é a condição de simetria linearizada. Assim podemos reduzir o problema no sentido que esta última equação é linear e mais fácil de encontrar sua solução usando alguns ansatz

do que tentando resolver a (3.130) diretamente. A condição de simetria linearizada pode ser reescrita em termos da característica reduzida. Como

$$\bar{Q} = \eta - \omega\xi \quad (3.135)$$

então pode-se escrever

$$\bar{Q}_x + \omega\bar{Q}_y = \omega_y\bar{Q} \quad (3.136)$$

Cada solução da (3.136) corresponde a infinitos grupos de Lie, para \bar{Q} satisfazendo a mesma temos

$$(\xi, \eta) = (\xi, \bar{Q} + \omega\xi) \quad (3.137)$$

é um campo vetorial tangente de um grupo a um parâmetro, para qualquer função ξ . Todas as simetrias de Lie triviais correspondem à solução de $\bar{Q} = 0$ da (3.136). Em princípio, as simetrias não triviais podem ser encontradas a partir da (3.136), utilizando o método das características. As equações características são

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\omega(x, y)} = \frac{\bar{Q}}{\omega_y(x, y)\bar{Q}} \quad (3.138)$$

A primeira equação (3.136) é equivalente a EDO do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$, de modo geral, não se pode encontrar uma solução diferente de zero de (3.136) sem saber a solução geral de $\frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$. Se (ξ, η) é uma solução diferente de zero da (3.134), então $(k\xi, k\eta)$, também é para qualquer constante k diferente de zero. Esta liberdade corresponde a substituir ϵ por $k^{-1}\epsilon$, o que não altera as órbitas do grupo de Lie. Assim, as mesmas simetrias de Lie são recuperadas, independentemente do valor de k . A liberdade de redimensionar ϵ significa que \bar{Q} pode ser multiplicado por constante diferente de zero conveniente, sem afetar as órbitas. Para resolver (3.134), é necessário utilizar um ansatz adequado, isto é, para colocar algumas restrições adicionais sobre ξ e η .

Exemplo Considere a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{xy} + 1 \quad (3.139)$$

Temos a função bem simples $\omega(x, y)$, por isso vamos tentar um ansatz não muito restrito. Muitas simetrias de Lie tem campos vetoriais tangentes da forma

$$\xi = \alpha(x), \quad \eta = \beta(x)y + \gamma(x), \quad (3.140)$$

A equação terá as simetrias se a condição de simetria linearizada for satisfeita com

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\alpha(x) \\ \hat{y} &= y + \epsilon\{\beta(x)y + \gamma(x)\} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Então temos

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_x + \omega(x, y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x, y)\hat{x}_y} &= \omega(\hat{x}, \hat{y}) \\ \epsilon(\beta y + \gamma') + y'(1 + \beta\epsilon) &= (1 + \epsilon\alpha') \left\{ \frac{1 - (y + \epsilon[\beta y + \gamma])^2}{(x + \epsilon\alpha)[y + \epsilon(\beta y + \gamma)]} + 1 \right\} \\ \beta' y + \gamma' + (\beta - \alpha') \left(\frac{1 - y^2}{xy} + 1 \right) &= \alpha \left(\frac{y^2 - 1}{x^2 y} + 1 \right) - (\beta y + \gamma) \left(\frac{1 + y^2}{xy^2} \right) \end{aligned} \quad (3.142)$$

Comparando os termos de potência y e y^{-2} e termos independentes temos um sistema de equações do tipo

$$\gamma = 0 \quad (3.143)$$

$$\frac{\beta - \alpha'}{x} = -\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x} \quad (3.144)$$

$$\beta = \alpha' \quad (3.145)$$

$$\alpha' + \frac{\alpha}{x} = 0 \quad (3.146)$$

Resolvendo a 3.146 temos

$$\alpha = c_1 x^{-1} \quad (3.147)$$

e portanto

$$\beta = -c_1 x^{-2} \quad (3.148)$$

Portanto qualquer campo vetorial tangente da forma

$$(\xi, \eta) = (c_1 x^{-1}, -c_1 x^{-2} y) \quad (3.149)$$

satisfaz a condição de simetria linearizada.

Podemos agora generalizar a condição de simetria linearizada possibilitando-nos trabalhar com equações diferenciais ordinárias de ordens mais altas. Vamos considerar agora a EDO da forma

$$y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(k)} \equiv \frac{d^k y}{dx^k} \quad (3.150)$$

Assumindo que ω é uma função localmente suave de todos os seus argumentos. Qualquer difeomorfismo

$$\Gamma : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}), \quad (3.151)$$

mapeia curvas no plano. Essa ação de Γ no plano induz uma ação sobre as derivadas $y^{(k)}$, que é o mapeamento

$$\Gamma : (x, y, y', \dots, y^{(n)}) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n)}), \quad (3.152)$$

onde

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d^k \hat{y}}{d\hat{x}^k}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.153)$$

Esse mapeamento é chamado da enésima prolongação de Γ . As funções $y^{(k)}$ são calculadas recursivamente usando a regra da cadeia da seguinte maneira

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{d\hat{x}} = \frac{D_x \hat{y}^{(k-1)}}{D_x \hat{x}}, \quad \hat{y}^{(0)} \equiv \hat{y} \quad (3.154)$$

onde novamente temos a derivada total com respeito a x

$$D_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \dots \quad (3.155)$$

A condição de simetria para a EDO (3.150) é

$$\hat{y}^{(n)} = \omega(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)}) \quad \text{quando} \quad y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.156)$$

onde as funções $\hat{y}^{(k)}$ são dadas por (3.154). Para quase todos os EDOs, a condição de simetria da (3.156) é não-linear. Simetrias de Lie são obtidas por linearização da mesma sobre $\epsilon = 0$. Nenhuma linearização é possível para simetrias discretas, o que os torna difíceis de encontrar. Entretanto geralmente é fácil descobrir se um determinado difeomorfismo é ou não uma simetria de uma equação diferencial ordinária particular.

Exemplo Vamos agora considerar a transformação

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right) \quad (3.157)$$

essa transformação é uma simetria da EDO de segunda ordem

$$y'' = 0, \quad x > 0 \quad (3.158)$$

então nos podemos obter

$$\hat{y}' = \frac{D_x \left(\frac{y}{x} \right)}{D_x \left(\frac{1}{x} \right)} = y - xy'$$

$$\hat{y}'' = \frac{D_x (y - xy')}{D_x \left(\frac{1}{x} \right)} = x^3 y''$$

então a condição de simetria

$$\hat{y}'' = 0 \quad \text{quando} \quad y'' = 0 \quad (3.159)$$

é satisfeita. Esta simetria é sua própria inversa, e pertence a um grupo discreto de ordem

2. A solução geral da EDO é,

$$y = c_1 x + c_2 \quad (3.160)$$

é mapeada pela 3.157 a solução

$$\hat{y} = \frac{y}{x} = c_1 + \frac{c_2}{x} = c_1 + c_2 \hat{x} \quad (3.161)$$

A condição de simetria linear para simetrias de Lie é derivada pelo mesmo método que usamos para EDOs de primeira ordem. A simetria trivial correspondente para $\epsilon = 0$ deixa cada ponto inalterado. Portanto, para ϵ suficientemente próximo zero, as simetrias de Lie prolongadas são da forma

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon \xi + O(\epsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \epsilon \eta + O(\epsilon^2) \\ \hat{y}^{(k)} &= y^{(k)} + \epsilon \eta^{(k)} + O(\epsilon^2), \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.162)$$

Substituindo a (3.162) na (3.156) temos

$$\eta^{(n)} = \xi\omega_x + \eta\omega_y + \eta^{(1)}\omega_{y'} + \dots + \eta^{(n-1)}\omega_{y^{(n-1)}} \quad (3.163)$$

ou

$$\eta^{(n)} = X\omega \quad (3.164)$$

onde o gerador infinitesimal é da forma

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \dots + \eta^{(n-1)}\partial_{y^{(n-1)}} \quad (3.165)$$

As funções $\eta^{(k)}$ são calculadas recursivamente da (3.154), do seguinte modo. Para $k = 1$ temos então,

$$\hat{y}^{(1)} = \frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = \frac{y' + \epsilon D_x \eta + O(\epsilon^2)}{1 + \epsilon D_x \xi + O(\epsilon^2)} = y' + \epsilon \left(D_x \eta - y' D_x \xi \right) + O(\epsilon^2) \quad (3.166)$$

portanto

$$\eta^{(1)} = D_x \eta - y' D_x \xi \quad (3.167)$$

Similarmente

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)} + \epsilon D_x \eta^{(k-1)} + O(\epsilon^2)}{1 + \epsilon D_x \xi + O(\epsilon^2)} \quad (3.168)$$

e, portanto

$$\eta^{(k)}(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi \quad (3.169)$$

As funções ξ , η e $\eta^{(k)}$ todas podem ser escritas em termos da característica, $Q = \eta - y'\xi$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\xi &= Q_{y'}, \\ \eta &= Q - y'Q_{y'}, \\ \eta^{(k)} &= D_x^k Q - y^{(k+1)}Q_{y'}, \quad k \geq 1\end{aligned}\tag{3.170}$$

Para EDOs de primeira ordem a condição de simetria linearizada da (3.163) é $X\omega$ onde gerador infinitesimal é da forma

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y\tag{3.171}$$

Recordamos que o gerador infinitesimal é associado com o vetor tangente a órbita passando através de (x, y) , escrito como

$$(\xi, \eta) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \right)\tag{3.172}$$

Para lidar com a ação de simetrias de Lie em derivadas de ordem n ou menores, nos introduzimos o gerador infinitesimal prolongado

$$X^{(n)} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \eta^{(1)}\partial_{y'} + \dots + \eta^{(n)}\partial_{y^{(n)}}\tag{3.173}$$

O coeficiente de $\partial_{y^{(k)}}$ é o termo de $O(\epsilon)$ na expansão de $y^{(k)}$, e $X^{(n)}$ é associado com o vetor tangente no espaço das variáveis $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. Nós podemos usar o gerador infinitesimal prolongado para escrever a condição de simetria linearizada numa forma compacta que é

$$X^{(n)} \left(y^{(n)} - \omega \left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)} \right) \right) = 0\tag{3.174}$$

3.7 Equações Determinantes para Simetrias de Lie

Toda simetria que nós encontramos é um difeomorfismo da forma

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)) \quad (3.175)$$

este tipo de difeomorfismo é chamado de ponto de transformação, qualquer ponto de transformação que é também uma simetria é chamado de ponto de simetria. Agora focamos nossa atenção para pontos de simetria. Para encontrarmos pontos de simetria de uma EDO do tipo $y^{(n)} = \omega(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, nós devemos primeiro calcular o $\eta^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$. As funções ξ e η tem dependência apenas de x e y e portanto a (3.167) e (3.169) resultam em

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2; \quad (3.176)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 - \xi_{yy} y'^3 \\ &+ \left\{ \eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y' \right\} y''; \end{aligned} \quad (3.177)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(3)} &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx}) y' + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy}) y'^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy}) y'^3 - \xi_{yyy} y'^4 \\ &+ 3 \left\{ \eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_{yy} - 3\xi_{xy}) y' - 2\xi_{yy} y'^2 \right\} y'' \\ &- 3\xi_y y''^2 + \left\{ \eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y' \right\} y''' \end{aligned} \quad (3.178)$$

O número de termos de $\eta^{(k)}$ aumenta exponencialmente com k , então é recomendado para o estudo de EDOs de ordens mais altas uma algebra computacional. Entretanto, a técnica básica para encontrar pontos de simetrias de Lie pode ser aprendida pelo estudo de EDOs de ordem mais baixa. É importante dominar esta técnica antes de ir para o computador, vejamos o exemplo

Exemplo Considere a EDO de segunda ordem

$$y'' = 0 \quad (3.179)$$

Sabendo que a transformação infinitesimal (desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois em ϵ) é do tipo

$$\begin{aligned}\hat{y} &= y + \epsilon\eta \\ \hat{x} &= x + \epsilon\xi\end{aligned}\tag{3.180}$$

então

$$\hat{y}'' = \frac{d\hat{y}'}{d\hat{x}} = y'' + \epsilon\eta^{(2)}\tag{3.181}$$

portanto

$$\begin{aligned}\hat{y}'' &= 0 \\ \text{ou} \\ y'' + \epsilon\eta^{(2)} &= 0\end{aligned}\tag{3.182}$$

Substituindo a (3.179) na (3.182) temos então a condição de simetria linearizada desta equação que é

$$\eta^{(2)} = 0 \quad \text{quando} \quad y'' = 0\tag{3.183}$$

daí temos

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + \left\{ \eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y' \right\} y'' = 0\tag{3.184}$$

Como ξ e η independem de y' , a condição de simetria linearizada pode ser decomposta no seguinte sistema de equações determinantes

$$\begin{aligned}\eta_{xx} &= 0 \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} &= 0 \\ \eta_{yy} - 2\xi_{xy} &= 0 \\ \xi_{yy} &= 0\end{aligned}\tag{3.185}$$

A solução geral da última equação do sistema (3.185) é

$$\xi(x, y) = A(x)y + B(x)\tag{3.186}$$

onde as funções A e B são arbitrárias. E a terceira equação do mesmo sistema nos dá

$$\eta(x, y) = A'(x)y^2 + C(x)y + D(x)\tag{3.187}$$

onde C e D são também funções arbitrárias. Das equações que restaram temos

$$A'''(x)y^2 + C''(x)y + D''(x) = 0, \quad 3A''(x)y + 2C'(x) - B''(x) = 0\tag{3.188}$$

Igulando potências de y na (3.188), nós obtemos um sistema de equações das funções arbitrárias A, B, C e D

$$A''(x) = 0, \quad C''(x) = 0, \quad D''(x) = 0, \quad B''(x) = 2C'(x)\tag{3.189}$$

Resolvendo as equações, temos o seguinte resultado. Para o grupo de simetrias de Lie a um parâmetro da equação (3.179), as funções ξ e η são da forma

$$\begin{aligned}\xi(x, y) &= c_1 + c_3x + c_5y + c_7x^2 + c_8xy, \\ \eta(x, y) &= c_2 + c_4y + c_6x + c_7xy + c_8y^2,\end{aligned}$$

onde c_1, \dots, c_8 são constantes. Portanto a forma mais geral do gerador infinitesimal é

$$X = \sum_{i=1}^8 c_i X_i \quad (3.190)$$

onde

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= x\partial_x, & X_4 &= y\partial_y, & X_5 &= y\partial_x, & X_6 &= x\partial_y, \\ X_7 &= x^2\partial_x + xy\partial_y, & X_8 &= xy\partial_x + y^2\partial_y \end{aligned} \quad (3.191)$$

Exemplo Vamos tratar agora um sistema mais realista como o oscilador harmônico cuja equação de movimento é

$$\ddot{q} + q = 0 \quad (3.192)$$

vamos fazer agora a seguinte transformação infinitesimal

$$\begin{aligned} q' &= q + \epsilon\eta(q, t), \\ t' &= t + \epsilon\theta(q, t). \end{aligned} \quad (3.193)$$

Se as variações de uma transformação de simetria são funções apenas do tempo e das coordenadas e não de suas derivadas essa transformação é chamada de simetria de Lie.

Fazendo as derivadas temos então

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= \frac{dq'}{dt'} = \frac{dq'}{dt} \frac{dt}{dt'} = (\dot{q} + \epsilon\eta_t + \epsilon\eta_q\dot{q})(1 - \epsilon\theta_t - \epsilon_q\dot{q}) \\ &= \dot{q} + \epsilon[\eta_t + \eta_q\dot{q} - \theta_t\dot{q} - \theta_q\dot{q}^2], \end{aligned} \quad (3.194)$$

temos também

$$\begin{aligned}
\ddot{q}' &\equiv \frac{d\dot{q}'}{dt'} = \frac{d\dot{q}'}{dt} \frac{dt}{dt'} \\
&= (\ddot{q} + \epsilon [\eta_{tt} + 2\eta_{qt}\dot{q} + \eta_{qq}\dot{q}^2 + \eta_q\ddot{q} - \theta_{tt}\dot{q} - 2\theta_{qt}\dot{q}^2 \\
&\quad - 2\theta_t\ddot{q} - \theta_{qq}\dot{q}^3 - 3\theta_q\dot{q}\ddot{q}]) \times (1 - \epsilon\theta_t - \epsilon\theta_q\dot{q}), \tag{3.195}
\end{aligned}$$

desprezando os termos de ordens mais altas em ϵ temos

$$\begin{aligned}
\ddot{q}' &= \ddot{q} + \epsilon [\eta_{tt} + 2\eta_{qt}\dot{q} + \eta_{qq}\dot{q}^2 + \eta_q\ddot{q} - \theta_{tt}\dot{q} - 2\theta_{qt}\dot{q}^2 \\
&\quad - 2\theta_t\ddot{q} - \theta_{qq}\dot{q}^3 - 3\theta_q\dot{q}\ddot{q}]. \tag{3.196}
\end{aligned}$$

Substituindo a transformação na equação original temos

$$\ddot{q}' + q' = 0 \tag{3.197}$$

que fica

$$\begin{aligned}
&\epsilon [\eta_{tt} + 2\eta_{qt}\dot{q} + \eta_{qq}\dot{q}^2 + \eta_q\ddot{q} - \theta_{tt}\dot{q} - 2\theta_{qt}\dot{q}^2 \\
&\quad - 2\theta_t\ddot{q} - \theta_{qq}\dot{q}^3 - 3\theta_q\dot{q}\ddot{q}] + \epsilon\eta = 0 \tag{3.198}
\end{aligned}$$

É uma equação polinomial em \dot{q} , que nos permite igualar a zero separadamente os coeficientes das potências de \dot{q} , desse modo, ficamos com

$$\theta_{qq} = 0, \tag{3.199}$$

$$\eta_{qq} - 2\theta_{qt} = 0, \tag{3.200}$$

$$\theta_{tt} - 3\theta_{qt} - 2\eta_{qt} = 0, \tag{3.201}$$

$$\eta_{tt} - \eta_{qt} + 2\theta_{qt} + \eta = 0, \tag{3.202}$$

A solução para a (3.199) é do tipo

$$\theta = g_1(t)q + g_2(t), \quad (3.203)$$

onde $g_1(t)$ e $g_2(t)$ são funções a encontrar. E substituindo a (3.203) na (3.200) obtemos

$$\eta = \dot{g}_1(t)q^2 + g_3(t)q + g_4(t), \quad (3.204)$$

onde $g_3(t)$ e $g_4(t)$ também precisamos determinar. E agora substituindo a (3.203) e (3.204) na (3.201) nos dá

$$\ddot{g}_1(t)q + \ddot{g}_2(t) - 3g_1(t)q - 4\dot{g}_1(t)q - 2\dot{g}_3(t) = 0 \quad (3.205)$$

que é uma equação polinomial em q , portanto igualando a zero os coeficientes das potências de q , obtemos

$$\ddot{g}_1(t) = -g_1(t), \quad (3.206)$$

$$\ddot{g}_2(t) - 2\dot{g}_3(t) = 0. \quad (3.207)$$

Da mesma maneira, a (3.202) nos fornece

$$\begin{aligned} & \ddot{g}_1(t)q^2 + \ddot{g}_3(t)q + \ddot{g}_4(t) - 2\dot{g}_1(t)q^2 - g_3(t)q + 2\dot{g}_1(t)q^2 + 2\dot{g}_2(t)q + \dot{g}_1(t)q^2 \\ & + g_3(t)q + g_4(t) = 0, \end{aligned} \quad (3.208)$$

que nos fornece as seguintes equações

$$\ddot{g}_1(t) = -\dot{g}_1(t), \quad (3.209)$$

$$\ddot{g}_3(t) = -2\dot{g}_2(t), \quad (3.210)$$

$$\ddot{g}_4(t) = -g_4(t). \quad (3.211)$$

A equação (3.209) decorre da (3.206). A solução geral da mesma é

$$g_1(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad (3.212)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. A solução da (3.211) é

$$g_4(t) = c_3 \sin t + c_4 \cos t. \quad (3.213)$$

Substituindo a (3.210) na (3.207) temos

$$\ddot{g}_3(t) = -4\dot{g}_3(t), \quad (3.214)$$

e fazendo o inverso obtemos

$$\ddot{g}_2(t) = -4\dot{g}_2(t). \quad (3.215)$$

Então temos

$$g_3(t) = c_5 \sin 2t + c_6 \cos 2t + c_7, \quad (3.216)$$

e

$$g_2(t) = -c_5 \sin 2t + c_6 \cos 2t + c_8. \quad (3.217)$$

As transformações de simetria correspondentes são então dadas por

$$\eta(q, t) = (c_1 \cos t - c_2 \sin t) q^2 + (c_5 \sin 2t + c_6 \cos 2t + c_7) q + c_3 \sin t + c_4 \cos t, \quad (3.218)$$

$$\theta(q, t) = (c_1 \sin t + c_2 \cos t) q + c_6 \sin 2t + c_9 \cos 2t + c_8, \quad (3.219)$$

que formam um grupo de transformações a oito parâmetros, enquanto que as simetrias da ação formam um grupo a apenas cinco parâmetros. Isso demonstra que existem simetrias das equações de movimento que não conservam a ação [9]. A forma mais geral para simetrias de um sistema de equações de movimento são da forma

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= q + \epsilon \eta(q, \dot{q}, t), \\ t' &= t + \epsilon \theta(q, \dot{q}, t). \end{aligned} \quad (3.220)$$

Exemplo Vamos considerar agora uma EDO mais complicada

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - y^2 \quad (3.221)$$

essa equação surgiu do estudo do nado de microorganismos. A condição de simetria linearizada é

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + \left\{ \eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y' \right\} \left(\frac{y'^2}{y} - y^2 \right) \\ &= \eta \left(-\frac{y'^2}{y^2} \right) + \left\{ \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2 \right\} \left(\frac{2y'}{y} \right) \end{aligned} \quad (3.222)$$

Comparando as potências de y' , nós obtemos as equações determinantes

$$\begin{aligned} \eta_{yy} + \frac{1}{y}\xi_y &= 0, \\ 2\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - \frac{1}{y}\eta_y + \frac{1}{y^2}\eta &= 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} + 3y^2\xi_y - \frac{2}{y}\eta_x &= 0, \\ \eta_{xx} - y^2(\eta_y - 2\xi_x) + 2y\eta &= 0 \end{aligned} \quad (3.223)$$

Da primeira equação da (3.223), encontramos

$$\xi = A(x) \ln |y| + B(x) \quad (3.224)$$

e da segunda equação da (3.223) temos

$$\eta = A'(x)y (\ln |y|)^2 + C(x)y \ln |y| + D(x)y \quad (3.225)$$

Aqui as funções A, B, C e D são funções desconhecidas que são determinadas pelas equações remanescentes de (3.223). Substituindo a (3.224) e (3.225) na terceira equação da (3.223), nós obtemos

$$3A' \ln |y| + 3A(x)y + 2C'(x) - B'' = 0 \quad (3.226)$$

Portanto

$$A(x) = 0, \quad B''(x) = 2C'(x) \quad (3.227)$$

Nós agora substituímos a (3.224) e (3.225) na última equação determinante, levando em conta $A(x) = 0$, que nos leva

$$C(x)y^2 \ln |y| + C''(x)y \ln |y| + \left(2B'(x) - C(x) + D(x)\right)y^2 + D''(x)y = 0 \quad (3.228)$$

resultando no sistema

$$C(x) = 0, \quad D(x) = 0, \quad D''(x) = 0 \quad (3.229)$$

levando em conta a (3.227), encontramos

$$B(x) = c_1 + c_2x, \quad D(x) = -c_2, \quad (3.230)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Conseqüentemente, a solução geral da condição de simetria linearizada é

$$\xi = c_1 + c_2x, \quad \eta = -2c_2y \quad (3.231)$$

O gerador infinitesimal é da forma

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2, \quad (3.232)$$

onde

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x - 2y\partial_y \quad (3.233)$$

Seja Ξ o conjunto de todos os geradores infinitesimais do grupo de pontos de simetria de Lie a um parâmetro de uma EDO $n \geq 2$. A condição de simetria linearizada é linear em ξ e η , e portanto

$$X_1, X_2 \in \Xi \Rightarrow c_1 X_1 + c_2 X_2 \in \Xi, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.234)$$

Portanto Ξ é um espaço vetorial. A dimensão R deste espaço vetorial é o número de constantes que aparecem na solução geral da condição de simetria linearizada. Como nos exemplos acima todo $X \in \Xi$ pode ser escrito na forma

$$\sum_{i=1}^R c_i X_i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad (3.235)$$

onde $\{X_1, \dots, X_R\}$ é a base de Ξ . O conjunto de pontos de simetria gerados por $X \in \Xi$ formam um grupo de Lie (local) a R parâmetros.

3.8 Soluções invariantes

Muitas EDOs não podem ser completamente resolvidas usando pontos de simetrias Lie. Mesmo assim, pode ser possível encontrar soluções que são invariantes sob um grupo gerado por um determinado X . As mesmas se são invariantes satisfazem

$$Q(x, y, y') = \eta - y'\xi = 0 \quad (3.236)$$

Tudo que é necessário é resolver a EDO de primeira ordem anterior, depois de verificar (se houver) qual destas soluções satisfazem EDO dada.

Exemplo A equação de Blasius é

$$y''' = -yy'' \quad (3.237)$$

tem escala e simetria translacional gerada por

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x - y\partial_y \quad (3.238)$$

Estas simetrias permitem reduzir a equação Blasius para uma EDO de primeira ordem cuja solução não é conhecida. Portanto, a nossa única chance de encontrar soluções exatas é procurar soluções invariantes. Para $X = X_1$, $\xi = 1$ e $\eta = 0$, então a condição de curva invariante $Q = \eta - y'\xi = 0$ é $y' = 0$. Portanto cada curva que é invariante sob X_1 é da forma

$$y = c \quad (3.239)$$

Todas essas curvas são soluções da equação de Blasius. Nós agora vamos procurar soluções que são invariantes sob $X = X_2$. A condição de curva invariante é

$$Q = -y - xy' = 0 \quad (3.240)$$

Resolvendo temos as curvas invariantes que são

$$y = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.241)$$

A equação de Blasius é satisfeita se

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{3}{x} \quad (3.242)$$

A solução $y = 0$ é invariante sob ambos os geradores X_1 e X_2 . Mesmo não tendo considerado todos os possíveis grupos a um parâmetro, nós podemos encontrar as soluções que restam, porque cada grupo de Lie a um parâmetro é gerado por $X = kX_1 + X_2$, com k diferente de zero. Assim a condição de curva invariante é

$$Q = -y - (x + k)y' = 0 \quad (3.243)$$

o que leva às soluções invariantes

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \frac{3}{x + k} \quad (3.244)$$

Estas soluções também podem ser obtidas considerando a ação do grupo gerado por X_1 sobre cada uma das soluções invariantes da equação (3.242). As simetrias geradas por X_1 são

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \epsilon, y), \quad \epsilon \in \mathbb{R} \quad (3.245)$$

Considerando a ação da (3.245) sobre a solução invariante $y = \frac{3}{x}$. Esta solução pode ser reescrita como

$$\hat{y} = \frac{3}{\hat{x} - \epsilon} \quad (3.246)$$

É invariante sobre

$$\begin{aligned} X_2 &= (X_2 \hat{x}) \partial_{\hat{x}} + (X_2 \hat{y}) \partial_{\hat{y}} \\ &= x \partial_{\hat{x}} - y \partial_{\hat{y}} \\ &= (\hat{x} - \epsilon) \partial_{\hat{x}} - \hat{y} \partial_{\hat{y}} \end{aligned} \quad (3.247)$$

Nós vamos então introduzir a notação útil, de modo que, se

$$X_i = \xi_i(x, y) \partial_x + \eta_i(x, y) \partial_y \quad (3.248)$$

então

$$\hat{X}_i = \xi_i(\hat{x}, \hat{y})\partial_{\hat{x}} + \eta_i(\hat{x}, \hat{y})\partial_{\hat{y}} \quad (3.249)$$

portanto a (3.246) é invariante sob

$$X_2 = \hat{X}_2 - \epsilon\hat{X}_1 \quad (3.250)$$

consequentemente $y = \frac{3}{x}$ é mapeada para

$$y = \frac{3}{x - \epsilon} \quad (3.251)$$

que é invariante sob $X_2 - \epsilon X_1$. Um cálculo similar mostra que $y = 0$ é mapeada nela mesma pela ação do grupo gerado por X_1 .

A coordenada canônica invariante $r(x, y)$ satisfaz

$$\xi D_x r + Q r_y = \xi r_x + \eta r_y = 0 \quad (3.252)$$

então cada solução invariante onde $\xi \neq 0$ é da forma $r(x, y) = c$. Podem ser também soluções invariantes $y = f(x)$ tal que

$$\xi(x, f(x)) = \eta(x, f(x)) = 0 \quad (3.253)$$

De um modo geral, estas são facilmente obtidas através da resolução de qualquer $\xi(x, y) = 0$ ou $\eta(x, y) = 0$, em seguida, verificar se a solução satisfaz a EDO dada e a condição anterior. Não há outra maneira de encontrar soluções invariantes em que ξ não desapareça, o que é particularmente útil se $Q(x, y, y') = \eta - y'\xi = 0$ é difícil de resolver. Para pontos de simetrias de Lie, ξ e η são funções de x e y somente. Portanto a (3.236) é válida se

$$y' = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} \quad (3.254)$$

em curvas invariantes para qual $\xi \neq 0$. EDOs de ordens mais altas são calculadas pela fórmula de prolongação usual.

Exemplo Recordando a EDO

$$y''' = \frac{1}{y^3}, \quad x > 0, \quad (3.255)$$

com geradores

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + \frac{3}{4}y\partial_y \quad (3.256)$$

Ao contrário do exemplo anterior, não existem soluções invariantes sob o grupo gerado por X_1 . A condição de curva invariante para $X = X_2$ é

$$Q = \frac{3}{4}y - xy' = 0 \quad (3.257)$$

Então, temos

$$y' = \frac{3y}{4x} \quad (3.258)$$

Agora nós vamos usar a equação anterior para calcular y'' e y''' nas curvas invariantes. Derivando a mesma com respeito a x

$$y'' = \frac{3y'}{4x} - \frac{3y}{4x^2} \quad (3.259)$$

Usando novamente a (3.258) para determinar y'' em função de x e y temos

$$y'' = \frac{9y}{16x} - \frac{3y}{4x^2} = -\frac{3y}{16x^2} \quad (3.260)$$

Derivando novamente e usando a (3.258) obtemos

$$y''' = -\frac{3y'}{16x^2} + \frac{3y}{8x^3} = \frac{15y}{64x^3} \quad (3.261)$$

Substituindo a equação y''' encontrado na equação original temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^3} &= \frac{15y}{64x^3} \\ y^4 &= \frac{64x^3}{15} \\ y &= \pm \left(\frac{64}{15}\right)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{4}} \end{aligned} \quad (3.262)$$

Como no exemplo anterior, existe toda uma família de soluções invariantes resultantes da ação do grupo gerado por X_1 nas soluções que são invariantes sob X_2 . Especificamente,

$$y = \pm \left(\frac{64}{15}\right)^{\frac{1}{4}} (x - \epsilon)^{\frac{3}{4}} \quad (3.263)$$

que é invariante sob $X_2 - \epsilon X_1$.

3.9 Simetrias de Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

Pontos de simetrias de equações diferenciais parciais (EDPs) são definidos da mesma maneira que de equações diferenciais ordinárias. Para simplificar, vamos começar por uma (EDP) considerando com uma variável dependente u , e duas variáveis independentes, x e t . Um ponto de transformação é um difeomorfismo da forma

$$\Gamma : (x, u, t) \mapsto (\hat{x}(x, t, u), \hat{t}(x, t, u), \hat{u}(x, t, u)) \quad (3.264)$$

Essa transformação mapeia a superfície $u = u(x, t)$ a seguinte superfície que é parametrizada por x e t

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{x}(x, t, u(x, y)), \\ \hat{t} &= \hat{t}(x, t, u(x, y)), \\ \hat{u} &= \hat{u}(x, t, u(x, y)),\end{aligned}\tag{3.265}$$

Para calcular o prolongamento de uma determinada transformação, é necessário diferenciar (3.265) com respeito a cada um dos parâmetros x e t . Para fazer isso, nós introduzimos as seguintes derivadas totais

$$D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{xx} \partial_{u_x} + u_{xt} \partial_{u_t} + \dots,\tag{3.266}$$

$$D_t = \partial_t + u_t \partial_u + u_{xt} \partial_{u_x} + u_{tt} \partial_{u_t} + \dots,\tag{3.267}$$

As derivadas totais tratam u como variável dependente e suas derivadas como funções de variáveis independentes. Podemos inverter as duas primeiras equações da (3.265) para expressarmos x e t em termos de \hat{x} e \hat{t} , desde que o Jacobiano seja diferente de zero, que é dado por,

$$J \equiv \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{quando} \quad u = u(x, t)\tag{3.268}$$

Com a condição acima satisfeita, podemos então reescrever a última equação da (3.265) como

$$\hat{u} = \hat{u}(\hat{x}, \hat{t})\tag{3.269}$$

Aplicando a regra da cadeia na equação anterior, nós obtemos

$$\begin{bmatrix} D_x \hat{u} \\ D_t \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{\hat{x}} \\ \hat{u}_{\hat{t}} \end{bmatrix}\tag{3.270}$$

E aplicando a regra de Cramer temos

$$\hat{u}_{\hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \quad \hat{u}_{\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u} \end{vmatrix}, \quad (3.271)$$

Prolongamentos de ordens superiores são obtidos de maneira recursiva, repetindo o argumento acima. Se \hat{u}_J é qualquer derivada de \hat{u} com respeito a \hat{x} e \hat{t} , então

$$\hat{u}_{J\hat{x}} \equiv \frac{\partial \hat{u}_J}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u}_J & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{u}_J & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \quad (3.272)$$

$$\hat{u}_{J\hat{t}} \equiv \frac{\partial \hat{u}_J}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u}_J \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u}_J \end{vmatrix},$$

Por exemplo, a transformação é prolongada para segundas derivadas do seguinte modo

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u}_{\hat{x}} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{u}_{\hat{x}} & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \quad \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x}\hat{x} & D_x \hat{u}_{\hat{t}} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u}_{\hat{t}} \end{vmatrix}, \quad (3.273)$$

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u}_{\hat{t}} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{u}_{\hat{t}} & D_t \hat{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u}_{\hat{x}} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u}_x \end{vmatrix}. \quad (3.274)$$

Nós agora temos condições para definir pontos de simetrias de uma EDP de enésima ordem

$$\Delta(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (3.275)$$

Por simplicidade, nós restringimos a atenção para EDPs da forma

$$\Delta = u_\sigma - \omega(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (3.276)$$

onde u_σ é a derivada de enésima ordem de u e ω é independente de u_σ . De modo mais geral, uma u_σ pode ser da ordem $k < n$, desde que ω não tenha dependência sobre u_σ ou quaisquer derivadas de u_σ . O ponto de transformação Γ é um ponto de simetria da

(3.275) se

$$\Delta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}, \hat{u}_{\hat{x}}, \hat{u}_{\hat{t}}, \dots) = 0 \quad \text{quando} \quad \Delta(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (3.277)$$

Normalmente, a condição de simetria (3.277) é extremamente complicada, por isso não devemos tentar resolvê-lo diretamente. No entanto, é bastante fácil de verificar se há ou não um determinado ponto de transformação é uma simetria de um determinado EDP particular.

Exemplo Nós vamos usar agora a condição de simetria para mostrar que

$$(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}) = \left(\frac{x}{2t}, \frac{-1}{4t}, 2(ut - x) \right) \quad (3.278)$$

é um ponto de simetria da equação de Burgers que é

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (3.279)$$

então o Jacobiano do ponto de transformação da (3.278) é

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{vmatrix} \\ J &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 0 \\ \frac{-x}{2t^2} & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8t^3} \end{aligned} \quad (3.280)$$

e portanto

$$\hat{u}_{\hat{x}} = 8t^3 \begin{vmatrix} 2(tu_x - 1) & 0 \\ 2(tu_t + u) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = 4t(tu_x - 1), \quad (3.281)$$

$$\hat{u}_{\hat{t}} = 8t^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 2(tu_x - 1) \\ \frac{-x}{2t^2} & 2(tu_t + u) \end{vmatrix} = 8t(t^2u_t + xtu_x + tu - x), \quad (3.282)$$

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} = 8t^3 \begin{vmatrix} 4t^2u_{xx} & 0 \\ 4(t^2u_{xt} + 2tu_x - 1) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = 8t^3u_{xx}, \quad (3.283)$$

Reescrevendo a equação de Burgers para transformação e substituindo os termos temos

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} &= \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \\ \hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} &= 8t^3(u_t + uu_x) \end{aligned} \quad (3.284)$$

e portanto o ponto de transformação satisfaz a condição de simetria

$$\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} = \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \quad \text{quando} \quad u_t + uu_x = u_{xx} \quad (3.285)$$

De um modo geral, não sabemos a priori qual forma os pontos de simetria que uma dada EDP irá tomar. No entanto, geralmente é possível realizar uma busca sistemática de pontos de simetria de grupos de Lie de um parâmetro. A técnica é essencialmente a mesma como para equações diferenciais ordinárias. Procuramos pontos de simetria da forma

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \epsilon\xi(x, t, u) + O(\epsilon^2) \\ \hat{t} &= t + \epsilon\tau(x, t, u) + O(\epsilon^2) \\ \hat{u} &= u + \epsilon\eta(x, t, u) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.286)$$

Assim como para as transformações de Lie ponto do plano, cada um parâmetro de grupos de Lie (local) de transformações de ponto é obtido exponencializando seu gerador infinitesimal, que é

$$X = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \eta\partial_u \quad (3.287)$$

De forma equivalente, podemos obter $(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u})$ resolvendo

$$\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}), \quad \frac{d\hat{t}}{d\epsilon} = \tau(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}), \quad \frac{d\hat{u}}{d\epsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}) \quad (3.288)$$

Uma superfície $u = u(x, t)$ é mapeada em si pelo grupo de transformações gerado por X se

$$X(u - u(x, t)) = 0 \quad \text{quando} \quad u = u(x, t) \quad (3.289)$$

Esta condição pode ser expressa ordenadamente usando a característica do grupo, que é

$$Q = \eta - \xi u_x - \tau u_t \quad (3.290)$$

Então a superfície $u = u(x, t)$ é invariante desde que

$$Q = 0 \quad \text{quando} \quad u = u(x, t) \quad (3.291)$$

A equação (3.291) é chamada de condição de superfície invariante. Esta é central para algumas das principais técnicas para encontrar soluções exatas do EDPs. O prolongamento da transformação de ponto da (3.286) para a primeira derivada é

$$\hat{u}_{\hat{x}} = u_x + \epsilon \eta^x(x, t, u, u_x, u_t) + O(\epsilon^2) \quad (3.292)$$

$$\hat{u}_{\hat{t}} = u_t + \epsilon \eta^t(x, t, u, u_x, u_t) + O(\epsilon^2)$$

onde

$$\eta^x(x, t, u, u_x, u_t) = D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau, \quad (3.293)$$

$$\eta^t(x, t, u, u_x, u_t) = D_t \eta - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau.$$

Para ordens mais altas o prolongamento é feito recursivamente usando a (3.272) gerando,

$$\hat{u}_{J\hat{x}} = u_{Jx} + \epsilon\eta^{Jx} + O(\epsilon^2), \quad (3.294)$$

$$\hat{u}_{J\hat{t}} = u_{Jt} + \epsilon\eta^{Jt} + O(\epsilon^2),$$

onde

$$\eta^{Jx} = D_x\eta^J - u_{Jx}D_x\xi - u_{Jt}D_x\tau, \quad (3.295)$$

$$\eta^{Jt} = D_t\eta^J - u_{Jx}D_t\xi - u_{Jt}D_t\tau,$$

Podemos expressar cada função η^J em termos da característica como

$$\eta^x = D_xQ + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}, \quad (3.296)$$

$$\eta^t = D_tQ + \xi u_{xt} + \tau u_{tt},$$

Os termos de ordem superior são então

$$\eta^J = D_JQ + \xi D_Ju_x + \tau D_Ju_t, \quad (3.297)$$

onde

$$D_J \equiv D_x^{j_1} D_t^{j_2} \quad (3.298)$$

onde j_1 e j_2 são números. Podemos expressar também a primeira e a segunda prolongação do gerador infinitesimal adicionando termos da forma $\eta^J \partial_{u^J}$ até a ordem desejada. Por

exemplo

$$X^{(1)} = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \eta \partial_u + \eta^x \partial_{u_x} + \eta^t \partial_{u_t} = X + \eta^x \partial_{u_x} + \eta^t \partial_{u_t}, \quad (3.299)$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \eta^{xx} \partial_{u_{xx}} + \eta^{xt} \partial_{u_{xt}} + \eta^{tt} \partial_{u_{tt}}$$

A partir de agora, nós adotamos a convenção de que o gerador é prolongado tantas vezes quanto for necessário para descrever a ação do grupo em todas as variáveis. Para encontrar pontos de simetrias de Lie, precisamos de expressões explícitas para (3.295) . Aqui estão alguns

$$\eta^x = \eta^x + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau u_x u_t, \quad (3.300)$$

$$\eta^t = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \eta_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \quad (3.301)$$

$$\begin{aligned} \eta^{xx} = & \eta_{xx} + (\eta_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 \\ & - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}, \end{aligned} \quad (3.302)$$

$$\begin{aligned} \eta^{xt} = & \eta_{xt} + (\eta_{tu} - \xi_{xt}) u_x + (\eta_{xu} - \tau_{xt}) u_t - \xi_{tu} u_x^2 + (\eta_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{tu}) u_x u_t \\ & - \tau_{xu} u_t^2 - \xi_{uu} u_x^2 u_t - \tau_{tt} u_x u_t^2 - \xi_t u_{xx} - \xi_u u_t u_{xx} + (\eta_u - \xi_x - \tau_t) u_{xt} - 2\xi_u u_x u_{xt} \\ & - 2\tau_u u_t u_{xt} - \tau_x u_{tt} - \tau_u u_x u_{tt} \end{aligned} \quad (3.303)$$

$$\begin{aligned} \eta^{tt} = & \eta_{tt} - \xi_{tt} u_x + (2\eta_{tu} - \tau_{tt}) u_t - 2\xi_{tu} u_x u_t \\ & + (\eta_{uu} - 2\tau_{tu}) u_t^2 - \xi_{uu} u_x u_t^2 - \tau_{uu} u_t^3 - 2\xi_t u_{xt} - 2\xi_u u_t u_{xt} \\ & + (\eta_u - 2\tau_t) u_{tt} - \xi_u u_x u_{tt} - 3\tau_u u_t u_{tt}. \end{aligned} \quad (3.304)$$

Pontos de simetria de Lie são obtidos diferenciando-se a condição de simetria na (3.277) em relação à ϵ em $\epsilon = 0$. Daí obtemos a condição de simetria linearizada

$$X\Delta = 0 \quad \text{quando} \quad \Delta = 0 \quad (3.305)$$

A restrição (3.276) nos permite eliminar u_σ a partir da (3.305). Em seguida, dividimos os termos restantes de acordo com a sua dependência de derivados de u para obtermos um

sistema linear de equações determinantes para ξ , τ e η . O espaço vetorial Ξ de todos os geradores de pontos de simetrias de Lie de uma determinada EDP é uma álgebra de Lie, embora possa não ser dimensionalmente finito.

Exemplo Vamos considrear a EDP

$$u_t = u_x^2 \quad (3.306)$$

Vamos aplicar agora as transformações desprezando os termos de ordem em ϵ maiores ou iguais a dois

$$\hat{u}_t = u_t + \eta^t \epsilon, \quad e \quad \hat{u}_x = u_x + \eta^x \epsilon \quad (3.307)$$

Agora substituindo-os na equação anterior temos

$$\begin{aligned} u_t + \eta^t \epsilon &= (u_x + \eta^x \epsilon)^2 \\ u_t + \eta^t \epsilon &= u_x^2 + 2u_x \epsilon \eta^x + (\eta^x \epsilon)^2 \\ u_t + \eta^t \epsilon &= u_t + 2u_x \epsilon \eta^x \\ \eta^t &= 2u_x \eta^x \end{aligned} \quad (3.308)$$

Essa é a condição de simetria linearizada, e escrevendo explicitamente temos

$$\begin{aligned} &\eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \eta_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 \\ &= 2u_x \{ \eta^x + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau u_x u_t \} \end{aligned} \quad (3.309)$$

Depois de igualar os termos que são multiplicados por cada poder de u_x , obtemos o sistema de equações determinantes

$$\tau_u = 0, \quad (3.310)$$

$$\xi_u + 2\tau_x = 0, \quad (3.311)$$

$$\eta_u + \tau_t - 2\xi_x = 0, \quad (3.312)$$

$$\xi_t + 2\eta_x = 0, \quad (3.313)$$

$$\eta_t = 0. \quad (3.314)$$

Começamos resolvendo a (3.310) e obtemos

$$\tau = A(x, t) \quad (3.315)$$

onde A é uma função arbitrária qualquer. Portanto a solução geral da (3.311) é

$$\xi = -2A_x u + B(x, t) \quad (3.316)$$

e a solução da (3.312) é do tipo

$$\eta = -2A_{xx}u^2 + (2B_x - A_t)u + C(x, t) \quad (3.317)$$

para funções arbitrárias B e C . Substituindo estes resultados nas equações (3.313) e (3.314) temos

$$-4A_{xxx}u^2 + 4(B_{xx} - A_{xt})u + B_t + 2C_x = 0, \quad (3.318)$$

$$-2A_{xxt}u^2 + (B_{xt} - A_{tt})u + C_t = 0. \quad (3.319)$$

As funções A , B e C são independentes de u , então podemos decompor as equações anteriores igualando os lados das equações por potências de u , da seguinte maneira

$$C_t = 0, \quad (3.320)$$

$$B_t + 2C_x = 0, \quad (3.321)$$

$$2B_{xt} - A_{tt} = 0, \quad (3.322)$$

$$B_{xx} - A_{xt} = 0, \quad (3.323)$$

$$A_{xxt} = 0, \quad (3.324)$$

$$A_{xxx} = 0, \quad (3.325)$$

E resolvendo-as nós obtemos

$$C = \alpha(x), \quad B = -2\alpha'(x)t + \beta(x), \quad A = -2\alpha''(x)t^2 + \gamma(x)t + \delta(x). \quad (3.326)$$

onde α , β , γ e δ são funções de x que são determinadas substituindo a (3.326) nas equações (3.323), (3.324) e (3.325), e igualando as equações em potências de t , e resolvendo as EDOs resultantes. Depois disso chegamos a solução geral para ξ , τ e η que é

$$\xi = -4c_1tx - 2c_2t + c_4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2tu \right) + c_6x + c_7 - 4c_8xu - 2c_9u, \quad (3.327)$$

$$\tau = -4c_1t^2 + c_4xt + c_5t + c_8x^2 + c_9x + c_{10}, \quad (3.328)$$

$$\eta = c_1x^2 + c_2x + c_3 + c_4xu - c_5u + 2c_6u - 4c_8u^2. \quad (3.329)$$

Há dez constantes arbitrárias, quer dizer que essa equação possui dez geradores, isso significa o espaço vetorial que é uma álgebra Lie associada a essa EDP tem dez dimensões. Como podemos observar os pontos de simetrias Lie de EDPs e EDOs são encontradas essencialmente pelo mesmo procedimento. No entanto, EDPs envolvem diversas variáveis independentes, de modo que os cálculos são normalmente mais difíceis e demorados.

Agora vamos generalizar a condição de simetria linearizada para EDPs com M variá-

veis dependentes $u = (u^1, \dots, u^M)$ e N variáveis independentes $x = (x^1, \dots, x^N)$. Vamos descrever aqui apenas os pontos principais, sem entrar em muitos detalhes. Suponha-se que X é um gerador infinitesimal de um grupo de Lie a um parâmetro, isto é,

$$X = \xi^i(x, u)\partial_{x^i} + \eta_\alpha(x, u)\partial_{u^\alpha} \quad (3.330)$$

A característica do grupo é $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_M)$, onde

$$Q_\alpha = \eta_\alpha - \xi^i u_{x^i}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, M. \quad (3.331)$$

Para prolongar a ação do grupo generalizada, nós precisamos das derivadas totais,

$$D_{x^i} \equiv \partial_{x^i} + u_{x^i}^\alpha \partial_{u^\alpha} + \dots \quad (3.332)$$

A primeira prolongação de X é

$$X^{(1)} = X + \eta_\alpha^l(x, u^{(1)}) \partial_{u_{x^l}^\alpha}, \quad (3.333)$$

onde

$$\eta_\alpha^l(x, u^{(1)}) = D_{x^l} Q_\alpha + \xi^i D_{x^i} u_{x^l}^\alpha \quad (3.334)$$

Similarmente a forma geral para o gerador prolongado é

$$X = \xi^i(x, u) \partial_{x^i} + \eta_\alpha(x, u) \partial_{u^\alpha} + \eta_\alpha^J \partial_{u_J^\alpha}, \quad (3.335)$$

onde $u_J^\alpha = D_J u^\alpha$ e

$$\eta_\alpha^J = D_J Q_\alpha + \xi^i D_J u_{x^i}^\alpha. \quad (3.336)$$

O gerador prolongado da equação (3.335) contém todos os termos necessários para descrever a ação do grupo linearizado de uma dada equação diferencial parcial (EDP). Por

simplicidade nós consideramos apenas as EDPs da forma

$$\Delta_\beta \equiv u_{\sigma\beta} - \omega_\beta(x, u^{(n)}) = 0, \quad \beta = 1, \dots, M, \quad (3.337)$$

onde cada $u_{\sigma\beta}$ é uma derivada alta de alguns u^α , na medida em que nenhum outro termo no sistema contém outros $u_{\sigma\beta}$ ou qualquer de suas derivadas. Isso nos permite substituir cada $u_{\sigma\beta}$ na condição de simetria linearizado pelo ω_β correspondente. O sistema resultante pode, então, ser dividido em equações determinantes que são obtidas igualando potências derivadas de u .

3.10 Soluções Invariantes de Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

Tendo conhecimento dos métodos anteriores, somos capazes de usar simetrias de Lie encontrar soluções invariantes (analíticas particulares) de equações diferenciais parciais (EDPs). Daqui em diante seguiremos usando uma generalização do método usado para EDOs que consiste essencialmente em olhar para as soluções de EDPs que são invariantes sob um grupo particular de simetrias. Por exemplo, para EDPs, $u(x, t)$ cuja simetria incluem geradores

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t \quad (3.338)$$

geralmente têm soluções de ondas viajantes da forma

$$u = F(x - ct) \quad (3.339)$$

Estas soluções são invariantes sob o grupo gerado por

$$X = cX_1 + X_2 = c\partial_x + \partial_t \quad (3.340)$$

porque ambos u e $x - ct$ são invariantes. Da mesma forma, EDPs com escala de simetrias admitem soluções de similaridade, que são construídos a partir dos invariantes do grupo. Essa idéia é facilmente generalizada para qualquer grupo de simetrias de Lie de uma determinada EDP

$$\Delta = 0 \tag{3.341}$$

Por agora, vamos restringir a atenção para EDPs escalares com duas variáveis independentes. Recordamos que uma solução de $u = u(x, t)$ é invariante sob o grupo gerado por

$$X = \xi \partial_x + \tau \partial_t + \eta \partial_u \tag{3.342}$$

Se e somente se a característica desaparece na solução. Em outras palavras, toda solução invariante satisfaz a condição da superfície invariante

$$Q \equiv \eta - \xi u_x - \tau u_t = 0 \tag{3.343}$$

Normalmente (3.343) é muito mais fácil de resolver do que a EDP original. Resolvendo a mesma, podemos descobrir quais as soluções também satisfazem (3.341). Por exemplo, o grupo gerado por (3.340) tem a característica

$$Q = -cu_x - u_t \tag{3.344}$$

O ansatz de onda viajante (3.339) é a solução geral da condição da superfície invariante $Q = 0$. Por enquanto, vamos supor que ξ e τ não são zero. Em seguida, a condição da superfície invariante é um quase-linear de primeira ordem de EDP que pode ser resolvida pelo método de características. As equações são características

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\eta} \tag{3.345}$$

Se $r(x, t, u)$ e $v(x, t, u)$ são dois primeiros integrais funcionalmente independentes de (3.345), cada invariante do grupo é uma função de r e v . Em geral, é conveniente para permitir que um jogo invariante o papel de uma variável dependente. Suponha (sem perda de generalidade) que $v_u \neq 0$, então a solução geral da condição da superfície invariável é

$$v = F(r) \quad (3.346)$$

Substituímos essa equação na (3.341) para determinar a função F . Se r e v dependem de u , é necessário encontrar a EDP que tem quaisquer soluções da forma

$$r = c \quad (3.347)$$

Estas são as únicas soluções da condição da superfície que não são invariantes (localmente) da forma (3.346). Se r é uma função das variáveis x e t independentes somente, em seguida, (3.347) não pode produzir uma solução de $u = u(x, t)$.

Exemplo Vamos tomar como exemplo agora a equação do calor

$$u_t = u_{xx} \quad (3.348)$$

existe um grupo de Lie a dois parâmetros, que é gerado por

$$X_1 = x\partial_x + 2t\partial_t, \quad X_2 = u\partial_u. \quad (3.349)$$

Cada gerador de um grupo de Lie a um parâmetro de escala é da forma

$$X = hX_1 + kX_2, \quad (3.350)$$

para algumas constantes h, k . Lembramos que se λ é qualquer constante diferente de zero, X e λX gera um grupo de simetria a um parâmetro. Supondo que $h = 1$, temos

$$X = x\partial_x + 2t\partial_t + ku\partial_u. \quad (3.351)$$

A condição de superfície invariante é

$$\mathbf{Q} \equiv ku - xu_x - 2tu_t = 0, \quad (3.352)$$

que é resolvido pela integração das equações características

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{ku}. \quad (3.353)$$

uma integração produz os invariantes

$$r = xt^{-\frac{1}{2}}, \quad v = ut^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.354)$$

Porque r é independente de u , cada solução invariante é da forma

$$v = F(r), \quad (3.355)$$

que é equivalente a

$$u = t^{\frac{k}{2}} F(xt^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.356)$$

derivando a equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} u_t &= t^{\frac{(k-2)}{2}} \left(-\frac{1}{2}F'(r) + \frac{1}{2}kF(r) \right), \\ u_{xx} &= t^{\frac{(k-2)}{2}} F''(r). \end{aligned} \quad (3.357)$$

portanto a (3.356) é solução da equação do calor se

$$F'' + \frac{1}{2}rF' - \frac{1}{2}F = 0 \quad (3.358)$$

a solução geral da equação anterior é

$$F(r) = c_1U\left(k + \frac{1}{2}, 2^{-\frac{1}{2}}r\right) + c_2V\left(k + \frac{1}{2}, 2^{-\frac{1}{2}}r\right), \quad (3.359)$$

onde $U(p, z)$ e $V(p, z)$ são funções de cilindros parabólicos. Se k é inteiro, estas funções podem ser expressas em termos de funções elementares e suas integrais. Por exemplo, se $k = 0$ temos

$$F(r) = c_1 \operatorname{erf}\left(\frac{r}{2}\right) + c_2, \quad (3.360)$$

onde

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta \quad (3.361)$$

é a função erro. Se $k = -1$,

$$F = c_1 e^{-\frac{r^2}{4}} + c_2 e^{-\frac{r^2}{4}} \int_0^r e^{\frac{\zeta^2}{4}} d\zeta \quad (3.362)$$

Substituindo esses resultados na (3.356), nós obtemos uma grande família de soluções que incluem a solução fundamental

$$u = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (k = -1) \quad (3.363)$$

a função erro da solução

$$u = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \quad (k = 0), \quad (3.364)$$

e muitas outras soluções conhecidas.

Capítulo 4

Simetrias Não-Clássicas e Soluções Invariantes

Uma simetria de Lie é uma transformação que mapeia todas as soluções de uma dada equação diferencial em outras soluções da mesma equação. Simetrias não-clássicas transformam uma solução, ainda a determinar, em si própria, sem se preocupar com o que ocorre com o resto das soluções. Desta forma, simetrias não-clássicas são simetrias mais gerais, que as simetrias de Lie usuais. Para falar mais sobre o assunto vamos considerar o sistema de EDPs dado por

$$F_{\mu}(u_j, x_i, u_{jI}) = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Para encontrar uma solução invariante por um gerador de simetrias para esta equação basta encontrar uma solução para o sistema dado por

$$\begin{aligned} F_{\mu}(u_j, x_i, u_{jI}) &= 0, \\ Q &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde Q é a característica do sistema. Para determinar as soluções invariantes de uma dada equação nós precisamos descobrir simetrias do sistema (4.2). Portanto, nosso problema é equivalente a exigir que ambas, a equação original e a condição de superfície invariante,

sejam invariantes sob a ação da transformação

$$\sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_l} \eta_{j, i_1, \dots, i_l}^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_{j, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}}} = G^{(k)}, \quad (4.3)$$

$$G^{(k)} F_\mu(u_j, x_i, u_{jI}) = 0, \quad (4.4)$$

$$G^{(k)} \left[\eta_j - \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \theta_i \right] = 0. \quad (4.5)$$

Isso sobre uma única solução u_j a determinar. Para determinarmos, portanto, todas as simetrias deste sistema, resolvemos para os θ e η .

Note que a segunda equação na (4.2) depende de θ e η , e portanto também é um sistema determinante para um gerador de simetrias não-clássicas não-linear em geral. Como consequência, o conjunto das simetrias não-clássicas não forma um espaço vetorial. Com isto perdemos estrutura algébrica existente no caso de simetrias de Lie. Outra propriedade interessante é que, como as condições acima são automaticamente satisfeitas para simetrias de Lie, pois estas são um subconjunto das simetrias não-clássicas. Por último, se G é um gerador de simetrias não-clássicas compatível com um sistema de equações, então $\lambda(x, u)G$ também o é, onde $\lambda(x, u)$ é uma função arbitrária, suficientemente diferenciável de seus argumentos. Isto quer dizer que, sem perda de generalidade, pode-se tratar apenas os casos em que $\theta_1 = 1$ ou $\theta_1 = 0$. O último caso ainda se desdobra em mais dois, $\theta_2 = 1$ ou $\theta_2 = 0$, e assim por diante [10].

É claro que a resolução do sistema de equações determinante em sua total generalidade é muitas vezes é um problema complexo em demasia. Costuma-se, porém, aplicar algumas restrições sobre o mesmo, com o intuito de simplificar o trabalho. Duas são de especial importância.

1. Transformações Cinemáticas. Ao tratar de equações físicas, é natural procurar por transformações nas quais as variáveis do espaço-tempo, usualmente tomadas como variáveis independentes, se transformam dependendo apenas de si mesmas. Isto é reproduzido como

$$\theta_a = \theta_a(x). \quad (4.6)$$

Em caso de especial dificuldade, uma simplificação ainda mais profunda que pode ser feita é o uso de polinômio para θ_a .

2. Equações polinomiais em u . uma outra medida possível de ser tomada é tentar reduzir o sistema de equações determinantes a equações polinomiais em u . Uma maneira de se obter isso é usando o seguinte ansatz

$$\eta_k = \sum_l A_k^{(l)}(x) u_l. \quad (4.7)$$

onde as funções $A_k^{(l)}(x)$ ainda precisamos determinar.

Exemplo Vamos considerar aqui a equação de Huxley

$$u_t = u_{xx} + 2u^2(1 - u), \quad (4.8)$$

que tem um grupo de Lie de dois parâmetros, gerados por

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t. \quad (4.9)$$

Todas as soluções que são invariantes sob o grupo gerado por X_1 são uniformes espacialmente, então $u = F(t)$, onde

$$F' = 2F^2(1 - F). \quad (4.10)$$

As únicas outras soluções que são invariantes sob simetrias clássicas são as de ondas viajantes ou estacionárias, $u = F(x - ct)$, onde

$$F'' + cF' + 2F^2(1 - F) = 0. \quad (4.11)$$

Vamos olhar para as simetrias não-clássicas com $\tau = 1$, de modo que a condição de superfície invariante equivale à restrição da forma

$$u_t = \eta - \xi u_x. \quad (4.12)$$

A condição de simetria linearizada para essas simetrias não-clássicas é

$$\eta^{xx} - \eta^t + (4u - 6u^2) \eta = 0, \quad (4.13)$$

As equações determinantes são

$$\begin{aligned} \xi_{uu} &= 0, \\ \eta_{uu} - 2\xi_{xu} + 2\xi\xi_u &= 0, \\ 2\eta_{xu} - \xi_{xx} - (2\eta + 6u^3 - 6u^2) \xi_u + 2\xi\xi_x + \xi_t &= 0, \\ \eta_{xx} - 2\eta\xi_x + 2u^2(u-1)(\eta_u - 2\xi_x) - \eta_t + (4u - 6u^2) \eta &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

Algumas das equações desse sistema são não-lineares, mas uma parte das equações do mesmo podem ser resolvidas de modo que da primeira equação do sistema temos

$$\xi = A(x, t)u + B(x, t), \quad (4.15)$$

e da segunda

$$\eta = -\frac{1}{3}A^2u^3 + (A_x - AB)u^2 + C(x, t)u + D(x, t) \quad (4.16)$$

Assim igualando os coeficientes dos termos e resolvendo temos

$$\xi = 1, \quad \eta = 0, \quad (4.17)$$

$$\xi = \pm(3u - 1), \quad \eta = 3u^2(1 - u). \quad (4.18)$$

Nós já sabemos que a (4.17) corresponde ao gerador de simetria clássica $X_1 + X_2$ com $\tau = 1$. Entretanto, a (4.18) nos fornece um novo gerador que é um gerador de simetrias não-clássicas da forma

$$X = \pm (3u - 1) \partial_x + \partial_t + 3u^2 (1 - u) \partial_u. \quad (4.19)$$

A condição de superfície invariante para as simetrias não-clássicas é

$$u_t \pm (3u - 1) u_x = 3u^2 (1 - u), \quad (4.20)$$

que é facilmente resolvida pelo método de características. Dois invariantes funcionalmente independentes são

$$r = \left(\frac{1}{u} - 1 \right) e^{t \pm x}, \quad v = \frac{1}{u} + 2t \mp x. \quad (4.21)$$

Vamos agora substituir $v = F(r)$ na equação de Huxley, que se reduz a

$$F'' = 0 \quad (4.22)$$

e portanto $F(r) = c_1 r + c_2$, escrevendo em termos das variáveis originais, nós obtemos

$$u = \frac{1 - c_1 e^{t \pm x}}{2y \pm -c_1 e^{t \pm x} + c_2} \quad (4.23)$$

As soluções com $c_1 \neq 0$ não são obtidas por qualquer redução clássica. Se $c_1 = 0$, a solução $v = c_2$ é uma solução de ondas viajante. Há também uma solução de onda viajante para $r = c_3$. Vamos olhar agora para simetrias não-clássicas com $\tau = 0$, para o qual

$$X = \partial_x + \eta(x, t, u) \partial_u. \quad (4.24)$$

A condição de superfície é

$$u_x = \eta, \quad (4.25)$$

então qualquer solução invariante da equação de Huxley satisfaz

$$u_t = \eta_x + \eta\eta_u + 2u^2(1 - u). \quad (4.26)$$

Sem entrar em detalhes, descobrimos que a condição de simetria linear não-clássica que é

$$\eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu} - 2u^2(1 - u)\eta_u - \eta_t + (4u - 6u^2)\eta = 0, \quad (4.27)$$

Existe apenas uma equação, porque todos os derivadas de u são eliminadas quando fazemos as devidas substituições. Consequentemente, somos incapazes de prosseguir, mas podemos tentar vários ansätze. O exemplo acima é atípico, normalmente as equações determinantes não são fáceis de resolver para maioria das EDPs com simetrias não-clássicas, portanto as mesmas tem que ser simplificadas com a ajuda de uma álgebra computacional. Nesse trabalho iremos usar um pacote desenvolvido para o Maple chamado de SADE que irá nos auxiliar a fazer esses cálculos.

4.1 Simetrias Não-Clássicas de Equação a Derivada Fracionária do Tipo Riemann–Liouville

Equações cinéticas fracionárias de difusão, difusão-advecção e do tipo Fokker-Planck são apresentados como uma abordagem útil para a descrição da dinâmica de transporte em sistemas complexos que são regidos por difusão anômala e padrões de relaxamento não exponenciais. Essas equações diferenciais fracionárias (EDF) são derivadas assintoticamente de modelos básicos de caminhadas aleatórias, e a partir de uma equação mestra generalizada. Várias consequências físicas são discutidas que são relevantes para os processos dinâmicos em sistemas complexos. Métodos de solução são introduzidos e para alguns casos especiais soluções exatas dessas equações são calculadas [11].

Dentre essas equações citamos aqui uma equação a derivada fracionária ou (EDF) do tipo Riemann–Liouville que pode ser usada para descrever processos de sub-difusão,

difusão normal, difusão de onda e propagação de onda para diferentes valores de α [12]. Nesta seção iremos tratar do cálculo de simetrias não-clássicas dessa equação com algumas restrições com o intuito de encontrar essas simetrias e apartir daí tentar encontrar soluções invariantes da mesma. A equação a ser estudada é

$$D_t^\alpha u(x, t) = (K(u)u_x)_x \quad (4.28)$$

Na equação acima u é uma função de variáveis independentes x, t e $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. $D_t^\alpha u(x, t)$ é a derivada fracionária de u com respeito a t , que pode ser do tipo Riemann–Liouville cuja a mesma será usada neste trabalho ou do tipo Caputo, as duas definições então são da forma

Riemann–Liouville

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \int_0^t \frac{u(\xi, x)}{(t - \xi)^{\alpha+1-m}} d\xi \quad (4.29)$$

onde $0 < \alpha < m$ com $m \in \mathbb{N}$.

Caputo

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t - \xi)^{\alpha+1-m}} \frac{\partial^m u(\xi, x)}{\partial \xi^m} d\xi \quad (4.30)$$

na primeira tomamos $m = 1$ e $0 < \alpha < 1$ e portanto temos a seguinte equação

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(\xi, x)}{(t - \xi)^\alpha} d\xi \quad (4.31)$$

que pode também ser escrita como

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) &= (k(u)u_x)_x \\ D_t^\alpha u(x, t) &= k'(u)(u_x)^2 + k(u)u_{xx} \end{aligned} \quad (4.32)$$

e para $k(u) = e^u$, temos

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, t) &= (e^u u_x)_x \\ D_t^\alpha u(x, t) &= e^u (u_x)^2 + e^u u_{xx} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Tomando um $A(x, t) = \int_0^t \frac{u(\xi, x)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi$, ou seja, fazendo A independente de u e $\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt$ definindo um $\gamma = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ e substituindo nas equações (4.31) e (4.33), temos então

$$e^u (u_x)^2 + e^u u_{xx} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(\xi, x)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \quad (4.34)$$

ou

$$e^u (u_x)^2 + e^u u_{xx} = \gamma A_t(x, t) \quad (4.35)$$

O objetivo agora é encontrar simetrias não-clássicas do sistema formado por $A(x, t) = \int_0^t \frac{u(\xi, x)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi$ e (4.35), com o intuito de encontrar soluções invariantes. A abordagem que será usada é a de determinar simetrias do (4.35) como se fosse uma equação única e depois restringi-las de modo a serem compatíveis com a definição de $A(x, t)$. Isso implica em uma de duas opções: $\tilde{\eta}^{(A)}(A, u, x, t) = \int_0^t \frac{\tilde{\eta}^{(u)}(A, u, x, \xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi$, ou, determinada uma solução invariante deve valer $A(x, t) = \int_0^t \frac{u(\xi, x)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi$. Daqui em diante denotaremos $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $A_t = \frac{\partial A}{\partial t}$. Vamos considerar primeiro transformações desprezando os termos de potências mais altas em ϵ da forma

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t + \epsilon \theta_1(A, u, t, x) \\ \hat{x} &= x + \epsilon \theta_2(A, u, t, x) \\ \hat{u} &= u + \epsilon \eta_2(A, u, t, x) \\ \hat{A} &= A + \epsilon \eta_1(A, u, t, x) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Os prolongamentos das transformações acima para a equação estudada são calculados

de forma análoga ao das equações diferenciais parciais. Essas transformações então são substituídas na equação original e em seguida são coletadas os coeficientes das diferentes derivadas de u e A com o objetivo de encontrar o sistema de equações determinantes assim como feitos em EDPs. Por se tratar de um cálculo muito extenso foi feito no computador usando o pacote SADE desenvolvido para o Maple. O gerador de simetrias da equação é escrito na sua forma geral como

$$\mathbf{G} = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^m \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.37)$$

que é

$$\mathbf{G} = \eta_1 (A, u, t, x) \frac{\partial}{\partial A} + \eta_2 (A, u, t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \theta_1 (A, u, t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \theta_2 (A, u, t, x) \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.38)$$

que tratando-se do primeiro caso ($\theta_2 = 1$) pode ser escrito como

$$\mathbf{G} = \eta_1 (A, u, t, x) \frac{\partial}{\partial A} + \eta_2 (A, u, t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \theta_1 (A, u, t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.39)$$

Apartir desse ponto como foi dito anteriormente iremos usar uma álgebra computacional para encontrar o sistema de equações determinantes dessa equação, e então tentar resolvê-las e com isso calcular os geradores de simetrias não-clássicas dessa equação. Vamos usar para esses cálculos o pacote desenvolvido para o Maple chamado de Symmetry Analysis of Differential Equations (SADE) criado pelos professores da Universidade de Brasília - Unb Tarcísio Marciano Rocha Filho e Annibal Figueiredo em 2013. O sistema determinante encontrado para o primeiro caso ($\theta_2 = 1$) é um sistema equações não-lineares e é dado pelo número de elementos da saída do comando utilizado no Maple.

Tal sistema tem oito equações que podem ser resolvidas separadamente, de modo que, pode-se substituir as soluções encontradas nas equações remanescentes na tentativa de reduzir o mesmo. Dessa maneira através da manipulação algébrica computacional no Maple conseguimos a primeiro momento reduzir esse sistema a um composto por três

equações. As equações são

$$\begin{aligned} & \gamma e^u K_1(x, t) \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} K_1(x, t) \right) K_1(x, t) - \left(\frac{\partial}{\partial A} \eta_1(A, u, t, x) \right) K_1(x, t) \right. \\ & + \left. K_3(x, t) K_1(x, t) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \right) \right) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} & 2 \left(-\frac{1}{2} e^u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_1(x, t) \right) K_1(x, t) - \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\partial}{\partial u} \eta_1(A, u, x, t) \right) K_1(x, t) \right. \\ & + e^u \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \right) K_1(x, t) K_3(x, t) \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial}{\partial x} K_3(x, t) \right) (K_1(x, t))^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \right)^2 \right) \right) e^u K_1(x, t) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & -2u^u \left(-\frac{1}{2} e^u \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_1(x, t) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_4(x, t) \right) K_1(x, t) + \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} \eta_1(A, u, x, t) \right) K_1(x, t) \right. \\ & + \left(e^u (K_3(x, t))^2 + e^u \left(\frac{\partial}{\partial x} K_3(x, t) \right) + K_4(x, t) K_3(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} K_4(x, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \right) \\ & \left. - K_1(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial x} K_3(x, t) \right) (e^u K_3(x, t) + K_4(x, t)) \right) K_1(x, t) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Então, vamos agora tentar resolver as equações mais simples e substituir o resultado nas outras equações do sistema reduzindo assim mesmo. Começamos resolvendo a (4.40) para $\eta_1(A, u, x, t)$ que resulta em

$$\eta_1(A, u, x, t) = A \left(\frac{\partial}{\partial t} K_1(x, t) \right) + AK_3(x, t) + \frac{2A \left(\frac{\partial}{\partial x} K_1(x, t) \right)}{K_1(x, t)} + K_5(x, t) \quad (4.43)$$

Substituímos esse resultado no sistema e fazemos isso repetidamente, lembrando que, com as equações que vão surgindo também fazemos simplificações e separamos também os termos de acordo com suas potências (os coeficientes das potências de A e e^u entre outras são igualados a zero separadamente). O nosso objetivo no momento é reduzir ao máximo o sistema de equações determinantes e com algumas restrições encontradas resolvendo as equações como por exemplo $K_4(x, t) = 0$, $K_6(x, t) = K_6(x)$, $K_1(x, t) =$

$K_1(x)$, $K_3(x, t) = K_3(x)$ reduzimos o sistema a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dx^2} K_3(x) \right) K_1(x) + \left(-2(K_1(x))^2 - 2 \left(\frac{d}{dx} K_3(x) \right) \right) \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right) \\ & + 2K_1(x) \left(\frac{d}{dx} K_3(x) \right) K_3(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Com o gerador de simetrias não-clássicas na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \left(A \left(\frac{\partial}{\partial t} K_1(x) \right) + AK_3(x) + \frac{2A \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)}{K_1(x)} \right. \\ & \left. - \frac{e^u \left(2 \left(\frac{d}{dx} K_3(x) \right) (K_1(x))^2 - 2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right) K_1(x) K_3(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} K_1(x) \right) K_1(x) - 2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)^2 \right)}{\gamma K_1(x)} \right) \\ & + K_6(x) \frac{\partial}{\partial A} + K_3(x) \frac{\partial}{\partial u} + K_1(x) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Resolvendo a (4.44) temos

$$K_3(x) = K_3(x), \quad K_1(x) = c_1 \sqrt{(K_3(x))^2 + \frac{d}{dx} K_3(x)} \quad (4.46)$$

ou

$$K_1(x) = K_1(x), \quad K_3(x) = \frac{1}{x + c_1} \quad (4.47)$$

O que resulta em dois geradores de simetrias não-clássicas, os quais são

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1^{(nc)} &= \frac{1}{\left((K_1(x))^2 + \frac{d}{dx}K_3(x)\right)^{\frac{3}{2}} \gamma} \left(\left(\left(A \left(\frac{d^2}{dx^2}K_3(x) \right) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(3AK_3(x) + K_6(x) \right) \left(\frac{d}{dx}K_3(x) \right) + \left(AK_3(x) + K_6(x) (K_3(x))^2 \right) \right. \right. \\
&\times \left. \left. \gamma \left(\sqrt{(K_3(x))^2 + \frac{d}{dx}K_3(x)} \right) + \left(-\frac{1}{2}e^u \left((K_3(x))^2 + \frac{d}{dx}K_3(x) \right) \left(\frac{d^3}{dx^3}K_3(x) \right) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. 3K_3(x) \left(\frac{d}{dx}K_3(x) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2}K_3(x) \right) e^u - 3 \left(\frac{d}{dx}K_3(x) \right)^3 e^u \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{3}{4} \left(\frac{d^2}{dx^2}K_3(x) \right)^2 e^u \right) c_1 \right) \right) \frac{\partial}{\partial A} \\
&+ \left(\frac{\left(\gamma (K_3(x))^4 + 2\gamma (K_3(x))^2 \left(\frac{d}{dx}K_3(x) \right)^2 \right) c_1}{\left((K_3(x))^2 + \frac{d}{dx}K_3(x) \right)^{\frac{3}{2}} \gamma} \right) \frac{\partial}{\partial t} \\
&+ \left(\frac{(K_3(x))^2 + K_3(x) \left(\frac{d}{dx}K_3(x) \right)}{(K_3(x))^2 + \frac{d}{dx}K_3(x)} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} \quad , \tag{4.48}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_2^{(nc)} &= \frac{1}{(x+c_1)^2 \gamma K_1(x)} \left(\left(-e^u K_1(x) (x+c_1)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2}K_1(x) \right) + 2e^u (x+c_1)^2 \left(\frac{d}{dx}K_1(x) \right) \right)^2 \right. \\
&+ \left. 2(e^u K_1(x) + A\gamma (x+c_1)) (x+c_1) \left(\frac{d}{dx}K_1(x) \right) \right. \\
&+ \left. (2e^u K_1(x) + ((x+c_1) K_6(x) + A) (x+c_1) \gamma) K_1(x) \right) \frac{\partial}{\partial A} \\
&+ K_1(x) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{1}{x+c_1} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} \quad . \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Esses geradores são bastante gerais e complicados, por simplicidade, vamos impôr uma condição de consistência para $\mathbf{G}_2^{(nc)}$ com o intuito de determinar as funções arbitrárias. O procedimento consiste em escrever o mesmo em uma forma equivalente ao da (4.37) conhecida como forma evolutiva, que é

$$\tilde{\mathbf{G}} = \sum_{j=1}^n \left[\eta_j - \sum_{i=1}^m \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \theta_i \right] \frac{\partial}{\partial u_j} \equiv \sum_{j=1}^n \mathbf{Q}_j \frac{\partial}{\partial u_j} \quad , \tag{4.50}$$

que nesse caso é

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{G}}_2^{(nc)} &= \left(\frac{1}{x+c_1} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{(x+c_1)^2 \gamma K_1(x)} \left(\left(-e^u K_1(x) (x+c_1)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} K_1(x) \right) \right. \right. \\
&+ 2e^u (x+c_1)^2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)^2 \\
&+ 2(e^u K_1(x) + A\gamma(x+c_1))(x+c_1) \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right) \\
&+ \left. \left. (2e^u K_1(x) + ((x+c_1) K_6(x) + A)(x+c_1)\gamma) K_1(x) \right) \frac{\partial}{\partial A} \right) - (u_t K_1(x)) \frac{\partial}{\partial u} \\
&- (A_t K_1(x)) \frac{\partial}{\partial A} - u_x \frac{\partial}{\partial u} - A_x \frac{\partial}{\partial A} \quad , \tag{4.51}
\end{aligned}$$

ou da forma

$$\tilde{\mathbf{G}}_2^{(nc)} = \tilde{\eta}_2^{(A)} \frac{\partial}{\partial A} + \tilde{\eta}_2^{(u)} \frac{\partial}{\partial u} \quad , \tag{4.52}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_2^{(u)} &= \frac{1}{x+c_1} - u_t K_1(x) - u_x \quad , \tag{4.53} \\
\tilde{\eta}_2^{(A)} &= \frac{1}{(x+c_1)^2 \gamma K_1(x)} \left(\left(-e^u K_1(x) (x+c_1)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} K_1(x) \right) \right. \right. \\
&+ 2e^u (x+c_1)^2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)^2 \\
&+ 2(e^u K_1(x) + A\gamma(x+c_1))(x+c_1) \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right) \\
&+ \left. \left. (2e^u K_1(x) + ((x+c_1) K_6(x) + A)(x+c_1)\gamma) K_1(x) \right) \right) \\
&- A_t K_1(x) - A_x \quad . \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Levamos a diante o procedimento fazendo uma compatibilização para $\mathbf{G}_2^{(nc)}$ (Condição de Consistência) que consiste em

$$A + \epsilon \tilde{\eta}_2^{(A)}(A, u, x, t) = \int_0^t \frac{u(x, \xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi + \epsilon \left(\int_0^t \frac{\tilde{\eta}_2^{(u)}(A, u, x, \xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \right) \quad , \tag{4.55}$$

simplificando temos

$$\tilde{\eta}_2^{(A)}(A, u, x, t) = \int_0^t \frac{\tilde{\eta}_2^{(u)}(A, u, x, \xi)}{(t - \xi)^\alpha} d\xi \quad , \quad (4.56)$$

quando $A(x, t) = \int_0^t \frac{u(x, \xi)}{(t - \xi)^\alpha} d\xi$. Que resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x + c_1)^2 \gamma K_1(x)} \left(\left(-e^u K_1(x) (x + c_1)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} K_1(x) \right) \right. \right. \\ & + 2e^u (x + c_1)^2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)^2 \\ & + 2(e^u K_1(x) + A\gamma(x + c_1))(x + c_1) \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right) \\ & + (2e^u K_1(x) + ((x + c_1) K_6(x) + A)(x + c_1)\gamma) K_1(x) \\ & \left. - A_t K_1(x) - A_x = \int_0^t \frac{\frac{1}{x+c_1} - u_\xi K_1(x) - u_x}{(t - \xi)^\alpha} d\xi \quad . \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Igualando os coeficientes de e^u a zero e simplificando, pois não existe do outro lado para compensá-los temos

$$\begin{aligned} & -(c_1)^2 K_1(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} K_1(x) \right) + 2(c_1)^2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)^2 - 2c_1 K_1(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} K_1(x) \right) x \\ & + 4c_1 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)^2 x - K_1(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} K_1(x) \right) x^2 + 2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right)^2 x^2 + 2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right) K_1(x) c_1 \\ & + 2 \left(\frac{d}{dx} K_1(x) \right) x K_1(x) + 2 (K_1(x))^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Resolvendo obtemos

$$K_1(x) = \frac{1}{(c_1)^2 c_2 + 2c_1 c_2 x + c_2 x^2 - c_1 c_3 - c_3 x} \quad (4.59)$$

E substituindo esse resultado na (4.49) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_2^{(nc)} &= \frac{1}{(x + c_1) ((x + c_1) c_2 - c_3)} \left((x + c_1) ((x + c_1) c_2 - c_3) K_6(x) \frac{\partial}{\partial A} \right. \\ & - 3(x + c_1) \left(A \frac{\partial}{\partial A} - \frac{1}{3} x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3} c_1 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial u} \right) c_2 + c_3 A \frac{\partial}{\partial A} \\ & \left. - c_3 x \frac{\partial}{\partial x} - c_3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Substituindo a (4.59) na condição de consistência e lembrando que $A(x, t) = \int_0^t \frac{u(x, \xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi$, temos portanto

$$\begin{aligned}
& \frac{-(x+c_1)((x+c_1)c_2-c_3)\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)+((-3x-3c_1)c_2+c_3)A(x,t)+((c_1^2+2c_1x+x^2)c_2-c_3x-c_1c_3)K_6(x)}{(x+c_1)((x+c_1)c_2-c_3)} \\
&= \int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^\alpha(x+c_1)} d\xi + \int_0^t -\frac{\frac{\partial}{\partial \xi}u(x, \xi)}{(t-\xi)^\alpha(c_1^2c_2+2c_1c_2x+c_2x^2-c_1c_3-c_3x)} d\xi \\
&+ \int_0^t -\frac{\frac{\partial}{\partial x}u(x, \xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi \quad . \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Aqui compatibilizamos os termos que não se cancelam diretamente e fazemos algumas restrições para simplificar as expressões tais como: $K_6(x) = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 1$. A partir dessas restrições conseguimos obter o gerador de simetrias não-clássicas na sua forma final que satisfaz a condição de consistência, substituindo as mesmas na (4.60) o que resulta em

$$\mathbf{G}_2^{(nc)} = -\frac{A\frac{\partial}{\partial A} - x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}}{x} \quad . \tag{4.62}$$

Finalmente temos aqui um dos geradores de simetrias não-clássicas para o primeiro caso ($\theta_2 = 1$) da equação estudada, no qual podemos utilizá-lo para encontrar soluções invariantes (soluções analíticas particulares da equação) da mesma que será nosso próximo passo.

4.2 Soluções Invariantes de Equação a Derivada Fracionária do tipo Riemann–Liouville

Uma determinada solução de uma equação diferencial parcial $u(x, t)$ resultante de uma transformação de simetria de um grupo gerado por um gerador infinitesimal é dita invariante, quando a mesma satisfaz tanto a condição de superfície invariante quanto é solução da equação original. Nessa seção vamos tentar construir soluções invariantes tanto para $u(x, t)$ quanto para $A(x, t)$ da equação (4.35) através do gerador de simetrias não-clássicas da (4.62). Já sabemos que podemos encontrar $u(x)$ invariante sob a transformação gerada

por \mathbf{G} , ou equivalentemente $\tilde{\mathbf{G}}$ se

$$\mathbf{Q}_i = \tilde{\mathbf{G}}u_i(x) = \left[\eta_i - \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \theta_j \right] = 0 \quad (4.63)$$

Que no nosso caso consiste em

$$\mathbf{Q}_u = \tilde{\mathbf{G}}_2^{(nc)} u(x, t) = 0 \quad (4.64)$$

e

$$\mathbf{Q}_A = \tilde{\mathbf{G}}_2^{(nc)} A(x, t) = 0 \quad (4.65)$$

Então ficou claro que para obter uma solução invariante por essa simetria não-clássica precisamos primeiro escrever o gerador encontrado em sua forma final na forma evolutiva e em seguida operar sobre a solução a determinar, desse modo, obtemos

$$\tilde{\mathbf{G}}_2^{(nc)} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{A}{x} \frac{\partial}{\partial A} + \frac{u_t}{x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{A_t}{x} \frac{\partial}{\partial A} - u_x \frac{\partial}{\partial u} - A_x \frac{\partial}{\partial A} \quad (4.66)$$

Substituindo primeiro na (4.64) temos

$$\frac{1}{x} + \frac{u_t}{x} - u_x = 0 \quad (4.67)$$

E agora substituindo na (4.65) temos

$$-\frac{A(x, t)}{x} + \frac{A_t(x, t)}{x} - A_x(x, t) = 0 \quad (4.68)$$

Resolvendo as equações acima obtemos

$$u(x, t) = \ln(x) + R_1(\ln(x) + t) \quad (4.69)$$

e

$$A(x, t) = \frac{R_2(\ln(x) + t)}{x} \quad (4.70)$$

Essas são as formas mais gerais possíveis de $u(x, t)$ e $A(x, t)$ que são invariantes (não mudam) sob a transformação não-clássica que obtivemos dadas pela (4.60). Agora precisamos testar essas soluções substituindo-as na (4.35), resultando em

$$\left(\left(\frac{d}{d\chi} R_1(\chi) \right)^2 + \frac{d}{d\chi} R_1(\chi) + \frac{d^2}{d\chi^2} R_1(\chi) \right) e^{R_1(\chi)} - \gamma \left(\frac{d}{d\chi} R_2(\chi) \right) = 0 \quad (4.71)$$

O argumento $\chi = \ln(x) + t$ de R_1 e R_2 é a nova variável independente, chamada neste contexto, de variável de similaridade. É importante observar aqui que conseguimos reduzir a equação original que era uma equação integro-diferencial com duas variáveis independentes a uma equação diferencial ordinária ou equação reduzida com apenas uma variável independente e com uma função arbitrária $R_2(\chi)$. Resolvendo a mesma para $R_1(\chi)$ temos

$$R_1(\chi) = \ln(\gamma R_2(\chi) e^\chi - \gamma R_3(\chi) - c_5 e^\chi + c_4) - \chi \quad (4.72)$$

onde

$$R_3(\chi) = \int \left(\frac{d}{d\chi} R_2(\chi) \right) e^\chi d\chi \quad (4.73)$$

Então podemos escrever a (4.69) como

$$u(x, t) = \ln(x) + R_1(\chi) \quad (4.74)$$

ou

$$u(x, t) = \ln(\gamma R_2(\ln(x) + t) x e^t - \gamma R_3(\ln(x) + t) - c_5 x e^t + c_4) - t \quad (4.75)$$

e

$$A(x, t) = \frac{R_2(\ln(x) + t)}{x} \quad (4.76)$$

Portanto as soluções acima são soluções invariantes da (4.31) que para o nosso caso é escrita na forma da (4.35). Obviamente essas soluções precisam satisfazer a condição de consistência, portanto vamos começar definindo o $A(x, t)$ com as soluções encontradas que nos fornece

$$\begin{aligned} & \frac{R_2(\ln(x) + t)}{x} = \\ & = \int_0^t \frac{(\ln(\gamma R_2(\ln(x) + \xi) x e^\xi - \gamma R_3(\ln(x) + \xi) - c_5 x e^\xi + c_4) - \xi)}{(t - \xi)^\alpha} d\xi \quad (4.77) \end{aligned}$$

Assim as funções $R_2(\chi)$ e $R_3(\chi)$ devem satisfazer a equação acima que é uma equação integral. Neste ponto fica claro a eficácia do método, pois conseguimos reduzir uma equação bastante complicada a uma equação equivalente relativamente mais simples, haja visto que, podemos encontrar através de outros métodos soluções para as equação acima e a partir dessas encontrar soluções analíticas particulares para a equação estudada.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foram mostrados conceitos básicos de grupos, espaços topológicos, grupos de Lie, transformações infinitesimais entre outros. Também foram abordados numa visão geral definições do que é simetria bem como simetrias de objetos geométricos, simetrias de equações diferenciais ordinárias, simetrias de Lie de equações diferenciais ordinárias e parciais e soluções invariantes de equações diferenciais ordinárias e parciais. Foi visto também como tema central neste trabalho conceitos de simetrias não-clássicas abordando métodos utilizados para encontrar as simetrias não-clássicas de uma equação a derivada fracionária e suas soluções invariantes explicitando a eficácia e importância deste método.

Observamos que o estudo de simetrias não-clássicas dessa classe de equações é muito importante, no sentido que, nos possibilita através da análise destas simetrias reduzir equações extramamente complicadas a equações muito mais simples de se trabalhar afim encontrar soluções invariantes (analíticas particulares) destas equações, haja visto que, achar soluções analíticas para as mesmas não é trivial. Embora ainda seja um estudo pouco discutido na literatura, vimos que esta, é uma área bastante promissora e abrangente. Entretanto, neste trabalho ainda não foram feitas todas as etapas, como perspectiva futura temos como objetivo encontrar as funções remanescentes que satisfazem a equação integral e substituí-las nas soluções invariantes encontradas.

Também temos como perspectiva deste trabalho encontrar os geradores de simetrias não-clássicas da equação para o segundo caso ($\theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 0$), utilizando o mesmo procedimento usado para o primeiro caso e tentar encontrar soluções invariantes para a equação neste caso.

Referências Bibliográficas

- [1] G. W. Bluman and J. D. Cole, *J. Math. Mech.* 18 (1969) 1025.
- [2] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations* (Springer New York, 1989).
- [3] P. J. Olver and P. Rosenau, *SIAM J. Appl. Math.* 47 (1987) 263.
- [4] San Martin, L. A. B, *Grupos de Lie*, 3 de Março de 2016.
- [5] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, (New York, 1974).
- [6] G. W. Bluman, S. C. Anco *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, (Springer, New York, 2002).
- [7] Tese de Doutorado. Rocha, P. M. M, *Modelo de Gross-Neveu e Simetrias: Soluções Analíticas e Dinâmica de Campos Térmicos*, (Universidade de Brasília, 2015).
- [8] P. E. Hydon *Symmetry Methods for Differential Equations A Beginner's Guide*, (Department of Mathematics and Statistics University of Surrey, 2000).
- [9] T. M. Rocha Filho, *Mecânica Clássica*, Universidade de Brasília, julho de 2009, pg 58.
- [10] T. M. Rocha Filho, A. Figueiredo, *[SADE] A Maple package for the Symmetry Analysis of Differential Equations*, Instituto de Física and International Center for Condensed Matter Physics Universidade de Brasília, setembro 2010.

- [11] Ralf METZLER, Joseph KLAFTER School of Chemistry, *The Random Walks Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach*, Tel Aviv University, 69978 Tel Aviv, Israel.
- [12] R. K. Gazizov, A A Kasatkin and S Yu Lukashchuk, *Symmetry properties of fractional diffusion equations*, Ufa State Aviation Technical University, Karl Marx strasse 12, Ufa, Russia, Published 12 October 2009.