

Universidade de Brasília
Faculdade UnB Planaltina
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Materiais

GERALDO BARBOSA DE OLIVEIRA FILHO

ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO DE MEMBRANAS PARA APLICAÇÃO EM
SISTEMAS DE SIMULAÇÃO: VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE SOLUÇÕES
ANALÍTICAS COM REALISMO FÍSICO.

BRASÍLIA
2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE UNB PLANALTINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DE MATERIAIS

GERALDO BARBOSA DE OLIVEIRA FILHO

ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO DE MEMBRANAS PARA APLICAÇÃO EM
SISTEMAS DE SIMULAÇÃO: VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE SOLUÇÕES
ANALÍTICAS COM REALISMO FÍSICO.

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ciência de Materiais da Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência de Materiais (Área de Concentração: Modelagem e Simulação).

Orientador:
Armando de Mendonça Maroja

BRASÍLIA
2014

Oliveira Filho, Geraldo Barbosa de.
O48a Análise da deformação de membranas para aplicação em sistemas de simulação : validação experimental de soluções analíticas com realismo físico / Geraldo Barbosa de Oliveira Filho. -- 2014.
92 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília, Faculdade de Planaltina, Programa de Pós-Graduação em Ciência de Materiais, 2014.

Orientação: Armando de Mendonça Maroja.
Inclui bibliografia.

1. Materiais biomédicos. 2. Ciência dos materiais.
I. Maroja, Armando de Mendonça. II. Título.

CDU 61:62

GERALDO BARBOSA DE OLIVEIRA FILHO

ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO DE MEMBRANAS PARA APLICAÇÃO EM
SISTEMAS DE SIMULAÇÃO: VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE SOLUÇÕES
ANALÍTICAS COM REALISMO FÍSICO.

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ciência de Materiais da Universidade de Brasília, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência de Materiais (Área de Concentração: Modelagem e Simulação).

Aprovada em 07 de agosto de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Professor Doutor Armando de Mendonça Maroja - Presidente da Banca
Universidade de Brasília

Professor Doutor Araken dos Santos Werneck Rodrigues– Membro Efetivo, Externo
Universidade de Brasília

Professor Doutor Ivan Ferreira da Costa– Membro Efetivo
Universidade de Brasília

Dedico este trabalho aos meus filhos Nádia, Filipe e Ariádne e minha esposa Leny, pelo apoio, incentivo e, em especial, o amor e carinho que me proporcionaram nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo.

Aos meus Pais (In Memoriam) por ter me ensinado valores como humildade e perseverança.

A todos os amigos e familiares. Apesar de minha ausência, obrigado pelo amor, amparo e compreensão, em todos os momentos dessa trajetória.

Meu muito obrigado ao Programa de Pós-Graduação em Ciência de Materiais, à SEEDF e a EAPE pela oportunidade de participar desse Mestrado.

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Armando de Mendonça Maroja, por sua paciência, por suas explicações, sugestões, conselhos e solidariedade durante todos os momentos de nossa pesquisa e também pela sua amizade.

A minha gratidão ao Professor Dr. Ivan Ferreira Costa pelo apoio técnico a pesquisa realizada.

Aos meus professores do Campus UnB Planaltina, em especial aos professores: Mariana Malard, Paulo Brito, Renata Aquino, Marcos Barbosa, Cleilton Rocha e Ismael; pela dedicação e profissionalismo.

Aos técnicos administrativos, Jorivê Sardinha da Costa e Aristides Álvares Dourado Júnior. Aos técnicos de laboratório, Lourenço e Leonardo; pela ajuda nos experimentos. E todos servidores da FUP-UnB sou grato pelo amparo e meu sincero obrigado.

A todos meus colegas do Mestrado, pelo apoio e amizade.

“Ou nós encontramos um caminho, ou abrimos um”.



Aníbal

RESUMO

GBOF (Oliveira Filho, Geraldo Barbosa de). **Análise da deformação de membranas para aplicação em sistemas de simulação: validação experimental de soluções analíticas com realismo físico**. 2014. Número de folhas: 92. Dissertação (Mestrado) – Faculdade UnB Planaltina, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

Os estudos teóricos e experimentais da mecânica da deformação de membranas têm sido objeto de uma extensa pesquisa nos últimos anos devido à sua aplicabilidade em diversos campos da ciência. A determinação das propriedades elásticas e viscoelásticas da membrana timpânica humana, a modelagem da parede celular e da pele, blindagens térmicas, habitats pressurizados no espaço, novas tecnologias para a angioplastia, modelagem de órgãos humanos como a bexiga e a mama e a construção de simuladores de cirurgia ilustram a vasta gama de aplicações das tecnologias de deformação e inflação de membranas. Por outro lado, a simulação da deformação de membranas para aplicações interativas exige que os tecidos moles reajam às forças aplicadas de forma estável e realista em tempo real. Uma solução analítica é uma boa escolha para soluções rápidas de objetos deformáveis, pois não precisa realizar grandes inversões de matriz, como é normalmente obrigatório em modelagens baseadas em outros métodos, como o método dos elementos finitos. Este estudo teve como objetivo medir experimentalmente a precisão de nossa abordagem analítica para a deformação de membranas, que consiste em calcular as configurações de equilíbrio de uma membrana elástica circular, 2D, tocada por uma sonda que se move na direção perpendicular à superfície. O estudo analítico e experimental da deformação da membrana foi realizado com a membrana fixada a uma fronteira circular e preenchida ou não com um líquido. A construção do aparato experimental foi baseada em dispositivos funcionais disponíveis na literatura especializada. Na modelagem da deformação foram considerados modelos desenvolvidos por pesquisadores do grupo de pesquisa em materiais da Universidade de Brasília, campus de Planaltina, adaptados para situação problema analisada no experimento. As comparações entre os resultados experimentais e os modelos analíticos mostraram excelente acordo, com erros experimentais da ordem de milímetros, a mesma precisão dos instrumentos de medida utilizados.

Descritores: Membranas, Deformação de Membranas, Biomateriais.

ABSTRACT

GBOF (Oliveira Filho, Geraldo Barbosa de). **Analysis of deformation of membranes for use in simulation systems: an experimental validation of analytical solutions with physical realism.** 2014. Number of sheets: 92. Thesis (Master) - Faculdade UnB Planaltina, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

Theoretical and experimental studies of the mechanical deformation of membranes have been the subject of extensive research in recent years due to its applicability in various fields of science. The determination of the elastic and viscoelastic properties of human tympanic membrane modeling of cell wall and skin, heat shields, pressurized habitats in space, new technologies for angioplasty, modeling of human organs such as the bladder and breast and building simulators surgery illustrate the range of applications of membrane deformation and inflation technologies. On the other hand, the simulation of the deformation of membranes to interactive applications requires the soft tissues to respond to applied forces in a stable and realistic in real time. An analytical solution is a good choice for quick solutions of deformable objects, it does not need to perform large matrix inversions, as is normally required in modeling based on other methods such as the finite element method. This study aimed to experimentally measure the accuracy of our analytical approach to the deformation of membranes, which is to calculate equilibrium configurations of an elastic circular membrane, 2D, touched by a probe that moves in the direction perpendicular to the surface. The analytical and experimental study of the deformation of the membrane was performed with the membrane attached to a circular border and filled with a liquid or not. The construction of the experimental apparatus was based on functional devices available in the literature. In the modeling of the deformation were considered models developed by researchers from the group of materials research at the University of Brasilia, Campus Planaltina, tailored to the problem situation analyzed in the experiment. Comparisons between experimental results and analytical models showed excellent agreement with experimental errors of the order of millimeters, the same accuracy of the measuring instruments used.

Keywords: Membranes, Deformation of Membranes, Biomaterials.

RESUMEN

GBOF (Oliveira Filho, Geraldo Barbosa de). **Análisis de la deformación de las membranas para uso en sistemas de simulación: una validación experimental de las soluciones analíticas con un realismo físico.** 2014. Número de hojas: 92. Tesis (Master) – Faculdade UnB Planaltina, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

Los estudios teóricos y experimentales de la deformación mecánica de las membranas han sido objeto de una amplia investigación en los últimos años debido a su aplicabilidad en diversos campos de la ciencia. La determinación de las propiedades elásticas y viscoelásticas de modelado de la membrana timpánica humana de la pared celular y la piel, protectores de calor, hábitats a presión en el espacio, las nuevas tecnologías para la angioplastia, el modelado de los órganos humanos, tales como la vejiga y mama y la construcción de simuladores de cirugía son ejemplos de la gama de aplicaciones de la deformación de la membrana y las tecnologías de inflación. Por otro lado, la simulación de la deformación de las membranas a las aplicaciones interactivas requiere que los tejidos blandos respondan a las fuerzas aplicadas de forma estable y realista y en un tiempo real. Una solución analítica es una buena elección para soluciones rápidas de objetos deformables, puesto que no hay que realizar grandes inversiones de matriz, como normalmente se requiere en el modelado basado en otros métodos tales como el método de elementos finitos. Este estudio tuvo como objetivo medir experimentalmente la veracidad de nuestro enfoque analítico para la deformación de las membranas, que consiste en calcular las configuraciones de equilibrio de una membrana circular elástica, 2D, tocado por una sonda que se mueve en la dirección perpendicular a la superficie. El estudio analítico y experimental de la deformación de la membrana se realizó con la membrana unida a un borde circular y lleno o no de un líquido. La construcción del aparato experimental se basó en los dispositivos funcionales disponibles en la literatura. En la modelización de la deformación se consideraron modelos desarrollados por investigadores del grupo de investigación de materiales en la Universidad de Brasilia, Campus Planaltina, adaptados a la situación del problema analizado en el experimento. Las comparaciones entre los resultados experimentales y los modelos analíticos mostraron una excelente concordancia, apenas con algunos errores experimentales de la orden de milímetros, la misma exactitud de los instrumentos de medición utilizados.

Palabras clave: Membranas, Deformación de las Membranas, Biomateriales.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1: Indentação de uma membrana de borracha: (a) indentação no centro da membrana de borracha, (b) indentação em posição próximo ao centro da membrana. Note que: F é a força externa exercida sobre membrana através do indentador e r_o correspondente a 35 mm. Fonte: Adaptado de Selvadurai (2006). 21
- Figura 2: Aparato experimental de Mei Qiong Shi, com membrana deformada destacada. Fonte: (SHI, 2009). 23
- Figura 3: Simulador de deformação de biomembranas. Fonte: (COSTA e COSTA, 2012). 24
- Figura 3.1 (a): Membrana elástica fixada a uma borda circular. (b): Aspecto de uma membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido. (ii): membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido. 27
- Figura 4: Representa a seção reta de uma membrana de borracha esticada empurrada para baixo por um indentador. 29
- Figura 5: Deformação no centro da membrana ($\vec{r}_0 = \mathbf{0}$): O círculo interno de raio a , em destaque, define a região de área A_o onde a força atua e portanto $u(r, \theta) = u_o$. O círculo externo de raio b caracteriza a borda fixa a fronteira circular onde $\mathbf{u}(b, \theta) = \mathbf{0}$. 33
- Figura 6: Deformação em uma posição deslocada de \vec{r}_0 em relação ao centro da membrana. A região ω , em destaque, caracteriza os pontos deformados pela prova circular onde $u(\omega) = u_o$. 33
- Figura 7: Solução da equação 6 com a força pontual. 35
- Figura 8: Construção da solução aproximada da equação 6 para a condição de contorno CI . 35
- Figura 9: Aparato experimental. (1) suporte da membrana, (2) membrana elástica, (3) indentador, (4) massas auxiliares, (5) suporte do indentador, (6) base de vidro, (7) parafuso referencial, (8) orifício de controle de pressão, (9) câmara e tripé. 40
- Figura 10: Síntese do Procedimento de Aquisição e Análise de Imagens – PAAI. 41
- Figura 11: Deformação do centro da membrana. Teste piloto I realizado em 13 de fevereiro de 2014. $u_o = 1,90 \times 10^{-2} m$; Carga no indentador = 6,40 N. 42
- Figura 12 Verificação das precisões das medidas. Teste piloto II realizado em 02 de abril de 2014. 43
- Figura 13: (a): Aspecto da deformação com membrana de látex utilizadas em balões. Esta fotografia corresponde às primeiras observações de deformações no Laboratório de Ciências da Faculdade UnB Planaltina. (b): Base de Vidro com altura maior, na imagem experimento de deformação com líquido. (c): Protótipo de deformação com iluminação direta. (d): Protótipo final de deformação com eixo de regulagem duplo, acoplado a base fixa. 45
- Figura 14: Aparato experimental. (1) suporte da membrana, (2) membrana elástica, (3) indentador, (4) massas auxiliares, (5) suporte do indentador, (6) base de vidro, (7) parafuso referencial, (8) orifício de controle de pressão, (9) câmara e tripé. 46
- Figura 15: (a): Placa suporte da membrana; (b): Junta impermeável de acetato. 47

- Figura 16: Membrana tensionada por um arco de madeira, bastidor, o mesmo utilizado para bordar. Para que ocorra a montagem do suporte é necessário primeiro esticar a manta de látex. Depois colamos a junta com silicone, e para fixar a manta e a junta, colamos novamente os dois no suporte de alumínio com silicone novamente. 48
- Figura 17: Indentador utilizado na deformação da membrana. 49
- Figura 18: Medidas de metal (latão), massa 50,0 g. 50
- Figura 19: Suporte do indentador e sargentos em destaque na figura. 51
- Figura 20: Caixa transparente de vidro. 52
- Figura 21: A fotografia mostra a linha de referência para o centro da membrana, com a membrana em indentação. 54
- Figura 22: Molde da membrana. Com contorno do indentador no centro da membrana e deslocado em relação ao centro. 55
- Figura 23: A tela do Software Plot Digitizer, com os pontos funcionais mais a janela de calibragem. 56
- Figura 24: Na imagem os pontos c1, c2, e c3, que correspondem respectivamente ao centro da membrana e as duas marcas do parafuso referencial. 57
- Figura 25: Exemplo da análise da deformação em uma tabela de resultados no Excel. Note que, na figura os dados experimentais correspondem aos pontos em azul e a curva referente a solução analítica em vermelho.(figura correspondente. 59
- Figura 26: Distribuição de pontos em um papel milimetrado para análise geométrica - teste piloto 2. Aspecto das coordenadas geométricas. Imagem de um objeto no papel milimetrado. Utilizamos este procedimento para verificar a precisão das medidas da imagem fotográfica em relação às medidas do objeto real. 60
- Figura 27: Ponto 26 em destaque. 61
- Figura 28: Exemplo da análise de verificação de medida sem uma tabela de resultados no Excel - teste piloto 2. 61
- Figura 29: Sistema de coordenadas dos planos x e y de avaliação. 62
- Figura 30: Condição de contorno C1: média dos valores para $x_0 = 0$, em $(x_0 + a$ e $x_0 - a)$. 63
- Figura 31: Aplicação do princípio da superposição. 64

Figura 32: $carga = 1,98 N$, $u_o = -0,90 \times 10^{-2} m$, $x_o = -0,052 \times 10^{-2} m$	66
Figura 33: $carga = 3,45 N$, $u_o = -1,30 \times 10^{-2} m$, $x_o = -0,165 \times 10^{-2} m$	66
Figura 34: $carga = 4,92 N$, $u_o = -1,55 \times 10^{-2} m$, $x_o = 0,060 \times 10^{-2} m$	66
Figura 35: $carga = 6,40 N$, $u_o = -1,90 \times 10^{-2} m$, $x_o = 0,060 \times 10^{-2} m$	66
Figura 36: $carga = 7,87 N$, $u_o = -2,20 \times 10^{-2} m$, $x_o = 0,060 \times 10^{-2} m$	67
Figura 37: $carga = 9,34 N$, $u_o = -2,50 \times 10^{-2} m$, $x_o = 0,060 \times 10^{-2} m$	67
Figura 38: $carga = 10,81 N$, $u_o = -2,70 \times 10^{-2} m$, $x_o = -0,060 \times 10^{-2} m$	67
Figura 39: $carga = 12,97 N$, $u_o = -2,92 \times 10^{-2} m$, $x_o = 0,113 \times 10^{-2} m$	67
Figura 40: resumo da análise referente à medida da figura 36.	69
Figura 41: sobreposição entre o gráfico da figura 40 e a imagem da deformação da membrana, figura 36.	69
Figura 42: Curva tensão / deformação para a membrana elástica.	70
Figura 43: $carga = 4,92 N$, $u_o = -1,40 \times 10^{-2} m$, $x_o = 3,80 \times 10^{-2} m$	70
Figura 44: $carga = 7,87 N$, $u_o = -2,00 \times 10^{-2} m$, $x_o = 3,40 \times 10^{-2} m$	70
Figura 45: $carga = 10,81 N$, $u_o = -2,30 \times 10^{-2} m$, $x_o = 3,40 \times 10^{-2} m$	71
Figura 46: $carga = 3,53 N$, $u_o = -1,17 \times 10^{-2} m$, $x_o = 2,12 \times 10^{-2} m$	71
Figura 47: $carga = 9,41 N$, $u_o = 2,40 \times 10^{-2} m$, $x_o = 2,20 \times 10^{-2} m$	71
Figura 47.1: $carga = 15,29 N$, $u_o = 3,60 \times 10^{-2} m$, $x_o = 2,20 \times 10^{-2} m$	71
Figura 48: $carga = 15,2 N$, $u_{do} = -3,62 \times 10^{-2} m$, $u_{oo} = -1,8 \times 10^{-2} m$, $x_o = -0,04 \times 10^{-2} m$	72
Figura 49: $carga = 9,4 N$, $u_{do} = -2,77 \times 10^{-2} m$, $u_{oo} = -1,5 \times 10^{-2} m$, $x_o = -0,01 \times 10^{-2} m$	72
Figura 50: $carga = 15,2 N$, $u_{do} = -3,5 \times 10^{-2} m$, $u_{oo} = -1,6 \times 10^{-2} m$, $x_o = -2,24 \times 10^{-2} m$	73
Figura 51: $carga = 9,4 N$, $u_{do} = -2,44 \times 10^{-2} m$, $u_{oo} = -1,9 \times 10^{-2} m$, $x_o = -2,23 \times 10^{-2} m$	73
Figura 52. Deformação da membrana fixada ao longo de uma borda circular-líquido.	74
Figura 53: Medida experimental, deformação no centro da membrana. (Oliveira et al, 2014).	74
Figura 54: Deflexão de uma membrana de borracha com indentação em seu centro. $a=2,44cm$ e $b=12,5cm$. Fonte: (SELVADURAI, 2006). A figura 55 apresenta a análise realizada no Excel	75
Figura 55: A figura apresenta o resumo da análise referente a figura 54, ilustrando a determinação do erro absoluto e o desvio padrão.	75
Figura 56: Resposta de deslocamento de carga para ensaio de carga-fluido. (SHI 2009).	76
Figura 57: A figura apresenta o resumo da análise referente a figura produzida por SHI, ilustrando a determinação do erro absoluto e o desvio padrão. Adaptado de SHI 2009.	77
Figura 58: A figura apresenta o resumo da análise referente a produzida por SHI, ilustrando a determinação do erro absoluto e o desvio padrão. Adaptado de SHI 2009.	77
Figura 59: A figura apresenta o resumo da análise referente a produzida por SHI, ilustrando a determinação do erro absoluto e o desvio padrão. Adaptado de SHI 2009.	77
Figura 60: A figura apresenta o resumo da análise referente a produzida por SHI, ilustrando a determinação do erro absoluto e o desvio padrão. Adaptado de SHI 2009.	78

Figura 61: Deflexão de uma membrana de borracha com indentação próximo ao seu centro. Fonte: (SELVADURAI, 2006). 80

Figura 62: Comparação das previsões computacionais e resultados experimentais para a deformação próximo ao centro da membrana de borracha (i) O modelo de Mooney-Rivlin; (ii) O modelo Neo-Hookean; (iii) O modelo Blatz-Ko; (iv) O modelo Yeoh; e (v) O modelo de Ogden.(Adaptado de Selvadurai, 2006). 81

Figura 63: Gráfico de deflexão de uma membrana para resultados de pressão-fluido para uma membrana de borracha de látex utilizando o método computacional de Mooney-Rivlin.(SHI 2009) 82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Número de medidas para cada posição do indentador.	44
Tabela 2: Condições de Contorno para cada caso estudado	44
Tabela 1: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição próxima do centro da membrana, realizados em 13/02/2014, $a = 2,50\text{ cm}$ e $b = 6,50\text{ cm}$.	67
Tabela 2: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição próxima do centro da membrana, realizados em 06/06/2014, $a=2,50\text{ cm}$ e $b=6,50\text{ cm}$.	68
Tabela 5: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição deslocada a esquerda em relação ao centro da membrana, realizados em 25/02/2014, $a = 2,50\text{ cm}$ e $b = 6,50\text{ cm}$.	71
Tabela 6: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição deslocada a direita em relação ao centro da membrana, realizados em 06/06/2014, $a = 2,50\text{ cm}$ e $b = 6,50\text{ cm}$.	72
Tabela 7: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição próxima ao centro da membrana, caixa transparente cheia de água, realizados em 06/06/2014, $a= 2,50\text{ cm}$ e $b= 6,50\text{ cm}$	73
Tabela 8: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição deslocada em relação ao centro da membrana, com a caixa transparente cheia de água, realizados em 06/06/2014, $a=2,50\text{cm}$ e $b =6,50\text{ cm}$.	73
Tabela 9: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição no centro da membrana, realizados por Selvadurai 2006, $b=12,50\text{ cm}$.	76
Tabela 10: Resultados de vários carregamentos por carga realizados por Shi (2009), $b=7,3\text{ cm}$.	78

LISTA DE SIGLAS

PAAI - Procedimento de Aquisição e Análise de Imagens

LISTA DE SÍMBOLOS

- u deslocamento vertical da membrana em relação ao seu plano de equilíbrio.
- τ tensão superficial.
- dF força infinitesimal aplicada em um ponto da membrana.
- P pressão aplicada sobre a membrana.
- dA_0 elemento infinitesimal de área.
- $\delta(x)$ função delta de Dirac.
- $G(r, \theta, \rho, \varphi)$ função de Green.
- F força externa exercida sobre membrana através do indentador.
- $f(r, \theta)$ força sobre a membrana por unidade de área devido às forças externas.
- V_0 volume inicial para o cálculo de uma integral tripla.
- θ coordenada angular de um ponto (r, θ) sobre a membrana.
- r coordenada radial de um ponto (r, θ) sobre a membrana.
- (r_0, θ_0) ponto de aplicação da força externa sobre a membrana através da ponta de prova circular.
- θ_0 coordenada angular do ponto (r_0, θ_0) .
- r_0 coordenada radial do ponto (r_0, θ_0)
- b raio da membrana circular.
- u_0 deslocamento vertical da membrana na posição da ponta de prova circular.
- a raio da ponta de prova circular.
- C constante de integração.
- $(0,0)$ posição do centro geométrico da membrana, origem do referencial.
- ω representa o conjunto de pontos que pertencem a um círculo de raio $= a$ (raio de ponta de prova circular) com centro no ponto (r_0, θ_0) .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	20
1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO	26
1.1.1 Objetivo Geral	26
1.1.2 Objetivos Específicos	27
2 DEFORMAÇÃO DE MEMBRANAS	28
2.1 CONCEITOS.....	28
2.1.1 Materiais de borracha.....	28
2.1.2 A membrana de borracha esticada: grandezas físicas relevantes... ..	28
2.2 SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA DEFORMAÇÃO DE MEMBRANAS.....	29
2.2.1 Procedimento de solução de equações diferenciais pelo método da Função de Green.....	30
2.2.2 Estudo da deformação de membrana elástica fixada a uma borda circular.....	31
2.2.3 Estudo da deformação de membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido.....	37
3 MATERIAIS E MÉTODOS.....	39
3.1 O APARATO EXPERIMENTAL.....	39
3.2 PROCEDIMENTOS DE AQUISIÇÃO E ANÁLISE DE IMAGENS – PAAI.....	40
3.3 OS TESTES PILOTOS	41
3.4 MEDIDAS DA INDENTAÇÃO E PROCEDIMENTOS	43
3.5 SOLUÇÕES ANALÍTICAS	44
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	45
4.1 DESCRIÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL	46
4.2 PROCEDIMENTOS DE AQUISIÇÃO E ANÁLISE DE IMAGENS – PAAI	53
4.2.1 Montagem do experimento.....	53
4.2.2 Registro de Imagens	55
4.2.3 O <i>Plot Digitizer</i>	56
4.2.4 Análise no Excel	58

4.3 TESTES PILOTOS	59
4.4 SOLUÇÕES ANALÍTICAS	62
4.4.1. Casos (a) e (b) da tabela 2: Deformação próximo do centro ou deslocada do centro, sem líquido.....	63
4.4.2 Casos (c) e (d) da tabela 2. Deformação próximo do centro ou deslocada do centro, com líquido.....	64
4.5 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO.....	66
4.5.1 Deformação da membrana fixada ao longo de uma borda circular.....	66
4.5.2 Deformação-membrana em posição deslocada em relação ao centro geométrico.....	70
4.5.3 Deformação de membrana próxima ao centro geométrico com a caixa transparente cheia de água	72
4.5.4 Deformação da membrana, medidas realizadas por Selvadurai (2006).....	74
4.5.5 Deformação da membrana, medidas realizadas por Shi (2009).....	76
4.6 ANÁLISE DE RESULTADOS	78
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
REFERÊNCIAS	84
APÊNDICE A - O SOFTWARE LIVRE PLOT DIGITIZER	88
APÊNDICE B: Modelos de relatórios de medida: Modelo de relatório de medida: membrana elástica fixada a uma borda circular.....	89
APÊNDICE C: Modelos de relatórios de medida: Modelo de relatório de medida: membrana elástica fixada a uma borda circular- líquido	90
APÊNDICE D- GLOSSÁRIO.....	91

1 INTRODUÇÃO

O estudo da deformação de membranas é tema atual na ciência de materiais, com aplicações que se estendem da deformação e inflação de membranas na engenharia (SELVADURAI, 2006; SHI, 2009; PATIL, 2013) até a caracterização de biomembranas, como a pele humana (PAMPLONA, 2014) e da membrana do tímpano (AERNOUTS, 2011).

Por outro lado, existe a necessidade de realizar a simulação da deformação, importante na determinação das propriedades físicas de materiais, biomateriais e mesmo no estudo dos processos de deformação de objetos e órgãos (BALANIUK, 2006; PALOMAR, 2008; COSTA, 2006), como também em aplicações em simuladores de cirurgia (COSTA, 2013).

Neste trabalho, soluções analíticas utilizadas para o desenvolvimento de modelos virtuais para deformação de tecidos moles, (COSTA, 2013), são validadas através de ensaios experimentais, onde foram realizadas deformações de membranas elásticas formando objetos que podem ser preenchidos ou não com um líquido. A análise da deformação elástica global de membranas formando objetos fechados preenchidos com líquido é importante, pois estes objetos são uma boa aproximação para tecidos biológicos e órgãos como o olho ou a bexiga (COSTA, 2012).

O aparato experimental construído é baseado em trabalhos recentes que tratam de deformação de membranas, como o de Selvadurai (2006) que realizou estudo experimental e simulação computacional das deflexões de uma membrana elástica e o de Shi (2009), que avaliou a deformação de membranas sujeitas à carga de um fluido. As soluções analíticas para deformação de membrana são as apresentadas no trabalho de Costa (2013) que estudou a deformação de membranas em ambiente virtual para treinamentos não invasivos na medicina. Iniciamos nossa discussão, comentando sinteticamente os experimentos de Selvadurai e de Shi.

Selvadurai (2006), realizou uma vasta revisão da problemática da deformação de membranas. Também comparou resultados experimentais para a deflexão de uma membrana de látex fixado ao longo de um contorno circular, com resultados derivados de simulações computacionais. O trabalho experimental foi estendido para determinar tanto as respostas à deformações no centro da membrana quanto às deformações em posições

próximas ao centro da membrana. As deformações foram realizadas por um indentador¹ esférico, como mostra a figura 1. As características de fricção do contato entre o indentador e a membrana de látex também foram avaliadas experimentalmente.

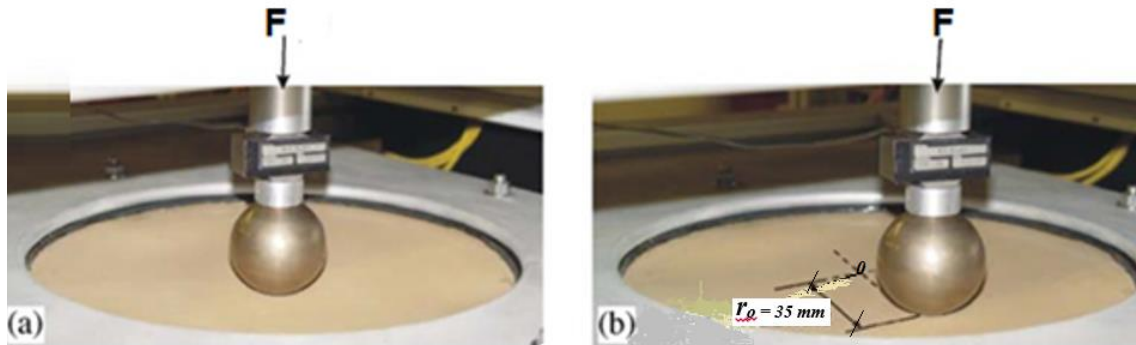


Figura 1: Indentação de uma membrana de borracha: (a) indentação no centro da membrana de borracha, (b) indentação em posição próximo ao centro da membrana. Note que: F é a força externa exercida sobre membrana através do indentador e r_0 correspondente a 35 mm. Fonte: Adaptado de Selvadurai (2006).

O autor realizou também modelagem computacional da indentação da membrana de borracha circular utilizando o método dos elementos finitos², plataforma ABAQUS / código padrão (2004). Este código é muito versátil, pois incorpora as características do material em estudo através de várias opções para escolha da função de energia de deformação³ e os efeitos do contato entre o indentador esférico e a membrana elástica. Por fim, Selvadurai destaca:

A modelagem do comportamento constitutivo de materiais como a borracha, por exemplo, continua a ser de interesse e importância para a engenharia de materiais e a mecânica contínua de sólidos. As aplicações tecnológicas dos materiais hiperelásticos levaram ao desenvolvimento de uma larga variedade de modelos que podem ser usados para descrever o comportamento mecânico dos materiais de borracha que são livres de inelasticidade e efeitos de deformação. Muitas das caracterizações constitutivas são baseadas em experimentos que induzem estados homogêneos de tensão nas espécimes dos testes. As correlações estabelecidas através desses exercícios sugerem que muitos dos modelos existentes podem descrever adequadamente os resultados experimentais observados em ambos os níveis de tensão, moderada e alta. Esse estudo aborda a validação de modelos constitutivos desenvolvidos por meio de testes uniaxiais que recorrem a uma experimentação envolvendo um problema específico de valor limite lidando com indentação transversal assimétrica e axissimétrica em uma membrana circular. Uma comparação dos resultados dos experimentos e as previsões computacionais indicam que o nível de correlação não é consistente com o que é

¹Indentador é um objeto sólido utilizado para a produção de uma cavidade ou deformação um corpo ou material em um teste de indentação. Os ensaios de dureza por indentação são frequentemente utilizados na caracterização das propriedades mecânicas dos materiais (MARTINS, 2012).

²O método dos elementos finitos (MEF ou FEM em inglês) é uma forma de resolução numérica de um sistema de equações diferenciais parciais. O método encontra aplicações em diversos campos: mecânica estrutural, mecânicos fluidos, e eletromagnetismo, por exemplo (COSTA e BALANIUK, 2001).

³A função energia de deformação é característica dos modelos constitutivos que descrevem o comportamento mecânico de membranas de materiais hiperelásticos (por exemplo látex). São exemplos as teorias de Mooney-Rivlin, Neo-Hookean e Yeoh Ogden, dentre outras.

observado nos testes de espécimes uniaxiais. Os resultados dessa pesquisa sugerem que, mesmo que o indentedor induza largas deflexões na membrana, as tensões encontradas na membrana ainda estão com moderada variação (i.e. $\epsilon_0 < 70\%$). Nessas situações o computacional estima que o uso de modelos constitutivos simples, como o Mooney–Rivlin e Blatz–Ko tipos de funções de tensão de energia, provem as melhores correlações com informações experimentais. Nesse sentido, a seleção de uma forma particular de função energética de tensão para tratamento analítico e computacional de um problema da elasticidade da borracha também deve dar atenção a variação de tensão que pode ser experimentada no limite do problema valor que está sendo investigado. O desenvolvimento do modelo também pode ser melhorado considerando mais de uma categoria de experimentos (SELVADURAI, 2006, p.1115).

Portanto, para deformações moderadas, as estimativas determinadas através da simulação utilizando modelos constitutivos simples, como Mooney-Rivlin⁴, predizem as melhores correlações com os dados experimentais (SELVADURAI, 2006).

Shi (2009) desenvolveu experimentos para deformação de membranas através do carregamento de líquidos. A figura 2 ilustra o aparato experimental, onde a deflexão de uma membrana de borracha, devido à pressão de um líquido inserido em uma coluna é realizada.

O autor também destaca que os modelos mais simples fornecem os melhores resultados para as curvas de tensão e deformação. Utilizando simulação computacional, método dos elementos finitos plataforma ABAQUS, em sua pesquisa, ele constata que o modelo de Mooney-Rivlin da função energia de deformação pode prever com precisão o comportamento mecânico de borracha natural desde pequenas a grandes deformações.

Costa (2013), obteve a solução analítica para a deformação de membranas com emprego da realidade virtual em tempo real. Neste estudo, uma plataforma conhecida como CHAI 3D é responsável pelas sensações visuais que são transmitidas por meio do monitor de um computador e uma interface de retorno de força ou interface háptica, PHANTOM Omni^{®5}, aliada a essa plataforma, fornece aos usuários as sensações táteis.

O método de deformação criado e implementado por Costa (2013) leva em consideração a *Equação de Poisson* e impõe *Condição de Contorno de Dirichlet* que, por

⁴MOONEY, M. “A theory of large elastic deformation”. Journal of applied physics, v.11, n.9, p. 582-592, 2004. RIVLIN, R.S. “Large elastic deformations of isotropic materials”. IV Further developments of the general theory, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, v.241, n.835, p. 379-397, 1948.

⁵O *PhantomOmni*[®] possui diversas utilidades, sendo que essas possibilidades se concentram em sua maioria na área da educação, como com a realização de aulas práticas ou realização de procedimentos pré-cirúrgicos ou pré-operatórios. Note que a caneta do dispositivo pode ser utilizada como um corpo rígido (escova, broca, bisturi e esfera) que assume a forma de vários objetos e que possibilita a interação do usuário com a simulação por meio desses objetos que são carregados para a cena virtual e que realizam modificações naquele ambiente(COSTA, 2013).

sua vez, possui solução analítica quando utiliza o método das *Funções de Green*. O autor avalia várias situações utilizando esse método.

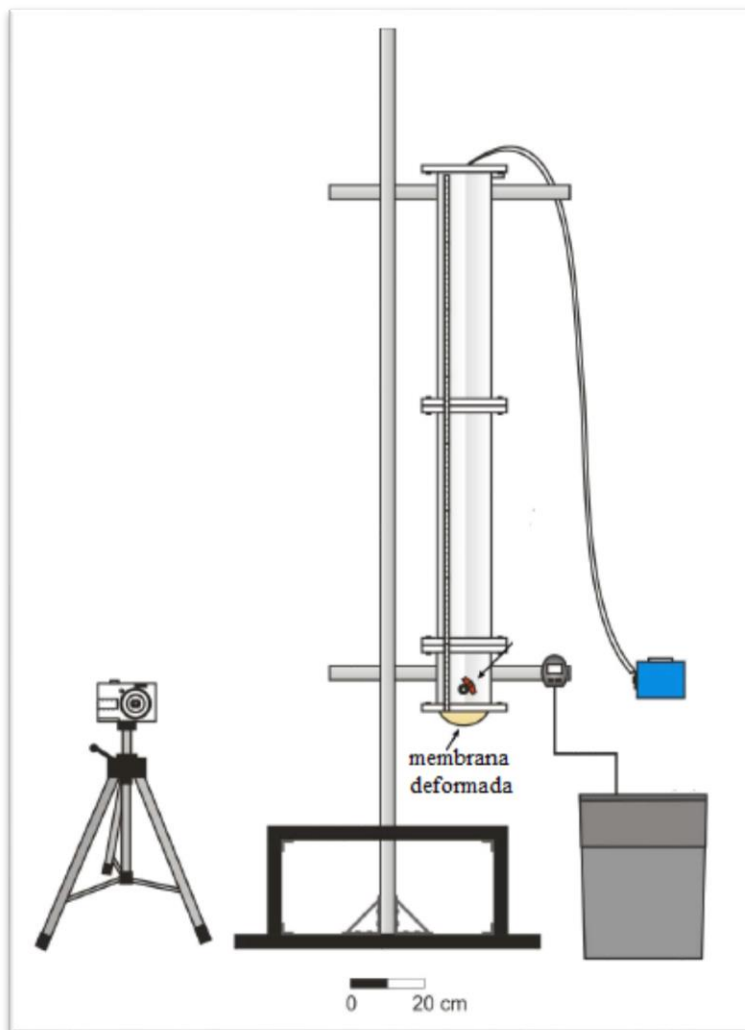


Figura 2: Aparato experimental de Mei Qiong Shi, com membrana deformada destacada. Fonte: (SHI, 2009).

A primeira situação considera uma membrana homogênea no espaço livre, ou seja, uma membrana que tende ao infinito no plano (x,y) , condição restrita ao mundo virtual ou computacional. A segunda situação considera uma membrana também homogênea, agora com borda fixa, sendo assim, uma membrana possível de ser representada em um ambiente virtual, governado pelas leis físicas. Dessa maneira, por meio da implementação e simulação da segunda situação na plataforma acima mencionada, o autor realizou a validação do seu método, que a partir da comparação com o experimento da deformação de uma membrana de borracha homogênea real obteve-se resultado bastante satisfatório, uma vez que, os gráficos comparativos entre o experimento real e a simulação possuem boa sobreposição.

Como exemplo importante de aplicação de deformação de membranas, podemos destacar o trabalho de Costa e Costa (2012), estes pesquisadores realizaram um estudo preliminar da deformação do tímpano do ouvido humano, que na verdade é simulado como uma textura colocada sobre uma membrana flexível que pode ser deformada em tempo real. O usuário pode manipular a caneta do dispositivo, que por sua vez controla uma pequena esfera no ambiente virtual, a qual realiza as deformações do “tímpano” na cena, observe a figura 3. Além do estímulo visual produzido pelo ambiente virtual, o usuário recebe ainda o estímulo tátil, que pode ser sentido com a manipulação do dispositivo háptico, que detecta o relevo na superfície por meio de colisões e deformações com retorno de força, o que faz o usuário ter a sensação de estar realmente deformando uma membrana flexível.

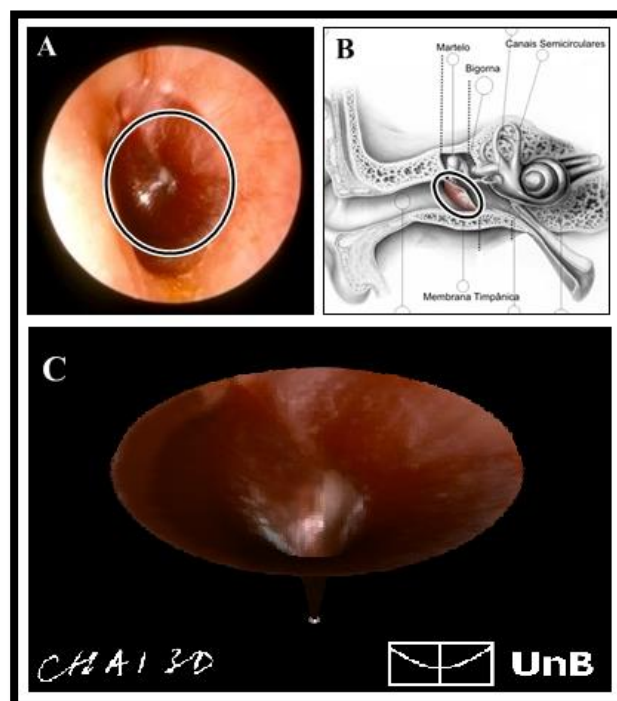


Figura 3: Simulador de deformação de biomembranas. Fonte: (COSTA e COSTA, 2012).

Há estudos recentes sobre a aplicação científica de deformação de membranas. O primeiro que podemos citar é um artigo de Patil e Desgupta (2013) que analisam a mecânica da deformação de uma membrana hiperelástica circular inflada assimetricamente sob os efeitos de uma pressão interna. Os autores mencionam que as membranas hiperelásticas (exemplo: látex) por serem mais leves e mais baratas que as estruturas convencionais estão se tornando preferíveis para aplicações terrestres e espaciais.

Outro exemplo de aplicação científica vem de Aernouts e Dirckx (2011), que estudaram a dinâmica da elasticidade da membrana do tímpano, como efeito provocado pela pressão do ar, utilizando simulação com métodos de elementos finitos. Esses autores destacam que desde a década de 1990, modelos de elementos finitos são utilizados para estudar esse sistema complexo, o tímpano. Os autores ressaltam a importância de estudar a elasticidade do tímpano humano para obtenção de dados sobre as propriedades mecânicas desse tipo de membrana.

Também podemos destacar o recente estudo do comportamento de biomembranas realizado por Pamplona, Velloso e Rodwanski (2013), que analisa a pele e suas características físicas sob tensão, por meio do método dos elementos finitos. Esses autores descrevem em seu artigo a expansão da pele e suas características: isotrópica, homogênea e hiperelástica. Esse artigo possibilitou como resultado uma considerável melhora sobre o entendimento do comportamento da pele sob expansão.

Sardinha (2013) destaca que a produção de modelos virtuais da anatomia externa real de órgãos humanos é fundamental para o desenvolvimento de técnicas de instrumentação para a modelagem e simulação de materiais utilizados em estudos relativos a cirurgias guiadas por imagem, treinamento de intervenções em consultórios médicos virtuais e produção de equipamentos em realidade virtual. Ela produziu um modelo 3D de anatomia externa de mama humana, deformando-as através do Método Fibra-Fluido (Fiber Fluid Method - FFM), testando, a plataforma de simulação produzida por Costa (2012).

A viabilidade de reproduzir situações reais sem risco a pacientes, a diminuição de custos devido à redução de uso de objetos físicos, a possibilidade de simular e visualizar ações impossíveis de serem percebidos no mundo real, como o funcionamento de um órgão humano ou a trajetória de um medicamento no corpo, bem como a diminuição do uso de cadáveres, cobaias e materiais de manutenção constituem motivos suficientes para que a realidade virtual aplicada à saúde constitua uma área de interesse crescente, com benefícios tanto para a saúde, quanto para o desenvolvimento das áreas tecnológicas (COSTA e COSTA, 2012).

Em uma aplicação de simulação de cirurgia, por exemplo, erros da ordem de milímetros podem ser inadmissíveis (COSTA, 2013). A necessidade de realismo exige que muitos sistemas, forneçam precisão em relação à modelagem e manipulação de objetos. Este requisito pode vir de encontro à necessidade de tempo real. Desta forma,

tempo e precisão são dois fatores quase que conflitantes (KIMER e CISCOUTTO, 2007) *apud* (COSTA, 2013).

Maroja et al (2011) destacam que a capacidade de modelar e manipular a deformação de membranas em tempo real, com rapidez e realismo físico é um tema importante para muitas aplicações interativas, tais como simulação de tecidos e sistemas de simulação da cirurgia. Muitos órgãos humanos podem ser modelados essencialmente por uma biomembrana elástica com algum grau de precisão. Bons exemplos deste tipo de órgãos são: a vesícula biliar, a bexiga, as vias biliares, o estômago, os olhos, o intestino e a mama. A versatilidade da abordagem em termos de deformação em tempo real, a eficiência em termos de memória e de complexidade computacional, a estabilidade incondicional da simulação torna esta abordagem interessante para os jogos e sistemas de simulação da cirurgia.

A validação das soluções analíticas apresentadas neste trabalho, podem assim servir de base no desenvolvimento de sistemas para deformação de tecidos moles e para obter as características elásticas de órgãos e objetos, entre outras aplicações.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho é realizar a validação experimental de soluções analíticas para a deformação de membranas. Duas situações serão analisadas:

(i): membrana elástica fixada ao longo de um contorno circular presa a um suporte metálico colado a uma caixa transparente, fig. 3.1 (a) Vamos denominar ao longo do trabalho essa situação como membrana elástica fixada a uma borda circular.

(ii): membrana elástica fixada ao longo de um contorno circular presa a um suporte metálico colado a uma caixa transparente cheia de líquido (água), fig. 3.1 (b). Vamos denominar ao longo do trabalho essa situação como membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido. Aqui a membrana separa uma interface ar/água.

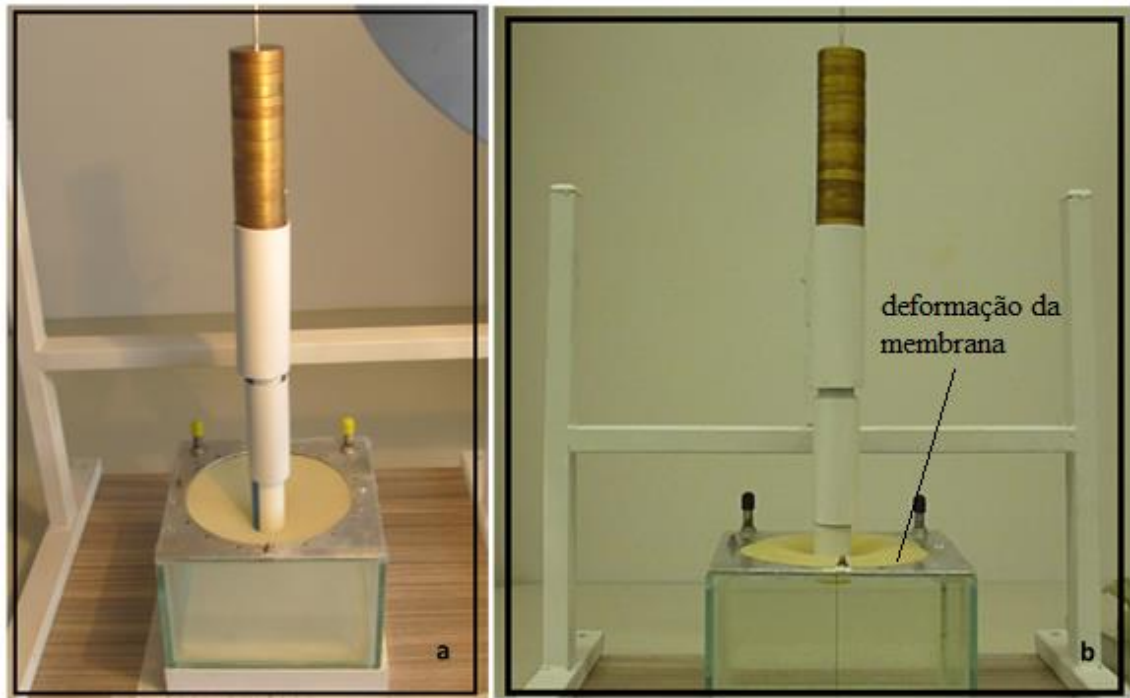


Figura 3.1 (a): Membrana elástica fixada a uma borda circular. Indentação de membrana sem líquido (água). (b): Aspecto de uma membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido. Aqui a membrana separa uma interface ar/água.

1.1.2 Objetivos Específicos

- a) Construir aparato experimental para deformação de membranas elásticas circulares.
- b) Estabelecer o Procedimento de Aquisição e Análise de Imagens – PAAI a partir de teste piloto do aparato experimental.
- c) Estudar, adaptar e determinar as soluções analíticas com realismo físico para a deformação de membranas nas situações problema apresentadas acima.
- d) Realizar a aquisição de imagens da deformação de membranas de látex, medidas experimentais, com o uso do aparato experimental, seguindo o PAAI.
- e) Obter os dados funcionais da deformação a partir das imagens das membranas nas diversas situações, utilizando o software *Plot Digitizer*, conforme procedimento definido no PAAI. Comentário: Como resultado final haverá um conjunto de medidas experimentais compostas de tabela de pontos (x, y) representando precisamente a deformação da membrana em cada situação.
- f) Confrontar as medidas experimentais com as soluções analíticas com realismo físico para deformação de membranas.

2 DEFORMAÇÃO DE MEMBRANAS

2.1 CONCEITOS

2.1.1 Materiais de borracha

A borracha natural é um material obtido por meio da extração de látex de um corte feito na casca de uma árvore. A seringueira mais popular usada para fins comerciais é o *Heavea braziliensis*, originária da América do Sul. A importância da borracha natural e seu potencial comercial se deram com a descoberta da vulcanização por Charles Goodyear em 1830. A borracha natural não curada é pegajosa e extremamente dependente da temperatura, que facilmente se deforma quando ligeiramente aquecida, e torna-se dura e quebradiça em ambientes frios. O processo de vulcanização modifica as propriedades físicas da borracha através da ligação cruzada das moléculas de borracha, tornando assim o material mais durável, mais resistente a ataques de calor e produtos químicos, mantendo a sua elasticidade a baixas temperaturas. Na utilização atual, o termo borracha, refere-se a qualquer material que apresenta propriedades semelhantes às da borracha natural. As pesquisas bem sucedidas nesta área têm levado as indústrias de manufatura e de construção a adotar borracha para uma ampla variedade de aplicações de engenharia, incluindo pneus, tubos, correias, esteiras, tecidos biológicos, dentre outras aplicações (SHI, 2009; PATIL e DESGUPTA, 2013).

2.1.2 A membrana de borracha esticada: grandezas físicas relevantes.

As grandezas físicas necessárias para a compreensão da deformação de uma membrana elástica são apresentadas através do exemplo mostrado na figura 04. A figura ilustra uma membrana com bordas fixas deformadas através da ação da força F vertical aplicada de um indentador (ponta de prova circular) de área transversal A_0 . Assim, a superfície da membrana sofre a ação da pressão $P = \frac{F}{A_0}$. O deslocamento vertical da membrana $u(x,y)$ em cada ponto (x,y) da superfície é determinado através da análise do equilíbrio estático das forças. (FEYNMAN *et al*, 2008).

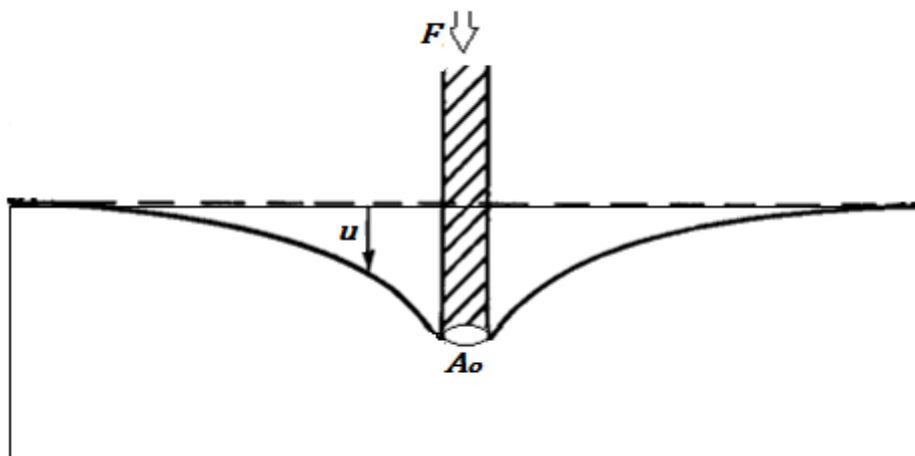


Figura 4: Representa a seção reta de uma membrana de borracha esticada empurrada para baixo por um indetador.

A elasticidade da membrana é caracterizada pela sua tensão superficial τ definida como a força superficial por unidade de comprimento.

Feynman *et al* (2008) analisam em detalhes essa situação problema e mostraram que $u(x,y)$ obedece a equação de Poisson para pequenas deformações⁶:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{f(x,y)}{\tau} \quad (1)$$

onde $f(x,y)$ representa a carga externa sobre a membrana por unidade de área.

2.2 SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA DEFORMAÇÃO DE MEMBRANAS

A análise da deformação de membranas proposta neste trabalho tem como base, a metodologia apresentada por Costa (2013). O foco dessa análise recai na solução da equação de Poisson, equação 1.

Existem vários métodos para solução da equação, no caso utilizaremos o método das Funções de Green. Uma Função de Green é um tipo de função utilizada para resolver equações diferenciais não-homogêneas sujeitas a condições iniciais ou de contorno determinadas, tais como a de Dirichlet, quando os valores da solução são conhecidas no

⁶Definimos como condição, o estudo para pequenas deflexões. Sendo $\frac{\pi}{180^\circ} = 0,0174 \text{ radianos} = 1^\circ$, podemos dizer, por exemplo, que um ângulo $\theta = 10^\circ$ possui tangente igual a $0,176326$ radianos e que o valor de θ convertido diretamente para radianos é igual a $0,174$, o que nos da uma precisão de duas casas decimais após a vírgula, isto é, nossas considerações serão baseadas em pequenas deformações de uma membrana. (Costa,2013).

contorno do domínio e a de Neumann, quando os valores da derivada da solução são conhecidas no contorno do domínio

As funções de Green têm esse nome em homenagem ao matemático britânico George Green, que foi o primeiro a desenvolver o conceito na década de 1830. No estudo moderno das equações diferenciais parciais, as funções de Green são estudadas principalmente do ponto de vista das soluções fundamentais (GREEN, 2004).

2.2.1 Procedimento de solução de equações diferenciais pelo método da Função de Green.

O método da função de Green é um importante método para solução de equações diferenciais lineares não-homogêneas, submetidas condições de contorno conhecidas. Este método têm aplicações teóricas e práticas em diversas áreas da Física, como no Eletromagnetismo, na Teoria de Transporte (como na Teoria da Difusão de Calor), na Teoria da Eletricidade e na Mecânica dos fluidos. (BARATA, 2014)

Mais especificamente, o método se aplica a resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e não-homogêneas submetidas a condições de contorno lineares e homogêneas na fronteira Ω , como as condições de Dirichlet e Neumann, citadas anteriormente.

Seja \mathcal{L} um operador diferencial linear. O método da função de Green resolve equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e não-homogêneas na forma geral (BARATA,2014):

$$\mathcal{L}u = h, \quad (2)$$

No caso particular da equação de Poisson, $\mathcal{L} = \nabla^2$ (Laplaciano).

De forma geral a função h supostamente satisfaz certas condições, tais como um rápido decaimento no infinito de algumas de suas derivadas ou outras que garantam a existência de soluções. Em muitos problemas são também supostas condições de contorno lineares e homogêneas sobre u , ou seja, condições que u deve satisfazer nas condições de Dirichlet, de Neumann ou condições mistas (sempre homogêneas) (BARATA,2014) . Uma solução fundamental associada ao operador \mathcal{L} é por definição uma solução da equação

$$\mathcal{L} G(x, y) = \delta(x - y). \quad (3)$$

Uma vez conhecida a solução fundamental para \mathcal{L} podemos obter uma solução particular $u_{part}(x)$ de $\mathcal{L}u = h$ através da seguinte integral,

$$u_{part}(x) = \int_{\Omega} G(x, y)h(y)dy. \quad (4)$$

Como é mostrado abaixo $u_{part}(x)$ é solução da equação. 2, pois:

$$\mathcal{L}u_{part}(x) = \int_{\Omega} \mathcal{L}_x G(x, y)h(y)dy = \int_{\Omega} \delta(x - y)h(y)dy = h(x) \quad (5)$$

A uma solução fundamental podemos adicionar uma solução da equação homogênea $\mathcal{L}u=0$, obtendo-se assim uma nova solução fundamental. Uma solução fundamental $G(x,y)$ que forneça uma solução particular $u_{part}(x)$ satisfazendo as condições de contorno lineares e homogêneas do problema considerado define a função de Green $G(x, y)$ do problema em questão.

Nossa análise é restrita a duas dimensões, portanto a integral da Equação 4 adquire o seguinte formato (em coordenadas polares):

$$u(r, \theta, r_0, \theta_0) = \iint_{A_0} h(r_0, \theta_0)G(r, \theta)dA_0 \quad (6)$$

onde, r_0 e θ_0 representam a posição onde a força é aplicada pela ponta de prova circular. Já r e θ representam uma posição sobre a membrana. Não podemos esquecer que em nossa análise $\mathcal{L} = \nabla^2$ (Laplaciano). Conforme a equação 1,

$$h(r, \theta) = -f \frac{(r, \theta)}{\tau}. \quad (7)$$

As soluções para a equação de Poisson determinadas na análise realizada por Costa (2013) são restritas a membrana circular com raio unitário. Vamos generalizar para uma membrana circular de raio b arbitrário e bordas fixas a uma fronteira circular. Também vamos estender a análise para situações onde a caixa transparente que suporta a membrana estará preenchida por um líquido (água). Determinaremos, então, as soluções analíticas de uma membrana, nas seguintes situações: i) membrana elástica fixada a uma borda circular e ii) membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido, conforme os objetivos da dissertação.

2.2.2 Estudo da deformação de membrana elástica fixada a uma borda circular.

O problema que vamos resolver consiste em determinar a deformação, representada pelo deslocamento $u(r, \theta)$, onde r é a coordenada radial de um ponto (r, θ) sobre a

membrana e θ é a coordenada angular de uma membrana circular de raio b com bordas fixas através de uma ponta de prova circular de raio a e área da seção transversal,

$$A_0 = \pi a^2 \quad (8)$$

Na solução serão utilizadas coordenadas polares, devido à simetria circular do objeto em estudo. Sobre a ponta de prova é aplicada a força externa F que deforma a membrana de u_0 . Definimos como (r_0, θ_0) o ponto de aplicação desta força sobre a membrana. Assim, a equação de Poisson, equação 1, em coordenadas polares, tem a forma:

$$\frac{1}{r} \left[r \left(\frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right] = -\frac{f(r, \theta)}{\tau} = \frac{-F}{A_0 \tau} \quad (9)$$

Em nossa análise, $f(r, \theta)$ representa a carga externa por unidade de área e τ a tensão superficial na membrana. Sendo assim

$$f(r, \theta) = \frac{F}{A_0} \quad (10),$$

que pode ser imaginada como a pressão P sobre a membrana na região tocada pela ponta de prova circular, ou seja, definimos essa pressão como:

$$P = \frac{F}{A_0} \quad (11)$$

A equação de Poisson é uma equação diferencial de segunda ordem. São necessárias duas condições de contorno para sua solução. As condições de contorno, que definiremos a seguir, devem primeiro caracterizar a aplicação da pressão P na região de contato da prova circular.

Vamos representar por ω o conjunto de pontos na região interna ao círculo de raio $= a$ com centro em (r_0, θ_0) que são deformados de u_0 com a aplicação de P . Essa região tem a área A_o da base da ponta de prova.

Assim, a primeira condição de contorno que a equação 11 deve obedecer é:

$$C1) u(\omega) = u_0;$$

O fato da membrana ter a borda fixa em $r = b$ define a segunda condição de contorno:

$$C2) u(b, \theta) = 0.$$

As figuras 5 e 6 ilustram a situação, para deformação no centro da membrana e em uma posição deslocada de \vec{r}_0 em relação ao centro.

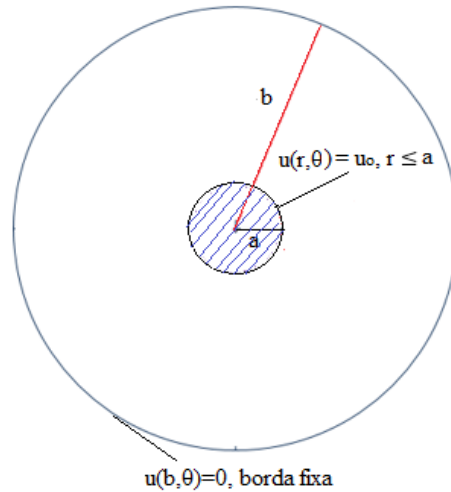


Figura 5: Deformação no centro da membrana ($\vec{r}_0 = \mathbf{0}$): O círculo interno de raio a , em destaque, define a região de área A_0 onde a força atua e portanto $u(r, \theta) = u_0$. O círculo externo de raio b caracteriza a borda fixa a fronteira circular onde $u(b, \theta) = 0$.

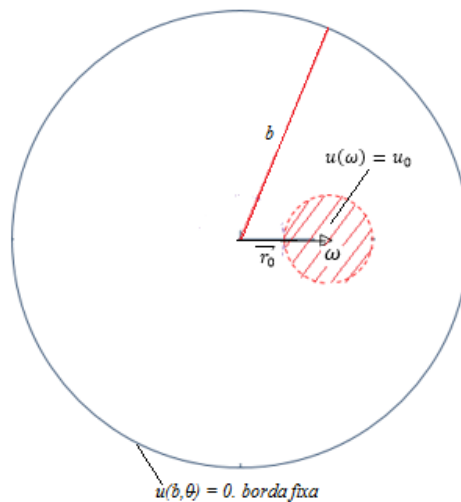


Figura 6: Deformação em uma posição deslocada de \vec{r}_0 em relação ao centro da membrana. A região ω , em destaque, caracteriza os pontos deformados pela prova circular onde $u(\omega) = u_0$.

Agora, utilizando o procedimento apresentado na seção 2.2.1, podemos realizar a solução da equação 11. Utilizando o método das funções de *Green*, Kersalé (2013, p.66)

determinou que a função de *Green* para uma membrana de raio b com as bordas fixas (condição de contorno de *Dirichlet* - $G=0$ em $r = b$) apresenta a seguinte forma:

$$G(r, \theta, \rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\ln[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)] + \ln \left[b^2 + \frac{r^2 \rho^2}{b^2} - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) \right] \right\} \quad (12)$$

Na equação acima ρ e φ são as variáveis de integração. Substituindo 12 em 6: com

$$h(r, \theta) = -f \frac{(r, \theta)}{\tau} \quad \text{temos que,}$$

$u(r, \theta)$ é dado por:

$$u(r, \theta) = \iint_{A_0} \frac{P}{4\pi\tau} \left\{ -\ln[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)] + \ln \left[b^2 + \frac{r^2 \rho^2}{b^2} - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) \right] \right\} dA \quad (13)$$

onde $dA = \rho d\rho d\varphi$ e $f(r, \theta) = \frac{F}{A_0} = P$ conforme as equações 10 e 11.

A integral da equação 13 não tem solução direta, às condições de contorno *C1* e *C2*, devem ser consideradas. A condição de contorno *C2* é obedecida pela função de *Green*, dada pela equação 12. Por definição, o problema está na condição de contorno *C1*.

A técnica para solução aproximada do problema consiste em aplicar uma força externa pontual $F\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ na posição do centro da prova, posição (r_0, θ_0) . Para obter essa solução, primeiro redefinimos $f(r, \theta)$ como

$$f(r, \theta) = \frac{F}{A_0} \rightarrow f_{\text{ponto}}(r, \theta) = \frac{F}{A_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = P\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (14)$$

onde $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ é a função Delta de Dirac.

Então resolvemos a equação 13 utilizando a força pontual. Uma vez determinada à solução, a condição de contorno *C1* é imposta a solução $u(r, \theta)$ encontrada. Vale

observar que $u(r, \theta)$ representa a solução para pontos da membrana externos a região tocada pela ponta de prova.

Na região de área A_0 , onde a força atua, a deformação da membrana e portanto, o deslocamento $u(r, \theta)$ são definidos pela posição da prova, ou seja, $u(\omega) = u_0$, conforme as figuras 7 e 8, onde o processo é ilustrado.

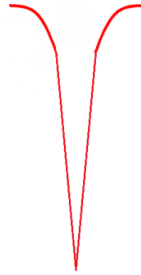


Figura 7: Solução da equação 13 com a força pontual.

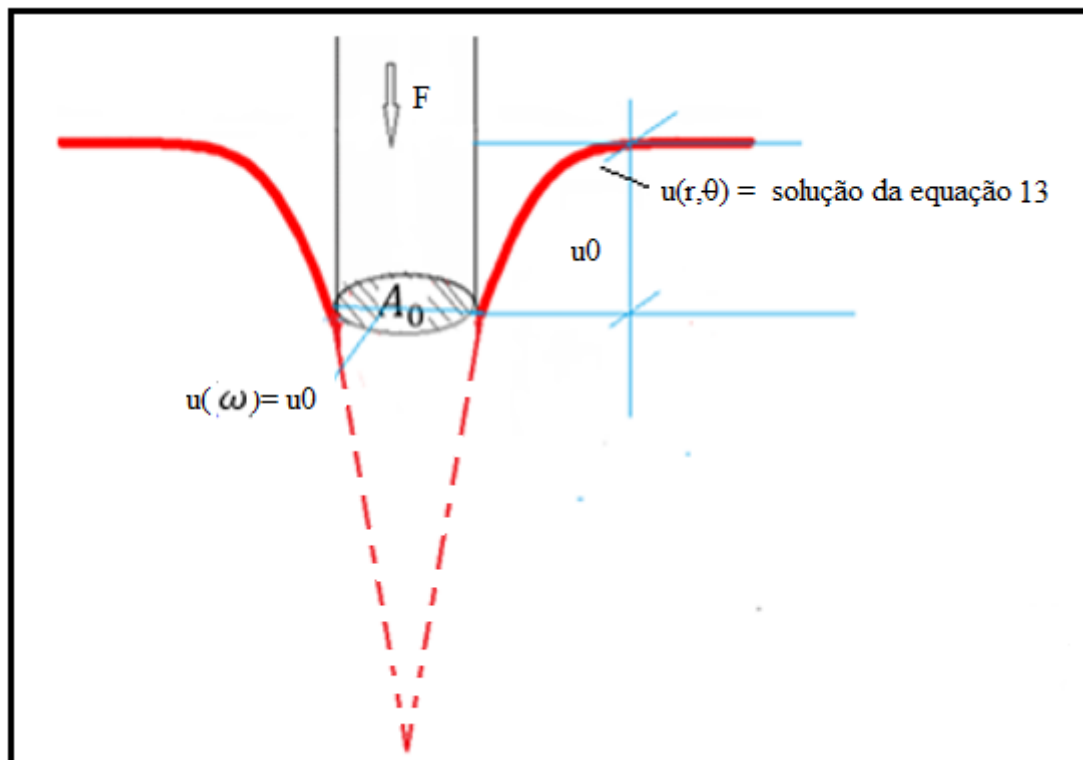


Figura 8: Construção da solução aproximada da equação 13 para a condição de contorno CI .

Agora, dadas as propriedades da função Delta de Dirac conseguimos resolver a equação 13, onde $P = -\frac{F}{A_0}$ e substituída por $P\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ conforme a equação 14

$$u(r, \theta) = \iint \frac{-P\delta(\vec{\rho} - \vec{r}_0)}{4\tau\pi} \left[+\ln(r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)) - \ln\left(b^2 + \frac{r^2\rho^2}{b^2} - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)\right) \right] dA \quad (15)$$

Utilizando as propriedades da função delta temos que o resultado da integral terá integrando calculado em $\vec{\rho} = \vec{r}_0$, ou seja, no ponto $(\rho, \varphi) = (r_0, \theta_0)$, então:

$$u(r, \theta) = \frac{-P}{4\tau\pi} \left[+\ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)) - \ln\left(b^2 + \frac{r^2r_0^2}{b^2} - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)\right) \right] \int 1dA + C$$

Substituindo $\int dA$ que é igual a área da ponta de prova, logo:

$$u(r, \theta) = \frac{P}{4\tau\pi} \left[-\ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)) + \ln\left(b^2 + \frac{r^2r_0^2}{b^2} - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)\right) \right] A_0 + C \quad (16)$$

Na solução acima C representa a constante de integração. Considerando $F = PA_0$ temos finalmente:

$$u(r, \theta) = \frac{F}{4\tau\pi} \left[-\ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)) - \ln\left(b^2 + \frac{r^2r_0^2}{b^2} - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)\right) \right] A_0 + C \quad (17)$$

Portanto, a deformação da membrana devido à ponta de prova, que vamos denominar de $u_d(r, \theta)$ é dada por:

$$u_d(r, \theta) = \frac{-F}{4\tau\pi} \left\{ +\ln[r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)] - \ln\left[b^2 + \frac{r^2r_0^2}{b^2} - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)\right] \right\} + C \quad (18.1)$$

Para pontos externos a ponta de prova. Já na região tocada pela ponta de prova

$$u_d(\omega) = u_0 \quad (18.2)$$

2.2.3 Estudo da deformação de membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido

Agora a membrana separa uma interface, onde do lado externo temos ar e no seu interior água. Dado que a água é incompressível, a deformação da membrana devido à ação da força F aplicada, através da ponta de prova causa um aumento da pressão interna da caixa transparente para P_0 e uma deformação, que vamos denominar agora de u_{00} na posição da prova. O princípio da superposição estabelece que a solução seja dada pela soma da deformação causada por uma pressão constante P_0 somada a uma deformação da membrana pela ponta de prova.

Assim, para determinar a solução, o deslocamento $u(r, \theta)$ de cada ponto da superfície da membrana, vamos determinar a deformação de uma membrana elástica circular com bordas fixas quando submetida a uma pressão constante P_0 em toda sua extensão, que vamos denominar de $u_p(r, \theta)$.

Como no caso anterior, $u(r, \theta)$ obedece à equação de *Poisson*, equação 11. Agora $f(r, \theta)$ tem a forma

$$f(r, \theta) = P_0 \quad (19),$$

sendo P_0 uma pressão constante sobre toda a superfície da membrana (condição de contorno).

Como no caso anterior a função de *Green*, é dada pela equação 12 conforme Kerselé e a solução da equação de *Poisson*, pela equação 6.

Assim temos:

$$u_p(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{-P_0}{4\pi r} \rho \left\{ +\ln[r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)] - \ln \left[b^2 + \frac{r^2 \rho^2}{b^2} - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) \right] \right\} d\rho d\varphi \quad (20)$$

Para integral em φ temos dois termos semelhantes, cuja solução é dada em Bronson (1998), eq. 15.108:

$$\int_0^\pi \ln(c^2 - 2cd\cos(\varphi) + d^2) d\varphi = \{2\pi \ln(a) \text{ para } c \geq d > 0 \text{ e } 2\pi \ln(bd) \text{ para } d \geq c > 0\} \quad (21)$$

Observa-se que a integração em φ da equação acima tem a forma da integral definida pela fórmula citada. A seguir separamos a integral em dois termos conforme a fórmula, onde o fator 2 vem da passagem da integração em φ de 0 a 2π para 0 a π . Para qualquer θ sobre a membrana, como a integral é de 0 a 2π , podemos substituir $(\theta - \varphi)$ simplesmente por φ que será a variável de integração. Assim,

$$u_p(r, \theta) = - \int_0^\pi \int_0^b \frac{P_0}{2\tau\pi} \rho \ln(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi)) d\rho d\varphi + \int_0^\pi \int_0^b \frac{P_0}{2\tau\pi} \rho \ln(b^2 + \frac{r^2\rho^2}{b^2} - 2r\rho \cos(\varphi)) d\rho d\varphi \quad (22)$$

Na equação anterior observa-se que o primeiro termo $c = r$ e $d = \rho$, assim a integral se divide em duas, conforme r seja maior ou menor que ρ .

No segundo termo $c = b$ e $d = \frac{r\rho}{b}$, assim a integral tem um termo apenas pois b é sempre maior que $\frac{r\rho}{b} \rightarrow b^2 \geq r\rho$, o que é verdadeiro, pois $r \leq b \leq \rho \leq b$.

Assim podemos realizar a integração em φ utilizando a fórmula acima, obtendo agora integrais em ρ , independentes de θ , ou seja, $u_p(r, \theta) = u_p(r)$:

$$u_p(r) = \frac{P_0}{2\pi\tau} \left[- \int_0^r 2\rho\pi \ln(r) d\rho - \int_r^b 2\rho\pi \ln(\rho) d\rho + \int_0^b 2\rho\pi \ln(b) d\rho \right] \quad (23)$$

Realizando a integração em ρ temos como resultado final:

$$u_p(r) = \frac{P_0}{4\tau} (b^2 - r^2) \quad (24)$$

Portanto, a deformação total, $u_T(r, \theta)$, devido aos efeitos da deformação da membrana pela ponta de prova $u_d(r, \theta)$ (equação 18.1 e 18.2) somada a deformação devido a pressão P_0 constante sobre a membrana, $u_p(r, \theta)$, equação 24, é dada por:

$$u_T(r, \theta) = u_d(r, \theta) + u_p(r, \theta). \quad (25)$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 O APARATO EXPERIMENTAL

O aparato experimental foi pensado a partir dos modelos apresentados em Selvadurai (2006) e Shi (2009), de forma a atender a necessidade de deformação de membranas nas situações que serão analisadas: *(i)* membrana elástica fixada a uma borda circular e *(ii)* membrana elástica fixada a uma borda circular - líquido.

O aparato é composto de nove partes.

- (1) suporte da membrana;
- (2) base do suporte;
- (3) indentador;
- (4) suporte do indentador;
- (5) aquário;
- (6) orifícios para controle de pressão;
- (7) membrana elástica de látex;
- (8) câmara e tripé;
- (9) parafuso de referencial.

A figura 9 apresenta uma fotografia da versão final do aparato experimental utilizando para realizar as medidas experimentais da dissertação. As especificações de cada parte serão apresentadas na seção 4.1.

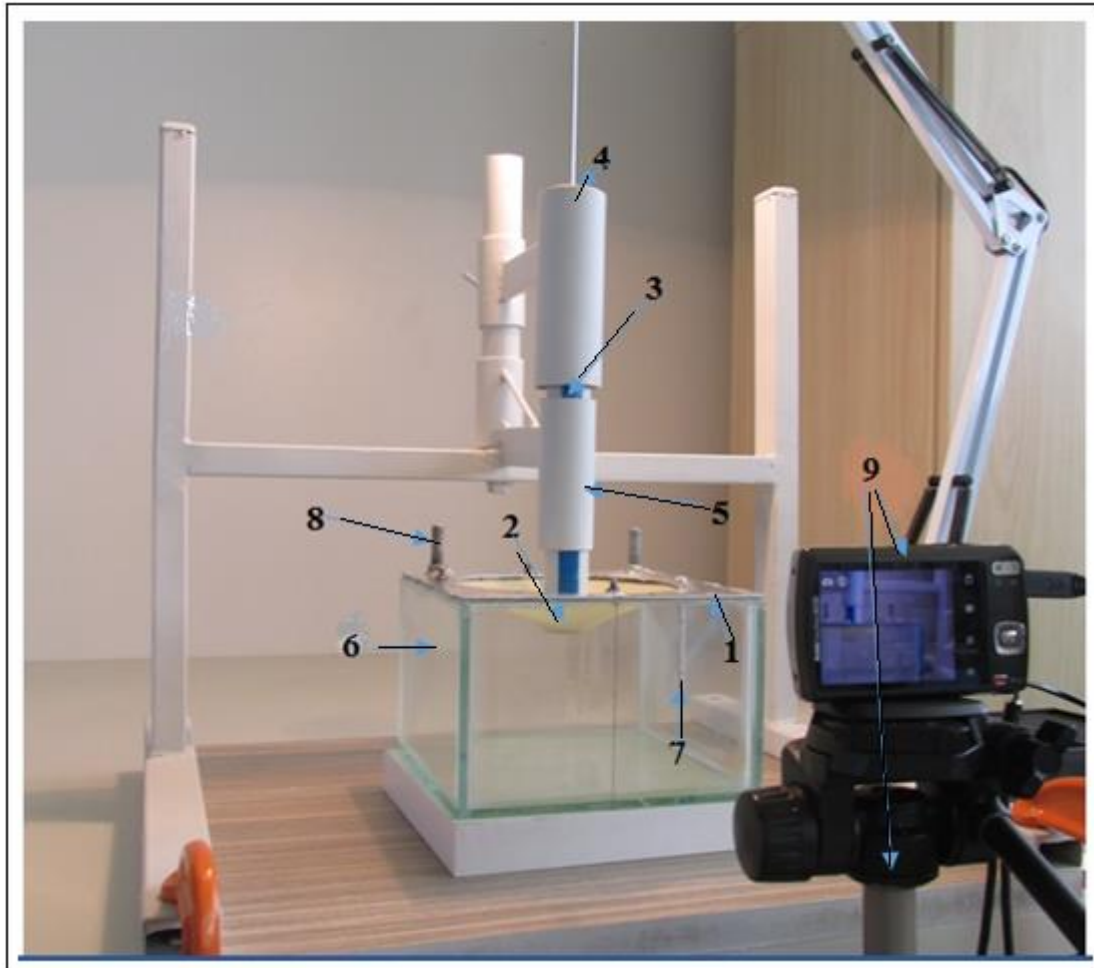


Figura 9: Aparato experimental. (1) suporte da membrana, (2) membrana elástica, (3) indentedor, (4) massas auxiliares, (5) suporte do indentedor, (6) caixa transparente de vidro, (7) parafuso referencial, (8) orifício de controle de pressão, (9) câmara e tripé

3.2 PROCEDIMENTOS DE AQUISIÇÃO E ANÁLISE DE IMAGENS – PAAI.

Após a realização de medidas preliminares verificou-se a necessidade de estabelecer um procedimento para aquisição e análise de imagens. O objetivo é que ao final as medidas realizadas possuam uma precisão comparável a dos instrumentos de medida utilizados. Foi estabelecido a partir da prática do seguinte procedimento para coleta e análise das medidas apresentado na figura 10.

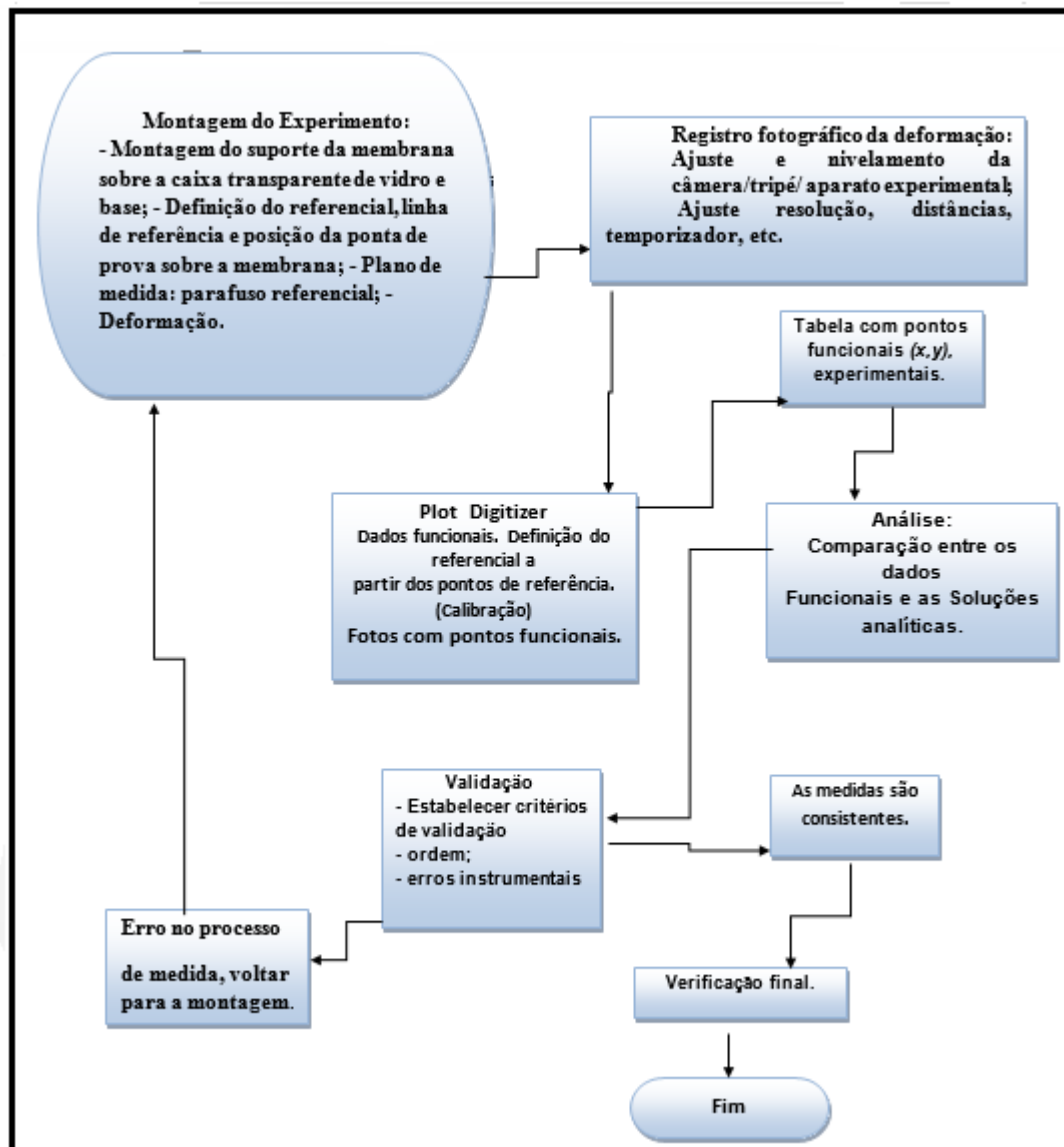


Figura 10: Síntese do Procedimento de Aquisição e Análise de Imagens – PAAI.

3.3 OS TESTES PILOTOS

Os testes pilotos têm o objetivo de estabelecer procedimentos experimentais otimizados que garantam ao final do processo de medida, que as medidas realizadas tenham a precisão necessária para cumprir os objetivos da dissertação. Após o estabelecimento do PAAI, a partir de medidas preliminares, foram planejados dois testes pilotos.

- I. O primeiro teste consistiu em realizar a deformação no centro da membrana com bordas fixas. O teste estabelece um padrão de análise que será utilizado

em todas as medidas. Abaixo a figura 11, ilustra a deformação a partir do centro da membrana, atividade realizada em 13 de fevereiro de 2014.

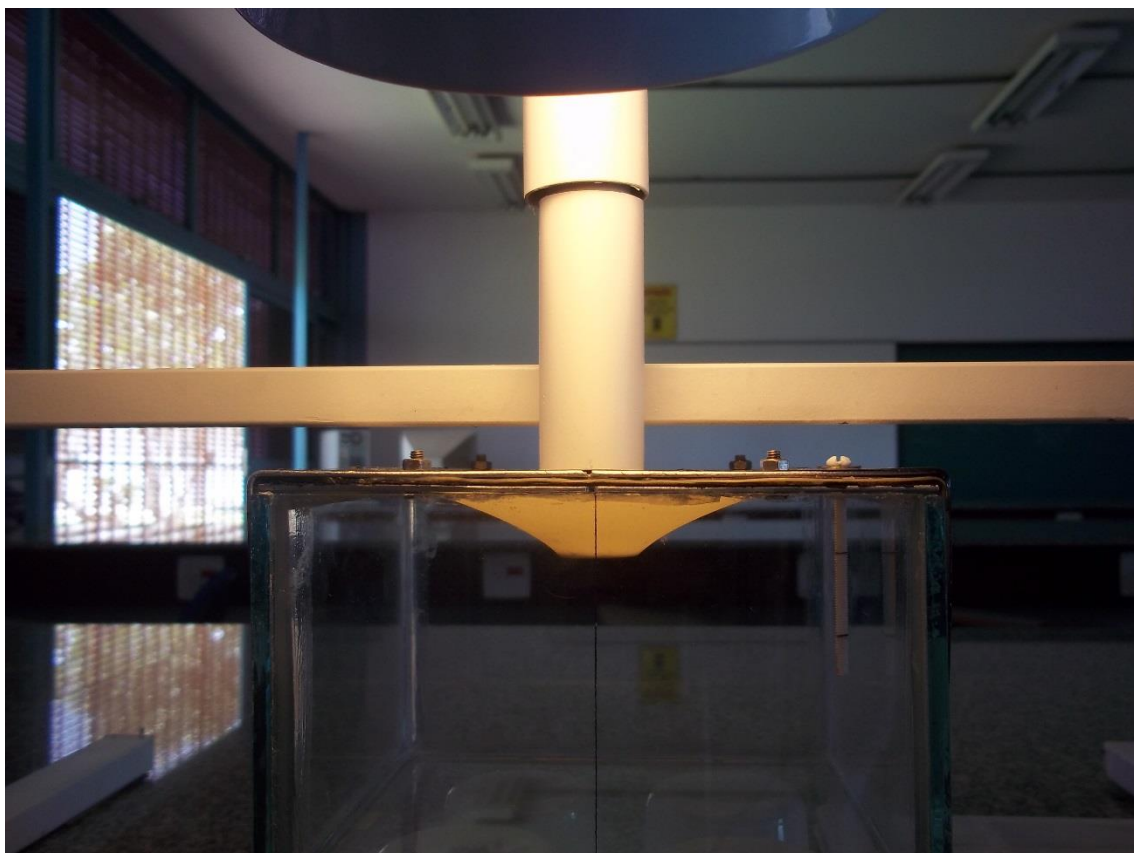


Figura 11: Deformação do centro da membrana. Teste piloto I realizado em 13 de fevereiro de 2014. $u_0 = 1,90 \times 10^{-2} m$; Carga no indentedor = $6,40 N$.

- II. O segundo teste consistiu em fotografar um padrão, uma moldura de papel milimetrado, com o objetivo de verificar a precisão no processo de medida. Neste teste analisamos as grandezas que alteram a qualidade da imagem e verificamos a resolução da câmera e conferimos a precisão das medidas, garantindo confiança na realização das medidas experimentais previstas. Abaixo a figura 12 ilustra o procedimento experimental realizado em 02 de abril de 2014. As medidas experimentais e a análise dos testes piloto são apresentadas no capítulo 4.

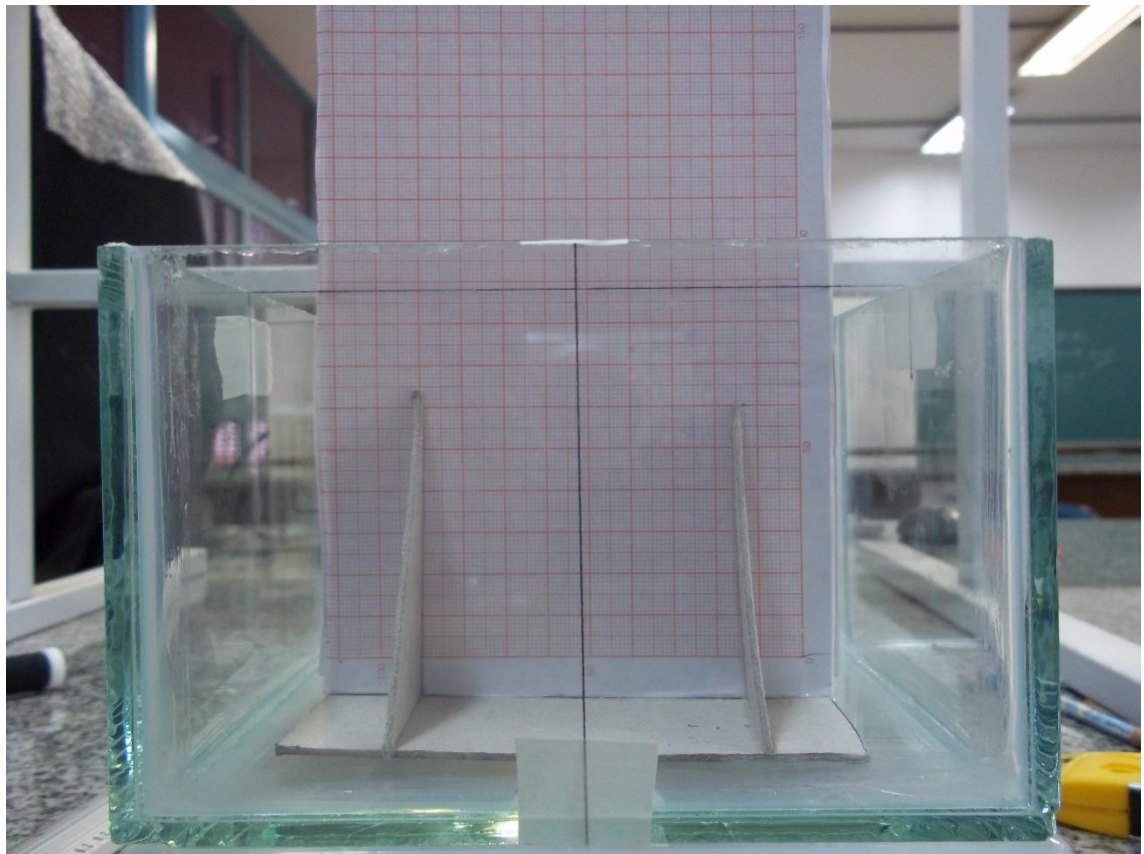


Figura 12: Verificação da precisão das medidas da imagem fotográfica em relação às medidas do objeto real. Teste piloto II realizado em 02 de abril de 2014.

3.4 MEDIDAS DA INDENTAÇÃO E PROCEDIMENTOS

Uma vez estabelecido o PAAI e realizados os testes pilotos e dezenas imagens e medidas, em várias sessões experimentais, definimos os seguintes conjuntos de medidas experimentais que foi selecionado para este trabalho:

Tabela 3: Número de medidas para cada posição do indentador.

Situações:	Posição do indentador próximo ao centro da membrana	Posição do indentador deslocado em relação ao centro da membrana
(i) membrana elástica fixada a uma borda circular	8 medidas	5 medidas
(ii) membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido	2 medidas	2 medidas

3.5 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

As soluções analíticas são determinadas a partir das equações 22 e 28, seção 2.4, com condições de contorno ajustadas para cada situação de estudo. A tabela 2 resume as condições de contorno descritas para cada caso estudado.

Tabela 4: Condições de Contorno para cada caso estudado

Casos/Posição ponta de prova	Condições de contorno:
a. sem líquido – centro $u(r, \theta) = u_d(r, \theta)$ equação 22 $r_0 = 0$	C1) $u(a, \theta) = u_0$ C2) $u(b, \theta) = 0$
b. sem líquido - fora do centro $u_d(r, \theta) = u_d(r, \theta)$ $r_0 \neq 0$	C1) $u(\omega) = u_0$ C2) $u(b, \theta) = 0$
c. com líquido - centro $u(r, \theta) = u_d(r, \theta)$ (eq. 22) + $u_p(r, \theta)$ (eq. 28) $r_0 = 0$	C1) $u(a, \theta) = u_0$ C2) $u(b, \theta) = 0$
d. com líquido – fora do centro $u(r, \theta) = u_d(r, \theta) + u_p(r, \theta)$ $r_0 \neq 0$	C1) $u(\omega) = u_0$ C2) $u(b, \theta) = 0$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os trabalhos foram iniciados com um treinamento intensivo para utilização das ferramentas de pesquisa experimentais, incluindo também o software *Plot Digitizer*. No primeiro aparato experimental construído realizamos experimentos com uma membrana de látex de balões, que possui boa elasticidade, é um material homogêneo e suporta grandes pressões sem que ocorram rupturas na membrana. O aparato experimental foi evoluindo no decorrer da pesquisa até chegar ao modelo com o qual realizamos as medidas apresentadas nesta seção.

Abaixo a figura 13 ilustra através das imagens (a), (b), (c), e (d), alguns aspectos da evolução dos experimentos.

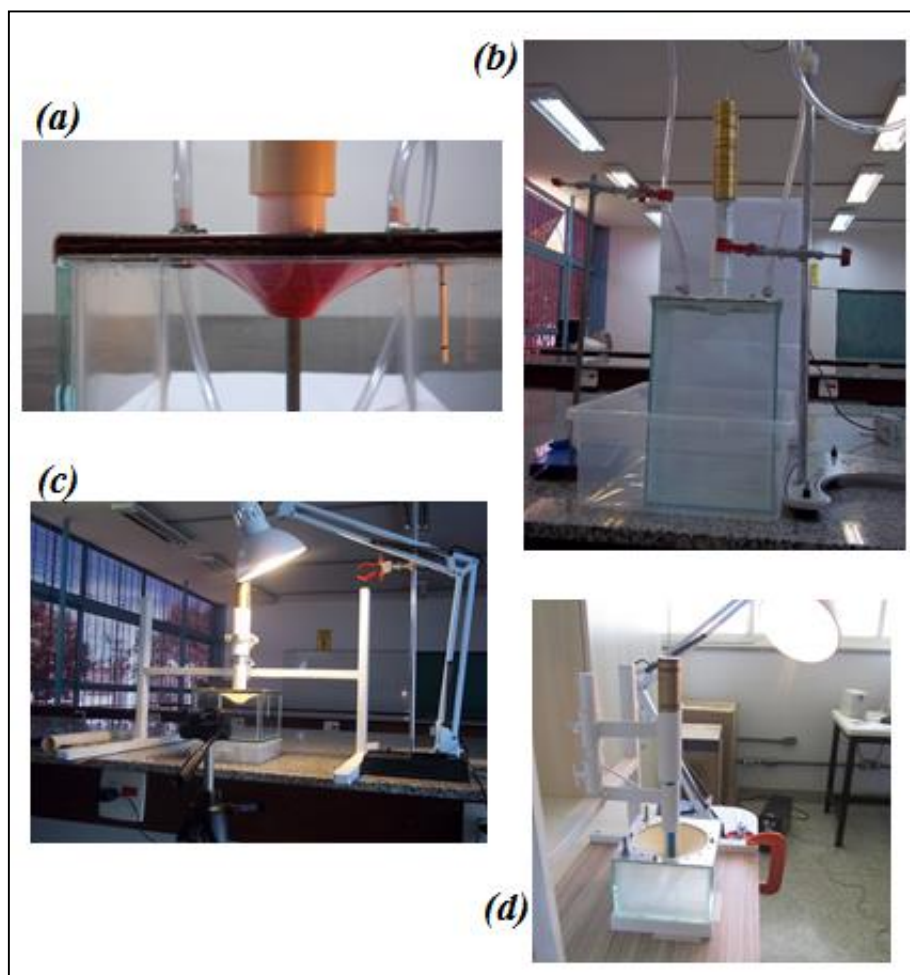


Figura 13: (a): Aspecto da deformação com membrana de látex utilizadas em balões. Esta fotografia corresponde às primeiras observações de deformações no Laboratório de Ciências da Faculdade UnB Planaltina. (b): Base de Vidro com altura maior, na imagem experimento de deformação com líquido. (c): Protótipo de deformação com iluminação direta. (d): Protótipo final de deformação com eixo de regulagem duplo, acoplado a base fixa.

4.1 DESCRIÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL

O aparato apresentado na figura 14, representa a versão final da montagem experimental. O aparato foi construído a partir da prática adquirida através das várias medidas preliminares e dos testes piloto.

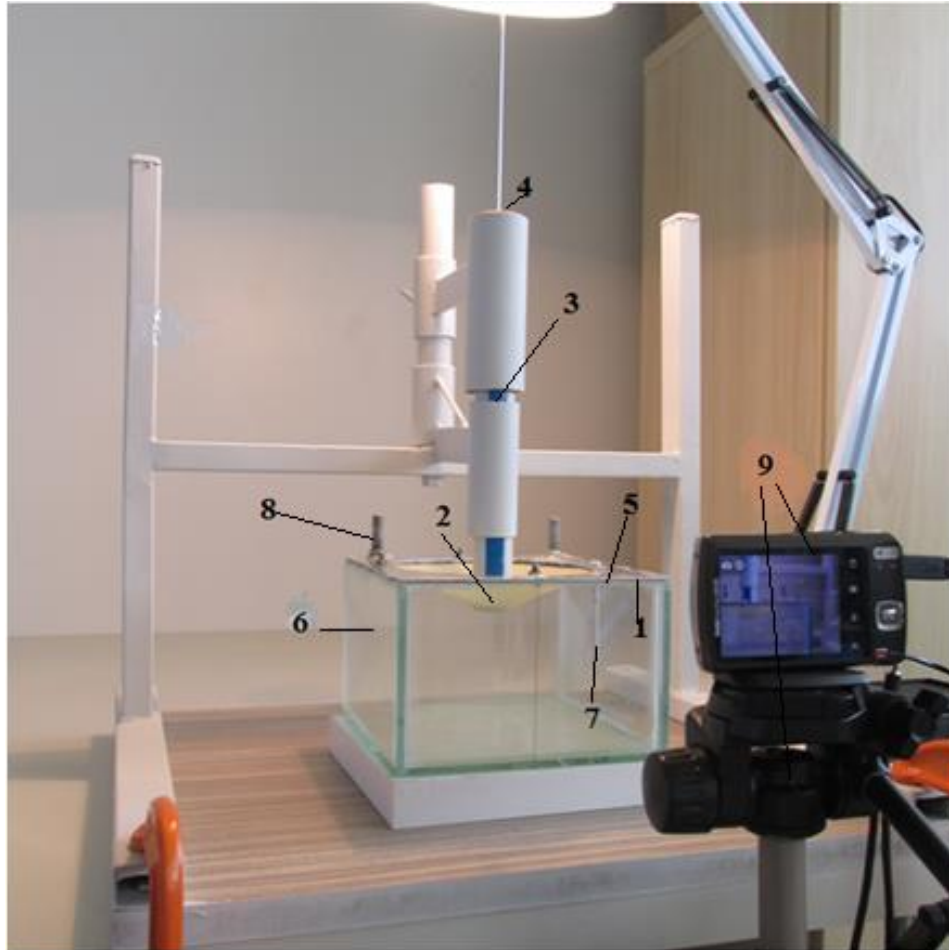


Figura 14: Aparato experimental. (1) suporte da membrana, (2) membrana elástica, (3) indentador, (4) massas auxiliares, (5) suporte do indentador, (6) base de vidro, (7) parafuso referencial, (8) orifício de controle de pressão, (9) câmara e tripé.

Agora especificamos as características de cada parte do aparato apresentado na seção 3.1:

- (1) Suporte da membrana, figura 15: localizado na parte superior foi construído com duas chapas de alumínio naval de 1 mm de espessura, moldado com as mesmas dimensões da parte superior do aquário, com uma abertura de $13,00\text{ cm}$ de diâmetro. Entre essas chapas a membrana é tensionada, utilizando para isso parafusos. Para diminuir os efeitos do atrito entre a superfície da membrana e as chapas de alumínio foi adicionada uma junta impermeável de acetato, figura 15, na qual a membrana foi fixada com uma cola de silicone líquida ao redor da

borda. Essa junta possui também a função de reduzir as tensões próximas aos parafusos da placa, evitando assim fissuras da membrana nessas regiões de borda quando sob tensão. O dispositivo mantém a membrana esticada. As placas suporte possuem as seguintes medidas: $16,20\text{ cm} \times 16,20\text{ cm} \times 0,40\text{ cm}$, montada com a membrana, encaixando precisamente na base do aquário.

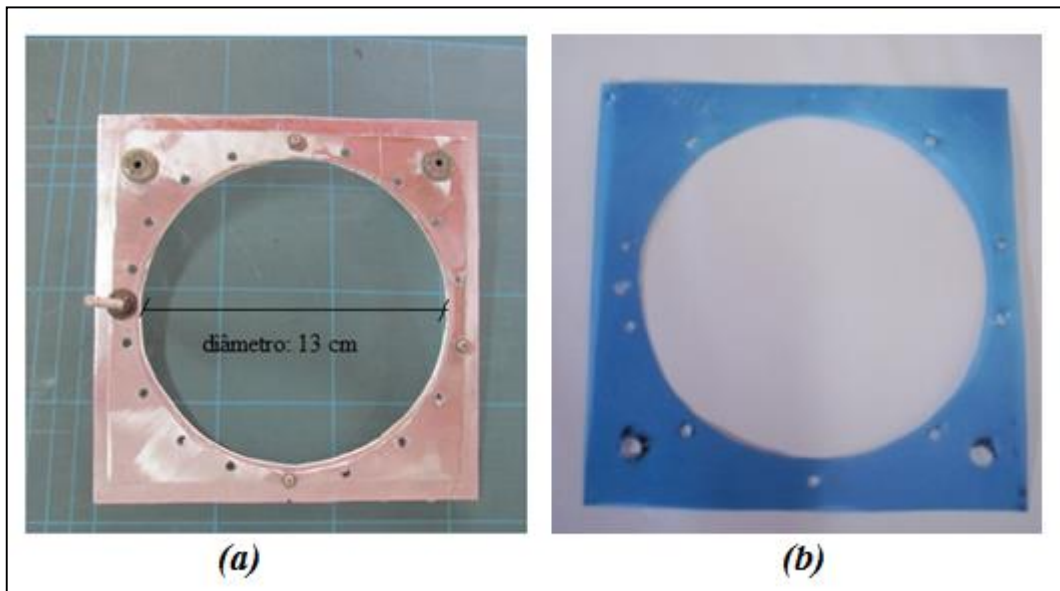


Figura 15: (a): Placa suporte da membrana; (b): Junta impermeável de acetato.

- (2) Membrana elástica: a membrana de látex utilizada na experiência é recortada de um lençol de látex industrial. O lençol de borracha látex que utilizamos é da marca Orion NR-1104, $0,50\text{ mm}$ de espessura, dureza 40 shore , tem boa resistência à abrasão, alta flexibilidade e elasticidade. Não é indicado para cetonas, ozônio, combustíveis e derivados de petróleo, é recomendada a temperatura de trabalho de -40° C a 70° C . Sendo sua cor âmbar. Ela será disposta sob tensão entre duas placas de alumínio. A figura 16 mostra o lençol de látex tensionado por um arco de madeira. Para que ocorra a montagem do suporte é necessário primeiro esticar o lençol de látex. Depois colamos a junta com silicone, e para fixar o lençol e a junta, colamos novamente os dois no suporte de alumínio com silicone.



Figura16: Membrana tensionada por um arco de madeira, bastidor, o mesmo utilizado para bordar. Para que ocorra a montagem do suporte é necessário primeiro esticar a manta de látex. Depois colamos a junta com silicone, e para fixar a manta e a junta, colamos novamente os dois no suporte de alumínio com silicone novamente.

- (3) Indentador: é um bastão que realiza um deslocamento perpendicular a superfície de uma membrana de látex. Foi construído a partir de cano de PVC $3 \frac{1}{2}$ polegadas, fechado nas extremidades com durepoxi, possui uma haste metálica de $26,00 \text{ cm}$ de comprimento, utilizada para sustentar as massas de metal e massa de $60,0 \text{ g}$. A sua haste de metal possui o diâmetro que ajusta aos furos no das moedas de latão. A base branca possui $16,00 \text{ cm}$ de comprimento, sendo seu diâmetro correspondente a $2,50 \text{ cm}$, na lateral do indentador acrescentamos uma fita azul para marcar as deformações da membrana com um traço fino, utilizando um estilete. A fita é renovada a cada conjunto de medidas. A figura17 mostra o indentador.

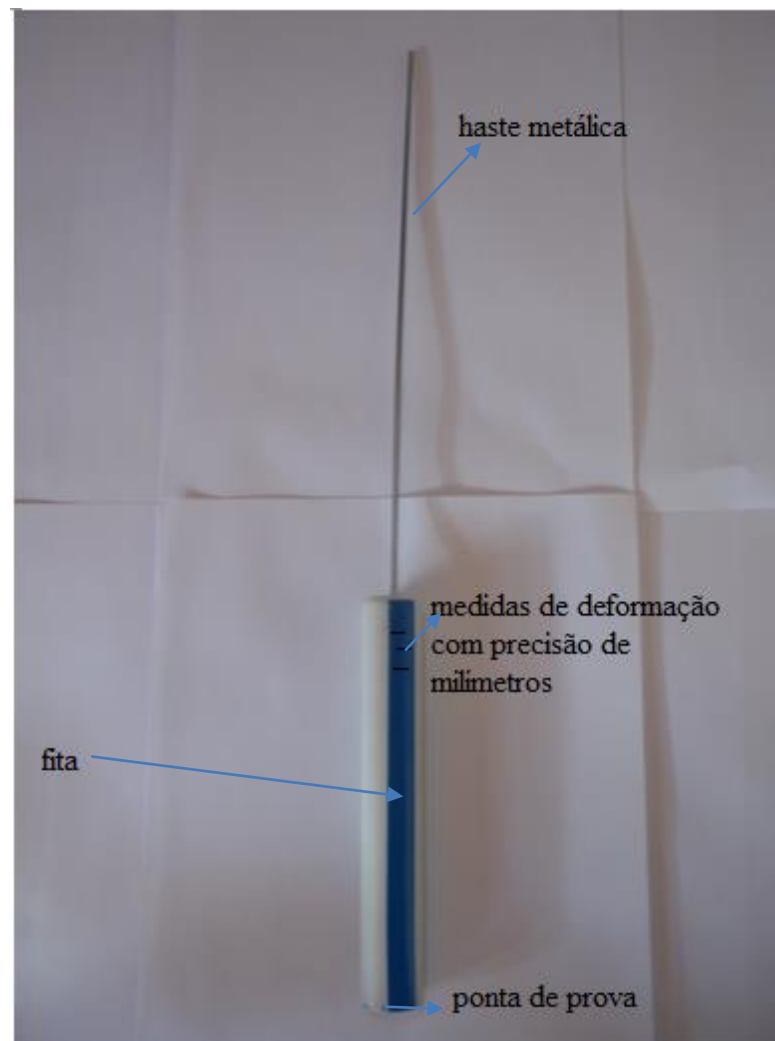


Figura 17: Indentador utilizado na deformação da membrana.

- (4) Massas auxiliares: moedas de latão, com massa de $50,0\text{ g}$, possuem um diâmetro de $3,40\text{ cm}$. O furo central permite a fixação das moedas de latão na haste metálica do indentador, ver figura 18.



Figura 18: Medidas de metal (latão), massa $50,0\text{ g}$.

- (5) Suporte do indentador: mantém o indentador na vertical, para que ocorra precisão nas medidas o indentador deve ser posicionado perpendicular a membrana. O suporte evita também o deslocamento da ponta de prova no plano horizontal; ele está fixado ao aparelho de deformação. Para não ocorrer instabilidades ao aparelho, em sua base foram colocados dois sargentos, tendo como função fixar a base na mesa, ver figura 19.



Figura 19: Suporte do indentador e sargentos em destaque na figura.

- (6) Caixa transparente de vidro: A caixa suporta a membrana. Consiste de uma estrutura de vidro de espessura de $0,50\text{ cm}$, $16,40\text{ cm}$ de largura por $16,40\text{ cm}$ de comprimento por $10,50\text{ cm}$ de altura, figura 20. Permite a visualização da deformação e quando cheia de água permite a análise da deformação da interfase ar/água.

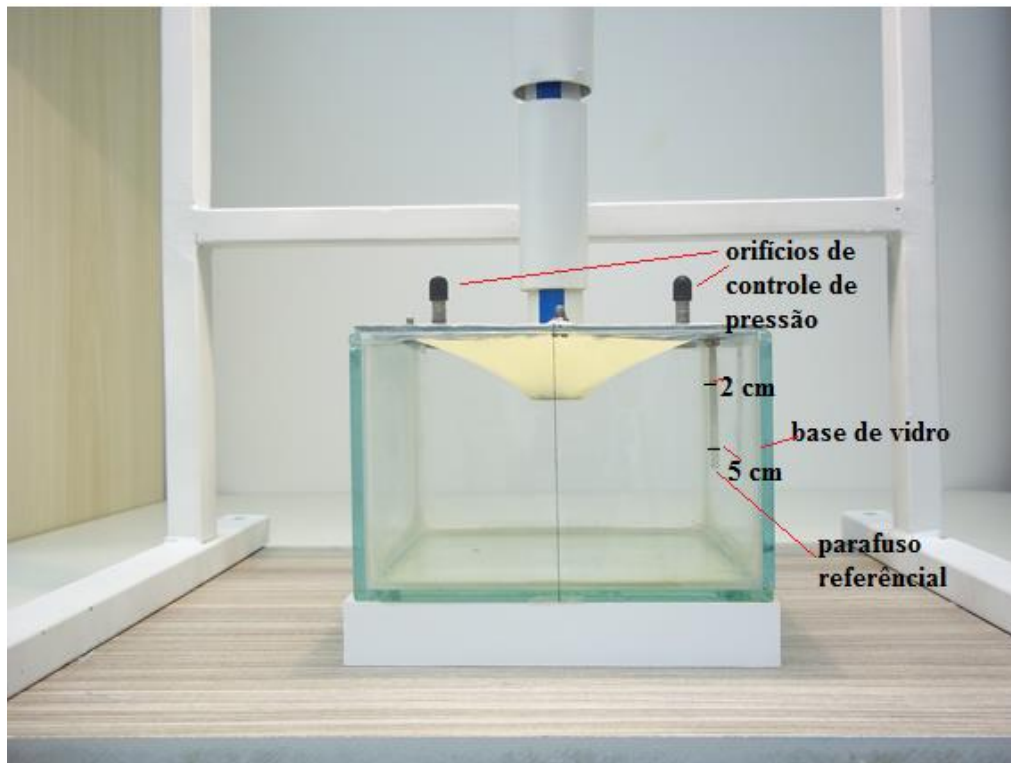


Figura 20: Caixa transparente de vidro.

- (7) Parafuso de referencial: as duas marcas sobre o parafuso estão a 2,00 cm e 5,00 cm (em algumas das medidas as distâncias são diferentes, neste caso os valores serão especificados) do suporte da membrana. Essas duas marcas e o centro da membrana definem o plano de medida. O parafuso está a 7,25 cm do centro da membrana.
- (8) Orifícios para controle de pressão: para a entrada ou saída de ar, ou entrada ou saída de um líquido, ver figura 20.
- (9) Câmera e tripé, ver figura 14. Câmera Digital Power - marca *Canon*, Shot SX 160 IS, HD, 16.0 Mega Pixels, utilizamos também a câmara *Kodak* com as seguintes especificações: modelo Easyshare M530, 12 megapixels, 3 x Optical Aspheric Lens, 36 mm – 108 mm (Equivalent). O tripé fotográfico possui a seguinte função: Evita que as imagens saiam tremidas e mantém a estabilidade ao fotografar.
- (10) Régua milimetrada de metal: utilizamos a régua milimetrada como instrumento auxiliar de medida para verificar se distância padrão entre o aquário e a câmera se mantém uniforme para realização das fotos.

4.2 PROCEDIMENTOS DE AQUISIÇÃO E ANÁLISE DE IMAGENS – PAAI

Seguindo o diagrama da figura 10, vamos descrever agora passo a passo o PAAI.

4.2.1 Montagem do experimento

O aparato experimental foi concebido para realizar e demonstrar as deformações mecânicas de uma membrana de borracha, em duas situações: (i) membrana elástica fixada a uma borda circular e (ii) membrana elástica fixada a uma borda circular - líquido.

A base do aparato é composta de um recipiente de vidro, semelhante a um prisma com $16,40\text{ cm}$ de largura por $16,40\text{ cm}$ de comprimento por $10,50\text{ cm}$ de altura. Sobre a parte superior dele acrescentamos um suporte para a membrana composta de duas placas de alumínio naval de 1 mm de espessura. A membrana é tensionada entre as placas, com adição de cola de silicone e uma junta de acetato (plástico derivado do petróleo). A deformação é determinada através de fixação de parafusos radialmente em torno da membrana. Na placa, existe também um parafuso de $6,50\text{ cm}$, que tem por finalidade ser um indicador referencial para medidas das imagens no decorrer dos experimentos, o parafuso foi pintado de branco, sendo nele acrescentadas duas marcas perpendicular a membrana, sendo a primeira marca situada a $2,00\text{ cm}$ e a segunda a $5,00\text{ cm}$ do plano da membrana (na maioria das medidas), por sua vez este parafuso está a $7,25\text{ cm}$ do centro geométrico da membrana. No suporte há duas válvulas de saídas ou entrada de ar ou água, tendo a possibilidade de vedação com tampas específicas para as válvulas.

O componente do aparelho denominado indentador, possui a forma cilíndrica, e massa de $60,0\text{ g}$ onde podemos carregá-lo com cargas de massa unitária de $50,0\text{ g}$. O indentador se desloca perpendicular a membrana deformando-a de u_0 . Convém destacar que nos procedimentos o tensionamento da membrana permanece o mesmo em cada conjunto de medidas.

Sobre uma mesa, altura $75,00\text{ cm}$, foi fixado com o uso de sargentos a base do suporte do indentador. O suporte com a membrana elástica foi colada sobre o aquário com cola de silicone. O conjunto foi centralizado com o suporte do indentador, de modo que a ponta de prova deforme a membrana na posição desejada. Em seguida, sobre a face frontal da base de vidro foi fixada com *superbond*, adesivo instantâneo, a linha referencial (uma linha de costura fina de cor preta). A figura 21, abaixo, mostra os elementos referenciais.

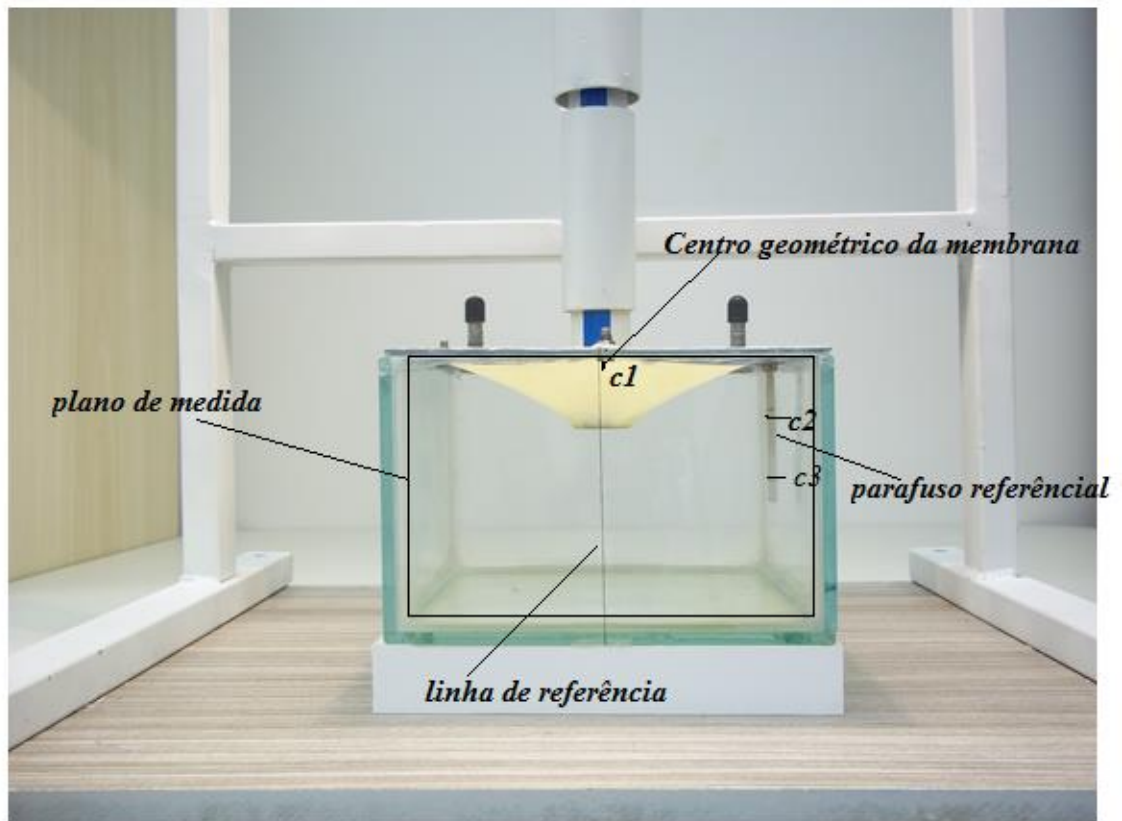


Figura 21: Elementos referenciais: linha de referência, centro geométrico da membrana e marcas de referência no parafuso.

O prolongamento da linha no plano horizontal coincide precisamente com o centro geométrico da membrana. É importante observar que ao realizar a análise das imagens deve-se ter atenção na determinação da posição do centro geométrico da membrana. A figura 21 também destaca o plano onde as medidas são realizadas, plano de medida, bem como os pontos $c1$ (centro geométrico da membrana), $c2$ e $c3$ (marcas no parafuso) que servem, em alguns casos, para calibrar a escala de medida no software *Plot Digitizer* (ver apêndice A). O indentador é ajustado no suporte, e antes de carregar o indentador com as moedas de latão, sobre a fita azul é riscada a posição do plano da membrana sem deformação ajustando o indentador precisamente acima da membrana sem deformá-la. Em seguida, o indentador é carregado, e uma nova marca é realizada. A distância entre as duas marcas representa precisamente a deformação u_0 . A posição do indentador sobre a membrana é realizada como o uso de um molde, como ilustra a figura 22.

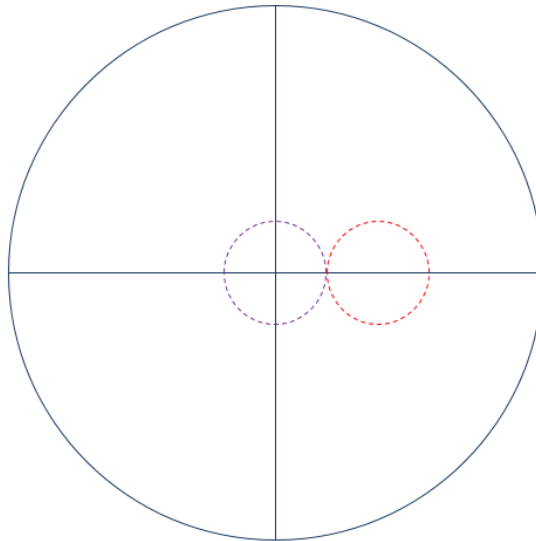


Figura 22: Molde da membrana. Com contorno do indentador no centro da membrana e deslocado em relação ao centro.

4.2.2 Registro de Imagens:

Tendo como objetivo a precisão para obtenção de medidas para análise computacional foi necessário determinar primeiro a posição do centro da membrana. A fixação de uma linha perpendicular ao centro da membrana contribuiu para destacar esta posição. A câmara digital foi posicionada a $1,00\text{ m}$ do aquário, apoiada por tripé fotográfico profissional. A lente da câmara foi alinhada com a linha de referência. O tripé para máquina fotográfica é um item de equipamento básico, ele criou estabilidade para a imagem e foi utilizado para termos o controle necessário para a composição da imagem. O tripé utilizado é articulado com movimentos para cima, para baixo, e para os lados. Ele permite virar a câmara na vertical também. Possui a cabeça removível, com um nível. Os ajustes para posicionamento da câmara associada ao tripé contribuíram para aquisição de uma melhor imagem da deformação da membrana que por sua vez é iluminada perpendicularmente ao plano da membrana, contribuindo para destacar os contornos da deformação da membrana. A obtenção das imagens foi realizada sem utilização de Flash, pois o objeto a ser fotografado possuía superfície de vidro, o que produziria efeitos de reflexão do Flash. Utilizamos também um temporizador que contribuiu para um ajuste programado pela câmara digital e também uma melhor imagem capturada automaticamente, evitando imagens tremidas. (GIL *et al*, 2006).

4.2.3 O Plot Digitizer:

A seguir vamos ilustrar a aquisição e análise de uma medida utilizando a imagem relativa ao teste piloto 1, deformação próxima ao centro da membrana, (figura 24). Após selecionarmos as melhores imagens para análise, carregamos as imagens no *Plot Digitizer*, o primeiro passo é a calibragem, onde as distâncias em pixel na imagem são associadas a distâncias conhecidas entre pontos da imagem, no caso, como já destacamos os pontos c1, c2, e c3, que correspondem respectivamente ao centro da membrana e as duas marcas do parafuso referencial. A figura 23 abaixo, mostra os pontos c1, c2 e c3 e a janela de calibragem ampliada.

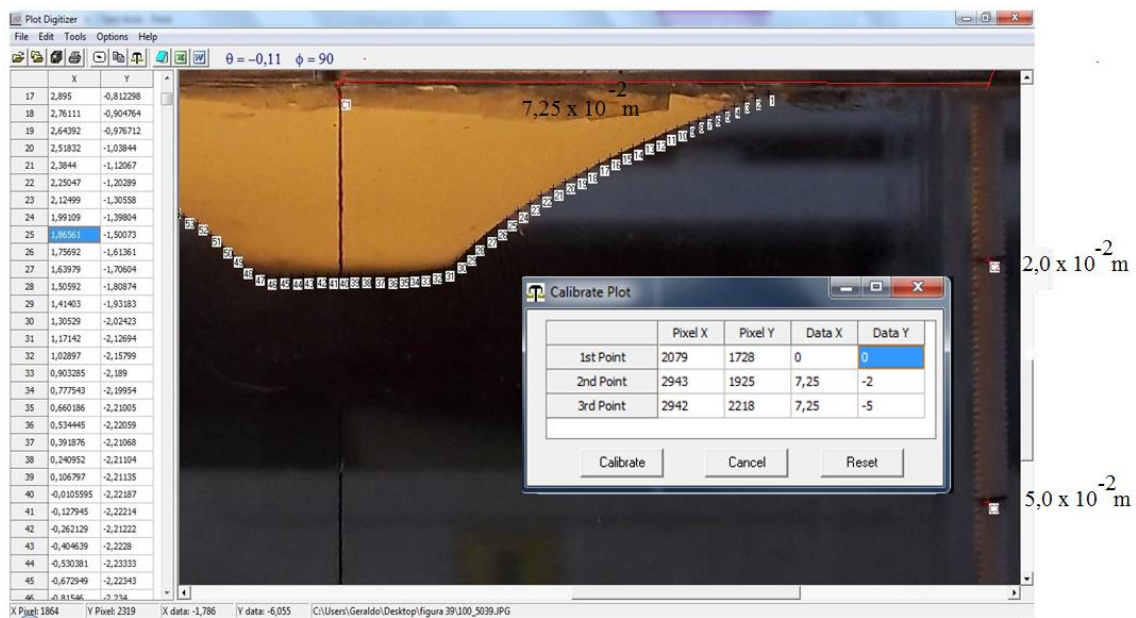


Figura 23: A tela do Software Plot Digitizer, com os pontos funcionais mais a janela de calibragem.

A seguir o contorno da membrana é adquirido pelo software, clicando em cada ponto, resultando em um conjunto com cerca 100 pontos, figura 24, que são transferidos para análise no Excel.



Figura 24: Na imagem os pontos c1, c2, e c3, que correspondem respectivamente ao centro da membrana e as duas marcas do parafuso referencial.

Esse conjunto de pontos (x,y) reflete precisamente o contorno da membrana no plano de análise. Na posição da prova a deformação da membrana deve ser precisamente u_0 .

Com a prática, verificamos que em várias medidas não ocorria boa sobreposição entre a curva experimental e a curva teórica. A análise mais criteriosa da situação mostrou que o posicionamento da câmera altera a posição da curva experimental como um todo, hora fica acima e hora abaixo da posição correta.

Mesmo com todo o critério na realização das medidas, não conseguimos conciliar com precisão a deformação u_0 real da membrana medida através das marcas na fita do indentador com a estabelecida através da análise da imagem. Assim a altura, posição y_0 , da origem do referencial foi definida a partir da escala em pixel estabelecida pelo parafuso.

A partir daí a curva experimental é ajustada numericamente à curva teórica, somando-se a constante u_{cor} , que ajusta precisamente a altura em y da origem do referencial. Utilizando esse critério, verifica-se que o ajuste entre experimento e teoria é muitas vezes excelente. Vale destacar que o ajuste numérico prevê valores de u_0 compatíveis com os medidos através das marcas na fita fixada ao indentador, como será mostrado nos resultados.

Assim, u_{cor} é definida como:

$$u_{experimental} = u_{cor} + u_{teoria} \quad (\text{solução analítica}) \quad (25.1)$$

A correção constante para toda a curva mostra claramente que existe um deslocamento da curva como um todo. Observa-se ainda que u_{cor} é praticamente constante para um dado conjunto de medidas onde a posição e focalização da máquina permaneceram o mesmo.

4.2.4 Análise no Excel.

Análise de medida referente dia 13/02/14, sendo $u_0 = 2,2 \times 10^{-2} m$. Primeiro os pontos funcionais são colocados nas duas primeiras colunas no *Excel* (ver figura 25). Na segunda os valores de $u_{experimental}(x)$, representam a deformação da membrana na posição x.

Em seguida, na terceira coluna foi colada a equação que representa a deformação no plano de análise. Para $u_d(x)$ (Equação 29 ou Equação 34, conforme o caso, veja também os apêndices B e C) é dependente de u_0, a, b e r_0 , que podem ser variados conforme o caso em análise. A seguir no quadro os valores de $(x_0 + a)$ e $(x_0 - a)$ que estabelecem os limites a esquerda e a direita do patamar, onde $u_d(x) = u_0$.

Na terceira coluna é determinado o erro absoluto entre experimento e teoria, ou a diferença $abs(u_{exp}(x) - u_d(x))$. ($abs = \text{função módulo}$). u_{cor} representa a correção vertical na localização da origem do referencial.

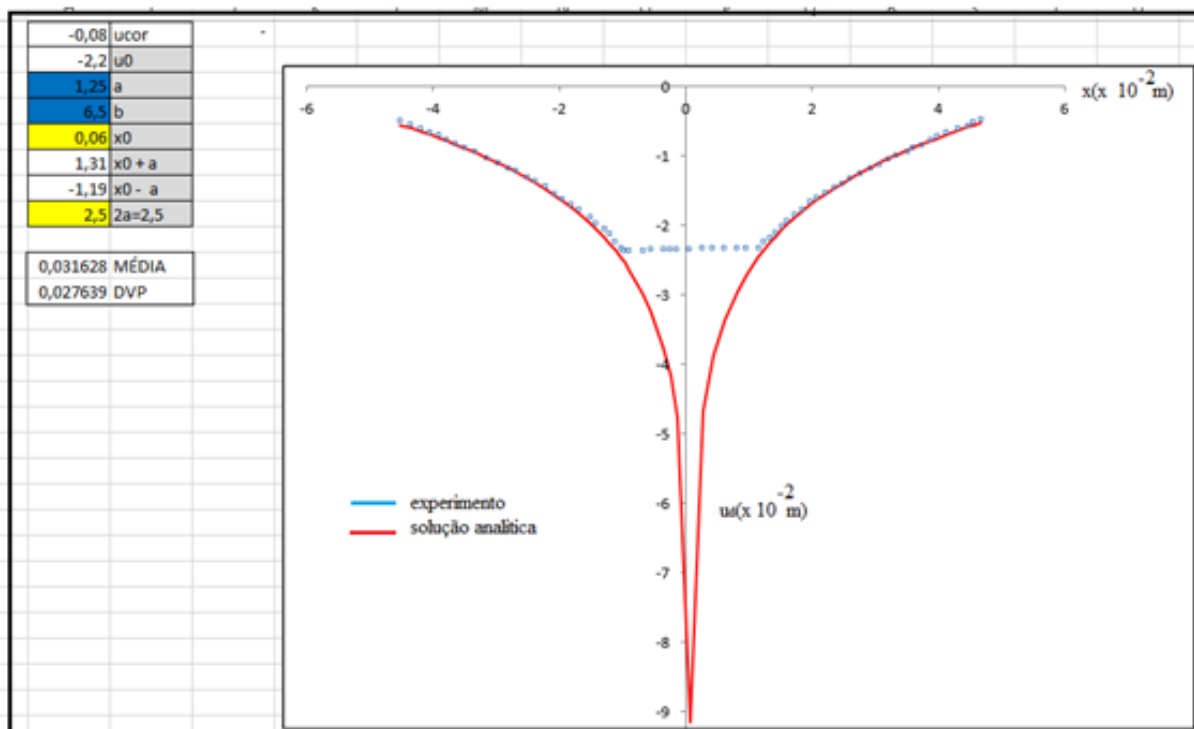


Figura 25: Exemplo da análise da deformação em uma tabela de resultados no Excel. Note que, na figura os dados experimentais correspondem aos pontos em azul e a curva referente a solução analítica em vermelho.

Em seguida no quadro são apresentados os valores do erro absoluto médio relativo a todos os pontos, bem como o desvio padrão. Os pontos no intervalo de $(x_0 + a) > x > (x_0 - a)$, pontos do patamar, são retirados do cálculo da média, pois nestes pontos foi imposta a condição de contorno C1: $u(\omega) = u_0$, ou seja, $u(x) = u_0$. No gráfico da figura 25, os pontos em azul representam $u_{exp}(x)$ e a linha em vermelho $u_d(x)$. Observa-se a excelente sobreposição entre a curva experimental e a curva teórica.

O erro absoluto médio no teste piloto 1 foi de 0,031 cm. O desvio padrão de 0,027 cm = 0,27 mm mostra que não existe uma variação significativa dos valores em relação a média.

4.3 TESTES PILOTOS

Os resultados do Teste Piloto 1 foram apresentados ilustrando o PAAI. Agora apresentamos os resultados do Teste Piloto 2, que tem o objetivo de verificar a precisão no processo de medida. Sobre a técnica de precisão e medidas de imagens fotográficas consultamos Klette *et al* (1998) *apud* Selvadurai (2006), Gil *et al* (2006). No Teste Piloto 2 analisamos as grandezas que alteram a qualidade da imagem e verificamos a resolução da câmera em relação ao objeto a ser fotografado e conferimos a precisão das medidas,

garantindo confiança na realização das medidas experimentais previstas. Constatamos através dos experimentos que os dados obtidos são confiáveis, ou seja, com a precisão dos instrumentos de medidas utilizados, como veremos a seguir.

Considerações sobre o segundo teste piloto:

Modelo: Distâncias geométricas entre pontos.

Seguindo o PAAI, a figura 26 representa a medida experimental do teste piloto 2. Neste caso, depois da definição do referencial de medida utilizando como base a escala do papel milimetrado, que foi posicionado precisamente na posição do plano de análise, foram selecionados sobre o papel milimetrado 26 pontos. A fim de avaliar a precisão no processo de medida, foi determinada a distância d_i de cada ponto ao ponto 26, considerado como *ponto de referência*. Onde d_i é definida como:

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_{26})^2 + (y_i - y_{26})^2} \quad (26)$$

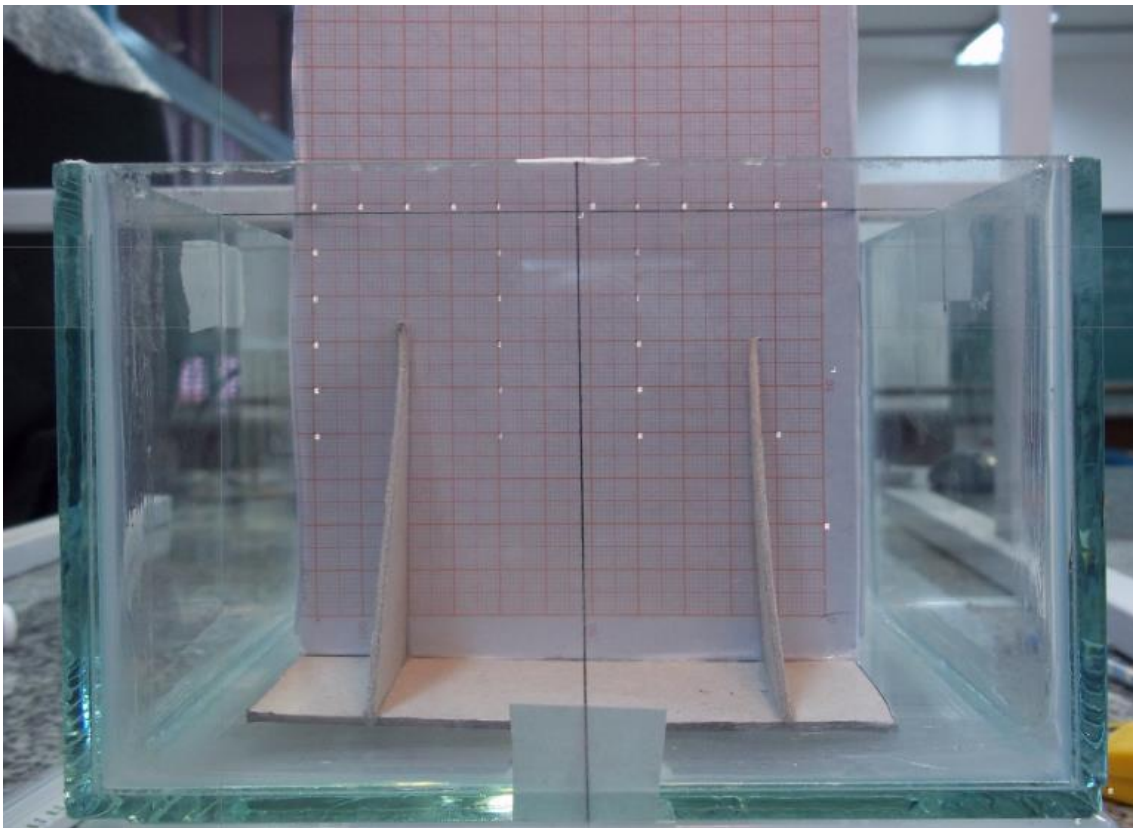


Figura 26: Distribuição de pontos em um papel milimetrado para análise geométrica - teste piloto 2. Aspecto das coordenadas geométricas. Imagem de um objeto no papel milimetrado. Utilizamos este procedimento para verificar a precisão das medidas da imagem fotográfica em relação às medidas do objeto real.

A figura 27 mostra a ampliação da figura 26 com o ponto 26 em destaque.

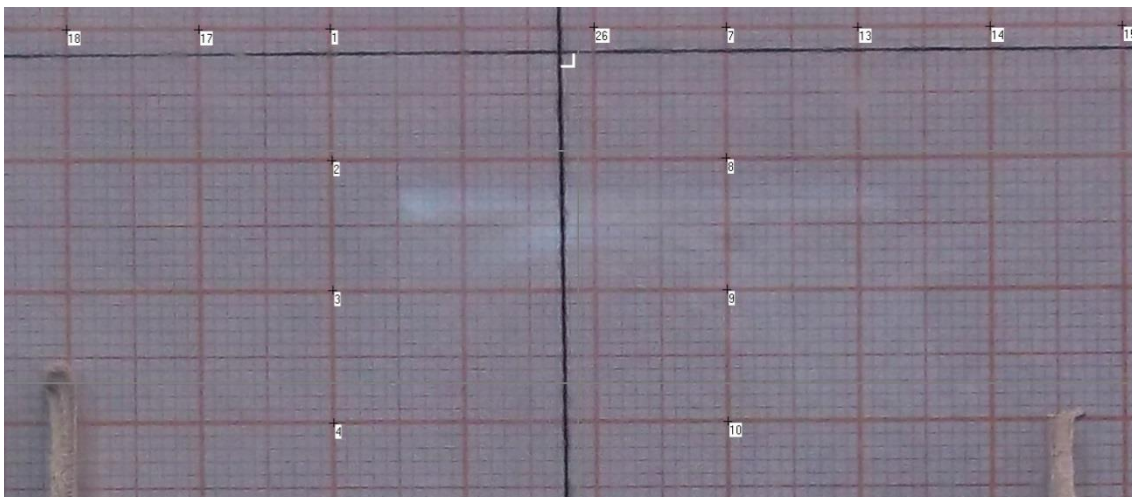


Figura 27: Ponto 26 em destaque.

No *Excel*, como no caso anterior, os pontos funcionais (x,y) foram colados nas colunas (x,y). Na coluna seguinte foi calculada a distância de cada ponto ao *ponto de referência*, o de número 26 na figura 28, utilizando a equação 26 representada por D_{foto} na tabela.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		x	y	Dfoto (cm)	Dgeo (cm)	erro absoluto (cm)					
2	1	-1,99329	4,54E-05	1,99329	2	0,00671					
3	2	-1,9885	1,00104	2,226255	2,236068	0,009813					
4	3	-1,99031	1,98847	2,813423	2,828427	0,015005					
5	4	-1,9923	2,99619	3,598113	3,605551	0,007439					
6	5	-1,98739	3,98366	4,451883	4,472136	0,020253					
7	6	-1,99603	4,98457	5,369364	5,385165	0,0158					
8	7	0,999942	0,006763	0,999965	1	3,51E-05					
9	8	0,991363	1,00091	1,408766	1,414214	0,005448					
10	9	0,989437	2,00E+00	2,233031	2,236068	0,003037					
11	10	0,987512	3,00281	3,16102	3,162278	0,001258					
12	11	0,992355	3,99705	4,118395	4,123106	0,004711					
13	12	0,990371	5,00477	5,101819	5,09902	0,0028					
14	13	1,99317	0,01348	1,993216	2	0,006784					
15	14	2,99317	0,01348	2,9932	3	0,0068					
16	15	3,99317	0,01348	3,993193	4	0,006807					
17	16	3,98372	4,99796	6,391371	6,403124	0,011753					
18	17	-2,98658	9,08E-05	2,98658	3	0,01342					
19	18	-3,98652	-0,00667	3,986526	4	0,013474					
20	19	-4,99317	-0,01348	4,993188	5	0,006812					
21	20	-5,99311	-0,02024	5,993144	6	0,006856					
22	21	-5,98827	0,973992	6,066963	6,082763	0,0158					
23	22	-5,99025	1,98171	6,309538	6,324555	0,015017					
24	23	-5,98547	2,98271	6,687482	6,708204	0,020722					
25	24	-5,98063	3,97694	7,182199	7,211103	0,028903					
26	25	-5,97584	4,97794	7,777567	7,81025	0,032683					

Figura 28: Exemplo da análise de verificação de medida em uma tabela de resultados no Excel - teste piloto 2.

A coluna seguinte “erro absoluto” apresenta à distância geométrica, D_{geo} , entre os pontos. Em seguida o erro absoluto entre as medidas experimentais. Entre as medidas experimentais (D_{foto}) e os valores esperados (D_{geo} é calculado como: $abs(D_{foto} - D_{geo})$). Por exemplo, o ponto 1 está a exatamente 2 cm do ponto de referencial, o ponto 4 a $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\text{ cm} = 3,60555\text{ cm}$ e o ponto 7 a exatamente a 1 cm .

O quadro ao lado apresenta o valor médio das diferenças bem como o desvio padrão (DVP). Observa-se um erro absoluto muito menor que a precisão dos instrumentos de medida, que é de $0,1\text{ cm} = 1\text{ mm}$

4.4 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Agora vamos ajustar as soluções gerais apresentadas na seção 2.4 com as situações experimentais a serem analisadas conforme a tabela 2. De acordo com a figura 21, a análise é restrita ao plano de observação. Na figura 29, apresentamos o sistema de coordenadas, plano x,y de avaliação.

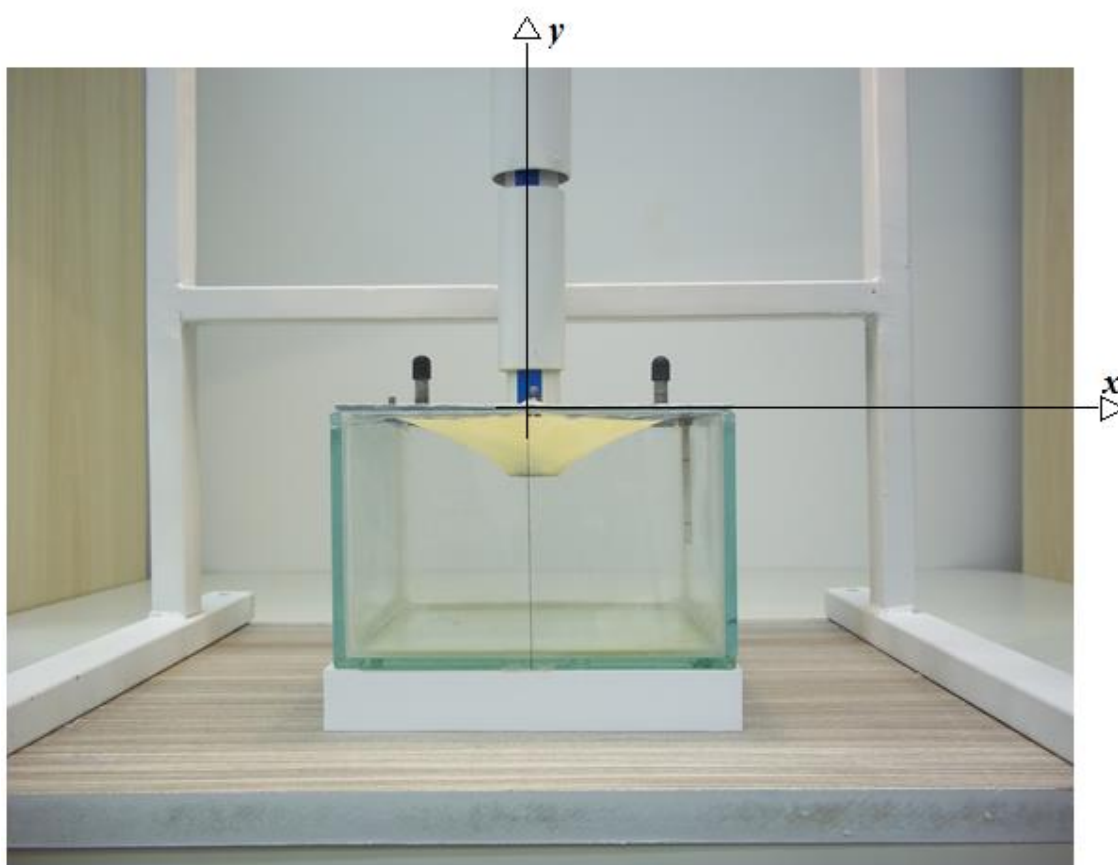


Figura 29: Sistema de coordenadas dos planos x e y de avaliação.

4.4.1. Casos (a) e (b) da tabela 2: Deformação próximo do centro ou deslocada do centro, sem líquido.

Neste caso $u_d(r, \theta)$ corresponde as equações 18.1 e 18.2. No plano de análise temos: $r = x$, $x_0 = 0$, $\theta = 0$ e $\theta_0 = 0$ (eixo $x > 0$). A constante C é determinada com a imposição da condição de contorno C1. Dado que as curvas não são simétricas à esquerda e a direita de x_0 , de forma geral, a condição de contorno C1 será:

$$\frac{(u_d(x_0 + a) + u_d(x_0 - a))}{2} = u_0 \quad (27)$$

A figura 30, ilustra a média dos valores, de $u_d(x)$ à esquerda e a direita, nos pontos $(x_0 + a)$ e $(x_0 - a)$, que representa o valor de $u_d(x) = u_0$ no patamar.

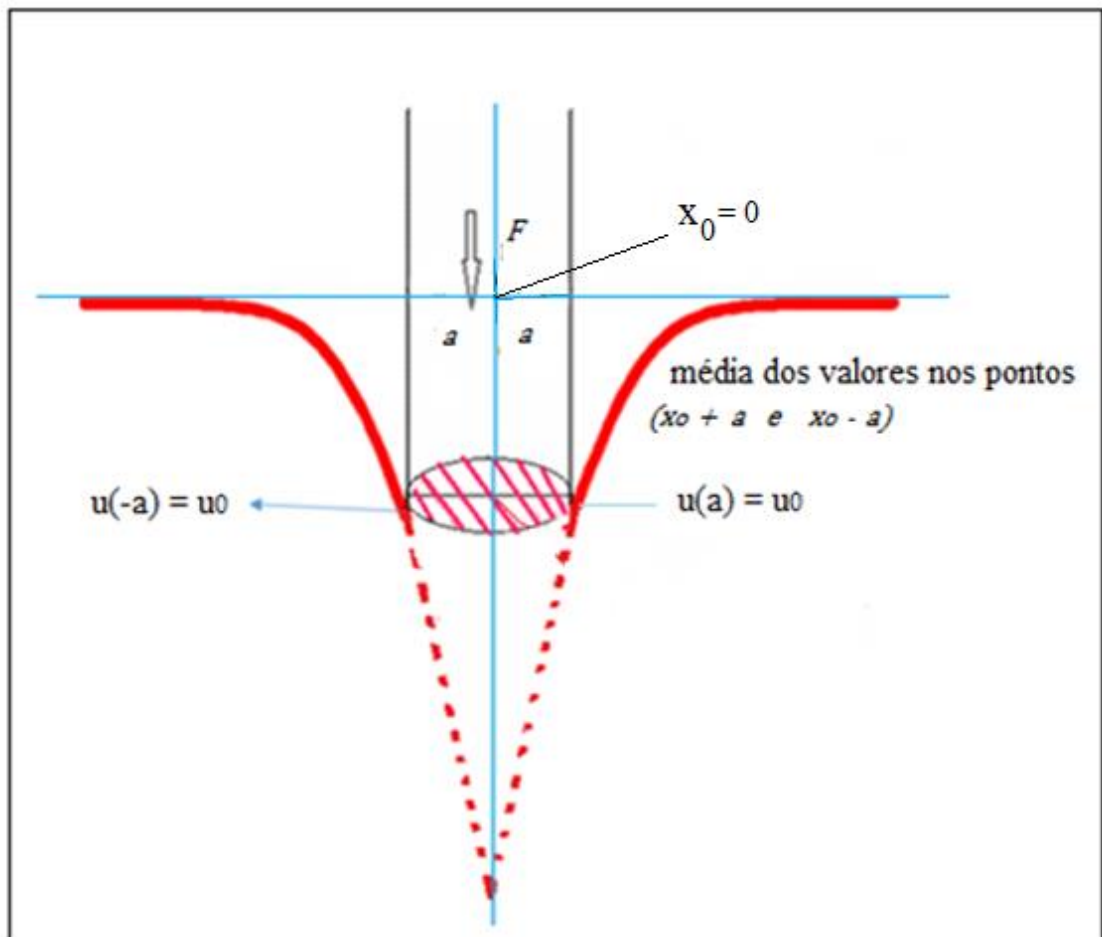


Figura 30: Condição de contorno C1: média dos valores para $x_0 = 0$, em $(x_0 + a$ e $x_0 - a)$.

Esta condição determina a constante C . Conhecido o valor da constante C , a condição de contorno C2 define a força F na equação 18.1. Aplicando as condições de contorno C1 e C2 conforme especificamos acima obtemos para F e $u_d(r, \theta)$ o seguinte resultado geral:

$$F = 8 \frac{u_0 \pi \tau}{-2 \ln(a^2) + \ln\left(\frac{(x_0^2 - b^2 + x_0 a)^2}{b^2}\right) + \ln\left(\frac{(x_0^2 - b^2 - x_0 a)^2}{b^2}\right)} \quad (28) \quad \text{Daí,}$$

$$u_d(x) = 2 \frac{u_0 \left\{ (-\ln(x - x_0)^2) + \ln\left(\frac{(x x_0 - b^2)^2}{b^2}\right) \right\}}{-2 \ln(a^2) + \ln\left[\frac{(x_0^2 - b^2 + x_0 a)^2}{b^2}\right] + \ln\left[\frac{(x_0^2 - b^2 - x_0 a)^2}{b^2}\right]} \quad (29)$$

Dado que a análise é realizada no plano x, y , as funções F e u_d são funções apenas de x , sendo independentes de θ neste caso.

4.4.2 Casos (c) e (d) da tabela 2. Deformação próximo do centro ou deslocada do centro, com líquido.

A análise é análoga ao caso anterior, porém é importante destacar que a solução é dada pela superposição de $u_d(r, \theta)$ e $u_{p_0}(r, \theta)$. A figura 31 ilustra o princípio da superposição, bem como o significado dos deslocamentos u_{d_0} , u_{p_0} e u_{00} .

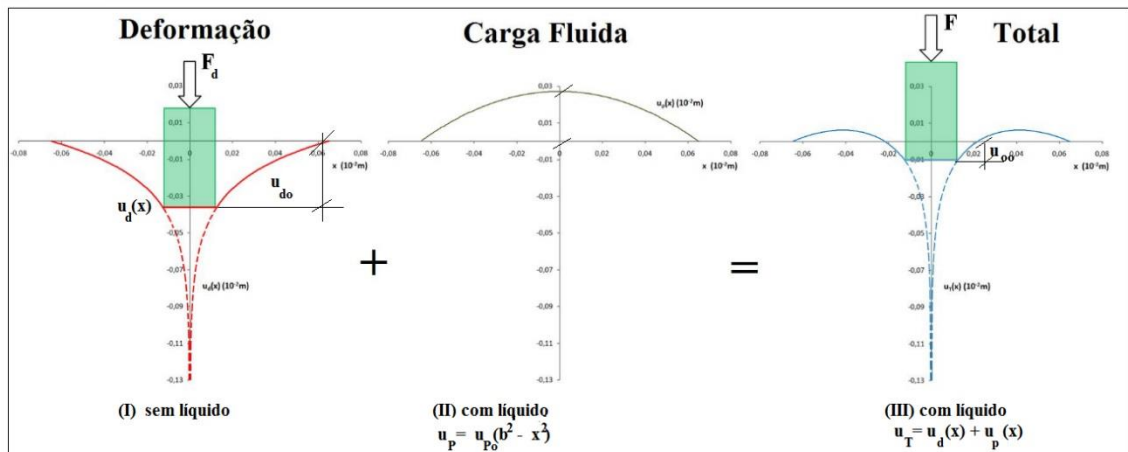


Figura 31: Aplicação do princípio da superposição.

Na superposição, apresentada na figura 31, o deslocamento u_{d_0} representa a deformação da membrana pela aplicação da força F_d , considerando que o líquido foi retirado do recipiente, ou seja, como no caso anterior.

Já $\frac{u_{p_0}}{b^2 - a^2}$ representa o deslocamento $u_p(a)$ em $x = a$ caso a pressão existente no recipiente fosse mantida constante com a retirada da prova. Aqui, para simplificar a análise, a equação 28 é rescrita na forma abaixo.

$$u_p = u_{p_0}(b^2 - r^2) \quad (30)$$

Por fim, vale observar que u_{d_0} é determinado a partir das medidas realizadas na situação “sem líquido” utilizando a curva tensão-deformação u_{00} representa a deformação real da membrana elástica fixada a uma borda circular - líquido.

Esses três deslocamentos, dado o princípio da superposição, são tais que: para $x = a$; (ou de forma geral $x = x_0 + a$)

$$u_{d_0} + \frac{u_{p_0}}{b^2 - a^2} = u_{00} \quad (31)$$

A fim de determinar a deformação no plano de análise, seguimos um procedimento análogo ao da seção anterior, considerando:

$$u_{total}(r, \theta) = u_d(r, \theta) + u_p(r, \theta), \quad (32)$$

onde u_{p_0} é determinada a partir da equação 31.

Como no caso anterior, a constante C é determinada a partir da condição de contorno C1. Agora, a equação 27 é rescrita com $u_{total}(r, \theta)$ no lugar de $u_d(r, \theta)$, definindo a constante C.

A seguir, a condição de contorno C2 determina a força F, que substituída em $u_{total}(r, \theta)$, define os valores da força F e de u_{total} através das equações:

$$F(x) = -8 \frac{u_{d_0} \pi \tau}{2 \ln(a^2) - \ln\left(\frac{(b^2 - x_0^2 - x_0 a)^2}{b^2}\right) - \ln\left(\frac{(b^2 - x_0^2 - x_0 a)^2}{b^2}\right)} \quad (33)$$

e

$$u(x)_{Total} = - \frac{(-u_{00} + u_{d_0})(b^2 - x^2)}{b^2 - a^2} + 2 \frac{u_{d_0} \left(\ln((-x + x_0)^2) - \ln\left(\frac{(b^2 - x x_0)^2}{b^2}\right) \right)}{2 \ln(a^2) - \ln\left(\frac{(b^2 - x_0^2 - x_0 a)^2}{b^2}\right) - \ln\left(\frac{(b^2 - x_0^2 + x_0 a)^2}{b^2}\right)} \quad (34)$$

4.5 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

Uma vez estabelecido o PAAI e realizados os testes piloto, apresentamos abaixo um conjunto de medidas experimentais conforme planejado.

4.5.1 Deformação da membrana fixada ao longo de uma borda circular.

A sequência de imagens apresentadas nas figuras de 32 a 39 representa um conjunto de medidas experimentais da deformação da membrana em posição próxima do centro geométrico, referentes a medidas realizadas em 13/02/2014. Nestas medidas as marcas do parafuso correspondem a 2,2 cm e 4,7 cm. Em seguida a tabela 3, resume a avaliação das imagens realizadas através do PAAI, tal como descrito na seção 4.2. Mais a frente a tabela 4 mostra os resultados da avaliação de medidas realizadas em 06/06/2014. Nestas medidas as marcas do parafuso correspondem a 2,0 cm e 5,0 cm. As imagens referentes a essa tabela não são apresentadas. O apêndice B exemplifica o relatório de análise padrão dos dados realizados no software Excel, utilizado na confecção das tabelas, ilustrado com o relatório referente a primeira medida da tabela 4



Figura 32: $carga = 1,98 N$, $u_o = -0,90 \times 10^{-2} m$, $x_o = -0,052 \times 10^{-2} m$



Figura 33: $carga = 3,45 N$, $u_o = -1,30 \times 10^{-2} m$, $x_o = -0,165 \times 10^{-2} m$



Figura 34: $carga = 4,92 N$, $u_o = -1,55 \times 10^{-2} m$, $x_o = 0,060 \times 10^{-2} m$

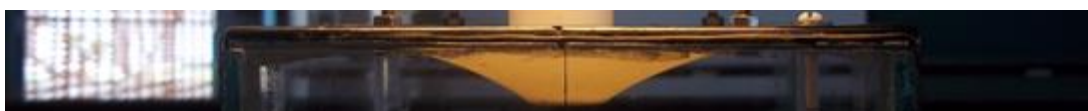


Figura 35: $carga = 6,40 \text{ N}$, $u_0 = -1,90 \times 10^{-2} \text{ m}$, $x_0 = 0,060 \times 10^{-2} \text{ m}$

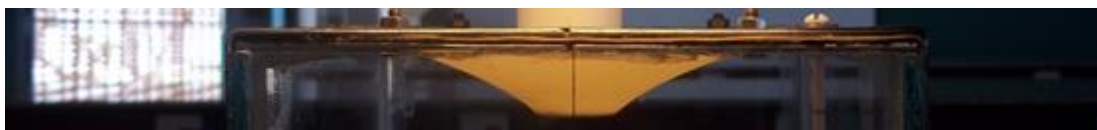


Figura 36: $carga = 7,87 \text{ N}$, $u_0 = -2,20 \times 10^{-2} \text{ m}$, $x_0 = 0,060 \times 10^{-2} \text{ m}$



Figura 37: $carga = 9,34 \text{ N}$, $u_0 = -2,50 \times 10^{-2} \text{ m}$, $x_0 = 0,060 \times 10^{-2} \text{ m}$



Figura 38: $carga = 10,81 \text{ N}$, $u_0 = -2,70 \times 10^{-2} \text{ m}$, $x_0 = -0,060 \times 10^{-2} \text{ m}$



Figura 39: $carga = 12,97 \text{ N}$, $u_0 = -2,92 \times 10^{-2} \text{ m}$, $x_0 = 0,113 \times 10^{-2} \text{ m}$

Tabela 5: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição próxima do centro da membrana, realizados em 13/02/2014, $a = 2,50 \text{ cm}$ e $b = 6,50 \text{ cm}$.

Figura	Carga (N)	u_{cor} ($\times 10^{-2} \text{ m}$)	u_0 ($\times 10^{-2} \text{ m}$) Medida	u_0 ($\times 10^{-2} \text{ m}$) Estimado	x_0 ($\times 10^{-2} \text{ m}$)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2} \text{ m}$)			$u_0/2b(\%)$	Superposição Curvas
						Média	DVP	Máximo		
32	1,98	-0,05	-0,90	-0,81	-0,052	0,008	0,007	0,03	6	E
33	3,45	-0,05	-1,30	-1,27	-0,165	0,03	0,02	0,08	10	E
34	4,92	-0,08	-1,55	-1,51	0,060	0,02	0,01	0,05	12	E
35	6,40	-0,08	-1,90	-1,88	0,060	0,02	0,01	0,06	15	E
36	7,87	-0,08	-2,20	-2,20	0,060	0,03	0,03	0,13	17	B
37	9,34	-0,08	-2,50	-2,50	0,060	0,04	0,03	0,11	19	B
38	10,81	-0,08	-2,70	-2,70	0,060	0,06	0,05	0,15	21	B
39	12,28	-0,08	-2,92	-2,92	0,113	0,05	0,02	0,09	23	B

Tabela 6: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição próxima do centro da membrana, realizados em 06/06/2014, $a = 2,50 \text{ cm}$ e $b = 6,50 \text{ cm}$.

Carga (N)	u_{corr} ($\times 10^{-2} \text{ m}$)	u_0 ($\times 10^{-2} \text{ m}$) Medida	u_0 ($\times 10^{-2} \text{ m}$) Estimado	x_0 ($\times 10^{-2} \text{ m}$)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2} \text{ m}$)			u0/2b(%)	Superposição Curvas
					Média	DVP	Máximo		
5,49	-0,26	1,95	-1,94	0,20	0,04	0,04	0,12	15	B
7,45	-0,26	2,48	-2,48	0,20	0,05	0,04	0,14	19	B
9,41	-0,26	2,79	-2,74	0,20	0,06	0,04	0,13	21	B
15,29	-0,26	3,62	-3,57	0,20	0,06	0,03	0,13	27	B

Nas tabelas a segunda coluna apresenta a carga no indentador. Na terceira coluna a correção na origem do referencial, conforme a equação 25.1. Na quarta coluna o valor medido através das marcas na fita colada no indentador da deformação na posição da prova, u_0 . Na quinta coluna o valor estimado através do ajuste de curvas utilizando o software gnuplot da deformação na posição da prova, u_0 . Na sexta coluna o deslocamento horizontal do centro da prova em relação ao centro da membrana. Nas três colunas seguintes o valor do erro absoluto médio entre o valor experimental e o teórico (solução analítica) com o respectivo desvio padrão (*DVP*) e o valor máximo desse erro. Nas últimas duas colunas temos a razão percentual entre a deformação u_0 medida e o diâmetro da membrana, seguida da avaliação visual da sobreposição entre as curvas teóricas e experimental, que pode ser:

Excelente (E), poucos pontos não estão sobrepostos e o erro absoluto médio é menor que $0,05 \times 10^{-2} \text{ m}$, erro instrumental de uma régua milimetrada.

Bom (B), a sobreposição não é perfeita. O erro absoluto médio é maior que $0,05 \times 10^{-2} \text{ m}$ e menor ou igual a $0,1 \times 10^{-2} \text{ m}$, erro experimental estimado para o experimento.

Regular, a sobreposição não é perfeita mas o erro absoluto médio é maior que $0,1 \times 10^{-2} \text{ m}$, erro experimental estimado para o experimento.

A figura 40 apresenta o resumo da análise referente à medida da figura 36, com o valor do erro absoluto e do desvio padrão (*DVP*).

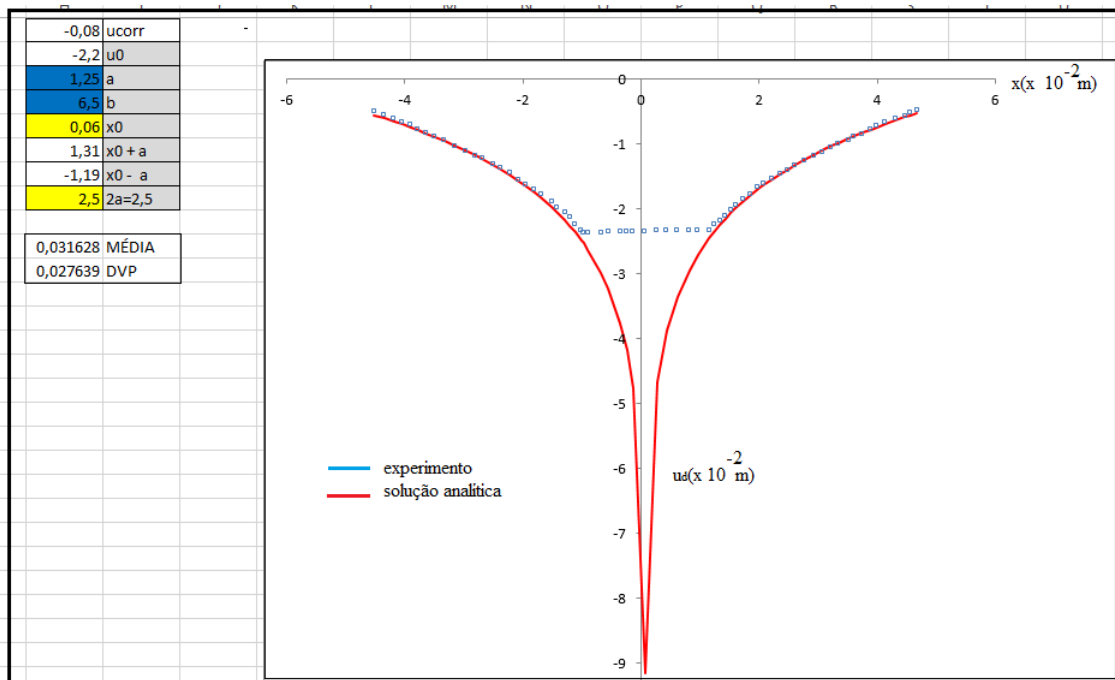


Figura 40: resumo da análise referente à medida da figura 36.

Observando a figura 40, pode-se constatar que a solução analítica e as medidas experimentais possuem boa sobreposição, constatando que a simulação modela bem a deformação de uma membrana

A figura 41 apresenta a sobreposição entre o gráfico da figura 40 e a imagem da deformação da membrana, figura 36.

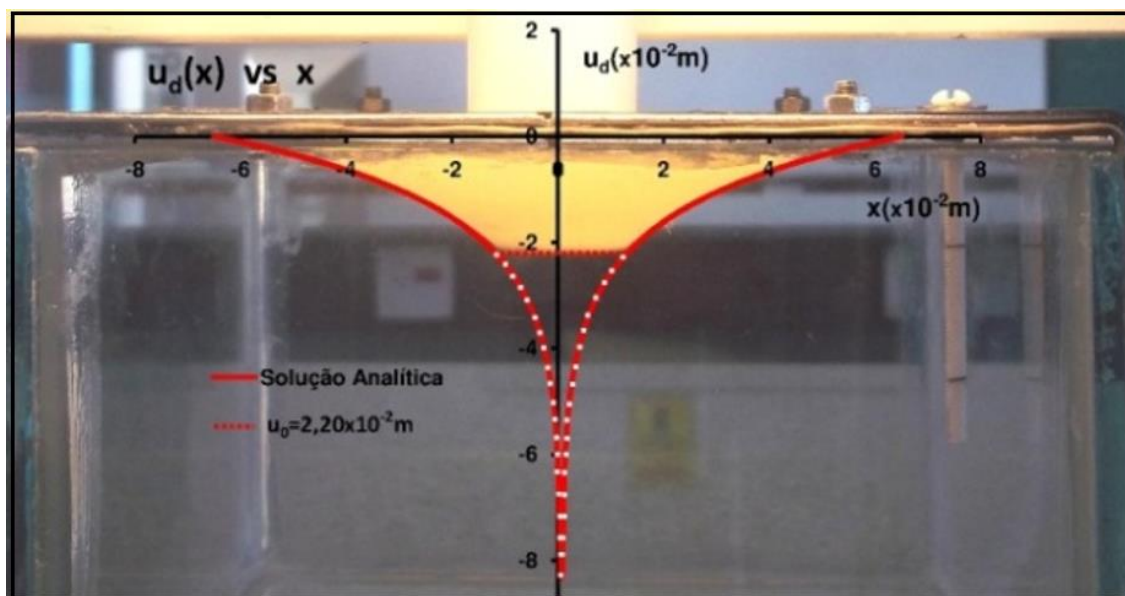


Figura 41: sobreposição entre o gráfico da figura 40 e a imagem da deformação da membrana, figura 36 (OLIVEIRA et al, 2014).

A figura 42 apresenta a curva tensão / deformação referente as segunda e terceiras colunas da tabela 3. No processo de medida, com cargas e descargas sucessivas não foi verificada histerese elástica significativa.

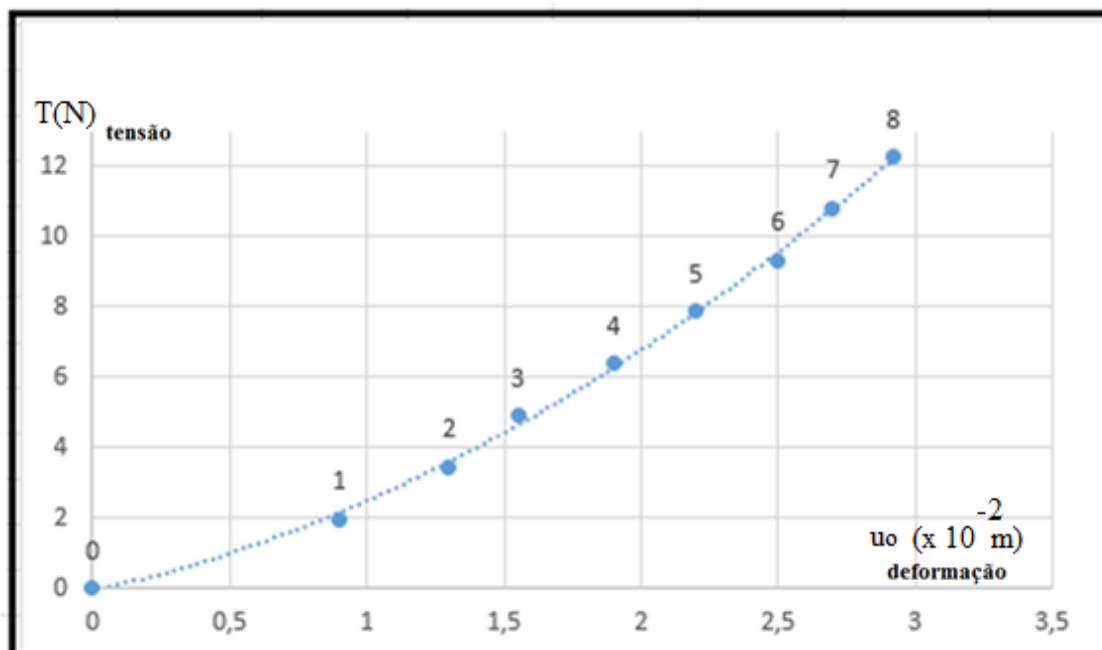


Figura 42: Curva tensão / deformação para a membrana elástica.

4.5.2 Deformação da membrana em posição deslocada em relação ao centro geométrico.

A sequência de imagens apresentadas nas figuras de 43 a 47 representa um conjunto de medidas experimentais da deformação da membrana em posição deslocada em relação ao centro geométrico, referentes a medidas realizadas em 13/02/2014. Em seguida a tabela 5, resume a avaliação das imagens realizadas através do PAAI, tal como descrito na seção 4.2. Mais a frente a 6 mostra os resultados da avaliação de medidas realizadas em 06/06/2014. As imagens referentes a essa tabela não são mostradas. A análise foi realizada como na seção anterior.

a. Medidas de deformação deslocada em relação ao centro da membrana. 25 de fevereiro de 2014.



Figura 43: carga = 4,92 N, $u_0 = -1,40 \times 10^{-2}$ m, $x_0 = 3,80 \times 10^{-2}$ m



Figura 44: $carga = 7,87 N$, $u_0 = -2,00 \times 10^{-2} m$, $x_0 = 3,40 \times 10^{-2} m$



Figura 45: $carga = 10,81 N$, $u_0 = -2,30 \times 10^{-2} m$, $x_0 = 3,40 \times 10^{-2} m$

b. Medidas de deformação deslocada em relação ao centro da membrana. 06 de junho de 2014.



Figura 46: $carga = 3,53 N$, $u_0 = -1,17 \times 10^{-2} m$, $x_0 = 2,12 \times 10^{-2} m$



Figura 47: $carga = 9,41 N$, $u_0 = 2,40 \times 10^{-2} m$, $x_0 = 2,20 \times 10^{-2} m$



Figura 47.1: $carga = 15,29 N$, $u_0 = 3,60 \times 10^{-2} m$, $x_0 = 2,20 \times 10^{-2} m$

Tabela 5: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição deslocada a esquerda em relação ao centro da membrana, realizados em 25/02/2014, $a = 2,50 cm$ e $b = 6,50 cm$.

Figura	Carga (N)	u_{cor} ($\times 10^{-2}m$)	u_0 ($\times 10^{-2}m$) Medida	u_0 ($\times 10^{-2}m$) Estimado	x_0 ($\times 10^{-2}m$)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2} m$)			$u_0/2b(\%)$	Superposição Curvas
						Média	DVP	Máximo		
43	4,92	-0,11	-1,40	-1,40	3,80	0,04	0,03	0,12	11	B
44	7,87	-0,11	-2,00	-2,00	3,40	0,04	0,03	0,16	15	B
45	10,81	-0,11	-2,30	-2,30	3,40	0,04	0,03	0,10	18	B

Tabela 6: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição deslocada a direita em relação ao centro da membrana, realizados em 06/06/2014, $a = 2,50 \text{ cm}$ e $b = 6,50 \text{ cm}$.

Figura	Carga (N)	u_{cor} ($\times 10^{-2}m$)	u_0 ($\times 10^{-2}m$) Medida	u_0 ($\times 10^{-2}m$) Estimado	x_0 ($\times 10^{-2}m$)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2} m$)			u0/2b(%)	Superposição Curvas
						Média	DVP	Máximo		
46	3,53	-0,26	-1,17	-1,16	2,12	0,02	0,02	0,05	9	B
47	9,41	0,1	2,40	-2,40	2,20	0,1	0,06	0,19	18	R
47.1	15,29	0,1	3,50	-3,3	2,20	0,2	0,1	0,52	25	R

4.5.3 Deformação de membrana próxima ao centro geométrico com a caixa transparente cheia de água.

A sequência de imagens apresentadas nas figuras 48 e 49 representa um conjunto de medidas experimentais da deformação da membrana em posição próxima do centro geométrico, com a caixa transparente cheia de água, para medidas realizadas em 06/06/2014. Em seguida a tabela 7, resume a avaliação das imagens realizadas através do PAAI, tal como descrito na seção 4.2. Mais a frente, a tabela 8 mostra os resultados da avaliação para posições deslocadas em relação ao centro geométrico da membrana. As imagens referentes a essa tabela são respectivamente as figuras 50 e 51. A análise foi realizada como na seção anterior. O apêndice C exemplifica o relatório de análise padrão dos dados realizados no software Excel, utilizado na confecção das tabelas, ilustrado com o relatório referente a primeira medida da tabela 7.



Figura 48: carga = 15,2 N, $u_{do} = -3,62 \times 10^{-2} m$, $u_{oo} = -1,8 \times 10^{-2} m$, $x_0 = -0,04 \times 10^{-2} m$

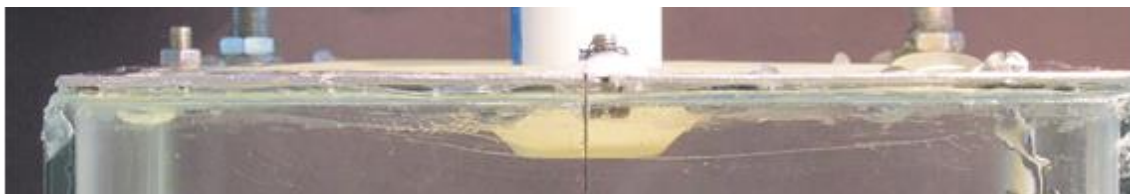


Figura 49: carga = 9,4 N, $u_{do} = -2,77 \times 10^{-2} m$, $u_{oo} = -1,5 \times 10^{-2} m$, $x_0 = -0,01 \times 10^{-2} m$

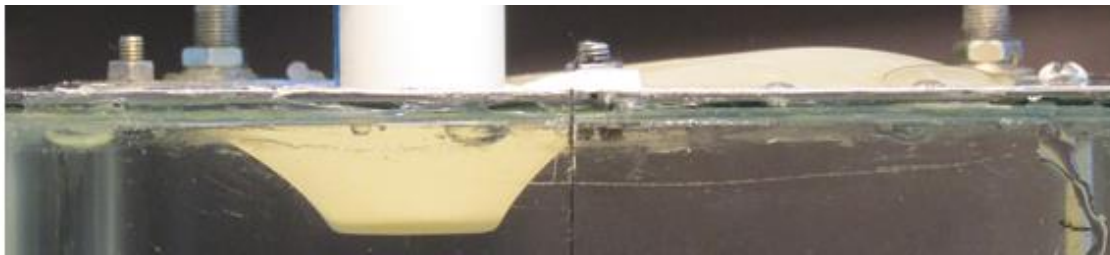


Figura 50: $carga = 15,2\text{ N}$, $u_{do} = -3,5 \times 10^{-2}\text{ m}$, $u_{oo} = -1,6 \times 10^{-2}\text{ m}$, $x_o = -2,24 \times 10^{-2}\text{ m}$

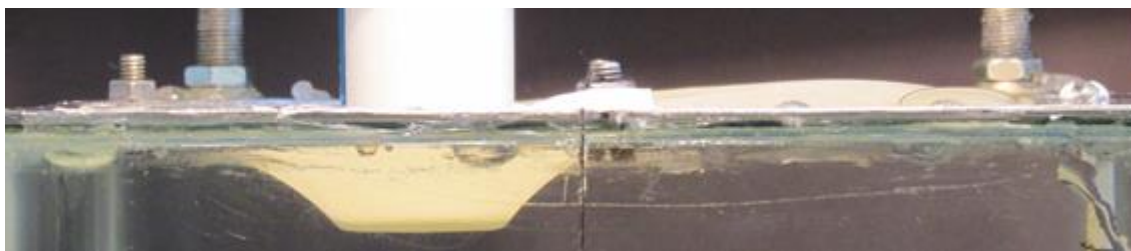


Figura 51: $carga = 9,4\text{ N}$, $u_{do} = -2,44 \times 10^{-2}\text{ m}$, $u_{oo} = -1,9 \times 10^{-2}\text{ m}$, $x_o = -2,23 \times 10^{-2}\text{ m}$

Tabela 7: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição próxima ao centro da membrana, com a caixa transparente cheia de água, realizados em 06/06/2014, $a = 2,50\text{ cm}$ e $b = 6,50\text{ cm}$.

Carga (N)	u_{cor} ($\times 10^{-2}\text{m}$)	u_{oo} ($\times 10^{-2}\text{m}$) Medida	u_{do} ($\times 10^{-2}\text{m}$) Medida	x_o ($\times 10^{-2}\text{m}$)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2}\text{ m}$)			u0/2b(%)	Superposição Curvas
					Média	DVP	Máximo		
9,41	0,15	1,50	2,79	0,05	0,07	0,04	0,19	18	B
15,29	0,15	1,80	3,62	0,05	0,02	0,02	0,06	25	E

Tabela 8: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição deslocada em relação ao centro da membrana, com a caixa transparente cheia de água, realizados em 06/06/2014, $a = 2,50\text{ cm}$ e $b = 6,50\text{ cm}$.

Carga (N)	u_{cor} ($\times 10^{-2}\text{m}$)	u_{oo} ($\times 10^{-2}\text{m}$) Medida	U_{do} ($\times 10^{-2}\text{m}$) Estimado	x_o ($\times 10^{-2}\text{m}$)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2}\text{ m}$)			u0/2b(%)	Superposição Curvas
					Média	DVP	Máximo		
9,41	0,23	1,60	2,40	2,25	0,05	0,04	0,14	18	B
15,29	0,23	1,95	3,60	2,25	0,1	0,07	0,24	25	B

A figura 52 mostra a vista superior da deformação de uma membrana fixada a longo de uma borda circular, em uma posição próxima ao centro geométrico, com a caixa transparente cheia de líquido.

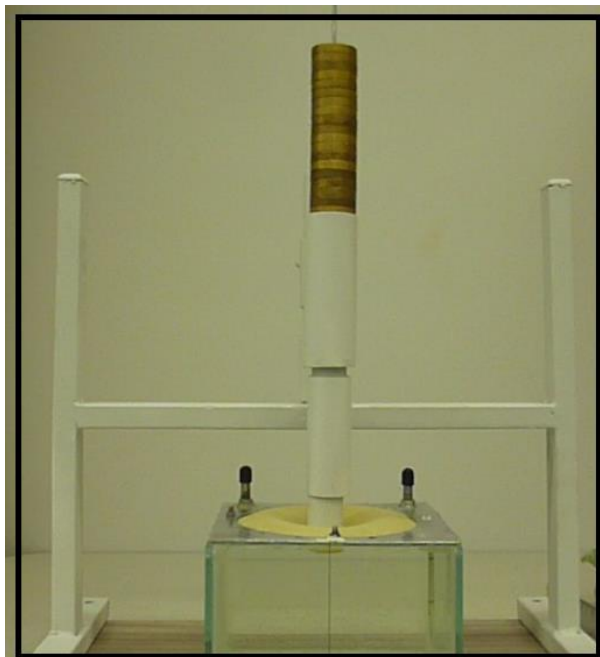


Figura 52. Deformação da membrana fixada ao longo de uma borda circular-líquido.

A figura 53 abaixo mostra a sobreposição da curva de análise matemática contornando a deformação da membrana elástica, referente a segunda medida da tabela 8. Na Fig. 53.a a deformação vertical da membrana na região tocada pela prova é de $u_{00} = 1,80 \times 10^{-2}m$ e na Fig. 53.b $u_{00} = 1,95 \times 10^{-2}m$ (OLIVEIRA et al, 2014).

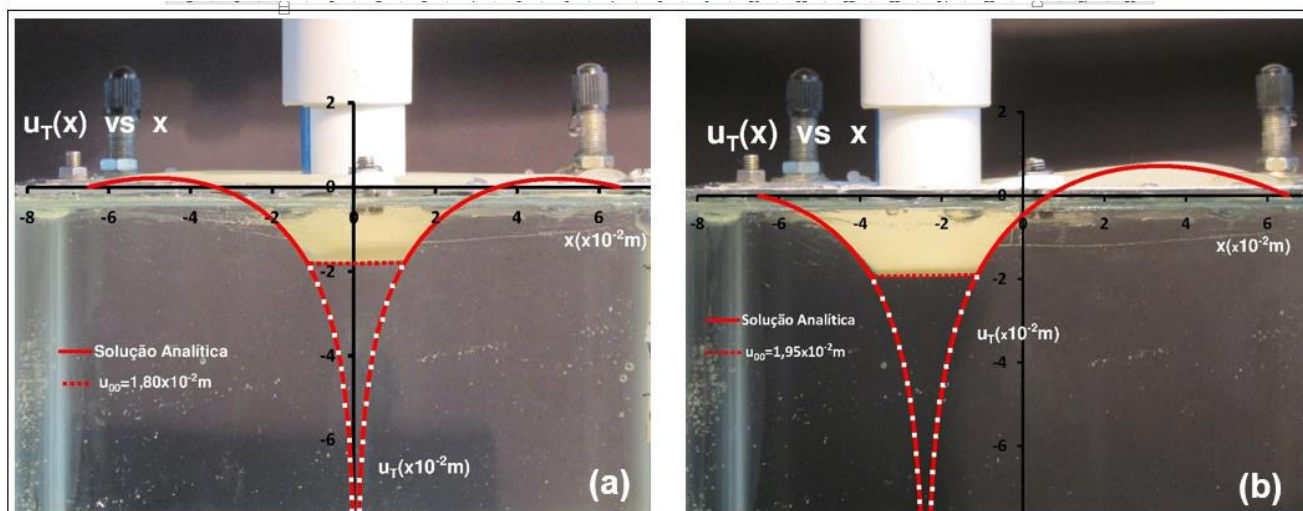


Figura 53: Medida experimental típica, deformação no centro da membrana. (Oliveira et al, 2014).

4.5.4 Deformação da membrana circular com bordas fixas, medidas realizadas por Selvadurai (2006).

Aqui avaliamos as medidas de deformação de uma membrana circular com bordas fixas e raio $b=12,5\text{ cm}$ realizadas por Selvadurai 2006. Na figura 54, a fim determinar as

dimensões envolvidas, a ponta do indentador de forma esférica com duas polegadas (5,08 cm) de diâmetro, foi sobreposta exatamente sobre a figura, de modo a coincidir com sua borda inferior. Baseado nas dimensões da ponta do indentador e na deformação em cada caso foi possível determinar a escala da figura.

Com isso, seguindo o procedimento PAAI os pontos funcionais foram determinados.

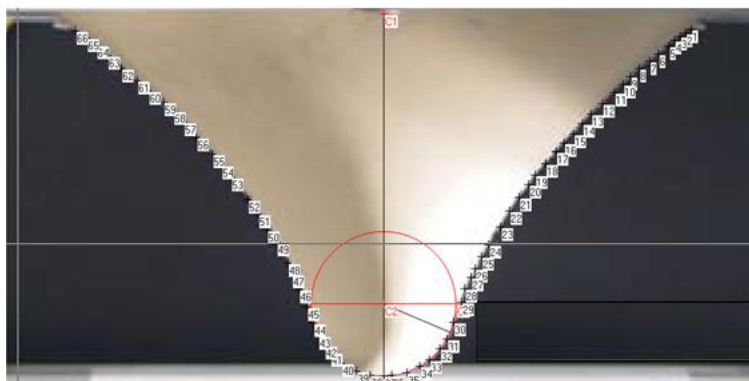


Figura 54: Deflexão de uma membrana de borracha com indentação em seu centro. $a=2,44\text{cm}$ e $b=12,5\text{cm}$. Fonte: Adaptado de SELVADURAI, 2006.

A figura 55 apresenta a análise realizada no Excel.

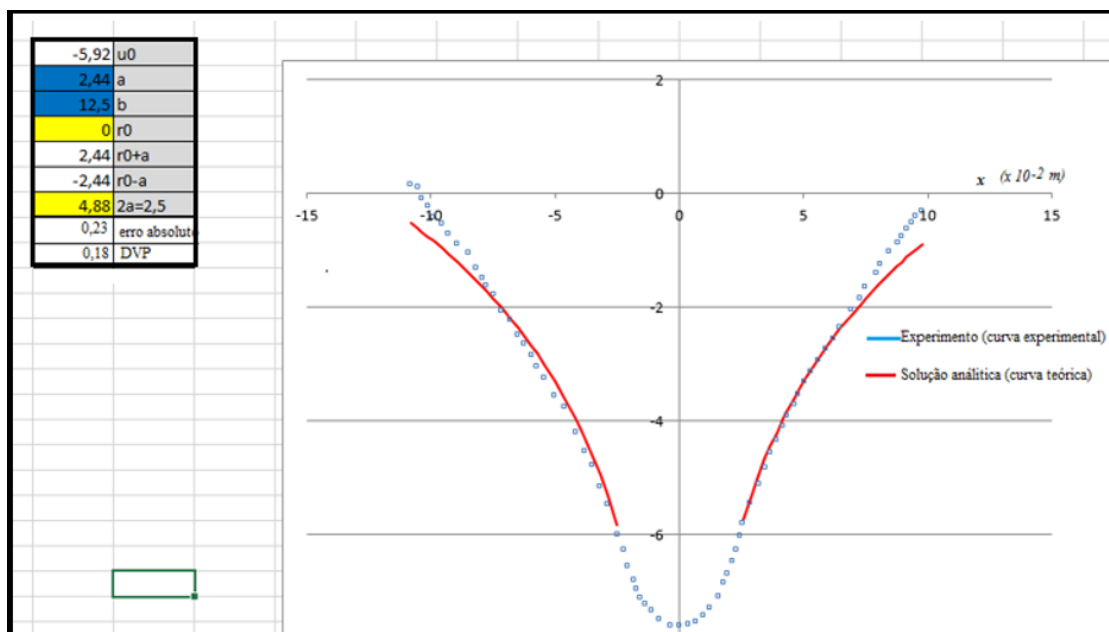


Figura 55: A figura apresenta o resumo da análise referente a figura 54, ilustrando a determinação do erro absoluto e o desvio padrão.

A tabela 9 resume a avaliação das imagens realizadas através do PAAI para várias carregamentos. A análise da figura 54 corresponde a segunda linha da tabela.

A deformação efetiva estimada é menor que a real apresentada na figura 61, pois sendo o indentador circular deve-se descontar a porção inferior da esfera e considerar, visualmente, o ponto em que a superfície da esfera de “descola” da superfície da membrana. O mesmo fato faz com que o “raio a do indentador” seja menor que uma polegada, variando em cada caso.

Tabela 9: Resultados de vários carregamentos com indentação em posição no centro da membrana, realizados por Selvadurai 2006, $b=12,50$ cm.

Carga (N)	a ($\times 10^{-2}$ m)	u_0 ($\times 10^{-2}$ m) Efetivo	u_0 ($\times 10^{-2}$ m) Real	x_0 ($\times 10^{-2}$ m)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2}$ m)			$u_0/2b(\%)$	Superposição Curvas
					Média	DVP	Máximo		
24	1,37	-2,09	-2,54	0	0,2	0,1	0,50	8	R
145	2,44	-5,92	-7,62	0	0,2	0,2	0,70	24	R
270	2,49	-10,67	-12,7	0	0,2	0,1	0,41	43	R

4.5.5 Membrana circular deformada pela carga devido a um fluido, água. Medidas realizadas por Shi (2009).

A figura 56 apresenta os resultados de SHI 2009 para deformação de uma membrana circular pela carga devido a um fluido (água). A fig. 2 ilustra a montagem do experimento. Conforme o artigo a membrana tem raio $b=7,30$ cm. A deformação no centro da membrana para cada medida foi estimada a partir do gráfico abaixo, referente a membrana com espessura de 0,793mm.

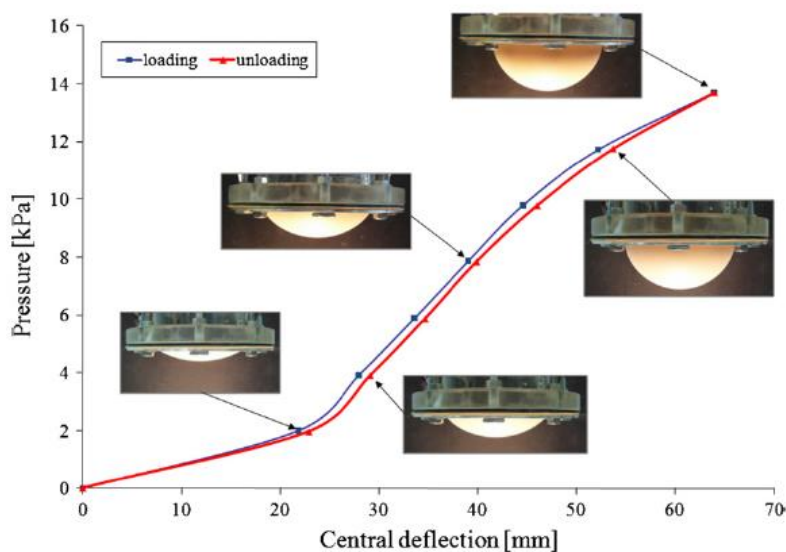


Figura 56: Resposta de deslocamento de carga para ensaio de carga-fluido. Adaptado de SHI 2009.

As figuras seguintes 57 a 60 apresentam a análise no Excel das deformações apresentadas na figura 56, realizadas através do PAAI.

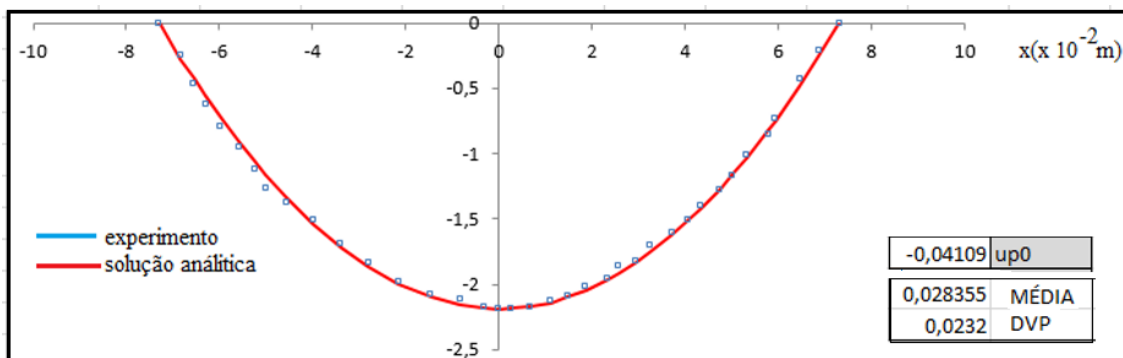


Figura 57: A figura apresenta o resumo da análise referente a figura produzida por OLIVEIRA, 2014. Sendo $u_0 = -2,19 \times 10^{-2}$ m.

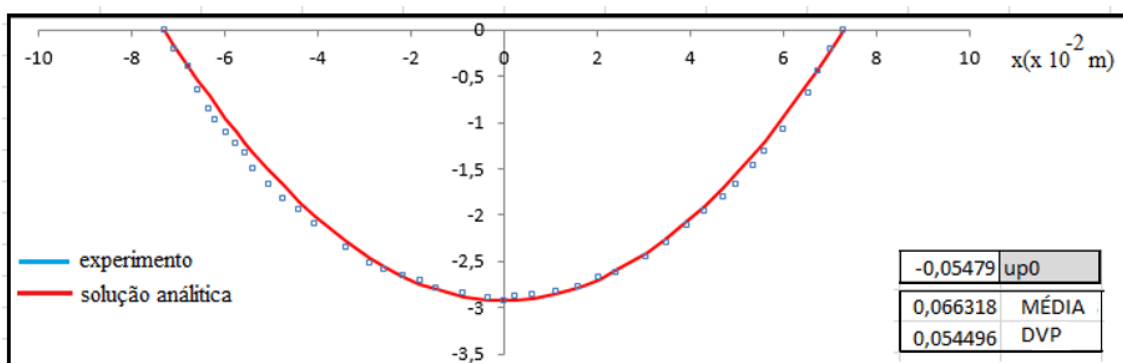


Figura 58: A figura apresenta o resumo da análise referente a produzida por OLIVEIRA, 2014. Sendo $u_0 = -2,92 \times 10^{-2}$ m.

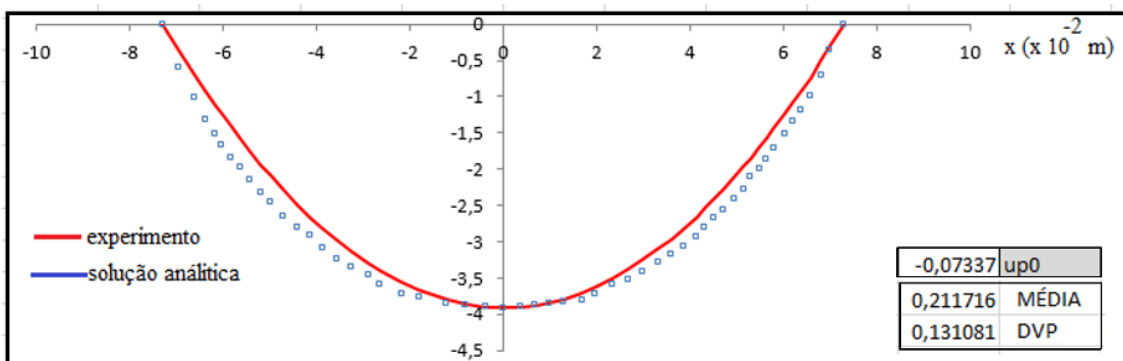


Figura 59: A figura apresenta o resumo da análise referente a produzida por OLIVEIRA, 2014. Sendo $u_0 = -3,91 \times 10^{-2}$ m.

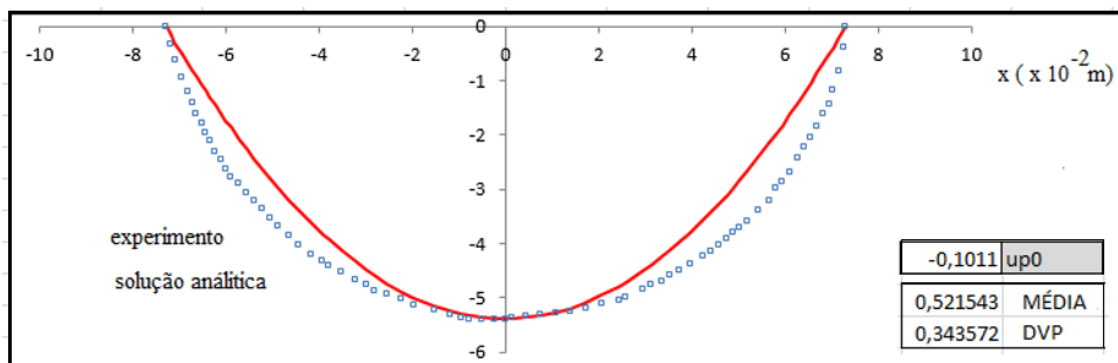


Figura 60: A figura apresenta o resumo da análise referente a produzida por OLIVEIRA, 2014. Sendo $u_0 = -5,39 \times 10^{-2}$ m.

A tabela 10 resume os resultados da análise das figuras. O modelo analítico utilizado é o apresentado na equação 30, onde u_{p0} é estimada agora a partir da deformação no centro da membrana, ou seja, $u_p(0)$. Assim

$$u_{p0} = \frac{u_p(0)}{b^2} = \frac{u_0}{b^2} \quad (35)$$

Tabela 10: Resultados de vários carregamentos por carga realizados por Shi (2009), $b=7,3$ cm.

Pressão (KPa)	u_0 ($\times 10^{-2}$ m)	u_{p0} ($\times 10^{-2}$ m)	Erro Absoluto ($\times 10^{-2}$ m)			$u_0/2b(\%)$	Superposição Curvas
			Média	DVP	Máximo		
2,0	-2,19	-0,0411	0,03	0,02	0,10	15	E
4,0	-2,92	-0,0548	0,07	0,05	0,18	20	B
8,0	-3,91	-0,0734	0,20	0,1	0,42	27	R
11,8	-5,39	-0,1011	0,50	0,3	1,04	37	---

4.6 ANÁLISE DE RESULTADOS

No conjunto de tabelas de resultados observamos que o erro absoluto médio varia no intervalo de 0,02 a 0,2.

O valor elevado do erro absoluto, em muitos casos, está relacionado a erros absolutos grandes para pontos próximos a borda da membrana, onde a ordem de grandeza da medida é a mesma da pressão da medida (1 mm), como pode ser observado na figura 24 e análogos. Este fato também explica os valores elevados para o desvio padrão.

Apesar da precisão na conversão entre pixel-cm realizada pelo Software *Plot Digitizer* ser melhor que a da escala milimetrada, como mostram os resultados do teste piloto 1, seção 4.2.4, os erros acumulados nas medidas de u_0 , a , b , c_1, c_2, c_3 somados

colocam a precisão em valor da ordem de 0,01 cm do processo de medida como um todo. Outra dificuldade é a determinação na figura da posição precisa do plano da membrana, que foi realizada com o auxílio de ajuste de curvas.

Assim, podemos julgar os resultados muito bons, e considerar o objetivo geral da dissertação concluído, ou seja, nos casos da membrana elástica fixada a uma borda circular e membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido, as soluções analíticas foram validadas pelos dados experimentais, que compreendem deformações da membrana de até 27%. Observo que os resultados regulares (R) na tabela 9, tem justificativa no fato do indentador estar em posição inclinada em relação a horizontal durante a medida, fato não percebido durante a realização do experimento. As medidas foram mantidas, pois os deslocamentos foram utilizados nas medidas com água, ver tabela 8.

Outro ponto a ser destacado, corresponde ao gráfico tensão (carga) x deformação, mostrado na figura 42. Observa-se que a forma das curva tensão-deformação mostrada na figura 42 são semelhantes às apresentadas no trabalho de Selvadurai (2006), figura 61.

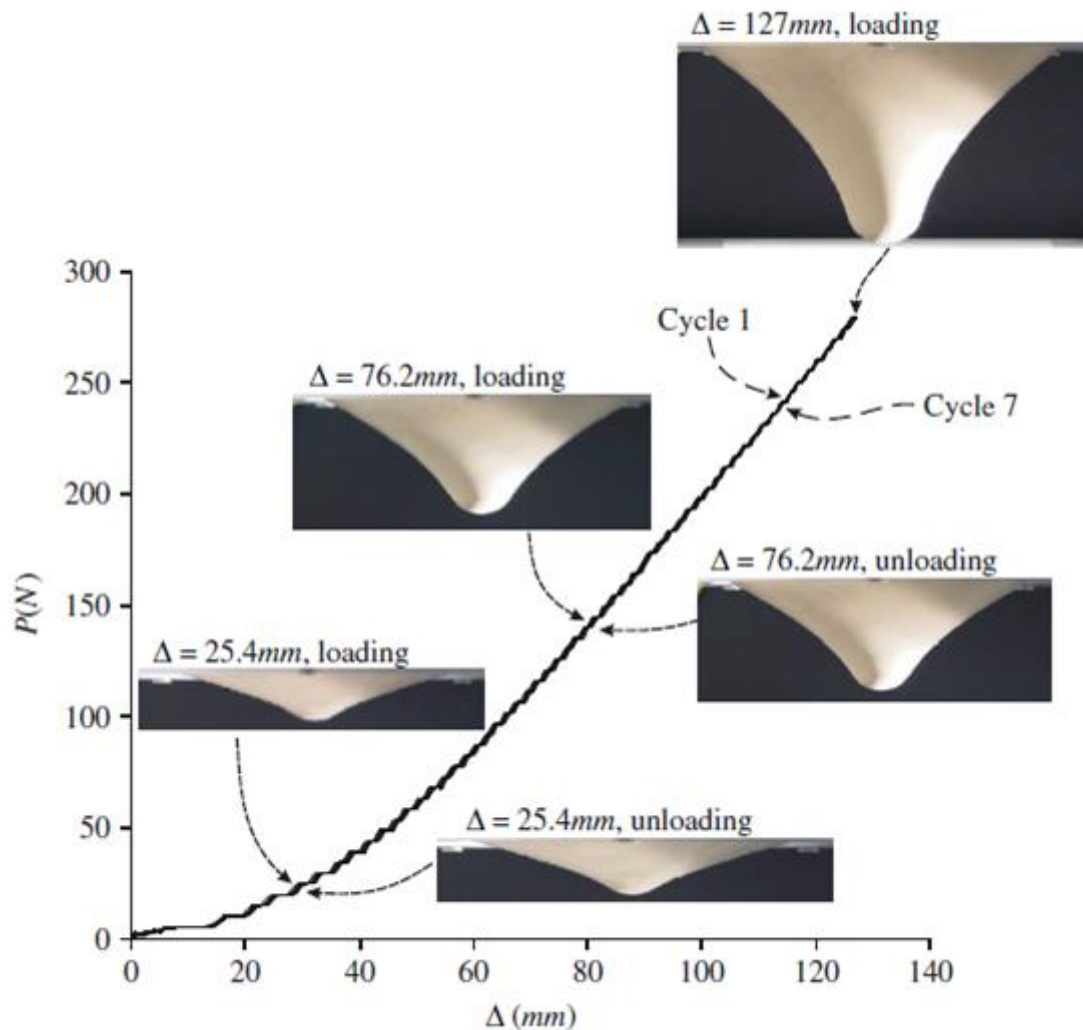


Figura 61: Deflexão de uma membrana de borracha com indentação próximo ao seu centro. Fonte: (SELVADURAI, 2006).

Por fim, vale destacar novamente que em repetidos processos de carga e descarga da membrana não ocorreu histerese significativa, resultado também observado por Selvadurai (2006). Observe que a figuras 61 apresenta também os resultados de vários ciclos de carga e descarga sobrepostos.

A figura 62 a seguir mostra as previsões computacionais realizadas através do método dos elementos finitos para as deformações de uma membrana realizadas por Selvadurai. A comparação entre experimento e teoria não mostra boa sobreposição de forma geral. Os melhores resultados são determinados utilizando a função de energia de deformação de Blatz-ko.

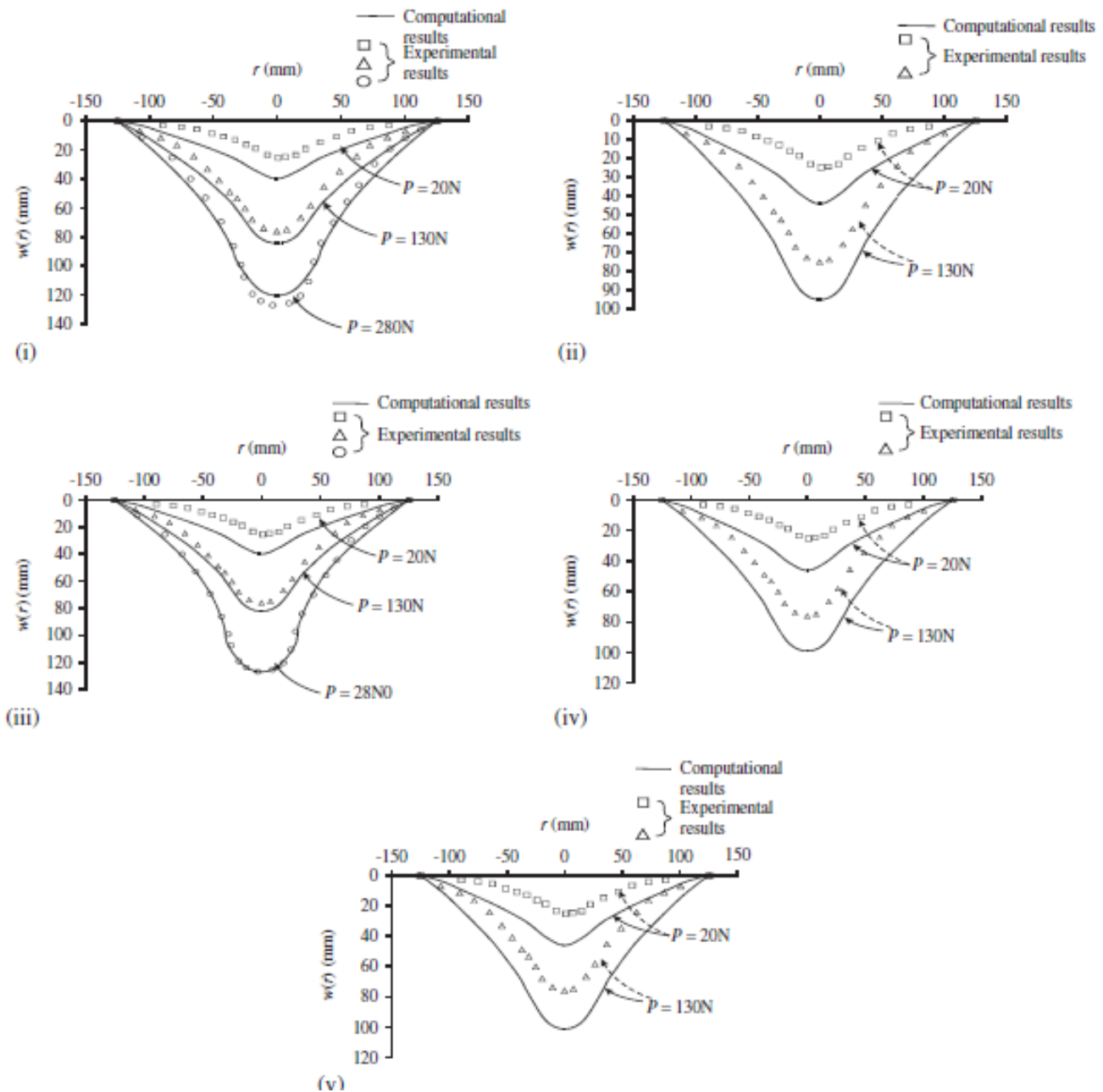


Figura 62: Comparação das previsões computacionais e resultados experimentais para a deformação próxima ao centro da membrana de borracha (i) O modelo de Mooney-Rivlin; (ii) O modelo Neo-Hookean; (iii) O modelo Blatz-Ko; (iv) O modelo Yeoh; e (v) O modelo de Ogden. (Adaptado de Selvadurai, 2006).

Na análise de uma membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido, realizada por SHI, para pequenas deformações as curvas possuem características de uma parabolóide, se afastando para uma forma mais esférica a medida que a deformação no centro da membrana aumenta. Como pode ser observado na figura 63.

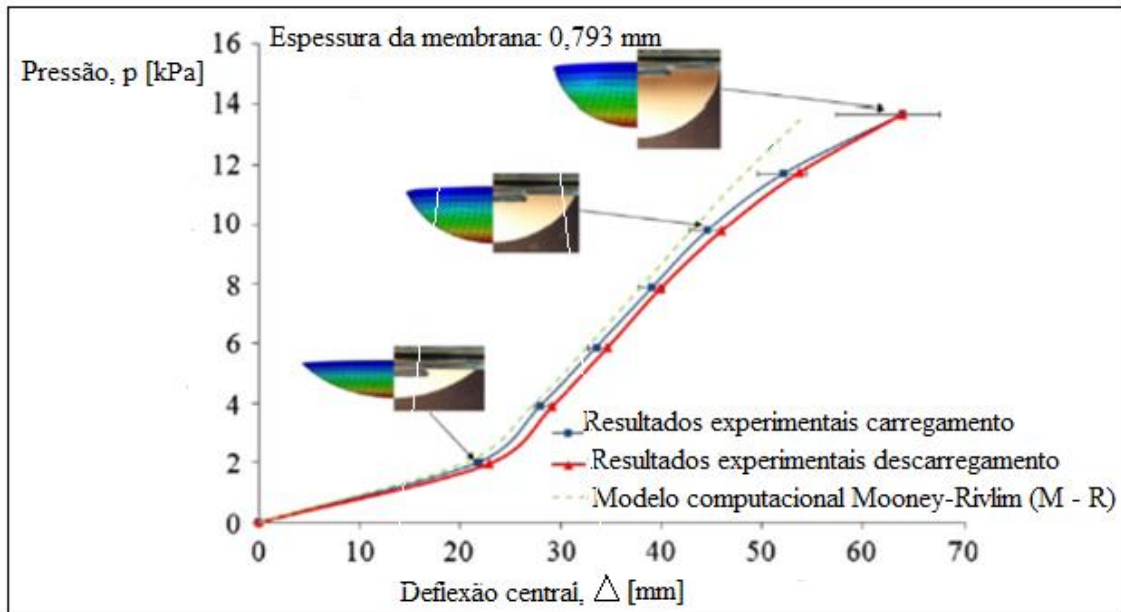


Figura 63: Gráfico de deflexão de uma membrana para resultados de pressão-fluido para uma membrana de borracha de látex utilizando o método computacional de Mooney-Rivlin.(SHI 2009). Sendo que nos resultados de SHI, para pequenas deformações as curvas possuem características de uma parabolóide, observa-se boa sobreposição apenas para pequenas deformações. Na tabela 10 temos um resultado semelhante. A sobreposição é excelente apenas para pequenas deformações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo analítico e experimental de membranas e biomembranas são vastos, possuindo aplicações em vários campos da engenharia, bioengenharia e biofísica, como já falamos. As medidas experimentais realizadas nesta dissertação permitiram verificar que, para membranas elásticas fixadas a uma borda circular e preenchidas ou não com líquido, as soluções analíticas foram validadas pelos dados experimentais, considerando a precisão de milímetros dos instrumentos de medidas utilizados.

No desenvolvimento do trabalho, após a realização de testes com várias montagens experimentais e procedimentos de medida, foi construído aparato experimental para deformação de membranas elásticas circulares preenchidas ou não com líquido.

O Procedimento de Aquisição e Análise de Imagens – PAAI estabelecido no trabalho demonstra que a análise de experimentos com a utilização de imagens de câmeras digitais é técnica válida, como demonstraram também Gil *et al.* 2006. O PAAI também mostrou sua utilidade na análise de dados experimentais de outros autores apresentados em artigos científicos, como os de Selvadurai 2006 que analisamos e conseguimos realizar a validação. É importante observar que na avaliação de objetos 3D através de fotografias, deve-se ter atenção quando na determinação dos pontos de referência utilizados para definir a escala no plano de análise.

O trabalho também contribui com o estudo analítico da deformação de membranas, ao determinar as soluções analíticas com realismo físico para a deformação de membranas nas situações problema analisadas.

Como perspectiva futura, existe a necessidade de aplicação das soluções analíticas em pesquisas desenvolvidas pelo grupo de biomateriais do programa de pós-graduação em Ciências de Materiais da Faculdade UnB Planaltina, estando também, estas soluções, disponíveis para pesquisadores de outros campos. No desenvolvimento do trabalho verificamos que a importância do estudo da deformação de membranas fixada a uma borda circular-líquido e a deformação de membranas fixada a uma borda circular, que representam situações físicas diferentes. A linha de pesquisa em membranas possui várias vertentes para investigação abrindo perspectivas para análises matemáticas, simulações computacionais e aplicações diversas em biomateriais, bioengenharia e engenharias afins, em especial na área de inflação de membranas.

REFERÊNCIAS

ATKIN, R. J.; FOX, N. **An introduction to the theory of elasticity**. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2013.

BALANIUK, R.; COSTA, I. **3D simulation of reconstructive breast surgery**. 2nd Workshop on Computer Assisted Diagnosis and Surgery., 2006.

BARATA, J.; CARLOS ALVES, **curso de física-matemática**, versão de 27 de junho de 2014, 2111 páginas, Departamento de Física-Matemática, USP, São Paulo. Brasil. Disponível em: denebola.if.usp.br, acesso em: 14 de outubro de 2014.

BRONSON, R. **Moderna introdução às equações diferenciais**. São Paulo: Mc Graw-Hill, 1998. 367 p.

BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1978. 725 p.

CALLISTER JR., W. D. **Materials Science and Engineering**. 7. ed. New York: John Wiley & Sons, 2007.

COSTA, I. F. **Bisturis Virtuais.**, v. 40, p. 79-81, 2007.

COSTA, I. F. **Simulador para análise de mamogramas e cirurgia guiada por imagens em seios**. Brasília: Projeto de Pesquisa para Edital MCT/CNPq 14/2010 - Universal - Faixa A, 2010.

COSTA, I. F. **A novel deformation method for fast simulation of biological tissue formed by fibers and fluid**. Medical image analysis., v. 16, n. 5, p. 1038-1046, 2012.

COSTA, I. F.; BALANIUK, R. **LEM - An approach for real time physically based soft tissue simulation**. International Conference Robotics and Automation, p. 2337-2343, 2001.

COSTA, R. S. **Deformação de biomembranas com retorno de força para treinamento médico em realidade virtual**. Universidade de Brasília: Dissertação (Mestrado) - Faculdade UnB Planaltina, 2013.

COSTA, R. S.; COSTA, I. F. **Deformação de biomembranas com retorno de força para treinamento médico em realidade virtual**. XXIII Congresso Brasileiro em Engenharia Biomédica, 2012.

COTIN, S.; DELINGETTE, H.; AYACHE, N. **Real-time elastic deformations of soft tissues for surgery simulation**. Visualization and Computer Graphics, v. 5, n. 1, p. 62-73, 1999.

COTIN, S.; DELINGETTE, H.; AYACHE, N. **A hybrid elastic model for real-time cutting, deformations, and force feedback for surgery training and simulation**, v. 16, p. 437-452, 2000.

DIETER, G. E. **Engineering Design - a materials and processing approach**. 2. ed. New York: McGraw- Hill, 1983.

DUFFY, D. G. **Green's functions with applications**. [S.l.]: CRC Press, 2001.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Feynman Lições de Física**, Bookman, Porto Alegre, 2008

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures On Physics, Volume II: Mainly Electromagnetism and Matter**. [S.l.]: [s.n.], 1964.

GARABEDIAN, P. R. **Partial Differential Equations**. New York: Wiley, 1964.

G. B. Oliveira Filho, A. M. Maroja, R. S. Costa, I. F. Costa; **Deformação de Membranas Para Uso em Sistemas de Simulação: Uma Validação Experimental de Soluções Analíticas com Realismo Físico**, Área Universitária nº1, Vila Nossa Senhora de Fátima, CEP 73345-010 Planaltina-DF - geraldobarbosa65@gmail.com, 2014.

GIL, S; REISIN, H.D; RODRÍGUEZ, E. E.; **Using a digital câmara as a measuring device**. Am. J. Phys. 74 (9), September 2006. American Association of Physics Teachers.

GREEN, G. **Oxford Dictionary of National Biography**, 2004. Disponível em: <<http://www.oxforddnb.com/view/article/11381>>. Acesso em: 05 maio 2014.

HAN, L.; HIPWELL, J.R.; TANNER, C.; TAYLOR, Z.; MERTZANIDOU, T.; CARDOSO, J.; OUSELIN, S.;

HAWKES, D. J.; **Development of patient-specific biomechanical models for predicting large breast deformation**. Physics in medicine and biology., v. 57, n. 2, p. 455, 2012.

JEF AERNOUTS; DIRCKX, JORIS J. J.; **Determination of dynamic tympanic membrane elasticity using an indentation setup**, Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2011, Leuven, Belgium, 4 – 6. July 2011. Pag. 2589

KERSALÉ, E. **Analytic Solutions of Partial Differential Equations**, 2003/2004. Disponível em: <http://www1.maths.leeds.ac.uk/~kersale/Teach/M3414/Notes/m3414_2.pdf>. Acesso em: 21 fev. 2014.

KLETTE, R.; KARSTEN, S.; ANDREAS, K. **Visão Computacional: Dados tridimensionais a partir de imagens**. Cingapura: Springer, 1998.

LOTTI, R. S.; MACHADO, A. W.; MASSIEIRO, E. T.; JÚNIOR, J. L.; **Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos**. Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial, Maringá, v. 11, n. 2, Mar./Apr. 2006.

MAROJA, A. M.; COSTA, I. F.; ENDERS NETO, B. G. **Physically based analytical solution enables fast membranes deformation for surgery simulation systems.** XXXIV Encontro Nacional de Física da Matéria Condesada, Foz do Iguaçu, 2011.

MARTINS, A. X. B. **Estudo numérico do ensaio de dureza com indentador Knoop.** Universidade de Coimbra: Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Mecânica, 2012.

MEIER, U.; LÓPEZ, O.; MARSERRAT, C.; JUAN, M. C.; ALCAÑIZ, M.; **Real-time deformable models for surgery simulation: a survey.** *Computer methods and programs in biomedicine*, v. 77, n. 3, p. 183-197, 2005.

MURNAGHAN, F. D. **Finite deformations of an elastic solid.** *American Journal of Mathematics*, p. 235-260, 1937.

OLIVEIRA, M. F. D. **O método dos elementos de contorno para a análise de fluco de calor unidimensional.** Universidade Federal do Paraná: Dissertação (Mestrado) - Métodos Numéricos em Engenharia, 2012.

PALOMAR, A. P. D.; CALVO, B.; LOPEZ, J.; DOBLARÉ, M. ; **A finite element model to accurately predict real deformations of the breast.** *Medical Engineering & Physics*, v. 30, p. 1089-1097, 2008.

PAMPLONA, D. C.; VELLOSO, R. Q.; RADWANSKI, H. N. **On skin expansion.** *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*. (2014) 655 - 662.

PATIL, A.; DASGUPTA, A. **Finite inflation of an inically stretched hyperelastic circular membrane.** *European Journal of Mechanics A/ Solids*, n. 41, p. 28-36, 2013.

PAVARINI, L. **Estudo e Implementação do Método Massa-Mola para Deformação em Ambientes Virtuais de Treinamento Médico usando a API Java 3D.** Marília: Dissertação (Mestrado), 2006.

PRASAD, P.; RAVINDRAN, R. **Partial Differential Equations.** New Delhi: Wiley Eastern, 1985.

SARDINHA, A. G. D. O. **Abordagem inicial da aquisição e deformação de modelos de mamas em tempo real.** Universidade de Brasília: Dissertação (Mestrado) - Faculdade UnB Planaltina, 2013.

SELVADURAI, A. P. S. **Deflections of a rubber membrane.** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*, v. 54, n. 6, p. 1093-1119, 2006.

SHI, M. Q. **Deformation of rubber membranes subjected to fluid loadings.** *Masters Abstracts International*, 2009.

WILLIAMS, W. E. **Partial Differential Equations.** Oxford: University Press, 1980.

ZYGANITIDIS, C.; BLIZNAKOVA, K.; PALLIKARAKIS, N. **A novel simulation algorithm for soft tissue compression.** Medical & biological engineering & computing, v. 45, n. 7, p. 661-669, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A - O SOFTWARE LIVRE PLOT DIGITIZER

O programa *Plot Digitizer* foi desenvolvido pelo Departamento de Física da Universidade do Sul do Alabama, Estados Unidos, pelos especialistas Michael Boleman, Peter Ronhovde e Justin Sanders⁷. O *Plot Digitizer* é um programa Java usado para digitalizar dados funcionais a partir de um gráfico impresso ou de uma imagem. Os dados são apresentados em relatórios e referências, como o gráfico X-Y funcional de dispersão ou gráficos de linha. A fim de usar estes dados, eles devem de alguma forma ser digitalizado. Este programa permite que a partir uma imagem digitalizada (no formato GIF, JPEG ou PNG) se obtenha rapidamente valores digitados na tela, bastando clicar com o mouse em cada ponto da imagem. Os números podem ser salvos em um arquivo de texto. Este Programa permite a análise de dados com escala linear e logarítmica. Além digitalizar pontos fora do gráfico de dados, este programa pode ser usado para digitalizar outros tipos de dados digitalizados, como desenhos em escalas ou fotos.

O Programa possui muitos recursos úteis, por exemplo, é possível recalibrar o eixo x, e se pode inserir pontos entre dois pontos já digitalizados com o botão direito, podemos excluir pontos, clicando com o botão direito sobre os pontos, mover pontos clicando e arrastando, calcular a área de um polígono digitalizado, ampliar as imagens ou diminuí-las, salvar calibrações. O Programa possui a capacidade de digitalizar automaticamente as linhas do gráfico, o usuário simplesmente indica que a linha está em uma área definida e o programa classifica automaticamente os dados. Esta característica de auto-digitalização depende da instalação de um software auxiliar chamado *autotrace*.

O Programa *Plot Digitizer* é um software livre, podendo ser distribuído, e também modificado sob os termos da *GNU General Public License* da *Free Software Foundation (FSF)*.

⁷ Michael Boleman et al.; Plot Digitizer, Version 2.0, Department of Physics, University of South Alabama, November, 2002 – September, 2011.

APÊNDICE B: Modelos de relatórios de medida: membrana elástica fixada a uma borda circular. A fórmula de u_d (teo) conforme a equação 29. Medida realizada em 06/06/20014, $u_0=-2,48\text{cm}$ e $x_0=0,20\text{cm}$.

B

Medida	x	ud(exp)	ud(teo)	Erro Absoluto
1	5,10439	-0,36575	-0,34188	0,0239
2	4,96912	-0,40185	-0,37982	0,0220
3	4,87074	-0,42592	-0,40806	0,0179
4	4,76618	-0,44397	-0,43869	0,0053
5	4,62476	-0,48007	-0,48119	0,0011
6	4,53871	-0,51016	-0,50767	0,0025
7	4,42804	-0,54024	-0,54247	0,0022
8	4,32357	-0,58236	-0,57611	0,0063
9	4,20674	-0,61244	-0,61467	0,0022
10	4,10843	-0,65456	-0,64795	0,0066
11	3,94863	-0,71473	-0,70372	0,0110
12	3,80115	-0,77490	-0,75716	0,0177
13	3,69046	-0,79897	-0,79861	0,0004
14	3,56141	-0,85312	-0,84848	0,0046
15	3,45081	-0,90125	-0,89263	0,0086
16	3,35860	-0,93134	-0,93049	0,0009
17	3,26031	-0,97947	-0,97195	0,0075
18	3,19887	-1,00955	-0,99849	0,0111
19	3,12513	-1,03964	-1,03098	0,0087
20	3,03912	-1,08176	-1,06983	0,0119
21	2,90390	-1,12989	-1,13306	0,0032
22	2,81789	-1,17201	-1,17475	0,0027
23	2,69498	-1,22014	-1,23647	0,0163
24	2,59671	-1,27430	-1,28776	0,0135
25	2,47384	-1,33446	-1,35451	0,0201
26	2,36328	-1,39463	-1,41729	0,0227
27	2,24650	-1,43675	-1,48665	0,0499
28	2,18514	-1,48489	-1,52445	0,0396
29	2,08073	-1,54505	-1,59109	0,0460
30	1,97635	-1,61124	-1,66086	0,0496
31	1,89034	-1,65336	-1,72095	0,0676
32	1,81056	-1,71353	-1,77895	0,0654
33	1,71226	-1,76166	-1,85371	0,0920
34	1,62639	-1,83988	-1,92225	0,0824
35	1,55273	-1,89403	-1,98369	0,0897
36	1,46068	-1,96623	-2,06424	0,0980
37	1,38090	-2,02640	-2,13778	0,1114
38	1,28269	-2,09860	-2,23362	0,1350
39	1,20917	-2,18886	-2,30964	0,1208
40	1,11110	-2,29716	-2,41752	0,1204
41	1,02525	-2,38140	-2,51884	
42	0,88385	-2,42351	-2,70241	
43	0,72390	-2,44156	-2,94160	
44	0,58241	-2,45961	-3,19078	
45	0,31164	-2,46563	-3,82819	
46	0,17624	-2,46563	-4,28989	
47	0,09003	-2,45360	-4,68097	
48	0,00395	-2,47767	-5,21029	
49	-0,16837	-2,47767	-8,01437	
50	-0,38378	-2,47767	-5,36431	
51	-0,54997	-2,47165	-4,39363	
52	-0,71619	-2,45961	-3,80752	
53	-0,87007	-2,45360	-3,41371	
54	-1,00547	-2,45360	-3,13574	
55	-1,11014	-2,44156	-2,95110	
56	-1,19637	-2,42351	-2,81424	
57	-1,31340	-2,39945	-2,64625	
58	-1,38730	-2,38741	-2,54899	
59	-1,52323	-2,24301	-2,38487	0,1419
60	-1,58502	-2,17682	-2,31573	0,1389
61	-1,67765	-2,09259	-2,21763	0,1250
62	-1,75785	-2,03844	-2,13750	0,0991
63	-1,83817	-1,95420	-2,06126	0,1071
64	-1,91838	-1,90005	-1,98873	0,0887
65	-2,04185	-1,79776	-1,88340	0,0856
66	-2,15903	-1,73158	-1,78972	0,0581
67	-2,25155	-1,67742	-1,71960	0,0422
68	-2,33793	-1,61726	-1,65690	0,0396
69	-2,43654	-1,58116	-1,58832	0,0072

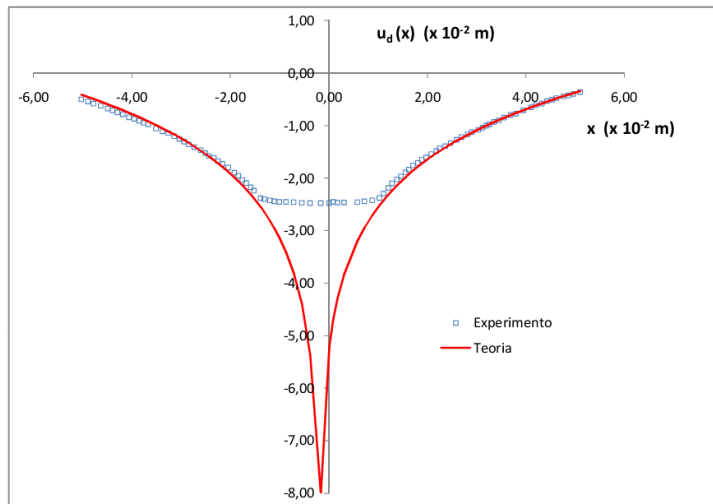
G

Parâmetros	
-0,26	ucor
-2,48	u0
1,25	a
6,5	b
-0,2	x0
1,05	x0+a
-1,45	x0-a
2,5	2a=2,5

Erro Absoluto	
0,050	MÉDIA
0,041	DVP
0,142	MÁXIMO
0,00036	MÍNIMO

Fórmula de u_d (teo) para primeira linha da tabela

$$u_d(\text{teo}) = 2 \cdot G \cdot S^5 \cdot (-\text{LN}((B^2 - G \cdot S^8)^2) + \text{LN}((B^2 \cdot G \cdot S^8 - G \cdot S^7)^2 / G \cdot S^7^2)) / (-2 \cdot \text{LN}(G \cdot S^6)^2) + \text{LN}((G \cdot S^8)^2 - G \cdot S^7^2 + G \cdot S^8 \cdot G \cdot S^6)^2 / G \cdot S^7^2 + \text{LN}((G \cdot S^8^2 - G \cdot S^7^2 - G \cdot S^8 \cdot G \cdot S^6)^2 / G \cdot S^7^2)$$



Medida	x	ud(exp)	ud(teo)	Erro Absoluto
70	-2,51059	-1,52700	-1,53876	0,0118
71	-2,60311	-1,47285	-1,47900	0,0062
72	-2,73258	-1,41268	-1,39909	0,0136
73	-2,84356	-1,35853	-1,33373	0,0248
74	-2,93605	-1,31040	-1,28131	0,0291
75	-3,03472	-1,25625	-1,22727	0,0290
76	-3,13955	-1,20209	-1,17186	0,0302
77	-3,26284	-1,14794	-1,10912	0,0388
78	-3,37991	-1,11184	-1,05182	0,0600
79	-3,50935	-1,05769	-0,99083	0,0669
80	-3,66966	-0,97947	-0,91847	0,0610
81	-3,76209	-0,94939	-0,87822	0,0712
82	-3,84838	-0,91329	-0,84157	0,0717
83	-3,95317	-0,87117	-0,79819	0,0730
84	-4,05788	-0,84710	-0,75601	0,0911
85	-4,18119	-0,78693	-0,70776	0,0792
86	-4,29211	-0,75083	-0,66559	0,0852
87	-4,39071	-0,71173	-0,62904	0,0857
88	-4,48932	-0,67863	-0,59331	0,0853
89	-4,63107	-0,62448	-0,54335	0,0811
90	-4,77894	-0,58236	-0,49286	0,0895
91	-4,88985	-0,54626	-0,45603	0,0902
92	-5,02540	-0,50414	-0,41215	0,0920



APÊNDICE C: Modelo de relatório de medida: membrana elástica fixada a uma borda circular-líquido. A fórmula de u_T (Teo) corresponde a equação 34. Medida de 06/06/20014, $u_{d0}=-3,62$ cm , $u_{o0}=-1,8$ cm e $x_0=0,20$ cm.

B

Medida	x	uT(exp)	uT(teo)	Erro Absoluto
1	2,41667	-0,64636	-0,58352	0,0628
2	2,36260	-0,67909	-0,62285	0,0562
3	2,28691	-0,71182	-0,68038	0,0314
4	2,21122	-0,77182	-0,74093	0,0309
5	2,16257	-0,79909	-0,78153	0,0176
6	2,08688	-0,86455	-0,84746	0,0171
7	2,03281	-0,92455	-0,89671	0,0278
8	1,96793	-0,97909	-0,95832	0,0208
9	1,92468	-1,02273	-1,00099	0,0217
10	1,87062	-1,07182	-1,05620	0,0156
11	1,82196	-1,12091	-1,10778	0,0131
12	1,77871	-1,15909	-1,15518	0,0039
13	1,74627	-1,19727	-1,19175	0,0055
14	1,69761	-1,24091	-1,24829	0,0074
15	1,66518	-1,28455	-1,28715	0,0026
16	1,63274	-1,32273	-1,32700	0,0043
17	1,59489	-1,36636	-1,37478	0,0084
18	1,55705	-1,41000	-1,42400	0,0140
19	1,51920	-1,45909	-1,47474	0,0157
20	1,48136	-1,51364	-1,52706	0,0134
21	1,44351	-1,56818	-1,58105	0,0129
22	1,41648	-1,61182	-1,62067	0,0089
23	1,38404	-1,66091	-1,66945	0,0085
24	1,35701	-1,71545	-1,71115	0,0043
25	1,32457	-1,77000	-1,76253	
26	1,28673	-1,82455	-1,82439	
27	1,22185	-1,86818	-1,93560	
28	1,12453	-1,90636	-2,11602	
29	1,011	-1,91182	-2,35066	
30	0,913684	-1,91727	-2,57698	
31	0,837994	-1,92818	-2,77264	
32	0,746085	-1,92818	-3,03868	
33	0,610925	-1,93364	-3,50487	
34	0,410887	-1,94455	-4,46465	
35	0,178412	-1,95000	-6,72809	
36	0,078113	-1,95000	-10,06266	
37	-0,124348	-1,95000	-6,05665	
38	-0,34601	-1,95545	-4,26048	
39	-0,594705	-1,94455	-3,20146	
40	-0,789336	-1,93909	-2,63472	
41	-0,946122	-1,92818	-2,27125	
42	-1,05966	-1,90091	-2,04472	
43	-1,12453	-1,87909	-1,92647	
44	-1,16238	-1,84636	-1,86080	
45	-1,184	-1,79727	-1,82431	
46	-1,21104	-1,74818	-1,77968	0,0315
47	-1,23266	-1,70455	-1,74477	0,0402
48	-1,25429	-1,66091	-1,71051	0,0496
49	-1,29213	-1,61727	-1,65212	0,0349
50	-1,31916	-1,57909	-1,61157	0,0325
51	-1,36242	-1,53000	-1,54857	0,0186
52	-1,38404	-1,47545	-1,51792	0,0425
53	-1,41107	-1,45364	-1,48037	0,0267
54	-1,45433	-1,39364	-1,42195	0,0283
55	-1,49217	-1,35000	-1,37249	0,0225
56	-1,52461	-1,30636	-1,33124	0,0249
57	-1,55705	-1,29000	-1,29102	0,0010
58	-1,57327	-1,25727	-1,27128	0,0140
59	-1,62192	-1,21364	-1,21352	0,0001
60	-1,65436	-1,18091	-1,17616	0,0048
61	-1,69761	-1,14273	-1,12773	0,0150
62	-1,73005	-1,11000	-1,09240	0,0176
63	-1,7679	-1,07182	-1,05222	0,0196
64	-1,80574	-1,04455	-1,01313	0,0314
65	-1,86521	-0,98455	-0,95379	0,0308
66	-1,92468	-0,93546	-0,89688	0,0386
67	-1,97875	-0,89727	-0,84714	0,0501
68	-2,022	-0,85364	-0,80868	0,0450
69	-2,05984	-0,83182	-0,77594	0,0559

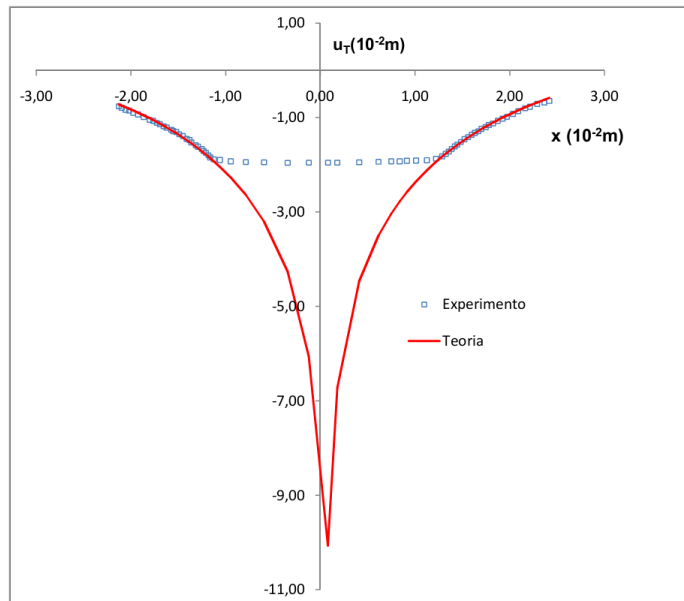
J

Parâmetros	
0,15	u _{cor}
-1,8	u ₀₀ com água
-3,62	u _{d0} sem água
1,25	a
6,5	b
0,05	x ₀
1,3	x ₀ +a
-1,2	x ₀ -a
2,5	2a=2,5

Erro Absoluto	
0,0238	MÉDIA
0,0162	DVP
0,0628	MÁXIMO
0,0001	MÍNIMO

Fórmula de $u_T(teo)$ para primeira linha da tabela

$$u_T(x) = (J\$5 - J\$6) / (J\$8^2 - J\$7^2) * (J\$8^2 - B3^2) - 2 * J\$6 * (LN((-B3 + J\$9)^2) - LN((J\$8^2 - B3 * J\$9)^2 / J\$8^2)) / (-2 * LN(J\$7^2) + LN((J\$8^2 - J\$9^2 - J\$9 * J\$7)^2 / J\$8^2) + LN((J\$8^2 - J\$9^2 + J\$9 * J\$7)^2 / J\$8^2))$$



APÊNDICE D - GLOSSÁRIO

1. Indentação

(in.den.ta.ção)

sf.

1. Ação ou resultado de indentar.
2. Pressão que forma uma cavidade de pequena profundidade em uma superfície (força de indentação).
3. Med. Depressão resultante da pressão feita em um tecido ou órgão mole.
4. Inf. Inserção de espaços, parágrafos etc. em um código de linguagem de programação.

[Pl.: -ções.]

[F.: Do ing. *indentation*.]

Disponível em: <<http://aulete.uol.com.br/indentacao>>. Acesso em: 24 jan. 2014.

2. Histerese

(his.te.re.se)

sf.

1. Fís. Situação ou fenômeno em que as propriedades de um sistema dependem de seu histórico ou da variação das propriedades de outro sistema.
2. Inf. Atraso na resposta de um sistema em função da variação no valor do sinal.

[F.: Do ing. *hysteresis*, cunhado a partir do gr. *hystéresis*, *eos*, 'falta'; 'atraso'; 'penúria', pelo físico J. A. Ewing (1855-1935).]

Disponível em: <<http://aulete.uol.com.br/histerese>>. Acesso em: 24 jan. 2014.

3. Procedimento invasivo

São aqueles que provocam o rompimento das barreiras naturais ou penetram em cavidades do organismo, abrindo uma porta ou acesso para o meio interno. Por exemplo, punção venosa e angioplastia são procedimentos médicos invasivos.

Disponível em: <<http://aulete.uol.com.br/invasivo>>. Acesso em: 02 mai. 2014.

4. Procedimentos não invasivos

Os procedimentos que não envolvem instrumentos que rompem a pele ou que penetram fisicamente o corpo são considerados procedimentos não-invasivos. Por exemplo, raios X, exame oftalmológico padrão, tomografia computadorizada,

ressonância magnética, auxílio auditivo, monitor Holter, talas externas, gessos, ECG e auscultação do tórax são exemplos de procedimentos não-invasivos.

Disponível em: <<http://clinicacostantini.com.br/noticias04.htm>>. Acesso em: 02 mai. 2014.