

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

**Modelagem, análise matemática e  
validação experimental *in vitro* da  
fonação**

por

Kélem Gomes Lourenço

Brasília  
2013

*On ne voit bien qu'avec le coeur.  
L'essentiel est invisible pour les yeux.*  
Antoine de Saint-Exupéry

## AGRADECIMENTOS

*“O Senhor é o meu pastor, nada me faltará”*. Salmos 23:1

Agradeço a Deus, minha fonte de sabedoria e inspiração.

À minha família amada, que são os meus pilares e a minha fortaleza...

Ao Lucero, por sua orientação e por acreditar em mim até mais do que eu mesma acreditava.

Aos meus queridos amigos agradeço pelas palavras de incentivo e a ajuda indispensável que me proporcionaram.

Aos professores da UFG de Goiânia e da UnB, que contribuíram substancialmente para minha formação profissional.

Aos membros que compuseram a minha banca de doutorado por suas valiosas observações e sugestões.

Je remercie Xavier Pelorson pour m’avoir permis de réaliser une partie de cette thèse dans les meilleures conditions possibles au Gipsa Lab, Grenoble-France.

Je ne peux pas oublier de remercier mes amis du labo. je vous remercie pour l’accueil que vous m’avez réservé.

Aos funcionários do MAT/UnB e a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq, à CAPES e ao programa Erasmus Mundus pelo suporte financeiro.

---

# RESUMO

A fonação é resultado de uma complexa interação entre o fluxo de ar vindo dos pulmões, dos tecidos deformáveis que constituem as pregas vocais e de ondas de pressão acústica. Para modelar essa interação são necessários três componentes que representam a biomecânica dos tecidos, a aerodinâmica do fluxo de ar, e a propagação de ondas acústicas no trato vocal. Nesta tese, modelos matemáticos simples são utilizados para analisar, teoricamente e experimentalmente, os mecanismos do processo da fonação. Especificamente, a análise considera as condições limiares para o início e fim da fonação, o efeito do acoplamento acústico entre as pregas vocais e o trato vocal, e a consequência de uma obstrução do fluxo de ar no extremo do trato vocal. Os resultados teóricos são validados usando dados colhidos de uma réplica mecânica das pregas vocais.

Palavras-chave: acoplamento acústico; análise matemática; bifurcação; pregas vocais; frequência de oscilação; histerese; modelagem; pressão limiar.

---

# ABSTRACT

The phonation is the result of a complex interaction between the flow of air from the lungs, deformable tissue that constitutes the vocal cords and the acoustic pressure waves. In order to model this interaction, three components which represent the tissue biomechanics, aerodynamics air flow, and the propagation of acoustic waves in the vocal tract, are required. In this thesis, simple mathematical models are used to analyze, theoretically and experimentally, the mechanisms of the process of phonation. Specifically, the analysis considers the threshold conditions for the beginning and end of the phonation, the effect of acoustic coupling between the vocal cords and the vocal tract, and the consequence of an obstruction of airflow in the extreme vocal tract. The theoretical results are validated using data collected from a mechanical replica of the vocal cords.

Keywords: acoustical coupling; mathematical analysis; bifurcation; vocal cords; oscillation frequency, hysteresis, modeling, pressure threshold.

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelagem matemática da vibração das pregas vocais</b>	<b>14</b>
1.1 Introdução . . . . .	14
1.2 Equação de movimento das pregas vocais . . . . .	15
1.3 Aerodinâmica glotal . . . . .	17
1.3.1 Teoria de Bernoulli . . . . .	18
1.4 Propagação de ondas acústicas no trato vocal . . . . .	23
1.5 Equações gerais do modelo . . . . .	26
1.6 Simplicação para uma equação de Van der Pol . . . . .	26
1.7 Solução das equações e retrato de fase . . . . .	27
1.7.1 Solução para $\tau$ suficientemente pequeno . . . . .	28
1.7.2 Solução para $\tau$ qualquer . . . . .	30
<b>2 Análise de estabilidade e bifurcações</b>	<b>35</b>

2.1	Ponto de equilíbrio e estabilidade . . . . .	35
2.2	Bifurcação de Hopf . . . . .	37
2.3	Balanço harmônico . . . . .	40
2.3.1	Histerese oscilatória . . . . .	45
2.3.1.1	Bifurcação sela-nó entre ciclos limite . . . . .	46
2.3.1.2	Extensão do modelo . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Réplica mecânica</b>	<b>52</b>
3.1	Descrição geral do dispositivo experimental . . . . .	52
3.2	Procedimento experimental . . . . .	57
3.2.1	Resposta mecânica . . . . .	57
3.2.2	Pressão subglotal, abertura entre as pregas vocais da réplica e a frequência de oscilação . . . . .	59
3.3	Influência dos parâmetros . . . . .	62
3.3.1	Efeito da acoplamento acústico . . . . .	63
3.3.2	Influência da variação das características mecânicas . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Análise da interação entre pregas vocais e o trato vocal</b>	<b>67</b>
4.1	Análise da estabilidade do modelo com o trato vocal para obter as condições limiars da vibração . . . . .	67
4.1.1	Posição de equilíbrio . . . . .	68
4.1.2	Linearização do modelo e análise de bifurcação de Hopf . . . . .	69
4.2	Validação do modelo teórico: ajuste aos dados e análise . . . . .	72
4.2.1	Parâmetros da réplica de látex . . . . .	72
4.2.2	Resultados teóricos . . . . .	73

4.2.3	Otimização dos parâmetros . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Extensão do modelo para consoantes oclusivas labiais</b>	<b>77</b>
5.1	Descrição do aparato experimental . . . . .	78
5.1.1	Dados de aquisição . . . . .	78
5.1.2	Dados da pressão limiar . . . . .	81
5.2	Modelo matemático da fonação com os lábios . . . . .	83
5.3	Ajuste dos dados e análise . . . . .	83
<b>6</b>	<b>conclusão</b>	<b>88</b>
<b>7</b>	<b>Implementação</b>	<b>91</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>95</b>

# Lista de Símbolos

## Parâmetros mecânicos:

$M$  massa por unidade de área da superfície média da prega vocal

$K$  constante de rigidez por unidade de área de uma prega vocal

$B$  constante de amortecimento por unidade de área de uma prega vocal

$\hat{C}$  coeficiente de dissipação não linear

$P_c$  pressão interna de água na réplica das pregas vocais

$w_0$  frequência angular natural da ressonância mecânica

$f_0$  frequência de ressonância mecânica

$Q_0$  fator de qualidade de uma ressonância mecânica

$F_0$  frequência fundamental de oscilação

$w$  frequência angular de oscilação

## Parâmetros geométricos:

$A(z, t)$  área num ponto  $z$  da glote

$A_a$  área glotal da borda inferior

$A_b$  área glotal da borda superior

$x_0$  semi-abertura inicial glotal

$L$  largura das pregas vocais

$T$  altura das pregas vocais

$\xi$  deslocamento resultante total, na direção do eixo  $x$

$x$  semi-deslocamento das pregas vocais

---

$A_t$  área da seção do trato vocal

$A$  área no ponto médio da glote

$l$  comprimento do trato vocal

$\tilde{A}$  variação da área glotal

$x^*$  posição de equilíbrio

$h_0$  abertura inicial da réplica das pregas vocais

$A_l$  a área da boca

$Cl$  comprimento dos lábios

$\tilde{W}$  largura dos lábios

### **Parâmetros aerodinâmicos:**

$F_p$  força

$P_g$  pressão média glotal, na altura  $\tilde{g}$  da glote

$P$  pressão do fluido ao longo da glote

$P_a$  pressão do ar na altura  $y = a$  da glote

$P_b$  pressão do fluido na altura  $y = b$  da glote

$v$  velocidade do ar ao longo da glote

$v_a$  velocidade do fluido na altura  $y = a$  da glote

$v_b$  velocidade do fluido na altura  $y = b$  da glote

$\phi$  vazão volumétrica

$P_{sub}$  pressão subglotal

$P_{supra}$  pressão supraglotal

$P_{k2}$  pressão cinética na saída glotal

---

$k_c$  coeficiente de perda de pressão cinética na entrada da glote

$k_e$  coeficiente de recuperação da pressão na saída da glote

$k_t$  coeficiente de pressão transglotal

$\overline{P}_{supra}$  pressão estática supraglotal

$\tilde{P}_{supra}$  pressão acústica supraglotal

$\overline{P}_{sub}$  pressão estática subglotal

$\tilde{u}$  componente de variação da vazão de ar glotal

$u$  vazão na glote

$\bar{v}$  velocidade média

$v_{char}$  coeficiente de velocidade característica

$P_{limiar}$  pressão limiar subglotal

$p$  pressão normalizada

$g$  aceleração gravitacional

$P_{onset}$  pressão limiar no início das oscilações

$P_{offset}$  pressão limiar no fim das oscilações

$k_l$  coeficiente ad hoc de ajuste do fluxo de ar nos lábios

### **Parâmetros acústicos:**

$r$  coeficiente de reflexão

$c_m$  velocidade de onda

$c$  velocidade do som

$p^+$  pressão incidente

$p^-$  pressão refletida

---

$\alpha$  coeficiente de acoplamento

**Grandezas físicas:**

$\tau$  tempo de retardo

$\rho$  densidade

$\rho_0$  densidade do ar sem perturbação

$a$  amplitude de oscilação

**Planos de corte:**

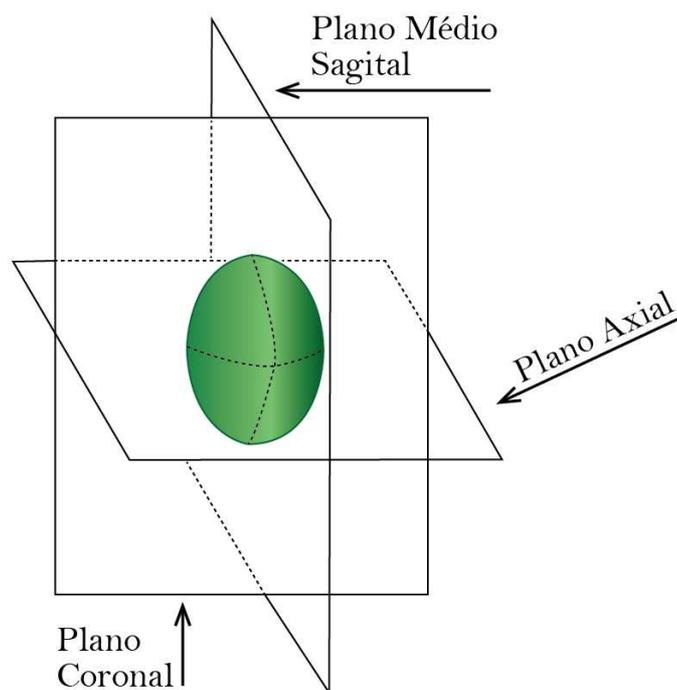


Figura 1: Os planos são usados para descrever a anatomia humana.

---

# INTRODUÇÃO

---

## A fonação

---

A fonação é a produção de uma onda acústica, originada pela vibração das pregas vocais, que é consequência de uma complexa interação entre o escoamento de ar proveniente dos pulmões e a deformação dos tecidos que constitui as pregas vocais. A vibração, por sua vez, modula o fluxo que resulta em uma onda de pressão acústica [70]. O som primário vindo da laringe é alterado conforme a forma do trato vocal, que por ação dos articuladores (língua, lábios e palato), modifica o fluxo de ar, bem como as ressonâncias acústicas [69]. As variedades de timbre entre as vogais são consequências das diferentes configurações geométricas do trato vocal e as consoantes são causadas pelas interrupções ou restrições do fluxo de ar [53]. A Figura 2, apresenta exemplos do posicionamento do trato vocal para a produção das vogais [a], [i] e [u] respectivamente.

Neste trabalho, estudaremos a dinâmica da fonação através de modelos matemáticos que representam a biomecânica dos tecidos, a aerodinâmica do fluxo de ar, e a propagação de ondas acústicas no trato vocal. Os resultados teóricos obtidos por meio de modelos, tais como, as condições limiars para o início e fim da fonação, o efeito do acoplamento acústico entre as pregas vocais e o trato vocal, e a consequência de uma obstrução do fluxo de ar no extremo do trato vocal, são validados usando dados colhidos de uma réplica mecânica das pregas vocais.

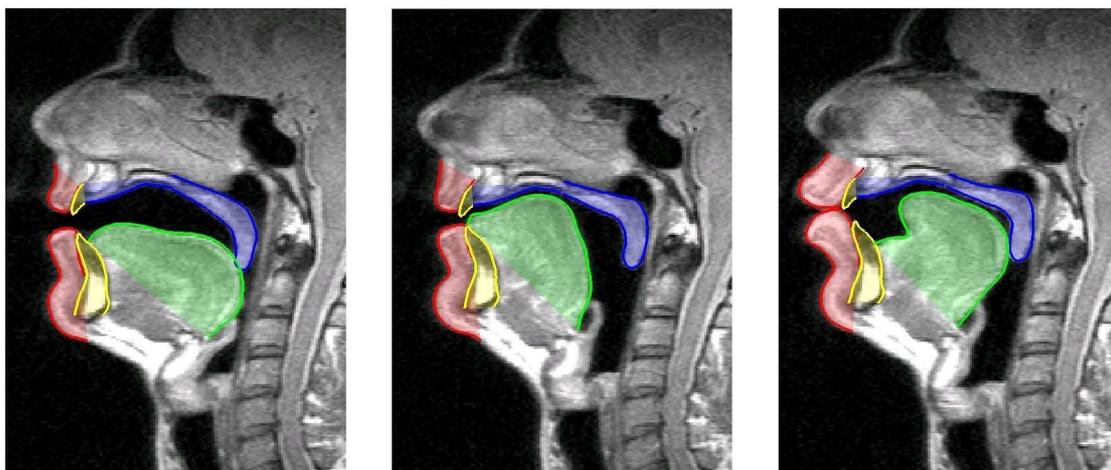


Figura 2: Exemplos de produção de vogais francesas [a], [i] e [u], da esquerda para a direita no trato vocal - Imagem por ressonância 2D magnética (IRM) cedidos pelo departamento GIPSA-Lab, plano sagital.

---

## Fisiologia

---

O aparelho fonador é um refinado instrumento humano, formado pelos pulmões, laringe, faringe, boca e cavidade nasal. A laringe é um órgão curto com altura de aproximadamente de 5cm a 6 cm em adultos. Sua anatomia interna está dividida em três porções:

Região subglotal é a porção mais inferior da laringe, estende-se da borda inferior das pregas vocais até o início da laringe;

Região glotal ou glote, que é o espaço vazio entre as pregas vocais;

Região supraglotal, que compreende a região do bordo superior das pregas vocais até o fim da laringe.

As pregas vocais possuem comprimento de 5 a 17mm, apresentado na Figura (3), são constituídas basicamente por dois elementos: o corpo e cobertura. O corpo é formado pelo músculo vocal e é a parte mais massiva. A cobertura é a mucosa da prega vocal, formada por epitélios e outras camadas de tecido superficial [26, 27]. A cobertura das pregas vocais é extremamente móvel, quando comparada ao corpo da prega vocal, capaz de vibrar sob ação do fluxo aéreo expiratório.

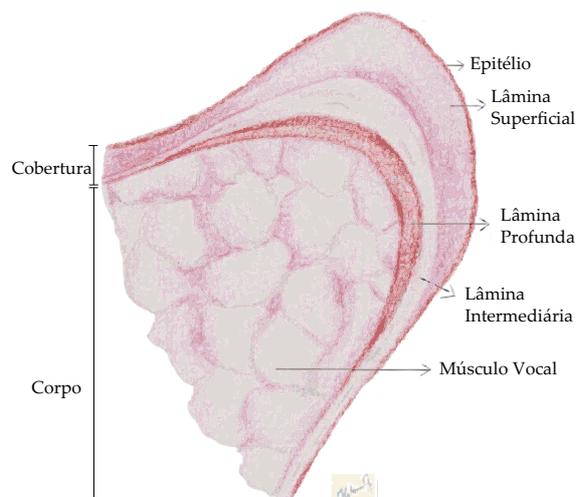


Figura 3: Representação esquemática das pregas vocais (cordas vocais) no plano coronal, como um corpo e cobertura.

Existem dois movimentos para o posicionamento das pregas vocais: abdução e adução. Estes são promovidos através dos músculos intrínsecos da laringe. Para a passagem do ar, em geral, as pregas vocais estão em abdução (abertas). Para que haja produção da voz, é preciso que as pregas vocais estejam em adução (quase fechando a glote). A Figura (4) ilustra a anatomia das pregas vocais no plano axial quando estão completamente abduzidas e aduzidas.



Figura 4: Anatomia das pregas vocais nas configurações de abdução (à esquerda) e adução (à direita). Imagem cedida pela Dr<sup>a</sup> Luciana Miwa Nita Watanabe- otorrinolaringologista.

Os pulmões, além de sua função respiratória, servem como reservatório de ar e fonte de pressão. A diferença de pressão entre os pulmões e o exterior produz o escoamento do ar através do trato vocal. O trato vocal está situado acima da laringe. Localizado na cabeça,

---

este é constituído pela faringe e duas cavidades ressonadoras (nasal e oral). Quando as pregas vocais estão vibrando, as ondas acústicas geradas se propagam nestas cavidades, as quais agem como ressonadores acústicos. A geometria do trato vocal influencia as frequências de ressonância e sobre o sinal acústico. A cavidade oral se modifica devido aos articuladores como a língua, os lábios e a mandíbula [13, 16, 34] .

A interação da pressão pulmonar, das propriedades das pregas vocais e da configuração geométrica do trato vocal produzirá a fonação. A fala resultará da combinação da fonação e a articulação. O mecanismo de produção de som é comum à maioria dos mamíferos, e também aos pássaros canoros [32] que possuem uma fonte de som denominada siringe.

---

## Revisão bibliográfica

---

Em 1988, Titze [64] introduziu um modelo simples para a vibração das pregas vocais, no qual a oscilação é caracterizada como um movimento ondulatório que se propaga ao longo da mucosa no sentido do fluxo de ar. Originalmente, o modelo foi formulado para oscilações de pequena amplitude, desprezando fatores relevantes em grande amplitude, tais como características biomecânicas não lineares do tecido, perda de pressão do ar pela viscosidade do fluxo quando as pregas vocais estão fechando a glote e colisões entre as pregas vocais [31]. Estas condições são válidas para a análise dos mecanismos que causam a oscilação e condições limiaries do início da oscilação. A extensão desse modelo, tais como oscilações em grandes amplitudes foi apresentado posteriormente por diversos autores [31, 38].

Em seu trabalho, Titze [66] mostrou que um valor mínimo positivo de pressão subglotal (pressão limiar de fonação) é necessário para iniciar a oscilação. A pressão limiar de fonação é considerada um parâmetro crítico da aerodinâmica da voz [62] e sua relevância clínica foi investigada em vários estudos [20, 76]. Em trabalhos recentes, [30, 61] discutiu-se que a pressão é um parâmetro difícil de medir nos humanos, visto que a obtenção desses dados demanda meios invasivos. Como alternativa, o valor limiar de fonação do fluxo de ar foi sugerido como um novo parâmetro aerodinâmico.

Vários estudos experimentais da oscilação das pregas vocais [11, 54, 63] têm mostrado que, depois da oscilação iniciada, a pressão subglotal pode ser reduzida sem causar interrupção na fonação. Portanto, duas pressões limiaries diferentes existem: uma pressão

---

limiar para o início (onset) e uma outra menor para encerrar a oscilação (offset). O modelo de Titze, contudo, não é apropriado para estudar o que ocorre depois do início da oscilação, pois o modelo foi construído para pequenas amplitudes. Por exemplo, tomando um valor de pressão subglotal constante acima da pressão limiar do início da oscilação, a oscilação irá crescer em amplitude até atingir a condição de fechamento glotal e a interrupção do fluxo de ar, onde o modelo não será mais válido. Assim, o modelo não é capaz de criar uma oscilação estável com amplitude constante.

Um mecanismo para limitar a amplitude de oscilação foi proposto através de uma descrição mais detalhada da aerodinâmica glotal por Lucero em 1999 [38]. À medida em que a amplitude cresce, o fluxo de ar se separa das paredes das pregas vocais quando o canal glotal é divergente, e as pregas vocais reduzem sua capacidade de absorção de energia do fluxo. Usando esta extensão de grande amplitude, demonstrou-se que o limiar de oscilação pode ser descrito como uma bifurcação de Hopf subcrítica: com o aumento da pressão pulmonar, uma posição de equilíbrio estável torna-se instável e um ciclo limite instável é absorvido. Além disso, o ciclo limite instável coalesce com um ciclo limite estável em uma bifurcação sela-nó. Como resultado, um fenômeno de oscilação de histerese [7] é gerado: o início (onset) da oscilação é produzida em maiores valores de pressão pulmonar que o fim (offset) [38]. Evidências experimentais obtidas em laringes excitadas [11] e modelos físicos da onda de mucosa [71] também mostraram que a pressão subglotal é menor no fim que no início da oscilação.

Uma abordagem diferente para limitar o crescimento da oscilação foi introduzido por Laje et al. [31]. Em vez de modelar fatores individuais, tais como o fluxo de ar de separação [38] e fechamento da glote [17], um termo ad hoc não-linear de amortecimento foi adicionado às equações que representam os fatores não-lineares que aparecem em grandes amplitudes. Este modelo tem sido aplicado com sucesso na análise dos sons em pássaros canoros [4, 32, 33]. Uma análise da sua dinâmica de oscilação indicou que, embora o modelo como originalmente formulado não seja capaz de produzir uma histerese de oscilação, modificações adequadas no termo não linear de amortecimento podem introduzir esse fenômeno [39].

Titze [66] representou a oscilação em termos de uma onda de superfície que se propaga ao longo do canal glotal. Existem modelos que utilizam equações aerodinâmicas mais sofisticadas, semelhante ao modelo de duas massas de pregas vocais [28] e podem ser utilizados para as simulações da oscilação e síntese de voz.

---

Quanto ao efeito do trato vocal, a teoria fonte-filtro (fonte de som e trato vocal) da fonação o considera como um filtro linear excitado pelo som produzido na laringe [19]. Assim a configuração do trato vocal não tem efeito sobre a dinâmica da oscilação vocal. Esta concepção facilita a análise da dinâmica da oscilação, e tem permitido compreender os principais mecanismos subjacentes da fonação [38, 66]. Na verdade, a separação entre a fonte glotal e do trato vocal é uma aproximação razoável, quando a frequência fundamental de oscilação está bem abaixo da primeira frequência de ressonância (primeiro formante) do trato vocal [43]. Quando a frequência da oscilação fica próxima das frequências de ressonância do trato vocal, o acoplamento entre este e a laringe influencia o início da oscilação e pode causar saltos de frequência, sub-harmônicos e outras instabilidades [68].

Em trabalhos recentes, incluindo o acoplamento, a oscilação das pregas vocais tem sido simulada e estudada por meio de réplicas mecânicas [42, 56]. A réplica permite obter mais facilmente dados de diferentes parâmetros (por exemplo, pressão subglotal, abertura das pregas vocais, frequência de oscilação) para uma variedade de configurações (mudando a rigidez das pregas vocais, por exemplo) e estes dados podem ser usados para construir uma teoria de oscilação.

O modelo proposto nesta tese também advém do estudo da produção de som em pássaros. As interações entre a fonte-trato e saltos de frequência também são relevantes no contexto da produção de som em aves [77]. Em aves canoras, o som é produzido na siringe, localizada na junção entre a traqueia e os brônquios. Ao contrário da laringe, a siringe contém duas válvulas, cada uma semelhante à da glote, localizada na saída de cada um dos brônquios. As membranas em cada válvula oscilam com o mesmo mecanismo aeroelástico das pregas vocais. Saltos de frequência são uma assinatura característica de algumas aves canoras, e podem ser produzidos por ação alternada de ambos os lados da siringe [33] ou interação da fonte-trato [6]. A interação foi analisada usando uma versão do modelo da onda de mucosa de Titze [66] acoplado a um modelo do trato vocal. Foi mostrado em [33] que a onda acústica refletida a partir do bico da ave volta para a siringe, interagindo com as oscilações das membranas da siringe, de uma maneira que depende da fase relativa entre eles [6].

A análise entre a fonte-trato é também relevante por suas implicações nos registros vocais, e poucas teorias foram propostas explicando o mecanismo de transição entre os registros modal-falsete, baseadas nas ressonâncias e ações específicas do músculo laringeal [70].

---

Todos os modelos presentes na literatura não analisaram o caso em que o trato vocal está praticamente fechado em um extremo (representando os lábios) [33, 36, 42, 53, 68], como por exemplo, representando o caso de uma consoante oclusiva labial. Bailly [10] apresentou um trabalho sobre a interação aerodinâmica entre as pregas vocais e as bandas ventriculares, para o qual influencia o fluxo glotal e, conseqüentemente a queda de pressão foram avaliados através de um modelo físico com duas massas e experimentos *in vitro*. O efeito produzido é semelhante ao que iremos analisar, pois as bandas ventriculares estudadas possuem uma estrutura similar ao trato vocal considerado praticamente fechado em um extremo.

---

## Contexto do trabalho

---

O objetivo do trabalho é analisar a dinâmica da fonação, considerando o efeito do trato vocal, e validar essa análise utilizando dados obtidos de experimentos realizados com uma réplica do aparelho fonador.

Pretendemos responder algumas perguntas que ainda permanecem não resolvidas a partir dos estudos descritos acima. Uma questão diz respeito à ocorrência de histerese oscilatória em atrasos arbitrários da onda mucosa. A histerese requer uma bifurcação de Hopf subcrítica no início da oscilação, e o tipo de bifurcação depende do tempo de atraso? A pressão de ar no limiar da fonação depende da frequência de oscilação? E, ainda, o modelo consegue exibir dois valores limiares diferentes, para o início e o fim da fonação, respectivamente? O acoplamento do trato vocal influencia a dinâmica do modelo? E se isso ocorre, tem alguma relação com o fluxo de ar e a frequência de oscilação? Se considerarmos o trato vocal quase fechado em um extremo, a pressão subglotal e a frequência de oscilação sofrerão influência? A fonte de todas essas respostas é o modelo que será proposto.

## Principais contribuições

As principais contribuições vislumbradas neste trabalho, discutidas a seguir, referem-se à:

- Apresentação do modelo matemático da fonação e suas extensões (considerando o

---

trato vocal e os lábios);

- Investigação do tipo de bifurcação de Hopf, bifurcação sela-nó entre ciclos limites, efeitos não lineares causados pelo acoplamento acústico, solução numérica da equação funcional;
- Validação dos modelos propostos através de um aparato experimental;
- Previsões teóricas para o modelo de consoantes oclusivas labiais.

Todos esses itens apresentados são essenciais para julgarmos a relevância do modelo.

---

## Organização da tese

---

A esquematização do trabalho tenta obedecer ao eixo geral que encaminha a pesquisa, conforme delineado nas seções anteriores. Após as colocações introdutórias, que permitem descrever o contexto desta tese, o primeiro capítulo fornecerá os detalhes para a modelagem matemática da fonação e as soluções numéricas do modelo considerando dois casos para o atraso de tempo.

A discussão matemática, utilizando análise de sistemas dinâmicos, forma o segundo capítulo do trabalho. A análise de estabilidade e tipos de bifurcações no modelo são feitas, desconsiderando o trato vocal, apresentando técnicas não lineares e os ciclos de histerese.

No terceiro capítulo discorre-se sobre a caracterização do dispositivo e o procedimento experimental utilizado na validação do nosso modelo.

O quarto capítulo contempla a análise da interação entre as pregas vocais e o trato vocal através do modelo teórico e dos dados experimentais.

O quinto capítulo traz uma nova versão teórica ao modelo matemático da fonação, incorporando os lábios ao sistema.

O sexto capítulo relaciona as considerações conclusivas deste estudo, discutindo a validade e as contribuições da tese desenvolvida, quanto ao atendimento dos objetivos definidos, quanto às contribuições científicas do presente trabalho e quanto ao desenvolvimento do trabalho.

---

A implementação criada no Matlab, para o caso do modelo com avanço e atraso de tempo, se encontra no capítulo 7 da tese.

Já o último capítulo engloba informações detalhadas da literatura utilizada, colocadas na forma de referências bibliográficas.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## MODELAGEM MATEMÁTICA DA VIBRAÇÃO DAS PREGAS VOCAIS

---

### 1.1 Introdução

---

O objetivo desse capítulo é entender a dinâmica das pregas vocais a partir de um modelo biomecânico unidimensional. Este modelo é baseado em um oscilador biomecânico que age como fonte de som na fonação. Trabalhos propostos por Titze [64, 67, 66] ofereceram, e ainda hoje oferecem, grandes contribuições ao desenvolvimento da teoria da fonação. Em suas obras, encontramos uma abordagem sobre o processo mecânico da fonação, que serve de referência principalmente para cientistas da fala e da voz, na área de matemática, física e engenharia, assim como para cantores que buscam entender os fenômenos não-lineares que explicam a sua prática.

Uma descrição do processo da fonação em termo de quantidades físicas e fisiológicas permite uma melhor compreensão dos mecanismos da produção de sons. A modelagem matemática da fonação, depende de uma representação matemática das diferentes partes do aparelho fonador e se propõe a interpretar a produção dos sons como resultado da interação entre as pregas vocais, o escoamento de ar glotal e os ressonadores acústicos.

Assim, a modelagem completa da fonação requer uma descrição da estrutura mecânica que representa as pregas vocais, uma descrição do fluxo nas vias aéreas superiores, uma descrição da propagação das ondas acústicas e a descrição dos mecanismos de interação entre cada um desses componentes. Desta forma, a modelagem da fonação pode ser dividida em três subproblemas diferentes. Em primeiro lugar, a modelagem do fluxo da glote que pode ser realizada usando técnicas de mecânica de fluidos, é usada para calcular as forças hidrodinâmicas exercidas sobre as pregas vocais. Em segundo lugar, as oscilações das pregas vocais são produzidas modelando as pregas vocais como um sistema concentrado unidimensional através de um oscilador mecânico massa-mola-amortecedor. Finalmente, o trato vocal funciona como um ressonador acústico que irá amplificar determinadas frequências de ondas geradas por oscilações das pregas vocais. Esses subproblemas serão tratados separadamente, para dar consistência física-fisiológica ao modelo.

---

## 1.2 Equação de movimento das pregas vocais

---

As pregas vocais são representadas por uma estrutura mecânica capaz de entrar em um regime oscilatório. Como uma primeira aproximação, as pregas podem ser consideradas como um oscilador harmônico que sofre uma força devido ao escoamento de ar pela glote. Essa representação oferece a vantagem de caracterizar as oscilações com base em poucos parâmetros, e encontra-se na raiz de muitos trabalhos sobre os movimentos das pregas vocais [37, 66].

O subsistema respiratório produz o fluxo de ar necessário requerido para a vibração das pregas vocais, resultando na produção de som. A pressão do ar faz com que a glote se abra e se feche de maneira cíclica, resultado da competição entre a inércia e a elasticidade das pregas vocais. A Figura 1.1 mostra um esquema simplificado das pregas vocais.

Para modelar a vibração das pregas vocais englobando todas as suas peculiaridades, temos vários problemas, visto que a glote é tridimensional, a parede glotal é deformável de modo assimétrico, o par de pregas vocais não é exatamente constituído por pregas idênticas (pode haver alguma assimetria quanto à largura ou à altura), o trato vocal possui detalhes complexos, etc. A geometria do aparelho fonador seria algo difícil de desenhar, e tornaria o modelo confuso e com uma infinidade de parâmetros se considerássemos todas as suas peculiaridades.

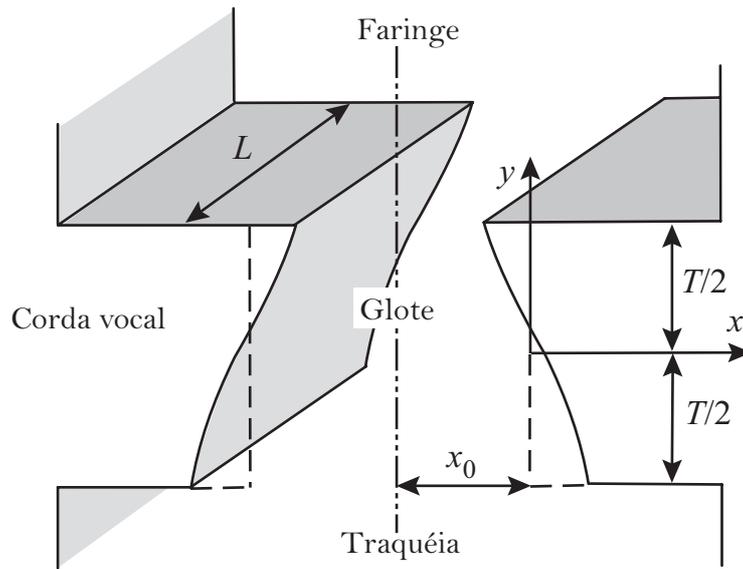


Figura 1.1: Modelo simplificado das pregas vocais [66].

Assumiremos uma estrutura mais simples, em que as não-linearidades do sistema (geometria, viscosidade, colisão abrupta das pregas vocais) serão adicionadas ao mesmo através de um modelo matemático, de forma que as perdas com essa simplificação não sejam significativas. Admitimos que todas as propriedades do tecido estejam concentradas no ponto médio das pregas vocais, ou seja, consideraremos um modelo agrupado. Na Figura 1.2 temos a representação do modelo mecânico unidimensional das pregas vocais.

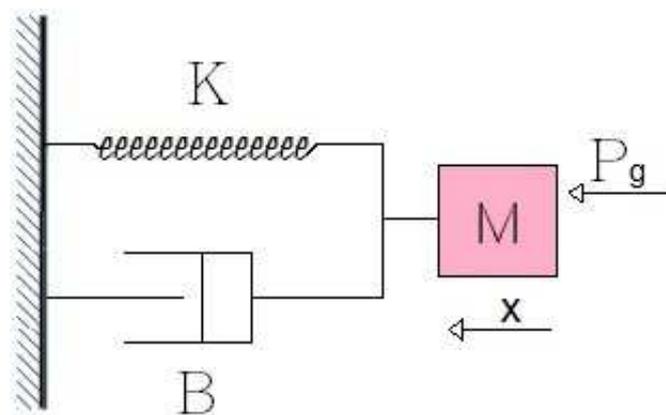


Figura 1.2: Modelo mecânico das pregas vocais.

Consideremos que a região glotal seja um tubo com paredes flexíveis, que pode se

deformar quando o fluxo de ar passa por ele, e cujas seções no plano axial sejam retangulares. Assumiremos que cada prega vocal tem uma massa  $M$ , religada à parede por uma mola de rigidez  $K$  e amortecimento  $B$  por unidade de área da superfície média das pregas vocais. O termo  $x_0$  indica a semi-abertura inicial glotal, ou posição pré-fonatória,  $L$  é a largura da pregas vocais na direção do plano axial e  $T$  é a altura da prega vocal na direção do plano sagital e coronal. Esse modelo permite um grau de liberdade apenas, que é o movimento das pregas vocais em uma direção perpendicular à do escoamento, aqui representado pelo eixo  $x$ .

A geometria associada ao sistema mecânico é importante porque ela está diretamente envolvida no cálculo da força de pressão

$$F_p = F(x, \dot{x}),$$

que iremos calcular posteriormente. Assim, o movimento da prega vocal pode ser expresso através de um simples balanço de forças na direção do movimento, resultando em:

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = F_p, \quad (1.1)$$

em que  $x(t)$  indica o deslocamento do ponto médio da prega vocal.

Incorporamos ao modelo um termo dissipativo não-linear  $\widehat{C}x^2\dot{x}$  seguindo [31]. O termo é necessário para limitar a amplitude de oscilação e produzir um ciclo limite, resultando na equação do movimento da prega vocal

$$M\ddot{x}(t) + B[1 + \eta x^2(t)]\dot{x}(t) + Kx(t) = F_p, \quad (1.2)$$

em que  $\eta = \frac{\widehat{C}}{B}$  e  $\widehat{C}$  é o coeficiente de dissipação não-linear. Esse termo também descreve os efeitos não-lineares da aerodinâmica no canal glotal, a viscoelasticidade dos tecidos e as colisões entre as pregas vocais [33, 38]. Notemos que a equação (1.2) é semelhante à equação de Van der Pol [60], que sob certas condições se resulta no oscilador de relaxamento.

---

## 1.3 Aerodinâmica glotal

---

Durante a respiração, o subsistema respiratório se enche de ar, criando uma diferença de pressão abaixo e acima da glote, causando um escoamento de ar na direção do eixo  $y$

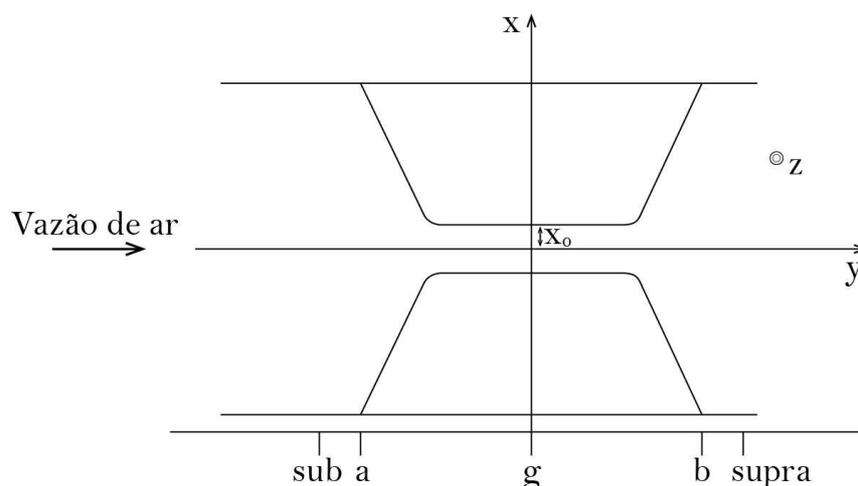


Figura 1.3: Vista geométrica da laringe simplificada, no sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  e variáveis aerodinâmicas do canal do fluxo.

(Figura 1.3). Iremos sintetizar algumas relações importantes, que nos auxiliam na dedução da modelagem aerodinâmica do sistema fonador.

O escoamento de ar na glote é governado pelas equações de Navier-Stokes, que representam o balanço de forças em um elemento fluido, bem como a conservação de massa. Consideraremos um regime de fluxo laminar, isto é, no fluido não há flutuações de velocidade do ar. Suporemos o escoamento incompressível, isto é, localmente admitiremos que a densidade do ar não varia significativamente. A suposição de fluxo incompressível parece inconsistente com a propagação de ondas acústicas do trato vocal. Na verdade, a incompressibilidade do fluxo é local, isto é, em uma escala muito mais curta do que o comprimento de onda acústica.

A seguir, determinaremos relações entre a velocidade do ar e a pressão do escoamento em vários pontos da glote. Para isto, utilizaremos a relação integral de Bernoulli.

### 1.3.1 Teoria de Bernoulli

Vamos considerar que o fluxo na glote se comporta localmente como incompressível, estacionário e isentrópico, isto é, em condições adiabáticas, reversível (a variação de entropia<sup>1</sup> é zero) e sem atrito. Assim, o fluxo de ar através da glote obedece à lei de Bernoulli,

<sup>1</sup>Entropia é uma grandeza termodinâmica que mensura o grau de irreversibilidade de um sistema.

dada por

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho z g = \text{constante}, \quad (1.3)$$

em que  $v$  e  $P$  são a velocidade e a pressão do fluido ao longo da glote, respectivamente,  $g$  é a aceleração gravitacional,  $z$  é a altura na direção da gravidade e  $\rho$  é a massa específica do fluido. Se a laringe estiver posicionada na direção horizontal, referente ao plano axial, a altura  $z$  não irá variar; logo o termo

$$\rho z g, \quad (1.4)$$

que representa a pressão hidrostática, será constante ao longo do canal glotal. Caso a laringe esteja em qualquer outra posição, diferente da horizontal, o valor de  $z$  irá variar e consequentemente a pressão hidrostática não será constante. Porém, pelas dimensões da laringe, a variação de  $z$  é muito pequena (menos de 0,5 cm), e, como o fluido em questão é o ar ( $\rho$  baixo), então esse termo é considerado aproximadamente constante ao longo da glote. Com isso, quando utilizarmos a lei de Bernoulli em dois pontos quaisquer ao longo da glote, a pressão hidrostática pode ser desprezada.

A vazão volumétrica  $\phi$  é definida como sendo a quantidade em volume que escoar através de certa seção em um intervalo de tempo considerado. Ou seja,  $\phi$  é dada por

$$\phi = vA = \text{constante}, \quad (1.5)$$

sendo

$$A = 2L\xi(x, t) \quad (1.6)$$

a área de seção transversal no plano  $xz$ , e  $\xi$  o deslocamento resultante total que ocorre na direção do eixo  $x$  (Figura 1.1). Por outro lado,  $\xi$  é dado por

$$\xi(x, t) = x_0 + x(t), \quad (1.7)$$

em que  $x_0$  é a metade da posição pré-fonatória ou semi-abertura inicial (vide Figura 1.1),  $x(t)$  é o semi-deslocamento das pregas vocais. A partir das equações (1.3) e (1.5), a diferença de pressão entre as duas posições  $a$  e  $b$  (ver Figura 1.3), na passagem do fluxo de ar pela região glotal, é obtida pela expressão

$$P_a - P_b = -\frac{1}{2}\rho(v_a^2 - v_b^2). \quad (1.8)$$

A lei de Bernoulli fornece uma descrição unidimensional do fluxo; assim, as características de pressão e velocidade variam unicamente na direção do escoamento. E como

a região glotal tem seção retangular por hipótese (ver Figura 1.1), com a variação ocorrendo apenas no eixo  $x$ , obtemos uma descrição geométrica determinada unicamente pela variação do deslocamento resultante total  $\xi$  das pregas vocais. Assim, a equação (1.8) fica

$$P_a - P_b = -\frac{1}{2}\rho\phi^2 \left( \frac{1}{A_a^2} - \frac{1}{A_b^2} \right). \quad (1.9)$$

Consideremos as diferenças entre as pressões nas regiões subglotal (denotada por  $P_{sub}$ , no ponto sub em 1.3), intraglotal (denotada por  $P_z$  em qualquer ponto  $z$  na região que se estende de  $a$  até  $b$  em 1.3) e supraglotal (denotada por  $P_{supra}$ , no ponto supra em 1.3). A pressão média glotal é denotada por  $P_g$  e representa a pressão no ponto  $\tilde{g}$  da glote. Consideremos, primeiramente, a relação entre  $P_{sub}$  e  $P_b$ . Pela equação (1.3), temos:

$$P_{sub} + \frac{1}{2}\rho\frac{\phi^2}{A_{sub}^2} = P_b + \frac{1}{2}\rho\frac{\phi^2}{A_b^2}. \quad (1.10)$$

Como o valor de  $A_{sub}$  é suficientemente grande comparado ao valor de  $A_b$ , isto significa que a velocidade do fluxo subglotal é desprezível comparada à velocidade em  $b$ . Logo o segundo termo do lado esquerdo pode ser desprezado, levando (1.10) à simplificação:

$$P_{sub} = P_b + \frac{1}{2}\rho\frac{\phi^2}{A_b^2}. \quad (1.11)$$

Novamente, usamos a equação de Bernoulli entre  $P_b$  e  $P_{supra}$ :

$$P_b + \frac{1}{2}\rho\frac{\phi^2}{A_b^2} = P_{supra} + \frac{1}{2}\rho\frac{\phi^2}{A_{supra}^2}. \quad (1.12)$$

Como anteriormente, a área  $A_{supra}$  é suficientemente grande comparada com  $A_b$  e o segundo termo à direita pode ser desprezado, resultando em,

$$P_b - P_{supra} = -\frac{1}{2}\rho\frac{\phi^2}{A_b^2}. \quad (1.13)$$

Essa expressão e (1.11) precisam ser ligeiramente modificadas. Segundo [29, 64, 67, 72], faremos um ajuste físico necessário, devido a algumas simplificações que foram feitas. Por exemplo, consideraremos que a área da seção transversal da glote é retangular, o que não é verdade. A perda de pressão devido a esta, e outras simplificações, é expressa da seguinte maneira:

$$P_{sub} - P_b = k_c P_{k2}, \quad (1.14)$$

em que  $k_c$  é o coeficiente ad hoc de perda de pressão cinética na entrada da glote para ajustar as condições reais das pregas vocais, e a pressão dinâmica  $P_{k2}$  na saída glotal é dada por

$$P_{k2} = \rho \frac{\phi^2}{2A_b^2}. \quad (1.15)$$

E ainda, temos que:

$$P_b - P_{supra} = -k_e P_{k2}, \quad (1.16)$$

em que  $k_e$  é o coeficiente de recuperação da pressão na saída da glote devido a expansão abrupta da área na saída, que produz um fluxo turbulento, com formação de vórtices e outros efeitos [74, 75].

Por conseguinte, obtemos:

$$P_{sub} - P_{supra} = k_t P_{k2}, \quad (1.17)$$

em que  $k_t = k_c - k_e$  é o coeficiente de pressão transglotal. A pressão média agindo na superfície média da prega vocal, denominada por  $P_g$ , será expressa por:

$$P_g = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(y) dy. \quad (1.18)$$

Pela lei de Bernoulli,

$$P(y) = P_b + \frac{1}{2} \rho \phi^2 \left( 1 - \frac{A_b^2}{A^2(y)} \right). \quad (1.19)$$

Substituindo (1.19) em (1.18), e pelo teorema do valor médio, assumindo

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{(A_b - A_a)}{T}, \quad (1.20)$$

encontramos, após integração:

$$P_g = P_{supra} + \frac{(P_{sub} - P_{supra})}{k_t} \left( 1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e \right). \quad (1.21)$$

Com isto, conseguimos determinar a expressão para a força  $F_p = P_g$  ao longo da glote, já que os parâmetros do modelo estão por unidade de área.

Agora, precisamos encontrar expressões para as áreas  $A_a$  e  $A_b$  que intervêm em (1.21). Para isto, devemos entender um pouco melhor porque a glote tem a área de sua seção

transversal variável. Este fato se deve à propagação de uma onda de deslocamento pela mucosa na glote, denominado de onda mucosa.

O modelo básico do movimento de uma onda que se propaga pela mucosa das pregas vocais foi estabelecido em [66] e encontra-se esquematizado na Figura 1.4. Dentro da glote, a pressão muda de acordo com a área glotal. Conforme mostrado por Hirano [26, 27], a Figura 1.4 mostra um ciclo idealizado da vibração das pregas vocais no plano coronal. De acordo com a equação (1.6), quando a glote está abrindo (abdução), ela tem forma convergente [66], que é o caso dos painéis 1 a 4 da Figura 1.4. Quando a glote fecha (adução), as pregas vocais tem forma divergente, e isto está ilustrado nos painéis 5 e 6 da Figura 1.4. Essa deformação pode ser representada como um movimento ondulatório da superfície da mucosa, se propagando na direção do fluxo de ar [66]. De fato, essas formas, divergente e convergente, ajudam a explicar as variações de pressões que ocorrem na entrada e na saída da glote.

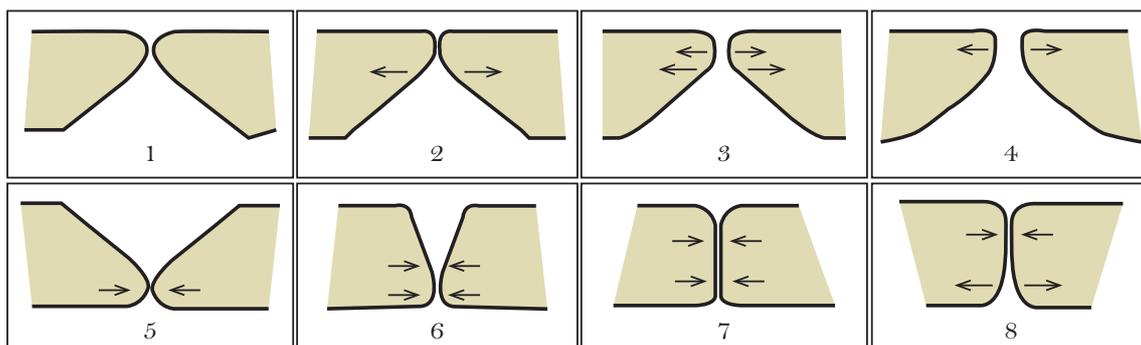


Figura 1.4: Propagação da onda de mucosa, esquema de um ciclo oscilatório, adaptado de Hirano [26, 27].

No modo mais simples, o movimento ondulatório pode ser descrito por uma equação de onda unidimensional, com velocidade de onda  $c_m$ :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c_m^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}. \quad (1.22)$$

Como a onda de superfície na mucosa se propaga na direção do fluxo de ar, a solução de d'Alembert pode ser simplificada e expressa por:

$$x(z, t) = x \left( t - \frac{z}{c_m} \right). \quad (1.23)$$

Esta solução é do tipo onda-viajante, e em um determinado instante  $t$ , podemos determinar a abertura da glote no ponto  $a$  e  $b$  a partir desta solução.

Como admitimos uma estrutura simplificada das pregas vocais, podemos determinar as áreas ao longo do eixo  $z$  na glote à medida em que a onda se propaga pela mucosa. A constante  $x_0$  é acrescentada ao deslocamento  $x(z, t)$ , e assim a área num ponto  $z$  qualquer da glote pode ser expressa como:

$$A(z, t) = 2L(x_0(t) + x(z, t)). \quad (1.24)$$

Quando  $z = -\frac{T}{2}$ , a área glotal da borda inferior é calculada com o valor de  $x_a(t)$ . Este valor pode ser encontrado em termos da solução (1.23) fazendo  $x_a(t) = x(t + \tau)$ , com

$$\tau = \frac{T}{2c_m}.$$

E assim teremos:

$$A_a(t) = 2L[x_0 + x(t + \tau)]. \quad (1.25)$$

Similarmente, para  $z = \frac{T}{2}$ , a área glotal da borda superior é calculada com  $x_b(t) = x(t - \tau)$ , que resulta em:

$$A_b(t) = 2L[x_0 + x(t - \tau)], \quad (1.26)$$

que são as expressões necessárias em (1.21).

---

## 1.4 Propagação de ondas acústicas no trato vocal

---

A modelagem matemática da acústica da fonação visa caracterizar a propagação das ondas acústicas geradas por perturbações de fluxo glotal do trato vocal. O trato vocal tem uma estrutura e uma geometria complexas, e neste trabalho o consideraremos apenas o trato a jusante da glote, e ignoraremos a traqueia. Além disso, utilizaremos um modelo simplificado do trato vocal, seguindo a mesma idéia de Arneodo e Mindlin [6], representando o trato vocal por um tubo de seção transversal uniforme (Figura 1.5), com área  $A_t$ .

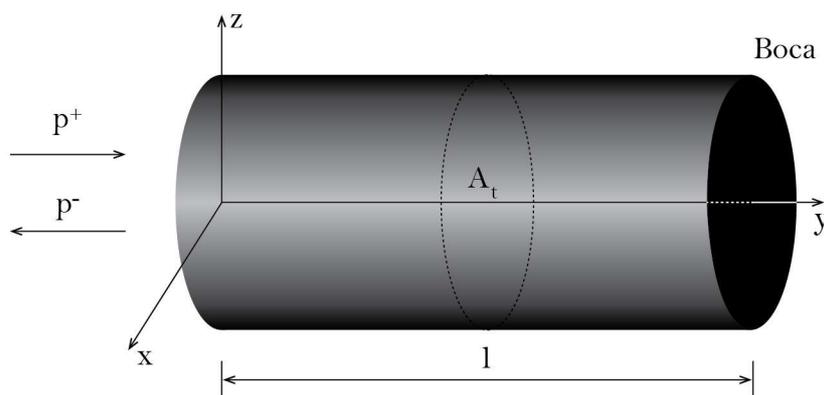


Figura 1.5: Propagação de uma onda dentro do tubo de seção uniforme  $A_t$  e comprimento  $l$ , na direção de propagação do eixo  $y$ .

Em qualquer ponto do tubo, a pressão total  $P_{supra}$  na entrada do trato vocal, será a soma de duas componentes: uma pressão estática  $\bar{P}$  e uma pressão acústica  $\tilde{P}$ . Assim,

$$P_{supra} = \bar{P}_{supra} + \tilde{P}_{supra}. \quad (1.27)$$

Além disso, a pressão acústica na entrada do tubo é resultante de duas componentes: uma onda de pressão incidente a partir da glote, denotada por  $p^+$ , e uma onda parcial refletida nos lábios (sendo que uma parte da onda é irradiada ao exterior, pois o tubo está aberto em uma extremidade), referida como  $p^-$ . Logo

$$\tilde{P}_{supra} = p^+ + p^-. \quad (1.28)$$

A onda de pressão incidente é produzida pela variação do fluxo de ar vindo da glote, e é dada por

$$p^+ = \frac{\rho_0 c \tilde{u}}{A_t}, \quad (1.29)$$

, seguindo [6], onde  $\rho_0$  é a densidade do ar sem perturbação,  $c$  é a velocidade do som e  $\tilde{u}$  é a componente de variação da vazão de ar glotal [6].

A vazão na glote (1.5) pode ser diferenciada e assim obteremos:

$$du = vdA + Adv. \quad (1.30)$$

O segundo termo pode ser desprezado pois só é importante quando a glote está perto de fechar [66]. Portanto, podemos definir uma aproximação para a variação de vazão

como:

$$\tilde{u} = \bar{v}\tilde{A}, \quad (1.31)$$

em que  $\bar{v}$  é a velocidade média da partícula e  $\tilde{A} = dA$  é a variação de área glotal. O deslocamento da prega vocal é dado por

$$x(t) = \tilde{x}(t) + x^*, \quad (1.32)$$

em que  $x^*$  indica a posição de equilíbrio, que será calculada posteriormente, e  $\tilde{x}(t)$  é o deslocamento a partir dessa posição. Então,

$$\tilde{A}(t) = 2L\tilde{x}(t) \quad (1.33)$$

e

$$p^+ = \alpha\bar{v}\tilde{x}(t), \quad (1.34)$$

sendo

$$\alpha = \frac{2L\rho_0c}{A_t} \quad (1.35)$$

o coeficiente de acoplamento [45], e, da equação de Bernoulli (1.15) e (1.17),

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2\Delta\bar{P}}{k_t\rho_0}}, \quad (1.36)$$

[2, 22, 66]. A onda refletida pode ser expressa pela seguinte relação com a onda incidente:

$$p^- = rp^+(t - \vartheta), \quad (1.37)$$

em que  $-1 \leq r \leq 1$  é o coeficiente de reflexão e  $\vartheta = \frac{2l}{c}$  é o tempo de retardo para a onda acústica ir e voltar no tubo do trato vocal de comprimento  $l$ . Portanto, a pressão acústica (1.28) na entrada do trato vocal é da seguinte forma:

$$\tilde{P}(t) = \alpha\bar{v}[\tilde{x}(t) + r\tilde{x}(t - \vartheta)]. \quad (1.38)$$

Ao longo desta modelagem, consideramos que o trato vocal está amplamente aberto em uma extremidade (boca aberta como a vogal [ə]). Portanto, temos que a pressão acústica é a única componente da pressão supraglotal, já que a estática será nula. O caso onde a extremidade está praticamente fechada será considerado no capítulo 5.

## 1.5 Equações gerais do modelo

As expressões determinadas nas seções anteriores serão agrupadas para, juntas, representarem nosso modelo matemático da fonação:

Modelo Matemático	
Equação geral	$M\ddot{x}(t) + B[1 + \eta x^2(t)]\dot{x}(t) + Kx(t) = P_g$
Pressão média glotal	$P_g = P_{supra} + \frac{(P_{sub} - P_{supra})}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e\right)$
Área da borda inferior	$A_a(t) = 2L[x_0 + x(t + \tau)]$
Área da borda superior	$A_b(t) = 2L[x_0 + x(t - \tau)]$
Pressão supraglotal	$P_{supra} = \alpha\bar{v}[\tilde{x}(t) + r\tilde{x}(t - \vartheta)]$

## 1.6 Simplificação para uma equação de Van der Pol

Vamos considerar  $k_e = 0$ , já que normalmente  $k_e < 0, 2$  [66], e desprezando o efeito do carregamento do trato vocal (logo  $P_{supra} \approx 0$ , que coincide com a pressão atmosférica), a expressão (1.21) se reduz a:

$$P_g = \frac{P_{sub}}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a}\right). \quad (1.39)$$

No caso de  $\tau$  suficientemente pequeno, usando a expansão de Taylor em torno da origem as expressões de  $A_a$  e  $A_b$  se reduzem a

$$A_a(t) = 2L[x_0 + x(t) + \tau\dot{x}(t)]; \quad (1.40)$$

$$A_b(t) = 2L[x_0 + x(t) - \tau\dot{x}(t)]. \quad (1.41)$$

Consequentemente, a pressão glotal média (1.39) se tornará

$$P_g = \frac{P_{sub}}{k_t} \frac{2\tau\dot{x}}{x_0 + x + \tau\dot{x}}, \quad (1.42)$$

a qual pode ainda ser aproximada por uma relação linear  $P_g \approx P_{sub}v_{char}\dot{x}$  [6, 33], em que  $v_{char} = \frac{2\tau}{k_t x_0}$  é denominado coeficiente de velocidade característica. Substituindo esta relação na equação (1.2) obtemos:

$$M\ddot{x} - \left(\frac{P_s}{v_{char}} - B - Cx^2\right)\dot{x} + Kx = 0. \quad (1.43)$$

Ou seja

$$M\ddot{x} - (B' - Cx^2)\dot{x} + Kx = 0 \quad (1.44)$$

em que  $B' = \frac{P_s}{v_{char}} - B$ .

Então, dividindo a equação por  $KM$  e reagrupando alguns termos, temos:

$$\frac{\ddot{x}}{K} - \frac{B'}{\sqrt{KM}} \frac{1}{\sqrt{KM}} \left(1 - \frac{C}{B'}x^2\right) \dot{x} + \frac{x}{M} = 0. \quad (1.45)$$

Fazendo

$$\mu = \frac{B'}{\sqrt{KM}}, \quad (1.46)$$

temos que a equação pode ser escrita como:

$$\frac{\ddot{x}}{K} - \mu \frac{1}{\sqrt{KM}} \left(1 - \frac{C}{B'}x^2\right) \dot{x} + \frac{x}{M} = 0. \quad (1.47)$$

Finalmente, fazendo a seguinte mudança de variáveis  $x' = \left(\frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{C}}\right)x$  e  $t' = \left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{K}}\right)t$ , temos, pela regra da cadeia:

$$\dot{x}(t') = \sqrt{\frac{B'}{C}} \frac{K}{M} \dot{x}(t), \quad (1.48)$$

$$\ddot{x}(t') = \sqrt{\frac{B'}{C}} \frac{K}{M} \ddot{x}(t). \quad (1.49)$$

Substituindo (1.48) e (1.49) na equação (1.47) e omitindo as linhas das novas variáveis, temos:

$$\ddot{x}(t) - \mu [1 - x^2(t)] \dot{x}(t) + x(t) = 0, \quad (1.50)$$

que é a equação de Van der Pol [60]. Note que, para obtermos a equação (1.50), devemos considerar a hipótese adicional que  $B' \neq 0$ . A equação de Van der Pol tem sido muito utilizada em análises de sistemas oscilatórios não-lineares, particularmente em fisiologia e biologia. No caso da fisiologia humana, a equação tem sido usada, por exemplo, em batimentos cardíacos [73]. Ela também é utilizada com sucesso em estudos da vocalização de pássaros canoros [33].

---

## 1.7 Solução das equações e retrato de fase

---

A técnica numérica utilizando o recurso computacional nos fornece uma solução aproximada que nos ajudará entender o comportamento dinâmico das soluções. Vamos empregar

a solução numérica nesta seção em dois casos. O primeiro caso é quando consideramos  $\tau$  suficientemente pequeno. Nesse caso, aproximações em nosso modelo (seção 1.5) podem ser feitas e simples integração pelo método Runge-Kutta é suficiente para resolver as equações. O segundo caso é quando  $\tau$  é qualquer. Para este caso, um programa computacional específico para lidar com a integração da equação diferencial funcional foi desenvolvido.

### 1.7.1 Solução para $\tau$ suficientemente pequeno

Quando consideramos  $\tau$  pequeno, o modelo na seção 1.5 com  $P_g$  como na expressão (1.42), será resolvido.

Nesse caso, tomando  $P_{sub}$  constante (vide Tabela 1.1), a solução direta do sistema pode ser obtida pelo método Runge-Kutta. O gráfico 1.6 exibe a simulação do modelo da seção 1.5.

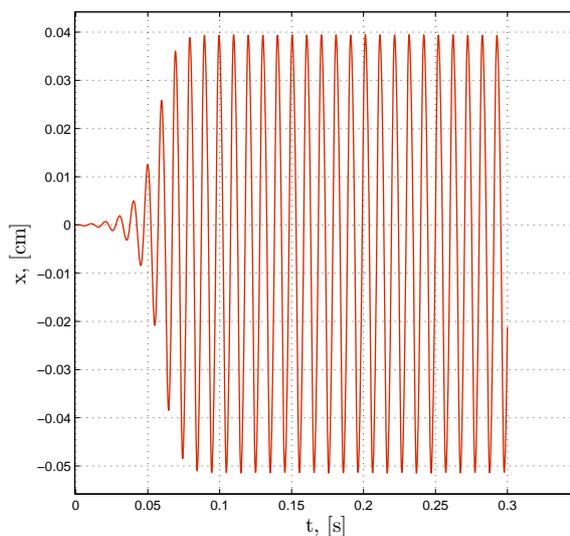


Figura 1.6: Simulação da oscilação no intervalo de tempo  $I = [0, 0.3]$  segundos e com condição inicial  $x(0) = [0.0001, 0]$ . Os parâmetros estão listados na Tabela 1.1.

Se considerarmos uma pequena simplificação na equação (1.42), de modo que

$$P_g = \frac{2\tau \dot{x} P_{sub}}{k_t(x_0 + x)}, \quad (1.51)$$

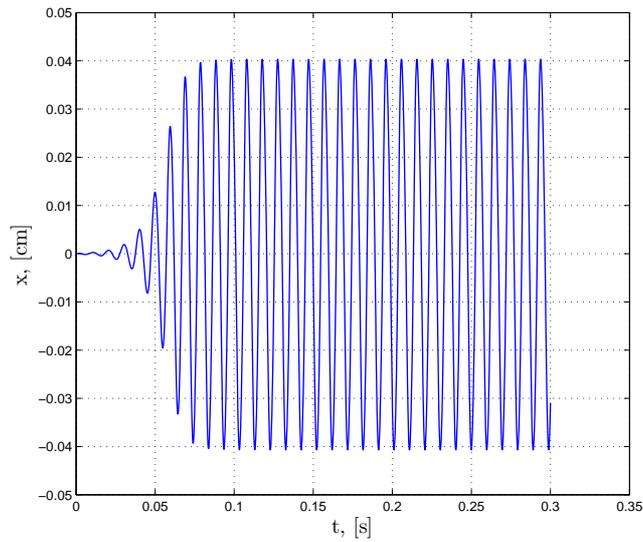


Figura 1.7: Simulação da oscilação da prega vocal, onde  $P_g$  foi simplificado. Intervalo de tempo de integração  $I = [0, 0.3]$  em segundos e condição inicial  $x(0) = [0.0001, 0]$ . Os parâmetros estão listados na Tabela 1.1.

teremos uma simulação ligeiramente diferente, ilustrada na Figura 1.7. A representação geométrica das trajetórias do nosso sistema no plano  $\mathbb{R}^2$  para diferentes condições iniciais é exibida na Figura 1.8.

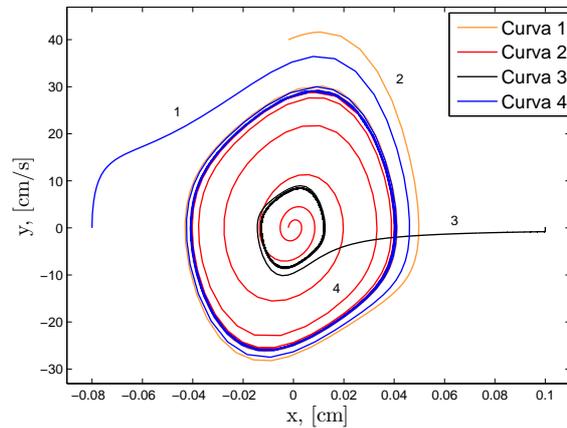


Figura 1.8: Plano de fase para as condições iniciais: curva 1  $x(0) = [-0.08, 0]$ ; curva 2  $x(0) = [-0.002, 40]$ ; curva 3  $x(0) = [0.081, 0.71]$  e curva 4  $x(0) = [-0.002, -0.0009]$ .

Tabela 1.1: Valores dos parâmetros do modelo correspondendo a uma configuração de homem adulto. Todos os parâmetros, exceto  $B$  e  $\eta$ , foram extraídos de [66]. Os parâmetros  $B$  e  $\eta$  foram selecionados para produzirem uma oscilação estável de grande amplitude.

Parâmetro	Valor
$M$	0.476 g/cm <sup>2</sup>
$B$	50 dyn/cm <sup>3</sup>
$K$	200000 dyn/cm <sup>3</sup>
$\tau$	1 ms
$k_t$	1.1
$x_0$	0.1 cm
$P_{max}$	800 Pa
$\eta$	5000 cm <sup>-2</sup>

### 1.7.2 Solução para $\tau$ qualquer

Vamos considerar a simulação um pouco mais complexa de uma oscilação padrão das pregas vocais durante uma típica vocalização no intervalo de tempo  $I = [0, T_f]$ . Não é fácil em geral resolver uma equação diferencial com atraso e avanço de tempo [21]. Métodos padrões para problemas de valor inicial não se aplicam, pois, para calcular a solução  $x$  em um certo tempo  $t$ , seu valor em  $t + \tau$  é ainda desconhecido. Assim devemos implementar um método que seja capaz de considerar o avanço de tempo.

O problema pode ser aproximado como um problema de valor de fronteira, que será resolvido iterativamente, em que ambas as condições iniciais e finais são especificadas como condições de contorno. Fazendo que  $P_{sub}$  seja nula no início e no final, então sabemos que  $x(0) = 0$ , e que  $x(T) \cong 0$  (não será exatamente nulo, mas terá um valor muito pequeno).

No início do período da simulação, as pregas vocais são assumidas em equilíbrio e então  $x(t) = 0$  para  $t \in [-\tau, \tau]$ . Uma curva padrão, como mostrada na Figura 1.9, é adotada para  $P_{sub}$ , de modo que ela seja nula para  $t \in [0, t_1]$ , em que  $t_1 \geq \tau$ . E em  $t = t_1$ ,  $P_{sub}(t)$  começa a aumentar suavemente até atingir o máximo valor em  $t = t_2$ , em que se mantém constante até  $t = t_3$ . E, a partir desse ponto,  $P_{sub}$  decresce suavemente até  $t = t_4 \leq T_f - \tau$ . No fim do período de simulação, as pregas vocais devem voltar para o equilíbrio novamente, e então a condição de fronteira novamente será  $x(t) \cong 0$  para

$$t \in [T_f - \tau, T_f + \tau].$$

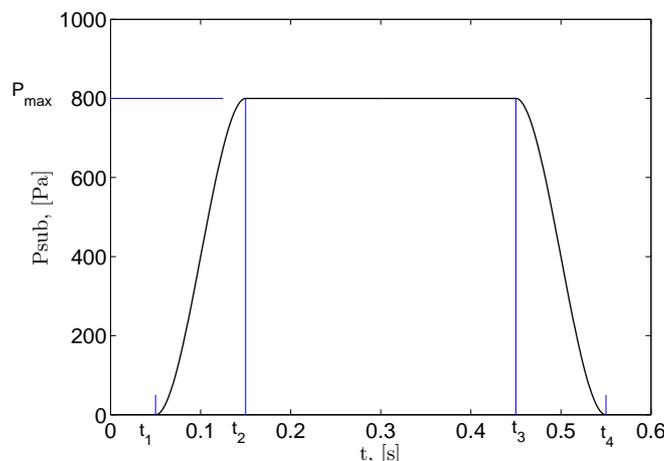


Figura 1.9: Padrão assumido pela pressão subglotal  $P_{sub}(t)$  para uma oscilação da prega vocal.

Sob estas condições, adotamos uma aproximação inicial para  $x(t)$  (solução de equilíbrio). Para provocar uma oscilação, introduzimos uma pequena perturbação fazendo  $x(\tau) = x_\epsilon$ . A equação (1.2) é então resolvida por um processo iterativo chamado algoritmo de Picard [12], começando por uma aproximação inicial

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \in [-\tau, T_f + \tau] \text{ e } t \neq \tau, \\ x_\epsilon, & \text{para } t = \tau. \end{cases}$$

Em cada iteração  $k$ , com  $k = 1, 2, \dots$ , a pressão média glotal  $P_g$  é calculada usando a solução  $x^{(k-1)}(t)$ . Agora uma nova solução  $x^{(k)}(t)$  é obtida resolvendo a equação diferencial resultante

$$M\ddot{x}^{(k)}(t) + B\{1 + \eta[x^{(k)}]^2(t)\}\dot{x}^{(k)}(t) + kx^{(k)}(t) = P_g^{(k-1)} \text{ para } t \in [\tau, T_f - \tau]. \quad (1.52)$$

Em todas iterações, a condição de fronteira  $x^{(k)} = 0$  para  $t \in [-\tau, \tau]$  e  $t \in [T_f - \tau, T_f + \tau]$  é adicionada para o cálculo da solução. O processo é repetido até que não exista diferença significativa entre  $x^{(k)}$  e  $x^{(k-1)}$ , isto é, até que o erro médio quadrático satisfaça a condição,

$$\sqrt{\frac{1}{T_f} \sum_0^{T_f} [x^{k+1}(t) - x^k(t)]^2} < 10^{-4}. \quad (1.53)$$

Deste modo, nosso modelo foi resolvido usando o método padrão Runge-Kutta implementado no Matlab (vide anexo).

A nível de comparação, vamos testar o programa implementado para o mesmo  $\tau$  do caso anterior (Tabela 1.1). Em todos os testes, o processo acima foi capaz de calcular a solução em aproximadamente 100 iterações. Valores de uma pressão subglotal  $P_{sub}(t)$  em intervalos  $[t_1, t_2]$  e  $[t_3, t_4]$  foram calculados usando interpolação spline cúbica entre as extremidades de  $P_{sub}$ , que pode ser 0 ou  $P_{max}$  (o que for mais apropriado) e fazendo as inclinações das extremidades iguais a zero. Desse modo, uma curva suave  $P_{sub}(t)$  com a primeira derivada contínua foi gerada. A Figura 1.10 mostra um exemplo de solução para uma configuração típica de um homem adulto (os parâmetros estão descritos na Tabela 1.1).

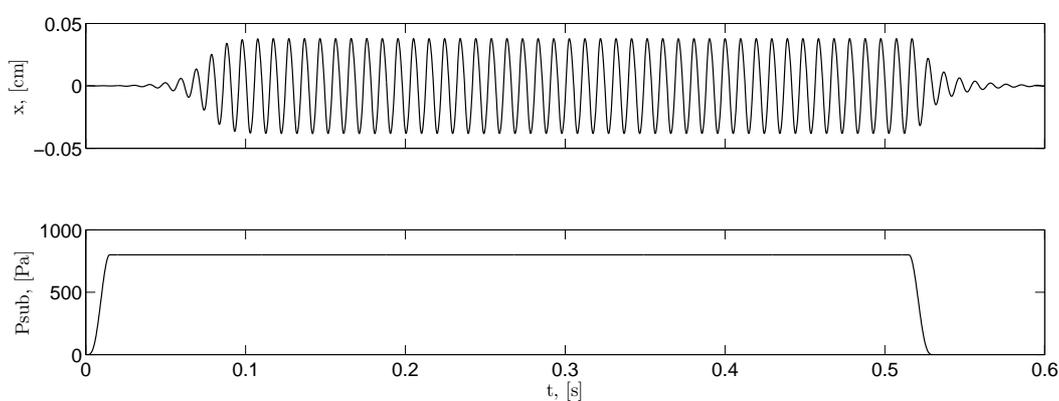


Figura 1.10: Simulação da oscilação da prega vocal com parâmetros na Tabela 1.1. Painel superior: deslocamento da prega vocal  $x(t)$ . Painel inferior: pressão subglotal  $P_{sub}(t)$ , com  $t_1 = \tau$ ,  $t_2 = 15$  ms,  $t_3 = 515$  ms,  $t_4 = 530$  ms e  $T_f = 1000$  ms. Simulação exibida com o intervalo de tempo  $[0, 600]$  ms.

A Figura 1.11 exibe a projeção em  $\mathbb{R}^2$  do espaço de fase de duas soluções com  $P_{sub} = 800$  Pa.

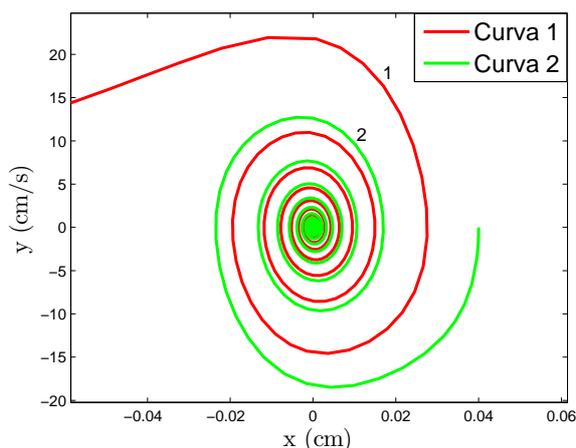


Figura 1.11: Projeção em  $\mathbb{R}^2$  do espaço de fase para funções com atraso e avanço de tempo. Condição inicial: curva 1  $x(0) = [-0.008, 0]$ ; curva 2  $x(0) = [0.04, 0]$ .

O gráfico 1.12 exibe a comparação das oscilações nesses três casos simulados ao longo de um ciclo. Quando  $\tau$  é suficientemente pequeno e a aproximação (1.51) adotada, a frequência de oscilação é aproximadamente 103 Hz e amplitude 0.04cm; para  $\tau$  suficientemente pequeno e sem a aproximação a frequência é aproximadamente 97 Hz e amplitude 0.045 cm ; e por último, para  $\tau$  qualquer, a frequência é 101 Hz e amplitude 0.04cm. Apesar dessa diferença entre as frequências e as amplitudes em cada situação caso, as curvas possuem praticamente o mesmo comportamento oscilatório. A diferença da curva 1 para as demais pode ser explicada quando  $x$  se torna negativo e passa pelo mínimo, o denominador da expressão é muito pequeno e então a pressão glotal é grande. Por isso, as diferenças entre as as oscilações são mais visíveis nessa região.

A Figura 1.12 exibe as soluções para os três casos analisados.

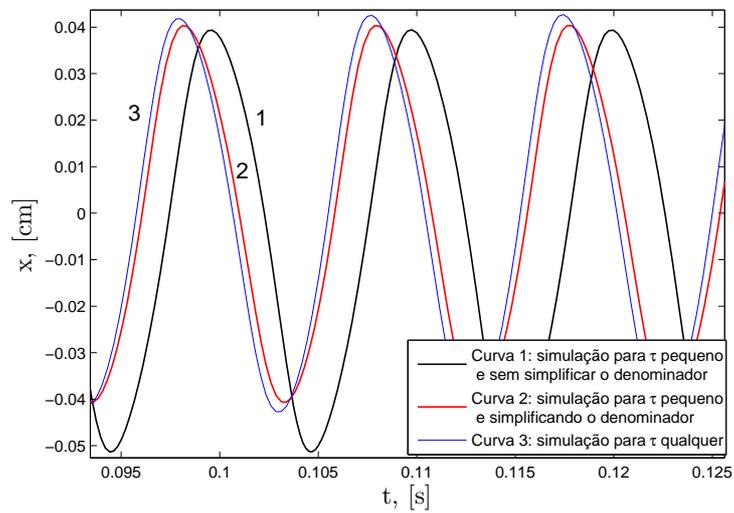


Figura 1.12: Comparação das soluções numéricas para os três casos da pressão média glotal  $P_g$ .

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## ANÁLISE DE ESTABILIDADE E BIFURCAÇÕES

No capítulo anterior abordamos as soluções numericamente, o que ajudou a entender o comportamento dinâmico das soluções. Nesse capítulo apresentamos resultados sobre a análise de estabilidade e bifurcações, obtida via teorema de Hopf e o método do balanço harmônico. O modelo apresentado na seção 1.5 possui avanço e atraso de tempo, além da não-linearidade. Para um sistema com tal complexidade uma solução explícita, em geral, a solução explícita não pode ser determinada. Por meio da análise qualitativa podemos descobrir características do comportamento dinâmico de nossas soluções. A análise é feita em torno de um ponto de equilíbrio, de modo a determinar o quadro de estabilidade, existência de ciclo limite e bifurcações. A seguir apresentamos os resultados.

---

### 2.1 Ponto de equilíbrio e estabilidade

---

O primeiro caso a ser analisado é quando  $\tau$  é suficientemente pequeno. Dada uma equação diferencial de ordem dois, podemos reescrevê-la na forma de um sistema bidimensional. Substituindo a expressão (1.39) no modelo na seção 1.5 e a condição para  $\tau$ ,

e definindo duas novas variáveis  $u = x$  e  $v = x'$ , o modelo assume a forma

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{-K}{M}u - \frac{B}{M}(1 + \eta u^2)v + \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t} \left( \frac{v}{x_0 + u + \tau v} \right) \end{cases}. \quad (2.1)$$

As soluções constantes de (2.1) são determinados pelos zeros do sistema

$$\begin{cases} \frac{-K}{M}u - \frac{B}{M}(1 + \eta u^2)v + \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t} \left( \frac{v}{x_0 + u + \tau v} \right) = 0 \\ v = 0 \end{cases}. \quad (2.2)$$

Essas soluções são chamadas pontos de equilíbrio. O sistema (4.7) possui um único ponto de equilíbrio, que expressamos como

$$E_0 = (0, 0). \quad (2.3)$$

Pelo Teorema de Grobmann-Hartmann [24], o comportamento qualitativo de um sistema não-linear pode ser analisado pela linearização do sistema na vizinhança do ponto  $E_0$ . Seja  $J = J(u, v)$  a matriz jacobiana do sistema (2.1). Em  $E_0$ , temos que

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} + \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t x_0} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Os autovalores da matriz  $J$  ajudam a determinar a estabilidade do sistema. A equação característica da matriz (2.4) é

$$\lambda^2 + \left( \frac{B}{M} - \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t x_0} \right) \lambda + \frac{K}{M} = 0. \quad (2.5)$$

Os autovalores de (2.5) são

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left( \frac{B}{M} - \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t x_0} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{B}{M} - \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t x_0} \right)^2 - \frac{4K}{M}}}{2}. \quad (2.6)$$

Quando ambos autovalores têm parte real negativa, o ponto fixo é estável e, se algum tiver parte real positiva, o ponto fixo é um espiral instável. Para isto basta que,

$$\frac{B}{M} - \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t x_0} < 0 \quad (2.7)$$

Quando,

$$P_{sub} < \frac{Bk_t x_0}{2\tau}, \quad (2.8)$$

o ponto  $E_0$  será um espiral estável. Caso contrário,

$$P_{sub} > \frac{Bk_t x_0}{2\tau}, \quad (2.9)$$

e o ponto  $E_0$  será um espiral instável. Quando a expressão (2.9) é válida, a oscilação crescerá em amplitude. Vê-se, portanto, que a energia transferida do fluxo do ar às pregas vocais é maior que a energia perdida por dissipação nos tecidos, e então uma oscilação auto-sustentada pode existir. O valor crítico da pressão no qual acontece a mudança de estabilidade é:

$$P_{limiar} = \frac{Bk_t x_0}{2\tau}, \quad (2.10)$$

chamado de “pressão limiar da fonação” [66].

A pressão subglotal limiar na equação (2.10) é a pressão subglotal mínima exigida para que se inicie a oscilação. Para valores menores de  $P_{limiar}$ , temos que as soluções convergem para o ponto de equilíbrio e não há oscilação.

A pressão subglotal  $P_{sub}$  é um dos parâmetros principais do controle da oscilação das pregas vocais, e pode ser variado a vontade durante a fala.

---

## 2.2 Bifurcação de Hopf

---

Nessa seção, vamos obter as condições de existência e o tipo de bifurcação que o modelo na seção 1.5 apresenta. Conforme visto na seção anterior, há uma mudança repentina de estabilidade para instabilidade, quando  $P_{sub}$  varia. Em uma bifurcação, ocorre uma mudança qualitativa no retrato de fase quando um parâmetro de controle no sistema é alterado. Na bifurcação de Hopf, um ponto de equilíbrio muda de estabilidade e emite ou absorve uma órbita periódica. No ponto de bifurcação, um par de autovalores atravessa o eixo imaginário. Existem dois tipos de bifurcação de Hopf: uma delas ocorre quando o parâmetro aumenta o ponto de equilíbrio estável bifurca-se em um ponto de equilíbrio instável e um ciclo limite estável (bifurcação de Hopf supercrítica); ou quando um ponto

de equilíbrio instável bifurca-se em um ponto de equilíbrio estável e um ciclo limite instável (bifurcação de Hopf subcrítica). Esses dois tipos de bifurcação estão ilustrados na Figura 2.1.

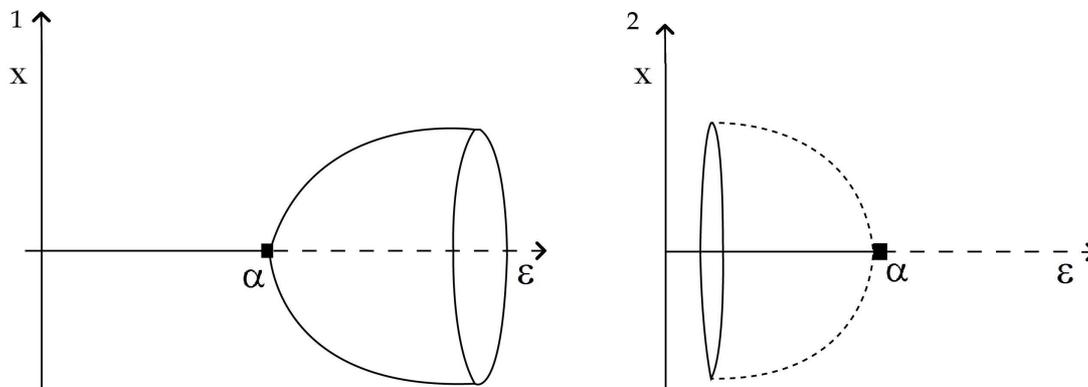


Figura 2.1: Diagrama de bifurcação: em que o símbolo ■ indica o ponto de bifurcação; o primeiro diagrama é a configuração supercrítica e o segundo indica a configuração subcrítica com o parâmetro de controle  $\varepsilon$  variando no eixo horizontal.

A partir da equação (2.5) definimos a função

$$\gamma(P_{sub}) = -\left(\frac{B}{2M}\right) + \frac{2\tau P_{sub}}{2Mk_t x_0}. \quad (2.11)$$

Para a bifurcação de Hopf, temos duas condições [24]:

$$\begin{cases} \gamma(P_{limiar}) = 0, \\ \frac{d\gamma}{dP_{limiar}} = \frac{\tau}{Mk_t x_0} \neq 0 \end{cases}. \quad (2.12)$$

A primeira condição de (2.12) nos garante que, quando o parâmetro de controle  $P_{sub}$  varia e passa pelo valor de bifurcação ( $P_{limiar}$ ) os autovalores são imaginários. Temos que  $\gamma(P_{sub})$  muda de sinal quando o sistema passa pelo valor de bifurcação no parâmetro  $P_{limiar}$ , ou seja, o limiar de oscilação, pois a posição de equilíbrio torna-se instável e a oscilação é gerada. A segunda expressão de (2.12) é chamada condição de transversalidade, e garante que os autovalores cruzam o eixo imaginário transversalmente. Essas são as condições necessárias para que haja a bifurcação de Hopf [24].

Para determinar qual tipo de bifurcação de Hopf ocorre, é necessário calcular o número de Lyapunov  $\sigma$  [50]. O sinal desse número determina o tipo de bifurcação. Ela será supercrítica se  $\sigma < 0$ , e subcrítica para  $\sigma > 0$ .

Para um sistema analítico planar qualquer

$$\begin{cases} x' = ax + by + \sum_{i+j \geq 2} a_{ij}x^i y^j \\ y' = cx + dy + \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}x^i y^j \end{cases}, \quad (2.13)$$

em que  $\Delta = ad - bc$ ,  $a + d = 0$  e a origem é um ponto de equilíbrio para o sistema (2.13), o número de Lyapunov é dado por [50]:

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{-3\pi}{2b\Delta^{\frac{3}{2}}} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \\ & + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 + b_{20}b_{02}) \\ & - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] \\ & - (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por outro lado, substituindo  $P_{limiar}$  em (2.1), o sistema pode ser escrito como

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{-K}{M}u - \frac{B}{M}(1 + \eta u^2)v + \frac{Bx_0}{M} \left( \frac{v}{x_0 + u + \tau v} \right) \end{cases}. \quad (2.15)$$

Fazendo a expansão de Taylor no ponto  $(u, v) = (0, 0)$  da expressão

$$f(u, v) = -\frac{B}{M}(1 + \eta u^2)v + \frac{2\tau P_{sub}}{Mk_t} \left( \frac{v}{x_0 + u + \tau v} \right), \quad (2.16)$$

obtém-se que

$$f(u, v) \approx -\frac{B}{Mx_0}uv - \frac{B\tau}{Mx_0}v^2 + \left( -\frac{B\eta}{M} + \frac{B}{Mx_0^2} \right) u^2v + \frac{2B\tau}{Mx_0^2}uv^2 + \frac{B\tau^2}{Mx_0^2}v^3 \quad (2.17)$$

Assim, podemos escrever o sistema (2.15) como:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{-K}{M}u + f(u, v) \end{cases}. \quad (2.18)$$

De posse dos coeficientes, agora podemos determinar o número de Lyapunov. Basta substituir os coeficientes correspondentes à expressão (2.14), que produz

$$\sigma = \frac{3\pi}{2} \frac{B}{K^{1/2}M^{3/2}x_0^2} (B\tau + 3\tau^2K + M - \eta Mx_0^2). \quad (2.19)$$

Como exemplo, consideremos os mesmos valores dos parâmetros da Tabela 1.1. O valor do número de Lyapunov é aproximadamente  $-21.93$ . Isto significa que a bifurcação é supercrítica. Notemos a influência do parâmetro  $\eta$  sobre a bifurcação, seus valores irão indicar o tipo de bifurcação existente.

Quando consideramos a equação simplificada (1.51), teremos o número de Lyapunov:

$$\sigma = \frac{3\pi}{2} \frac{B}{K^{1/2}M^{3/2}x_0^2}(1 - \eta x_0^2), \quad (2.20)$$

e assim, para os mesmos valores dos parâmetros (Tabela 1.1), o número de Lyapunov será  $-49$ , e novamente teremos uma bifurcação supercrítica.

---

## 2.3 Balanço harmônico

---

Na seção anterior uma aproximação para  $\tau$  suficientemente pequeno foi assumida, e através de (2.1) obtivemos a expressão para pressão limiar necessária para iniciar a oscilação. Agora buscaremos um resultado mais geral, ou seja, para  $\tau$  qualquer.

A fim de facilitar a análise, simplificamos a equação (1.21) para:

$$P_g = \left( \frac{P_{sub}}{k_t} \right) \frac{A_a - A_b}{A}, \quad (2.21)$$

em que  $A = A(t) = x_0 + x(t) > 0$ . Note que  $P_g$  depende da forma do canal glotal: é positiva para um canal convergente ( $A_a > A_b$ ) e negativa para uma parte divergente ( $A_a < A_b$ ), e sua magnitude diminui quando as pregas vocais são abduzidas, ou seja, afastam-se da linha mediana do corpo da prega vocal ( $A_a$  maior). Aqui, a relação inversa entre a  $P_g$  e a área glotal é mantida, mas é expressa em termos da área  $A$  no ponto médio da glote em vez de sua borda inferior  $A_a$ , isto é,  $A_a$  é substituído por  $A$  no denominador da equação (1.21).

Com essas hipóteses, nosso modelo assume a forma

$$M\ddot{x}(t) + B(\dot{x}(t) + \eta x^2(t))\dot{x}(t) + Kx(t) = \left( \frac{P_{sub}}{k_t} \right) \frac{x(t + \tau) - x(t - \tau)}{x_0 + x(t)}, \quad (2.22)$$

com  $x_0 + x(t) > 0$  indicando que não há colisão entre as pregas vocais.

Técnicas padrão não podem ser utilizadas em nosso sistema (1.2), por se tratar de uma equação que apresenta avanço e atraso no tempo. Contudo, a solução através do processo

numérico revela que as oscilações são quase senoidais, mesmo em grandes amplitudes. Portanto, o comportamento oscilatório do modelo pode ser investigado usando o método de balanço harmônico [44, 46]. Esse método consiste em aproximar a solução de uma equação diferencial através da soma de vários harmônicos, tal como em uma série de Fourier, desprezando os termos harmônicos maiores gerados pelos termos não-lineares. Além desse método estimar soluções periódicas, ele também pode auxiliar na compreensão do comportamento qualitativo das oscilações. Essa técnica já foi adotada para os modelos das pregas vocais [37], e por ser uma ferramenta significativa adotaremos o balanço harmônico de primeira ordem.

Primeiramente assumimos que há uma oscilação em torno do ponto de equilíbrio  $E_0$ , e que a solução periódica pode ser aproximada pela função

$$x(t) = a \cos(\omega t), \quad (2.23)$$

em que  $\omega$  é a frequência angular e  $a$  é a amplitude de oscilação, com  $0 \leq a \leq x_0$ .

Quando essa aproximação é substituída na equação (2.22), o termo dissipativo não-linear nos fornece

$$B(1 - \eta x^2)\dot{x} = -aB\omega \sin(\omega t) [1 - \eta a^2 \cos^2(\omega t)]. \quad (2.24)$$

Como

$$\sin(\omega t) \cos^2(\omega t) = \frac{\sin(3\omega t) + \sin(\omega t)}{4},$$

segue que

$$B(1 - \eta x^2)\dot{x} = -aB\omega \left(1 + \frac{\eta a^2}{4}\right) \sin(\omega t) - \frac{B\eta a^3 \omega}{4} \sin(3\omega t). \quad (2.25)$$

Similarmente, substituindo a equação (2.23) em (2.21) (ou no lado direito da equação (2.22)) e expandindo o resultado em série de Fourier, temos:

$$P_g = -\frac{4aP_s \sin(\omega \tau)}{k_t(x_0 + \sqrt{x_0^2 - a^2})} \sin(\omega t) + \text{termos harmônicos de ordem maior.} \quad (2.26)$$

Os harmônicos maiores nas equações (2.25) e (2.26) são ignorados e os primeiros termos harmônicos são substituídos na equação (2.22). Substituindo também a solução (2.23)

nos termos lineares remanescentes, encontramos uma aproximação para a frequência de oscilação e a pressão subglotal dadas por

$$w = \sqrt{\frac{K}{M}},$$

e

$$P_{sub} = \frac{k_t x_0 B w}{4 \text{sen}(w\tau)} \left( 1 + \frac{\eta x_0^2 \alpha^2}{4} \right) (1 + \sqrt{1 - \alpha^2}), \quad (2.27)$$

em que  $\alpha = \frac{a}{x_0}$  é a amplitude de oscilação normalizada e  $0 < w\tau < \pi$ , limitando assim os valores de  $\tau$ .

A equação (2.27) expressa o valor da pressão subglotal  $P_{sub}$  que irá produzir uma oscilação de amplitude  $\alpha$ . No início da oscilação,  $\alpha = 0$  e, portanto, o valor limiar da pressão requerida para iniciar a oscilação é  $P_{limiar} = P_{sub}(0)$ ,

$$P_{limiar} = \frac{k_t x_0 B w}{2 \text{sen}(w\tau)}. \quad (2.28)$$

Notemos que se fizermos  $\tau$  suficientemente pequeno teremos a aproximação

$$\text{sen}(w\tau) \approx w\tau,$$

resultando na expressão (2.10), que foi determinada usando o teorema de bifurcação de Hopf.

A Figura 2.2 representa graficamente  $P_{sub}$  em função da amplitude de oscilação normalizada  $\alpha$  para vários valores de  $\eta$  e os demais parâmetros estão listados na Tabela (1.1). A pressão limiar de oscilação ocorre quando a amplitude é zero, ou seja,  $P_{limiar} = P_{sub}(0) = 295.3$  Pa. Nesse valor, como demonstrado nas seções anteriores, uma bifurcação de Hopf ocorre: quando  $P_{sub}$  aumenta a partir de  $P_{sub} < P_{limiar}$  para  $P_{sub} > P_{limiar}$ , o ponto de equilíbrio em  $x = 0$  torna-se instável e um ciclo limite estável (oscilação estável) é produzido (caso supercrítico) ou um ciclo limite instável é absorvido (caso subcrítico). Ambos os tipos de bifurcações podem ocorrer, dependendo do valor de  $\eta$ . Curvas crescentes indicam ciclos limites estáveis e as curvas decrescentes indicam ciclos limites instáveis, como acontece no diagrama de bifurcação mostrado no capítulo anterior.

Consideremos, por exemplo, uma curva crescente de  $P_{sub}(\alpha)$  e assumamos que o sistema está sobre uma curva oscilando com uma certa amplitude  $\alpha$ . Se uma perturbação provoca um ligeiro crescimento da amplitude, então a pressão  $P_{sub}$  será menor do que o

valor necessário para sustentar uma oscilação com essa amplitude. Assim a amplitude diminuirá retornando para o valor anterior. No caso de uma curva decrescente para  $P_{sub}(\alpha)$ , a mesma perturbação irá resultar em um valor de  $P_{sub}$  maior que o requerido para sustentar a oscilação na nova amplitude, e assim a amplitude de oscilação irá aumentar ainda mais. Portanto, a bifurcação é supercrítica quando a curva  $P_{sub}(\alpha)$  aumenta a partir do ponto de bifurcação em  $\alpha = 0$  e subcrítica quando  $P_{sub}(\alpha)$  diminui.

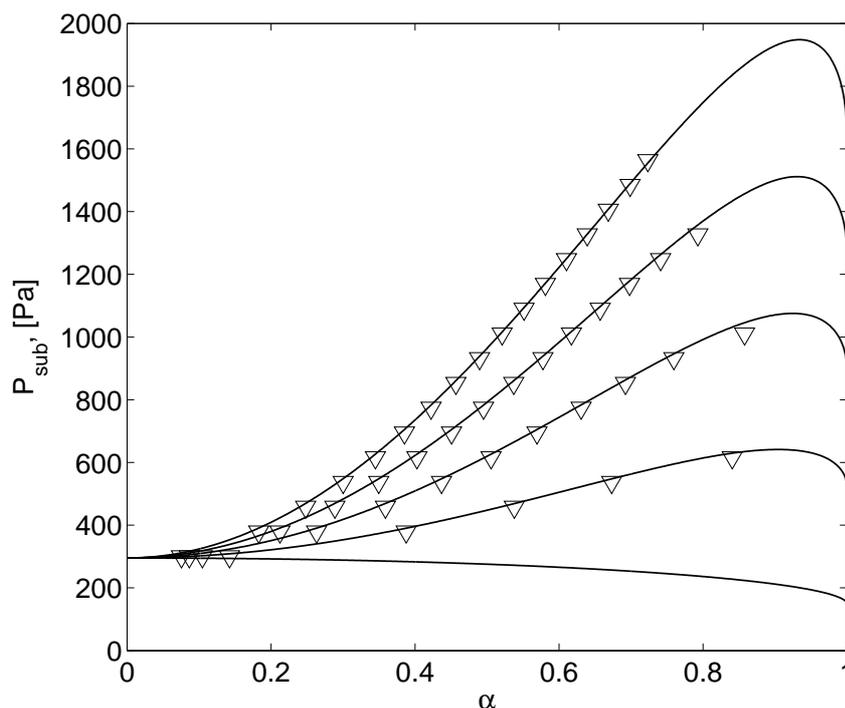


Figura 2.2: Pressão subglotal  $P_{sub}$  versus amplitude de oscilação normalizada  $\alpha$  para vários valores de  $\eta$ , e outros parâmetros como na Tabela (1.1). De baixo para cima, as curvas correspondem a  $\eta = 0, 1000, 2000, 3000$  e  $4000 \text{ cm}^{-2}$ , respectivamente. Os pontos triangulares representam os resultados a partir da solução numérica direta da equação (2.22).

Resultados obtidos a partir de solução numérica direta da equação (2.22) também estão exibidos na Figura (2.2). A sua proximidade com as curvas indica que a análise de equilíbrio pelos harmônicos fornece uma boa aproximação à solução real.

Vamos analisar o tipo de bifurcação de Hopf em mais detalhe. A primeira derivada de

$P_s(\alpha)$  é

$$P'_{sub}(\alpha) = \frac{k_t x_0 B w}{4 \text{sen}(w\tau)} \left[ \frac{\eta x_0^2 \alpha}{2} (1 + \sqrt{1 - \alpha^2}) - \left( 1 + \frac{\eta x_0^2 \alpha^2}{4} \right) \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right]. \quad (2.29)$$

Note que  $P'_{sub}(0) = 0$  e, portanto,  $\alpha = 0$  é um ponto crítico. A concavidade em  $\alpha = 0$  pode ser determinada pelo sinal da segunda derivada

$$P''_{sub}(\alpha) = \frac{k_t x_0 B w}{4 \text{sen}(w\tau)} \left[ \frac{\eta x_0^2 \alpha}{2} (1 + \sqrt{1 - \alpha^2}) - \frac{\eta x_0^2 \alpha^2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} - \left( 1 + \frac{\eta x_0^2 \alpha^2}{4} \right) \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{3/2}} \right], \quad (2.30)$$

e, tomando  $\alpha = 0$ , obtém-se que

$$P''_{sub}(0) = \frac{k_t B w x_0}{4 x_0 \text{sen}(w\tau)} (\eta x_0^2 - 1). \quad (2.31)$$

Portanto,  $P_{sub}(\alpha)$  é côncava para cima em  $\alpha = 0$  quando  $\eta > \frac{1}{x_0^2}$ , e para baixo quando  $\eta < \frac{1}{x_0^2}$ . Quando  $\eta = \frac{1}{x_0^2}$ , a equação (2.29) pode ser transformada em

$$P'_{sub}(\alpha) = -\frac{k_t x_0 B w \alpha}{16 \text{sen}(w\tau \sqrt{1 - \alpha^2})} [2(1 - \sqrt{1 - \alpha^2}) + 3\alpha^2], \quad (2.32)$$

que é negativa para  $0 \leq \alpha \leq 1$  e, portanto, a curva  $P_{sub}(\alpha)$  está decrescendo. Então, a bifurcação de Hopf no limiar da oscilação  $P_{sub} = P_{limiar}$  é subcrítica para  $0 \leq \eta \leq \frac{1}{x_0^2}$  e supercrítica para  $\eta > \frac{1}{x_0^2}$ . Note que o tipo de bifurcação é determinado somente por  $\eta$  e, portanto, é independente do tempo de atraso  $\tau$ .

A Figura 2.2 revela que, no caso de uma bifurcação supercrítica,  $P_{sub}(\alpha)$  tem um ponto de máximo local, a partir de onde a curva torna-se decrescente, para amplitudes de maiores dimensões. O máximo indica uma bifurcação sela-nó entre os ciclos limite. À esquerda desse ponto, um ciclo limite estável existe e à direita há um ciclo limite instável. Ambos os ciclos limite podem, portanto, co-existir em alguns valores de  $P_{sub}$ , e, à medida que  $P_{sub}$  aumenta, eles se unem e cancelam um ao outro. O ciclo limite instável marca o limite de validade do modelo para a oscilação da prega vocal, pois qualquer trajetória além do ciclo limite instável irá crescer em amplitude até alcançar a condição de fechamento glotal  $x(t) = -x_0$ .

As condições para a existência de uma bifurcação sela-nó podem ser determinadas através da resolução de  $P'_{sub}(\alpha) = 0$  em (2.29). Existem duas soluções: uma é a bifurcação

Hopf ( $\alpha = 0$ ) e a outra determinamos resolvendo a equação

$$\frac{\eta x_0^2 \alpha}{2} (1 + \sqrt{1 - \alpha^2}) = \left(1 + \frac{\eta x_0^2 \alpha^2}{4}\right) \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \quad (2.33)$$

que é equivalente a

$$\sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{3}{2}(1 - \alpha^2) = \frac{2}{\eta x_0^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \alpha^2). \quad (2.34)$$

Isto resultará em:

$$3\sqrt{1 - \alpha^2} = -1 + 2\sqrt{1 + \frac{3}{\eta x_0^2}}. \quad (2.35)$$

Visto que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , então  $0 < \sqrt{1 - \alpha^2} \leq 1$ , o que resulta em  $\eta \geq \frac{1}{x_0^2}$ . Quando  $\eta = \frac{1}{x_0^2}$ , a segunda solução também conduz a  $\alpha = 0$  e ambos os extremos locais coincidem. Portanto, a bifurcação sela-nó existe somente para  $\eta > \frac{1}{x_0^2}$ , quando a bifurcação de Hopf no limiar da oscilação é supercrítica. No caso de uma bifurcação subcrítica existe apenas um ciclo limite, que é instável. Nenhuma oscilação estável é possível nesse caso e, por conseguinte, está fora da validade do modelo como uma representação de um oscilador de pregas vocais, já que não podemos ter uma bifurcação sela-nó entre os ciclos limite. Assim, o modelo proposto permite um início supercrítico da oscilação.

### 2.3.1 Histerese oscilatória

Como vimos no início da seção, sob certas condições, podemos obter configurações em que existem apenas ciclos limite instáveis, e isso afeta o padrão de oscilação, resultando na invalidação do modelo da oscilação das pregas vocais. Nesse contexto iremos acrescentar termos polinomiais ao fator de amortecimento, fazendo com que haja novos ciclos limite além dos instáveis em nosso sistema. Tal método apresentado em [5] descreve o comportamento entre ciclos limite em sistemas mecânicos, tais como a dinâmica em voos de aeronave [5] e propõe a expansão do modelo para que novos ciclos limites sejam criados a partir de ciclos limite já existentes. Como veremos, a relação entre os ciclos existentes no novo modelo dá origem à histerese. Um termo polinomial de grau quatro foi usado por Lucero em 2005 [39] para produzir o fenômeno de histerese de oscilação.

### 2.3.1.1 Bifurcação sela-nó entre ciclos limite

Existem alguns tipos de configurações dos ciclos limite que não são fisicamente possíveis para o modelo da oscilação das pregas vocais (por exemplo, se considerarmos que há uma bifurcação de Hopf subcrítica). Nesse caso teremos ciclos limite instáveis, em que as soluções que começam próximas do ciclo tendem a se afastar dele. Isso significa que as trajetórias irão crescer em amplitude, ou seja, alcançarão a condição de fechamento glotal  $x(t) = -x_0$ . Fisicamente, a amplitude cresce muito e as equações de Bernoulli (usadas na construção do modelo) não se aplicam. Assim, o ciclo limite instável marca o limite de validade do modelo para a oscilação das pregas vocais. Existem dois caminhos possíveis para as oscilações de grande amplitude, a saber:

**1º caso:** Uma bifurcação de Hopf subcrítica, que tem ciclo limite instável, pode se combinar com uma bifurcação sela-nó em que o ciclo limite instável coalesce com um ciclo estável. Com o crescimento do parâmetro  $\alpha$ , o sistema pula do ponto da bifurcação de Hopf para o ciclo estável. Vamos representar esse fato pela seta apontando para cima. Para o decréscimo do parâmetro  $\alpha$  na bifurcação sela-nó o sistema pula do ciclo limite estável para a solução de equilíbrio, o que está representado pela seta apontando para baixo. Esse fenômeno de transições de estabilidade entre os ciclos limites e o ponto de equilíbrio [7] é denominado histerese.

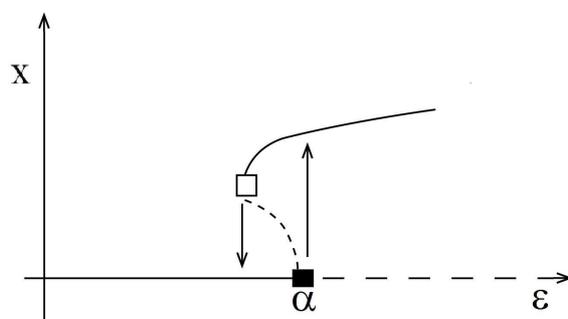


Figura 2.3: O quadrado ■ indica bifurcação de Hopf; o quadrado □, bifurcação entre ciclos limite; a curva —, ciclos limite estáveis, e a curva -- ciclos limite instáveis.

**2º caso:** Podemos ter uma bifurcação de Hopf supercrítica, depois disso apresentar uma bifurcação sela-nó, entre os ciclos limite, que gera um ciclo limite instável. Novamente a validade do modelo ficará comprometida. Assim, é necessário que haja novos ciclos limite estáveis de amplitude maior que os ciclos instáveis. Por exemplo, a Figura 2.4 reproduz

uma bifurcação de Hopf supercrítica em combinação com duas bifurcações sela-nó entre ciclos limite. O ciclo de histerese aparece quando o sistema pula do primeiro ponto de bifurcação sela-nó para o ciclo estável e do segundo ponto de bifurcação sela-nó (entre ciclos limite) para a solução estável.

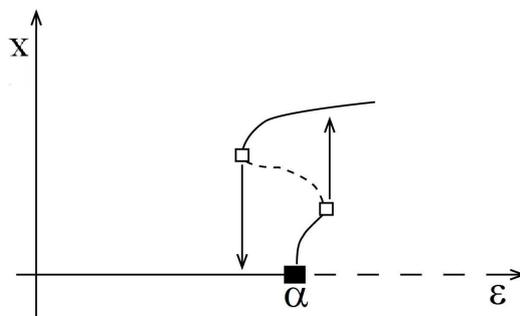


Figura 2.4: Os símbolos indicam: quadrado ■ bifurcação de Hopf; o quadrado □ bifurcação entre ciclos limite; a linha sólida — ciclos limite estáveis e a linha tracejada — representa ciclos limite instáveis.

Os fatos descritos acima capturam o fenômeno de interesse em nosso modelo, pois limitam a amplitude de oscilação, tornando nosso modelo condizente com a fonação.

### 2.3.1.2 Extensão do modelo

Ao acrescentarmos termos polinomiais ao modelo apresentado na seção 1.5, poderemos capturar o ciclo limite ideal necessário na oscilação das pregas vocais. A forma das curvas  $P_{sub}(\alpha)$  pode ser facilmente alterada, e novas bifurcações podem ser criadas com a extensão do modelo, acrescentando potências pares de maior ordem em  $x$  ao termo de amortecimento em (2.22). Termos polinomiais de potência ímpar não são fisicamente possíveis, pois conforme o sinal de  $x$  (deslocamento) a força de amortecimento poderá ficar no mesmo sentido da velocidade e assim não irá resistir ao movimento, fazendo com que o sistema não deixe de oscilar.

No caso geral de uma potência de grau  $2n$ , o modelo da prega vocal será:

$$M\ddot{x}(t) + B[1 + \eta x^{2n}(t)]\dot{x} + Kx(t) = \left(\frac{P_s}{k_t}\right) \frac{x(t + \tau) - x(t - \tau)}{x_0 + x(t)}, \quad (2.36)$$

em que  $x_0 + x(t) > 0$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

A Figura 2.5 apresenta as características do fator de amortecimento não-linear para vários valores de  $n$ . Quando  $n$  aumenta, o fator de amortecimento fica próximo de uma constante para valores pequenos de  $x$  e assume um aumento mais acentuado à medida que  $x$  se aproxima de  $x_0$ , ou seja, quando  $\frac{x}{x_0} \approx 1$ .

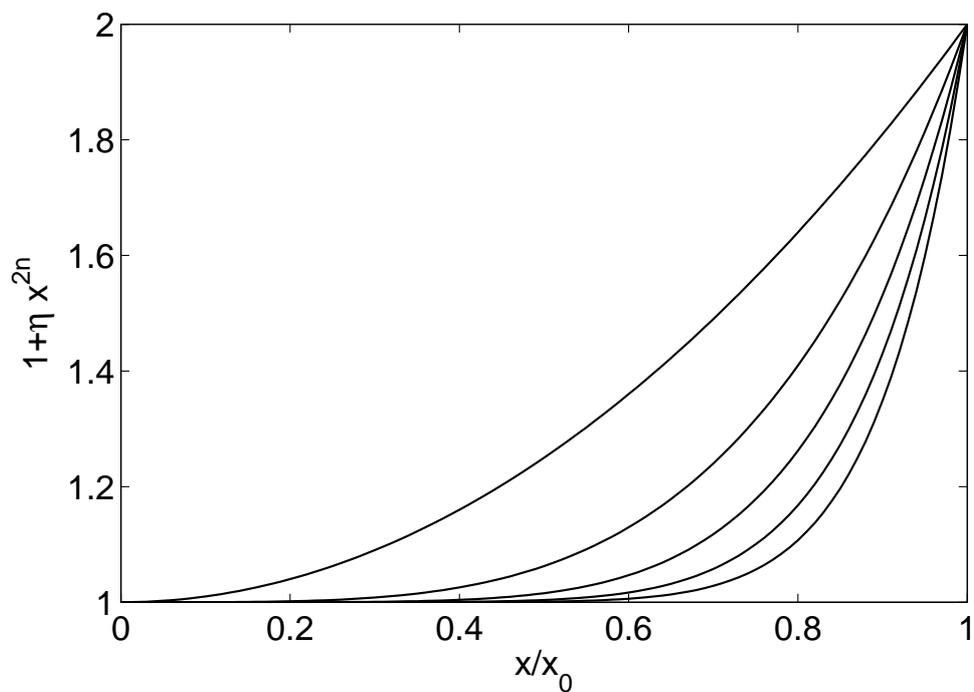


Figura 2.5: Fator de amortecimento não-linear  $1 + \eta x^{2n}$  versus  $\frac{x}{x_0}$  para  $\eta x_0^{2n} = 1$  e  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ , da esquerda para direita.

Novamente, usando os mesmos procedimentos do balanço harmônico de primeira ordem e considerando a oscilação da forma (2.23), obtemos

$$P_{sub} = \frac{k_t x_0 B w}{4 \text{sen} w \tau} (1 + r \eta x_0^{2n} \alpha^{2n}) (1 + \sqrt{1 - \alpha^2}), \quad (2.37)$$

em que  $0 < w \tau < \pi$ . A constante  $r$  é dada por:

$$r = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(n + 2)}, \quad (2.38)$$

em que  $\Gamma$  é a generalização da função fatorial, denominada função Gamma.

O valor limiar de oscilação  $P_{limiar} = P_{sub}(0)$  é ainda dado pela equação (2.28), independente de  $n$ . Para facilitar a análise de  $P_{sub}(\alpha)$ , seja

$$p = \frac{P_{sub}}{P_{limiar}}$$

a pressão normalizada, e

$$\beta = \eta x_0^{2n}$$

o coeficiente não-linear normalizado. A equação (2.37) torna-se

$$p = \frac{1}{2} (1 + r \beta x^{2n}) (1 + \sqrt{1 - \alpha^2}). \quad (2.39)$$

O caso  $n = 1$  foi abordado na seção anterior. Agora nós iremos apresentar resultados para  $n > 1$ . A Figura 2.6 apresenta curvas de  $p(\alpha)$  para vários valores de  $n$  ( $n > 1$ ) e  $\beta$ . Todas as curvas decrescem quando  $\alpha$  é maior que zero, o que mostra a existência de uma bifurcação subcrítica. De fato, temos que  $P'(0) = 0$  e  $P''(0) < 0$  para  $n > 1$ , o que mostra que o limiar é sempre um máximo local. Algumas curvas têm um ponto de mínimo local, para  $0 < \alpha < 1$ , o que indica uma bifurcação sela-nó entre um ciclo limite instável e um ciclo limite estável.

Esse novo modelo estendido produz o fenômeno de histerese oscilatória, como segue. A Figura (2.7) mostra um exemplo de histerese para  $n = 5$  e  $\beta = 12$  substituídos em (2.39). Como a pressão subglotal aumenta, o início da oscilação é produzido na bifurcação de Hopf subcrítica, em que a posição de equilíbrio das pregas vocais torna-se instável.

Mais uma vez, o sistema tem uma oscilação estável (ciclo limite), na qual a pressão pulmonar pode ser diminuída até o sistema alcançar a bifurcação sela-nó. Nesse ponto, o ciclo limite estável anula-se e o sistema retorna ao repouso. Portanto, a pressão limiar

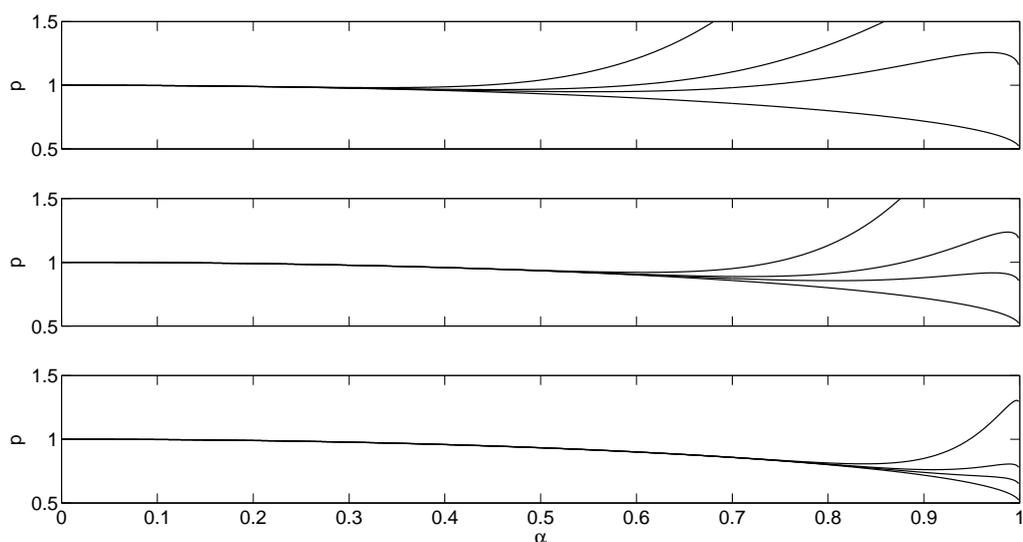


Figura 2.6: Pressão subglotal normalizada  $p$  versus amplitude de oscilação normalizada  $\alpha$  para  $n = 3$  (em cima),  $n = 5$  (no meio) e  $n = 10$  (em baixo). Em cada painel, a curva corresponde a valores de  $\beta = 0, 5, 10$  e  $30$  (de baixo para cima).

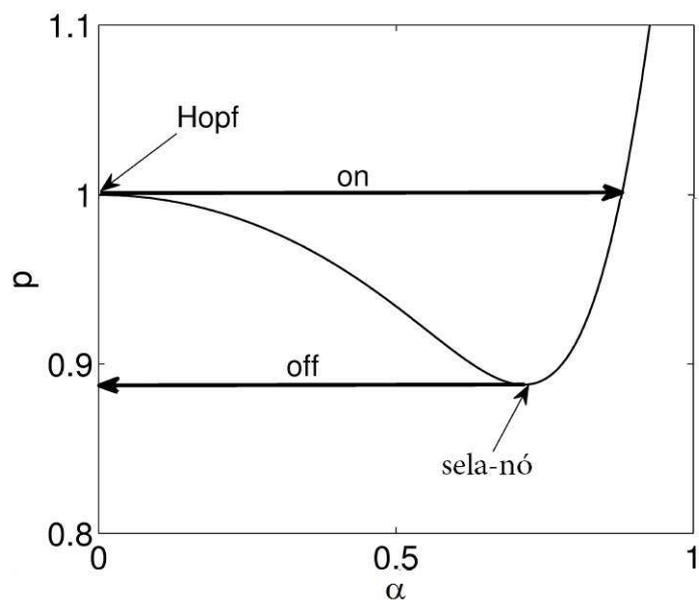


Figura 2.7: Ilustração do fenômeno de oscilação histerese.

para o fim da oscilação, denotada por  $p_{offset}$ , é dada por seu valor no mínimo local e é menor que a pressão limiar para o início da oscilação, formando um loop de histerese onset-offset. No exemplo em questão,  $p_{offset} = 0.89$ .

Como mostrado na Figura 2.6, o ponto de pressão mínima local (quando existe) cresce para maiores valores da amplitude  $\alpha$  com  $n$  crescendo e o valor de  $p_{offset}$  decrescendo. Quando  $n \rightarrow \infty$   $p(\alpha)$ , torna-se mais próximo da curva para  $\beta = 0$ , o que representa um limite inferior limitado por  $p$ .

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## RÉPLICA MECÂNICA

Para verificar a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, utilizaremos dados colhidos de uma réplica mecânica do aparelho fonador humano. Uma bancada experimental presente no laboratório Gipsa-lab [54] em Grenoble-França, foi disponibilizada para que pudéssemos qualificar os fenômenos observados *in vitro*. A coleta de dados em seres humanos (estudo *in vivo*) é muito complexa, porque as estruturas da laringe são pequenas e frágeis, e também seria complicado descrever a interação dos fenômenos acústicos, aerodinâmicos e biomecânicos. Por essa razão, faremos medições *in vitro* que nos permitirão validar vários aspectos das interações entre o escoamento de ar, as estruturas deformáveis e a acústica [54].

---

### 3.1 Descrição geral do dispositivo experimental

---

A Figura 3.1 apresenta a foto do aparato experimental. O objetivo desse aparato é a reprodução de fenômenos acústicos, aerodinâmicos e biomecânicos que ocorrem durante a fonação. Esse dispositivo é constituído por sistemas de aquisição e transmissão de dados, assim como os “órgãos” que compõem o aparelho fonador. A réplica nos dá acesso a múltiplas grandezas, tais como a pressão de escoamento do ar, a pressão acústica ou

até mesmo o deslocamento das pregas de látex, além de permitir o controle de vários parâmetros, tais como: rigidez das pregas vocais, variação de pressão pulmonar e tamanho do trato vocal. Vamos apresentar as descrições gerais do dispositivo experimental e os procedimentos de medida.

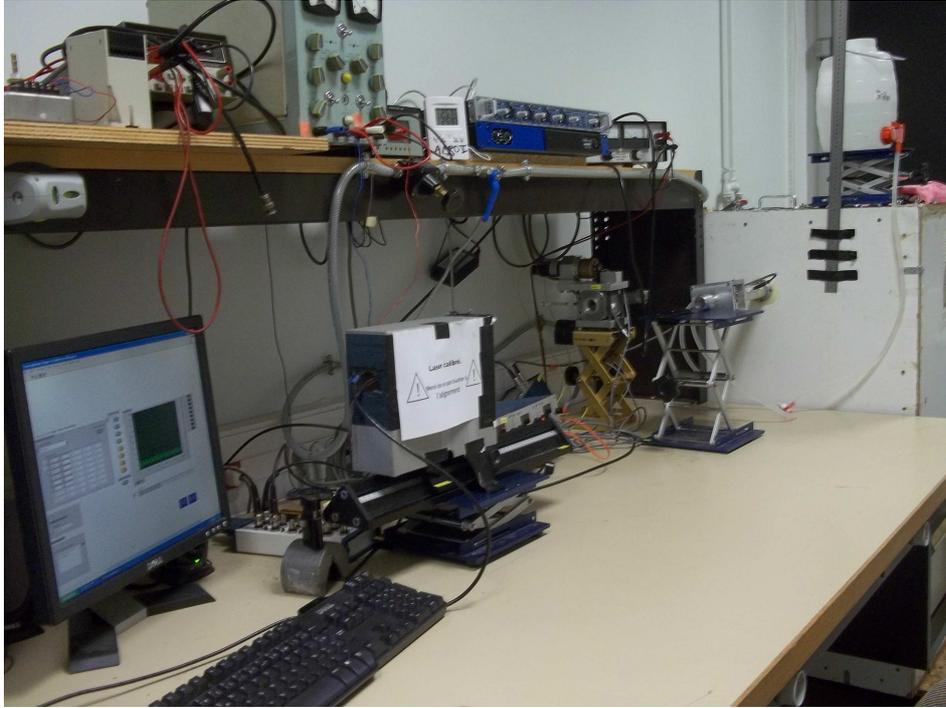


Figura 3.1: Vista geral do aparato experimental.

Vários trabalhos foram desenvolvidos com o uso dessa réplica do aparelho fonador, como pode ser consultado em [49, 54, 56, 57, 58]. A representação esquematizada está na Figura 3.2.

Cada componente do aparelho fonador possui uma finalidade. Por exemplo, o reservatório de pressão modela os pulmões; peças metálicas recobertas por látex, preenchidos com água, modelam as pregas vocais; ressonadores acústicos feitos de plástico ou metal modelam a traqueia e o trato vocal; e um dispositivo de medida adaptado à maquete permite ter acesso a várias grandezas físicas, tais como a medida de pressão (acústica e escoamento) e o deslocamento das pregas vocais em um sistema óptico laser. Apresentaremos uma descrição detalhada de cada um desses componentes.

### Reservatório de pressão

Os pulmões são representados por um reservatório de ar, constituído por uma caixa de

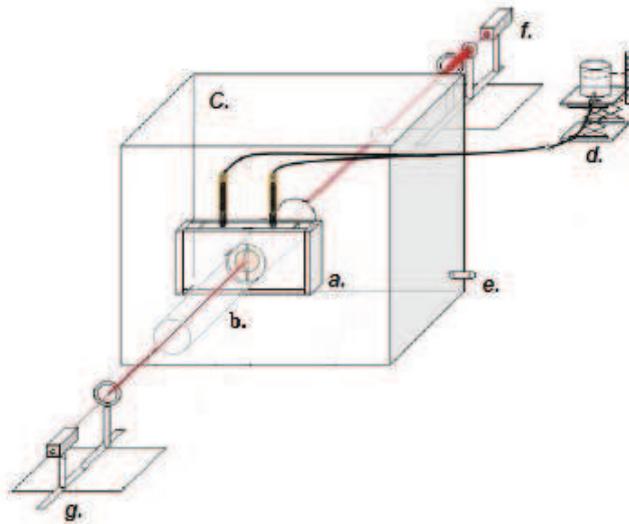


Figura 3.2: Representação esquemática do dispositivo experimental do aparelho fonador, adaptada de [54], em que a letra a) indica a réplica das pregas vocais; b) o ressonador acústico; c) o reservatório de pressão; d) o reservatório de água; e) a entrada de ar; e f) e g) o diodo laser, o fotodiodo e as lentes ópticas.

madeira, com volume de aproximadamente  $0.75 \text{ m}^3$ . Suas paredes internas são recobertas de espuma absorvente, afim de reduzir fortemente as ressonâncias acústicas ligadas às dimensões do reservatório. A entrada de ar é situada abaixo do reservatório e a saída de ar está situada na parte alta do reservatório. A junção do reservatório à réplica das pregas vocais (Figura 3.2-a) é feita por um tubo metálico que modela a traquéia. A pressão do reservatório é controlada por meio de um regulador manual de pressão Norgren 11 – 818 – 987 e pode variar de poucos Pa até 5000 Pa. A pressão a montante da réplica (pressão subglotal) é medida por um sensor de pressão (Kulite XCS 093) com uma precisão típica de 5 Pa.

### Maquete das pregas vocais

A Figura 3.3 representa a réplica das pregas vocais, desde a montagem das pregas vocais até a forma final. A réplica da prega vocal é feita de látex, preenchida com água, com pressão controlada por um recipiente de água regulável, e é capaz de produzir oscilações auto sustentadas em valores fisiologicamente realistas da pressão pulmonar e da frequência fundamental. Um ressonador acústico é ligado à saída da réplica da prega vocal, para imitar o trato vocal.

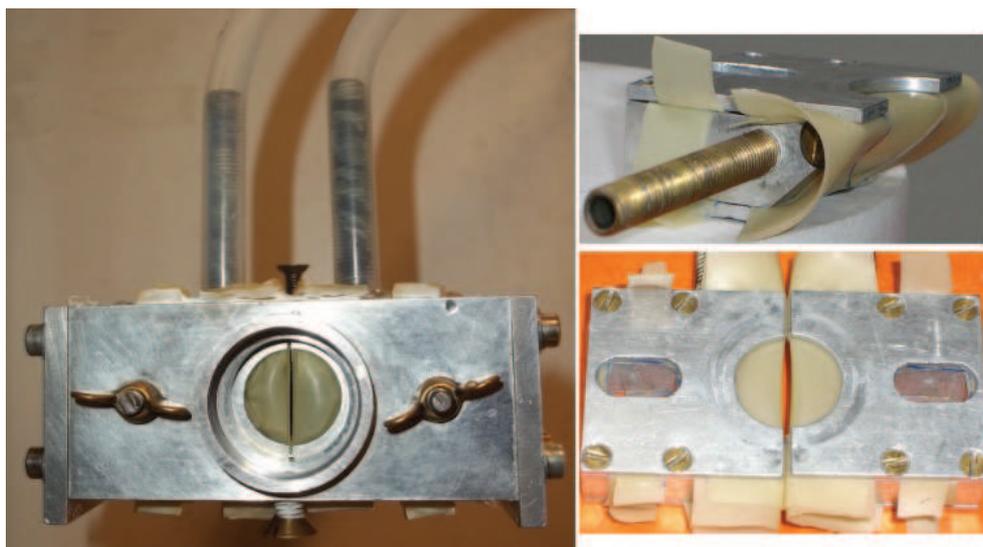


Figura 3.3: Maquete das pregas vocais: as fotos à direita (extraídas de [58]) representam a montagem e a foto à esquerda representa a forma final da réplica das pregas vocais.

O laboratório possui diversas réplicas, porém essa que trabalhamos possui características mais realísticas quando comparadas com as pregas vocais humanas. A maquete consiste de duas peças metálicas recobertas com látex, que reproduzem a estrutura das pregas vocais numa escala 3 : 1, com 2 cm de comprimento e aproximadamente 1 cm de largura (dependendo da quantidade de água injetada). O espaço entre cada peça metálica e a cobertura de látex é preenchido com água a uma pressão interna controlada por uma altura de uma coluna de água. Trabalhamos apenas com uma coluna de água (um recipiente, Figura 3.2-d), para garantir que o preenchimento de água em cada prega fosse semelhante, pois assumimos que as pregas vocais são simétricas em nosso modelo. Esse recipiente era ligado às pregas por um tubo de plástico. A pressão de água entre o látex e as peças metálicas é denominada pressão interna, cuja notação será  $P_c$ . Essa pressão  $P_c$  influencia o movimento entre as duas pregas vocais, pois interfere diretamente na rigidez das mesmas. Se tivermos uma forte pressão de água, as propriedades mecânicas de cada réplica das pregas vocais podem mudar, devido ao alongamento do látex e a seu inchaço. A réplica é fixada na saída do reservatório de ar, unida por um tubo fixo que simula a traquéia e exposta ao escoamento de ar. As medições geométricas, tais como a separação entre as dobras opostas de látex (abertura) são feitas usando um laser (com ajuda de lentes convergentes, Figura 3.2-f e g). O sistema óptico é calibrado a uma precisão de 0,01 mm.

### Ressonadores acústicos

A terceira parte da maquete é constituída pelos ressonadores acústicos que, quando inseridos após a réplica das pregas vocais, formam o trato vocal. Esses ressonadores po-



Figura 3.4: Ressonadores acústicos

dem ser colocados tanto antes (a montante), simulando as variações do comprimento da traquéia, quanto depois (a jusante) da maquete das pregas vocais, simulando o comprimento do trato vocal. O ressonador a jusante, que denominamos trato vocal, é representado por um tubo cilíndrico, com diâmetro de 2.5 cm e comprimento que pode variar de 1 cm até 250 cm. Nos experimentos, utilizamos tubos grandes, porém é óbvio que isso foge da ordem de grandeza do trato vocal dos seres humanos. O ressonador a montante também possui o mesmo diâmetro, e comprimento fixo, ligando a réplica ao reservatório de pressão (que é alimentado por uma pressão constante). A precisão dos dados medidos é de 5 Pa para a pressão [56], e de 10 Hz para a frequência de oscilação [55]. Detalhes da réplica das pregas vocais, tais como a ordem de grandeza entre humanos e a réplica, podem ser encontrados em [54, 56].

## 3.2 Procedimento experimental

---

Depois da réplica das pregas vocais montada (recortando látex no formato apropriado e agrupando as partes que a compõem), ela é acoplada ao ressonador acústico a montante (fixado), que faz a ligação com o reservatório de pressão. A réplica das pregas vocais é então preenchida com água (uniformemente) proveniente de um reservatório localizado acima dela (Figura 3.2-d). A massa de água vibrante irá depender da altura em que esse reservatório será colocado (coluna de água). A pressão interna de água  $P_c$  é controlada por uma plataforma que pode realizar um movimento de elevação e abaixamento da coluna de água através de uma manivela, em que a altura máxima equivale a  $P_c$  igual a 10000 Pa.

Antes de iniciarmos o procedimento de coletas de dados, é necessário a calibração do sistema de medidas, tais como os sensores de pressão e do sistema óptico (diodo laser e fotodiodo). Em seguida, inserimos os dados obtidos via calibração no software Labview7 para iniciarmos o experimento. Após o sistema de aquisição acionado e a válvula de pressão aberta, sinais elétricos amplificados são capturados e convertidos em gráficos que nos auxiliarão na obtenção de valores, tais como abertura entre as pregas vocais, a pressão subglotal, a resposta mecânica e o espectrograma do sinal proveniente do fotodiodo. A aquisição dos sinais medidos pelos sensores é efetuada graças a um sistema de aquisição com o software Labview7. As interfaces do aplicativo permitem registrar os dados que serão em seguida analisados no programa Matlab7 [54]. Um sensor Kulite XCS-0.93-0.35-Bar-G posicionado antes da réplica das pregas vocais obtém os valores da pressão do escoamento de ar, e a pressão acústica é obtida através de microfones e amplificadores. O dispositivo responsável pela captura do deslocamento da réplica das pregas vocais é o sistema óptico (Figura 3.2- f e g), em que esse deslocamento é provocado pelo escoamento de ar proveniente do reservatório de pressão. Descreveremos com maior detalhe o procedimento de coleta de dados do aparato experimental.

### 3.2.1 Resposta mecânica

A principal característica da resposta em frequência pode ser o pico de ressonância exibido na característica da amplitude. Quando a frequência de oscilação de uma fonte coincide com a frequência natural de oscilação de um corpo na sua vizinhança, a amplitude

de oscilação atinge valores elevados, pois a fonte cede energia progressivamente ao corpo, e esse fenômeno é denominado ressonância [3, 51]. O “estreitamento” da ressonância é medido quantitativamente pelo fator de qualidade  $Q_0$ . O fator de qualidade relaciona a energia dissipada no circuito por ciclo de oscilação. Por meio da resposta mecânica podemos obter os parâmetros mecânicos de amortecimento  $B$  e rigidez  $K$  através das relações

$$w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}},$$

e

$$Q_0 = \frac{Mw_0}{B},$$

pois a frequência de ressonância mecânica  $f_0 = \frac{w_0}{2\pi}$  e o fator de qualidade  $Q_0$  podem ser obtidos através do experimento.

**Procedimento para o experimento da resposta mecânica:** a réplica das pregas vocais é excitada por um sinal acústico a partir de uma câmara de compressão localizada em sua proximidade, porém sem qualquer contato físico (vide Figura 3.5). As medidas captadas pelo microfone permitem medir as variações de intensidade de excitação que a maquete recebe.

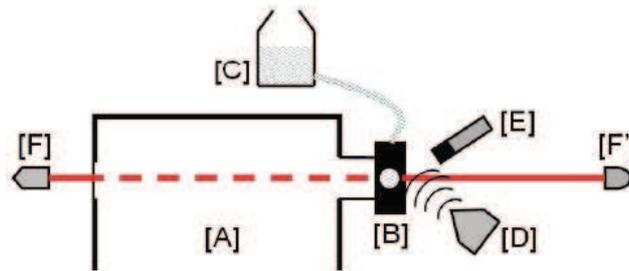


Figura 3.5: Descrição esquemática do dispositivo experimental para as medidas da resposta mecânica: [A] reservatório de pressão, [B] maquete das pregas vocais, [C] reservatório de água que permite a regulagem de  $P_c$ , [D] alto-falante direcional, [E] microfone de medida e [F,F'] sistema de medida laser (Figura extraída e adaptada de [14]).

Durante o experimento, a frequência do sinal é aumentada de 50 Hz a 400 Hz, acrescentando 1 Hz em cada passo, e a abertura entre a réplica das pregas vocais é medida. A partir dos dados tratados, a amplitude e a fase do movimento oscilatório das pregas de látex são calculadas.

Temos que a potência é proporcional ao quadrado da amplitude,

$$P \propto \frac{w_0}{Q_0} \frac{1}{\left(\frac{w_0}{w} - \frac{w}{w_0}\right)^2 + \frac{1}{Q_0^2}}, \quad (3.1)$$

Ou ainda

$$\frac{1}{P} = C \frac{Q_0}{w_0} \left[ \left(\frac{w_0}{w} - \frac{w}{w_0}\right)^2 + \frac{1}{Q_0^2} \right], \quad (3.2)$$

onde  $C$  é uma constante de ajuste. Em frequências próximas da ressonância, obtemos um polinômio quadrático [52]

$$\frac{1}{P} = b_1 f_0^2 + b_2 f_0 + b_3 \quad (3.3)$$

que é ajustado aos dados usando o método dos mínimos quadrados.

Os coeficientes de (3.3):

$$b_1 = \frac{4Q_0C}{w_0^3}, \quad b_2 = -\frac{8Q_0C}{w_0^2} \quad \text{e} \quad b_3 = \frac{4Q_0C}{w_0} + \frac{C}{Qw_0},$$

nos fornecerão, após algumas manipulações algébricas, as expressões:

$$w_0 = -2\pi \frac{b_2}{2b_1} \quad \text{e} \quad Q_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{4b_1b_3}{b_2^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

A Figura 3.6 mostra um exemplo da resposta mecânica obtida para a pressão de água  $P_c = 415 \text{ mm H}_2\text{O}$ .

### 3.2.2 Pressão subglotal, abertura entre as pregas vocais da réplica e a frequência de oscilação

Para iniciar o experimento, o ar do reservatório deve ser acionado através de uma válvula até obter uma pressão mínima em que a oscilação no látex possa ser detectada. Após a detecção, a oscilação é mantida por alguns segundos e, em seguida, a pressão é diminuída até que a oscilação seja interrompida. O laser é responsável pela captação do deslocamento da “prega vocal” (réplica). Para efetuar esse experimento é necessária a ausência de luz, por causa do laser. O sinal registrado (pressão, pressão acústica, sinal

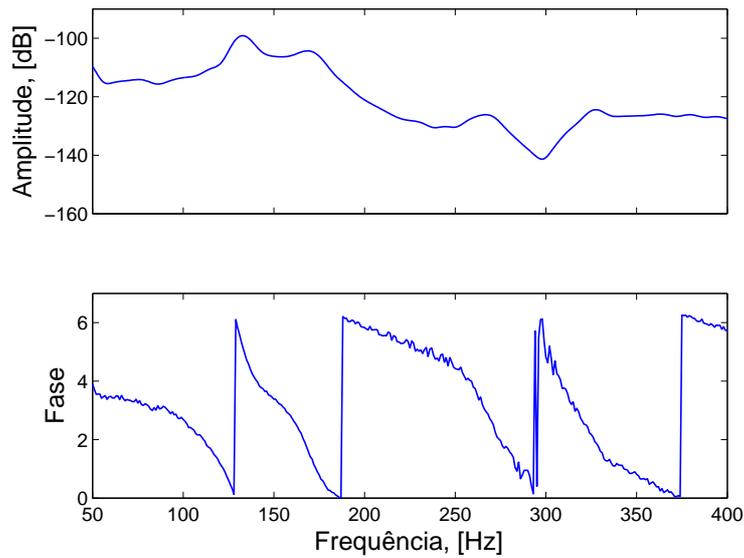


Figura 3.6: Exemplo da resposta mecânica da réplica. As primeiras três frequências de ressonância são  $132\text{Hz}$ ,  $168\text{Hz}$  e  $266\text{Hz}$ , e os seus fatores  $Q_0$  são 10.5, 8.5 e 12.6, respectivamente.

proveniente do fotodiodo) é analisado. O cálculo de auto-correlação do sinal permite determinar a presença das oscilações e sua frequência fundamental [54]. Os dados coletados em um dos experimentos estão exibidos nas Figuras 3.7 e 3.9. Depois da aquisição, um programa implementado no Matlab filtra os dados para eliminar os ruídos, e em seguida, gera os gráficos que estão mostrados nas Figuras 3.7 e 3.9. A Figura 3.7 exhibe a detecção da pressão limiar de oscilação e o deslocamento das pregas de látex. As pressões limiares para o início e o fim da oscilação podem ser extraídas pelo gráfico, por detecção manual do seguinte modo: os instantes nos quais a oscilação inicia e termina são identificados manualmente no gráfico da frequência (painel superior da Figura 3.9), e então a pressão limiar no início  $P_{onset}$  e no fim  $P_{offset}$  da oscilação são determinados a partir dos valores de pressão medidos para esses instantes; posteriormente, são extraídos dois intervalos próximos ao início e ao fim da oscilação, onde a frequência é estável e a frequência média  $f_{onset}$  e  $f_{offset}$  no início e no fim da oscilação em cada intervalo é calculada.

Os valores da frequência de oscilação e o gráfico do espectrograma do sinal proveniente do fotodiodo também podem ser obtidos através do experimento. O painel superior da Figura 3.9 exhibe a frequência de oscilação em função do tempo e o painel inferior, um exemplo de espectrograma obtido. Observa-se a presença de vários harmônicos, o

que sugere a utilização de balanço harmônico de ordem superior para obter uma melhor aproximação. A Figura 3.8 exibe um zoom da Figura 3.7, que contém a detecção da oscilação das pregas de látex.

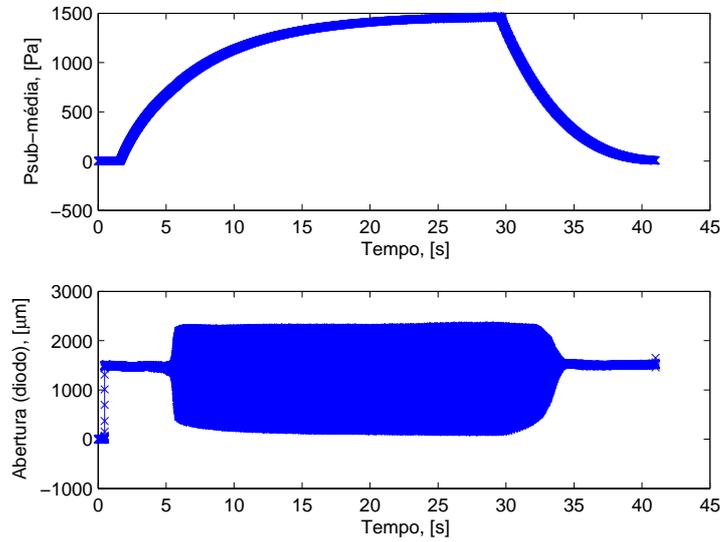


Figura 3.7: Exemplo de detecção da pressão limiar de oscilação. Painel superior: pressão subglotal média. Painel inferior: abertura (separação) entre as duas pregas de látex.

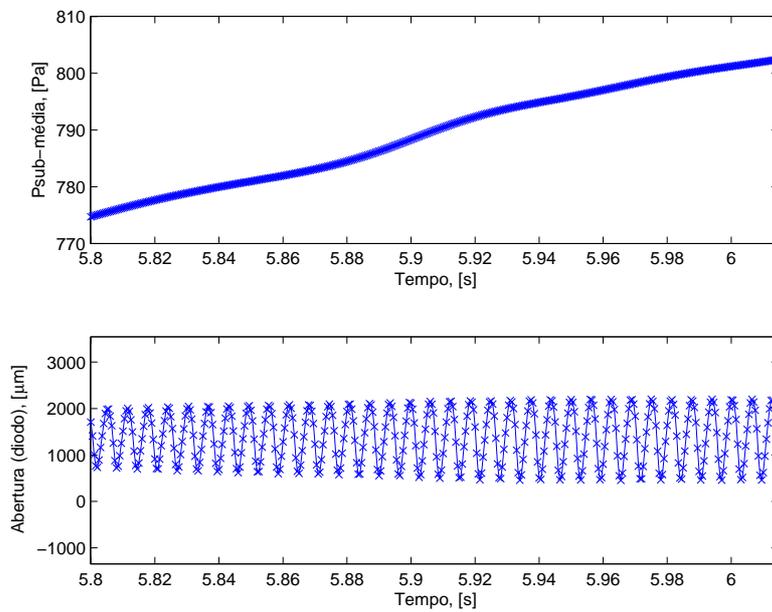


Figura 3.8: Exemplo da oscilação das pregas de látex.

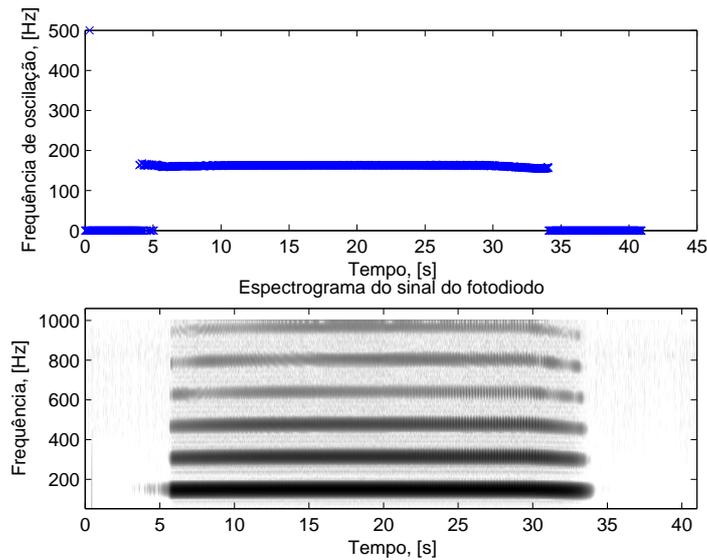


Figura 3.9: Exemplo de detecção de frequência de oscilação (painel superior) e um espectrograma do sinal proveniente do fotodiodo (painel inferior).

Antes de cada experimento realizado para a obtenção da pressão limiar de oscilação, o procedimento da resposta mecânica foi feito. Algumas pequenas alterações podem ser concebíveis, já que as propriedades do látex foram alteradas, tanto pela expansão ocorrida pelo preenchimento de água, quanto na troca do látex.

### 3.3 Influência dos parâmetros

Durante a produção de sons na fonação, as oscilações das pregas vocais são resultado da instabilidade da interação entre o fluxo glotal e os tecidos da laringe. O mesmo ocorre para as oscilações nas réplicas deformáveis das pregas vocais em reprodução *in vitro* do sistema fonador [15]. Assim, em um contexto *in vivo* ou *in vitro*, a instabilidade do sistema e as propriedades das oscilações resultantes dependerão de muitos fatores, tais como: propriedades mecânicas da estrutura deformável; geometria da glote; propriedades do fluxo de ar e acústicas dos ressonadores. A fim de caracterizar as oscilações da réplica das pregas vocais, as quantidades medidas experimentalmente foram:

- $P_{onset}$ : pressão limiar para que haja início das oscilações;
- $P_{offset}$ : pressão limiar para o fim das oscilações;

-  $F_0$ : frequência fundamental de oscilação.

Essas quantidades são bons indicadores da relevância dos resultados obtidos *in vitro* quando comparados ao verdadeiro aparelho vocal. Eles também servem como pontos de comparação com as previsões teóricas feitas no modelo, testando assim a validade do mesmo. Vamos descrever nesta seção os dados obtidos através do aparato experimental descrito no capítulo anterior e sua influência nas diferentes condições mecânicas, geométricas, do escoamento e acústicas.

### 3.3.1 Efeito da acoplamento acústico

Para uma série de experimentos, trabalhamos com a pressão interna de água  $P_c$  fixada a 413 mm H<sub>2</sub>O, ou, equivalentemente, 4050 Pa, para uma abertura entre as pregas vocais de 1,33 mm. Primeiramente, colhemos a resposta mecânica (descrita no capítulo anterior) e, em seguida, selecionamos os ressonadores a jusante de comprimentos  $l$  variando de 0 a 250 cm.

#### Pressão limiar e frequência fundamental

A Figura 3.10 mostra os dados experimentais para a variação do comprimento dos ressonadores. Diferentes observações podem ser feitas sobre este experimento. As pressões limiaries para iniciar a oscilação (onset) são maiores que as pressões limiaries para terminar (offset). Este fenômeno foi descrito em [38] como uma histerese de oscilação, e pode ser observada experimentalmente através destes dados. Notamos que, nos picos na curva de pressão, ocorrem saltos de frequência decorrentes da variação do comprimento do trato vocal.

### 3.3.2 Influência da variação das características mecânicas

#### Abertura entre as duas pregas vocais de látex

A Figura 3.11 exhibe a influência da pressão interna de água  $P_c$  sobre a distância entre as duas pregas vocais de látex. Podemos constatar que a abertura diminui quando a pressão interna aumenta.

#### Pressão limiar e frequência fundamental

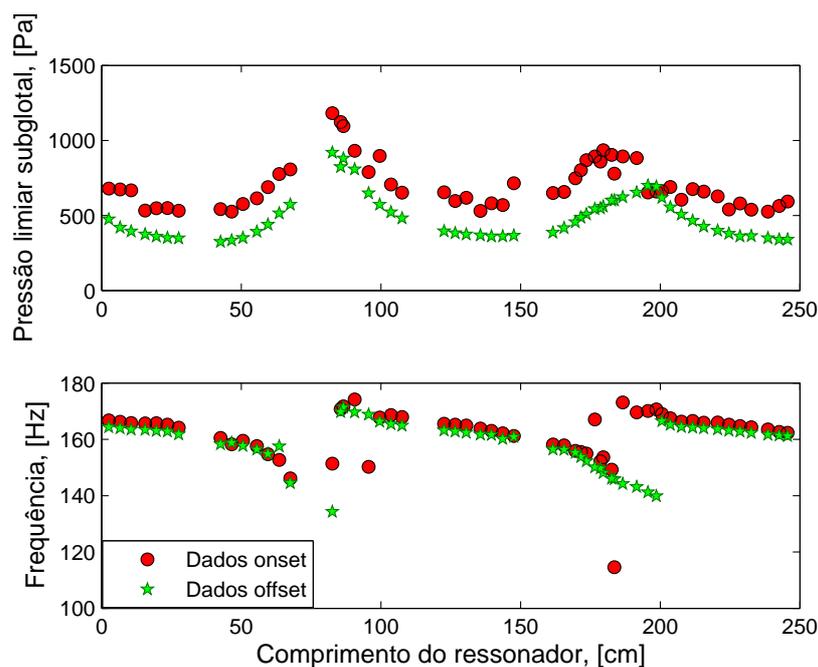


Figura 3.10: Medida experimental da influência do trato vocal. Pressões  $P_{onset}$ ,  $P_{offset}$  e frequência fundamental  $f_0$  versus comprimento do trato vocal  $l$ , com  $P_c = 413 \text{ mm H}_2\text{O}$ . Círculos: valores onset; estrelas: valores offset.

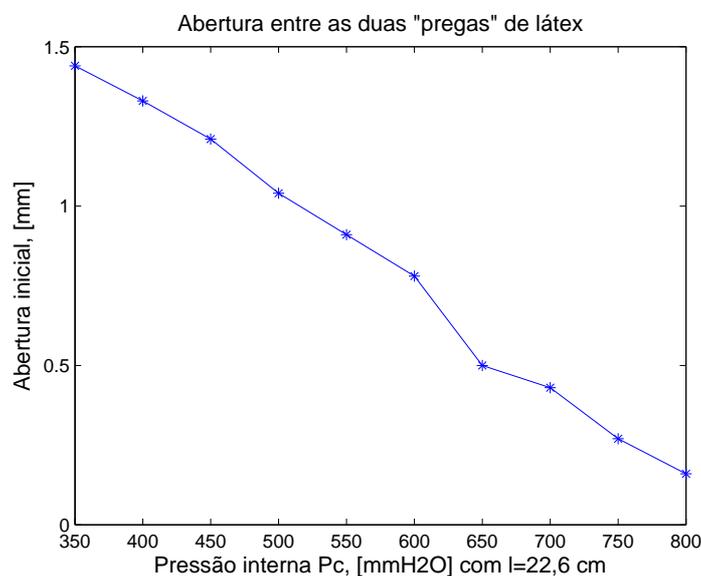


Figura 3.11: Abertura entre as duas pregas vocais de látex versus pressão interna de água  $P_c$ .

As Figuras 3.12 e 3.13 exibem os dados experimentais para a variação da pressão interna de água  $P_c$ . Analisamos a interação da pressão interna de água para quatro

ressonadores diferentes. A pressão interna foi variada de 350 mmH<sub>2</sub>O a 800 mmH<sub>2</sub>O. Novamente, aqui podemos observar o fenômeno de histerese. A pressão limiar para o início da oscilação é mais elevada que para o fim da oscilação.

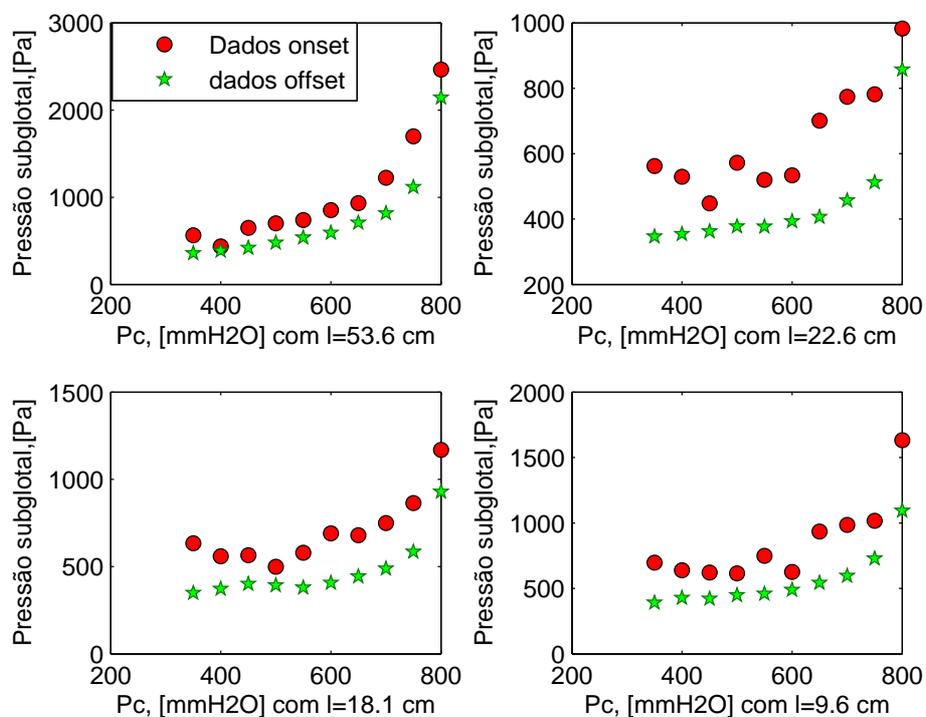


Figura 3.12: Pressão subglotal versus pressão interna de água  $P_c$ . Círculos: valores onset; estrelas: valores offset.

Estes resultados mostram que o fator de rigidez  $K$  deve ser considerado como um parâmetro variável, já que ele também influencia a oscilação das pregas vocais.

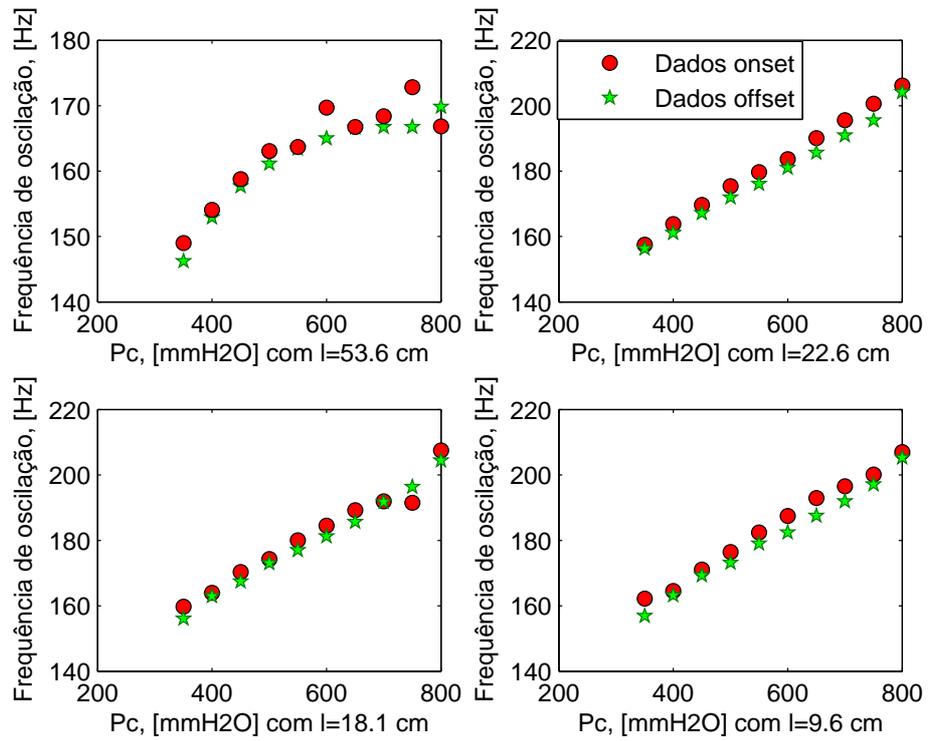


Figura 3.13: Frequência de oscilação da réplica versus pressão interna de água  $P_c$ .  
Círculos: valores onset; estrelas: valores offset.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## ANÁLISE DA INTERAÇÃO ENTRE PREGAS VOCAIS E O TRATO VOCAL

Neste capítulo, estenderemos os resultados teóricos considerando o efeito do trato vocal e verificaremos a teoria utilizando dados colhidos na réplica mecânica. Primeiro, o comportamento qualitativo será analisado, utilizando o teorema de bifurcação de Hopf para equações diferenciais funcionais, pois temos equações com atraso e avanço de tempo. Posteriormente, ajustaremos o modelo aos dados colhidos, seguindo com uma análise dos resultados obtidos.

---

### 4.1 Análise da estabilidade do modelo com o trato vocal para obter as condições limiares da vibração

---

No capítulo 2, analisamos a dinâmica de estabilidade para o modelo sem o acoplamento do trato vocal. O teorema de bifurcação de Hopf [50] foi aplicado quando o atraso de onda  $\tau$  era suficientemente pequeno, pois tínhamos uma equação diferencial ordinária. E,

em um segundo momento, utilizamos a técnica do balanço harmônico no caso em que  $\tau$  é qualquer. Nesta seção, analisaremos o comportamento dinâmico do modelo com o trato vocal, para verificar se há uma mudança qualitativa no retrato de fase, tal como foi feito anteriormente.

### 4.1.1 Posição de equilíbrio

A posição de equilíbrio  $x(t) = x^*$  foi apresentada em (1.32), e resolvendo

$$\begin{cases} \frac{-K}{M}u - \frac{B}{M}(1 + \eta u^2)v + P_{supra} + \frac{(P_{sub} - P_{supra})}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e\right) = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

obtivemos as condições para que  $x^*$  seja um ponto de equilíbrio.

Sabemos que, no equilíbrio,

$$\frac{A_b}{A_a} = 1$$

e que a componente de pressão acústica  $\tilde{P}$  é nula. No ponto de equilíbrio,

$$x^* = \frac{P_g}{K}$$

e

$$P_g = \bar{P}_{supra} - k_c \frac{\bar{P}_{sub} - \bar{P}_{supra}}{k_t}.$$

Esses fatos nos conduzem à expressão:

$$Kx^* = \bar{P}_{supra} - \Delta\bar{P} \frac{k_e}{k_t}, \quad (4.2)$$

em que a pressão estática  $\bar{P}_{supra}$  é obtida pela equação (1.27), e  $\Delta\bar{P}$  é

$$\Delta\bar{P} = (\bar{P}_{sub} - \bar{P}_{supra}),$$

onde  $\bar{P}_{sub}$  e  $\bar{P}_{supra}$  são as pressões estáticas nas regiões subglotal e supraglotal, respectivamente.

Fazendo a mudança de variáveis  $x(t) = \tilde{x}(t) + x^*$ , o modelo torna-se

$$M\ddot{\tilde{x}} + B[1 + \eta(\tilde{x} + x^*)^2]\dot{\tilde{x}} + K(\tilde{x} + x^*) = P_{supra} - \frac{\Delta P}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e\right), \quad (4.3)$$

onde  $x^*$  é o deslocamento de equilíbrio quando há fluxo de ar.

Substituindo a equação (4.2) em (4.3), tem-se

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\tilde{x}} + B[1 + \eta(\tilde{x} + x^*)^2]\dot{\tilde{x}} + K\tilde{x} &= P_{supra} + \frac{\Delta P}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e\right) - \bar{P}_{supra} - \Delta\bar{P}\frac{k_e}{k_t} \\
 &= \tilde{P}_{supra} + \frac{\Delta P}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e\right) - \Delta\bar{P}\frac{k_e}{k_t} \\
 &= \tilde{P}_{supra} + \frac{\bar{P}_{sub} - \bar{P}_{supra} - \tilde{P}_{supra}}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e\right) - \Delta\bar{P}\frac{k_e}{k_t} \\
 &= \tilde{P}_{supra} + \frac{\tilde{P}_{supra}}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a} - k_e\right) + \frac{\bar{P}_{sub}}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a}\right) \\
 &\quad - \frac{\bar{P}_{supra}}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a}\right) \\
 &= \frac{\tilde{P}_{supra}}{k_t} \left(1 - \frac{A_b}{A_a}k_e + k_t\right) + \Delta\bar{P} \left(1 - \frac{A_b}{A_a}\right),
 \end{aligned}$$

que conduz a forma final:

$$M\ddot{\tilde{x}} + B[1 + \eta(\tilde{x} + x^*)^2]\dot{\tilde{x}} + K\tilde{x} = \frac{1}{k_t} \left[ \Delta\bar{P}F_a + \tilde{P}_{supra}(k_c - F_a) \right], \quad (4.4)$$

com  $F_a = 1 - \frac{A_b}{A_a}$ .

### 4.1.2 Linearização do modelo e análise de bifurcação de Hopf

Nosso sistema não-linear possui um ponto de equilíbrio diferente de  $(0, 0)$ . Neste caso, será necessário efetuar uma mudança de variável de forma a permitir a linearização da equação (4.4) em torno da origem.

O sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = y = P(\tilde{x}, y) \\ \dot{y} = \frac{-K}{M}\tilde{x} - \frac{B}{M}[1 + \eta(\tilde{x} + x^*)^2]y + \frac{1}{Mk_t} \left[ \Delta\bar{P}F_a + \tilde{P}_{supra}(k_c - F_a) \right] = Q(\tilde{x}, y) \end{cases} \quad (4.5)$$

tem como ponto de equilíbrio o ponto  $(x^*, 0) \neq (0, 0)$ . Aplicando a mudança de variável

$$\begin{cases} \tilde{x} = u + x^* \\ y = v \end{cases} \quad (4.6)$$

O sistema resultante

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = P(u + x^*, v) \\ \frac{dv}{dt} = P(v + x^*, v) \end{cases}. \quad (4.7)$$

terá como ponto de equilíbrio o ponto  $(0,0)$ . A partir do sistema (4.7), podemos obter a equação variacional [18]:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t)|_{(x^*,0)} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} + \alpha\bar{v}k_c & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta\bar{P}}{Mk_t(x_0 + x^*)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \tau) \\ y(t - \tau) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta\bar{P}}{Mk_t(x_0 + x^*)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t + \tau) \\ y(t + \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\bar{v}rk_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t - \vartheta) \\ y(t - \vartheta) \end{bmatrix}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

em que

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}.$$

Logo, a equação linearizada da expressão (4.4) em torno da solução  $x^*$  é

$$M\ddot{\tilde{x}} + B\dot{\tilde{x}} + K\tilde{x} = \frac{\Delta\bar{P}}{k_t(x_0 + x^*)}[\tilde{x}(t + \tau) - \tilde{x}(t - \tau)] + \frac{k_c\alpha\bar{v}}{k_t}[\tilde{x}(t) + r\tilde{x}(t - \vartheta)]. \quad (4.9)$$

A equação característica associada a equação variacional (4.9) é:

$$M\lambda^2 + B\lambda + K = \frac{2\Delta\bar{P}}{k_t(x_0 + x^*)}\text{senh}(\lambda\tau) + \frac{k_c\alpha\bar{v}}{k_t}(1 + re^{-\lambda\vartheta}). \quad (4.10)$$

As condições para iniciar uma oscilação podem ser encontradas aplicando o teorema da bifurcação de Hopf para equações diferenciais funcionais [25]. Assumindo um par de raízes imaginárias

$$\lambda = \pm iw \quad (4.11)$$

na equação (4.10), com  $w$  a frequência angular de oscilação, poderemos saber sob quais condições teremos a bifurcação. Assim, substituindo (4.11) em (4.10), e separando as partes real e imaginária, encontramos duas expressões correspondentes

$$-Mw^2 + K = \frac{k_c\alpha\bar{v}}{k_t}[1 + r \cos(w\vartheta)] \quad (4.12)$$

e

$$wB = \frac{2\Delta\bar{P}}{k_t(x_0 + x^*)}\text{sen}(w\tau) - \frac{k_c\alpha\bar{v}}{k_t}\text{sen}(w\vartheta). \quad (4.13)$$

Para obtermos a expressão da pressão limiar de oscilação, utilizamos a equação (4.13),

$$a_1 = a_2\Delta\bar{P} - a_3\sqrt{\Delta\bar{P}}, \quad (4.14)$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_1 &= wB; \\ a_2 &= \frac{2}{k_t(x_0 + x^*)}\text{sen}(w\tau); \\ a_3 &= -\frac{k_c\alpha}{k_t}\sqrt{\frac{2}{k_t\rho_0}}\text{sen}(w\vartheta). \end{aligned}$$

E fazendo  $y = \sqrt{\Delta\bar{P}}$ , obtemos um polinômio de segundo grau

$$a_1 = a_2y^2 - a_3y$$

com duas raízes reais, uma positiva e outra negativa. No entanto, como

$y = \sqrt{\Delta\bar{P}} > 0$ , o valor negativo de  $y$  não se aplica. Portanto,

$$\Delta\bar{P}_{limiar} = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}, \quad (4.15)$$

será o parâmetro de controle da bifurcação de Hopf. Assim, no valor  $\Delta\bar{P}_{limiar}$ , as raízes cruzam o eixo imaginário do plano complexo da esquerda para a direita e que todas as outras raízes da equação característica possuem parte real nula, como foi demonstrado no capítulo 2.

Portanto, as equações (4.12) e (4.13) representam o valor limiar de oscilação da pressão transglotal  $\Delta\bar{P}$  e a frequência  $w$  do início da oscilação (onset). Essas equações limiares mostram que o trato vocal introduz flutuações tanto na frequência de oscilação quanto na pressão transglotal no início da oscilação  $P_{onset}$ .

Se o trato vocal for desprezado, fazendo  $k_c = 0$ , as equações (4.12) e (4.13) se reduzem a

$$w^2 = \frac{K}{M}$$

e

$$\bar{P}_s = \frac{k_tx_0Bw}{2\text{sen}(w\tau)},$$

que foram determinados no capítulo 2.

## 4.2 Validação do modelo teórico: ajuste aos dados e análise

---

A validade do modelo proposto pode ser testada quando comparamos os resultados preditos com os dados medidos experimentalmente. Nesse contexto, alguns parâmetros serão ajustados a partir dos valores que da réplica, e assim verificaremos a capacidade do modelo de caracterizar a dinâmica da réplica das pregas vocais.

### 4.2.1 Parâmetros da réplica de látex

A partir da resposta mecânica da réplica, a segunda frequência de ressonância mecânica foi adotada como a frequência natural

$$f_n = \frac{\sqrt{K/M}}{2\pi} = 168Hz. \quad (4.16)$$

Essa frequência escolhida foi a mais próxima ressonância para as frequências de oscilação medidas (que estavam no intervalo de 150Hz a 180Hz) e fornece a melhor escolha comparando os dados com a teoria. O valor do fator de qualidade correspondente a essa frequência é  $Q_0 = 8.5$ .

A massa oscilante é determinada principalmente pela massa de água, pois a massa da cobertura da réplica, feita de látex, pode ser desprezada. A partir das dimensões geométricas da réplica, o volume de água contida na réplica foi estimado como  $0.63\text{cm}^3$  [54]. A área média da superfície do látex, exposta ao fluxo de ar, é  $1.57\text{cm}^2$ . Esses valores produzem uma massa por unidade de área dada por  $M = 0.4\text{g/cm}^2$ . Porém, provavelmente nem toda a massa de água e da superfície de látex estão envolvidas no movimento oscilatório. No entanto, iremos manter o valor acima como uma boa estimativa.

Com esse valor para  $M$ , obtemos através do processo de minimização os parâmetros ótimos  $K = 446 \text{ kdyne/cm}^3$  e  $B = 49.7 \text{ dyne.s/cm}^3$ . A posição pré-fonatória de repouso mensurada foi  $x_0 = 0.67\text{mm}$  (semi-abertura), obtida pela medida da distância entre as pregas vocais de látex. Uma estimativa do atraso de tempo  $\tau$  pode ser determinada assumindo um atraso de fase  $\delta$  entre a oscilação na entrada e saída do canal de látex de

60° [66] o qual, em uma oscilação de 168 Hz (frequência natural), corresponde a

$$2\tau w = \delta,$$

ou equivalentemente,

$$\tau = \delta/(4\pi f).$$

Além disso, assumimos  $k_c = 1.2$  [66].

O atraso de tempo para a onda acústica viajar pelo ressonador para frente (direção da boca) e voltar é  $\vartheta = \frac{2l}{\bar{c}}$ , em que  $\bar{c} = 343.2$  m/s é a velocidade do som no ar a 20°C. O coeficiente de reflexão no final da boca é dado por

$$r_i = \frac{(z_0 - z_i)}{(z_0 + z_i)}, \quad (4.17)$$

em que  $z_0$  é a impedância de radiação e  $z_i = \frac{\rho c}{A_t}$  é a impedância acústica do tubo. A impedância de radiação foi calculada usando a aproximação de baixa frequência para um tubo com flange (elemento que une dois componentes de um sistema de tubulações, que permite ser desmontado sem operações destrutivas) no espaço livre:

$$z_0 \approx \frac{\rho_0 c}{2} \frac{jk\Lambda}{1 + jk\Lambda}, \quad (4.18)$$

em que  $k = \frac{2\pi f}{c}$  e  $\Lambda = \sqrt{A_t/\pi}$  [36]. Para valores inferiores à frequência de 200Hz,  $\rho_0 = 1.204$  kg/m<sup>3</sup>. As equações acima produzem  $-1 \leq r_i \leq -0.997$  (com uma parte imaginária menor do que 0.04) e, portanto, um valor de  $r_i = -1$  foi adotado. Devido à área da seção transversal do ressonador ser grande, a pressão estática na sua entrada é  $\bar{P} \approx 0$ .

## 4.2.2 Resultados teóricos

A Figura 4.1 exhibe os dados onset colhidos e os resultados teóricos obtidos a partir das equações (4.12) e (4.13), com os parâmetros mencionados anteriormente.

Podemos notar grandes flutuações na pressão limiar e na frequência causada pelo acoplamento acústico com o tubo a jusante. Os saltos de frequência ocorrem quando a frequência de oscilação está acima da frequência do tubo de ressonância. Nos saltos, a pressão limiar é máxima.

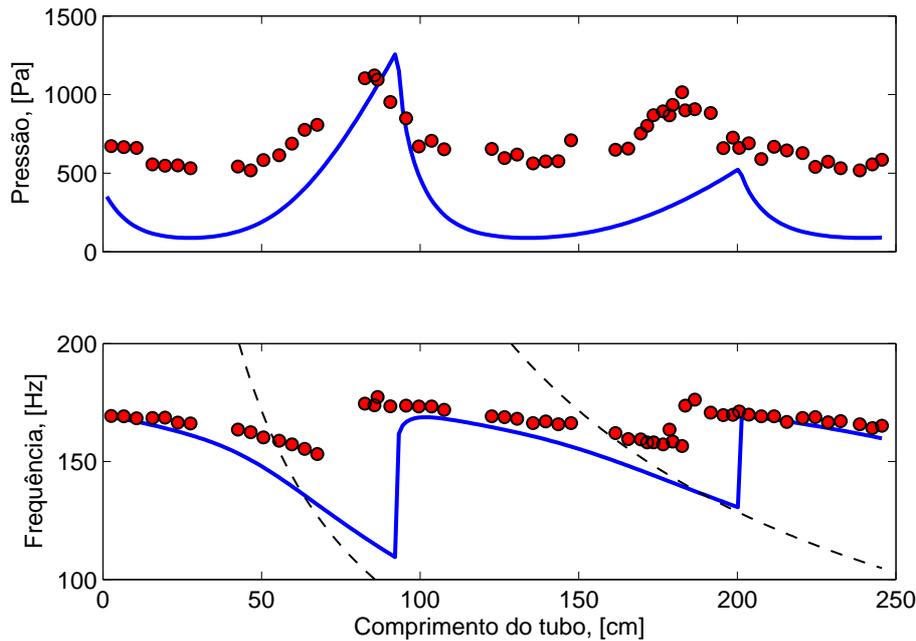


Figura 4.1: Pressão limiar e frequência de oscilação para o início da oscilação versus o comprimento do trato vocal. Círculos: dados colhidos. Curva contínua: resultado teórico. Curvas pontilhadas: frequência de ressonância do tubo.

A teoria coincide com os dados com uma boa aproximação qualitativa, considerando as hipóteses de simplificação extrema do modelo matemático e a estimativa grosseira de alguns dos parâmetros. A pressão limiar teórica é menor do que os dados, e a frequência mostra um decrescimento mais acentuado. No entanto, tanto a pressão quanto a frequência seguem o mesmo padrão dos dados, este fato pode ser constatado na Tabela comparativa 4.1 no final da seção 4.2.3.

### 4.2.3 Otimização dos parâmetros

Para investigar se uma melhor adequação da teoria com os dados poderia ser obtida, adotamos o procedimento de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de parâmetros, tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Executamos o procedimento de otimização dos parâmetros  $\tau$  e  $M$ , pois esses parâmetros foram estimados na subseção

anterior de modo rudimentar. Os seus valores ótimos foram determinados por

$$\sum \frac{\sum (\Delta \bar{P}_{limiar}/10 - P_{onset})^2}{[\text{máx}(P_{onset})]^2} + \sum \frac{\sum (f - f_{onset})^2}{[\text{máx}(f_{onset})]^2}, \quad (4.19)$$

entre os valores medidos na réplica, com frequência de oscilação

$$f = \frac{w}{2\pi}$$

e a pressão subglotal estática  $\bar{P}_{sub}$ .

O resultado da otimização foi  $\tau = 1.57\text{ms}$  e  $M = 1.38 \text{ g/cm}^2$ , que produzem as curvas com estrelas na Figura 4.2.

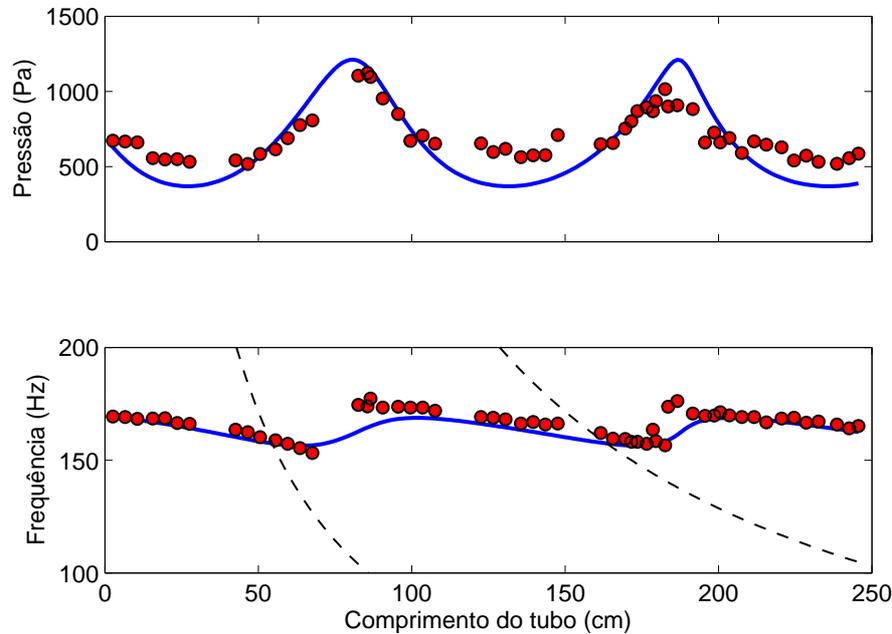


Figura 4.2: Pressão limiar e frequência de oscilação para o início da oscilação versus o comprimento do trato vocal. Círculos: dados colhidos. Curva contínua: resultado teórico com a otimização dos parâmetros. Curvas pontilhadas: frequência de ressonância do tubo

Podemos notar que os resultados obtidos neste segundo caso são visivelmente mais satisfatórios, embora as flutuações na frequência sejam mais suaves e não mostrem saltos drásticos.

As grandes diferenças entre os valores ótimos de  $M$ ,  $\tau$  e as suas respectivas estimativas iniciais podem ser atribuídas à incerteza da porção de vibração da massa de água e de

superfície de látex, e do valor real do atraso de tempo do movimento de onda de látex. Atentemos que, se considerarmos aproximadamente três vezes maior que a da massa inicial estimada, produziremos um valor de  $M$  perto do valor ótimo. Além disso, o tempo de atraso ótimo está na ordem de valores padrões para a oscilação das pregas vocais. Por exemplo, uma propagação de onda na mucosa de 100cm/s em uma altura de 3mm da prega vocal [66] conduzirá ao valor  $\tau = 1.5\text{ms}$ .

A análise feita pode ser confirmada através dos dados na Tabela 4.1. O coeficiente de correlação de Pearson e o valor quadrático médio nos fornecem quão satisfatórios são as estimativas, e assim, verificamos que os valores ótimos produzem a melhor aproximação entre os dados teóricos e experimentais.

Tabela 4.1: Valores comparativos dos coeficientes de correlação e o valor rms do erro médio dos dados teóricos e medidos.

	$\tau = 0,5 \text{ ms e } M = 0,4 \text{ g/cm}^2$	$\tau = 1,57 \text{ ms e } M = 1,38 \text{ g/cm}^2$
CorrFre	-0,198	0,3752
CorrPre	0,4188	0,6608
erro rms da frequência	21,4582	6,468
erro rms da pressão	490,0765	218,1535

Os valores CorrFre e CorrPre indicam os coeficientes de correlação de Pearson, entre os dados teóricos e os dados obtidos experimentalmente, da frequência e da pressão respectivamente.

---

---

## CAPÍTULO 5

---

# EXTENSÃO DO MODELO PARA CONSOANTES OCLUSIVAS LABIAIS

Nos capítulos anteriores consideramos que o tubo do trato vocal era amplamente aberto. Agora, verificaremos qual é a influência do tubo, considerando-o praticamente fechado em uma das extremidades (lábios). A análise das consoantes oclusivas labiais será mais apropriada ao nosso caso, pois a maquete mecânica dos lábios com o motor desligado consegue interromper momentaneamente a produção de som. Por exemplo, nos sons oclusivos labiais, o espectrograma apresenta um momento de silêncio seguido de uma linha vertical, que representa o momento da explosão. Neste capítulo apresentaremos o aprimoramento do modelo para o caso de consoantes oclusivas labiais e a análise qualitativa do modelo ajustado aos dados experimentais. Para tal, faremos uma breve descrição do novo aparato experimental utilizado na coleta desses dados, que serão utilizados para ajustarmos os parâmetros do novo modelo. Visamos demonstrar que esse modelo continua descrevendo a dinâmica da fonação com a inclusão de termos de correção referentes aos lábios.

## 5.1 Descrição do aparato experimental

As Figuras 5.1 e 5.2 exibem fotos da nova réplica das pregas vocais e dos lábios utilizado na coleta dos dados experimentais. A maquete dos lábios, projetada na Technische Universiteit Eindhoven, é constituída por dois semi-cilindros, cuja finalidade é medir o estreitamento labial.

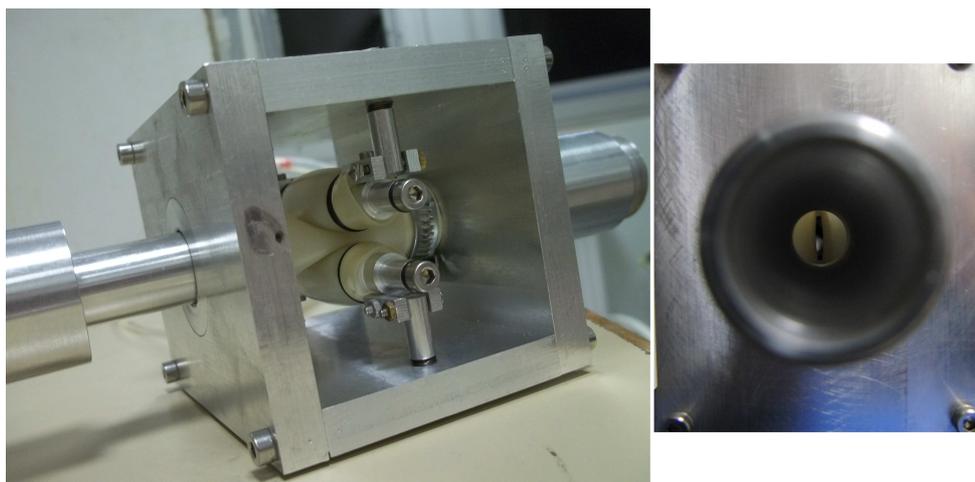


Figura 5.1: A Figura à esquerda representa a réplica das pregas vocais e a Figura à direita, a vista frontal da abertura das pregas vocais utilizada para a extração manual da abertura da réplica das pregas vocais.

A Figura 5.3 possui a representação esquemática de toda a réplica do aparelho fonador. As dimensões desta maquete são  $Cl = 3\text{cm}$  (comprimento dos lábios) e  $\widetilde{W} = 2\text{cm}$  (largura dos lábios).

### 5.1.1 Dados de aquisição

Os valores da pressão subglotal, da pressão de água e do deslocamento na réplica são obtidos de modo semelhante aos outros parâmetros no capítulo 3. A réplica utilizada no capítulo 3 não pode ser utilizada para o mesmo experimento, pois a mesma não produz oscilação com a junção dos lábios. Apesar desta réplica exibir oscilações, a resposta mecânica não se pode ser obtida, pois a caixa metálica que protege as pregas de látex impede o contato com a câmara de compressão, que serve para excitar a réplica. Os dados da resposta mecânica serão parâmetros ajustados para essa nova maquete das pregas de

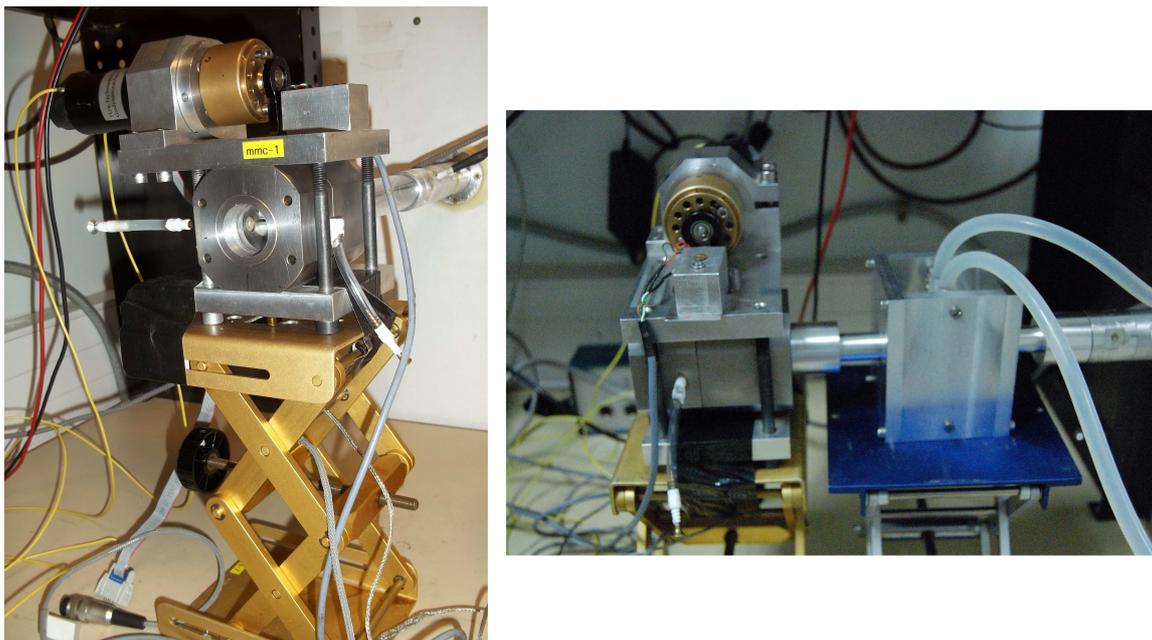


Figura 5.2: A Figura à direita representa a réplica mecânica dos lábios e a Figura à esquerda, a junção das réplicas das pregas vocais, ressonador e lábios.

látex. Por isso descreveremos aqui apenas o procedimento para obtenção da abertura das réplicas, visto que o comportamento dos gráficos de frequência e abertura entre as pregas de látex é ligeiramente diferente. As Figuras 5.4 e 5.5 exibem os gráficos obtidos através do experimento. Podemos notar nas Figuras 5.4 e 5.5 que a oscilação começa e cessa rapidamente, e depois de alguns segundos retorna com maior explosão. O espectrograma mostrado na Figura 5.4, painel inferior, é semelhante ao de uma consoante oclusiva labial.

### **Aquisição da abertura entre as pregas vocais da réplica**

À direita da Figura 5.1 temos uma foto obtida por instrumento óptico, que será utilizada na aquisição da abertura entre as pregas de látex. O procedimento para a obtenção desses dados é diferente do experimento descrito no capítulo 3. A análise é feita manualmente através dos pixels de cada foto, comparados a uma medida fixa, obtendo com máxima precisão o valor milimétrico correspondente.

### **Abertura entre os lábios**

A réplica mecânica dos lábios possui um motor que permite o movimento contínuo de abertura e fechamento do lábio superior. Utilizaremos a réplica mecânica dos lábios desligada, sendo que pretendemos examinar a influência da abertura dos lábios  $h_0$  na oscilação

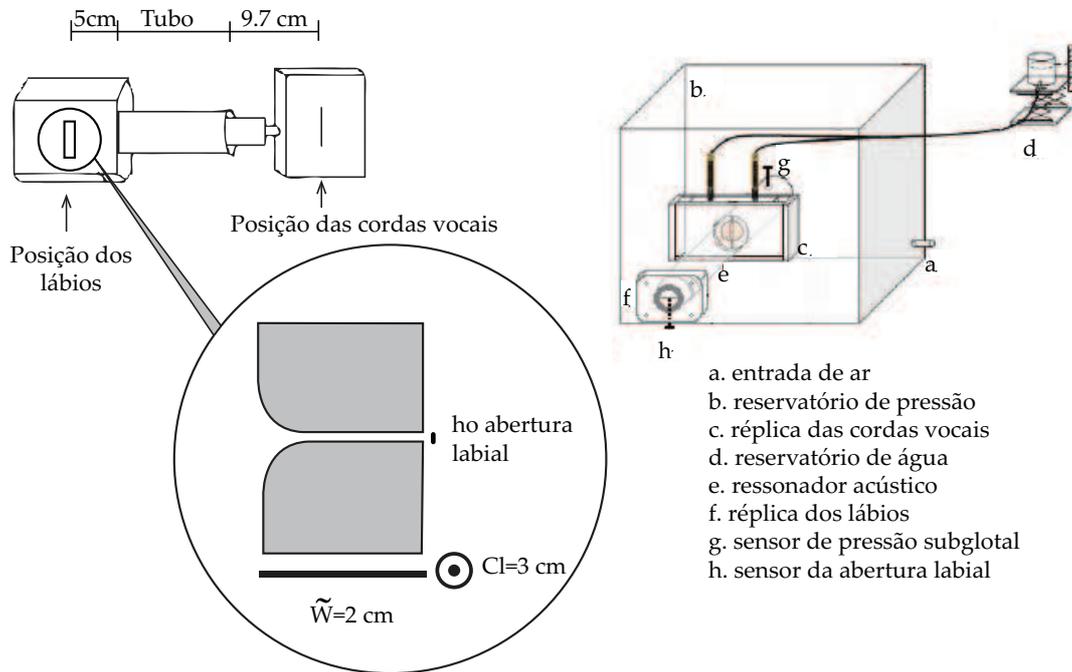


Figura 5.3: Representação esquemática do aparelho fonador e as dimensões de alguns de seus componentes.

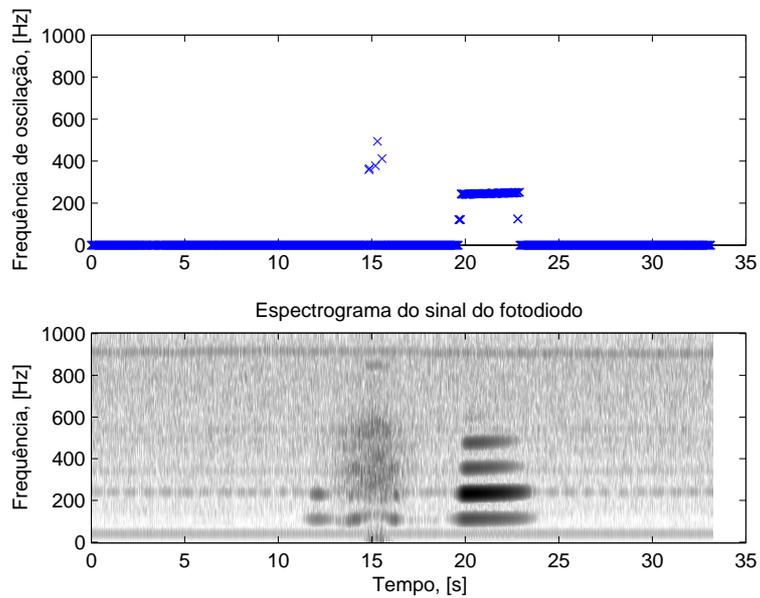


Figura 5.4: Exemplo de detecção da frequência de oscilação.

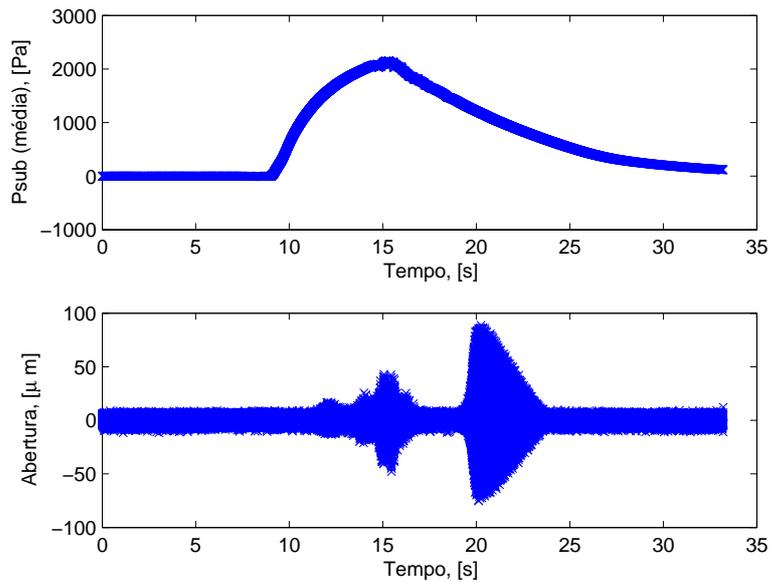


Figura 5.5: Exemplo de detecção da pressão limiar de oscilação.

das pregas vocais. A distância entre os lábios é obtida via um sensor acoplado à maquete que, após calibrado, consegue medir com precisão o valor da abertura labial. Isso nos permitirá avaliar a dinâmica da fonação para uma abertura fixa, em escala micrométrica, entre os lábios.

### 5.1.2 Dados da pressão limiar

Os dados da pressão limiar são ligeiramente diferentes ao do experimento descrito no capítulo 3, pois os valores extraídos dos gráficos (frequência) devem ser efetivamente referentes ao início e ao fim da oscilação. Isto significa, nesse experimento, que será desconsiderado o momento onde a oscilação cessa momentaneamente. Os ressonadores utilizados nesse experimento possuem comprimentos iguais a 6 cm e 14cm. As Figuras 5.6 e 5.7 exibem os dados (onset e offset) extraídos nos experimentos com a maquete dos lábios. Na Figura 5.6 podemos notar que a frequência de oscilação se mantém praticamente constante em torno de 122 Hz. Em contrapartida, os dados de pressão subglotal possuem uma configuração diferente comparado aos resultados experimentais do capítulo 3. Faremos uma análise mais detalhada na seção 5.3.

Nas medições obtidas (Figuras 5.6 e 5.7) podemos notar que não é grande a influência

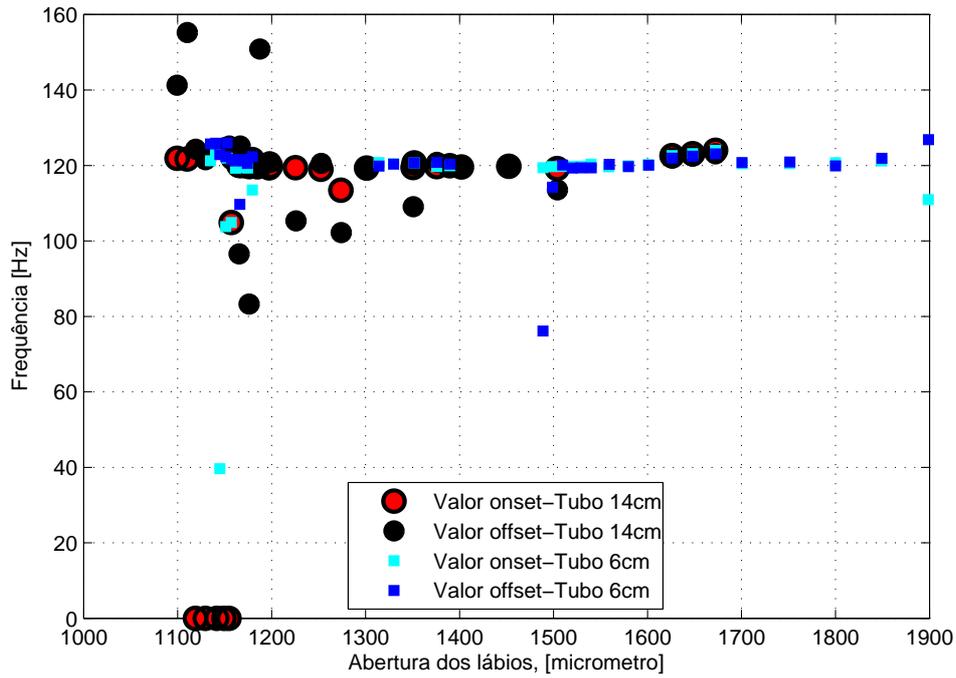


Figura 5.6: Influência da abertura dos lábios mecânicos na frequência de oscilação.

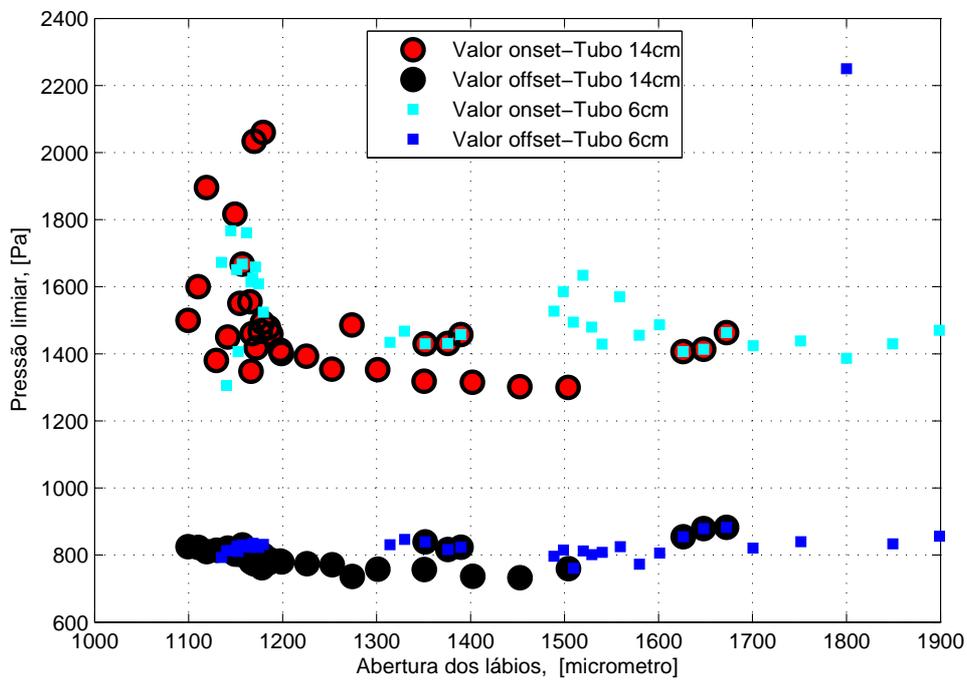


Figura 5.7: Influência da abertura dos lábios mecânicos na pressão limiar de oscilação.

do tamanho do trato vocal, pois para os tubos de 6 cm e 144 cm vemos que a variação é mínima.

---

## 5.2 Modelo matemático da fonação com os lábios

---

Supondo que a lei de Bernoulli descreva o comportamento do fluido que se move ao longo de uma linha corrente na cavidade dos lábios, e que a mesma relação, dada pela equação (1.8), se aplica aos lábios, então

$$P_{supra} - P_0 = k_l \frac{\rho \phi^2}{2A_l^2}, \quad (5.1)$$

em que  $P_0$  é a pressão atmosférica,  $k_l$  é o coeficiente ad hoc de ajuste do fluxo de ar nos lábios e  $A_l$  é a área da boca.

Pela equação (1.17), temos que

$$\phi^2 = \frac{2A^2 \Delta P}{k_t \rho}, \quad (5.2)$$

que, juntamente com

$$\phi^2 = \frac{2P_{supra} A_l^2}{k_l \rho}, \quad (5.3)$$

obtida pela equação (5.1), fornecerá

$$P_{sub} = \Delta P \frac{(A_l^2 + k_a A^2)}{A_l^2}, \quad (5.4)$$

em que

$$k_a = \frac{k_e}{k_l} \text{ e } P_{supra} = P_{sub} - \Delta P.$$

Note que  $A_l$  deve ser diferente de zero para que o novo modelo seja válido. A equação (5.4), juntamente com o par de equações (4.12) e (4.13), nos auxiliará na análise dinâmica do novo modelo.

---

## 5.3 Ajuste dos dados e análise

---

Faremos uma análise da curva experimental formada pelos dados com ressonador de 14 cm próximo do comprimento do trato vocal humano. As curvas teóricas serão ajustadas

para produzir o comportamento qualitativo do modelo teórico, e isso nos permitirá fazer uma avaliação do desempenho do modelo.

A partir do ajuste da expressão (5.4), e para o conjunto de pontos experimentais, obtivemos cinco curvas teóricas, conforme descrito a seguir:

1. O comando `NonlinearFit` de otimização foi utilizado no programa Maple 15. Este programa retorna os valores dos parâmetros  $\Delta P$  e  $k_a$ , de modo a minimizar a soma dos quadrados dos erros através deste ajuste. Os coeficientes ótimos determinados são aproximadamente

$$\Delta P = 1000 \text{ Pa e } k_a = 0.003,$$

respectivamente.

A curva (1) na Figura 5.9 exibe tal ajuste não-linear, que poderá ser melhor visualizada na Figura 5.10.

2. Consideramos uma simplificação no modelo assumindo que  $k_a = 1$ . Neste caso, a curva de ajuste terá apenas um coeficiente a ser determinado, pois

$$P_{sub} = \Delta P \frac{(A_l^2 + A^2)}{A_l^2}. \quad (5.5)$$

Utilizando a expressão (5.5), assumimos que o  $\Delta P$  ótimo será obtido através da assíntota da curva dos dados experimentais, ou seja, tomamos  $\Delta P = 1300 \text{ Pa}$ . A curva (2), na Figura 5.8, exibe a curva teórica obtida por essa estimativa.

3. A partir da expressão (5.5), fazemos um ajuste de curva com os dados experimentais utilizando o Maple 15 para obter  $\Delta P \approx 1 \text{ Pa}$ . A curva (3) na Figura 5.9 exibe esse ajuste em escala logarítmica.
4. Nesta quarta tentativa, estimamos  $\Delta P$  a partir dos coeficientes nas expressões (4.12) e (4.13). Para isto assumimos que a frequência angular natural da ressonância mecânica  $w_0$  esteja suficientemente próxima da frequência angular de oscilação  $w$ . Estimamos a massa de água vibrante através das dimensões da nova réplica das pregas vocais, obtendo  $M = 2.2\text{g/cm}^2$ . Depois, avaliamos  $0 < w\tau < \pi$ , que são parâmetros determinados no capítulo 2, determinando o  $\tau$  ótimo para nossas estimativas. Posteriormente, consideramos  $5 < Q_0 < 15$  (próximo dos valores da

resposta mecânica da outra réplica), e obtivemos, para um valor ótimo  $Q_0 = 14.9$ , que  $\Delta P = 2248$  Pa pela equação (4.13). A curva (4), na Figura 5.8, indica o ajuste feito, considerando  $k_a = 1$ .

5. E, por último, utilizando  $\Delta P = 2248$  Pa e  $k_a = 0.003$ , obtemos a curva (5) na Figura 5.9, apresentado em escala logarítmica.

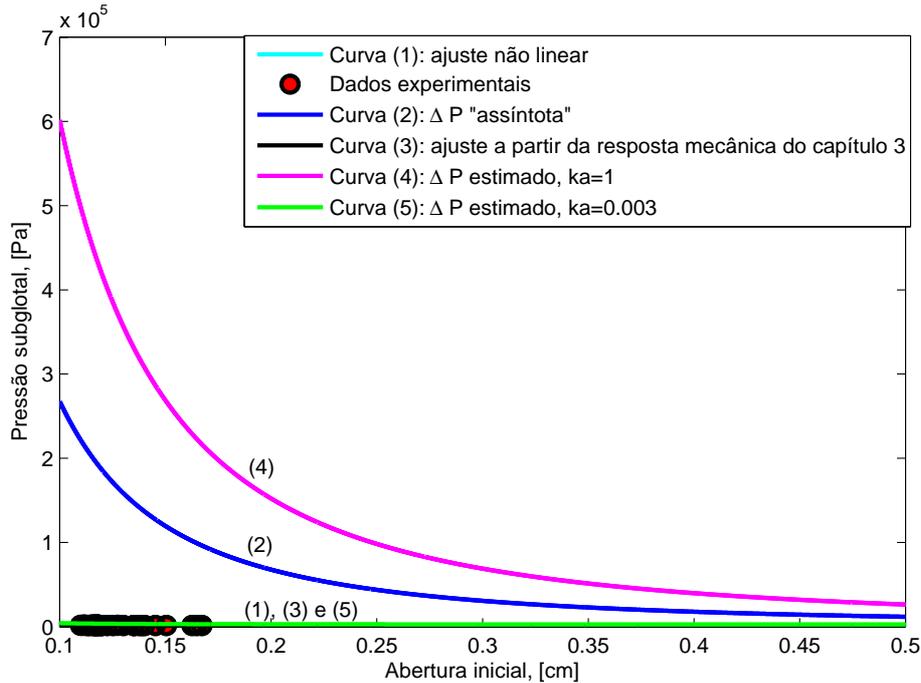


Figura 5.8: Curvas sólidas representam as curvas ajustadas e os círculos, os dados teóricos.

Os resultados apresentados acima possuem algumas tendências que cabem ser observadas: primeiramente, os dados teóricos (Figura 5.7) da pressão limiar subglotal offset mantêm-se abaixo da pressão limiar subglotal onset. Essa configuração já foi observada no capítulo 2, e descrito como fenômeno de histerese, e pode ser também encontrado em [56, 38].

O segundo aspecto a ser notado é sobre a influência da abertura dos lábios em relação a oscilação das pregas vocais. Estas se subdividem em três configurações:

Primeiro, se observarmos o intervalo de 0.1626cm a 0.1672cm (valores de  $h_0$ ), a vibração das pregas vocais parece não ser afetada. Segundo, para o intervalo de 0.1225cm a 0.1672cm, os valores da pressão limiar subglotal são inferiores que o caso anterior. Este

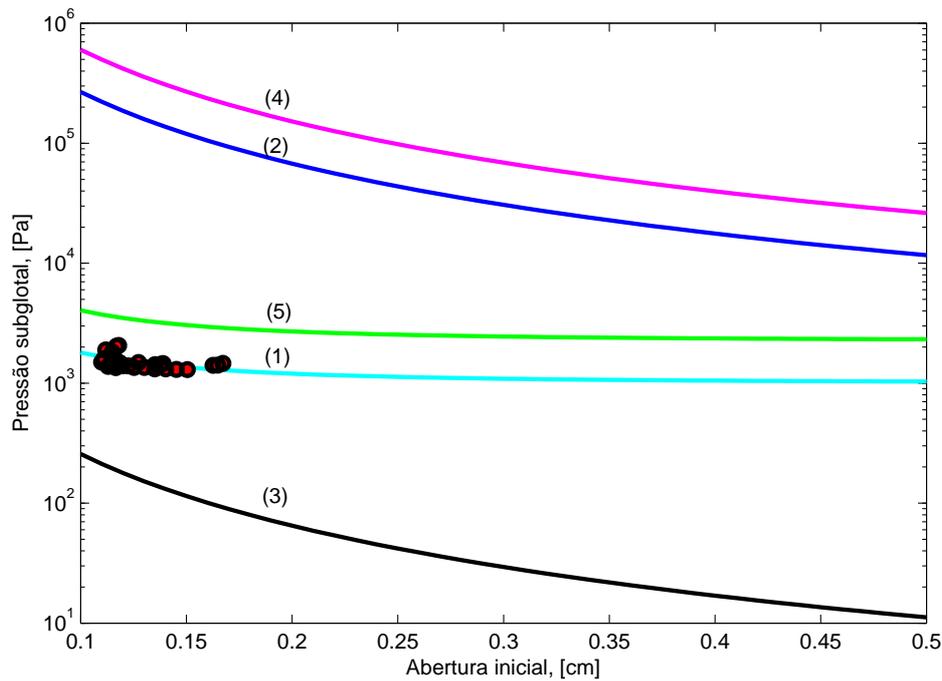


Figura 5.9: Curvas teóricas e dados experimentais em escala logarítmica.

resultado sugere que, dentro deste intervalo, a presença dos lábios parece favorecer a oscilação das pregas vocais. E terceiro, para  $h_0$  de 0.1099cm a 0.1225cm a presença dos lábios afeta drasticamente o valor da pressão limiar subglotal. A pressão onset é bem maior que nos demais casos citados anteriormente.

Em todos estes intervalos da abertura entre os lábios  $h_0$ , a frequência fundamental se manteve praticamente constante. Resultados semelhantes, porém para o caso da junção das bandas ventriculares (falsas pregas vocais) podem ser encontrados em [1, 9]. Estas referências sugerem que esta nova componente pode facilitar o processo da fonação com o aumento do fluxo de ar passando pela laringe.

Analisando as curvas teóricas, podemos ter uma boa compreensão da influência de  $h_0$  no modelo. Podemos observar que a curva (1) na Figura 5.10 está mais próxima dos dados experimentais e a segunda melhor aproximação é a curva (5). Todas as outras curvas estão muito acima (curvas (2) e (4)), ou estão abaixo do nível dos dados teóricos (curva (3)). Qualitativamente, o modelo captura o comportamento dos dados, pois as curvas teóricas tendem a infinito quando a abertura dos lábios mecânicos tende a zero, e a um valor positivo  $\Delta P$ , quando a abertura tende a infinito. Essa avaliação conduz à validação do

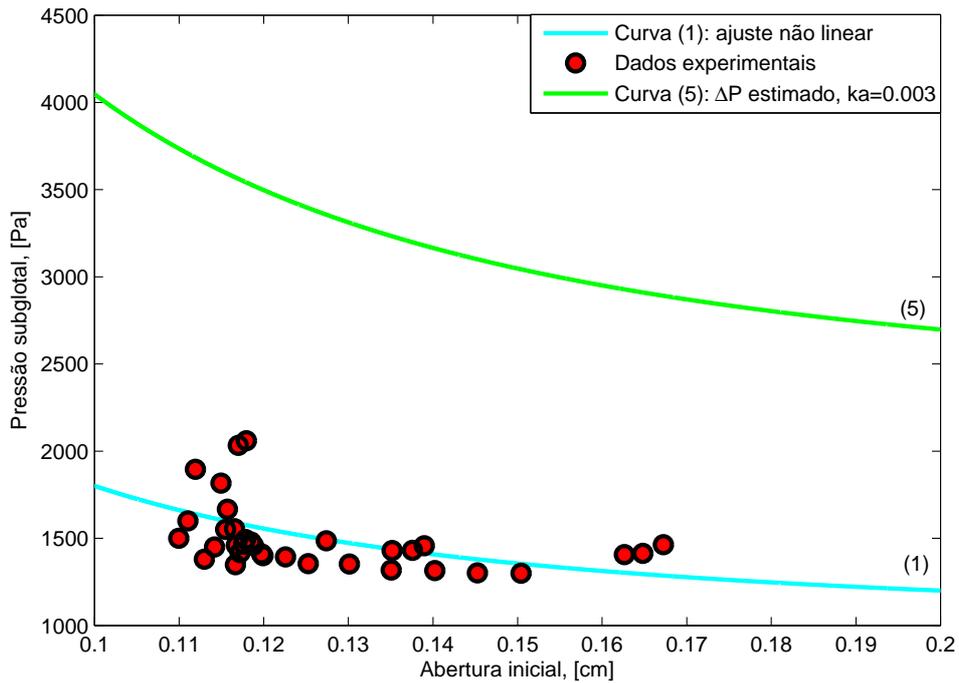


Figura 5.10: Ampliação da Figura 5.8, para a pressão subglotal variando de 1000 Pa a 4500 Pa.

modelo para consoantes oclusiva labial, e por isso, pode ser utilizada para análise da dinâmica da fonação. No entanto, comparando o comportamento das curvas teóricas com os dados experimentais, podemos dizer que o modelo é ainda muito simplificado para um bom ajuste quantitativo. Cabe ressaltar que a diferença entre a teoria e os dados experimentais também podem ser explicados pela incerteza na dedução dos parâmetros teóricos da resposta mecânica da réplica.

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## CONCLUSÃO

Neste capítulo estão colocadas as considerações conclusivas deste trabalho, que buscam mostrar a validade do modelo proposto e as contribuições da tese desenvolvida.

Primeiro, o modelo permite oscilações em grandes amplitudes e, portanto, descreve a dinâmica da oscilação, não somente no início da fonação, mas também depois de desenvolvida e sustentada a amplitude.

Segundo, consideramos o tempo de atraso da onda de mucosa de modo que  $0 < w\tau < \pi$ , e como consequência, o modelo não pode ser transformado em uma simples equação diferencial ordinária. Neste caso, métodos comuns não podem ser aplicados para fornecer resultados qualitativos e quantitativos da equação diferencial funcional, e assim, o método do balanço harmônico é utilizado para obter resultados teóricos que conduziram aos possíveis tipos de bifurcação. No modelo, o início da oscilação é descrito por uma bifurcação Hopf. Ambos os tipos, supercrítico e subcrítico, são possíveis, dependendo do fator de amortecimento não-linear. No caso de uma bifurcação subcrítica, a extensão do modelo, inserindo outras potências pares no fator de amortecimento não-linear, conduz ao fenômeno de histerese oscilatória. Este fenômeno relaciona os valores limiares no início e no fim da oscilação através de um anel (em forma de loop) de histerese. A equação limiar que relaciona os vários parâmetros no início oscilação inclui a frequência de oscilação, mas

o tipo de bifurcação é independente do mesmo.

As interações entre as pregas vocais e o trato vocal analisadas no modelo, foram obtidas a partir de um par de equações da frequência de oscilação e a variação de pressão limiar. Alguns parâmetros não podem ser estimados, pois as duas equações acima não fornecem condições suficientes. Porém, através do aparato experimental, podemos estimar os parâmetros e obter a análise dos fenômenos não-lineares que ocorrem do nosso modelo. Devido ao acoplamento acústico, flutuações no limiar da pressão subglotal inicial e da frequência de oscilação ocorrem sob a influência da variação do comprimento do trato vocal. Particularmente, saltos de frequência e máximos na pressão limiar ocorrem quando a frequência de oscilação está um pouco abaixo da frequência de ressonância do trato vocal. Este fenômeno está bem caracterizado pelo modelo teórico proposto, e os resultados correspondem aos padrões observados no limiar inicial e final da fonação. Em [43] mostrou-se que o acoplamento acústico com os tratos a montante e a jusante têm efeito aditivo; contudo, a influência do acoplamento do trato a jusante é muito maior comparado ao outro.

Outro fenômeno que podemos notar nos dados experimentais e no modelo teórico é que a frequência de oscilação sempre diminui quando o comprimento do tubo é aumentado, com exceção das regiões onde a frequência de oscilação está perto da frequência de ressonância do tubo, e este fato está de acordo com [66]. E também, que o mínimo da pressão ocorre para tratos vocais de 0 cm a 50 cm quando a frequência de ressonância é o dobro da frequência de oscilação [43].

O estudo também está de acordo com a teoria geral do acoplamento fonte-filtro não-linear desenvolvido por Titze [68, 69], com base em simulações em um modelo multi-massa e exercícios vocais em seres humanos.

O último caso trata do modelo para consoantes oclusivas labiais, onde há a interrupção do som momentaneamente. Os resultados teóricos, comparados aos dados experimentais, mostram que a configuração de um trato vocal fechado em um extremo pode ser sistematicamente estudado. O modelo consegue exibir a queda de pressão e o valor assintótico que a pressão subglotal se aproxima quando os lábios estão se abrindo. Por outro lado, a pressão subglotal tende ao infinito quando os lábios da réplica estão se fechando. Por se tratar do primeiro modelo proposto com o trato vocal praticamente fechado em um extremo, concluímos que o mesmo consegue reproduzir o comportamento qualitativo dos

dados experimentais. Porém, não é suficiente para obtermos resultados analíticos satisfatórios. Melhorias devem ser feitas ao sistema para conseguirmos englobar todas as especificidades com a adição dos lábios ao modelo.

Concluimos que o modelo teórico proposto neste trabalho permite analisar os principais mecanismos da oscilação. Por outro lado, para a obtenção de melhores estimativas qualitativas é necessário modelos mais sofisticados.

Ressaltamos que o recurso experimental *in vitro* foi bastante útil, pois permitiu testar a teoria através de dados controlados experimentalmente.

Todas as contribuições apontadas neste trabalho podem ser encontradas nas seguintes referências: [35, 42, 43].

Como possíveis trabalhos futuros, pode-se apontar: Introdução de um coeficiente de rigidez não-linear ao modelo, visto que experimentalmente ele é um parâmetro importante; a discretização do trato vocal, pois também realizamos experimentos com o ressonador discretizado das vogais [a], [i] e [u]; a introdução das bandas ventriculares; explorar outros tipos de bifurcação no modelo em função dos demais parâmetros, como por exemplo o tempo de atraso  $\tau$ .

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## IMPLEMENTAÇÃO

```
function v=admodel(t,y,xx,Plmax)
%% parâmetros do modelo
B=50;
M=0.476;
K=200000;
Eta=4000;
X0=.1;
Kt=1.1;
tau=0.001;

-----

%% Parâmetros para o intervalo de integração
t0=tau;
t1=0.015;
t2=0.515;
t3=0.530;
```

```

tMax=1;

-----

%% Construção da curva de pressão (conhecida a configuração habitual), para
%% utilizarmos no cálculo da solução
if t<t0
    Pl=0;
elseif t<t1
    Pl=Plmax*spline([t0 t1],[0 0 1 0],t);
elseif t<t2
    Pl=Plmax;
elseif t<t3
    Pl=Plmax*spline([t2 t3],[0 1 0 0],t);
else
    Pl=0;
end

-----

%% Definindo a solução de avanço para t<tMax-2*tau e de retardo para t>2*tau
%% (encontrando a imagem do ponto t+tau e t-tau)
if t >= tMax-2*tau
    xMtau=0;
else
    xMtau=interp1(xx(:,1),xx(:,2),t+tau);
end

if t<=2*tau
    xmtau=0;
else
    xmtau=interp1(xx(:,1),xx(:,2),t-tau);
end

-----

%% encontrando a imagem do ponto t
xS=interp1(xx(:,1),xx(:,2),t);

```

```

-----
%% 0 sistema convertido em 2 equações de 1ª ordem.
v(1)=y(2);
v(2)=(Pl/Kt*(xMtau-xmtau)/(X0+xS)-B*(1+Eta*y(1)^2)*y(2)-K*y(1))/M;

v=v';

-----

% Rodando o Script File no Matlab 7.7.0
-----

clear all

tau=0.001;
tMax=1;

tt=(tau:.001:tMax-tau);
x=zeros(1,length(tt));

xx=[tt' x'];

-----

for iP=17:-1:1
    Plmax=3000+(18000-3000)*(iP-1)/19;

    for i=1:100
        %% Para cada i, ele calcula a diferença entre as soluções, caso não seja
        %% satisfeito, ele recalcula a solução y.
        [t,y]=ode45(@(t,y) model(t,y,xx,Plmax),[tau tMax-tau],[.0001 0]);

        %% Diferença entre solução y e xx (y anterior)
        d=y(:,1)-interp1(xx(:,1),xx(:,2),t);

```

```
%% Calculando o erro rms
rms(i)=sqrt(sum(d.^2)/length(d));
%% Comando para mostrar o erro (converteu para string)
disp([int2str(i), ' ', num2str(rms(i))]);
%% Comando para plotar a solução para cada i
plot(t,y(:,1),'b');

drawnow
%% Comando para avaliar a diferença entre duas soluções consecutivas
if (rms(i)<5e^{-4} \&\& i>5)
    break
end
%% Salva o valor da solucao y em xx
xx=[t y(:,1)];
end
%% Calculo da amplitude
amp(i)=max(y(:,1));
end
```

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Agarwal, M., Scherer, R. C., Kenneth J. D. W.(2004). The effects of the false vocal folds on translaryngeal airflow resistance. ICVPB.
- [2] Alipour, F., Montequin, D. and Tayama, N. (2001). Aerodynamic profiles of a hemilarynx with a vocal tract, *Annals of Otology Rhinology and Laryngology* 110, 550-555.
- [3] Álvares, B. A., Luz, A. M. da. (1999). *Física*. São Paulo: Scipione.
- [4] Amador, A., and Mindlin, G. B. (2008). Beyond harmonic sounds in a simple model for birdsong production, *Chaos* 18, 043123.
- [5] Ananthkrishnan, N., Sudhakar, K., Sudershan, S., and Agarwal, A. (1998). Application of secondary bifurcations to large amplitude limit cycles in mechanical systems, *J. Sound Vib.* 215, 183-188.
- [6] Arneodo, E. M., and Mindlin, G. B. (2009). Source-tract coupling in birdsong production, *Phys. Rev. E* 79, 061921.
- [7] Appleton, E. V., and van der Pol, B. (1922). On a type of oscillation-hysteresis in a simple triode generator, *Philos. Mag.* 43, 177-193.
- [8] Avanzini, F. (2008). Simulation of vocal fold oscillation with a pseudo-one-mass physical model, *Speech Commun.* 50, 95-108.

- [9] Bailly, L., Pelorson, X., Henrich, N. (2006). Influence des “false” cordes vocales en phonation. Huitième Congrès Français d’Acoustique, Tours.
- [10] Bailly, L. (2009). Interaction entre cordes vocales et bandes ventriculaires en phonation: exploration in-vivo, modélisation physique, validation in-vitro. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France.
- [11] Berry, D. A., Herzel, H., Titze, I. R., and Story, B. H. (1996). Bifurcations in excised larynx experiments, *J. Voice* 10, 129-138.
- [12] Boyce, W. B., DiPrima R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno (LTC), sexta edição.
- [13] Centralx Atlas. Atualizado em 29 de novembro de 2010. Disponível na internet em: <http://atlas.centralx.com.br/p/106462/mucosa+laringea.htm>. Acesso em 06 fevereiro de 2012.
- [14] Cisonni, J. (2008). Modélisation et inversion d’un système complexe de production de signaux acoustiques: applications à la voix et aux pathologies, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, pp. 1-203.
- [15] Cisonni, J., Van Hirtum, A., Pelorson, X., and Lucero, J. C. (2011). The influence of geometrical and mechanical input parameters on theoretical models of phonation, *Acta Acust. United Acust.* 97, 291-302.
- [16] Corbiere, S., Fresnel, E. O. R. L. La Voix : La Corde Vocale et sa Pathologie. Phoniatre. Hôpital Américain de Paris. Fondation A. de Rothschild - Paris.
- [17] Drioli, C. (2005). A flow waveform-matched low-dimensional glottal model based on physical knowledge, *J. Acoust. Soc. Am.* 117, 3184-3195.
- [18] Engelborghs, K., Luzyanina, T., and Roose, D. (2002) Numerical Bifurcation analysis of delay. Differential equations using DDE-BIFTOOL. *J. ACM Transactions on Mathematical Software.* 28, 1-21.
- [19] Fant, G. (1970). Acoustic Theory of Speech Production (Mouton and Co. N.V., The Hague), pp. 1-26.
- [20] Fisher, K. V., and Swank, P. R. (1997). Estimating phonation threshold pressure, *J. Speech Lang. Hear. Res.* 40, 1122-1129.

- [21] Ford, N. J., and Lumb, P. M. (2009). Mixed-type functional differential equations: A numerical approach, *J. Comput. Appl. Math.* 229, 471-479.
- [22] Fulcher, L. P., Scherer, R. C., Melnykov, A., Gateva, V., and Limes, M. E. (2006). Negative coulomb damping, limit cycles, and self-oscillation of the vocal folds, *Am. J. Phys.* 74, 386-393.
- [23] Gilbert, J., Ponthus, S., and Petiot, J. F. (1998). Artificial buzzing lips and brass instruments: Experimental results, *J. Acous. Soc. Am.* 104, 1627-1632.
- [24] Guckenheimer, J., and Holmes, P. (1983) *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields* (Springer-Verlag, New York).
- [25] Hale, J. K. and Lunel, S. M. V. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations* (Springer-Verlag, New York), pp. 331-335.
- [26] Hirano, M. (1975). *Phonosurgery: Basic and clinical investigations*, Official Report of the 78th Annual Convention of the Oto-Rhino-Laryngological Society of Japan.
- [27] Hirano, M., S. Kurita, and T. Nakashima (1981). The structure of the vocal folds. In K.N. Stevens and M. Hirano (eds.), *Vocal fold physiology*. Tokyo: University of Tokyo, Press 33–41.
- [28] Ishizaka, K. and Flanagan, J.L (1972). Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords. *Bell Syst. Tech. J.*, 51 :1233-1268.
- [29] Ishizaka, K. and Matsudaira, M. (1972). Theory of vocal cord vibration, *Rep. Univ. Electro-Comm.* 23, 107-136.
- [30] Jiang, J. J., and Tao, C. (2007). The minimum glottal airflow to initiate vocal fold oscillation, *J. Acoust. Soc. Am.* 121, 2873-2881.
- [31] Laje, R., Gardner, T., and Mindlin, G. B. (2001). Continuous model for vocal fold oscillations to study the effect of feedback, *Phys. Rev. E* 64, 056201.
- [32] Laje, R., Gardner, T. J., and Mindlin, G. B. (2002). Neuromuscular control of vocalizations in birdsong: A model, *Phys. Rev. E* 65, 288102.
- [33] Laje, R., and Mindlin, G. B. (2005). Modeling source-source and source-filter acoustic interaction in birdsong, *Phys. Rev. E* 72, 036218.

- [34] Lopes, F. Voz e Fonoaudiologia. São Paulo, 4 de janeiro de 2010. Disponível na internet em: <http://vozefonoaudiologia.blogspot.com.br/2010/01/ressonancia-partei-voz-falada.html>. Acesso em 29 de junho de 2012.
- [35] Lourenço, K. G., Lucero, J. C., Pelorson, X. (2011). La validation expérimentale du modèle théorique de la phonation. In: Rencontre de jeunes chercheurs en parole 2011, Grenoble-France.
- [36] Lous, N.J.C., Hofmans, G.C.J., Veldhuis R.N.J. and Hirschberg A. (1998). A symmetrical two-mass vocalfold model coupled to vocal tract and trachea, with application to prosthesis design, *Acustica* 84, 1135-1150.
- [37] Lucero, J. C. (1995). The minimum lung pressure to sustain vocal fold oscillation, *J. Acoust. Soc. Am.* 98, 779-784.
- [38] Lucero, J. C. (1999). A theoretical study of the hysteresis phenomenon at vocal fold oscillation onset-offset, *J. Acoust. Soc. Am.* 105, 423-431.
- [39] Lucero, J. C. (2005). Bifurcations and limit cycles in a model for a vocal fold oscillator, *Commun. Math. Sci.* 3, 517-529.
- [40] Lucero, J. C., and Koenig, L. L. (2007). On the relation between the phonation threshold lung pressure and the oscillation frequency of the vocal folds, *J. Acoust. Soc. Am.* 121, 3280-3283.
- [41] Lucero, J. C., Hirtum, A. V., Ruty, N., Cisonni, J., and Pelorson, X. (2009). Validation of theoretical models of phonation threshold pressure with data from a vocal fold mechanical replica, *J. Acoust. Soc. Am.* 125, 632-635.
- [42] Lucero, J. C., Koenig, L. L., Lourenço, K. G., Ruty, N., and Pelorson, X. (2011). A lumped mucosal wave model of the vocal folds revisited: recent extensions and oscillation hysteresis, *J. Acous. Soc. Am.* 129, 1568-1579.
- [43] Lucero, J. C., Lourenço, K. G., Hermant N., Hirtum, A. V., Pelorson, X. (2012). Effect of source-tract acoustical coupling on the oscillation onset of the vocal folds, *J. Acous. Soc. Am.* 132, 403-411.
- [44] MacDonald, N. (1993). Choices in the harmonic balance technique, *J. Phys. A* 26, 6367-6377.

- [45] Mindlin, G. B., Laje, R. (2005). *The physics of birdsong*. Springer, Berlin.
- [46] Mickens, R. E. (1996). *Oscillations in Planar Dynamic Systems* (World Scientific, Singapore), pp. 139-173.
- [47] Morris, R.J., Ternstöm, S., LoVetri, J., Berkun, D. (2012) Long-Term Average Spectra From a Youth Choir Singing in Three Vocal Registers and Two Dynamic Levels. *Journal of Voice*, 26(1) 30-36
- [48] Pelorson, X., Hirschberg, A., Van Hasselt, R., Wijnands, A., and Auregan, Y. (1994). Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. application to a modified two-mass model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 96(6):3416-3431.
- [49] Pelorson, X., Hirschberg, A., Wijnands, A., and Bailliet, H. (1995). Description of the flow through in-vitro models of the glottis during phonation. *Acta Acustica*, 3:191-202.
- [50] Perko, L., (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.
- [51] Ramalho Junior, F., Ferraro, N., Toledo, P. (1999). *Fundamentos da física: Termodinâmica, Óptica e Ondas*. São Paulo: Moderna, sétima edição.
- [52] Robinson, M. P. and Clegg, J. (2005). Improved determination of q-factor and resonant frequency by a quadratic curve-fitting method, *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* 47, 399-402.
- [53] Rothenberg, M. (1980). Acoustic Interaction Between the Glottal Source and the Vocal Tract, in *Vocal Fold Physiology*, K, N. Stevens and M. Hirano, Eds., University of Tokyo Press, pp. 305-328.
- [54] Ruty, N. (2007). *Modeles d'interactions fluide parois dans le conduit vocal: applications aux voix et aux pathologies (Models of fluid-wall interactions in the vocal tract. Applications to voice and pathologies)*, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, pp. 1-189.
- [55] Ruty, N., Pelorson, Lopez, I., Hirschberg, A. (2005). A mechanical experimental setup to simulate vocal folds vibrations. Preliminary results. *ZAZ Papers in linguistics* 40: 161-175.

- [56] Rutý, N., Pelorson, X., Hirtum, A. V., Lopez-Arteaga, I., and Hirschberg, A. (2007). An in vitro setup to test the relevance and the accuracy of low order vocal folds models, *J. Acoust. Soc. Am.* 121, 479-490.
- [57] Rutý, N., Van Hirtum, A., Pelorson, X., Lopez, I., and Hirschberg, A. (2005). A mechanical experimental setup to simulate vocal fold vibrations. preliminary results., *ZAS Papers in Linguistics* 40, 161-175, also available as arXiv:0710.4286v1 (<http://arxiv.org>, date last viewed 11/9/2011).
- [58] Rutý, N., Brutel-Vuilmet, C., Pelorson, X., Van Hirtum, A. (2007) Experimental validation and physical modelling of vocal folds pathologies. 19th International Congress on Acoustics, Madrid.
- [59] Sadiku, M. N. O., Alexander, C. K. *Fundamentos de circuitos elétricos* (bookman), terceira edição.
- [60] Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Perseus Books, Cambridge, MA), pp. 211-215.
- [61] Tao, C., and Jiang, J. J. (2008). The phonation critical condition in rectangular glottis with wide prephonatory gaps, *J. Acoust. Soc. Am.* 123, 1637-1641.
- [62] Titze, I. R. (1992). Phonation threshold pressure: A missing link in glottal aerodynamics, *J. Acoust. Soc. Am.* 91, 2926-2935.
- [63] Titze, I. R., Schmidt, S. S., and Titze, M. R. (1995). Phonation threshold pressure in a physical model of the vocal fold mucosa, *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 3080-3084.
- [64] Titze, I. R. (1983). Parametrization of the glottal area, glottal flow, and vocal fold contact area, *J. Acous. Soc. Am.*, 75, 570-580.
- [65] Titze, I. R. (1984). Parameterization of the glottal area, glottal flow, and vocal fold contact area. *J. Acoust. Soc. Am.* Volume 75, Issue 2, pp. 570-580.
- [66] Titze, I. R. (1988). The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds, *J. Acous. Soc. Am.*, 83, 1536-1552.
- [67] Titze, I. R. (2006). *The Myoelastic Aerodynamic Theory of Phonation* (NCVS, Iowa City).

- [68] Titze, I. R. (2008a). Nonlinear source-filter coupling in phonation: Theory, *J. Acoust. Soc. Am.* 123, 2733-2749.
- [69] Titze, I. R. (2008b). Nonlinear source-filter coupling in phonation: Vocal exercises, *J. Acoust. Soc. Am.* 123, 1902-1915.
- [70] Titze, I. R. (1994). *Principles of Voice Production* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs), pp. 252-271.
- [71] Titze, I. R., Schmidt, S. S., and Titze, M. R. (1995). Phonation threshold pressure in a physical model of the vocal fold mucosa, *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 3080-3084.
- [72] Van Den Berg, J., Zantema J., and Doornenbal P. (1957). On the Air Resistance and Bernoulli Effect of the Human Larynx, *J. Acoust. Soc. Am.*, 29, 626-631.
- [73] Van der Pol, B. and Van der Mark, J. (1928). The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart, *Phil. Mag.* 6, 763-775.
- [74] Van Hirtum, A., Pelorson, X., Estienne, O., Bailliet, H. (2011). Experimental validation of flow models for a rigid vocal tract replica. *The Journal of the Acoustical Society of America* 130, 2128-2138.
- [75] Van Hirtum A., Grandchamp X., Cisonni J. (2012). Reynolds number dependence of near field vortex motion downstream from an asymmetrical nozzle. *Mechanics Research Communications*, 44:47-50.
- [76] Verdolini, K., Min, Y., Titze, I. R., Lemke, J., Brown, K., van Mersbergen, M., Jiang, J., and Fisher, K. (2002). Biological mechanisms underlying voice changes due to dehydration, *J. Speech Lang. Hear. Res.* 45, 268-281.
- [77] Zollinger, S. A., Riede, T., and Suthers, R. A. (2008). Two-voice complexity from a single side of the syrinx in northern mockingbird *mimus polyglottos* vocalizations, *J. Exp. Biol.* 211, 1978-1991.