Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre a Transformação de Ribaucour e a Composição de Transformações de Bäcklund para Superfícies Linear-Weingarten Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

por

Claudiano Goulart

Brasília

2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre a Transformação de Ribaucour e a Composição de Transformações de Bäcklund para Superfícies Linear-Weingarten Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

por

Claudiano Goulart *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de

DOUTOR EM MATEMÁTICA

26 de fevereiro de 2013

Comissão Examinadora:

____
Profa. Dra. Keti Tenenblat - MAT/UnB (Orientadora)

____
Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira - MAT/UFC (Membro)

____
Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo - MAT/UnB (Membro)

____
Prof. Dr. Pedro Roitman - MAT/UnB (Membro)

____
Prof. Dr. Walterson Pereira Ferreira - IME/UFG (Membro)

*O autor foi integrante do programa PACDT/UEFS e bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais Osório
e Maria das Mercês,
à minha esposa Jany e
às minhas filhas
Ana Clara e Isabela.

Agradecimentos

A Deus, por mais esta importante conquista e por todas as bençãos que Ele tem derramado em minha vida.

À minha orientadora, professora Keti Tenenblat, por sua orientação sempre clara, dedicada e segura, sem a qual não seria possível a conclusão deste trabalho. Agradeço ainda por seu apoio e incentivo nos momentos difíceis.

Aos professores Jorge Lira, Kellcio Araújo, Pedro Roitman e Walterson Ferreira por terem participado da banca examinadora de defesa da tese e pelos comentários e sugestões apresentados.

Ao meu pai Osório e à minha mãe Maria das Merçês, pelo apoio incondicional em meus projetos, por suas orações e por entenderem que a educação seria o melhor caminho a ser seguido pelos seus filhos.

À minha esposa Jany, por todo amor, carinho e apoio durante o período em que estive envolvido com a realização deste doutorado. Obrigado por suas orações e por ser o meu porto seguro nos momentos de tempestade.

À minha filha Ana Clara, por todo amor e carinho que sempre demonstrou apesar da minha ausência neste período.

À minha filha Isabela, cujo nascimento foi mais um incentivo para o término do doutorado.

Aos meus irmãos Claudiney e Claudio, pela confiança que sempre depositaram em mim.

Aos meus cunhados Wilton, Eliane e Ubiratan Jr e aos meus sogros Ubiratan e Isaltina *(in memorian)* pela torcida, pelas orações e pelo suporte oferecido à minha família nos momentos de minha ausência.

Aos colegas da Pós-Graduação em matemática da Universidade de Brasília pela amizade.

Ao professor Paulo Tadeu de Almeida Campos (UFV) que, na condição de orientador de iniciação científica, me apresentou os primeiros conceitos de geometria diferencial.

Ao professor Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFJF) que desde que a minha graduação sempre foi um grande incentivador.

Ao colega Tarcísio Castro, pela grande colaboração na construção das figuras que integram este trabalho.

A todos os professores e funcionários da UFV, UEFS e UnB que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

A todos os professores responsáveis pela minha formação básica, em particular, Vânia, Elber, Geovani, Nilza e Marilurdes.

Ao programa PACDT/UEFS e ao CNPq pelo apoio financeiro necessário para a realização deste trabalho.

Nada poderá me abalar
Nada poderá me derrotar
Pois minha força e vitória
Tem um nome
É Jesus.

Eliana Ribeiro (Cantora e Compositora Católica)

Resumo

Consideremos superfícies linear-Weingarten hiperbólicas imersas em $\mathbb{R}^3$ tais que as curvaturas Gaussiana K e média H satisfazem $1+2\beta H+\gamma K=0$, onde $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ e $\beta^2-\gamma<0$. A primeira e segunda formas fundamentais destas superfícies são completamente determinadas pelas soluções da equação de sine-Gordon $\psi_{x_1x_1}-\psi_{x_2x_2}=sen(\psi+C_{\beta\gamma})$, onde $C_{\beta\gamma}$ é uma constante real determinada por β e γ.

A partir de uma superfície linear-Weingarten hiperbólica imersa em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo $1+2\beta H+\gamma K=0$ obtemos novas superfícies deste tipo satisfazendo $1+2\beta' H'+\gamma' K'=0$, através do teorema de Bäcklund geométrico para tais superfícies. Usando a composição dessas transformações geométricas obtemos o teorema de permutabilidade para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas que fornece uma família a 4-parâmetros de superfícies satisfazendo $1+2\beta H^*+\gamma K^*=0$. A interpretação analítica desses resultados é dada em termos de soluções da equação de sine-Gordon. O Teorema de integrabilidade analítico fornece uma transformação de Bäcklund para soluções desta equação e o teorema de permutabilidade fornece novas soluções por um processo algébrico.

Um outro método para obter novas superfícies linear-Weingarten hiperbólicas a partir de uma dada superfície satisfazendo $1+2\beta H+\gamma K=0$ é a transformação de Ribaucour que fornece uma família a 4-parâmetros de tais superfícies com as mesmas constantes β e γ.

Determinamos condições necessárias e suficientes para que as superfícies obtidas pela composição de transformações de Bäcklund coincidam com as superfícies obtidas pela transformação de Ribaucour. Mostramos que em geral este fato não é verdadeiro. Este resultado contrasta com o que ocorre nos casos de superfícies com curvatura Gaussiana constante positiva e curvatura média constante não nula.

Palavras-Chaves: Superfície Linear Weigarten Hiperbólica, Transformação de Bäcklund, Transformação de Ribaucour.

Abstract

We consider linear Weingarten hyperbolic surfaces immersed in $\mathbb{R}^3$ such that the Gaussian curvature K and the mean curvature H satisfy $1+2\beta H+\gamma K = 0$, where $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ and $\beta^2 - \gamma < 0$. The first and second fundamental forms of these surfaces are completely determined by the solutions of the sine-Gordon equation $\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sin(\psi + C_{\beta\gamma})$, where $C_{\beta\gamma}$ is a real constant determined by β and γ.

From a linear Weingarten hyperbolic surface immersed in $\mathbb{R}^3$ satisfying $1+2\beta H+\gamma K = 0$ we obtain new surfaces satisfying $1 + 2\beta' H' + \gamma' K' = 0$, using the geometric Bäcklund theorem for such surfaces. Using the composition of these geometric transformations we obtain the permutability theorem for linear Weingarten hyperbolic surfaces that provides a 4-parameter family of surfaces satisfying $1 + 2\beta H^* + \gamma K^* = 0$. The analytical interpretation of these results is given in terms of solutions of the sine-Gordon equation. The analytic integrability theorem provides a Bäcklund transformation for solutions of this equation and the permutability theorem provides new solutions by an algebraic process.

Another method to obtain new linear Weingarten hyperbolic surfaces from a given surface satisfying $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$ is the Ribaucour transformation that provides a 4-parameter family of such surfaces with the same constants β and γ.

We determine necessary and sufficient conditions for the surfaces obtained by the composition of Bäcklund transformations to coincide with the surfaces obtained by a Ribaucour transformation. We prove that in general this fact is not true. This result contrasts with what happens in the case of surfaces of constant positive Gaussian curvature and surfaces of nonzero constant mean curvature.

keywords: Hyperbolic Linear Weingarten Surfaces, Bäcklund Transformations, Ribaucour Transformations.

Sumário

Introdução

Uma superfície linear-Weingarten imersa em uma forma espacial $\overline{M}^3(\overline{K})$ é uma superfície cujas curvaturas média H e Gaussiana K satisfazem uma relação linear da forma $\alpha + 2\beta H + \gamma(K - \overline{K}) = 0$, onde $\alpha,\ \beta, \gamma$ são constantes. Estas superfícies são ditas hiperbólicas se $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, elípticas se $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$ e tubulares se $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$. Superfícies de curvatura Gaussiana constante negativa (resp. superfícies de curvatura média constante, superfícies mínimas e superfícies de curvatura Gaussiana constante positiva) são casos particulares de superfícies linear-Weingarten hiperbólicas (resp. elípticas) em $\mathbb{R}^3$. Superfícies linear-Weingarten podem ser consideradas também em formas espaciais semi-Riemannianas (ver [19]).

Neste trabalho, vamos estudar as transformações de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. A teoria de transformações de Bäcklund para superfícies de curvatura constante negativa em $\mathbb{R}^3$, considera duas superfícies difeormorfas M e M' no espaço euclidiano tridimensional de modo que, em pontos correspondentes $p \in M$ e $p' \in M'$, a reta determinada por estes pontos é tangente a estas superfícies. Admite-se, ainda, que o comprimento do segmento de reta ligando p e p' é constante e que os vetores normais a p em M e p' em M' formem um ângulo constante θ. Tais congruências foram originalmente estudadas por Bäcklund [1, 2]. Ele mostrou que, neste caso, as superfícies M e M' tem mesma curvatura Gaussiana constante negativa (uma demonstração usando a teoria de triedro móvel e formas diferenciais pode ser encontrada em [19]). Por este motivo, dizemos que estas superfícies se relacionam por uma congruência de retas pseudoesférica.

Bäcklund obteve uma transformação entre superfícies de mesma curvatura constante negativa que, atualmente, é conhecida por transformação de Bäcklund. Ele mostrou também que tal transformação é integrável, isto é, dado um ponto em uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ de curvatura Gaussiana constante negativa e um vetor unitário tangente a esta superfície, que não é direção principal neste ponto, pode-se construir uma nova superfície M', de mesma curvatura, de modo que M e M' se relacionam por uma congruência de retas pseudoesférica. Neste caso, M' é dita transformada de Bäcklund da superfície M.

Posteriormente, Bianchi [5] estudou a composição de transformações de Bäcklund obtendo o teorema de permutabilidade. Este resultado estabelece que dadas três superfícies M, M_1, M_2 imersas em $\mathbb{R}^3$ de modo que M está relacionada a M_i $(i = 1, 2)$ por uma transformação de Bäcklund cujo ângulo entre vetores normais a M e M_i em pontos correspondentes é θ_i, com $\theta_1 \neq \theta_2$, então é possível construir uma quarta superfície M^* associada a M_1 (resp. M_2) por uma transformação de Bäcklund de modo que o ângulo entre as normais é θ_2 (resp. θ_1). Bianchi [3, 4], considerou ainda congruências similares em formas espaciais $\overline{M}^3(\overline{K})$ (ver [17], [18], [19]).

As superfícies linear-Weingarten, quando parametrizadas por linhas de curvaturas ortogonais, estão localmente determinadas em termos de sua geometria intrínseca. Isto é, sua primeira e segunda formas fundamentais estão em correspondência com soluções de certas equações diferenciais (veja, por exemplo, [17], [18] e [19]). Em particular, superfícies de curvatura Gaussiana constante negativa imersas no espaço euclidiano tridimensional estão associadas a soluções da equação de sine-Gordon, as superfícies de curvatura Gaussiana constante positiva e as superfícies com curvatura média constante não nula estão associadas a equação eliptica sinh-Gordon e as superfícies mínimas estão associadas a equação equação de Liouville. Resultados clássicos relacionando superfícies linear-Weingarten hiperbólica em $\mathbb{R}^3$ e a equação de sine-Gordon podem ser encontrados em [10] e [19].

A teoria de transformações de Bäcklund, descrita nos parágrafos anteriores, pode ser interpretada analiticamente através da correspondência biunívoca existente entre superfícies de curvatura constante negativa no espaço euclidiano tridimensional e a equação de sine-Gordon $\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen\psi$. A versão analítica do teorema de integrabilidade permite determinar uma solução desta equação a partir de uma outra solução previamente conhecida. A versão analítica do teorema de permutabilidade de Bianchi estuda a composição de transformações de Bäcklund para a equação de sine-Gordon. Neste teorema é demonstrada a fórmula de superposição, que possibilita a obtenção algébrica de mais soluções desta equação a partir de uma solução dada.

Esta teoria pode ser estendida para a equação de sinh-Gordon. Neste caso, Bianchi [6] considerou uma versão complexa da transformação analítica de Bäcklund obtendo uma transformação complexa para soluções desta equação. No entanto, a composição de duas transformações de Bäcklund convenientemente escolhidas fornece uma solução real desta equação a partir de uma solução real conhecida (veja [19]). Desta forma, Bianchi construiu uma família de superfícies com curvatura Gaussiana constante positiva a partir de outra superfície deste tipo (para maiores detalhes veja, por exemplo, [12], [16] ou [17]).

Uma outra transformação clássica, chamada transformação de Ribaucour, relaciona duas superfícies difeomorfas em $\mathbb{R}^3$ de forma que, em pontos correspondentes, as retas normais se intersectam em pontos equidistantes. Além disto, exige-se que o conjunto formado pelos pontos de interseção seja uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e que o difeomorfismo preserve linhas de curvatura.

Utilizando formas diferenciais, Corro-Ferreira-Tenenblat [7] reformularam a teoria clássica de transformações de Ribaucour para hipersuperfícies no espaço euclidiano e usaram incialmente tais transformações para obter famílias de hipersuperfícies de Dupin.

As transformações de Ribaucour para superfícies com curvatura Gaussiana constante e curvatura média constante (incluindo as superfícies mínimas) eram conhecidas desde o início do século passado (Bianchi [6]). Resultados clássicos mostram que estas transformações quando satisfazem certas condições adicionais permitem construir novas superfícies de curvatura Gaussiana constante ou curvatura média constante a partir de uma superfície deste mesmo tipo. No entanto, apenas em 2003, Corro-Ferreira-Tenenblat [8] obtiveram as primeiras famílias de superfícies mínimas usando o método de transformações de Ribaucour para o catenóide e à superfície de Enneper. Estes resultados foram estendidos para a família de Bonnet por Lemes-Tenenblat [14] .

Ainda em 2003, Corro-Ferreira-Tenenblat [9] obtiveram um método para construir superfícies linear-Weingarten a partir de uma dada superfície deste mesmo tipo. Considerando duas superfícies M, $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$, relacionadas por uma transformação de Ribaucour satisfazendo uma certa condição algébrica adicional, provaram que $\tilde{M}$ é uma superfície linear-Weingarten se, e somente se, M é uma superfície linear-Weingarten com as mesmas constantes α, β e γ. Além disto, partindo de uma superfície linear-Weingarten M, mostraram que a transformação de Ribaucour juntamente com a condição adicional é equivalente a um sistema integrável, o que permite obter famílias de novas superfícies linear-Weingarten associadas a M. Desta forma, os autores estenderam os resultados clássicos da teoria de superfícies de curvatura Gaussiana constante e curvatura média constante (inclusive mínimas). Aplicando o método ao clindro e à superfície de Delaunay, eles obteveram famílias de superfícies completas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante e superfícies linear-Weingarten completas, tanto elípticas quanto hiperbólicas.

Em 2006, Tenenblat-Wang [20] generalizaram o trabalho de Corro-Ferreira-Tenenblat, estendendo a teoria de transformações de Ribaucour para superfícies em formas espaciais. Aplicações do método na construção de famílias de superfícies com curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$ e curvatura média constante igual a 1 em $\mathbb{H}^3$ foram obtidos em [20] e [21]. A comutatividade da transformação de Ribaucour com a correspondência de Lawson e suas aplicações para obtenção de famílias de superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{H}^3$ foram estudadas por Lemes-Roitman-Tenenblat-Tribuzy [15].

Neste trabalho, vamos estudar a extensão geométrica das transformações de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ e investigar a relação entre a composição de tais transformações e a transformação de ribaucour.

Vamos incialmente fornecer a extensão geométrica das transformações de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. Consideraremos duas superfícies difeomorfas $M,\ M' \subset \mathbb{R}^3$ de modo que a distância entre pontos correspondentes $p \in M$ e $p' \in M'$ seja constante e igual a r e o ângulo entre os vetores normais a M em p (N_p) e a M' em p' $(N'_{p'})$ seja constante e igual a θ. Vamos supor ainda que a reta ligando p a p' forme um ângulo constante ϕ (resp. ρ) com N_p (resp. $N'_{p'}$). Usando a teoria de formas diferenciais e triedro móvel mostraremos que as superfícies que admitem uma tal congruência são linear-Weingarten hiperbólicas (Teorema 1.5). Por este motivo, tal congruência será denominada congruência linear-Weingarten hiperbólica. Ainda no Teorema 1.5, vamos determinar números reais $\beta,\ \gamma,\ \beta',\ \gamma'$ em função das constantes $r,\ \theta,\ \phi,\ \rho$ e verificar que M (resp. M') satisfaz $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$ (resp. $1 + 2\beta' H' + \gamma' K' = 0$). Em particular vamos observar que, em geral, $\beta \neq \beta'$ e $\gamma \neq \gamma'$.

Construíremos uma transformação entre as superfícies linear-Weingarten hiperbólicas M e M', que denominaremos transformação de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. Neste caso, diremos que M' está associada a M por uma transformação de Bäcklund $BT(r, \theta, \phi, \rho)$. Em seguida, demonstraremos que esta transformação é integrável (Teorema 1.9). Mais precisamente, mostraremos que dado um ponto p_0 sobre uma superfície linear-Weingarten hiperbólica M e um vetor unitário v_0, cuja projeção sobre o plano tangente a M em p_0 não é uma direção principal, então existe uma superfície M' associada a M por uma congruência linear-Weingarten hiperbólica tal que a reta de congruência em p_0 está na direção de v_0.

Para finalizar o estudo geométrico das transformações de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$, vamos estudar a composição de tais transformações. Dada uma superfície linear-Weingarten hiperbólica $M \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$ e duas superfícies M_i $(i = 1, 2)$ associadas a M por transformações de Bäcklund $BT(r_i, \theta_i, \phi_i, \rho_i)$, então escolhendo adequadamente as constantes $r_i, \theta_i, \phi_i, \rho_i$ podemos construir uma quarta superfície linear-Weingarten hiperbólica M^*, satisfazendo $1 + 2\beta H^* + \gamma K^* = 0$, associada a M_1 (resp. M_2) por uma transformação de Bäcklund $BT(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$ (resp. $BT(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$). Obteremos, assim, o teorema de permutabilidade para tais transformações (Teorema 1.19). É importante ressaltar que a teoria de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas foi considerada por Bianchi [6].

Concluimos que a partir de uma superfície linear-Weingarten hiperbólica $M \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$ existem dois métodos para obtenção de famílias a 4-parâmetros de novas superfícies linear-Weingarten hiperbólicas com as mesmas constantes β e γ. Mais precisamente, a família de superfícies $\tilde{M}$ obtida pela transformação de Ribaucour e a família de superfícies M^* obtida pela composição de transformações de Bäcklund para tais superfícies. Portanto, é natural perguntar quando as superfícies $\tilde{M}$ e M^* são congruentes.

Em algumas situações particulares a resposta para esta questão já é conhecida. Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de curvatura constante $K = -1$ e $M^* \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de mesma curvatura obtida pela composição de transformações de Bäcklund com parâmetros distintos $\theta_1,\ \theta_2$ tais que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Então M^* é congruente a uma transformação de Ribaucour de M (ver [17], Observação 3.8, pag. 193). No caso de superfícies em $M \subset \mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante positiva segue da composição de transformações de Bäcklund complexas que M^* é congruente a uma transformação de Ribaucour de M (ver [17], Observação 3.5, pag. 190). Usando o fato que as superfícies em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante é localmente paralela a superfícies com curvatura Gaussiana constante positiva então este resultado se estende para tais superfícies (ver [11]). Jeromim-Pedit [11] mostraram que toda composição de transformações de Bäcklund de uma superfície de curvatura média constante é uma transformação de Darboux (transformação de Ribaucour conforme) desta superfície. A recíproca deste resultado foi demonstrado por Kobayashi-Inoguchi [12].

Neste trabalho, mostraremos que uma superfície obtida pela composição de transformações de Bäcklund de uma superfície linear-Weingarten hiperbólica em $\mathbb{R}^3$, em geral não é uma transformação de Ribaucour desta superfície. Para demonstrar este resultado vamos fornecer a versão analítica dos teoremas da transformação de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. É conhecido que dada uma superfície $\mathbb{R}^3$ satisfazendo $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$, onde β e γ são constantes reais tais que $\gamma - \beta^2 > 0$ podemos associar uma solução ψ da equação de sine-Gordon $\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen(\psi + C_{\beta\gamma})$, onde $C_{\beta\gamma}$ é uma constante real determinada por β e γ. A recíproca deste resultado também é verdadeira (ver [17] ou [19]). Usando esta correspondência biunívoca entre superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ e soluções da equação de sine-Gordon, mostraremos que a transformação de Bäcklund para tais superfícies é equivalente a um sistema integrável de equações diferenciais de primeira ordem (Proposição 1.10). Além disto, cada solução ψ' deste sistema satisfaz a uma equação de sine-Gordon $\psi'_{x_1x_1} - \psi'_{x_2x_2} = sen(\psi + C_{\beta'\gamma'})$, onde $C_{\beta'\gamma'}$ é uma constante real e, em geral, $C_{\beta'\gamma'} \neq C_{\beta\gamma}$ (Teorema 2.4). Neste caso, diremos que ψ' é uma transformação de

Bäcklund de ψ. Finalizando o estudo analítico das transformações de Bäcklund, vamos obter a fórmula de superposição dada pela interpretação do teorema de permutabilidade (Teorema 2.11) que nos permite determinar, algebricamente, uma nova solução para a equação de sine-Gordon inicial.

Vamos analisar a composição de transformações de Bäcklund e as transformações de Ribaucour para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. Determinaremos uma condição necessária e suficiente para que as superfícies obtidas por composição de transformações de Bäcklund e pela transformação de Ribaucour para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ sejam congruentes (Teorema 3.13). Como consequência vamos obter, em particular, um resultado clássico para superfícies com cuvatura Gaussiana constante $K = -1$ em $\mathbb{R}^3$. Além disto, daremos um exemplo explícito considerando transformações de Bäcklund e de Ribaucour da pseudoesfera para verificar que em geral a composição de transformações de Bäcklund não é uma transformação de Ribaucour.

No Capítulo 1, vamos considerar a versão geométrica da teoria de transformações de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. Iniciaremos o capítulo, definindo tais superfícies e estabelecendo a sua relação com soluções de equações de sine-Gordon (ver [19]). Em seguida vamos definir o conceito de congruência linear-Weingarten hiperbólica e demonstrar o teorema de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hipebólicas em $\mathbb{R}^3$. Vamos provar também os teoremas de integrabilidade (Teorema 1.9) e permutabiliade (1.19) para esta transformação. Forneceremos ainda uma interpretação analítica da transformação de Bäcklund (Proposição 1.10), que será utilizada no Capítulo 2.

O Capítulo 2 será dedicado ao estudo da interpretação analítica da transformação de Bäcklund. Demonstraremos o teorema de integrabilidade analítico (Teorema 2.4) e o teorema de permutabilidade analítico (2.11) que são interpretações analíticas dos teoremas geométricos de integrabilidade (1.9) e de permutabilidade (1.19) demonstrados no Capítulo 1.

No Capítulo 3, apresentaremos inicialmente a definição de transformação de Ribaucour e os principais resultados desta teoria. Maiores detalhes e demonstrações podem ser encontrados em [7], [9] e [15]. Vamos obter uma condição necessária e suficiente para que a composição de transformações de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ seja uma transformação de Ribaucour (Teorema 3.13). Vamos concluir dando um exemplo que mostra que em geral uma tal composição não é uma transformação de Ribaucour.

Capítulo

1

Transformação de Bäcklund Para Superfícies Linear-Weingarten Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, vamos considerar duas superfícies M e M' em $\mathbb{R}^3$ e um difeomorfismo l entre elas de modo que, em pontos correspondentes, a reta unindo tais pontos forma ângulos constantes com as retas normais a M e M' nesses pontos. Além disto, vamos supor que a distância entre tais pontos e o ângulo entre as retas normais a M e M' independem do ponto. Nestas condições, mostraremos no Teorema 1.5 que M e M' são superfícies linear-Weingarten hiperbólicas. Por este motivo, tal difeomorfismo será denominado congruência linear-Weingarten hiperbólica e diremos que M' é transformação de Bäcklund de M.

Veremos, no teorema de integrabilidade (Teorema 1.9), que se M é uma superfície linear-Weingarten hiperbólica em $\mathbb{R}^3$ então fixado um vetor unitário genérico v_0 em $p_0 \in M$, existe uma superfície M' associada a M por uma congruência linear-Weingarten hiperbólica tal que a reta de congruência em p_0 está na direção de v_0. O teorema de permutabilidade (Teorema 1.19) prova que a composição de transformações de Bäcklund é comutativa quando a distância e os ângulos da congruência são escolhidos adequadamente.

1.1 Superfícies Linear-Weingarten em $\mathbb{R}^3$

Nesta seção, apresentaremos a definição de superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ e a sua relação com soluções da equação de sine-Gordon.

Definição 1.1. Uma superfície $M \subset R^3$ é dita *superfície Weingarten* se existe uma função diferenciável relacionando as curvaturas Gaussiana K e média H de M. Uma superfície é chamada *superfície linear-Weingarten* se H e K satisfazem uma relação linear, ou seja, existem constantes reais α, β, γ tais que $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$. Tal superfície será dita *Hiperbólica*, se $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, *Elíptica*, se $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$ e *Tubular*, se $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$.

Observe que quando a superfície é linear-Weingarten hiperbólica então $\alpha\gamma > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\alpha = 1$ e, portanto, $\gamma > 0$.

O seguinte resultado estabelece uma relação biunívoca entre as superfícies linear-Weingarten hiperbólicas e soluções da equação de sine-Gordon. Sua demonstração pode ser encontrada em [19].

Teorema 1.2. *Seja $M \subset R^3$ uma superfície linear-Weingarten hiperbólica satisfazendo*

$$1 + 2\beta H + \gamma K = 0, \quad \gamma > 0. \tag{1.1}$$

Então existem coordenadas locais x_1, x_2 em M e uma solução $\psi(x_1, x_2)$ da equação de sine-Gordon

$$\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen(\psi + C_{\beta\gamma}), \tag{1.2}$$

onde $C_{\beta\gamma}$ é a constante definida por

$$senC_{\beta\gamma} = \frac{2\varepsilon_2\beta\sqrt{D}}{\gamma}, \quad cosC_{\beta\gamma} = \frac{\gamma - 2\beta^2}{\gamma}, \quad \varepsilon_2^2 = 1, \tag{1.3}$$

com $D = \gamma - \beta^2$.

Reciprocamente, dada uma solução $\psi(x_1, x_2)$ de (1.2) existe uma superfície linear-Weingarten $M \subset R^3$ satisfazendo (1.1), parametrizada por linhas de curvatura, cujas primeira e segunda formas fundamentais são dadas por

$$I = g_1^2 dx_1^2 + g_2^2 dx_2^2, \qquad II = -\lambda_1 g_1^2 dx_1^2 - \lambda_2 g_2^2 dx_2^2, \tag{1.4}$$

onde

$$g_1 = \sqrt{\gamma} cos\frac{\psi}{2}, \qquad g_2 = \sqrt{\gamma} sen\frac{\psi}{2}, \tag{1.5}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\gamma}\left[-\beta + \varepsilon_1 \frac{g_2}{g_1}\sqrt{D}\right], \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{\gamma}\left[-\beta + \varepsilon_2 \frac{g_1}{g_2}\sqrt{D}\right], \tag{1.6}$$

com $\varepsilon_1^2 = 1$ e $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$.

1.2 Teorema de Bäcklund para Superfícies Linear-Weingarten Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

Iniciemos com a definição de congruência linear-Weingarten hiperbólica, que é uma extensão do conceito de congruências de retas pseudoesférica no espaço euclidiano tridimensional. Em seguida, apresentamos o teorema de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.3. Seja $l : M \longrightarrow M'$ um difeomorfismo entre as superfícies $M, M' \subset \mathbb{R}^3$. Dados $p \in M$ e $p' = l(p) \in M'$, com $p' \neq p$, denotemos por $v = v(p)$ a direção da reta que passa por p e p'. Dizemos que l é uma *congruência linear-Weingarten hiperbólica com constantes* (r, θ, ϕ, ρ), tais que $r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi, \rho \leq \frac{\pi}{2}$ (Figura 1.1) se

1. a distância, em $\mathbb{R}^3$, entre p e p' independe de p e é igual a r ,
2. o ângulo entre as normais N_p e $N'_{p'}$ independe de p e é igual a θ,
3. o ângulo entre a normal N_p e v independe de p e é igual a ϕ,
4. o ângulo entre a normal $N'_{p'}$ e $(-v)$ independe de p e é igual a ρ.

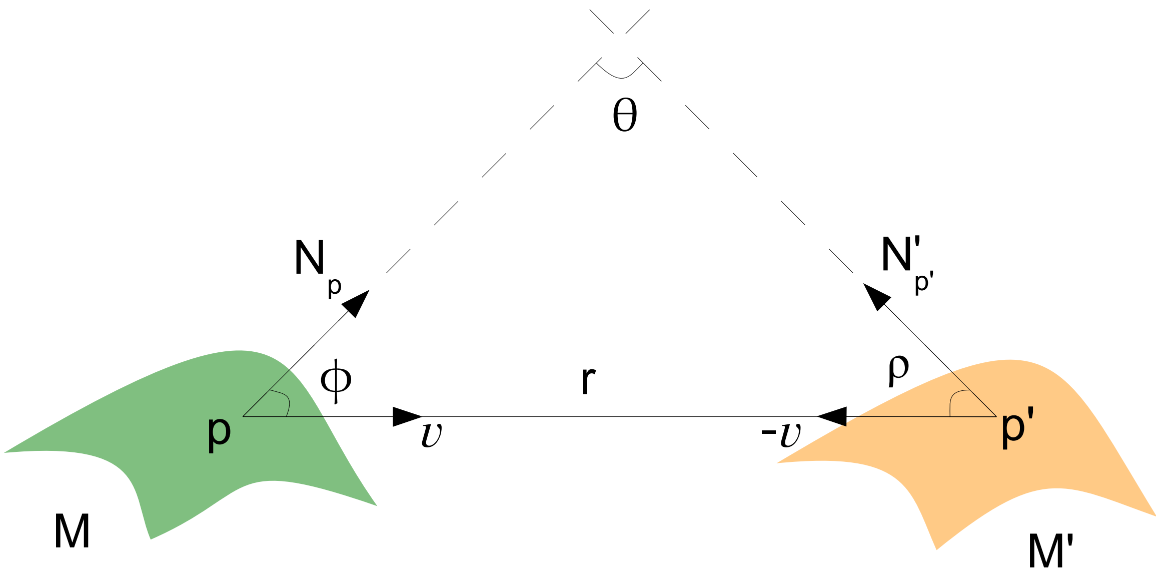

Figura 1.1: Congruência Linear-Weingarten Hiperbólica.

Observação 1.4. Quando $\phi = \rho = \frac{\pi}{2}$, isto é, a direção de congruência é tangente a M e M', obtemos a congruência de retas pseudoesférica para superfícies em $\mathbb{R}^3$.

O teorema abaixo justifica a escolha do nome *congruência linear-Weingarten hiperbólica*, dado ao difeomorfismo $l : M \longrightarrow M'$ da definição anterior.

Teorema 1.5. (Teorema de Bäcklund) *Sejam M e M' duas superfícies contidas em $\mathbb{R}^3$. Suponha que exista uma congruência linear-Weingarten hiperbólica $l : M \longrightarrow M'$ com constantes (r, θ, ϕ, ρ). Para todo $p \in M$ e $p' = l(p) \in M'$, suponhamos que os vetores N_p (normal a M em p), $N'_{p'}$ (normal a M' em p') e $v = v(p)$ (vetor diretor unitário da reta que une p e p') não sejam coplanares. Então M e M' são superfícies linear-Weingarten hiperbólicas. Mais precisamente, as curvaturas Gaussiana K (resp. K') e média H (resp. H') de M (resp. M') satisfazem a relação $1+2\beta H+\gamma K = 0$ (resp. $1+2\beta' H'+\gamma' K' = 0$) onde*

$$\beta = \frac{-r(cos\phi + cos\rho cos\theta)}{sen^2\theta}, \qquad \gamma = \frac{r^2 sen^2\rho}{sen^2\theta}, \tag{1.7}$$

$$\beta' = \frac{-r(cos\rho + cos\phi cos\theta)}{sen^2\theta}, \qquad \gamma' = \frac{r^2 sen^2\phi}{sen^2\theta}, \tag{1.8}$$

com $(\beta')^2 - \gamma' = \beta^2 - \gamma < 0$.

Demonstração: Consideremos referenciais ortonormais $\{e_1, e_2, e_3\}$ em M e $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ em M' de modo que, em cada $p \in M$, $e_3(p) = N_p$ e $e_3(p') = N'_{p'}$ e os conjuntos $\{v, e_1, e_3\}$ e $\{v, e'_1, e'_3\}$ sejam coplanares (Figura 1.2).

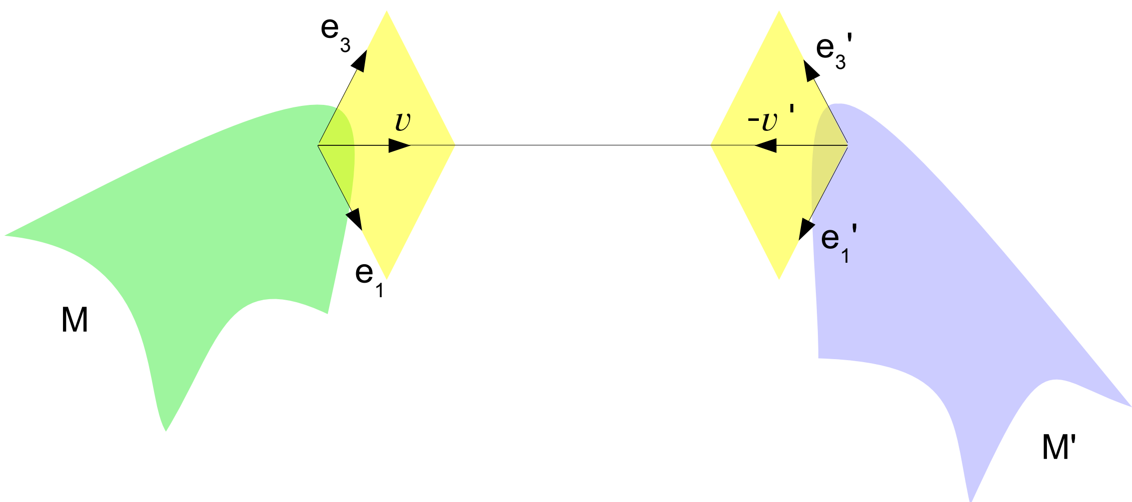

Figura 1.2: Referenciais ortonormais em M e M'.

Pela Definição 1.3, temos que

$$\begin{aligned} < v, e_3 > &= cos\phi, \quad < v, e'_3 >= -cos\rho, \\ < v, e_1 > &= sen\phi, \quad < v, e'_1 >= -sen\rho, \\ < e'_3, e_3 > &= cos\theta, \end{aligned} \tag{1.9}$$

ou seja,

$$sen\phi e_1 + cos\phi e_3 = v = -sen\rho e'_1 - cos\rho e'_3. \tag{1.10}$$

Como a distância entre p e p' é igual a r, podemos tomar parametrizações locais X em p e X' em p', com

$$X' = X + rv. \tag{1.11}$$

Determinemos, agora, as coordenadas do referencial $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ com relação ao referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$. Para isto, consideremos números reais a_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$ tais que

$$e'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} e_j. \tag{1.12}$$

Segue diretamente de (1.9) que $a_{33} = cos\theta$. Calculando $< v, e'_3 >$ em (1.10), vamos obter

$$-cos\rho = a_{31} sen\phi + a_{33} cos\phi.$$

Donde $a_{31} = -\left(\dfrac{cos\rho + cos\phi cos\theta}{sen\phi}\right)$. Como $|e'_3| = 1$, podemos considerar $a_{32} = -\sqrt{sen^2\theta - a_{31}^2}$. Portanto, temos

$$\begin{cases} a_{31} &= -\left(\dfrac{cos\rho + cos\phi cos\theta}{sen\phi}\right), \\ a_{32} &= -\sqrt{sen^2\theta - a_{31}^2}, \\ a_{33} &= cos\theta. \end{cases} \tag{1.13}$$

Para determinar o vetor e'_1 observemos da expressão de v, dada em (1.10), que

$$e'_1 = -\left(\frac{v + cos\rho e'_3}{sen\rho}\right).$$

Segue de (1.12) e de (1.13) que

$$\begin{cases} a_{11} & = & -\left(\dfrac{sen\phi + a_{31}cos\rho}{sen\rho}\right), \\ a_{12} & = & -\left(\dfrac{a_{32}cos\rho}{sen\rho}\right), \\ a_{13} & = & -\left(\dfrac{cos\phi + cos\theta cos\rho}{sen\rho}\right). \end{cases} \tag{1.14}$$

Finalmente, usando a relação $e'_2 = e'_3 \times e'_1$ e as constantes dadas em (1.13) vamos obter

$$e'_2 = \frac{1}{sen\rho}\left[-a_{32}cos\phi e_1 + (a_{31}cos\phi - cos\theta sen\phi)e_2 + a_{32}sen\phi e_3\right].$$

Segue de (1.12) e de (1.13) que

$$\begin{cases} a_{21} & = & \dfrac{-a_{32}cos\phi}{sen\rho}, \\ a_{22} & = & \dfrac{a_{31}cos\phi - cos\theta sen\phi}{sen\rho}, \\ a_{23} & = & \dfrac{a_{32}sen\phi}{sen\rho}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Consideremos, agora, $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ formas duais e de conexão associadas ao referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_{12}, \omega'_{13}, \omega'_{23}$ formas duais e de conexão associadas ao referencial $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Note de (1.10) e (1.11) que

$$X' = X + rv = X + rsen\phi e_1 + rcos\phi e_3.$$

Diferenciando e usando as equações de estrutura, temos

$$\begin{aligned} dX' &= dX + rsen\phi de_1 + rcos\phi de_3 \\ &= (\omega_1 - rcos\phi\omega_{13})e_1 + (\omega_2 + rsen\phi\omega_{12} - rcos\phi\omega_{23})e_2 + (rsen\phi\omega_{13})e_3. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (1.12), vamos obter

$$dX' = \omega'_1 e'_1 + \omega'_2 e'_2 = (a_{11}\omega'_1 + a_{21}\omega'_2)e_1 + (a_{12}\omega'_1 + a_{22}\omega'_2)e_2 + (a_{13}\omega'_1 + a_{23}\omega'_2)e_3.$$

Comparando as duas expressões encontradas concluimos que as 1-formas $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ e $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_{12}, \omega'_{13}, \omega'_{23}$ associadas, respectivamente, aos referenciais

$\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ devem satisfazer às equações

$$\begin{cases} a_{11}\omega'_1 + a_{21}\omega'_2 &= \omega_1 - rcos\phi\omega_{13}, \\ a_{12}\omega'_1 + a_{22}\omega'_2 &= \omega_2 + rsen\phi\omega_{12} - rcos\phi\omega_{23}, \\ a_{13}\omega'_1 + a_{23}\omega'_2 &= rsen\phi\omega_{13}. \end{cases} \tag{1.16}$$

Como $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e, por hipótese do teorema, os vetores e'_3, e_3, v não são coplanares então $a_{32} \neq 0$ pois ,

$$[e'_3, e_3, v] = det \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \\ sen\phi & 0 & cos\phi \end{bmatrix} = a_{32}sen\phi.$$

Usando a relação $e'_3 = e'_1 \times e'_2$ observemos que $a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} = -a_{32}$. Desta forma, seguem das primeira e terceira equações do sistema (1.16) que

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \frac{-1}{a_{32}} det \begin{bmatrix} \omega_1 - rcos\phi\omega_{13} & a_{21} \\ rsen\phi\omega_{13} & a_{23} \end{bmatrix} = \frac{-1}{a_{32}} \left[a_{23}\omega_1 - r\omega_{13}(a_{23}cos\phi + a_{21}sen\phi)\right], \\ \omega'_2 &= \frac{-1}{a_{32}} det \begin{bmatrix} a_{11} & \omega_1 - rcos\phi\omega_{13} \\ a_{13} & rsen\phi\omega_{13} \end{bmatrix} = \frac{-1}{a_{32}} \left[-a_{13}\omega_1 + r\omega_{13}(a_{11}sen\phi + a_{13}cos\phi)\right]. \end{aligned}$$

Usando (1.15) obtemos

$$\omega'_1 = \left(\frac{-a_{23}}{a_{32}}\right)\omega_1.$$

Das equações (1.13) e (1.14) seguem que $a_{11}sen\phi + a_{13}cos\phi = -sen\rho$, ou seja,

$$\omega'_2 = \frac{1}{a_{32}}\{a_{13}\omega_1 + rsen\rho\omega_{13}\}.$$

Deste modo, substituindo na segunda equação do sistema (1.16), temos

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \left(\frac{a_{12}}{rsen\phi}\right)\omega'_1 + \left(\frac{a_{22}}{rsen\phi}\right)\omega'_2 + \left(\frac{cos\phi}{sen\phi}\right)\omega_{23} + \left(\frac{-1}{rsen\phi}\right)\omega_2 \\ &= \left(\frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{ra_{32}sen\phi}\right)\omega_1 + \left(\frac{-1}{rsen\phi}\right)\omega_2 + \left(\frac{a_{22}sen\rho}{a_{32}sen\phi}\right)\omega_{13} + \left(\frac{cos\phi}{sen\phi}\right)\omega_{23}. \end{aligned}$$

Usando novamente a relação $e'_3 = e'_1 \times e'_2$, vamos obter $a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23} = -a_{31}$. Portanto, as 1-formas associadas ao referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$ em M estão relacionadas pela equação

$$\omega_{12} = \left(\frac{-a_{31}}{ra_{32}sen\phi}\right)\omega_1 + \left(\frac{-1}{rsen\phi}\right)\omega_2 + \left(\frac{a_{22}sen\rho}{a_{32}sen\phi}\right)\omega_{13} + \left(\frac{cos\phi}{sen\phi}\right)\omega_{23}.$$

Para simplificar os cálculos, denotaremos

$$\omega_{12} = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_{13} + c_4\omega_{23}, \tag{1.17}$$

onde

$$c_1 = \left(\frac{-a_{31}}{ra_{32}sen\phi}\right), \quad c_2 = \left(\frac{-1}{rsen\phi}\right), \quad c_3 = \left(\frac{a_{22}sen\rho}{a_{32}sen\phi}\right) \quad e \quad c_4 = \left(\frac{cos\phi}{sen\phi}\right). \tag{1.18}$$

Diferenciando (1.17) e usando as equações de estrutura, vamos obter

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= c_1(\omega_2 \wedge \omega_{21}) + c_2(\omega_1 \wedge \omega_{12}) + c_3(\omega_{12} \wedge \omega_{23}) + c_4(\omega_{21} \wedge \omega_{13}) \\ &= \omega_{12} \wedge (-c_2\omega_1 + c_1\omega_2 - c_4\omega_{13} + c_3\omega_{23}). \end{aligned}$$

Substituindo pela expressão de ω_{12} dada em (1.17) temos

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= c_1^2\omega_1 \wedge \omega_2 - c_1c_4\omega_1 \wedge \omega_{13} + c_1c_3\omega_1 \wedge \omega_{23} + \\ &\quad -c_2^2\omega_2 \wedge \omega_1 - c_2c_4\omega_2 \wedge \omega_{13} + c_2c_3\omega_2 \wedge \omega_{23} + \\ &\quad -c_2c_3\omega_{13} \wedge \omega_1 + c_1c_3\omega_{13} \wedge \omega_2 + c_3^2\omega_{13} \wedge \omega_{23} + \\ &\quad -c_2c_4\omega_{23} \wedge \omega_1 + c_1c_4\omega_{23} \wedge \omega_2 - c_4^2\omega_{23} \wedge \omega_{13}. \end{aligned}$$

As propriedades de operações com formas diferenciais nos permitem reescrever

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= (c_1^2 + c_2^2)\omega_1 \wedge \omega_2 + (c_2c_3 - c_1c_4)\omega_1 \wedge \omega_{13} + \\ &\quad +(c_1c_3 + c_2c_4)\omega_1 \wedge \omega_{23} - (c_2c_4 + c_1c_3)\omega_2 \wedge \omega_{13} + \\ &\quad +(c_2c_3 - c_1c_4)\omega_2 \wedge \omega_{23} + (c_3^2 + c_4^2)\omega_{13} \wedge \omega_{23} \\ &= (c_1^2 + c_2^2)\omega_1 \wedge \omega_2 + (c_2c_3 - c_1c_4)(\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}) + \\ &\quad +(c_1c_3 + c_2c_4)(\omega_1 \wedge \omega_{23} + \omega_{13} \wedge \omega_2) + (c_3^2 + c_4^2)\omega_{13} \wedge \omega_{23}. \end{aligned}$$

A definição das curvaturas Gaussiana e média de M e a equação de Gauss nos permitem escrever

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= (c_1^2+c_2^2)\omega_1\wedge\omega_2+(c_2c_3-c_1c_4)d\omega_3+ \\ &\quad +(c_1c_3+c_2c_4)(2H\omega_1\wedge\omega_2)+(c_3^2+c_4^2)(K\omega_1\wedge\omega_2) \\ &= [(c_1^2+c_2^2)+2(c_1c_3+c_2c_4)H+(c_3^2+c_4^2)K](\omega_1\wedge\omega_2). \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$d\omega_{12} = -K(\omega_1\wedge\omega_2).$$

Igualando estas expressões, vamos obter

$$(c_1^2+c_2^2)+2(c_1c_3+c_2c_4)H+(c_3^2+c_4^2+1)K=0. \tag{1.19}$$

Isto prova que a superfície M é linear-Weingarten.

Para obtermos as constantes β e γ apresentadas em (1.7) devemos calcular os coeficientes desta equação. Usando as constantes c_1,c_2,c_3,c_4 definidas em (1.18) obtemos

$$\begin{aligned} c_1^2+c_2^2 &= \frac{a_{31}^2}{r^2a_{32}^2sen^2\phi}+\frac{1}{r^2sen^2\phi}=\frac{a_{31}^2+a_{32}^2}{r^2a_{32}^2sen^2\phi}, \\ c_1c_3+c_2c_4 &= \frac{-a_{31}a_{22}sen\rho}{ra_{32}^2sen^2\phi}-\frac{cos\phi}{rsen^2\phi}=-\left(\frac{a_{31}a_{22}sen\rho+a_{32}^2cos\phi}{ra_{32}^2sen^2\phi}\right), \\ c_3^2+c_4^2+1 &= \frac{a_{22}^2sen^2\rho}{a_{32}^2sen^2\phi}+\frac{cos^2\phi}{sen^2\phi}+1=\frac{(a_{22}sen\rho)^2+a_{32}^2}{a_{32}^2sen^2\phi}. \end{aligned}$$

Usando (1.13) e (1.15) vamos obter

$$a_{31}^2+a_{32}^2=sen^2\theta,$$

$$a_{31}a_{22}sen\rho+a_{32}^2cos\phi=cos\phi+cos\rho cos\theta,$$

$$(a_{22}sen\rho)^2+a_{32}^2=sen^2\rho.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} c_1^2+c_2^2 &= \frac{sen^2\theta}{r^2a_{32}^2sen^2\phi}, \\ c_1c_3+c_2c_4 &= \frac{-r(cos\phi+cos\rho cos\theta)}{r^2a_{32}^2sen^2\phi}, \\ c_3^2+c_4^2+1 &= \frac{r^2sen^2\rho}{r^2a_{32}^2sen^2\phi}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Substituindo na equação (1.19) podemos concluir que as curvaturas Gaussiana e média da superfície M sastisfazem à equação $1+2\beta H+\gamma K=0$, onde β e γ são dados por (1.7).

Invertendo ρ e ϕ na demonstração anterior, concluimos que M' é uma superfície linear-Weingarten satisfazendo a equação $1 + 2\beta H' + \gamma K' = 0$, com β' e γ' dados por (1.8).

Usando (1.7) e (1.8), observemos que

$$\begin{aligned}
sen^4\theta(\beta^2 - \gamma) &= r^2(cos\phi + cos\rho cos\theta)^2 - r^2 sen^2\rho sen^2\theta \\
&= r^2[cos^2\phi + cos^2\rho cos^2\theta + 2cos\phi cos\rho cos\theta - sen^2\rho sen^2\theta] \\
&= r^2[-1 + cos^2\rho + cos^2\theta - cos^2\rho cos^2\theta + cos^2\phi sen^2\theta + \\
&\quad +cos^2\phi cos^2\theta + cos^2\rho cos^2\theta + 2cos\phi cos\rho cos\theta] \\
&= r^2[-sen^2\theta + cos^2\phi sen^2\theta + (cos\rho + cos\phi cos\theta)^2]
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
sen^4\theta((\beta')^2 - \gamma') &= r^2[-sen^2\theta + cos^2\rho sen^2\theta + (cos\phi + cos\rho cos\theta)^2] \\
&= r^2[-sen^2\theta + cos^2\phi sen^2\theta + (cos\rho + cos\phi cos\theta)^2] \\
&= sen^4\theta(\beta^2 - \gamma).
\end{aligned}$$

Segue destas igualdades e das constantes a_{31} e a_{32} dadas em (1.13) que

$$(\beta')^2 - \gamma' = \beta^2 - \gamma = -\frac{r^2 sen^2\phi}{sen^4\theta}[sen^2\theta - a_{31}^2] = -\frac{r^2 sen^2\phi a_{32}^2}{sen^4\theta}. \tag{1.21}$$

Como $a_{32} \neq 0$, $r > 0$ e $0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$ então $(\beta')^2 - \gamma' = \beta^2 - \gamma < 0$. Verificando, assim, que M e M' são superfícies linear-Weingarten hiperbólicas satisfazendo as condições enunciadas no teorema. ■

Definição 1.6. A equação (1.17) é denominada *transformação de Bäcklund de superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em* $\mathbb{R}^3$ e denotada por $BT(r, \theta, \phi, \rho)$, onde r, θ, ϕ, ρ são as constantes apresentadas na Definicão 1.3.

Observação 1.7. Nossos cálculos estão de acordo com o teorema de Bäcklund para superfícies $M, M' \subset \mathbb{R}^3$ relacionadas por uma congruência de retas pseudoesférica. De fato, tomando $\phi = \rho = \frac{\pi}{2}$, obtem-se facilmente a expressão $sen^2\theta + r^2 K = 0$, isto é, as superfícies M e M' tem curvatura constante negativa e igual a

$$K = \frac{-sen^2\theta}{r^2}, \tag{1.22}$$

conforme descrito na teoria clássica (veja, por exemplo, [19]).

Vamos finalizar esta seção estabelecendo algumas notações e identidades que serão utilizadas em diversos momentos ao longo do trabalho.

Observação 1.8. Sejam $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \rho, \phi \leq \frac{\pi}{2}$ números reais. Denotemos por

$$b_1 = \frac{-(cos\rho + cos\phi cos\theta)}{sen\phi}, \quad b_2 = -\sqrt{sen^2\theta - b_1^2}, \quad b_3 = \frac{b_1 cos\phi - sen\phi cos\theta}{sen\rho}. \tag{1.23}$$

Para garantir que o número real b_2 esteja bem definido e não seja nulo, vamos supor que as constantes r, θ, ϕ, ρ satisfaçam a condição

$$sen^2\theta - b_1^2 = sen^2\theta - \frac{(cos\rho + cos\phi cos\theta)^2}{sen^2\phi} > 0. \tag{1.24}$$

Com esta notação, observemos que as constantes $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ dadas em (1.18) se escrevem na forma

$$c_1 = \frac{-b_1}{rb_2 sen\phi}, \quad c_2 = \frac{-1}{rsen\phi}, \quad c_3 = \frac{b_3 sen\rho}{b_2 sen\phi}, \quad c_4 = \frac{cos\phi}{sen\phi}. \tag{1.25}$$

A demonstração de (1.20) prova que

$$\begin{aligned} c_1^2 + c_2^2 &= \frac{sen^2\theta}{r^2 sen^2\phi b_2^2}, \\ c_1 c_3 + c_2 c_4 &= \frac{-r(cos\phi + cos\rho cos\theta)}{r^2 sen^2\phi b_2^2}, \\ c_3^2 + c_4^2 &= \frac{r^2 sen^2\rho}{r^2 sen^2\phi b_2^2} - 1. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Além disto, pode-se provar ainda que

$$
\begin{aligned}
-c_1^2 + c_2^2 &= \frac{sen^2\theta - 2b_1^2}{r^2 sen^2\phi b_2^2}, \\
-c_1c_3 + c_2c_4 &= \frac{(2b_1^2 - sen^2\theta)cos\phi - b_1 sen\phi cos\theta}{r sen^2\phi b_2^2}, \\
-c_3^2 + c_4^2 &= \frac{(sen^2\theta - 2b_1^2)cos^2\phi + 2b_1 sen\phi cos\phi cos\theta - cos^2\theta sen^2\phi}{sen^2\phi b_2^2},
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

$$
\begin{aligned}
-c_1c_2 &= \frac{-b_1}{r^2 sen^2\phi b_2}, \\
c_1c_4 + c_2c_3 &= \frac{-2b_1 cos\phi + sen\phi cos\theta}{r sen^2\phi b_2}, \\
-c_3c_4 &= \frac{-b_1 cos^2\phi + sen\phi cos\phi cos\theta}{sen^2\phi b_2}.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Dados números reais β, γ tais que $\gamma - \beta^2 > 0$, escolhamos constantes $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi, \ \rho \leq \frac{\pi}{2}$ satisfazendo (1.7) e (1.24). Consideremos também os números reais β' e γ' definidos por (1.8). São válidas as seguintes identidades

$$(\beta')^2 - \gamma' = \beta^2 - \gamma = -\frac{r^2 sen^2\phi b_2^2}{sen^4\theta}, \tag{1.29}$$

$$\gamma + 2\beta r cos\phi + r^2 cos^2\phi = \frac{r^2 sen^2\phi(1 - b_1^2)}{sen^2\theta}, \tag{1.30}$$

$$\beta + r cos\phi = \frac{r cos\theta sen\phi b_1}{sen^2\theta}. \tag{1.31}$$

onde b_1 é dado em (1.23).

1.3 Teorema de Integrabilidade Geométrico

A demonstração do teorema de Bäcklund para superfícies liner-Weingarten (Teorema 1.5) mostra que a validade da equação (1.17) é uma condição necessária para a existência uma congruência linear-Weingarten hiperbólica com constantes (r, θ, ϕ, ρ) entre duas superfícies linear-Weingarten hiperbólicas M e M'.

O teorema de integrabilidade geométrico, que demonstraremos a seguir, mostra que dada uma superfície linear-Weingarten hiperbólica satisfazendo (1.17) existe uma família a 3-parâmetros de superfícies M' que estão relacionadas a M por uma congruência linear-

Weingarten hiperbólica.

Teorema 1.9. (Teorema de Integrabilidade Geométrico) *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície linear-Weingarten hiperbólica com curvaturas Gaussiana K e média H, satisfazendo $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$. Consideremos números reais $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi, \rho \le \frac{\pi}{2}$ satisfazendo (1.7). Sejam $p_0 \in M$ e $v_0 \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário que forma um ângulo constante ϕ com o N_{p_0}, vetor normal a M em p_0. Suponhamos que v_0^T, a projeção tangente de v_0, não seja direção principal. Então existe uma superfície linear-Weingarten $M' \subset \mathbb{R}^3$ com curvaturas Gaussiana K' e média H', satisfazendo $1 + 2\beta' H' + \gamma' K' = 0$, onde β' e γ' satisfazem (1.8) e uma congruência linear-Weingarten hiperbólica l com constantes (r, θ, ϕ, ρ) entre uma vizinhança de p_0 em M e M', tal que a reta ligando p_0 a $l(p_0)$ está na direção de v_0.*

Demonstração: Dadas as constantes $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi, \rho \le \frac{\pi}{2}$ satisfazendo (1.7), definimos os números reais b_1, b_2 e b_3 por (1.23). Inicialmente, observemos que que as constantes r, θ, ϕ, ρ satisfazem a condição (1.24) pois, sendo M uma superfície linear-Weingarten hiperbólica, teremos de modo análogo a (1.21) que

$$sen^2\theta - b_1^2 = \frac{sen^4\theta}{r^2 sen^2\phi}(\gamma - \beta^2) > 0. \tag{1.32}$$

Portanto, segue de (1.23), que b_2 é um número real não nulo bem definido. Assim, podemos considerar também as constantes c_1, c_2, c_3, c_4 dadas em (1.25).

A idéia é usar o teorema de Frobenius para construir um referencial adaptado $\{e_1, e_2, e_3\}$ em M, definido em uma vizinhança de p_0 tal que $e_1(p_0) = v_0^T$ e satisfazendo

$$\omega_{12} = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_{13} + c_4\omega_{23}. \tag{1.33}$$

Vamos provar que o ideal $\Im$ gerado pela 1-forma

$$\zeta = \omega_{12} - c_1\omega_1 - c_2\omega_2 - c_3\omega_{13} - c_4\omega_{23}$$

é fechado com relação a diferenciação exterior.

Usando as equação de estrutura temos

$$\begin{aligned} d\zeta &= d\omega_{12} - c_1 d\omega_1 - c_2 d\omega_2 - c_3\omega_{13} - c_4 d\omega_{23} \\ &= -K\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_{12} \wedge (-c_1\omega_2 + c_2\omega_1 - c_3\omega_{23} + c_4\omega_{13}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$d\zeta = -K\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_{12} \wedge \mu,$$

onde $\mu = -c_1\omega_2 + c_2\omega_1 - c_3\omega_{23} + c_4\omega_{13}$. Substituindo $\omega_{12} = \zeta + c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_{13} + c_4\omega_{23}$ obtemos

$$d\zeta = \zeta \wedge \mu + (c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_{13} + c_4\omega_{23}) \wedge \mu - K\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Efetuando o segundo produto exterior e usando as equações de estrutura temos

$$d\zeta = \zeta \wedge \mu - [c_1^2 + c_2^2 + 2(c_1c_3 + c_2c_4)H + (c_3^2 + c_4^2 + 1)K]\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Segue de (1.26) que

$$d\zeta = \zeta \wedge \mu - \frac{1}{r^2 b_2^2 sen^2\phi}\left[sen^2\theta - 2r(cos\phi + cos\rho cos\theta)H + (r^2 sen^2\rho)K\right].$$

Por hipótese, os números reais r, θ, ϕ, ρ satisfazem (1.7). Logo,

$$d\zeta = \zeta \wedge \mu - \frac{sen^2\theta}{r^2 b_2^2 sen^2\phi}\left[1 + 2\beta H + \gamma K\right].$$

Como M é uma supefície linear-Weingarten satisfazendo $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$ então

$$d\zeta = \zeta \wedge \mu.$$

Como o ideal $\Im$ é fechado sob diferenciação exterior, segue do teorema de Frobenius que a equação $\zeta = 0$ é integrável. Portanto, existe um referencial adaptado $\{e_1, e_2, e_3\}$ em uma vizinhança de p_0 com $e_1(p_0) = v_0^T$. Como o ângulo entre v_0 e $N_{p_0} = e_3(p_0)$ é igual a ϕ e os vetores (unitários) $e_3(p_0)$, $e_1(p_0)$ e v_0 são coplanares então

$$v_0 = sen\phi e_1(p_0) + cos\phi e_3(p_0).$$

Defina, nesta vizinhança, a função vetorial

$$v = sen\phi e_1 + cos\phi e_3.$$

Como, por hipótese, $e_1(p_0) = \dfrac{v_0 - cos\phi e_3(p_0)}{sen\phi}$ não é direção principal então podemos supor, por continuidade, que

$$e_1 = \frac{v - cos\phi e_3}{sen\phi}$$

não é direção principal em um aberto V desta vizinhança.

Consideremos V parametrizado por $X : U \subset R^2 \longrightarrow V \subset M \subset \mathbb{R}^3$ e defina $X' : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$X' = X + rv = X + rsen\phi e_1 + rcos\phi e_3.$$

Diferenciando e usando as equações de estrutura, vamos obter

$$\begin{aligned} dX' &= (\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) + rsen\phi(\omega_{12}e_2 + \omega_{13}e_3) + rcos\phi(\omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2) \\ &= [\omega_1 - rcos\phi\omega_{13}]e_1 + [\omega_2 + rsen\phi\omega_{12} - rcos\phi\omega_{23}]e_2 + [rsen\phi\omega_{13}]e_3. \end{aligned}$$

Usando $\omega_{12} = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + c_3\omega_{13} + c_4\omega_{23}$ e as constantes c_1, c_2, c_3, c_4 dadas em (1.25), vamos obter

$$\begin{aligned} \omega_2 + rsen\phi\omega_{12} - rcos\phi\omega_{23} &= [rsen\phi c_1]\omega_1 + [1 + rsen\phi c_2]\omega_2 + \\ &\quad + [rsen\phi c_3]\omega_{13} + [rsen\phi c_4 - rcos\phi]\omega_{23} \\ &= \frac{1}{b_2}[-b_1\omega_1 + rb_3 sen\rho\omega_{13}]. \end{aligned}$$

Segue, portanto, que

$$\begin{aligned} dX' &= [\omega_1 - rcos\phi\omega_{13}]e_1 + \frac{1}{b_2}[-b_1\omega_1 + rb_3 sen\rho\omega_{13}]e_2 + [rsen\phi\omega_{13}]e_3 \\ &= \left[e_1 - \frac{b_1}{b_2}e_2\right]\omega_1 + \left[-rcos\phi e_1 + \frac{rb_3 sen\rho}{b_2}e_2 + rsen\phi e_3\right]\omega_{13}. \end{aligned}$$

Como e_1 não é direção principal então ω_1 e ω_{13} são 1-formas linearmente independentes. Além disto, note que os vetores

$$\begin{aligned} z_1 &= e_1 - \frac{b_1}{b_2}e_2, \\ z_2 &= -rcos\phi e_1 + \frac{rb_3 sen\rho}{b_2}e_2 + rsen\phi e_3, \end{aligned}$$

são linearmente independentes, uma vez que $rsen\phi \neq 0$.

Deste modo, $M' = X'(U)$ é uma superfície regular e os vetores z_1, z_2 são tangentes a esta superfície. Observe ainda que

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= \left(\frac{rb_3 sen\rho}{b_2} - \frac{rb_1 cos\phi}{b_2}\right)e_1 \times e_2 + rsen\phi e_1 \times e_3 - \frac{rb_1 sen\phi}{b_2}e_2 \times e_3 \\ &= \frac{-rb_1 sen\phi}{b_2}e_1 - rsen\phi e_2 + \frac{r(b_3 sen\rho - b_1 cos\phi)}{b_2}e_3. \end{aligned}$$

Pela definição de b_3, dada em (1.23) temos $b_3 sen\rho - b_1 cos\phi = -sen\phi cos\theta$ e daí

$$z_1 \times z_2 = \frac{-rsen\phi}{b_2}(b_1 e_1 + b_2 e_2 + cos\theta e_3).$$

Como $b_1^2 + b_2^2 + cos^2\theta = 1$ então

$$e_3' = b_1 e_1 + b_2 e_2 + cos\theta e_3$$

é um vetor (unitário) normal a M'. Juntamente com as definições $X' = X + rv$ e $v = sen\phi e_1 + cos\phi e_3$ e do valor de b_1, dado em (1.23), podemos conlcuir que

(a) $d(X', X) = |X' - X| = |rv| = r$, ou seja, a distância entre X e X' é r,

(b) $< v, e_3 >= cos\phi$, ou seja, o ângulo entre v e e_3 é ϕ,

(c) $< -v, e_3' >= b_1 sen\phi - cos\phi cos\theta = cos\rho$, ou seja, o ângulo entre $(-v)$ e e_3' é ρ,

(d) $< e_3, e_3' >= cos\theta$, ou seja, o ângulo entre e_3 e e_3' é θ.

Em outras palavras, podemos definir uma congruência linear-Weingarten hiperbólica l com constantes (r, θ, ϕ, ρ) entre $X(U)$ e $M' = X'(U)$. Pelo Teorema 1.5, M' é uma superfície linear-Weingarten hiperbólica satisfazendo a relação $1 + 2\beta' H' + \gamma' K' = 0$, onde β' e γ' são dados por (1.8). ■

A relação biunívoca entre superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ e soluções de equações de sine-Gordon (Teorema 1.2) juntamente com teorema de integrabilidade geométrico (Teorema 1.9), nos permitem obter a interpretação analítica da transformação de Bäcklund (1.33) que será apresentada na próxima proposição. Mostraremos que a transformação de Bäcklund é equivalente a um sistema integrável de equações diferenciais de primeira ordem.

Proposição 1.10. *Seja ψ uma solução da equação de sine-Gordon*

$$\psi_{x_1 x_1} - \psi_{x_2 x_2} = sen(\psi + C_{\beta\gamma}). \tag{1.34}$$

onde β e γ são números reais tais que $D := \gamma - \beta^2 > 0$ e $C_{\beta\gamma}$ é a constante real definida pelas relações

$$senC_{\beta\gamma} = \frac{2\varepsilon_2 \beta \sqrt{D}}{\gamma}, \quad cosC_{\beta\gamma} = \frac{\gamma - 2\beta^2}{\gamma}, \quad \varepsilon_2^2 = 1. \tag{1.35}$$

Consideremos as constantes S_1, S_2 dadas por

$$S_1 = \frac{-\beta}{\sqrt{\gamma}} \qquad e \qquad S_2 = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\gamma}}, \qquad \varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2 = -1. \tag{1.36}$$

Escolha números reais $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi, \rho \leq \frac{\pi}{2}$ satisfazendo (1.7) e (1.24). Então o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \psi'_{x_1} + \psi_{x_2} & = & 2S_3 cos\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2} - 2S_4 cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2} + \\ & & +2S_5 sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2} - 2S_6 sen\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2}, \\ \psi'_{x_2} + \psi_{x_1} & = & 2S_3 sen\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2} + 2S_4 sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2} + \\ & & -2S_5 cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2} - 2S_6 cos\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2}, \end{array} \right. \tag{1.37}$$

é integrável, onde

$$S_3 = c_1\sqrt{\gamma} + c_3 S_1, \qquad S_4 = c_2\sqrt{\gamma} + c_4 S_1, \tag{1.38}$$

$$S_5 = c_3 S_2, \qquad S_6 = c_4 S_2 \tag{1.39}$$

e c_1, c_2, c_3, c_4 são dadas por (1.25).

Demonstração: Seja ψ uma solução da equação de sine-Gordon (1.34). Pelo Teorema 1.2, existe uma superfície linear-Weingarten hiperbólica M, parametrizada por linhas de curvatura ortogonais $X(x_1, x_2)$ cujas curvaturas Gaussiana K e média H satisfazem a equação $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$. Além disto, a primeira e segunda formas fundamentais de X são dadas por (1.4)-(1.6). Usando (1.36), podemos reescrever (1.6) na forma

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \frac{-1}{\sqrt{\gamma}cos\frac{\psi}{2}} \left[S_1 cos\frac{\psi}{2} + S_2 sen\frac{\psi}{2} \right], \\ \lambda_2 & = & \frac{-1}{\sqrt{\gamma}sen\frac{\psi}{2}} \left[-S_2 cos\frac{\psi}{2} + S_1 sen\frac{\psi}{2} \right]. \end{array}$$

Como $X(x_1, x_2)$ é uma parametrização de M por linhas de curvaturas ortogonais então

$$\hat{e}_1 = \frac{X_{x_1}}{\sqrt{\gamma}cos\frac{\psi}{2}} \qquad e \qquad \hat{e}_2 = \frac{X_{x_2}}{\sqrt{\gamma}sen\frac{\psi}{2}}$$

são as direções principais de M. As 1-formas associadas a este referencial são

$$\hat{\omega}_1 = \sqrt{\gamma}cos\frac{\psi}{2}dx_1, \qquad \hat{\omega}_2 = \sqrt{\gamma}sen\frac{\psi}{2}dx_2,$$

$$\hat{\omega}_{12} = \frac{\psi_{x_2}}{2}dx_1 + \frac{\psi_{x_1}}{2}dx_2,$$

$$\hat{\omega}_{13} = -\lambda_1\hat{\omega}_1 = \left[S_1 cos\frac{\psi}{2} + S_2 sen\frac{\psi}{2}\right] dx_1,$$

$$\hat{\omega}_{23} = -\lambda_2\hat{\omega}_2 = \left[-S_2 cos\frac{\psi}{2} + S_1 sen\frac{\psi}{2}\right] dx_2.$$

Seja $p_0 \in M$, $v_0 \in \mathbb{R}^3$ (unitário) de modo que v_0^T não seja direção principal de M em p_0 e que o ângulo entre v_0 e N_{p_0} seja ϕ. Pela demonstração do teorema de integrabilidade geométrico (Teorema 1.9), existe um referencial $\{e_1, e_2, e_3\}$, adaptado a M, tal que $e_1(p_0) = v_0^T$ e as formas duais e de conexão associadas a este referencial satisfazem (1.17). Portanto, podemos encontrar uma função ψ' tal que

$$\begin{cases} e_1 &= cos\frac{\psi'}{2}\hat{e}_1 + sen\frac{\psi'}{2}\hat{e}_2, \\ e_2 &= -sen\frac{\psi'}{2}\hat{e}_1 + cos\frac{\psi'}{2}\hat{e}_2, \end{cases}$$

e as 1-formas associadas, dadas por

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= cos\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_1 + sen\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_2 = \sqrt{\gamma}cos\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2}dx_1 + \sqrt{\gamma}sen\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2}dx_2, \\
\omega_2 &= -sen\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_1 + cos\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_2 = -\sqrt{\gamma}cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2}dx_1 + \sqrt{\gamma}sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2}dx_2, \\
\omega_{12} &= d\frac{\psi'}{2} + \hat{\omega}_{12} = \frac{1}{2}(\psi'_{x_1} + \psi_{x_2})dx_1 + \frac{1}{2}(\psi'_{x_2} + \psi_{x_1})dx_2, \\
\omega_{13} &= cos\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_{13} + sen\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_{23} \\
&= \left[S_1 cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2} + S_2 sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\right] dx_1 + \left[-S_2 cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2} + S_1 sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\right] dx_2, \\
\omega_{23} &= -sen\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_{13} + cos\frac{\psi'}{2}\hat{\omega}_{23} \\
&= \left[-S_1 cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2} - S_2 sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\right] dx_1 + \left[-S_2 cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2} + S_1 sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\right] dx_2,
\end{aligned}$$

satisfazem a relação (1.17). Substituindo estas expressões em (1.17) e usando que o conjunto $\{dx_1, dx_2\}$ é linearmente independente obtemos que o sistema de equações diferenciais (1.37) é equivalente a equação (1.17) e, portanto, é integrável. ∎

Observação 1.11. No próximo capítulo, mostraremos que cada solução ψ' do sistema

(1.37) satisfaz a uma equação de sine-Gordon análoga à equação (1.34).

Observação 1.12. A equivalência entre a equação (1.17) e o sistema de equações diferenciais (1.37), apresentada na proposição anterior, será usada no Capítulo 2 para fornecer uma interpretação analítica da transformação de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$.

1.4 Teorema de Permutabilidade Geométrico

O teorema de permutabilidade da teoria de Transformações de Bäcklund para superfíces de curvatura Gaussiana negativa estabelece que dadas três superfícies $M, M', M'' \subset \mathbb{R}^3$ de curvatura constante negativa e congruências de retas pseudoesféricas $l_1 : M \longrightarrow M'$ (com constantes r_1, θ_1) e $l_2 : M \longrightarrow M''$ (com constantes $r_2, \theta_2 \neq \theta_1$), existe uma superfície M^* e existem congruências de retas pseudoesféricas $l_1^* : M'' \longrightarrow M^*$ (com constantes r_1, θ_1) e $l_2^* : M' \longrightarrow M^*$ (com constantes r_2, θ_2) tais que $l_2^* \circ l_1 = l_1^* \circ l_2$ (veja, por exemplo [19]). Veja Figura 1.3.

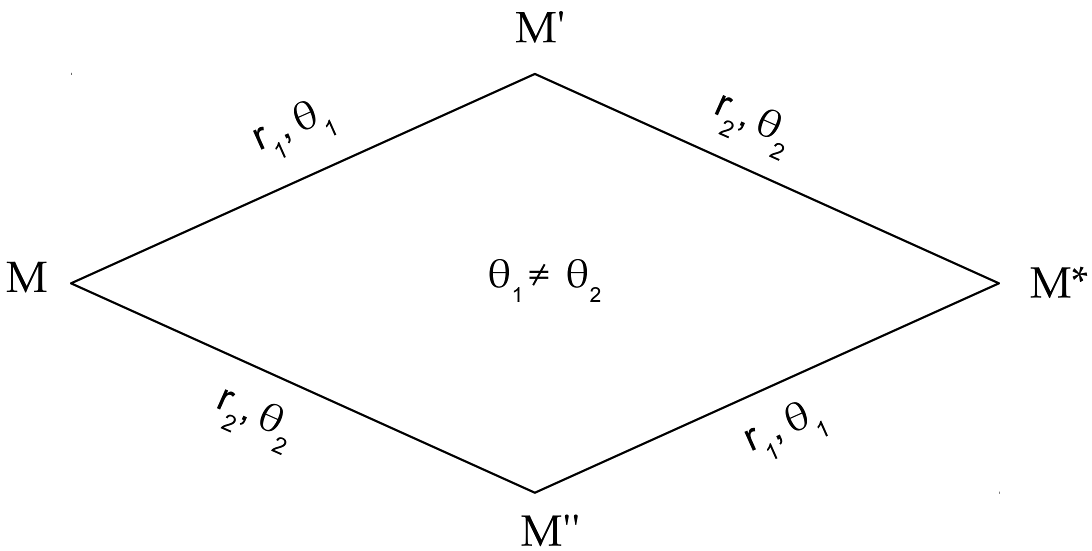

Figura 1.3: Permutabilidade da Transformação de Bäcklund Clássica.

Nosso interesse é demonstrar um teorema análogo para a extensão da teoria de Bäcklund às superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. Vamos começar fixando alguns conceitos e notações e demonstrando algumas lemas que serão úteis na prova do teorema.

Observação 1.13. Nos lemas seguintes e no teorema de permutabilidade vamos considerar M, M', M'' superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ tais que existam $l_1 : M \to M'$ e $l_2 : M \to M''$ congruências linear-Weingarten hiperbólicas com constantes $(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$ e $(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$ respectivamente, onde $r_i > 0$, $0 < \theta_i < \pi$ e $0 < \rho_i, \phi_i \leq \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$, com $\theta_1 \neq \theta_2$. Vamos denotar por δ a constante positiva

$$\delta = \frac{sen\theta_2}{sen\theta_1}. \tag{1.40}$$

Consideremos os referenciais ortonormais $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3\}$ em M e denotemos por E a matriz ortogonal (positiva) tal que

$$\begin{cases} \bar{e}_1 &= E_{11}e_1 + E_{12}e_2 \\ \bar{e}_2 &= E_{21}e_1 + E_{22}e_2 = -E_{12}e_1 + E_{11}e_2 \end{cases} \tag{1.41}$$

Consideremos também referenciais $\{e_1', e_2', e_3'\}$ em M' e $\{e_1'', e_2'', e_3''\}$ em M'' como no Teorema 1.5, ou seja, se $v_1 = v_1(p)$ (resp. $v_2 = v_2(p)$) é a direção da reta que une os pontos $p \in M$ e $p_1 = l_1(p) \in M'$ (resp. $p_2 = l_2(p) \in M'$) então os conjuntos $\{e_1, e_3, v_1\}$ e $\{\bar{e}_1, e_3, v_2\}$ são linearmente dependentes.

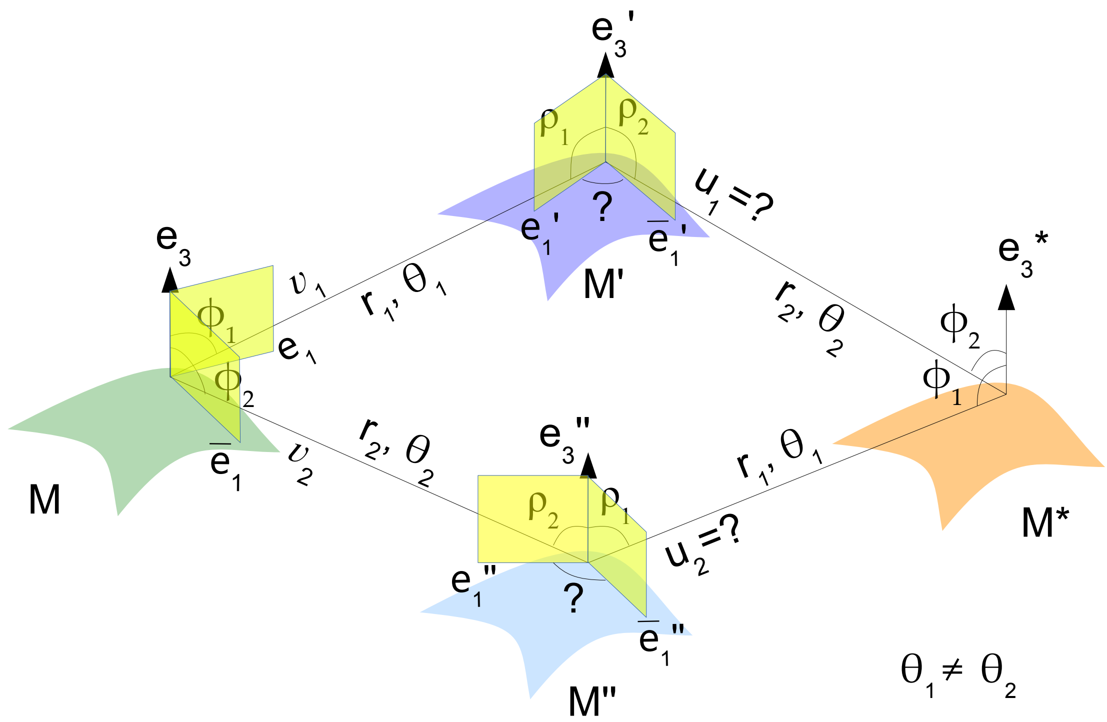

Figura 1.4: Permutabilidade para uma Congruência Linear-Weingarten Hiperbólica

Observe que

$$\begin{cases} v_1 &= sen\phi_1 e_1 + cos\phi_1 e_3 \\ v_2 &= sen\phi_2 \overline{e}_1 + cos\phi_2 e_3 \end{cases} \tag{1.42}$$

uma vez que o ângulo entre e_3 (resp. e_3') e v_1 (resp. v_2) é igual a ϕ_1 (resp. ϕ_2). Nosso objetivo é determinar as direções u_1 e u_2 tais que

$$r_1 v_1 + r_2 u_1 = r_2 v_2 + r_1 u_2.$$

Veja Figura 1.4.

De modo análogo aos cálculos do Teorema 1.5, observemos que se a'_{ij} e a''_{ij} $(1 \leq i, j \leq 2)$ são números reais tais que

$$e_i' = \sum_{i=1}^{3} a'_{ij} e_j \quad \text{e} \quad e_i'' = \sum_{i=1}^{3} a''_{ij} \overline{e}_j, \quad \overline{e}_3 = e_3, \tag{1.43}$$

então

$$\begin{cases} a'_{31} &= -\left(\dfrac{cos\rho_1 + cos\phi_1 cos\theta_1}{sen\phi_1}\right), \\ a'_{32} &= -\sqrt{sen^2\theta_1 - (a'_{31})^2}, \\ a'_{33} &= cos\theta_1, \end{cases} \tag{1.44}$$

$$\begin{cases} a'_{21} &= \dfrac{-a'_{32} cos\phi_1}{sen\rho_1}, \\ a'_{22} &= \dfrac{a'_{31} cos\phi_1 - cos\theta_1 sen\phi_1}{sen\rho_1}, \\ a'_{23} &= \dfrac{a'_{32} sen\phi_1}{sen\rho_1}, \end{cases} \tag{1.45}$$

$$\begin{cases} a'_{11} &= -\left(\dfrac{sen\phi_1 + a'_{31} cos\rho_1}{sen\rho_1}\right), \\ a'_{12} &= -\left(\dfrac{a'_{32} cos\rho_1}{sen\rho_1}\right), \\ a'_{13} &= -\left(\dfrac{cos\phi_1 + cos\theta_1 cos\rho_1}{sen\rho_1}\right), \end{cases} \tag{1.46}$$

$$\begin{cases} a''_{31} &= -\left(\dfrac{cos\rho_2 + cos\phi_2 cos\theta_2}{sen\phi_2}\right), \\ a''_{32} &= -\sqrt{sen^2\theta_2 - (a''_{31})^2}, \\ a''_{33} &= cos\theta_2, \end{cases} \tag{1.47}$$

$$
\begin{cases}
a''_{21} & = & \dfrac{-a''_{32}cos\phi_2}{sen\rho_2}, \\
a''_{22} & = & \dfrac{a''_{31}cos\phi_2 - cos\theta_2 sen\phi_2}{sen\rho_2}, \\
a''_{23} & = & \dfrac{a''_{32}sen\phi_2}{sen\rho_2},
\end{cases} \tag{1.48}
$$

$$
\begin{cases}
a''_{11} & = & -\left(\dfrac{sen\phi_2 + a''_{31}cos\rho_2}{sen\rho_2}\right), \\
a''_{12} & = & -\left(\dfrac{a''_{32}cos\rho_2}{sen\rho_2}\right), \\
a''_{13} & = & -\left(\dfrac{cos\phi_2 + cos\theta_2 cos\rho_2}{sen\rho_2}\right).
\end{cases} \tag{1.49}
$$

Lema 1.14. *Sejam M, M', M'' superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ como na Observação 1.13. Então*

$$
\begin{array}{rcl}
r_2 sen\rho_2 & = & \delta r_1 sen\rho_1 \\
r_2(cos\phi_2 + cos\rho_2 cos\theta_2) & = & \delta^2 r_1(cos\phi_1 + cos\rho_1 cos\theta_1).
\end{array} \tag{1.50}
$$

onde δ é dado por (1.40).

Demonstração: Pelo Teorema 1.5 a superfície M é linear-Weingarten hiperbólica e as suas curvaturas gaussiana K e média H satisfazem às relações

$$
\begin{cases}
1 + 2\beta_1 H + \gamma_1 K & = & 0, \\
1 + 2\beta_2 H + \gamma_2 K & = & 0,
\end{cases}
$$

onde em termos das constantes $r_i, \theta_i, \phi_i, \rho_i$ temos

$$
\beta_i = \frac{-r_i(cos\phi_i + cos\rho_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i}, \quad \gamma_i = \frac{r_i^2 sen^2\rho_i}{sen^2\theta_i}, \quad i = 1, 2.
$$

Multiplicando a segunda equação por γ_1 e subtraindo da primeira multiplicada por γ_2 vamos obter a equação

$$
(\gamma_1 - \gamma_2) + 2(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)H = 0.
$$

Como $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície linear-Weingarten hiperbólica então H não pode ser constante. Daí segue que

$$
\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_2 = 0.
$$

Donde $\gamma_1 = \gamma_2$. Como $\gamma_i > 0$, então $\beta_2 = \beta_1$. Usando a definição de δ dada em (1.40) obtemos as relações (1.50). ∎

Lema 1.15. *Sejam M, M', M'' superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ como na Observação 1.13. Consideremos os referenciais ortonormais adaptados $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3\}$ em M, $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ em M' e $\{e''_1, e''_2, e''_3\}$ em M'', definidos por (1.43). Suponhamos ainda que sejam satisfeitas as condições*

$$\begin{aligned} r_2(cos\rho_2 + cos\phi_2 cos\theta_2) &= \delta^2 r_1(cos\rho_1 + cos\phi_1 cos\theta_1), \\ r_2 sen\phi_2 &= \delta r_1 sen\phi_1, \end{aligned} \tag{1.51}$$

onde δ é o número real definido por (1.40). Se (a'_{ij}) e (a''_{ij}) são as matrizes definidas por (1.43)-(1.49) então são válidas as seguintes relações

$$a''_{13} = \delta a'_{13}, \quad a''_{31} = \delta a'_{31}, \quad a''_{32} = \delta a'_{32} \quad e \quad a''_{23} = \delta a'_{23}. \tag{1.52}$$

Demonstração: Pelas relações (1.46) e (1.49) e pelo lema anterior, temos que

$$a''_{13} = \frac{-r_2(cos\phi_2 + cos\rho_2 cos\theta_2)}{r_2 sen\rho_2} = \frac{-\delta^2 r_1(cos\phi_1 + cos\rho_1 cos\theta_1)}{\delta r_1 sen\rho_1} = \delta a'_{13}.$$

Do mesmo modo, segue das expressões (1.44) e (1.47) e das relações dadas por (1.51) que

$$a''_{31} = \frac{-r_2(cos\rho_2 + cos\phi_2 cos\theta_2)}{r_2 sen\phi_2} = \frac{-\delta^2 r_1(cos\rho_1 + cos\phi_1 cos\theta_1)}{\delta r_1 sen\phi_1} = \delta a'_{31}.$$

De (1.40) e das expressões (1.44) e (1.47) temos

$$a''_{32} = -\sqrt{sen^2\theta_2 - (a''_{31})^2} = -\sqrt{\delta^2(sen^2\theta_1 - (a'_{31})^2)} = \delta a'_{32},$$

pois $\delta > 0$.

Como consequência desta última igualdade e usando as expressões dadas em (1.45), (1.48), (1.50) e (1.51) vamos obter

$$a''_{23} = \frac{r_2 sen\phi_2}{r_2 sen\rho_2} a''_{32} = \frac{\delta r_1 sen\phi_1}{\delta r_1 sen\rho_1} \delta a'_{32} = \delta a'_{23}.$$

∎

Observação 1.16. A inclusão das hipótese adicionais (1.51) pode ser justificada pelos seguintes argumentos: Dada uma superfície linear-Weingarten hiperbólica M satisfazendo $1+2\beta H+\gamma K=0$, onde β e γ são constantes reais, queremos determinar outra superfície linear-Weingarten M^* com a mesmas mesmas constantes β e γ usando a composição de transformações de Bäcklund. Consideremos números reais $r_i>0$, $0<\theta_i<\pi$, $0<\phi_i,\rho_i\leq\frac{\pi}{2}$ $(i=1,2)$ satisfazendo a condição (1.24) tais que

$$\beta=\frac{-r_i(cos\phi_i+cos\rho_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i},\qquad \gamma=\frac{r_i^2 sen^2\rho_i}{sen^2\theta_i},\qquad i=1,2. \tag{1.53}$$

Usando o teorema de integrabilidade (Teorema 2.4) podemos construir superfícies linear-Weingarten hiperbólicas M_i e uma congruência linear-Weingarten hiperbólica entre M e M_i com constantes $(r_i,\theta_i,\phi_i,\rho_i)$. Além disto, cada superfície M_i deve satisfazer

$$1-\frac{2r_i(cos\rho_i+cos\phi_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i}H_i+\frac{r_i^2 sen^2\phi_i}{sen^2\theta_i}K_i=0. \tag{1.54}$$

Nosso objetivo no teorema de permutabiliade (Teorema 2.11) é determinar uma superfície M^* satisfazendo $1+2\beta H^*+\gamma K^*=0$, onde β e γ são os números reais dados por (1.53). Além disto, M^* deve estar associada a M_1 (resp. M_2) por uma transformação de Bäcklund $BT(r_2,\theta_2,\rho_2,\phi_2)$ (resp. $BT(r_1,\theta_1,\rho_1,\phi_1)$) ou equivalentemente, M_1 (resp. M_2) está associada a M^* por uma transformação de Bäcklund $BT(r_2,\theta_2,\phi_2,\rho_2)$ (resp. $BT(r_1,\theta_1,\phi_1,\rho_1)$). Supondo que uma tal superfície M^* exista então, como consequência do teorema de Bäcklund (Teorema 1.5), as superfícies M_i devem satisfazer

$$1-\frac{2r_j(cos\rho_j+cos\phi_j cos\theta_j)}{sen^2\theta_j}H_i+\frac{r_j^2 sen^2\phi_j}{sen^2\theta_j}K_i=0,\qquad 1\leq i\neq j\leq 2. \tag{1.55}$$

Como H_i $(i=1,2)$ não é constante então, de (1.54) e (1.55), concluimos que a condição (1.51) deve ser necessariamente satisfeita.

Lema 1.17. *Sejam M, M', M'' superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ como na Observação 1.13 e δ o número real definido por (1.40). Suponhamos que as igualdades (1.51) se verificam. Então valem as seguintes relações*

$$\begin{aligned}
r_1cos\phi_1 &= \frac{r_1cos\rho_1(cos\theta_1cos\theta_2-1)+r_2cos\rho_2sen^2\theta_1}{cos\theta_1-cos\theta_2},\\
r_2cos\phi_2 &= \frac{-r_1cos\rho_1sen^2\theta_2-r_2cos\rho_2(cos\theta_1cos\theta_2-1)}{cos\theta_1-cos\theta_2},
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$r_1 cos\rho_1 cos\theta_2 - r_2 cos\rho_2 cos\theta_1 + r_2 cos\phi_2 - r_1 cos\phi_1 = 0. \tag{1.57}$$

Demonstração: Segue do Lema 1.14 que as igualdades (1.50) se verificam. Usando (1.51) temos

$$\begin{cases} r_2 cos\phi_2 + r_2 cos\rho_2 cos\theta_2 &= \delta^2 r_1 cos\phi_1 + \delta^2 r_1 cos\rho_1 cos\theta_1, \\ r_2 cos\rho_2 + r_2 cos\phi_2 cos\theta_2 &= \delta^2 r_1 cos\rho_1 + \delta^2 r_1 cos\phi_1 cos\theta_1, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -\delta^2 r_1 cos\phi_1 + r_2 cos\phi_2 &= \delta^2 r_1 cos\rho_1 cos\theta_1 - r_2 cos\rho_2 cos\theta_2, \\ -\delta^2 r_1 cos\theta_1 cos\phi_1 + r_2 cos\theta_2 cos\phi_2 &= \delta^2 r_1 cos\rho_1 - r_2 cos\rho_2, \end{cases}$$

cuja representação matricial é

$$\begin{pmatrix} -\delta^2 & 1 \\ -\delta^2 cos\theta_1 & cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 cos\phi_1 \\ r_2 cos\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^2 cos\theta_1 & -cos\theta_2 \\ \delta^2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 cos\rho_1 \\ r_2 cos\rho_2 \end{pmatrix}.$$

Observe que o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} -\delta^2 & 1 \\ -\delta^2 cos\theta_1 & cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

é igual a $\delta^2(cos\theta_1 - cos\theta_2)$, que é não nulo pois $\theta_1 \neq \theta_2$ e $\delta > 0$. Logo, multiplicando a igualdade anterior pela inversa desta matriz e usando (1.40) obtemos (1.56). Como consequência direta de (1.56) obtemos (1.57). ■

Lema 1.18. *Sejam M, M', M'' superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ como nao Observação 1.13. Consideremos os referenciais ortonormais adaptados $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, e_3\}$ em M. Seja E a matriz ortogonal dada por (1.41), isto é, $\overline{e}_i = E_{ij} e_j$. Então a função*

$$\xi = sen\theta_1 sen\theta_2 E_{11} + cos\theta_1 cos\theta_2 - 1 \tag{1.58}$$

é estritamente negativa. Além disto, se

$$\begin{aligned} F_{11} &= \left[\frac{-1}{\xi}\right] [(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)E_{11} + sen\theta_1 sen\theta_2], \\ F_{12} &= \left[\frac{1}{\xi}\right] [(cos\theta_1 - cos\theta_2)E_{12}], \end{aligned} \tag{1.59}$$

então

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ -F_{12} & F_{11} \end{pmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

Demonstração: Como E é uma matriz ortogonal e $0 < \theta_1 \neq \theta_2 < \pi$ então $E_{11} \leq 1$ e $sen\theta_1 sen\theta_2 > 0$. Portanto,

$$\xi \leq sen\theta_1 sen\theta_2 + cos\theta_1 cos\theta_2 - 1 = cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 < 0.$$

Como E é uma matriz ortogonal então $E_{11}^2 + E_{12}^2 = 1$. Consequentemente, $F_{11}^2 + F_{12}^2 = 1$ pois,

$$\begin{aligned} \xi^2 \left(F_{11}^2 + F_{12}^2\right) &= (cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)^2 E_{11}^2 + sen^2\theta_1 sen^2\theta_2 + \\ &\quad +2sen\theta_1 sen\theta_2 (cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)E_{11} + (cos\theta_1 - cos\theta_2)^2(1 - E_{11}^2) \\ &= sen^2\theta_1 sen^2\theta_2 E_{11}^2 + 2sen\theta_1 sen\theta_2 (cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)E_{11} + \\ &\quad +(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)^2 \\ &= \xi^2. \end{aligned}$$

Logo $FF^t = (F_{11}^2 + F_{12}^2)I = I$, ou seja, F é uma matriz ortogonal.

■

Fazendo uso destes lemas podemos demonstrar o *teorema de permutabilidade para superfícies linear-Weingaten hiperbólicas em* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.19. (Teorema de Permutabilidade Geométrico) *Sejam M, M', M'' superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. Suponhamos que existam $l_1 : M \to M'$ e $l_2 : M \to M''$ congruências linear-Weingarten hiperbólicas com constantes $(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$ e $(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$ respectivamente, onde $r_i > 0$, $0 < \theta_i < \pi$, $0 < \phi_i, \rho_i \leq \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$ e $\theta_1 \neq \theta_2$. Dados $p \in M$, $p_1 = l_1(p) \in M'$ e $p_2 = l_2(p) \in M''$, denotemos por N_p, N'_{p_1} e N''_{p_2} os vetores normais a M em p, a M' em p_1 e a M'' em p_2, respectivamente e por $v_1 = v_1(p)$ (resp. $v_2 = v_2(p)$) o vetor diretor unitário da reta que une p a p_1 (resp. p_2). Suponhamos que os conjuntos $\{N_p, N'_{p_1}, v_1\}$ e $\{N_p, N''_{p_2}, v_2\}$ sejam linearmente independentes e que sejam válidas as relações dadas em(1.51). Então existe uma superfície regular $M^* \subset \mathbb{R}^3$*

e congruências linear-Weingarten hiperbólicas $l_2^* : M' \to M^*$ e $l_1^* : M'' \to M^*$ com constantes $(r_2, \theta_2, \rho_2, \phi_2)$ e $(r_1, \theta_1, \rho_1, \phi_1)$ respectivamente, tais que

$$l_2^* \circ l_1 = l_1^* \circ l_2$$

(veja Figura 1.5). Além disto, se K, H e K^*, H^* denotam as curvaturas Gaussiana e média de M e M^*, respectivamente então são válidas as relações

$$1 + 2\beta H + \gamma K = 0 \qquad e \qquad 1 + 2\beta H^* + \gamma K^* = 0,$$

onde

$$\beta = \frac{-r_i(cos\phi_i + cos\rho_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i}, \quad \gamma = \frac{r_i^2 sen^2\rho_i}{sen^2\theta_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Demonstração: Pela definição de congruência linear-Weingarten hiperbólica podemos considerar

$$X, \quad X_1 = l_1(X) = X + r_1 v_1 \quad \text{e} \quad X_2 = l_2(X) = X + r_2 v_2$$

parametrizações locais em p, p_1 e p_2 de M, M' e M'' respectivamente.

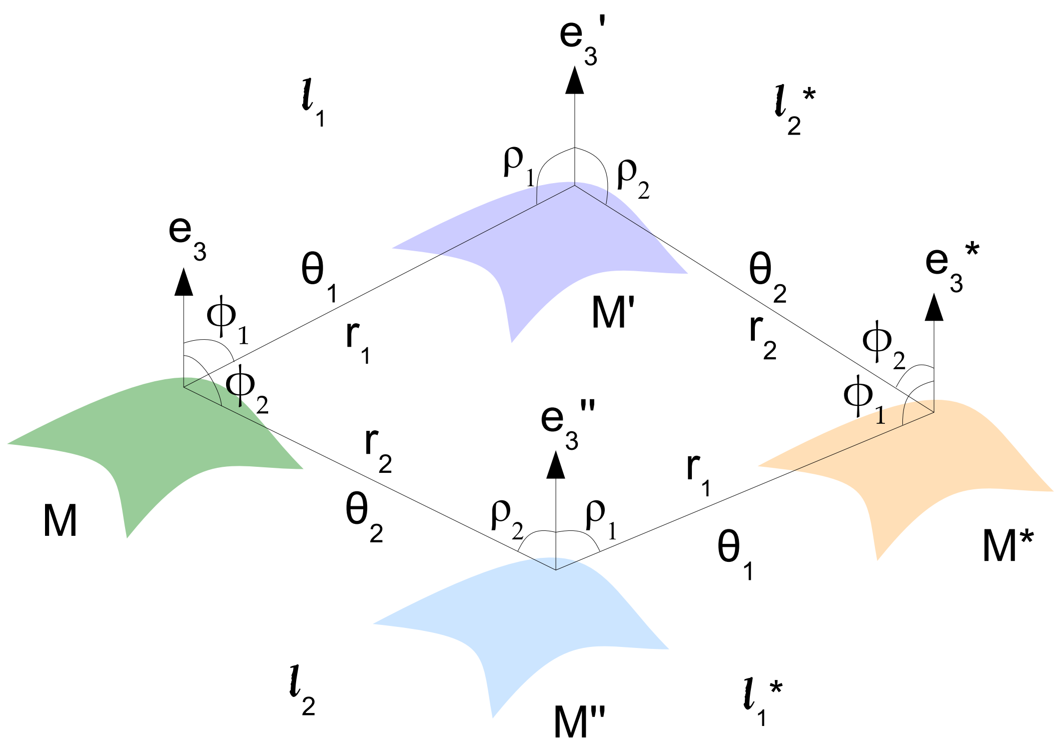

Figura 1.5: Permutabilidade para uma Congruência Linear-Weingarten Hiperbólica

Considere os refenciais ortonormais $\{e_1', e_2', e_3'\}$ em M' e $\{e_1'', e_2'', e_3''\}$ em M'' como descritos em (1.43). Então as igualdades (1.44)-(1.49) se verificam. Como a matiz F, definida no lema anterior, é ortogonal (positiva) então podemos definir novos referenciais ortonormais adaptados $\{\overline{e}_1', \overline{e}_2', e_3'\}$ em M' e $\{\overline{e}_1'', \overline{e}_2'', e_3''\}$ em M'' por

$$\begin{cases} \overline{e}_1' &= F_{11}e_1' + F_{12}e_2', \\ \overline{e}_2' &= F_{21}e_1' + F_{22}e_2' = -F_{12}e_1' + F_{11}e_2', \end{cases} \tag{1.60}$$

e

$$\begin{cases} \overline{e}_1'' &= F_{11}e_1'' + F_{12}e_2'', \\ \overline{e}_2'' &= F_{21}e_1'' + F_{22}e_2'' = -F_{12}e_1'' + F_{11}e_2'', \end{cases} \tag{1.61}$$

onde F_{11} e F_{12} são dados por (1.59). Defina os vetores

$$\begin{cases} u_1 &= sen\rho_2\overline{e}_1' + cos\rho_2 e_3' \\ u_2 &= sen\rho_1\overline{e}_1'' + cos\rho_1 e_3'' \end{cases} \tag{1.62}$$

Adimitindo que existam as congruências linear-Weingarten hiperbólicas l_1^* e l_2^*, temos

$$l_2^* \circ l_1(X) = X + r_1v_1 + r_2u_1, \quad \text{e} \quad l_1^* \circ l_2(X) = X + r_2v_2 + r_1u_1.$$

Como queremos provar que $l_1^* \circ l_2 = l_2^* \circ l_1$ então o nosso objetivo agora é verificar que a seguinte igualdade se verifica (veja Figura 1.4)

$$r_1v_1 + r_2u_1 = r_2v_2 + r_1u_2. \tag{1.63}$$

Para tanto, usando (1.42), observemos que

$$r_1v_1 = r_1sen\phi_1e_1 + r_1cos\phi_1e_3.$$

De (1.60) e (1.62) segue que

$$r_2u_1 = r_2sen\rho_2\overline{e}_1' + r_2cos\rho_2e_3' = r_2sen\rho_2(F_{11}e_1' + F_{12}e_2') + r_2cos\rho_2e_3'.$$

Daí, usando (1.43), temos

$$\begin{aligned} r_2u_1 = &[r_2sen\rho_2a_{11}'F_{11} + r_2sen\rho_2a_{21}'F_{12} + r_2cos\rho_2a_{31}']e_1+ \\ &+[r_2sen\rho_2a_{12}'F_{11} + r_2sen\rho_2a_{22}'F_{12} + r_2cos\rho_2a_{32}']e_2+ \\ &+[r_2sen\rho_2a_{13}'F_{11} + r_2sen\rho_2a_{23}'F_{12} + r_2cos\rho_2a_{33}']e_3. \end{aligned}$$

Somando, vamos obter

$$\begin{aligned} r_1v_1 + r_2u_1 &= [r_1sen\phi_1 + r_2sen\rho_2a'_{11}F_{11} + r_2sen\rho_2a'_{21}F_{12} + r_2cos\rho_2a'_{31}]e_1+ \\ &+[r_2sen\rho_2a'_{12}F_{11} + r_2sen\rho_2a'_{22}F_{12} + r_2cos\rho_2a'_{32}]e_2+ \\ &+[r_1cos\phi_1 + r_2sen\rho_2a'_{13}F_{11} + r_2sen\rho_2a'_{23}F_{12} + r_2cos\rho_2a'_{33}]e_3. \end{aligned}$$

As identidades dadas por (1.50) nos permitem escrever

$$\begin{aligned} r_1v_1 + r_2u_1 &= [\delta r_1sen\rho_1a'_{11}F_{11} + \delta r_1sen\rho_1a'_{21}F_{12} + r_1sen\phi_1 + r_2cos\rho_2a'_{31}]e_1+ \\ &+[\delta r_1sen\rho_1a'_{12}F_{11} + \delta r_1sen\rho_1a'_{22}F_{12} + r_2cos\rho_2a'_{32}]e_2+ \\ &+[\delta r_1sen\rho_1a'_{13}F_{11} + \delta r_1sen\rho_1a'_{23}F_{12} + r_1cos\phi_1 + r_2cos\rho_2a'_{33}]e_3, \end{aligned}$$

onde δ é dado por (1.40).

Por outro lado, usando (1.41) e (1.42), temos que

$$r_2v_2 = r_2sen\phi_2\overline{e}_1 + r_2cos\phi_2e_3 = r_2sen\phi_2E_{11}e_1 + r_2sen\phi_2E_{12}e_2 + r_2cos\phi_2e_3.$$

De (1.61) e (1.62) segue que

$$r_1u_2 = r_1sen\rho_1\overline{e}''_1 + r_1cos\rho_1e''_3 = r_1sen\rho_1(F_{11}e''_1 + F_{12}e''_2) + r_1cos\rho_1e''_3.$$

Daí, usando (1.41) e (1.43), segue que

$$\begin{aligned} r_1u_2 &= r_1sen\rho_1F_{11}[a''_{11}(E_{11}e_1 + E_{12}e_2) + a''_{12}(E_{21}e_1 + E_{22}e_2) + a''_{13}e_3]+ \\ &+r_1sen\rho_1F_{12}[a''_{21}(E_{11}e_1 + E_{12}e_2) + a''_{22}(E_{21}e_1 + E_{22}e_2) + a''_{23}e_3]+ \\ &+r_1cos\rho_1[a''_{31}(E_{11}e_1 + E_{12}e_2) + a''_{32}(E_{21}e_1 + E_{22}e_2) + a''_{33}e_3]. \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} r_1u_2 &= [r_1sen\rho_1(a''_{11}E_{11} + a''_{12}E_{21})F_{11} + r_1sen\rho_1(a''_{21}E_{11} + a''_{22}E_{21})F_{12}+ \\ &+r_1cos\rho_1(a''_{31}E_{11} + a''_{32}E_{21})]e_1+ \\ &+[r_1sen\rho_1(a''_{11}E_{12} + a''_{12}E_{22})F_{11} + r_1sen\rho_1(a''_{21}E_{12} + a''_{22}E_{22})F_{12}+ \\ &+r_1cos\rho_1(a''_{31}E_{12} + a''_{32}E_{22})]e_2+ \\ &+[r_1sen\rho_1a''_{13}F_{11} + r_1sen\rho_1a''_{23}F_{12} + r_1cos\rho_1a''_{33}]e_3. \end{aligned}$$

Somando, vamos obter

$$\begin{aligned}
r_2v_2 + r_1u_2 &= [r_1sen\rho_1(a''_{11}E_{11} + a''_{12}E_{21})F_{11} + r_1sen\rho_1(a''_{21}E_{11} + a''_{22}E_{21})F_{12}+ \\
&+r_1cos\rho_1(a''_{31}E_{11} + a''_{32}E_{21}) + r_2sen\phi_2E_{11}]e_1+ \\
&+[r_1sen\rho_1(a''_{11}E_{12} + a''_{12}E_{22})F_{11} + r_1sen\rho_1(a''_{21}E_{12} + a''_{22}E_{22})F_{12}+ \\
&+r_1cos\rho_1(a''_{31}E_{12} + a''_{32}E_{22}) + r_2sen\phi_2E_{12}]e_2+ \\
&+[r_1sen\rho_1a''_{13}F_{11} + r_1sen\rho_1a''_{23}F_{12} + r_1cos\rho_1a''_{33} + r_2cos\phi_2]e_3.
\end{aligned}$$

Usando (1.51) e (1.52), podemos escrever

$$\begin{aligned}
r_2v_2 + r_1u_2 &= [r_1sen\rho_1(a''_{11}E_{11} + a''_{12}E_{21})F_{11} + r_1sen\rho_1(a''_{21}E_{11} + a''_{22}E_{21})F_{12}+ \\
&+\delta r_1cos\rho_1(a'_{31}E_{11} + a'_{32}E_{21}) + \delta r_1sen\phi_1E_{11}]e_1+ \\
&+[r_1sen\rho_1(a''_{11}E_{12} + a''_{12}E_{22})F_{11} + r_1sen\rho_1(a''_{21}E_{12} + a''_{22}E_{22})F_{12}+ \\
&+\delta r_1cos\rho_1(a'_{31}E_{12} + a'_{32}E_{22}) + \delta r_1sen\phi_1E_{12}]e_2+ \\
&+[\delta r_1sen\rho_1a'_{13}F_{11} + \delta r_1sen\rho_1a'_{23}F_{12} + r_1cos\rho_1a''_{33} + r_2cos\phi_2]e_3.
\end{aligned}$$

Portanto, verificar a validade da equação (1.63) equivale a mostrar que as funções F_{11} e F_{12}, definidas por (1.59), satisfazem ao sistema linear

$$\begin{cases}
r_1sen\rho_1\left[(\delta a'_{11} - (a''_{11}E_{11} + a''_{12}E_{21}))F_{11} + (\delta a'_{21} - (a''_{21}E_{11} + a''_{22}E_{21}))F_{12}\right] = \\
\qquad \delta r_1cos\rho_1(a'_{31}E_{11} + a'_{32}E_{21}) + \delta r_1sen\phi_1E_{11} - r_1sen\phi_1 - r_2cos\rho_2a'_{31}, \\
r_1sen\rho_1\left[(\delta a'_{12} - (a''_{11}E_{12} + a''_{12}E_{22}))F_{11} + (\delta a'_{22} - (a''_{21}E_{12} + a''_{22}E_{22}))F_{12}\right] = \\
\qquad \delta r_1cos\rho_1(a'_{31}E_{12} + a'_{32}E_{22}) + \delta r_1sen\phi_1E_{12} - r_2cos\rho_2a'_{32}, \\
r_1cos\rho_1a''_{33} - r_1cos\phi_1 + r_2cos\phi_2 - r_2cos\rho_2a'_{33} = 0,
\end{cases} \tag{1.64}$$

onde δ é dado por (1.40), E_{11} e E_{12} são dados por (1.41) e os números reais a'_{ij} e a''_{ij} são definidos por (1.44)-(1.49).

As expressões dadas em (1.44) e (1.47) juntamente com (1.57) garantem a validade da última equação. Para demonstrar as outras duas, defina

$$Q_1 \;=\; r_1sen\rho_1[\delta a'_{11} - (a''_{11}E_{11} + a''_{12}E_{21})]F_{11} = r_1sen\rho_1[\delta a'_{11} - a''_{11}E_{11} + a''_{12}E_{12})]F_{11},$$

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= r_1 sen\rho_1[\delta a'_{21} - (a''_{21}E_{11} + a''_{22}E_{21})]F_{12} = r_1 sen\rho_1[\delta a'_{21} - a''_{21}E_{11} + a''_{22}E_{12})]F_{12},\\
Q_3 &= r_1 sen\rho_1[\delta a'_{12} - (a''_{11}E_{12} + a''_{12}E_{22})]F_{11} = r_1 sen\rho_1[\delta a'_{12} - a''_{11}E_{12} - a''_{12}E_{11})]F_{11},\\
Q_4 &= r_1 sen\rho_1[\delta a'_{22} - (a''_{21}E_{12} + a''_{22}E_{22})]F_{12} = r_1 sen\rho_1[\delta a'_{22} - a''_{21}E_{12} - a''_{22}E_{11})]F_{12},\\
Q_5 &= \delta r_1 cos\rho_1(a'_{31}E_{11} + a'_{32}E_{21}) + \delta r_1 sen\phi_1 E_{11} - r_1 sen\phi_1 - r_2 cos\rho_2 a'_{31}\\
&= \delta r_1 cos\rho_1(a'_{31}E_{11} - a'_{32}E_{12}) + \delta r_1 sen\phi_1 E_{11} - r_1 sen\phi_1 - r_2 cos\rho_2 a'_{31},\\
Q_6 &= \delta r_1 cos\rho_1(a'_{31}E_{12} + a'_{32}E_{22}) + \delta r_1 sen\phi_1 E_{12} - r_2 cos\rho_2 a'_{32}\\
&= \delta r_1 cos\rho_1(a'_{31}E_{12} + a'_{32}E_{11}) + \delta r_1 sen\phi_1 E_{12} - r_2 cos\rho_2 a'_{32}.
\end{aligned}
$$

Observe que na segunda igualdade, em cada definição, usamos o fato que a matriz E, definida por (1.41), é ortogonal positiva.

Considerando a função ξ, definida por (1.58), observemos que o sistema linear (1.64) equivale ao sistema linear abaixo

$$
\begin{cases}
Q_1\xi + Q_2\xi = Q_5\xi,\\
Q_3\xi + Q_4\xi = Q_6\xi,
\end{cases}
\tag{1.65}
$$

uma vez que $\xi \neq 0$.

Analisemos cada parcela separadamente. Para determinarmos Q_1, observemos de (1.46) que

$$\delta r_1 sen\rho_1 a'_{11} = -\delta r_1 sen\phi_1 - \delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}.$$

Das relações (1.49), (1.50), (1.51) e (1.52) temos

$$
\begin{aligned}
-r_1 sen\rho_1 a''_{11}E_{11} &= -\frac{1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{11}E_{11} = \frac{1}{\delta}[r_2 sen\phi_2 + r_2 cos\rho_2 a''_{31}]E_{11}\\
&= [r_1 sen\phi_1 + r_2 cos\rho_2 a'_{31}]E_{11}.
\end{aligned}
$$

De (1.49), (1.50) e (1.52) temos

$$
\begin{aligned}
r_1 sen\rho_1 a''_{12} &= \frac{1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{12} = \frac{-1}{\delta} r_2 cos\rho_2 a''_{32}\\
&= -r_2 cos\rho_2 a'_{32}.
\end{aligned}
$$

Substituindo (1.59) na definição de Q_1 e usando as três igualdades acima, vamos obter

$$\begin{aligned}
Q_1\xi &= r_1 sen\rho_1[\delta a'_{11} - a''_{11}E_{11} + a''_{12}E_{12}]F_{11}\xi \\
&= -E_{11}^2(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)(r_1 sen\phi_1 + r_2 cos\rho_2 a'_{31}) + \\
&\quad +E_{11}E_{12}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)r_2 cos\rho_2 a'_{32} + \\
&\quad +E_{11}[(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)(\delta r_1 sen\phi_1 + \delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}) + \\
&\qquad\quad -sen\theta_1 sen\theta_2(r_1 sen\phi_1 + r_2 cos\rho_2 a'_{31})] + \\
&\quad +E_{12} sen\theta_1 sen\theta_2 r_2 cos\rho_2 a'_{32} + \\
&\quad +\delta sen\theta_1 sen\theta_2[r_1 sen\phi_1 + r_1 cos\rho_1 a'_{31}].
\end{aligned}$$

Para o cálculo de Q_2, observemos de (1.45) e (1.56), que

$$\begin{aligned}
r_1 sen\rho_1 \delta a'_{21} &= -\delta r_1 cos\phi_1 a'_{32} \\
&= \frac{-\delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - \delta r_2 cos\rho_2 a'_{32} sen^2\theta_1}{cos\theta_1 - cos\theta_2}.
\end{aligned}$$

Das relações (1.48), (1.50), (1.52) e (1.56) temos

$$\begin{aligned}
-r_1 sen\rho_1 a''_{21}E_{11} &= -\frac{1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{21}E_{11} = \frac{1}{\delta} r_2 cos\phi_2 a''_{32}E_{11} = r_2 cos\phi_2 a'_{32}E_{11} \\
&= \frac{[-r_1 cos\rho_1 sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]a'_{32}E_{11}}{cos\theta_1 - cos\theta_2}.
\end{aligned}$$

De (1.48) e (1.50)-(1.56) temos

$$\begin{aligned}
r_1 sen\rho_1 a''_{22}E_{12} &= \frac{1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{22}E_{12} = \frac{1}{\delta}(r_2 cos\phi_2 a''_{31} - r_2 sen\phi_2 cos\theta_2)E_{12} \\
&= (r_2 cos\phi_2 a'_{31} - r_1 sen\phi_1 cos\theta_2)E_{12} \\
&= \frac{[-r_1 cos\rho_1 a'_{31} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]E_{12}}{cos\theta_1 - cos\theta_2} + \\
&\quad + \frac{[-r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 + r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_2]E_{12}}{cos\theta_1 - cos\theta_2}.
\end{aligned}$$

Substituindo (1.59) na definição de Q_2 e substituindo as três últimas expressões, vamos obter

$$\begin{aligned}
Q_2\xi &= r_1 sen\rho_1[\delta a'_{21} - a''_{21}E_{11} + a''_{22}E_{12}]F_{12}\xi \\
&= E_{12}^2[-r_1 cos\rho_1 a'_{31} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\qquad -r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 + r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_2]+ \\
&\quad +E_{11}E_{12}[-r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]+ \\
&\quad +E_{12}[-\delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - \delta r_2 cos\rho_2 a'_{32} sen^2\theta_1].
\end{aligned}$$

Como $E_{12}^2 = 1 - E_{11}^2$, então temos

$$\begin{aligned}
Q_2\xi &= E_{11}^2[r_1 cos\rho_1 a'_{31} sen^2\theta_2 + r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\qquad +r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 - r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_2]+ \\
&\quad +E_{11}E_{12}[-r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]+ \\
&\quad +E_{12}[-\delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - \delta r_2 cos\rho_2 a'_{32} sen^2\theta_1]+ \\
&\quad -r_1 cos\rho_1 a'_{31} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\quad -r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 + r_1 sen\phi cos^2\theta_2.
\end{aligned}$$

Somando as expressões encontradas, vamos obter

$$\begin{aligned}
Q_1\xi + Q_2\xi &= E_{11}^2[sen\phi_1 + cos\rho_1 a'_{31}]r_1 sen^2\theta_2+ \\
&\quad -E_{11}E_{12} cos\rho_1 a'_{32} r_1 sen^2\theta_2+ \\
&\quad +E_{11}[\delta r_1 sen\phi_1(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - r_1 sen\phi_1 sen\theta_1 sen\theta_2+ \\
&\qquad +\delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - r_2 cos\rho_2 a'_{31} sen\theta_1 sen\theta_2]+ \\
&\quad -E_{12}\delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\quad +[-r_1 sen\phi_1 - r_2 cos\rho_2 a'_{31}](cos\theta_1 cos\theta_2 - 1).
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (1.58), vamos obter

$$\begin{aligned}
Q_5\xi &= E_{11}^2[sen\phi_1 + cos\rho_1 a'_{31}]\delta r_1 sen\theta_1 sen\theta_2 + \\
&-E_{11}E_{12}\delta sen\theta_1 sen\theta_2 r_1 cos\rho_1 a'_{32} + \\
&+E_{11}[\delta r_1 sen\phi_1(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - sen\theta_1 sen\theta_2 r_1 sen\phi_1 + \\
&+\delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - sen\theta_1 sen\theta_2 r_2 cos\rho_2 a'_{31}] + \\
&-E_{12}\delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) + \\
&+[-r_1 sen\phi_1 - r_2 cos\rho_2 a'_{31}](cos\theta_1 cos\theta_2 - 1).
\end{aligned}$$

Usando a definição de δ dada em (1.40) segue que

$$Q_1\xi + Q_2\xi = Q_5\xi,$$

ou seja, a primeira equação do sistema linear (1.65) é verdadeira.

Quanto a segunda equação, iniciemos observando que de (1.46) temos

$$\delta r_1 sen\rho_1 a'_{12} = -\delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}.$$

De (1.49)-(1.52), obtemos

$$\begin{aligned}
-r_1 sen\rho_1 a''_{11}E_{12} &= \frac{-1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{11}E_{12} = \frac{1}{\delta}(r_2 sen\phi_2 + r_2 cos\rho_2 a''_{31})E_{12} \\
&= (r_1 sen\phi_1 + r_2 cos\rho_2 a'_{31})E_{12}.
\end{aligned}$$

De (1.49), (1.50) e (1.52) temos

$$\begin{aligned}
-r_1 sen\rho_1 a''_{12}E_{11} &= \frac{-1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{12}E_{11} = \frac{1}{\delta} r_2 cos\rho_2 a''_{32}E_{11} \\
&= r_2 cos\rho_2 a'_{32}E_{11}.
\end{aligned}$$

Substuindo (1.59) na definição de Q_3 e usando (1.40), vamos obter

$$\begin{aligned}
Q_3\xi &= r_1 sen\rho_1[\delta a'_{12} - a''_{11}E_{12} - a''_{12}E_{11}]F_{11}\xi \\
&= -E_{11}^2 r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\quad +E_{11}E_{12}[-r_1 sen\phi_1(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) - r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]+ \\
&\quad +E_{11}[-r_2 cos\rho_2 a'_{32} sen\theta_1 sen\theta_2 + \delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)] \\
&\quad -E_{12}[r_1 sen\phi_1 + r_2 cos\rho_2 a'_{31}]sen\theta_1 sen\theta_2 + \\
&\quad +\delta sen\theta_1 sen\theta_2 r_1 cos\rho_1 a'_{32}.
\end{aligned}$$

De (1.45) e (1.56) temos

$$\begin{aligned}
r_1 sen\rho_1 \delta a'_{22} &= \delta r_1 cos\phi_1 a'_{31} - \delta r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 \\
&= \frac{\delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) + \delta r_2 cos\rho_2 a'_{31} sen^2\theta_1}{cos\theta_1 - cos\theta_2} \\
&\quad + \frac{-\delta r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_1 + \delta r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2}{cos\theta_1 - cos\theta_2}
\end{aligned}$$

Das relações (1.48), (1.50), (1.52) e (1.56) temos

$$\begin{aligned}
-r_1 sen\rho_1 a''_{21}E_{12} &= \frac{-1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{21}E_{12} = \frac{1}{\delta} r_2 cos\phi_2 a''_{32}E_{12} = r_2 cos\phi_2 a'_{32}E_{12} \\
&= \frac{[-r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]E_{12}}{cos\theta_1 - cos\theta_2}.
\end{aligned}$$

De (1.48) e (1.50)-(1.56) temos

$$\begin{aligned}
-r_1 sen\rho_1 a''_{22}E_{11} &= \frac{-1}{\delta} r_2 sen\rho_2 a''_{22}E_{11} = \frac{-1}{\delta}(r_2 cos\phi_2 a''_{31} - r_2 sen\phi_2 cos\theta_2)E_{11} \\
&= (-r_2 cos\phi_2 a'_{31} + r_1 sen\phi_1 cos\theta_2)E_{11} \\
&= \frac{[r_1 cos\rho_1 a'_{31} sen^2\theta_2 + r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]E_{11}}{cos\theta_1 - cos\theta_2} + \\
&\quad + \frac{[r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 - r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_2]E_{11}}{cos\theta_1 - cos\theta_2}.
\end{aligned}$$

Substituindo (1.59) na definição de Q_4, vamos obter

$$\begin{aligned}
Q_4\xi &= r_1 sen\rho_1[\delta a'_{22} - a''_{21}E_{12} - a''_{22}E_{11}]F_{12}\xi \\
&= E_{12}^2[-r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]+ \\
&\quad +E_{11}E_{12}[r_1 cos\rho_1 a'_{31} sen^2\theta_2 + r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\qquad +r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 - r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_2]+ \\
&\quad +E_{12}[\delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) + \delta r_2 cos\rho_2 a'_{31} sen^2\theta_1 + \\
&\qquad -\delta r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_1 + \delta r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2].
\end{aligned}$$

Como $E_{12}^2 = 1 - E_{11}^2$, então

$$\begin{aligned}
Q_4\xi &= E_{11}^2[r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 + r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]+ \\
&\quad +E_{11}E_{12}[r_1 cos\rho_1 a'_{31} sen^2\theta_2 + r_2 cos\rho_2 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\qquad +r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 - r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_2]+ \\
&\quad +E_{12}[\delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) + \delta r_2 cos\rho_2 a'_{31} sen^2\theta_1 + \\
&\qquad -\delta r_1 sen\phi_1 cos^2\theta_1 + \delta r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2]+ \\
&\quad -r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 - r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1).
\end{aligned}$$

Somando as expressões encontradas e usando (1.40), vamos obter

$$\begin{aligned}
Q_3\xi + Q_4\xi &= E_{11}^2 r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 + \\
&\quad +E_{11}E_{12}[r_1 cos\rho_1 a'_{31} + r_1 sen\phi_1] sen^2\theta_2 + \\
&\quad +E_{11}[-r_2 cos\rho_2 a'_{32} sen\theta_1 sen\theta_2 + \delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)]+ \\
&\quad +E_{12}[\delta r_1 sen\phi_1 + \delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}](cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)+ \\
&\quad -r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1).
\end{aligned}$$

Por outro lado, segue da definição de Q_6 e de (1.58) que

$$\begin{aligned} Q_6\xi &= E_{11}^2 r_1 cos\rho_1 a'_{32} sen^2\theta_2 + \\ &+E_{11}E_{12}[r_1 cos\rho_1 a'_{31} + r_1 sen\phi_1] sen^2\theta_2 + \\ &+E_{11}[-r_2 cos\rho_2 a'_{32} sen\theta_1 sen\theta_2 + \delta r_1 cos\rho_1 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)] + \\ &+E_{12}[\delta r_1 sen\phi_1 + \delta r_1 cos\rho_1 a'_{31}](cos\theta_1 cos\theta_2 - 1) + \\ &-r_2 cos\rho_2 a'_{32}(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1). \end{aligned}$$

Comparando as expressões encontradas, temos

$$Q_3\xi + Q_4\xi = Q_6\xi,$$

ou seja, a segunda equação do sistema (1.65) também é verdadeira. Desta forma, mostramos que a equação (1.63) se verifica.

Portanto, definindo as congruências linear-Weingarten hiperbólicas pelas aplicações

$$l_2^*(X_1) = X_1 + r_2 u_1 \qquad \text{e} \qquad l_1^*(X_2) = X_2 + r_1 u_2$$

vamos obter

$$l_2^* \circ l_1 = l_1^* \circ l_2.$$

Isto prova a primeira parte do teorema.

Como M se relaciona a M' (resp. M'') por uma congruência linear-Weingarten hiperbólica com constantes $(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$ (resp. $(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$) então usando o Teorema de Bäcklund (Teorema 1.5), as identidades (1.50) e a definição de δ dada em (1.40) temos que as curvaturas gaussiana K e média H de M satisfazem à equação

$$1 - \frac{2r_i(cos\phi_i + cos\rho_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i} H + \frac{r_i^2 sen^2\rho_i}{sen^2\theta_i} K = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Mas, demonstramos que l_1^* (resp. l_2^*) define uma congruência linear-Weingarten hiperbólica com constantes $(r_1, \theta_1, \rho_1, \phi_1)$ (resp. $(r_2, \theta_2, \rho_2, \phi_2)$) entre uma vizinhança de $p_2 = l_2(p) \in M''$ (resp. $p_1 = l_1(p) \in M'$) e uma vizinhança de $l_1^*(p_2) = l_2^*(p_1) \in M^*$. Então, usando novamente o Teorema 1.5, as identidades (1.50) e a definição de δ dada em (1.40) a seguinte igualdade se verifica

$$1 - \frac{2r_i(cos\phi_i + cos\rho_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i} H^* + \frac{r_i^2 sen^2\rho_i}{sen^2\theta_i} K^* = 0, \qquad i = 1, 2.$$

onde K^* e H^* denotam as curvaturas gaussiana e média de M^*, respectivamente. Pela abitrariedade de p, concluimos a demonstração do teorema. $\blacksquare$

Capítulo

2

Interpretação Analítica da Transformação de Bäcklund para Superfícies Linear-Weingarten Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

O Teorema 1.2 mostra que toda superfície linear-Weingarten hiperbólica $M \subset \mathbb{R}^3$ satisfazendo a relação $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$, onde β, γ são constantes reais, está associada a uma solução ψ da equação de sine-Gordon

$$\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen(\psi + C_{\beta\gamma}), \tag{2.1}$$

onde $C_{\beta\gamma}$ é uma constante real definida por

$$senC_{\beta\gamma} = \frac{2\varepsilon_2\beta\sqrt{D}}{\gamma}, \quad cosC_{\beta\gamma} = \frac{\gamma - 2\beta^2}{\gamma}, \quad \varepsilon_2^2 = 1, \tag{2.2}$$

com $D = \gamma - \beta^2$.

Neste capítulo, vamos fornecer a interpretação analítica dos teoremas de integrabilidade (Teorema 1.9) e permutabilidade (Teorema 1.19) para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em R^3 em termos de soluções das equações diferenciais (2.1). No Teorema 2.4 (Teorema de integrabilidade analítico) mostraremos, analiticamente, que fixada uma solução ψ da equação de sine-Gordon (2.1) então o sistema de equações diferenciais (1.37) é integrável e que cada solução ψ' deste sistema satisfaz a uma equação análoga a (2.1). Neste caso, dizemos que ψ' é uma transformação de Bäcklund de ψ. O teorema de permutabilidade analítico (Teorema 2.11) permite determinar, algebricamente, novas soluções da equação de sine-Gordon (2.1) a partir de uma solução inicialmente fixada.

2.1 Interpretação Analítica do Teorema de Integrabilidade

Seja ψ uma solução da equação (2.1), onde β e γ são números reais tais que $\gamma-\beta^2>0$ e $C_{\beta\gamma}$ é a constante definida por (2.2). Escolhamos números reais $r>0$, $0<\theta<\pi$ e $0<\phi,\rho\leq\frac{\pi}{2}$ satisfazendo (1.24) e (1.7). Considerando β', γ' dados por (1.8), defina a constante $C_{\beta'\gamma'}$ por

$$sen C_{\beta'\gamma'}=\frac{2\beta'\sqrt{D}}{\gamma'}, \qquad cos C_{\beta'\gamma'}=\frac{\gamma'-2(\beta')^2}{\gamma'}. \tag{2.3}$$

Usando os números reais S_3, S_4, S_5, S_6 definidos em (1.38) e (1.39), consideremos também

$$S_7=-S_3^2-S_4^2+S_5^2+S_6^2, \qquad S_8=S_3S_5+S_4S_6; \tag{2.4}$$

$$S_7'=-S_3^2+S_4^2-S_5^2+S_6^2, \qquad S_8'=-S_3S_4-S_5S_6. \tag{2.5}$$

No lema seguinte, provaremos que estes números reais dependem unicamente das constantes $C_{\beta\gamma}$ e $C_{\beta'\gamma'}$ definidas em (2.2) e (2.3), respectivamente.

Lema 2.1. *Dados números reais β e γ tais que $\gamma-\beta^2>0$, consideremos a constate $C_{\beta\gamma}$ definida por (2.2). Sejam S_1, S_2 as constantes dadas por (1.36). Escolhamos números reais $r>0, 0<\phi,\rho\leq\frac{\pi}{2}$ e $0<\theta<\pi$ satisfazendo (1.7) e (1.24). Consideremos também as constantes b_1,b_2,b_3 dadas por (1.23), c_1,c_2,c_3,c_4 por (1.25), β' e γ' por (1.8) e S_3, S_4, S_5, S_6 por (1.38) e (1.39). Sejam S_7, S_8 (resp. S_7', S_8') as constantes dadas em (2.4) (resp. (2.5)). Então*

$$S_7=-cos C_{\beta\gamma}, \qquad S_8=\frac{-sen C_{\beta\gamma}}{2}, \tag{2.6}$$

$$cos C_{\beta'\gamma'}=\frac{sen^2\theta-2b_1^2}{sen^2\theta}, \qquad sen C_{\beta'\gamma'}=\frac{-2b_1b_2}{sen^2\theta}, \tag{2.7}$$

$$S_7'=cos C_{\beta'\gamma'}, \qquad S_8'=\frac{sen C_{\beta'\gamma'}}{2}, \tag{2.8}$$

onde $C_{\beta'\gamma'}$ é a constante definida por (2.3).

Demonstração: Substituindo (1.38) e (1.39) em (2.4), podemos escrever

$$S_7 = -(c_1^2 + c_2^2)\gamma - (c_3^2 + c_4^2)(S_1^2 - S_2^2) - 2\sqrt{\gamma}S_1(c_1c_3 + c_2c_4), \tag{2.9}$$

$$S_8 = \sqrt{\gamma}S_2(c_1c_3 + c_2c_4) + (c_3^2 + c_4^2)S_1S_2, \tag{2.10}$$

onde S_1 e S_2 são dados por (1.36). Substituindo em (2.9) as expressões de (1.26) e usando os valores de β e γ dados em (1.7), vamos obter

$$S_7 \;=\; \frac{-sen^2\theta}{r^2 sen^2\phi b_2^2}\left[\gamma + 2\beta\sqrt{\gamma}S_1 + \gamma(S_1^2 - S_2^2)\right] + (S_1^2 - S_2^2).$$

Segue da definição S_1 e S_2 dadas em (1.36) que

$$\sqrt{\gamma}S_1 = -\beta, \qquad \gamma(S_1^2 - S_2^2) = 2\beta^2 - \gamma. \tag{2.11}$$

Substituindo na expressão anterior e usando (2.2), podemos escrever

$$\begin{aligned} S_7 &= (S_1^2 - S_2^2) = \frac{2\beta^2 - \gamma}{\gamma} \\ &= -cosC_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Usando novamente a igualdade (2.11), segue de (2.10) e (1.26), que

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{sen^2\theta}{r^2 sen^2\phi b_2^2}\left[\beta\sqrt{\gamma}S_2 + \gamma S_1S_2\right] - S_1S_2 = -S_1S_2 = -\varepsilon_2\frac{\beta\sqrt{D}}{\gamma} = \\ &= \frac{-senC_{\beta\gamma}}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma, a identidades (2.6) se verificam.

Observando que a constante real b_2, dada em (1.23), é negativa então segue de (1.29) que

$$\sqrt{D} = \sqrt{\gamma - \beta^2} = \frac{-rsen\phi b_2}{sen^2\theta}.$$

Além disto, usando as constantes b_1 e β' definidas por (1.23) e (1.8) respectivamente, vamos obter

$$\beta' = \frac{rsen\phi b_1}{sen^2\theta}.$$

Portanto, as identidades dadas em (2.7) também são válidas pois, de (2.3) segue que

$$cosC_{\beta'\gamma'} = 1 - \frac{2(\beta')^2}{\gamma'} = 1 - \frac{2b_1^2}{sen^2\theta} = \frac{sen^2\theta - 2b_1^2}{sen^2\theta}$$

e

$$senC_{\beta'\gamma'} = 2\frac{\beta'\sqrt{D}}{\gamma'} = \frac{-2b_1b_2}{sen^2\theta}.$$

Iniciemos a demonstração das identidades (2.8) observando que as constantes S_1 e S_2, dadas em (1.36), nos permitem concluir que

$$S_1^2 + S_2^2 = 1. \tag{2.12}$$

Daí, substituindo (1.38) e (1.39) em (2.5), podemos escrever

$$S_7' = (-c_1^2 + c_2^2)\gamma + 2\sqrt{\gamma}S_1(-c_1c_3 + c_2c_4) - c_3^2 + c_4^2, \tag{2.13}$$

$$S_8' = -c_1c_2\gamma - \sqrt{\gamma}S_1(c_1c_4 + c_2c_3) - c_3c_4. \tag{2.14}$$

Desta forma, substituindo as expressões de (1.27) em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} S_7' = {} & \frac{(sen^2\theta - 2b_1^2)\gamma}{r^2sen^2\phi b_2^2} - 2\sqrt{\gamma}S_1\frac{r[(sen^2\theta - 2b_1^2)cos\phi + b_1sen\phi cos\theta]}{r^2sen^2\phi b_2^2} + \\ & + \frac{r^2[(sen^2\theta - 2b_1^2)cos^2\phi + 2b_1sen\phi cos\phi cos\theta - cos^2\theta sen^2\phi]}{r^2sen^2\phi b_2^2}. \end{aligned}$$

De (2.11) temos

$$S_7' = \frac{(sen^2\theta - 2b_1^2)(\gamma + 2\beta rcos\phi + r^2cos^2\phi) + 2rb_1sen\phi cos\theta(\beta + rcos\phi)}{r^2sen^2\phi b_2^2} - \frac{cos^2\theta}{b_2^2}.$$

Portanto, usando a expressões (1.30), (1.31) e (2.7) e a definição de b_2 dada em (1.23), temos

$$\begin{aligned} S_7' &= \frac{(sen^2\theta - 2b_1^2)(1 - b_1^2) + 2cos^2\theta b_1^2 - sen^2\theta cos^2\theta}{b_2^2sen^2\theta} \\ &= \frac{(sen^2\theta - 2b_1^2)(sen^2\theta - b_1^2)}{b_2^2sen^2\theta} = \frac{sen^2\theta - 2b_1^2}{sen^2\theta} \\ &= cosC_{\beta'\gamma'}. \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração do lema, observemos de (2.14), que

$$\begin{aligned} S_8' &= \frac{-b_1\gamma + r\beta(-2b_1cos\phi + sen\phi cos\theta) + r^2(-b_1cos^2\phi + sen\phi cos\phi cos\theta)}{r^2sen^2\phi b_2} \\ &= \frac{-b_1(\gamma + 2r\beta cos\phi + r^2cos^2\phi) + rsen\phi cos\theta(\beta + rcos\phi)}{r^2sen^2\phi b_2}. \end{aligned}$$

Usando novamente as expressões (1.30), (1.31) e (2.7) e a definição de b_2, dada em (1.23) podemos escrever

$$\begin{aligned} S_8' &= \frac{-b_1(1-b_1^2) + cos^2\theta b_1}{b_2sen^2\theta} = \frac{-b_1(sen^2\theta - b_1^2)}{b_2sen^2\theta} = \frac{-b_1b_2}{sen^2\theta} \\ &= \frac{senC_{\beta'\gamma'}}{2}. \end{aligned}$$

■

Observação 2.2. Seja ψ uma solução da equação de sine-Gordon $\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen(\psi + c_{\beta\gamma})$, onde β e γ são tais que $\gamma - \beta^2 > 0$ e $C_{\beta\gamma}$ é a constante dada por (2.2). Consideremos números reais $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi$, $\rho < \frac{\pi}{2}$ satisfazendo (1.7) e (1.24). Sejam β', γ' os números reais dados por (1.8). Observemos que as constantes S_3, S_4, S_5, S_6, definidos por (1.38) e (1.39) dependem da escolha dos parâmetros r, θ, ϕ, ρ. No entanto, o lema anterior nos permite concluir que S_7, S_8, S_7', S_8' dados por (2.4) e (2.5) dependem apenas de β e γ . É importante ressaltar que esta última conclusão também é válida para as constantes S_1 e S_2 definidas por (1.36).

Observação 2.3. Apresentaremos abaixo uma relação de identidades trigonométricas que serão utilizadas em diversos momentos no restante do trabalho. Dados os números reais t, t_1 e t_2, são conhecidas as seguintes identidades

$$sen(t_1 \pm t_2) = sent_1cost_2 \pm sent_2cost_1, \tag{2.15}$$

$$cos(t_1 \pm t_2) = cost_1cost_2 \mp sent_1sent_2, \tag{2.16}$$

$$tg(t_1 \pm t_2) = \frac{tga \pm tgb}{1 \mp tgatgb}, \tag{2.17}$$

$$sen2t = 2sentcost, \tag{2.18}$$

$$cos2t = cos^2t - sen^2t, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
cost &= \frac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}, && (2.20)\\
sent &= \frac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}, && (2.21)\\
cotg\frac{t}{2} &= \frac{sent}{1-cost}, && (2.22)\\
sen^2\frac{t}{2} &= \frac{1-cost}{2}, && (2.23)\\
cos^2\frac{t}{2} &= \frac{1+cost}{2}, && (2.24)\\
cost_1+cost_2 &= 2cos\frac{t_1+t_2}{2}cos\frac{t_1-t_2}{2}, && (2.25)\\
cost_1-cost_2 &= -2sen\frac{t_1+t_2}{2}sen\frac{t_1-t_2}{2}, && (2.26)\\
sent_1+sent_2 &= 2sen\frac{t_1+t_2}{2}cos\frac{t_1-t_2}{2}, && (2.27)\\
sent_1-sent_2 &= 2cos\frac{t_1+t_2}{2}sen\frac{t_1-t_2}{2}. && (2.28)
\end{aligned}$$

Com o auxilio do Lema 2.1, podemos demonstrar a interpretação analítica do teorema de integrabilidade da transformação de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten em $\mathbb{R}^3$ (Teorema 1.9).

Teorema 2.4. (Teorema de Integrabilidade Analítico) *Seja ψ uma solução da equação de sine-Gordon (2.1), onde β e γ são números reais tais que $\gamma-\beta^2>0$ e $C_{\beta\gamma}$ é a constante dada por (2.2). Consideremos $r>0, 0<\phi,\rho\leq\frac{\pi}{2}$ e $0<\theta<\pi$ números reais satisfazendo (1.24) e (1.7). Seja $C_{\beta'\gamma'}$ a constante definida pelas relações (2.3), onde β', γ' são dadas por (1.8). Consideremos também os números b_1,b_2,b_3 dadas por (1.23) e c_1,c_2,c_3,c_4 por (1.25). Defina as constantes*

$$S_3=c_1\sqrt{\gamma}+c_3S_1, \qquad S_4=c_2\sqrt{\gamma}+c_4S_1, \tag{2.29}$$

$$S_5=c_3S_2, \qquad S_6=c_4S_2. \tag{2.30}$$

Então o sistema de equações diferenciais

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi'_{x_1} + \psi_{x_2} & = & 2S_3 cos\dfrac{\psi}{2}cos\dfrac{\psi'}{2} - 2S_4 cos\dfrac{\psi}{2}sen\dfrac{\psi'}{2} + \\ & & +2S_5 sen\dfrac{\psi}{2}cos\dfrac{\psi'}{2} - 2S_6 sen\dfrac{\psi}{2}sen\dfrac{\psi'}{2}, \\ \psi'_{x_2} + \psi_{x_1} & = & 2S_3 sen\dfrac{\psi}{2}sen\dfrac{\psi'}{2} + 2S_4 sen\dfrac{\psi}{2}cos\dfrac{\psi'}{2} + \\ & & -2S_5 cos\dfrac{\psi}{2}sen\dfrac{\psi'}{2} - 2S_6 cos\dfrac{\psi}{2}cos\dfrac{\psi'}{2}, \end{array}\right. \tag{2.31}$$

é integrável. Além disto, cada função ψ', obtida pela integração deste sistema, é solução da equação de sine-Gordon

$$\psi'_{x_1x_1} - \psi'_{x_2x_2} = sen(\psi' + C_{\beta'\gamma'}). \tag{2.32}$$

Demonstração: Derivando a primeira equação do sistema (2.31) com relação a x_2 e segunda equação com relação a x_1, vamos obter

$$\begin{aligned} &\psi'_{x_1x_2} + \psi_{x_2x_2} = \\ &S_3\left[-sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2} - cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right] + S_4\left[sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2} - cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right] + \\ &+S_5\left[cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2} - sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right] + S_6\left[-cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2} - sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right], \\ &\psi'_{x_2x_1} + \psi_{x_1x_1} = \\ &S_3\left[cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} + sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right] + S_4\left[cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} - sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right] + \\ &+S_5\left[sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} - cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right] + S_6\left[sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} + cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right]. \end{aligned}$$

Subtraindo as expressões encontradas e usando o fato que ψ é solução da equação de sine-Gordon (2.1), vamos obter

$$\begin{aligned} &\psi'_{x_1x_2} - \psi'_{x_2x_1} - sen(\psi + C_{\beta\gamma}) = \\ &= \left[\psi_{x_1} + \psi'_{x_2}\right]\left[-S_3cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2} - S_4cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2} - S_5sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2} - S_6sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\right] + \\ &+ \left[\psi_{x_2} + \psi'_{x_1}\right]\left[-S_3sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2} + S_4sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2} + S_5cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2} - S_6cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\right]. \end{aligned}$$

Usando as equações dadas no sistema (2.31) vamos obter

$$\psi'_{x_1x_2} - \psi'_{x_2x_1} - sen(\psi + C_{\beta\gamma}) =$$

$$= 2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2}[-S_3^2 + S_5^2] + 4sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_3S_4 + S_5S_6]+$$

$$+2sen^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_3S_6 - S_4S_5] + 2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2}[-S_4^2 + S_6^2]+$$

$$+2cos^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[S_4S_5 + S_3S_6] - 2S_3S_5sen^2\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2} - 2S_4S_6sen^2\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2}+$$

$$+2S_3S_5cos^2\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2} + 2S_4S_6cos^2\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2} + 2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2}[-S_4^2 + S_6^2]+$$

$$+4sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[S_3S_4 - S_5S_6] + 2sen^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[S_4S_5 + S_3S_6]+$$

$$+2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2}[-S_3^2 + S_5^2] + 2cos^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_4S_5 - S_3S_6]$$

$$-2S_4S_6sen^2\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2} - 2S_3S_5sen^2\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2} + 2S_4S_6cos^2\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2}+$$

$$+2S_3S_5cos^2\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2}.$$

Usando as identidades trigonométricas (2.18), (2.19) e (2.15) e as relações (2.4) e (2.6) teremos

$$\psi'_{x_1x_2} - \psi'_{x_2x_1} - sen(\psi + C_{\beta\gamma}) =$$

$$= 2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}[-S_3^2 - S_4^2 + S_5^2 + S_6^2] + 2\left(cos^2\tfrac{\psi}{2} - sen^2\tfrac{\psi}{2}\right)[S_3S_5 + S_4S_6] =$$

$$= S_7sen\psi + 2S_8cos\psi = -cosC_{\beta\gamma}sen\psi - senC_{\beta\gamma}cos\psi = -sen(\psi + C_{\beta\gamma}).$$

Logo,

$$\psi'_{x_1x_2} = \psi'_{x_2x_1},$$

ou seja, o sistema (2.31) é integrável.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, vamos começar derivando a primeira equação do sistema (2.31) com relação a x_1 e a segunda equação com relação a x_2.

$$\psi'_{x_1x_1} + \psi_{x_2x_1} =$$

$$= S_3\left[-sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} - cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right] + S_4\left[sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} - cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right]+$$

$$+S_5\left[cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} - sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right] + S_6\left[-cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_1} - sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_1}\right],$$

$$\psi'_{x_2x_2}+\psi_{x_1x_2}=$$
$$=S_3\left[cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2}+sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right]+S_4\left[cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2}-sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right]+$$
$$+S_5\left[sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2}-cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right]+S_6\left[sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\psi_{x_2}+cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\psi'_{x_2}\right].$$

Subtraindo as expressões encontradas e usando o fato que ψ é uma função diferenciável vamos obter

$$\psi'_{x_1x_1}-\psi'_{x_2x_2}=$$
$$=\left[\psi_{x_1}+\psi'_{x_2}\right]\left[-S_3sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}+S_4sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}+S_5cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}-S_6cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}\right]+$$
$$+\left[\psi_{x_2}+\psi'_{x_1}\right]\left[-S_3cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}-S_4cos\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}-S_5sen\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}-S_6sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}\right].$$

Segue das equações dadas no sistema (2.31) que

$$\psi'_{x_1x_1}-\psi'_{x_2x_2}=$$
$$=2sen^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_3^2+S_4^2]-2S_3S_4sen^2\tfrac{\psi}{2}\left[cos^2\tfrac{\psi'}{2}-sen^2\tfrac{\psi'}{2}\right]+$$
$$+4sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[S_3S_5-S_4S_6]+2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2}[-S_3S_6-S_4S_5]+$$
$$+2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2}[S_4S_5+S_3S_6]+2cos^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_5^2+S_6^2]+$$
$$-2S_5S_6cos^2\tfrac{\psi}{2}\left[cos^2\tfrac{\psi'}{2}-sen^2\tfrac{\psi'}{2}\right]+2sen^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_5^2+S_6^2]+$$
$$-2S_3S_4cos^2\tfrac{\psi}{2}\left[cos^2\tfrac{\psi'}{2}-sen^2\tfrac{\psi'}{2}\right]+4sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_3S_5+S_4S_6]+$$
$$+2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}sen^2\tfrac{\psi'}{2}[S_3S_6+S_4S_5]+2sen\tfrac{\psi}{2}cos\tfrac{\psi}{2}cos^2\tfrac{\psi'}{2}[-S_4S_5-S_3S_6]+$$
$$+2cos^2\tfrac{\psi}{2}sen\tfrac{\psi'}{2}cos\tfrac{\psi'}{2}[-S_3^2+S_4^2]-2S_5S_6sen^2\tfrac{\psi}{2}\left[cos^2\tfrac{\psi'}{2}-sen^2\tfrac{\psi'}{2}\right].$$

Desta forma, usando as relações trigonométricas (2.18), (2.19) e (2.24) e as identidades (2.8) podemos escrever

$$\begin{aligned}\psi'_{x_1x_1}-\psi'_{x_2x_2} &= sen\psi'[-S_3^2+S_4^2-S_5^2+S_6^2]+2cos\psi'[-S_3S_4-S_5S_6]=\\ &= S'_7sen\psi'+2S'_8cos\psi'=cosC_{\beta'\gamma'}sen\psi'+senC_{\beta'\gamma'}cos\psi'=\\ &= sen(\psi'+C_{\beta'\gamma'}).\end{aligned}$$

Portanto, ψ' é solução da equação de sine-Gordon (2.32). Isto conclui a demonstração do teorema de integrabilidade. ■

Observação 2.5. Na primeira parte do teorema anterior, apresentamos uma prova analítica que o sistema de equações diferenciais (2.31) é integrável. Observemos que a Proposição 1.10 fornece uma prova geométrica deste mesmo fato.

Definição 2.6. *Seja ψ solução da equação de sine-Gordon (2.1). Dizemos que uma função ψ' está associada a ψ por uma transformação de Bäcklund $BT(r, \theta, \phi, \rho)$ se ψ' é solução do sistema (2.31).*

2.2 Interpretação Analítica do Teorema de Permutabilidade

O teorema de permutabilidade (Teorema 1.19) demonstrado no Capítulo 2, nos permite considerar a composição de transformações de Bäcklund de uma superfície linear-Weingarten hiperbólica M satisfazendo $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$ e, desta forma, construir uma nova superfície M^*, deste mesmo tipo, satisfazendo $1+2\beta H^*+\gamma K^* = 0$. Portanto, usando o Teorema 1.2, podemos construir uma nova solução ψ^* da equação de sine-Gordon (2.1), onde $C_{\beta\gamma}$ é dada pela relações (2.2). Nosso objetivo, nesta seção é determinar esta função ψ^*.

Observação 2.7. Para uso no restante deste capítulo, vamos estabelecer as seguintes notações: Seja ψ uma solução da equação de sine-Gordon (2.1), onde β e γ são números reais tais que $\gamma - \beta^2 > 0$ e $C_{\beta\gamma}$ é a constante dada por (2.2). Escolhamos números reais $r_i > 0$, $0 < \phi_i, \rho_i \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \theta_i < \pi$ $(i = 1, 2)$ e $\theta_1 \neq \theta_2$ satisfazendo (1.24), (1.50) e (1.51) tais que

$$\beta = -\frac{r_i(cos\phi_i + cos\rho_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i}, \qquad \gamma = \frac{r_i^2 sen^2\rho_i}{sen^2\theta_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{2.33}$$

Consideremos os números reais β' e γ' dados por

$$\beta' = -\frac{r_i(cos\rho_i + cos\phi_i cos\theta_i)}{sen^2\theta_i}, \qquad \gamma' = \frac{r_i^2 sen^2\phi_i}{sen^2\theta_i}, \qquad i = 1, 2 \tag{2.34}$$

e observemos que

$$D = \gamma - \beta^2 = \gamma' - (\beta')^2. \qquad (2.35)$$

Finalmente, denotaremos por ψ_i $(i = 1, 2)$ soluções da equação de sine-Gordon (2.32), onde $C_{\beta'\gamma'}$ é a constante dada por (2.3), associadas a ψ por transformações de Bäcklund $BT(r_i, \theta_i, \phi_i, \rho_i)$.

Sejam $r_i, \theta_i, \phi_i, \rho_i$ $(i = 1, 2)$ números reais e ψ, ψ_1, ψ_2 funções como descrito na observação anterior. Nesta seção, vamos fornercer uma interpretação analítica do teorema de permutabilidade geométrico (Teorema 1.19) ou seja, vamos determinar uma nova solução ψ^* da equação de sine-Gordon (2.1), associada a ψ_1 por uma transformação de Bäcklund BT$(r_2, \theta_2, \rho_2, \phi_2)$ e a ψ_2 por BT$(r_1, \theta_1, \rho_1, \phi_1)$ (Veja Figura 2.1).

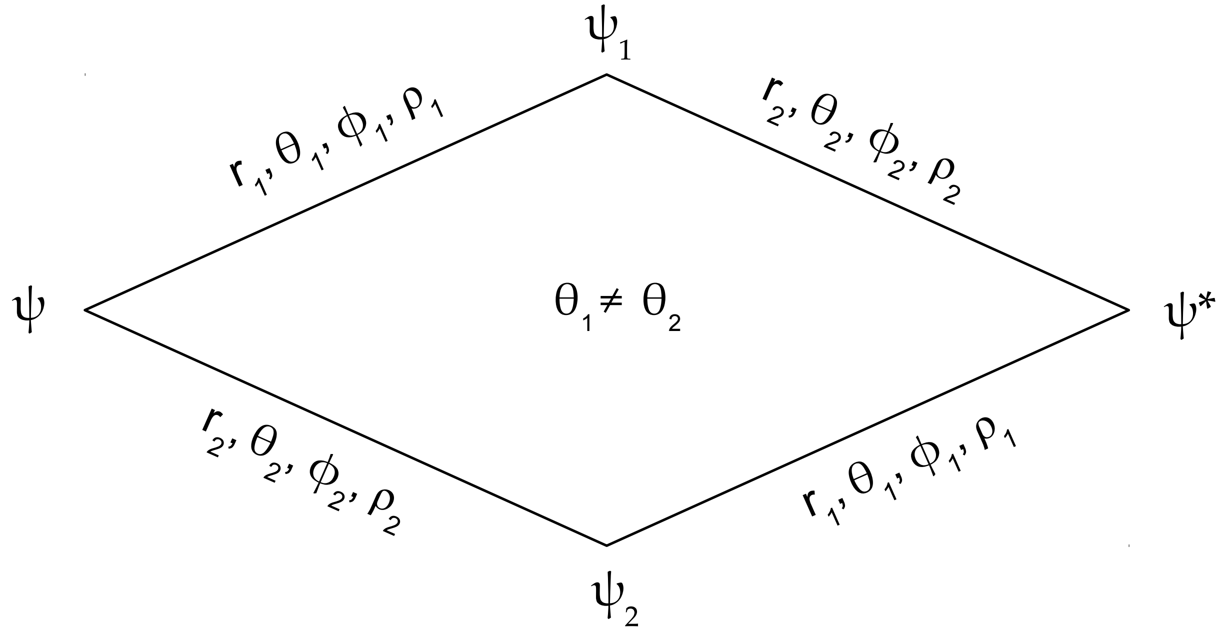

Figura 2.1: Interpretação Analítica do Teorema de Permutabilidade

Para determinarmos ψ^*, vamos estabelecer algumas notações e provar alguns lemas que serao importantes na demonstração do teorema de permutabilidade analítico (Teorema 2.11), onde mostraremos que ψ^* pode ser obtida algebricamente.

Consideremos, de modo análogo ao definido em (1.25), (1.23), (2.29) e (2.30), as constantes $b_{1i}, b_{2i}, b_{3i},\ c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i},\ S_{3i}, S_{4i}, S_{5i}, S_{6i}, S_{7i}, S_{8i}$. Além disto, para a boa definição de $b_{2i}(\ i = 1, 2)$, vamos supor ainda que

$$sen^2\theta_i - b_{1i} = sen^2\theta_i - \frac{(cos\rho_i + cos\phi_i cos\theta_i)^2}{sen^2\phi_i} > 0. \qquad (2.36)$$

Mais especificamente, estamos tomando para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} b_{1i} &= \frac{-(cos\rho_i + cos\phi_i cos\theta_i)}{sen\phi_i}, \\ b_{2i} &= -\sqrt{sen^2\theta_i - b_{1i}^2}, \\ b_{3i} &= \frac{b_{1i}cos\phi_i - sen\phi_i cos\theta_i}{sen\rho_i}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$c_{1i} = \frac{-b_{1i}}{r_i sen\phi_i b_{2i}}, \quad c_{2i} = \frac{-1}{r_i sen\phi_i}, \quad c_{3i} = \frac{b_{3i} sen\rho_i}{b_{2i} sen\phi_i}, \quad c_{4i} = \frac{cos\phi_i}{sen\phi_i}, \tag{2.38}$$

$$S_{3i} = c_{1i}\sqrt{\gamma} + c_{3i}S_1, \qquad S_{4i} = c_{2i}\sqrt{\gamma} + c_{4i}S_1, \tag{2.39}$$

$$S_{5i} = c_{3i}S_2, \qquad S_{6i} = c_{4i}S_2, \tag{2.40}$$

$$S_{7i} = -S_{3i}^2 - S_{4i}^2 + S_{5i}^2 + S_{6i}^2, \qquad S_{8i} = S_{3i}S_{5i} + S_{4i}S_{6i}; \tag{2.41}$$

onde

$$S_1 = \frac{-\beta}{\sqrt{\gamma}} \quad \text{e} \quad S_2 = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\gamma}}, \qquad \varepsilon_1^2 = 1, \tag{2.42}$$

sendo β, γ, D dados em (2.33) e (2.35).

Seja δ o número real definido por (1.40). Observemos das relações (1.50) e (1.51) que

$$\begin{aligned} b_{12} &= \delta b_{11}, \\ b_{22} &= \delta b_{21}, \\ b_{31} &= \frac{r_1 cos\phi_1 b_{11} - r_1 sen\phi_1 cos\theta_1}{r_1 sen\rho_1}, \\ b_{32} &= \frac{r_2 cos\phi_2 b_{11} - r_1 sen\phi_1 cos\theta_2}{r_1 sen\rho_1}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Como consequência destas relações e usando, novamente, (1.50) e (1.51) vamos obter

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{1}{\delta}c_{11}, \\ c_{22} &= \frac{1}{\delta}c_{21}, \\ c_{31} &= \frac{r_1 cos\phi_1 b_{11} - r_1 sen\phi_1 cos\theta_1}{r_1 sen\phi_1 b_{21}}, \\ c_{32} &= \frac{r_2 cos\phi_2 b_{11} - r_1 sen\phi_1 cos\theta_2}{\delta r_1 sen\phi_1 b_{21}}, \\ c_{41} &= \frac{r_1 cos\phi_1}{r_1 sen\phi_1}, \\ c_{42} &= \frac{r_2 cos\phi_2}{\delta r_1 sen\phi_1}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Observação 2.8. Consideremos $r_i > 0$, $0 < \phi_i$, $\rho_i < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta_i < \pi$ $(i = 1, 2)$, com $\theta_1 \neq \theta_2$, números reais satisfazendo (2.36), (1.50) e (1.51). Sejam b_{1i}, $i = 1, 2$, as constantes dadas em (2.37). Trocando ϕ por ρ na demonstração do Lema 1.17 vamos obter

$$r_i cos\rho_i = \frac{r_i cos\phi_i(cos\theta_i cos\theta_j - 1) + r_j cos\phi_j sen^2\theta_i}{cos\theta_i - cos\theta_j}, \qquad 1 \leq 1 \neq j \leq 2.$$

Portanto, usando a definição de b_{1i}, dada em (2.37), temos

$$r_i sen\phi_i b_{1i} = -r_i cos\rho_i - r_i cos\phi_i cos\theta_i = \frac{r_i cos\phi_i - r_j cos\phi_j}{cos\theta_i - cos\theta_j} sen^2\theta_i, \qquad 1 \leq 1 \neq j \leq 2. \tag{2.45}$$

Sejam ψ, ψ_1, ψ_2 funções como descrito na Observação 2.7. Considere $S_{3i}, S_{4i}, S_{5i}, S_{6i}, S_{7i}, S_{8i}$ as constantes dadas em (2.39)-(2.41). Defina os números reais

$$\begin{aligned} L_1 &= S_{31}S_{42} + S_{32}S_{41} + S_{51}S_{62} + S_{52}S_{61}, \\ L_2 &= S_{31}S_{32} - S_{41}S_{42} + S_{51}S_{52} - S_{61}S_{62}, \\ L_3 &= S_{31}S_{41} + S_{32}S_{42} + S_{51}S_{61} + S_{52}S_{62}, \\ L_4 &= S_{32}^2 - S_{62}^2 - S_{41}^2 + S_{51}^2 = S_{31}^2 - S_{61}^2 - S_{42}^2 + S_{52}^2, \\ L_5 &= -S_{31}S_{62} + S_{32}S_{61} - S_{41}S_{52} + S_{42}S_{51}, \\ L_6 &= -S_{31}S_{52} + S_{32}S_{51} + S_{41}S_{62} - S_{42}S_{61}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

sendo que a igualdade na constante L_4 é garantida pelo Lema 2.1 e pela definição de S_{7i}

dada (2.41). Consideremos também as funções

$$\begin{aligned}
m_1 &= S_{52}cos\tfrac{\psi_1}{2} - S_{62}sen\tfrac{\psi_1}{2} - S_{51}cos\tfrac{\psi_2}{2} + S_{61}sen\tfrac{\psi_2}{2},\\
m_2 &= S_{32}cos\tfrac{\psi_1}{2} - S_{42}sen\tfrac{\psi_1}{2} - S_{31}cos\tfrac{\psi_2}{2} + S_{41}sen\tfrac{\psi_2}{2},\\
m_3 &= S_{42}cos\tfrac{\psi_1}{2} + S_{32}sen\tfrac{\psi_1}{2} - S_{41}cos\tfrac{\psi_2}{2} - S_{31}sen\tfrac{\psi_2}{2},\\
m_4 &= -S_{62}cos\tfrac{\psi_1}{2} - S_{52}sen\tfrac{\psi_1}{2} + S_{61}cos\tfrac{\psi_2}{2} + S_{51}sen\tfrac{\psi_2}{2},\\
m_5 &= S_{51}cos\tfrac{\psi_1}{2} - S_{61}sen\tfrac{\psi_1}{2} - S_{52}cos\tfrac{\psi_2}{2} + S_{62}sen\tfrac{\psi_2}{2},\\
m_6 &= S_{31}cos\tfrac{\psi_1}{2} - S_{41}sen\tfrac{\psi_1}{2} - S_{32}cos\tfrac{\psi_2}{2} + S_{42}sen\tfrac{\psi_2}{2},\\
m_7 &= S_{41}cos\tfrac{\psi_1}{2} + S_{31}sen\tfrac{\psi_1}{2} - S_{42}cos\tfrac{\psi_2}{2} - S_{32}sen\tfrac{\psi_2}{2},\\
m_8 &= -S_{61}cos\tfrac{\psi_1}{2} - S_{51}sen\tfrac{\psi_1}{2} + S_{62}cos\tfrac{\psi_2}{2} + S_{52}sen\tfrac{\psi_2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

A partir destas funções, defina também

$$\begin{aligned}
\Gamma &= m_1m_4 - m_2m_3, & &\\
\triangle_1 &= m_4m_5 - m_2m_7, & \triangle_2 &= m_4m_6 - m_2m_8,\\
\triangle_3 &= m_1m_7 - m_3m_5, & \triangle_4 &= m_1m_8 - m_3m_5.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Lema 2.9. *Sejam ψ uma função e $r_i, \theta_i, \phi_i, \rho_i, \beta', \gamma'$ números reais como descrito na Observação 2.7. Então as constantes L_i, $(i = 1, \cdots, 6)$, definidas em (2.46), são dadas por*

$$\begin{aligned}
L_1 &= \left[\frac{cos\theta_1 cos\theta_2 - 1}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] senC_{\beta'\gamma'}, & L_2 &= \left[\frac{cos\theta_1 cos\theta_2 - 1}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] cosC_{\beta'\gamma'},\\
L_3 &= -senC_{\beta'\gamma'}, & L_4 &= -cosC_{\beta'\gamma'},\\
L_5 &= -\varepsilon_1 \left[\frac{cos\theta_1 - cos\theta_2}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] cosC_{\beta'\gamma'}, & L_6 &= \varepsilon_1 \left[\frac{cos\theta_1 - cos\theta_2}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] senC_{\beta'\gamma'},
\end{aligned}$$

onde $C_{\beta'\gamma'}$ é o número real dada por (2.3).

Demonstração: Substituindo (2.39) e (2.40) em (2.46) e usando (2.44) e (2.12), temos

$$L_1 \;=\; \frac{2}{\delta}c_{11}c_{21}\gamma + \sqrt{\gamma}S_1\left(c_{11}c_{42} + c_{21}c_{32} + \frac{1}{\delta}(c_{11}c_{41} + c_{21}c_{31})\right) + (c_{31}c_{42} + c_{32}c_{41}),$$

Usando (2.11) e definição de S_1, dada em (1.36), vamos obter

$$L_1 = \frac{2}{\delta}c_{11}c_{21}\gamma - \beta\left(c_{11}c_{42} + c_{21}c_{32} + \frac{1}{\delta}(c_{11}c_{41} + c_{21}c_{31})\right) + c_{31}c_{42} + c_{32}c_{41}.$$

De (2.38) e (2.44) temos

$$\begin{aligned}
c_{11}c_{21} &= \frac{b_{11}b_{21}}{r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2},\\
c_{11}c_{42} + c_{21}c_{32} &= \frac{-2r_2cos\phi_2 b_{11}b_{21} + r_1 sen\phi_1 b_{21}cos\theta_2}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2},\\
c_{11}c_{41} + c_{21}c_{31} &= \frac{-2r_1cos\phi_1 b_{11}b_{21} + r_1 sen\phi_1 b_{21}cos\theta_1}{r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2},\\
c_{31}c_{42} + c_{32}c_{41} &= \frac{2r_1cos\phi_1 r_2cos\phi_2 b_{11}b_{21} - r_1sen\phi_1 b_{21}(r_2cos\phi_2cos\theta_1 + r_1cos\phi_1cos\theta_2)}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão de L_1, dada em (2.46), temos

$$\begin{aligned}
\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2 L_1 &= b_{11}b_{21}(2\gamma + 2\beta r_2cos\phi_2 + 2\beta r_1 cos\phi_1 + 2r_1r_2cos\phi_1cos\phi_2)+\\
&\quad -r_1sen\phi_1 b_{21}\left[cos\theta_1(\beta + r_2cos\phi_2) + cos\theta_2(\beta + r_1cos\phi_1)\right]\\
&= b_{11}b_{21}(\gamma + 2\beta r_2cos\phi_2 + r_2^2cos^2\phi_2)+\\
&\quad +b_{11}b_{21}(\gamma + 2\beta r_1cos\phi_1 + r_1^2cos^2\phi_1)+\\
&\quad -b_{11}b_{21}(r_1cos\phi_1 - r_2cos\phi_2)^2+\\
&\quad -r_1sen\phi_1 b_{21}\left[cos\theta_1(\beta + r_2cos\phi_2) + cos\theta_2(\beta + r_1cos\phi_1)\right].
\end{aligned}$$

Usando as identidades (1.30), (1.31) e (2.45) segue que

$$\begin{aligned}
\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2 L_1 &= b_{11}b_{21}\left(\frac{r_2^2sen^2\phi_2}{sen^2\theta_2}(1 - b_{12}^2) + \frac{r_1^2sen^2\phi_1}{sen^2\theta_1}(1 - b_{11}^2)+\right.\\
&\quad \left.-\frac{r_1^2sen^2\phi_1}{sen^4\theta_1}(cos\theta_1 - cos\theta_2)^2 b_{11}^2\right)\\
&\quad -r_1sen\phi_1 b_{21}\left(\frac{r_2sen\phi_2}{sen^2\theta_2}b_{12} + \frac{r_1sen\phi_1}{sen^2\theta_1}b_{11}\right)cos\theta_1cos\theta_2.
\end{aligned}$$

Usando as relações (1.51), (1.40) e (2.43), podemos escrever

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{(2-\delta^2 b_{11}^2 - b_{11}^2)sen^2\theta_1 - (cos\theta_1 - cos\theta_2)^2 b_{11}^2 - 2cos\theta_1 cos\theta_2 sen^2\theta_1}{\delta b_{21}^2 sen^4\theta_1} b_{11}b_{21} \\ &= \frac{2sen^2\theta_1(1-cos\theta_1 cos\theta_2) - b_{11}^2((\delta^2+1)sen^2\theta_1 + (cos\theta_1 - cos\theta_2)^2)}{\delta b_{21}^2 sen^4\theta_1}. \end{aligned}$$

Usando novamente (1.40) e a definição de b_{21} dada em (2.37), vamos obter

$$L_1 = \frac{2(1-cos\theta_1 cos\theta_2)(sen^2\theta_1 - b_{11}^2)b_{11}b_{21}}{sen^3\theta_1 sen\theta_2 b_{21}^2} = \frac{2(1-cos\theta_1 cos\theta_2)b_{11}b_{21}}{sen^3\theta_1 sen\theta_2}.$$

Desta forma, de (2.7), podemos concluir que

$$L_1 = \left[\frac{cos\theta_1 cos\theta_2 - 1}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] senC_{\beta'\gamma'}.$$

De modo análogo ao anterior, observemos que

$$L_2 = \frac{1}{\delta}(c_{11}^2 - c_{21}^2)\gamma + \beta\left[-c_{11}\left(c_{32} + \frac{1}{\delta}c_{31}\right) + c_{21}\left(c_{42} + \frac{1}{\delta}c_{41}\right)\right] + c_{31}c_{32} - c_{41}c_{42}.$$

De (2.37) e (2.38) temos

$$\begin{aligned} c_{11}^2 - c_{21}^2 &= \frac{2b_{11}^2 - sen^2\theta_1}{r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}, \\ -c_{11}\left(c_{32} + \frac{1}{\delta}c_{31}\right) &= \frac{b_{11}^2(r_1 cos\phi_1 + r_2 cos\phi_2) - r_1 sen\phi_1 b_{11}(cos\theta_1 + cos\theta_2)}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}, \\ c_{21}\left(c_{42} + \frac{1}{\delta}c_{41}\right) &= \frac{(b_{11}^2 - sen^2\theta_1)(r_1 cos\phi_1 + r_2 cos\phi_2)}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}, \\ c_{31}c_{32} - c_{41}c_{42} &= \frac{r_1 cos\phi_1 r_2 cos\phi_2(2b_{11}^2 - sen^2\theta_1) + r_1^2 sen^2\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2} + \\ &\quad - \frac{r_1 sen\phi_1 b_{11}(r_1 cos\phi_1 cos\theta_2 + r_2 cos\phi_2 cos\theta_1)}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}. \end{aligned}$$

Substituindo, na expressão de L_2, dada em (2.46) temos

$$\begin{aligned} \delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2 L_2 &= (2b_{11}^2 - sen^2\theta_1)[\gamma + \beta(r_1 cos\phi_1 + r_2 cos\phi_2) + r_1 cos\phi_1 r_2 cos\phi_2] + \\ &\quad -r_1 sen\phi_1 b_{11}[cos\theta_1(\beta + r_2 cos\phi_2) + cos\theta_2(\beta + r_1 cos\phi_1)] + \\ &\quad + r_1^2 sen^2\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2 L_2 &= \tfrac{1}{2}(2b_{11}^2 - sen^2\theta_1)[\gamma + 2\beta r_1 cos\phi_1 + r_1^2 cos^2\phi_1] \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(2b_{11}^2 - sen^2\theta_1)[\gamma + 2\beta r_2 cos\phi_2 + r_2^2 cos^2\phi_2] \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(2b_{11}^2 - sen^2\theta_1)(r_1 cos\phi_1 - r_2 cos\phi_2)^2 \\
&\quad - r_1 sen\phi_1 b_{11}[cos\theta_1(\beta + r_2 cos\phi_2) + cos\theta_2(\beta + r_1 cos\phi_1)] \\
&\quad + r_1^2 sen^2\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2.
\end{aligned}$$

Usando as identidades(1.30), (1.31) e (2.45) segue que

$$\begin{aligned}
\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2 L_2 &= \tfrac{1}{2}(2b_{11}^2 - sen^2\theta_1)\left[\frac{r_1^2 sen^2\phi_1}{sen^2\theta_1}(1 - b_{11}^2) + \frac{r_2^2 sen^2\phi_2}{sen^2\theta_2}(1 - b_{12}^2)\right] + \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(2b_{11}^2 - sen^2\theta_1)\frac{r_1^2 sen^2\phi_1 b_{11}^2}{sen^4\theta_1}(cos\theta_1 - cos\theta_2)^2 \\
&\quad - r_1 sen\phi_1 b_{11}\left[\frac{r_2 sen\phi_2 cos\theta_1 cos\theta_2 b_{12}}{sen^2\theta_2} + \frac{r_1 sen\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2 b_{11}}{sen^2\theta_1}\right] + \\
&\quad + r_1^2 sen^2\phi_1 cos\theta_1 cos\theta_2.
\end{aligned}$$

Usando as relações (1.51), (1.40) e (2.43) e a definição de b_{21} dada em (2.37), podemos escrever

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{r_1^2 sen^2\phi_1}{sen^4\theta_1}(2b_{11}^2 - sen^2\theta_1)(sen^2\theta_1 - b_{11}^2(1 - cos\theta_1 cos\theta_2)) + \\
&\quad + \frac{r_1^2 sen^2\phi_1}{sen^4\theta_1} cos\theta_1 cos\theta_2 sen^2\theta_1(sen^2\theta_1 - b_{11}^2) \\
&= \frac{(sen^2\theta_1 - 2b_{11}^2)(sen^2\theta_1 - b_{11}^2)(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)}{\delta b_{21}^2 sen^4\theta_1} \\
&= \frac{(sen^2\theta_1 - 2b_{11}^2)(cos\theta_1 cos\theta_2 - 1)}{\delta sen^4\theta_1}.
\end{aligned}$$

Desta forma, usando (2.7) e a definição de δ dada em (1.40) temos

$$L_2 = \left[\frac{cos\theta_1 cos\theta_2 - 1}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] cosC_{\beta'\gamma'}.$$

Como consequência das relações (1.51), observemos que a constante $C_{\beta'\gamma'}$ dada por (2.3), com β', γ' dados por (2.34), independe da escolha de $i = 1, 2$. Desta forma, usando

(2.5) e (2.7) e o Lema 2.1, vamos obter

$$S_{3i}S_{4i} + S_{5i}S_{6i} = -\frac{senC_{\beta'\gamma'}}{2}, \qquad S_{3i}^2 - S_{4i}^2 + S_{5i}^2 - S_{6i}^2 = -cosC_{\beta'\gamma'}. \tag{2.49}$$

Pela definição de L_3 dada em (2.46), segue diretamente de (2.49) que

$$L_3 = -senC_{\beta'\gamma'}.$$

Usando (2.5) e (2.7) novamente, observemos ainda que

$$-S_{31}^2 - S_{41}^2 + S_{51}^2 + S_{61}^2 = cosC_{\beta\gamma} = -S_{32}^2 - S_{42}^2 + S_{52}^2 + S_{62}^2$$

e daí temos

$$S_{32}^2 - S_{62}^2 - S_{41}^2 + S_{51}^2 = S_{31}^2 - S_{61}^2 - S_{42}^2 + S_{52}^2.$$

Portanto, segue da definição de L_4 dada em (2.46) que

$$\begin{aligned} L_4 &= \tfrac{1}{2}\left[(S_{32}^2 - S_{62}^2 - S_{41}^2 + S_{51}^2) + (S_{31}^2 - S_{61}^2 - S_{42}^2 + S_{52}^2)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(S_{32}^2 - S_{42}^2 + S_{52}^2 - S_{62}^2) + (S_{31}^2 - S_{41}^2 + S_{51}^2 - S_{61}^2)\right] \end{aligned}$$

ou seja, de (2.49), concluimos que

$$L_4 = -cosC_{\beta'\gamma'}.$$

Usando, novamente, as relações (2.46), (2.39), (2.40), (2.44) e (2.42), podemos escrever

$$\begin{aligned} L_5 &= \sqrt{\gamma}S_2\left[-c_{11}c_{42} + \frac{1}{\delta}c_{11}c_{41} - c_{21}c_{32} + \frac{1}{\delta}c_{21}c_{31}\right] \\ &= \varepsilon_1\sqrt{D}\left[c_{11}\left(-c_{42} + \frac{1}{\delta}c_{41}\right) + c_{21}\left(-c_{32} + \frac{1}{\delta}c_{31}\right)\right]. \end{aligned}$$

De (2.38) temos

$$\begin{aligned} c_{11}\left(-c_{42} + \frac{1}{\delta}c_{41}\right) &= \frac{-b_{11}b_{21}(r_1cos\phi_1 - r_2cos\phi_2)}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}, \\ c_{21}\left(-c_{32} + \frac{1}{\delta}c_{31}\right) &= \frac{-b_{11}b_{21}(r_1cos\phi_1 - r_2cos\phi_2) + r_1sen\phi_1 b_{21}(cos\theta_1 - cos\theta_2)}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}. \end{aligned}$$

Daí temos

$$L_5 = \frac{\varepsilon_1\sqrt{D}[-2b_{11}b_{21}(r_1cos\phi_1 - r_2cos\phi_2) + r_1sen\phi_1 b_{21}(cos\theta_1 - cos\theta_2)]}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2}.$$

Usando (2.34), (2.37) e (2.45) temos

$$\beta' = \frac{r_1sen\phi_1}{sen^2\theta_1}b_{11} = \frac{r_1cos\phi_1 - r_2cos\phi_2}{cos\theta_1 - cos\theta_2}.$$

Usando a definição de D, dada em (2.35), os valores de β e γ, dados por (2.33) e o fato que b_{21}, definido por (2.37), é negativo então

$$r_1sen\phi_1 b_{21} = -\sqrt{D}sen^2\theta_1.$$

Portanto, usando (2.7) temos

$$L_5 = \frac{\varepsilon_1(cos\theta_1 - cos\theta_2)}{\delta\sqrt{D}sen^2\theta_1}\left[\frac{-2b_{11}b_{21}}{sen^2\theta_1}\beta' - \sqrt{D}\right] = \frac{\varepsilon_1(cos\theta_1 - cos\theta_2)}{\delta\sqrt{D}sen^2\theta_1}\left[\beta' senC_{\beta'\gamma'} - \sqrt{D}\right].$$

Usando (2.3) observe que

$$\beta' senC_{\beta'\gamma'} - \sqrt{D} \;\; = \;\; -\sqrt{D}\gamma'\left[\frac{\gamma' - 2(\beta')^2}{(\gamma')^2}\right] = -\sqrt{D}cosC_{\beta'\gamma'}.$$

De (1.40), temos

$$L_5 = -\varepsilon_1\left[\frac{cos\theta_1 - cos\theta_2}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] cosC_{\beta'\gamma'}.$$

Com os mesmos argumentos usados anteriormente para a construção de L_5 e usando (2.7) temos

$$\begin{aligned}
L_6 &= \varepsilon_1\sqrt{D}\left[c_{11}\left(-c_{32} + \frac{1}{\delta}c_{31}\right) - c_{21}\left(-c_{42} + \frac{1}{\delta}c_{41}\right)\right] \\
&= \frac{\varepsilon_1\sqrt{D}[(r_1cos\phi_1 - r_2cos\phi_2)(sen^2\theta_1 - 2b_{11}^2) + r_1sen\phi_1 b_{11}(cos\theta_1 - cos\theta_2)]}{\delta r_1^2 sen^2\phi_1 b_{21}^2} \\
&= \frac{\varepsilon_1(cos\theta_1 - cos\theta_2)}{\delta\sqrt{D}sen^2\theta_1}\left[\frac{sen^2\theta_1 - 2b_{11}^2}{sen^2\theta_1}\beta' + \beta'\right] \\
&= \frac{\varepsilon_1(cos\theta_1 - cos\theta_2)}{\delta\sqrt{D}sen^2\theta_1}\beta'(cosC_{\beta'\gamma'} + 1).
\end{aligned}$$

Novamente, usando (2.3) e (2.35) observe que

$$\beta'(cosC_{\beta'\gamma'}+1)=\frac{2\beta' D}{\gamma'}=\sqrt{D}senC_{\beta'\gamma'}.$$

De (1.40), temos

$$L_6=\varepsilon_1\left[\frac{cos\theta_1-cos\theta_2}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right]senC_{\beta'\gamma'}.$$

■

Lema 2.10. *Sejam ψ, ψ_1, ψ_2 as funções descritas na Observação 2.7. Consideremos também $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ as constantes definidas em (2.46) e $\Gamma, \triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$ as funções dadas em (2.48). Então*

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \left[L_1-L_3cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right]cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)+\left[L_2-L_4cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right]sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right),\\
\triangle_1 &= \left[L_3-L_1cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right]cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)+\left[L_4-L_2cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right]sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right), \quad (2.50)\\
\triangle_2 &= -L_5sen\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)+L_6sen\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Além disto, $\triangle_3=-\triangle_2$ e $\triangle_4=\triangle_1$.

Demonstração: Usando a definição de Γ, dada em (2.48), as funções $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4$, dadas em (2.47), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Gamma = &\left(sen^2\tfrac{\psi_1}{2}-cos^2\tfrac{\psi_1}{2}\right)(S_{52}S_{62}+S_{32}S_{42})+\left(sen^2\tfrac{\psi_2}{2}-cos^2\tfrac{\psi_2}{2}\right)(S_{51}S_{61}+S_{31}S_{41})+\\
&+sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_1}{2}(-S_{52}^2+S_{62}^2-S_{32}^2+S_{42}^2)+sen\tfrac{\psi_2}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2}(-S_{51}^2+S_{61}^2-S_{31}^2+S_{41}^2)+\\
&+sen\tfrac{\psi_1}{2}sen\tfrac{\psi_2}{2}(-S_{51}S_{62}-S_{52}S_{61}-S_{31}S_{42}-S_{41}S_{32})+\\
&+cos\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2}(S_{52}S_{61}+S_{51}S_{62}+S_{32}S_{41}+S_{31}S_{42})+\\
&+cos\tfrac{\psi_1}{2}sen\tfrac{\psi_2}{2}(S_{51}S_{52}-S_{61}S_{62}+S_{31}S_{32}-S_{41}S_{42})+\\
&+sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2}(-S_{61}S_{62}+S_{51}S_{52}-S_{41}S_{42}+S_{31}S_{32}).
\end{aligned}$$

Considerando as constantes $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$, dadas em (2.46), as relações dadas em (2.49) e (2.8), o Lema 2.9 e as identidades trigonométricas (2.18) e (2.19) vamos obter

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\frac{L_3}{2}(cos\psi_1 + cos\psi_2) - \frac{L_4}{2}(sen\psi_1 + sen\psi_2) + \\ &\quad + L_1\left(cos\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2} - sen\tfrac{\psi_1}{2}sen\tfrac{\psi_2}{2}\right) + L_2\left(sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2} + cos\tfrac{\psi_1}{2}sen\tfrac{\psi_2}{2}\right).\end{aligned}$$

Segue das relações (2.25) e (2.27) que

$$\Gamma = \left[L_1 - L_3 cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right] cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) + \left[L_2 - L_4 cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right).$$

Pela definição de Δ_1, dada em (2.48) e pelas funções $m_2,\ m_4,\ m_5,\ m_7$, dadas em (2.47), podemos escrever

$$\begin{aligned}\triangle_1 &= \left(sen^2\tfrac{\psi_1}{2} - cos^2\tfrac{\psi_2}{2}\right)(S_{52}S_{61} + S_{31}S_{42}) + \\ &\quad + \left(sen^2\tfrac{\psi_2}{2} - cos^2\tfrac{\psi_1}{2}\right)(S_{51}S_{62} + S_{32}S_{41}) + \\ &\quad + \left(sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_1}{2} + sen\tfrac{\psi_2}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2}\right)(-S_{31}S_{32} + S_{41}S_{42} - S_{51}S_{52} + S_{61}S_{62}) + \\ &\quad + \left(cos\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2} - sen\tfrac{\psi_1}{2}sen\tfrac{\psi_2}{2}\right)(S_{31}S_{41} + S_{32}S_{42} + S_{51}S_{61} + S_{52}S_{62}) + \\ &\quad + sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2}(S_{31}^2 - S_{42}^2 + S_{52}^2 - S_{61}^2) + \\ &\quad + sen\tfrac{\psi_2}{2}cos\tfrac{\psi_1}{2}(S_{32}^2 - S_{62}^2 - S_{41}^2 + S_{51}^2).\end{aligned}$$

Usando as constantes $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$, dadas em (2.46), as relações (2.49), o Lema 2.9 e as identidades trigonométricas (2.23) e (2.24) vamos obter

$$\begin{aligned}\triangle_1 &= -\frac{L_1}{2}(cos\psi_1 + cos\psi_2) - \frac{L_2}{2}(sen\psi_1 + sen\psi_2) + \\ &\quad L_3\left(cos\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2} - sen\tfrac{\psi_1}{2}sen\tfrac{\psi_2}{2}\right) + L_4\left(sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2} + cos\tfrac{\psi_1}{2}sen\tfrac{\psi_2}{2}\right).\end{aligned}$$

Segue, novamente, das relações (2.25) e (2.27) que

$$\triangle_1 = \left[L_3 - L_1 cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right] cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) + \left[L_4 - L_2 cos\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right).$$

Usando as constantes $L_5,\ L_6$ definidas em (2.46) e o Lema 2.9 vamos obter, com os mesmos argumentos anteriores, que

$$\begin{aligned}\triangle_2 &= \left(cos^2\tfrac{\psi_2}{2} - cos^2\tfrac{\psi_1}{2}\right)(S_{31}S_{62} - S_{32}S_{61}) + \left(sen^2\tfrac{\psi_2}{2} - sen^2\tfrac{\psi_1}{2}\right)(S_{42}S_{51} - S_{41}S_{52}) + \\ &\quad + \left(sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_1}{2} - sen\tfrac{\psi_2}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2}\right)(S_{41}S_{62} - S_{31}S_{52} + S_{32}S_{51} - S_{42}S_{61}) + \\ &\quad + \left(sen\tfrac{\psi_1}{2}cos\tfrac{\psi_2}{2} - sen\tfrac{\psi_2}{2}cos\tfrac{\psi_1}{2}\right)(-S_{31}S_{51} + S_{42}S_{62} + S_{32}S_{52} - S_{41}S_{61})\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\triangle_2 &= \frac{L_5}{2}(cos\psi_1 - cos\psi_2) + \frac{L_6}{2}(sen\psi_1 - sen\psi_2),\\ &= -L_5 sen\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) + L_6 sen\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right).\end{aligned}$$

De modo completamente análogo, vamos obter $\triangle_3 = -\triangle_2$ e $\triangle_4 = \triangle_1$. ■

Com o auxílio destes lemas, demonstraremos a interpretação analítica do teorema de permutabilidade para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.11. (Teorema de Permutabilidade Analítico) *Seja ψ uma solução da equação de sine-Gordon (2.1), onde $C_{\beta\gamma}$ é a constante real dada por (2.2) e os números β, γ são tais que $\gamma - \beta^2 > 0$. Consideremos números reais $r_i > 0, 0 < \phi_i, \rho_i \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 < \theta_i < \pi$ $(i = 1, 2)$ com $\theta_1 \neq \theta_2$, satisfazendo (1.24), (1.7), (1.50) e (1.51). Sejam ψ_1, ψ_2 soluções da equação (2.32), onde $C_{\beta'\gamma'}$ é a constante dada por (2.3) e β', γ' são dados por (1.8), associadas a ψ por $BT(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$ e $BT(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$, respectivamente. Então existe uma única solução ψ^* da equação de sine-Gordon (2.1) associadas a ψ_1 por $BT(r_2, \theta_2, \rho_2, \phi_2)$ e a ψ_2 por $BT(r_1, \theta_1, \rho_1, \phi_1)$. Além disto, ψ^* é dada algebricamente por*

$$tg\left(\frac{\psi^* - \psi}{4}\right) = \varepsilon_1 \frac{sen\left(\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)}{sen\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)} tg\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{4}\right), \qquad \varepsilon_1^2 = 1. \tag{2.51}$$

Demonstração: Por hipótese, ψ_1, ψ_2 estão associadas a ψ por uma transformação de Bäcklund BT$(r_1, \theta_1, \rho_1, \phi_1)$ e BT$(r_2, \theta_2, \rho_2, \phi_2)$, respectivamente. Então

$$\left\{\begin{aligned} \psi_{1,x_1} + \psi_{x_2} &= 2S_{31} cos\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_1}{2} - 2S_{41} cos\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_1}{2} + \\ &\quad +2S_{51} sen\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_1}{2} - 2S_{61} sen\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_1}{2},\\ \psi_{1,x_2} + \psi_{x_1} &= 2S_{31} sen\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_1}{2} + 2S_{41} sen\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_1}{2} + \\ &\quad -2S_{51} cos\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_1}{2} - 2S_{61} cos\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_1}{2}, \end{aligned}\right. \tag{2.52}$$

$$\left\{\begin{aligned} \psi_{2,x_1} + \psi_{x_2} &= 2S_{32} cos\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_2}{2} - 2S_{42} cos\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_2}{2} + \\ &\quad +2S_{52} sen\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_2}{2} - 2S_{62} sen\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_2}{2},\\ \psi_{2,x_2} + \psi_{x_1} &= 2S_{32} sen\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_2}{2} + 2S_{42} sen\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_2}{2} + \\ &\quad -2S_{52} cos\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi_2}{2} - 2S_{62} cos\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi_2}{2}, \end{aligned}\right. \tag{2.53}$$

onde $S_{3i}, S_{4i}, S_{5i}, S_{6i}$ são as constantes definidas por (2.39)-(2.41).

Queremos determinar a solução ψ^* da equação de sine-Gordon (2.1) associada a ψ_1 por $BT(r_2, \theta_2, \rho_2, \phi_2)$ e a ψ_2 por $BT(r_1, \theta_1, \rho_1, \phi_1)$. Para simplificar os cálculos vamos determinar, de modo equivalente, a função ψ^* de modo que ψ_1 (resp. ψ_2) esteja associada a ψ^* uma transformação de Bäcklund $BT(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$ (resp. $BT(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$). Além disto, podemos trocar ψ^* por $\psi^* + 2\pi$. Em resumo, queremos determinar uma função ψ^* que satisfaça às equações diferenciais abaixo.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi_{1,x_1} + \psi^*_{x_2} & = & -2S_{32}cos\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_1}{2} + 2S_{42}cos\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_1}{2} + \\ & & -2S_{52}sen\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_1}{2} + 2S_{62}sen\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_1}{2}, \\ \psi_{1,x_2} + \psi^*_{x_1} & = & -2S_{32}sen\frac{\psi *}{2}sen\frac{\psi_1}{2} - 2S_{42}sen\frac{\psi *}{2}cos\frac{\psi_1}{2} + \\ & & +2S_{52}cos\frac{\psi *}{2}sen\frac{\psi_1}{2} + 2S_{62}cos\frac{\psi *}{2}cos\frac{\psi_1}{2}, \end{array}\right. \tag{2.54}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi_{2,x_1} + \psi^*_{x_2} & = & -2S_{31}cos\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_2}{2} + 2S_{41}cos\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_2}{2} + \\ & & -2S_{51}sen\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_2}{2} + 2S_{61}sen\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_2}{2}, \\ \psi_{2,x_2} + \psi^*_{x_1} & = & -2S_{31}sen\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_2}{2} - 2S_{41}sen\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_2}{2} + \\ & & +2S_{51}cos\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_2}{2} + 2S_{61}cos\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_2}{2}. \end{array}\right. \tag{2.55}$$

Suponha que uma tal função ψ^* exista. Subtraindo a primeira equação de (2.54) (resp. 2.55) da primeira equação de (2.52) (resp. (2.53)) e dividindo por 2, obtemos duas expressões para

$$\frac{\psi^*_{x_2} - \psi_{x_2}}{2}.$$

Igualando os resultados obtidos, podemos concluir que ψ^* deve satisfazer a equação

$$-m_1 sen\frac{\psi *}{2} - m_2 cos\frac{\psi *}{2} = m_5 sen\frac{\psi}{2} + m_6 cos\frac{\psi}{2},$$

onde m_1, m_2, m_5, m_6 são dados em (2.47). Similarmente, subtraindo a segunda equação de (2.54) (resp. (2.55)) da segunda equação de (2.52) (resp. (2.53)) e dividindo por 2, obtemos duas expressões para

$$\frac{\psi^*_{x_1} - \psi_{x_1}}{2}.$$

Desta forma, ψ^* também deve satisfazer a equação

$$-m_3 sen\frac{\psi *}{2} - m_4 cos\frac{\psi *}{2} = m_7 sen\frac{\psi}{2} + m_8 cos\frac{\psi}{2},$$

onde m_3, m_4, m_7, m_8 são dados em (2.47). Em resumo, ψ^* é determinado pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ & \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sen\frac{\psi*}{2} \\ \\ cos\frac{\psi*}{2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_5 & m_6 \\ & \\ m_7 & m_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sen\frac{\psi}{2} \\ \\ cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}.$$

Considerando as funções $\Gamma, \triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$ dadas em (2.48) e usando o Lema 2.10, concluimos que a função ψ^* é dada por

$$\begin{bmatrix} sen\frac{\psi*}{2} \\ \\ cos\frac{\psi*}{2} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\Gamma} \begin{bmatrix} \triangle_1 & \triangle_2 \\ & \\ -\triangle_2 & \triangle_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sen\frac{\psi}{2} \\ \\ cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Observemos do Lema 2.9 que

$$L_1 \pm L_3 \;=\; \left[\frac{cos(\theta_1 \pm \theta_2) - 1}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] senC_{\beta'\gamma'} \quad \text{e} \quad L_2 \pm L_4 = \left[\frac{cos(\theta_1 \pm \theta_2) - 1}{sen\theta_1 sen\theta_2}\right] cosC_{\beta'\gamma'}.$$

Portanto, usando as expressões demonstradas no Lema 2.10 e as identidades trigonométicas (2.20) e (2.21) podemos reescrever

$$\begin{aligned}
&\Gamma \left[1 + tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\theta_1 sen\theta_2 = \\
&= \left[(L_1 - L_3) + (L_1 + L_3)tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) + \\
&\quad + \left[(L_2 - L_4) + (L_2 + L_4)tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) \\
&= \left[cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 + (cos(\theta_1 + \theta_2) - 1)\, tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) senC_{\beta'\gamma'} + \\
&\quad + \left[cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 + (cos(\theta_1 + \theta_2) - 1)\, tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) cosC_{\beta'\gamma'} \\
&= \left[cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 + (cos(\theta_1 + \theta_2) - 1)\, tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2} + C_{\beta'\gamma'}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\triangle_1 \left[1 + tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\theta_1 sen\theta_2 = \\
&= \left[-(L_1 - L_3) + (L_1 + L_3)tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) + \\
&\quad + \left[-(L_2 - L_4) + (L_2 + L_4)tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) \\
&= \left[-\left(cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\right) + (cos(\theta_1 + \theta_2) - 1)\, tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) senC_{\beta'\gamma'} + \\
&\quad + \left[-\left(cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\right) + (cos(\theta_1 + \theta_2) - 1)\, tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) cosC_{\beta'\gamma'} \\
&= \left[-\left(cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\right) + (cos(\theta_1 + \theta_2) - 1)\, tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right] sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2} + C_{\beta'\gamma'}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\triangle_2\left[1+tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)\right]sen\theta_1 sen\theta_2 = \\
&= 2L_6 tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) - 2L_5 tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) \\
&= 2\varepsilon_1(cos\theta_1 - cos\theta_2)tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)cos\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)senC_{\beta'\gamma'} + \\
&\quad +2\varepsilon_1(cos\theta_1 - cos\theta_2)tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)cosC_{\beta'\gamma'} \\
&= 2\varepsilon_1(cos\theta_1 - cos\theta_2)tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)sen\left(\tfrac{\psi_1+\psi_2}{2} + C_{\beta'\gamma'}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle_1}{\Gamma} &= \frac{-\left(cos(\theta_1-\theta_2)-1\right)+\left(cos(\theta_1+\theta_2)-1\right)tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{cos(\theta_1-\theta_2)-1+\left(cos(\theta_1+\theta_2)-1\right)tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}, \\
\frac{\triangle_2}{\Gamma} &= \frac{2\varepsilon_1\left(cos\theta_1-cos\theta_2\right)tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{cos(\theta_1-\theta_2)-1+\left(cos(\theta_1+\theta_2)-1\right)tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

Denotemos por

$$\eta = \frac{sen\left(\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)}{sen\left(\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)} \tag{2.57}$$

e observemos das relações trigonométricas (2.28) e (2.23) que

$$\frac{cos(\theta_1+\theta_2)-1}{cos(\theta_1-\theta_2)-1} = \eta^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{cos\theta_1-cos\theta_2}{cos(\theta_1-\theta_2)-1} = -\eta.$$

Donde

$$\frac{\triangle_1}{\Gamma} = -\left[\frac{1-\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right] \qquad \text{e} \qquad \frac{\triangle_2}{\Gamma} = \frac{-2\varepsilon_1\eta tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}.$$

Deste modo, segue de (2.56) que

$$\begin{aligned}
sen\frac{\psi^*}{2} &= \left[\frac{1-\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right]sen\frac{\psi}{2} + \left[\frac{2\varepsilon_1\eta tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right]cos\frac{\psi}{2}, \\
cos\frac{\psi^*}{2} &= -\left[\frac{2\varepsilon_1\eta tg\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right]sen\frac{\psi}{2} + \left[\frac{1-\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2 tg^2\left(\tfrac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right]cos\frac{\psi}{2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, escrevendo $\dfrac{\psi^*}{2} = \dfrac{\psi^*-\psi}{2} + \dfrac{\psi}{2}$ e usando as identidades trigonométricas

(2.15) e (2.16) temos

$$\begin{aligned} sen\frac{\psi^*}{2} &= \left[\frac{1-tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] sen\frac{\psi}{2} + \left[\frac{2tg\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] cos\frac{\psi}{2}, \\ cos\frac{\psi^*}{2} &= -\left[\frac{2tg\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] sen\frac{\psi}{2} + \left[\frac{1-tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] cos\frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma, queremos determinar a função ψ^* que satisfaça às equações

$$\left\{ \begin{array}{lll} \left[\frac{1-\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right] sen\frac{\psi}{2} & + & \left[\frac{2\varepsilon_1\eta tg\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right] cos\frac{\psi}{2} = \\ = \left[\frac{1-tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] sen\frac{\psi}{2} & + & \left[\frac{2tg\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] cos\frac{\psi}{2}, \\ & & \\ -\left[\frac{2\varepsilon_1\eta tg\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right] sen\frac{\psi}{2} & + & \left[\frac{1-\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}\right] cos\frac{\psi}{2} = \\ = -\left[\frac{2tg\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] sen\frac{\psi}{2} & + & \left[\frac{1-tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}\right] cos\frac{\psi}{2}. \end{array} \right.$$

Multiplicando a primeira equação por $cos\frac{\psi}{2}$ e subtraindo da segunda multiplicada por $sen\frac{\psi}{2}$, obtemos

$$\frac{tg\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)} = \frac{\varepsilon_1\eta tg\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}. \tag{2.58}$$

Por outro lado, multiplicando a primeira equação por $sen\frac{\psi}{2}$ e somando com a segunda multiplicada por $cos\frac{\psi}{2}$ temos

$$\frac{1-tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right)} = \frac{1-\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}{1+\eta^2tg^2\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right)}. \tag{2.59}$$

Observemos que a única solução que satisfaz simultaneamente as equações (2.58) e (2.59) é

$$tg\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right) = \varepsilon_1\eta tg\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right).$$

Usando (2.57) concluimos a demonstração do teorema. ∎

Capítulo

3

A Composição de Transformações de Bäcklund e a Transformação de Ribaucour para Superfícies Linear-Weingarten Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

Consideremos uma superfície linear-Weingarten hiperbólica em $\mathbb{R}^3$, cujas curvaturas Gaussiana K e média H satisfazem a relação $1+2\beta H+\gamma K=0$, onde β e γ são constantes reais. Suponha M parametrizada por linhas de curvaturas ortogonais como no Teorema 1.2. Podemos usar tanto a composição de transformações de Bäcklund (Teorema 1.19) quanto a transformação de Ribaucour (Teoremas 3.5 e 3.10) para construir famílias a 4-parâmetros de superfícies linear-Weingarten hiperbólicas com as mesmas constantes β e γ. Neste capítulo, vamos determinar uma condição necessária e suficiente para que as superfícies obtidas por estes dois métodos coincidam, a menos de movimento rígido de $\mathbb{R}^3$ (Teorema 3.13). Como consequência vamos, em particular, obter o seguinte resultado clássico: Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de cuvatura Gaussiana constante $K=-1$ e M^* é uma composição de duas transformações de Bäcklund com constantes distintas θ_1, θ_2 tais que $\theta_1+\theta_2=\pi$ então M^* é uma transformação de Ribaucour de M. Além disto, vamos verificar que em geral a composição de transformações de Bäcklund não é uma transformação de Ribaucour. Daremos um exemplo explícito considerando as transformações de Bäcklund e de Ribaucour da pseudoesfera.

3.1 Transformações de Ribaucour

Destacamos, a seguir, os principais conceitos e resultados da teoria de transformações de Ribaucour para superfícies em $\mathbb{R}^3$, em especial, as superfícies linear-Weingarten. Maiores detalhes e demonstrações podem ser encontrados em [7], [9] e [15].

Definição 3.1. ([7]), [9]) Seja M uma superfície orientável em $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos e denotemos por N a sua aplicação normal de Gauss. Dizemos que $\tilde{M}$ está associada a M por *uma transformação de Ribaucour* (veja Figura 3.1) se, e somente se, existe uma função diferenciável h definida em M e um difeomorfismo $l : M \longrightarrow \tilde{M}$ tal que

1. $p + h(p)N(p) = l(p) + h(p)\tilde{N}(l(p)), \quad \forall p \in M$, onde $\tilde{N}$ é a aplicação normal de $\tilde{M}$.
2. O subconjunto $p + h(p)N(p), \quad p \in M$ é uma superfície em R^3.
3. O difeomorfismo l preserva linhas de curvatura.

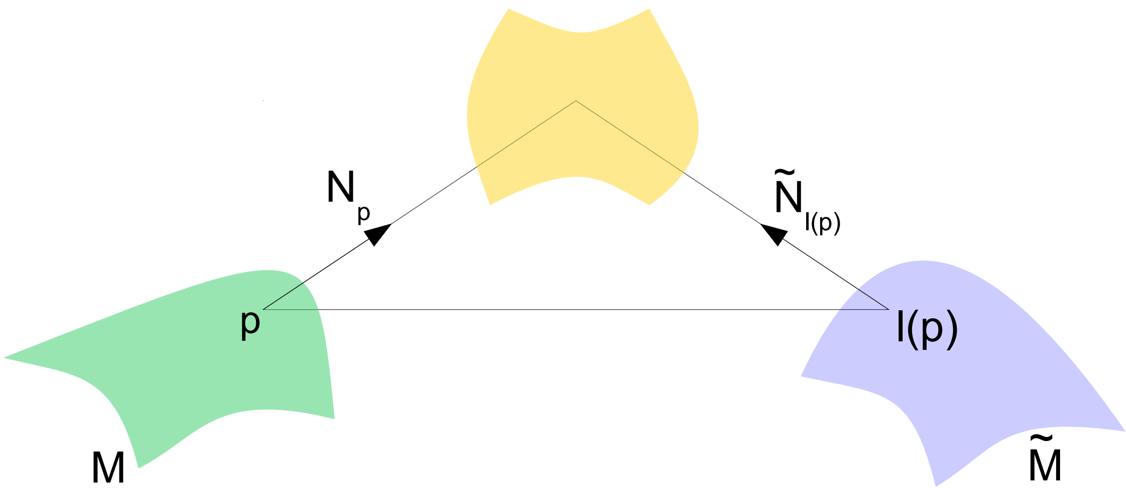

Figura 3.1: Transformação de Ribaucour

Dizemos que M e $\tilde{M}$ estão *localmente associadas por uma transformação de Ribaucour* se para todo $p \in M$ existe uma vizinhança de p em M que está associada por uma transformação de Ribaucour a um subconjunto aberto de $\tilde{M}$. Similarmente, definimos superfícies parametrizadas localmente associadas por uma transformação de Ribaucour.

O teorema abaixo caracteriza a transformação de Ribaucour em termos de uma equação diferencial que deve ser satisfeita pela função h da definição anterior.

Teorema 3.2. ([7]), [9]) *Seja M uma superfície orientável em $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos e N a sua aplicação de Gauss. Considere $\{e_i\}$ $(i = 1, 2)$ direções principais ortogonais e $-\lambda_i$ as curvaturas principais correspondentes, isto é, $dN(e_i) = \lambda_i e_i$. Uma superfície $\tilde{M}$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour se, e somente se, existem parametrizações $X : U \subset R^2 \to M$ e $\tilde{X} : U \subset R^2 \to \tilde{M}$ e uma função diferenciável $h : U \to R$ tal que $1 + h\lambda_i \neq 0$ e*

$$\tilde{X} = X + h(N - \tilde{N}),$$

onde $\tilde{N}$ é um campo vetorial unitário normal a $\tilde{M}$ dado por

$$\tilde{N} = \frac{1}{1+\triangle}\left[2\sum_{i=1}^{2} Z_i e_i + (\triangle - 1)N\right],$$

onde

$$Z_i = \frac{dh(e_i)}{1+h\lambda_i}, \qquad \triangle = \sum_{i=1}^{2} Z_i^2 \tag{3.1}$$

e h satisfaz a equação diferencial

$$dZ_j(e_i) + Z_i\omega_{ij}(e_i) - Z_i Z_j \lambda_i = 0, \qquad 1 \leq i \neq j \leq 2, \tag{3.2}$$

onde ω_{ij} são as formas de conexão do referencial $\{e_i\}$.

Observemos que a equação (3.2), dada no teorema anterior, é de 2^a ordem e não linear. A proposição abaixo, mostra como o problema de obtenção da função h pode ser linearizado.

Proposição 3.3. ([9]) *Se h é uma solução de (3.2) que não se anula em um domínio simplesmente conexo então $h = \dfrac{\Omega}{W}$, onde Ω e W são funções não nulas satisfazendo*

$$\begin{aligned} d\Omega_i(e_j) &= \Omega_j\omega_{ij}(e_j), i \neq j, \\ d\Omega &= \textstyle\sum_{i=1}^{2} \Omega_i\omega_i, \\ dW &= -\textstyle\sum_{i=1}^{2} \Omega_i\lambda_i\omega_i. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Reciprocamente, se Ω e W satisfazem (3.3) e $W(W + \Omega\lambda_i) \neq 0$ então $h = \dfrac{\Omega}{W}$ é solução de (3.2).

Portanto, o Teorema 3.2 pode ser escrito na seguinte forma

Teorema 3.4. ([9]) *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientavel, sem pontos umbílicos, parametrizada por $X : U \subset R^2 \to M$. Sejam e_i, $1 \leq i \leq 2$ direções principais ortogonais, $-\lambda_i$ as correspondentes curvaturas principais e N um campo normal unitário em M. Uma superfície $\tilde{M}$ está localmente associada a M por uma transformação de Ribaucour se, e somente se, existem funções diferenciáveis $W, \Omega, \Omega_i : V \subset U \to R$ satisfazendo (3.3) tal que $W(W + \Omega\lambda_i)(\Omega_i S - \Omega dS(e_i)) \neq 0, \forall i$ e $\tilde{X} : V \subset R^2 \to M$ é uma parametrização de $\tilde{M}$ dada por*

$$\tilde{X} = X - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i - WN\right), \tag{3.4}$$

onde

$$S = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2. \tag{3.5}$$

Além disto, a aplicação normal de $\tilde{X}$ é dada por

$$\tilde{N} = N + \frac{2W}{S}\left(\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i - WN\right) \tag{3.6}$$

e as curvaturas principais $-\tilde{\lambda}_i$ de $\tilde{X}$ são dadas por

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{dS(e_i)W + \Omega_i \lambda_i S}{\Omega_i S - \Omega dS(e_i)} \qquad \Omega_i \neq 0.$$

O teorema seguinte apresenta uma condição suficiente para que a transformação de Ribaucour de uma superfície linear-Weingarten satisfazendo $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$, seja uma outra superfície deste mesmo tipo, com as mesmas constantes α, β, γ. Denotaremos por C_R a constante da transformação de Ribaucour.

Teorema 3.5. ([9]) *Seja M uma superfície linear-Weingarten em $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos e seja $\tilde{M}$ associada a M por uma transformação de Ribaucour, tal que as retas normais em pontos correspondentes se instersectam a uma distância h. Suponha que $h = \dfrac{\Omega}{W}$ não é constante ao longo de linhas de curvatura e que as funções Ω_i, Ω e W satisfaçam a relação algébrica*

$$S = 2C_R(\alpha\Omega^2 + 2\beta\Omega W + \gamma W^2), \tag{3.7}$$

onde S é definida por (3.5) e α, β, γ, $C_R \neq 0$ são constantes reais. Então $\tilde{M}$ é uma superfície linear-Weingarten satisfazendo $\alpha + 2\beta\tilde{H} + \gamma\tilde{K} = 0$ se, e somente se, a relação $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$ é válida para M, onde H e K (resp. $\tilde{H}$ e $\tilde{K}$)são, respectivamente, as curvaturas média e Gaussiana de M (resp. $\tilde{M}$).

Observação 3.6. Sejam $Z_i, \quad i = 1,2$ as funções definidas por (3.1) e $W, \ \Omega_i, \quad i = 1,2$ as funções dadas em (3.3). Pode-se verificar que $Z_i = \dfrac{\Omega_i}{W}$ (veja por exemplo [9]). Desta forma, a equação (3.7) equivale a

$$Z_1^2 + Z_2^2 + 1 = 2C_R(\alpha h^2 + 2\beta h + \gamma), \tag{3.8}$$

onde h é solução de (3.2).

É natural perguntar se o sistema (3.3) com a condição adicional (3.7) é integrável. O seguinte teorema responde afirmativamente a esta questão.

Teorema 3.7. ([9]) *Seja M uma superfície linear-Weingarten de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$ e $H^2 - K > 0$. Então o sistema de equações diferenciais (3.3) juntamente com a condição adicional (3.7) é integrável e a solução está unicamente determinada em um domínio simplesmente conexo U por uma condição inicial dada em um ponto satisfazendo (3.7).*

Observação 3.8. Para demonstrar este teorema é suficiente mostrar que o seguinte sistema é integrável.

$$\begin{aligned} d\Omega &= \textstyle\sum_{i=1}^2 \Omega_i\omega_i, \\ dW &= \textstyle\sum_{i=1}^2 \Omega_i\omega_{i3}, \\ d\Omega_i &= \Omega_j\omega_{ij} + C_R(2\alpha\Omega + 2\beta W)\omega_i - [(1 - 2C_R\gamma)W - 2C_R\beta\Omega]\omega_{i3} \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observação 3.9. Em notação clássica, se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície linear-Weingarten satisfazendo $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$ e parametrizada por linhas de curvaturas ortogonais

$X(x_1, x_2)$ então o sistema de equações (3.9) pode ser escrito na forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} &= g_i \Omega_i, \\
\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{g_i}\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\Omega_j, \quad i \neq j, \\
\frac{\partial W}{\partial x_i} &= -\lambda_i g_i \Omega_i, \\
\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i} &= -\frac{1}{g_j}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\Omega_j + 2C_R(\alpha - \beta\lambda_i) g_i \Omega + \\
&\quad + [2C_R\beta + (1 - 2C_R\gamma)\lambda_i] g_i W, \quad i \neq j,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

com $i, j = 1, 2$, $g_i = |X_{x_i}|$, $-\lambda_i$ são as curvaturas principais de M e C_R é uma constante real não nula.

O resultado seguinte descreve, como consequência dos Teoremas 3.4 e 3.5, a família de superfícies linear-Weingarten associadas por transformação de Ribaucour, a uma superfície parametrizada, deste mesmo tipo, previamente fixada.

Teorema 3.10. ([9]) *Seja M uma superfície linear-Weingarten em $\mathbb{R}^3$, sem pontos umbílicos, satisfazendo a relação $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$ e localmente parametrizada por $X : U \subset R^2 \to M$. Toda superfície linear-Weingarten em $\mathbb{R}^3$, localmente associada a X, por uma transformação de Ribaucour como no teorema anterior é dada por*

$$
\tilde{X} = X - \frac{2\Omega}{S}\left(\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i - WN\right), \tag{3.11}
$$

onde e_i são direções principais ortogonais, Ω, Ω_i, W são soluções do sistema de equações diferenciais (3.9), satisfazendo a condição algébrica (3.7) e $\tilde{X}$ é uma superfície imersa definida sobre $\tilde{U} = \{(x_1, x_2) \in U; \quad T^2 + 2TQH + Q^2K \neq 0\}$, com $T = \alpha\Omega^2 - \gamma W^2$ e $Q = 2\gamma\Omega W + 2\beta\Omega^2$.

Para uso posterior, destacamos na observação seguinte a primeira forma fundamental de uma superfície linear-Weingarten $\tilde{X}$ satisfazendo $\alpha + 2\beta\tilde{H} + \gamma\tilde{K} = 0$, associada por uma transformação de Ribaucour a uma superfície X deste mesmo tipo satisfazendo $\alpha + 2\beta H + \gamma K = 0$.

Observação 3.11. ([15]) A primeira forma fundamental de $\tilde{X}$, definida no teorema anterior, é dada por $\tilde{I} = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2$ onde

$$\tilde{\omega}_i = \frac{(\gamma W^2 - \alpha\Omega^2) + (2\beta\Omega^2 + 2\gamma W\Omega)\lambda_i}{\alpha\Omega^2 + 2\beta\Omega W + \gamma W^2}\omega_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.12}$$

Similarmente, usando a notação $h = \dfrac{\Omega}{W}$, podemos reescrever

$$\tilde{\omega}_i = \frac{(\gamma - \alpha h^2) + (2\beta h^2 + 2\gamma h)\lambda_i}{\alpha h^2 + 2\beta h + \gamma}\omega_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.13}$$

3.2 Condições necessárias e suficientes para que a composição de transformações de Bäcklund seja uma transformação de Ribaucour

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície linear-Weingarten hiperbólica imersa em $\mathbb{R}^3$. Nosso principal objetivo, nesta seção, é determinar condições necessárias e suficientes para que as superfícies obtidas pela composição de transformações de Bäcklund e pela transformação de Ribaucour de M sejam congruentes.

Seja M uma superfície linear-Weingarten hiperbólica em $\mathbb{R}^3$ cujas curvaturas Gaussiana K e média H satisfazem a relação $1 + 2\beta H + \gamma K = 0$ e seja $X(x_1, x_2)$ uma parametrização de M como no Teorema 1.2, isto é, a primeira e segunda formas fundamentais de X são dadas por

$$I = g_1^2 dx_1^2 + g_2^2 dx_2^2 \qquad \text{e} \qquad II = -\lambda_1 g_1^2 dx_1^2 - \lambda_2 g_2^2 dx_2^2,$$

com

$$g_1 = \sqrt{\gamma} cos\frac{\psi}{2}, \qquad g_2 = \sqrt{\gamma} sen\frac{\psi}{2}, \tag{3.14}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\gamma}\left[-\beta + \varepsilon_1 \frac{g_2}{g_1}\sqrt{D}\right], \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{\gamma}\left[-\beta + \varepsilon_2 \frac{g_1}{g_2}\sqrt{D}\right], \tag{3.15}$$

onde ψ é uma solução da equação de sine-Gordon (2.1), sendo $C_{\beta\gamma}$ a constante real definida pelas relações (2.2).

Substituindo (3.14) em (3.15), vamos obter

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\gamma cos\frac{\psi}{2}}\left(\varepsilon_2\sqrt{D}sen\frac{\psi}{2}+\beta cos\frac{\psi}{2}\right),\\
\lambda_2 &= \frac{1}{\gamma sen\frac{\psi}{2}}\left(\beta sen\frac{\psi}{2}+\varepsilon_1\sqrt{D}cos\frac{\psi}{2}\right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Seja $\tilde{X}(x_1,x_2)$ uma superfície linear-Weingarten associada a X por uma transformação de Ribaucour satisfazendo $1+2\beta\tilde{H}+\gamma\tilde{K}=0$. Se as retas normais em pontos correspondentes se intesectam a uma distância $h(x_1,x_2)$ então a função h é uma solução das equações (3.2) e (3.8).

Segue de (3.13) que a primeira forma fundamental de $\tilde{X}$ é dada por $I=\tilde{g}_1^2dx_1^2+\tilde{g}_2^2dx_1^2$, onde

$$\tilde{g}_i=\frac{(\gamma-h^2)+2(\beta h^2+\gamma h)\lambda_i}{h^2+2\beta h+\gamma}g_i, \qquad i=1,2. \tag{3.17}$$

Usando (3.14) e (3.16), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= \frac{(\gamma-h^2)\gamma cos\frac{\psi}{2}+2(\beta h^2+\gamma h)(\varepsilon_2\sqrt{D}sen\frac{\psi}{2}+\beta cos\frac{\psi}{2})}{\sqrt{\gamma}(h^2+2\beta h+\gamma)}\\
&= \frac{2\varepsilon_2\sqrt{D}(\beta h^2+\gamma h)sen\frac{\psi}{2}+(-(\gamma-2\beta^2)h^2+2\beta\gamma h+\gamma^2)cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{\gamma}(h^2+2\beta h+\gamma)},\\
\\
\tilde{g}_2 &= \frac{(\gamma-h^2)\gamma sen\frac{\psi}{2}+2(\beta h^2+\gamma h)(\beta sen\frac{\psi}{2}+\varepsilon_1\sqrt{D}cos\frac{\psi}{2})}{\sqrt{\gamma}(h^2+2\beta h+\gamma)}\\
&= \frac{(-(\gamma-2\beta^2)h^2+2\beta\gamma h+\gamma^2)sen\frac{\psi}{2}+2\varepsilon_1\sqrt{D}(\beta h^2+\gamma h)cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{\gamma}(h^2+2\beta h+\gamma)}.
\end{aligned}$$

Definindo as constantes

$$A=\frac{\varepsilon_2\beta\sqrt{D}}{\gamma^2}, \qquad B=\frac{\gamma-2\beta^2}{\gamma^2}, \qquad \varepsilon_2^2=1, \tag{3.18}$$

onde $D=\gamma-\beta^2$, então os coeficientes da primeira forma fundamental de $\tilde{X}$ (em função de h) são dados por

$$\left\{\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= \sqrt{\gamma}\left[\frac{2A\gamma h^2+2\varepsilon_2\sqrt{D}h}{h^2+2\beta h+\gamma}sen\frac{\psi}{2}+\frac{-B\gamma h^2+2\beta h+\gamma}{h^2+2\beta h+\gamma}cos\frac{\psi}{2}\right],\\
\tilde{g}_2 &= \sqrt{\gamma}\left[\frac{-B\gamma h^2+2\beta h+\gamma}{h^2+2\beta h+\gamma}sen\frac{\psi}{2}-\frac{2A\gamma h^2+2\varepsilon_2\sqrt{D}h}{h^2+2\beta h+\gamma}cos\frac{\psi}{2}\right].
\end{aligned}\right. \tag{3.19}$$

Consideremos números reais $r_i > 0$, $0 < \theta_i < \pi$, $0 < \phi_i, \rho_i < \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2)$ com $\theta_1 \neq \theta_2$ satisfazendo (2.36), (2.33), (1.50) e (1.51). Seja $X^*(x_1, x_2)$ uma superfície linear-Weingarten hiperbólica satisfazendo $1 + 2\beta H^* + \gamma K^* = 0$ associada a X pela composição de transformações de Bäcklund $BT(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$ e $BT(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$, conforme teorema de permutabilidade geométrico (Teorema 1.19). Consideremos também ψ_1, ψ_2 soluções da equação de sine-Gordon (2.32), onde $C_{\beta'\gamma'}$ é a constante dada por (2.3) e β', γ' são dados por (2.34), associadas a ψ por $BT(r_1, \theta_1, \phi_1, \rho_1)$ e $BT(r_2, \theta_2, \phi_2, \rho_2)$, respectivamente. Seja ψ^* a função definida pela versão analítica do teorema de permutabilidade (Teorema 2.11), ou seja, ψ^* é obtida pela relação (2.51).

Portanto, a primeira forma fundamental de X^* é dada por $I^* = (g_1^*)^2 dx_1^2 + (g_2^*)^2 dx_2^2$, onde

$$g_1^* = -\sqrt{\gamma} cos\frac{\psi^*}{2}, \qquad g_2^* = -\sqrt{\gamma} sen\frac{\psi^*}{2}. \tag{3.20}$$

Seja η a constante dada em (2.57). Defina

$$\varphi = \varepsilon_1 \eta tg\frac{\psi_1 - \psi_2}{4}. \tag{3.21}$$

Seguem das relações trigonométricas (2.20) e (2.21) e do Teorema 2.11 (Teorema de permutabilidade analítico) que

$$\begin{aligned} cos\frac{\psi^*}{2} &= \frac{-2\varphi}{1+\varphi^2} sen\frac{\psi}{2} + \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2} cos\frac{\psi}{2}, \\ sen\frac{\psi^*}{2} &= \frac{1-\varphi^2}{1+\varphi^2} sen\frac{\psi}{2} + \frac{2\varphi}{1+\varphi^2} cos\frac{\psi}{2}. \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\left\{ \begin{aligned} g_1^* &= \sqrt{\gamma}\left[\frac{2\varphi}{1+\varphi^2} sen\frac{\psi}{2} + \frac{-1+\varphi^2}{1+\varphi^2} cos\frac{\psi}{2}\right], \\ g_2^* &= \sqrt{\gamma}\left[\frac{-1+\varphi^2}{1+\varphi^2} sen\frac{\psi}{2} - \frac{2\varphi}{1+\varphi^2} cos\frac{\psi}{2}\right]. \end{aligned} \right. \tag{3.22}$$

Lema 3.12. *Seja ψ uma solução da equação de sine-Gordon (2.1), onde $C_{\beta\gamma}$ é a constante real dada por (2.2) e os números β, γ são tais que $\gamma - \beta^2 > 0$. Consideremos números reais $r_i > 0, 0 < \phi_i, \rho_i \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 < \theta_i < \pi$ $(i = 1, 2)$ com $\theta_1 \neq \theta_2$ satisfazendo (1.24), (1.7), (1.50) e (1.51). Sejam ψ_1, ψ_2 soluções da equação de sine-Gordon (2.32), onde $C_{\beta'\gamma'}$ é a constante dada por (2.3) e β', γ' são dados por (2.34), associadas a ψ por*

$BT(r_1,\theta_1,\phi_1,\rho_1)$ e $BT(r_2,\theta_2,\phi_2,\rho_2)$, respectivamente. Defina a função

$$\Lambda = \frac{\varphi cos\frac{\psi}{2} + sen\frac{\psi}{2}}{cos\frac{\psi}{2} - \varphi sen\frac{\psi}{2}}, \tag{3.23}$$

onde φ é dada por (3.21). Sejam $\tilde{g}_i$ e g_i^*, $i=1,2$, as funções definidas por (3.19) e (3.22), respectivamente. Então

1) $\tilde{g}_1 = g_1^*$ se, e somente se, $h = \dfrac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi}$ ou $h = \dfrac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda}$,

2) $\tilde{g}_1 = -g_1^*$ se, e somente se, $h = \dfrac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi^{-1}}$ ou $h = \dfrac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda^{-1}}$,

3) $\tilde{g}_2 = g_2^*$ se, e somente se, $h = \dfrac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi}$ ou $h = \dfrac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda^{-1}}$,

4) $\tilde{g}_2 = -g_2^*$ se, e somente se, $h = \dfrac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi^{-1}}$ ou $h = \dfrac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda}$,

onde $D = \gamma - \beta^2$.

Demonstração: Observe que cada relação $\tilde{g}_i = \sigma_i g_i^*$ ($\sigma_i^2 = 1$) pode ser vista como uma equação do 2^o grau de h em função de φ. Desta forma, é suficiente mostrar que as duas funções apresentadas em cada item são soluções da equação correspondente. Analisemos quatro situações.

(I) Suponhamos $h = \dfrac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi}$.

Considerando as constantes A e B definidas por (3.18), observemos que

$$\begin{aligned}
-B\gamma h^2 + 2\beta h + \gamma &= \frac{\gamma(-B\gamma^2 - \beta^2 + D\varphi^2)}{(\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi)^2} = \frac{-\gamma D(1-\varphi^2)}{(\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi)^2},\\
2A\gamma h^2 + 2\varepsilon_2\sqrt{D}h &= \frac{2A\gamma^2 - 2\varepsilon_2\beta\sqrt{D} - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 D\varphi}{(\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi)^2} = \frac{2\gamma D\varphi}{(\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi)^2},\\
h^2 + 2\beta h + \gamma &= \frac{\gamma(\gamma - \beta^2 + D\varphi^2)}{(\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi)^2} = \frac{\gamma D(1+\varphi^2)}{(\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi)^2},
\end{aligned}$$

onde $D = \gamma - \beta^2$. Portanto, substituindo em (3.19) e comparando com (3.22), obtemos $\tilde{g}_1 = g_1^*$ e $\tilde{g}_2 = g_2^*$.

(II) Suponhamos, agora, $h = \dfrac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi^{-1}}$.

Trocando φ por $-\varphi^{-1}$ nos cálculos anteriores e usando as equações (3.19) e (3.22) podemos concluir que $\tilde{g}_1 = -g_1^*$ e $\tilde{g}_2 = -g_2^*$.

(III) Suponhamos $h = \dfrac{-\gamma}{\beta - \varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda}$.

Trocando φ por $-\Lambda$ no caso (I), vamos obter

$$\begin{aligned}
-B\gamma h^2 + 2\beta h + \gamma &= \frac{-\gamma D(1-\Lambda^2)}{(\beta - \varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda)^2},\\
2A\gamma h^2 + 2\varepsilon_2\sqrt{D}h &= \frac{-2\gamma D\Lambda}{(\beta - \varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda)^2},\\
h^2 + 2\beta h + \gamma &= \frac{\gamma D(1+\Lambda^2)}{(\beta - \varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda)^2},
\end{aligned}$$

onde $D = \gamma - \beta^2$. De (3.19) segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= \sqrt{\gamma}\left[\left(\frac{-2\Lambda}{1+\Lambda^2}\right) sen\tfrac{\psi}{2} - \left(\frac{1-\Lambda^2}{1+\Lambda^2}\right) cos\tfrac{\psi}{2}\right],\\
\tilde{g}_2 &= \sqrt{\gamma}\left[-\left(\frac{1-\Lambda^2}{1+\Lambda^2}\right) sen\tfrac{\psi}{2} + \left(\frac{2\Lambda}{1+\Lambda^2}\right) cos\tfrac{\psi}{2}\right].
\end{aligned}$$

Usando a função Λ, definida por (3.23), observemos que

$$\begin{aligned}
1+\Lambda^2 &= \frac{1+\varphi^2}{(cos\frac{\psi}{2} - \varphi sen\frac{\psi}{2})^2},\\
1-\Lambda^2 &= \frac{(1-\varphi^2)cos\psi - 2\varphi sen\psi}{(cos\frac{\psi}{2} - \varphi sen\frac{\psi}{2})^2},\\
2\Lambda &= \frac{2\varphi cos\psi + (1-\varphi^2)sen\psi}{(cos\frac{\psi}{2} - \varphi sen\frac{\psi}{2})^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo nas expressões de $\tilde{g}_1$ e $\tilde{g}_2$, dadas anteriormentente e usando as identidades trigonométricas (2.15) e (2.16) vamos obter, de (3.22), que $\tilde{g}_1 = g_1^*$ e $\tilde{g}_2 = -g_2^*$.

(IV) Suponhamos, finalmente, $h = \dfrac{-\gamma}{\beta + \varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda^{-1}}$.

Trocando Λ por $-\Lambda^{-1}$ nos cálculos anteriores vamos obter, de modo inteiramente análogo, que $\tilde{g}_1 = -g_1^*$ e $\tilde{g}_2 = g_2^*$.

Portanto, comparando (I) e (III) obtemos o primeiro item do lema. Considerando (II) e (IV) temos o segundo. O terceiro item é obtido de (I) e (IV). Finalmente de (II) e (III) concluimos o último item e a demonstração do resultado. ∎

O próximo teorema estabelece as condições necessárias e suficientes para que a composição de transformações de Bäcklund e a transformação de Ribaucour de uma superfície linear-Weingarten hiperbólica imersa em $\mathbb{R}^3$, coincidam a menos de movimento rígido de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.13. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície linear-Weingarten hiperbólica satisfazendo $1+2\beta H+\gamma K=0$ e parametrizada por $X(x_1,x_2)$ conforme descrito no Teorema 1.2, isto é, a primeira e segunda formas fundamentais de X são determinadas por uma solução ψ da equação de sine-Gordon (2.1). Escolha números reais $r_i > 0$, $0 < \phi_i$, $\rho_i \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 < \theta_i < \pi$ $(i = 1,2)$, com $\theta_1 \neq \theta_2$, satisfazendo (1.7), (1.24), (1.50) e (1.51). Considere ψ_i, $i = 1,2$, soluções da equação de sine-Gordon (2.32) associadas, a ψ por uma transformação de Bäcklund $BT(r_i,\theta_i,\phi_i,\rho_i)$. Seja $X^*(x_1,x_2)$ uma superfície linear-Weingarten hiperbólica satisfazendo $1+2\beta H^*+\gamma K^*=0$, associada a X por composição de transformações de Bäcklund $BT(r_1,\theta_1,\phi_1,\rho_1)$ e $BT(r_2,\theta_2,\phi_2,\rho_2)$. Consideremos também uma superfície linear-Weingarten $\tilde{X}$ satisfazendo $1+2\beta\tilde{H}+\gamma\tilde{K}=0$, associada a X por uma transformação de Ribaucour tal que a as retas normais a X e a $\tilde{X}$ em pontos correspondentes se intersectam a uma distância $h(x_1,x_2)$. Então $\tilde{X}$ e X^* são congruentes se, e somente se, h é uma das seguinte funções*

$$\frac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi}, \quad \frac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi^{-1}}, \quad \frac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda}, \quad \frac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda^{-1}}, \tag{3.24}$$

onde φ e Λ são dadas por (3.21) e (3.23), respectivamente e $D=\gamma-\beta^2$.

Demonstração: As formas fundamentais de X^* são determinadas pela função ψ^*, definida pela relação (2.51). Usando o Teorema 1.2 observemos que a primeira forma de uma superfície linear-Weingarten determina a segunda forma desta superfície. Portanto, considerando as equações (3.19) e (3.22) concluimos que $\tilde{X}$ e X^* são congruentes se, e somente se, $\tilde{g}_1 = \pm g_1^*$ e $\tilde{g}_2 = \pm g_2^*$. Usando o lema anterior, temos

$$\tilde{g}_1 = g_1^* \text{ e } \tilde{g}_2 = g_2^* \text{ se, e somente se, } h = \frac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi},$$

$$\tilde{g}_1 = -g_1^* \text{ e } \tilde{g}_2 = -g_2^* \text{ se, e somente se, } h = \frac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\varphi^{-1}},$$

$$\tilde{g}_1 = g_1^* \text{ e } \tilde{g}_2 = -g_2^* \text{ se, e somente se, } h = \frac{-\gamma}{\beta-\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda},$$

$$\tilde{g}_1 = -g_1^* \text{ e } \tilde{g}_2 = g_2^* \text{ se, e somente se, } h = \frac{-\gamma}{\beta+\varepsilon_1\sqrt{D}\Lambda^{-1}}.$$

Portanto, h deve ser uma das funções dadas em (3.24). ∎

Observação 3.14. Sejam M e M' superfícies linear-Weingarten hiperbólicas imersas em $\mathbb{R}^3$ que se relacionam por uma transformação de Bäcklund $BT(r, \theta, \phi, \rho)$. Os teoremas geométricos da teoria de transformações de Bäcklund para tais superfícies, demonstrados no Capítulo 1, se reduzem aos teoremas clássicos da teoria de transformação de Bäcklund para superfícies em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante negativa quando consideramos $\phi = \rho = \dfrac{\pi}{2}$. Neste caso, a equação (1.22) nos permite concluir que uma vez escolhida a constante θ, então o valor de r fica determinado. Por este motivo, vamos manter a notação clássica e denotar a transformação de Bäcklund entre superfícies de curvatura constante negativa imersas em $\mathbb{R}^3$ por $BT(\theta)$.

Observação 3.15. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de curvatura Gaussiana constante negativa que, sem perda de generalidade, vamos supor $K = -1$. Consideremos uma parametrização local $X(x_1, x_2)$ em M e uma solução $\psi(x_1, x_2)$ da equação de sine-Gordon

$$\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen\psi, \tag{3.25}$$

de modo que os coeficientes da primeira forma fundamental de X sejam dados por

$$g_1 = cos\frac{\psi}{2}, \qquad g_2 = sen\frac{\psi}{2} \tag{3.26}$$

e as curvaturas principais $-\lambda_i$ são dados por

$$\lambda_1 = \frac{-sen\frac{\psi}{2}}{cos\frac{\psi}{2}}, \qquad \lambda_2 = \frac{cos\frac{\psi}{2}}{sen\frac{\psi}{2}}. \tag{3.27}$$

Portanto, do Teorema 1.2, obtemos $\varepsilon_1 = 1$. Observe que considerando $\phi = \rho = \frac{\pi}{2}$ no sistema (1.37), então ψ' está asssociada a ψ por uma transformação de Bäcklund $BT(\theta)$ se, e somente se, ψ' é solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi'_{x_1} + \psi_{x_2} & = & 2csc\theta cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2} + 2cot\theta sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2}, \\ \psi'_{x_2} + \psi_{x_1} & = & -2csc\theta sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi'}{2} - 2cot\theta cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi'}{2}, \end{array}\right. \tag{3.28}$$

que coincide com a transformação de Bäcklund da teoria clássica, como pode ser visto em [19] . Como consequência do Teorema 3.13 segue o seguinte

Corolário 3.16. *Seja $M \subset R^3$ uma superfície de curvatura $K = -1$ e seja $X(x_1, x_2)$ uma parametrização local de M, por linhas de curvaturas ortogonais. Considere ψ uma solução da equação de sine-Gordon (3.25) de modo que os coeficientes da primeira forma fundamental g_1, g_2 e as curvaturas princiapis $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ de X são dados por (3.26) e (3.27), respectivamente. Sejam ψ_i $(i = 1, 2)$ soluções equação de sine-Gordon (3.25) associadas a ψ por $BT(\theta_i)$, onde $0 < \theta_1 \neq \theta_2 < \pi$. Consideremos também um superfície X^* de curvatura constante $K = -1$, obtida de X pela composição de transformações de Bäcklund $BT(\theta_1)$ e $BT(\theta_2)$. Seja $\tilde{X}$ uma superfície de curvatura $K = -1$, associada a X por uma transformação de Ribaucour tal que a as retas normais a X e a $\tilde{X}$ em pontos correspondentes se intersectam a uma distância $h(x_1, x_2)$. Então $\tilde{X}$ e X^* são congruentes, e somente se, h é das seguintes funções*

$$-\frac{1}{\varphi}, \qquad \varphi, \qquad -\Lambda, \qquad ou \qquad \frac{1}{\Lambda},$$

onde $\varphi = \dfrac{sen\left(\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)}{sen\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)} tg\left(\dfrac{\psi_1 - \psi_2}{4}\right)$ *e* $\Lambda = \dfrac{\varphi cos\frac{\psi}{2} + sen\frac{\psi}{2}}{cos\frac{\psi}{2} - \varphi sen\frac{\psi}{2}}$.

Demonstração: Basta considerar $\beta = 0$ e $\gamma = 1$ (daí $D = 1$) na demonstração do teorema anterior e observar que a parametrização estabelecida na Observação 3.15 garante $\varepsilon_1 = 1$ no Teorema 1.2. ∎

A seguir, apresentaremos uma situação clássica em que a composição de transformações de Bäcklund é equivalente a uma transformação de Ribaucour para superfícies com curvatura Gaussiana constante $K = -1$. Como consequência deste último corolário, o próximo resultado mostra que isto ocorre quando $\theta_1 + \theta_2 = \pi$.

Corolário 3.17. *Seja $M \subset R^3$ uma superfície de curvatura constante $K = -1$, parametrizada por $X(x_1, x_2)$ como descrito no corolário anterior. Considere $0 < \theta_1,\ \theta_2 < \pi$ números reais distintos tais que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Então a composição das transformações de Bäcklund $BT(\theta_1)$ e $BT(\theta_2)$ de X é uma transformação de Ribaucour de X, com constante de Ribaucour dada por $C_R = \dfrac{csc^2\theta_1}{2}$.*

Demonstração: Considere ψ a solução da equação de sine-Gordon $\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen\psi$ de modo que os coeficientes da primeira forma fundamental de X sejam dados por

$$g_1 = cos\frac{\psi}{2}, \qquad g_2 = cos\frac{\psi}{2}$$

e as curvaturas principais $-\lambda_i, i=1,2$ por

$$\lambda_1 = \frac{-g_2}{g_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{g_1}{g_2}.$$

Considere também ψ_i $(i=1,2)$, solução da mesma equação de sine-Goron, associada a ψ por uma transformação de Bäcklund $BT(\theta_i)$. Seja φ a função dada por (3.21). Como $\theta_1+\theta_2=\pi$ então

$$\varphi = \frac{1}{cos\theta_1} tg\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{4}\right).$$

Mostremos que

$$h = \frac{-1}{\varphi} = -cos\theta_1 cotg\frac{\psi_1-\psi_2}{4}$$

é solução das equações (3.2) e (3.8).

Seja ψ^* a solução da mesma equação de sine-Gordon associada a ψ_1 (resp. ψ_2) por uma transformação de Bäcklund $BT(\theta_2)$ (resp. $BT(\theta_1)$), cuja existência é garantida pelo teorema de permutabilidade geométrico (Teorema 1.19). Logo,

$$h = -cot\left(\frac{\psi^*-\psi}{4}\right).$$

Sejam $Z_i,\ i=1,2$ as funções definidas em (3.1). Denotando

$$Y_1 = g_1 - g_2 h \qquad \text{e} \qquad Y_2 = g_2 + g_1 h,$$

observemos que

$$Z_i = \frac{h_{x_i}}{Y_i}, \quad i=1,2. \tag{3.29}$$

e que equação de Ribaucour (3.2) é equivalente à equação

$$2Y_1Y_2h_{x_1x_2} - Y_1^2\psi_{x_1}h_{x_2} + Y_2^2\psi_{x_2}h_{x_1} + 2(g_2Y_2 - g_1Y_1)h_{x_1}h_{x_2} = 0. \tag{3.30}$$

Consideremos a seguinte notação

$$P = cos\frac{\psi^*-\psi}{2}, \quad Q = sen\frac{\psi^*-\psi}{2}, \quad R = cos\frac{\psi^*+\psi}{2}, \quad S = sen\frac{\psi^*+\psi}{2}, \tag{3.31}$$

$$f = \frac{\psi^*-\psi}{2}. \tag{3.32}$$

Neste caso, segue de (2.22) que

$$h = -cotg\frac{\psi^* - \psi}{4} = \frac{Q}{P-1}. \tag{3.33}$$

Donde,

$$h_{x_1} = \frac{-f_{x_1}}{P-1}, \qquad h_{x_2} = \frac{-f_{x_2}}{P-1}, \qquad h_{x_1x_2} = \frac{-f_{x_1x_2}}{P-1} - \frac{Qf_{x_1}f_{x_2}}{(P-1)^2}. \tag{3.34}$$

Podemos mostrar ainda que

$$Y_1Y_2 = \frac{S}{P-1}, \qquad Y_1^2 = \frac{-1+R}{P-1}, \qquad Y_2^2 = \frac{-1-R}{P-1}, \qquad g_2Y_2 - g_1Y_1 = \frac{cos\psi - R}{P-1}. \tag{3.35}$$

Substituindo em (3.30), vamos obter que a equação de Ribaucour (3.2) equivale a

$$2Sf_{x_1x_2} + (1-R)f_{x_2}\psi_{x_1} - (1+R)f_{x_1}\psi_{x_2} - 2Rf_{x_1}f_{x_2} = 0. \tag{3.36}$$

Por hipótese, ψ_1 e ψ_2 estão relacionados a ψ por $BT(\theta_1)$ e $BT(\theta_2)$, respectivamente. Do mesmo modo, ψ^* está relacionada a ψ_1 e ψ_2 por $BT(\theta_2)$ e $BT(\theta_1)$, respectivamente. Segue da equação (3.28) que

$$\begin{aligned}
\psi_{x_1} + \psi_{1,x_2} &= -2csc\theta_1 sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi_1}{2} - 2cot\theta_1 cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi_1}{2}, && (3.37)\\
\psi_{x_2} + \psi_{1,x_1} &= 2csc\theta_1 cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi_1}{2} + 2cot\theta_1 sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi_1}{2}, && (3.38)\\
\psi_{x_1} + \psi_{2,x_2} &= -2csc\theta_2 sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi_2}{2} - 2cot\theta_2 cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi_2}{2}, && (3.39)\\
\psi_{x_2} + \psi_{2,x_1} &= 2csc\theta_2 cos\frac{\psi}{2}sen\frac{\psi_2}{2} + 2cot\theta_2 sen\frac{\psi}{2}cos\frac{\psi_2}{2}, && (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^*_{x_1} + \psi_{1,x_2} &= 2csc\theta_2 sen\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_1}{2} + 2cot\theta_2 cos\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_1}{2}, && (3.41)\\
\psi^*_{x_2} + \psi_{1,x_1} &= -2csc\theta_2 cos\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_1}{2} - 2cot\theta_2 sen\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_1}{2}, && (3.42)\\
\psi^*_{x_1} + \psi_{2,x_2} &= 2csc\theta_1 sen\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_2}{2} + 2cot\theta_1 cos\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_2}{2}, && (3.43)\\
\psi^*_{x_2} + \psi_{2,x_1} &= -2csc\theta_1 cos\frac{\psi^*}{2}sen\frac{\psi_2}{2} - 2cot\theta_1 sen\frac{\psi^*}{2}cos\frac{\psi_2}{2}. && (3.44)
\end{aligned}$$

Subtraindo as equações (3.41) e (3.37) e as equações (3.42) e (3.38) e dividindo por 2 temos

$$f_{x_1} = A_1cos\frac{\psi_1}{2} + A_2sen\frac{\psi_1}{2}, \qquad f_{x_2} = A_3cos\frac{\psi_1}{2} + A_4sen\frac{\psi_1}{2}, \tag{3.45}$$

onde

$$A_1 = csc\theta_2 sen\frac{\psi^*}{2} + csc\theta_1 sen\frac{\psi}{2}, \qquad A_2 = cot\theta_2 cos\frac{\psi^*}{2} + cot\theta_1 cos\frac{\psi}{2}, \tag{3.46}$$

$$A_3 = -cot\theta_2 sen\frac{\psi^*}{2} - cot\theta_1 sen\frac{\psi}{2}, \qquad A_4 = -csc\theta_2 cos\frac{\psi^*}{2} - csc\theta_1 cos\frac{\psi}{2}. \tag{3.47}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} f_{x_1x_2} = {} & \tfrac{1}{2}\left(A_1 sen\tfrac{\psi_1}{2} - A_2 cos\tfrac{\psi_1}{2}\right)\psi_{x_1} + \tfrac{1}{2}\left(A_3 sen\tfrac{\psi_1}{2} - A_4 cos\tfrac{\psi_1}{2}\right)\psi_{x_2} + \\ & cos^2\tfrac{\psi_1}{2}\left(A_3 csc\theta_2 cos\tfrac{\psi^*}{2} - A_2 csc\theta_1 sen\tfrac{\psi}{2}\right) + \\ & sen^2\tfrac{\psi_1}{2}\left(A_1 cot\theta_1 cos\tfrac{\psi}{2} - A_4 cot\theta_2 sen\tfrac{\psi^*}{2}\right) + \\ & sen\tfrac{\psi_1}{2} cos\tfrac{\psi_1}{2}\left(A_4 csc\theta_2 cos\tfrac{\psi^*}{2} + A_1 csc\theta_1 sen\tfrac{\psi}{2}\right) + \\ & sen\tfrac{\psi_1}{2} cos\tfrac{\psi_1}{2}\left(-A_3 cot\theta_2 sen\tfrac{\psi^*}{2} - A_2 cot\theta_1 cos\tfrac{\psi}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (3.36), podemos reescrever a equação de Ribaucour (3.2) na seguinte forma

$$\begin{aligned} & \left[B_1 sen\tfrac{\psi_1}{2} + B_2 cos\tfrac{\psi_1}{2}\right]\psi_{x_1} + \left[B_3 sen\tfrac{\psi_1}{2} + B_4 cos\tfrac{\psi_1}{2}\right]\psi_{x_2} + \\ & 2B_5 cos^2\tfrac{\psi_1}{2} + 2B_6 sen^2\tfrac{\psi_1}{2} + 2B_7 sen\tfrac{\psi_1}{2} cos\tfrac{\psi_1}{2} = 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &= SA_1 + A_4 - RA_4, \\ B_2 &= -SA_2 + A_3 - RA_3, \\ B_3 &= SA_3 - A_2 - RA_2, \\ B_4 &= -SA_4 - A_1 - RA_1, \\ B_5 &= SA_3 csc\theta_2 cos\tfrac{\psi^*}{2} - SA_2 csc\theta_1 sen\tfrac{\psi}{2} - RA_1A_3, \\ B_6 &= SA_1 cot\theta_1 cos\tfrac{\psi}{2} - SA_4 cot\theta_2 sen\tfrac{\psi^*}{2} - RA_2A_4, \\ B_7 &= SA_1 csc\theta_1 sen\tfrac{\psi}{2} - SA_2 cot\theta_1 cos\tfrac{\psi}{2} - SA_3 cot\theta_2 sen\tfrac{\psi^*}{2} + \\ & \quad SA_4 csc\theta_2 cos\tfrac{\psi^*}{2} - R(A_1A_4 + A_2A_3), \end{aligned}$$

onde R, S é dado por (3.31), A_1, A_2 por (3.46) e A_3, A_4 por (3.47). Substiuindo as expressões de A_1, A_2, A_3 e A_4 e usando as relações trigonométricas (2.15) e (2.16) vamos obter

$$\begin{aligned}
B_1 &= (csc\theta_1 - csc\theta_2)\left(cos\tfrac{\psi^*}{2} - cos\tfrac{\psi}{2}\right),\\
B_2 &= -(cot\theta_1 + cot\theta_2)\left(sen\tfrac{\psi^*}{2} + sen\tfrac{\psi}{2}\right),\\
B_3 &= -(cot\theta_1 + cot\theta_2)\left(cos\tfrac{\psi^*}{2} + cos\tfrac{\psi}{2}\right),\\
B_4 &= (csc\theta_1 - csc\theta_2)\left(sen\tfrac{\psi^*}{2} - sen\tfrac{\psi}{2}\right),\\
B_5 &= -(csc\theta_1 cot\theta_1 + csc\theta_2 cot\theta_2) sen\tfrac{\psi}{2} sen\tfrac{\psi^*}{2} +\\
&\quad -(csc\theta_1 cot\theta_2 + csc\theta_2 cot\theta_1) sen^2\tfrac{\psi}{2},\\
B_6 &= (csc\theta_1 cot\theta_1 + csc\theta_2 cot\theta_2) cos\tfrac{\psi}{2} cos\tfrac{\psi^*}{2} +\\
&\quad +(csc\theta_1 cot\theta_2 + csc\theta_2 cot\theta_1) cos^2\tfrac{\psi}{2}\\
B_7 &= (csc^2\theta_2 - csc^2\theta_1) sen\left(\tfrac{\psi-\psi^*}{2}\right).
\end{aligned}$$

Como $\theta_2 = \pi - \theta_1$ então $sen\theta_1 = sen\theta_2$ e $cos\theta_2 = -cos\theta_1$. Daí $csc\theta_1 = csc\theta_2$ e $cot\theta_2 = -cot\theta_1$, isto é, $B_i = 0, \quad \forall i$.

Resta-nos mostrar que a equação (3.8) é satisfeita. Como $K = -1$ (ou seja, $\alpha = \gamma = 1, \ \beta = 0$) então queremos verificar que a igualdade

$$Z_1^2 + Z_2^2 + 1 = 2C_R(1 + h^2) \tag{3.48}$$

é válida para alguma constante $C_R \neq 0$. Inicialmente, obsevemos de (3.33) e (3.31) que

$$1 + h^2 = \frac{-2}{P - 1}. \tag{3.49}$$

Por outro lado, usando (3.29), (3.34) e (3.35) vamos obter

$$Z_1^2 + Z_2^2 + 1 = \frac{-(R+1)f_{x_1}^2 + (R-1)f_{x_2}^2 - (1-P)S^2}{(P-1)S^2}. \tag{3.50}$$

Segue de (3.45) que

$$\begin{aligned}
-(R+1)f_{x_1}^2 + (R-1)f_{x_2}^2 &= cos^2\frac{\psi_1}{2}[-(R+1)A_1^2 + (R-1)A_3^2] +\\
&\quad + sen^2\frac{\psi_1}{2}[-(R+1)A_2^2 + (R-1)A_4^2] +\\
&\quad + 2sen\frac{\psi_1}{2}cos\frac{\psi_1}{2}[-(R+1)A_1A_2 + (R-1)A_3A_4].
\end{aligned}$$

Por hipótese, $csc\theta_2 = csc\theta_1$ e $cot\theta_2 = -cot\theta_1$. Substituindo em (3.46) e (3.47) vamos obter

$$
\begin{aligned}
-(R+1)A_1^2 + (R-1)A_3^2 &= -csc^2\theta_1(1+R)\left[sen\frac{\psi^*}{2} + sen\frac{\psi}{2}\right]^2 + \\
&\quad -cot^2\theta_1(1-R)\left[sen\frac{\psi^*}{2} - sen\frac{\psi}{2}\right]^2, \\
-(R+1)A_2^2 + (R-1)A_4^2 &= -cot^2\theta_1(1+R)\left[cos\frac{\psi^*}{2} - cos\frac{\psi}{2}\right]^2 + \\
&\quad -csc^2\theta_1(1-R)\left[cos\frac{\psi^*}{2} + cos\frac{\psi}{2}\right]^2, \\
-(R+1)A_1A_2 + (R-1)A_3A_4 &= csc\theta_1 cot\theta_1(1+R)\left[sen\frac{\psi^*}{2} + sen\frac{\psi}{2}\right]\left[cos\frac{\psi^*}{2} - cos\frac{\psi}{2}\right] + \\
&\quad + csc\theta_1 cot\theta_1(1-R)\left[sen\frac{\psi^*}{2} - sen\frac{\psi}{2}\right]\left[cos\frac{\psi^*}{2} + cos\frac{\psi}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Usando as relações trigonométricas (2.23)-(2.28) e as notações estabelecidas em (3.31) temos

$$
\begin{aligned}
-(R+1)A_1^2 + (R-1)A_3^2 &= -csc^2\theta_1(1+R)(1-R)(1+P) + \\
&\quad -cot^2\theta_1(1-R)(1+R)(1-P) \\
&= -S^2[csc^2\theta_1(1+P) + cot^2\theta_1(1-P)] \\
-(R+1)A_2^2 + (R-1)A_4^2 &= -cot^2\theta_1(1+R)(1-R)(1-P) + \\
&\quad -csc^2\theta_1(1-R)(1+R)(1+P) \\
&= -S^2[csc^2\theta_1(1+P) + cot^2\theta_1(1-P)] \\
-(R+1)A_1A_2 + (R-1)A_3A_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Substituindo em (3.50) podemos escrever

$$
Z_1^2 + Z_2^2 + 1 = \frac{-csc^2\theta_1(1+P) - cot^2\theta_1(1-P) - (1-P)}{P-1} = \frac{-2csc^2\theta_1}{P-1}.
$$

Comparando com (3.49) concluimos que a equação (3.48) é válida se, e somente se, $2C_R = csc^2\theta_1$. Com isto, finalizamos a demonstração do corolário.

■

3.3 Exemplo em que a composição de transformações de Bäcklund não é uma transformação de Ribaucour

Nesta seção, vamos verificar que a composição de transformações de Bäcklund para superfícies linear-Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$ em geral não é uma transformação de Ribaucour. Daremos um exemplo explícito considerando transformações de Bäcklund e de Ribaucour da pseudoesfera. Vamos iniciar construindo a família de superfícies de curvatura constante $K = -1$, associada à pseudoesfera por uma transformação de Ribaucour.

Proposição 3.18. *Considere a pseudoesfera parametrizada por*

$$X(x_1, x_2) = (sechx_1 cosx_2, sechx_1 senx_2, tghx_1 - x_1), \qquad x_1 \neq 0.$$

Uma superfície parametrizada $\tilde{X}(x_1, x_2)$*, de curvatura Gaussiana* $K = -1$*, está localmente associada a* X *por uma transformação de Ribaucour (como no Teorema 3.10) se, e somente se,*

$$\tilde{X} = X - \frac{2\Omega}{2C_R(\Omega^2 + W^2)} \left(\sum_{i=1}^{2} \Omega_i e_i - WN \right),$$

onde $e_1 = \dfrac{coshx_1}{senhx_1} X_{x_1}$, $e_2 = coshx_1 X_{x_1}$ *são as direções principais,* $N = \dfrac{X_{x_1} \times X_{x_2}}{|X_{x_1} \times X_{x_2}|}$ *é o campo vetorial unitário normal à pseudo-esfera e as funções* Ω, Ω_1, Ω_2 *e* W *são dadas por*

$$\Omega = \frac{1}{coshx_1} g(x_2) + f(x_1), \tag{3.51}$$

$$\Omega_1 = \frac{-1}{coshx_1} g(x_2) + \frac{coshx_1}{senhx_1} f'(x_1), \tag{3.52}$$

$$\Omega_2 = g'(x_2), \tag{3.53}$$

$$W = \frac{-senhx_1}{coshx_1} g(x_2) + p(x_1), \tag{3.54}$$

tais que:

1. *Se* $1 - 2C_R = 0$, *então*

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{Asenh^2 x_1 + E}{2coshx_1}, & (3.55)\\ g(x_2) &= \frac{1}{2}(Ax_2^2 + Bx_2 + D), & (3.56)\\ p(x_1) &= \frac{1}{2coshx_1}((A-E)senhx_1 + (Ax_1 + F)coshx_1), & (3.57) \end{aligned}$$

com a condição adicional

$$B^2 + 4A(A - D - E) = 0. \qquad (3.58)$$

2. *Se* $1 - 2C_R \neq 0$, *então* $f(x_1)$ *e* $g(x_2)$ *são soluções das equações*

$$coshx_1 f'' - \frac{2}{senhx_1} f' - 2C_R \cdot coshx_1 f = 0, \qquad (3.59)$$

$$g'' + (1 - 2C_R)g = 0 \qquad (3.60)$$

e a função $p(x_1)$ *é dada por*

$$p(x_1) = \frac{-coshx_1}{(1-2C_R)senhx_1}\left(\frac{1}{senhx_1} f' + \frac{2C_R}{coshx_1} f\right). \qquad (3.61)$$

As condições iniciais das equações (3.59) e (3.60) devem satisfazer

$$\left((g')^2 + (1-2C_R)g^2 + \frac{cosh^2 x_1}{senh^2 x_1}(f')^2 - 2C_R f^2 + (1-2C_R)p^2\right)(x_1^0, x_2^0) = 0 \quad (3.62)$$

Demonstração: A primeira forma fundamental da pseudoesfera é dada por $I = tgh^2 x_1 dx_1^2 + sech^2 x_1 dx_2^2$. Donde $\lambda_1 = \dfrac{-1}{senhx_1}$ e $\lambda_2 = senhx_1$. Como $K = -1$ então $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = 0$. Pelo Teorema 3.10, a família de superfícies de curvatura $K = -1$, associadas a X por uma transformação de Ribaucour é determinada pelas soluções do sistema de equações diferenciais (3.10), ou seja, devemos determinar funções $\Omega, \Omega_1, \Omega_2, W$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} &= \frac{senhx_1}{coshx_1}\Omega_1, & (3.63)\\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} &= \frac{-1}{coshx_1}\Omega_2, & (3.64)\\ \frac{\partial W}{\partial x_1} &= \frac{1}{coshx_1}\Omega_1, & (3.65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} &= 2C_R\frac{senhx_1}{coshx_1}\Omega - \frac{(1-2C_R)}{coshx_1}W, &(3.66)\\
\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} &= \frac{1}{coshx_1}\Omega_2, &(3.67)\\
\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} &= 0, &(3.68)\\
\frac{\partial W}{\partial x_2} &= \frac{-senhx_1}{coshx_1}\Omega_2, &(3.69)\\
\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{coshx_1}\Omega_1 + \frac{2C_R}{coshx_1}\Omega + (1-2C_R)\frac{senhx_1}{coshx_1}W. &(3.70)
\end{aligned}$$

De (3.68) segue que

$$\Omega_2 = g'(x_2). \tag{3.71}$$

Substituindo em (3.64) e (3.67) e integrando na variável x_2 então existem funções $f = f(x_1)$ e $q = q(x_1)$ tais que

$$\Omega_1 = \frac{-1}{coshx_1}g + \frac{coshx_1}{senhx_1}q',$$

$$\Omega = \frac{1}{coshx_1}g + f. \tag{3.72}$$

Portanto, substituindo a primeira expressão em (3.63) e comparando com a derivada de (3.51) com relação a x_1 tem-se $q' = f'$. Segue daí que

$$\Omega_1 = \frac{-1}{coshx_1}g + \frac{coshx_1}{senhx_1}f'. \tag{3.73}$$

Segue da equação (3.65) que

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{-1}{cosh^2x_1}g + \frac{1}{senhx_1}f'.$$

Substituindo (3.71) na equação (3.69) e integrando com relação a x_2, podemos considerar uma função $p = p(x_1)$ tal que

$$W = \frac{-senhx_1}{coshx_1}g + p. \tag{3.74}$$

Derivando com relação a x_1 e comparando com a expressão anterior, vamos obter

$$p = \int \frac{1}{senhx_1}f'dx_1. \tag{3.75}$$

Substituindo (3.72) e (3.74) em (3.66) e comparando com a derivada de (3.73) com relação a x_1, temos

$$2C_R\frac{senhx_1}{coshx_1}f - \frac{(1-2C_R)}{coshx_1}p = \frac{-1}{senh^2x_1}f' + \frac{coshx_1}{senhx_1}f''. \tag{3.76}$$

Do mesmo modo, substituindo (3.72)-(3.74) em (3.70) e comparando com a derivada de (3.88) com relação a x_2, temos

$$g'' = -(1-2C_R)g + \frac{1}{senhx_1}f' + \frac{2C_R}{coshx_1}f + (1-2C_R)\frac{senhx_1}{coshx_1}p.$$

Donde segue que

$$g'' + (1-2C_R)g = \frac{1}{senhx_1}f' + \frac{2C_R}{coshx_1}f + (1-2C_R)\frac{senhx_1}{coshx_1}p.$$

Portanto, existe uma constante A tal que

$$g'' + (1-2C_R)g = A, \tag{3.77}$$

$$\frac{1}{senhx_1}f' + \frac{2C_R}{coshx_1}f + (1-2C_R)\frac{senhx_1}{coshx_1}p = A. \tag{3.78}$$

Desta forma, para $1-2C_R = 0$, a solução $g(x_2)$ e $f(x_1)$ destas equações é dada por (3.55) e (3.56). Calculando a integral dada em (3.75) obtemos que $p(x_1)$ é dada por (3.57).

Suponhamos, agora, $1-2C_R \neq 0$. Inicialmente observermos que, neste caso, as funções Ω e W, dadas em (3.72) e (3.74) não dependem da constante A. Portanto, podemos supor $A = 0$ nas equações diferenciais (3.77) e (3.78). Deste modo, $g(x_2)$ satisfaz a equação (3.60). Logo, de (3.78) segue que $p(x_1)$ é dado por (3.61). Além disto, substiuindo (3.61) em (3.76) obtemos que f deve satisfazer a seguinte equação diferencial (3.59).

Para finalizar a demonstração da proposição, observemos que as funções Ω, Ω_1, Ω_2 e W, dadas em (3.71)-(3.74), respectivamente, devem satisfazer à condição algébrica (dada no Teorema 3.7)

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + W^2 = 2C_R(\Omega^2 + W^2). \tag{3.79}$$

Para $1-2C_R = 0$ esta condição equivale a

$$(g')^2 - 2g\left(\frac{f'}{senhx_1} + \frac{f}{coshx_1}\right) + \left(\frac{cosh^2x_1}{senh^2x_1}(f')^2 - f^2\right) = 0.$$

De (3.78) segue que as funções $f(x_1)$ e $g(x_2)$ devem satisfazer

$$(g')^2 - 2Ag + Acosh^2x_1\left(A - \frac{2f}{coshx_1}\right) = 0.$$

Usando (3.55) e (3.56) obtemos (3.58). Para $1 - 2C_R \neq 0$, a condição algébrica (3.79) se reduz a

$$(g')^2 + g^2\left(\tfrac{1}{cosh^2 x_1} - \tfrac{2C_R}{cosh^2 x_1} + (1-2C_R)\tfrac{senh^2 x_1}{cosh^2 x_1}\right) +$$
$$-2g\left(\tfrac{f'}{senh x_1} + \tfrac{2C_R f}{cosh x_1} + (1-2C_R)\tfrac{senh x_1}{cosh x_1}p\right) + \left(\tfrac{cosh^2 x_1}{senh^2 x_1}(f')^2 - 2C_R f^2 + (1-2C_R)p^2\right) = 0.$$

Portanto, de (3.61), temos (3.62).

■

Exemplo 3.19. Como na proposição anterior, consideremos a pseudoesfera parametrizada por

$$X(x_1, x_2) = (sechx_1 cosx_2, sechx_1 senx_2, tghx_1 - x_1), \qquad x_1 \neq 0.$$

Sua curvatura Gaussiana é constante e igual a $K = -1$ e sua primeira forma fundamental é dada por $I = tgh^2 x_1 dx_1^2 + sech^2 x_1 dx_2^2$. Consideremos, também, uma função ψ tal que

$$cos\frac{\psi}{2} = tghx_1, \qquad sen\frac{\psi}{2} = sechx_1. \tag{3.80}$$

Observe que ψ é solução da equação de sine-Gordon

$$\psi_{x_1x_1} - \psi_{x_2x_2} = sen\psi. \tag{3.81}$$

Afirmamos que a superfície X^* obtida de X pela composição de duas transformações de Bäcklund $BT(\frac{\pi}{4})$ e $BT(\frac{\pi}{2})$ não está associada a X por uma transformação de Ribaucour.

Prova da Afirmação: Resolvendo o sistema (3.28), para $\theta = \frac{\pi}{4}$, podemos observar que função ψ_1, definida por

$$tg\frac{\psi_1}{4} = (\sqrt{2}+1)\frac{e^{\sqrt{2}x_1} - e^{x_1+x_2}}{e^{x_2} + e^{(\sqrt{2}+1)x_1}}$$

é uma nova solução da equação (3.81) associada a ψ pela transformação de Bäcklund $BT(\frac{\pi}{4})$. Do mesmo modo, a função ψ_2, definida por

$$tg\frac{\psi_2}{4} = \frac{-coshx_1}{x_2}$$

também é solução de (3.81) e está associada a ψ pela transformação de Bäcklund $BT(\frac{\pi}{2})$.

Consideremos as funções L_3 e L_4, definidas por

$$L_3 = e^{\sqrt{2}x_1} - e^{x_1+x_2}, \qquad L_4 = e^{x_2} + e^{(\sqrt{2}+1)x_1}. \tag{3.82}$$

Seja φ a função dada por (3.21). Como $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, então usando a identidade trigonométrica (2.17) e a definição de η dada em (2.57) temos que

$$\varphi = \frac{\eta^2 x_2 L_3 + \eta coshx_1 L_4}{x_2 L_4 - \eta coshx_1 L_3}, \qquad \eta = \sqrt{2} + 1. \tag{3.83}$$

Segue da definição de Λ, dada em (3.23) e dos coeficientes da primeira forma quadrática da pseudoesfera, dados em (3.80), que

$$\Lambda = \frac{x_2(\eta^2 senhx_1 L_3 + L_4) + \eta coshx_1(senhx_1 L_4 - L_3)}{x_2(senhx_1 L_4 - \eta^2 L_3) - \eta coshx_1(senhx_1 L_3 + L_4)}.$$

Usando as funções L_3 e L_4, definidas em (3.82), podemos escrever

$$\Lambda = \frac{F_1 x_2 + F_2 e^{x_2} + F_3 x_2 e^{x_2} + F_4}{F_5 x_2 + F_4 e^{x_2} + F_6 x_2 e^{x_2} - F_2}, \tag{3.84}$$

onde as funções $F_1, \cdots, F_6$ dependem apenas da variável x_1 e são dadas por

$$\begin{aligned}
F_1(x_1) &= (\eta^2 senhx_1 + e^{x_1})e^{\sqrt{2}x_1}, & F_2(x_1) &= \eta(senhx_1 + e^{x_1})coshx_1, \\
F_3(x_1) &= 1 - \eta^2 e^{x_1} senhx_1, & F_4(x_1) &= \eta(e^{x_1} senhx_1 - 1)coshx_1, \\
F_5(x_1) &= (senhx_1 - \eta^2)e^{\sqrt{2}x_1}, & F_6(x_1) &= senhx_1 + \eta^2 e^{x_1}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Por outro lado, considerando as funções g, f e p dadas por (3.55)-(3.57) e (3.59)-(3.61) e satisfazendo as condições iniciais (3.58) e (3.62) obtemos de $h = \dfrac{\Omega}{W}$, onde Ω e W são dados por (3.51) e (3.54) que

$$h = \frac{g + f coshx_1}{-g senhx_1 + p coshx_1}. \tag{3.86}$$

Nosso objetivo é usar o Corolário 3.16 para verificar que, neste caso, a composição das transformações de Bäcklund $BT(\frac{\pi}{4})$ e $BT(\frac{\pi}{2})$ de X não corresponde a uma transformação de Ribaucour de X.

Caso 1: $1 - 2C_R = 0$.

Neste caso, as funções $f(x_1)$, $g(x_2)$ e $p(x_1)$ são dadas por (3.55)-(3.57). Substituindo em (3.86), temos

$$h = \frac{Asenh^2x_1 + Ax_2^2 + Bx_2 + (D+E)}{(-Ax_2^2 - Bx_2 + (A-D-E))senhx_1 + (Ax_1+F)coshx_1}. \tag{3.87}$$

Suponhamos inicialmente $h = \varphi$, onde φ é a função dada em (3.83). Assim, a seguinte igualdade se verifica

$$[Asenh^2x_1 + Ax_2^2 + Bx_2 + (D+E)] \cdot [x_2L_4 - \eta coshx_1L_3] =$$

$$= [(-Ax_2^2 - Bx_2 + (A-D-E))senhx_1 + (Ax_1+F)coshx_1] \cdot$$

$$\cdot [\eta^2 x_2 L_3 + \eta coshx_1 L_4].$$

Em particular, tomando limite quando x_2 tende a zero, vamos obter

$$-[Asenh^2x_1 + (D+E)] \cdot (e^{\sqrt{2}x_1} - e^{x_1}) =$$

$$= [(A-D-E)senhx_1 + (Ax_1+F)coshx_1] \cdot (1 + e^{(\sqrt{2}+1)x_1}).$$

Como $senhx_1 = \dfrac{e^{x_1} - e^{x_1}}{2}$ e $coshx_1 = \dfrac{e^{x_1} + e^{x_1}}{2}$ então podemos escrever

$$[Ae^{2x_1} + Ae^{-2x_1} + (4D + 4E - 2A)] \cdot (e^{x_1} - e^{\sqrt{2}x_1}) =$$

$$= [2(A-D-E+F)e^{x_1} + 2(-A+D+E+F)e^{-x_1} + 2Ax_1e^{x_1} + 2Ax_1e^{-x_1}] \cdot$$

$$\cdot (1 + e^{(\sqrt{2}+1)x_1}).$$

Efetuando todos os produtos indicados, vamos construir combinação linear envolvendo várias funções exponenciais (na variável x_1) e produto de algumas destas funções por x_1. Algumas parcelas desta soma podem coincidir mas, a função $x_1 \mapsto x_1e^{x_1}$ só aparece uma vez, multiplicada pela constante A. Consequentemente, $A = 0$. Usando a condição algébrica (3.58) obtemos também $B = 0$. Substiuindo na expressão anterior, temos

$$(-D-E+F)e^{x_1} + (D+E+F)e^{-x_1} + (-D-E+F)e^{(\sqrt{2}+2)x_1} +$$

$$+(D+E+F)e^{\sqrt{2}x_1} = 2(D+E)e^{x_1} - 2(D+E)e^{\sqrt{2}x_1}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} -D-E+F &= 2(D+E), \\ D+E+F &= 0, \\ -D-E+F &= 0, \\ D+E+F &= -2(D+E), \end{cases}$$

cujas soluções são $F = 0$ e $E = -D$. Como $B = 0$ então, usando (3.55)-(3.57) temos

$$f(x_1) = \frac{-D}{2coshx_1}, \qquad p(x_1) = \frac{Dsenhx_1}{2coshx_1}, \qquad g(x_2) = \frac{D}{2}.$$

Portanto, de (3.51) e (3.54), segue que $\Omega = W = 0$, o que não pode ocorrer em uma transformação de Ribaucour.

Se $h = \dfrac{-1}{\varphi}$ então usando (3.21) e (3.86), tomando limite quando x_2 tende a zero e usando a definição de seno e cosseno hiperbólicos, vamos obter

$$[2(A-D-E+F)e^{x_1} + 2(-A+D+E+F)e^{-x_1} + 2Ax_1e^{x_1} + 2Ax_1e^{-x_1}]\cdot$$

$$\cdot(e^{\sqrt{2}x_1} - e^{x_1}) = [Ae^{2x_1} + Ae^{-2x_1} + (4D+4E-2A)] \cdot (1 + e^{(\sqrt{2}+1)x_1}).$$

Com os mesmos argumentos anteriores, vamos obter $A = B = 0$ e o mesmo sistema de equações lineares do item anterior. Donde $F = 0$ e $E = -D$, ou seja, $\Omega = W = 0$, o que não pode ocorrer em uma transformação de Ribaucour.

Suponhamos, agora, $h = -\Lambda$, onde Λ é dado por (3.84). Tomando limite quando x_2 tende a 0, vamos obter

$$[Asenh^2x_1 + D + E] \cdot [senhx_1L_3(x_1, 0) + L_4(x_1, 0)] =$$

$$= [(A-D-E)senhx_1 + (Ax_1 + F)coshx_1] \cdot [senhx_1L_4(x_1, 0) - L_3(x_1, 0)].$$

Usando (3.82) e a definição de seno e cosseno hiperbólicos, podemos escrever

$$[Ae^{2x_1} + Ae^{-2x_1} + 4D + 4E - 2A] \cdot [3e^{(\sqrt{2}+1)x_1} - e^{(\sqrt{2}-1)x_1} - e^{2x_1} + 3] =$$

$$= [2(A-D-E+F)e^{x_1} + 2(-A+D+E+F)e^{-x_1} + 2Ax_1e^{x_1} + 2Ax_1e^{-x_1}]\cdot$$

$$\cdot[e^{(\sqrt{2}+2)x_1} - 3e^{\sqrt{2}x_1} + 3e^{x_1} - e^{-x_1}].$$

Desenvolvendo as operações indicadas e usando argumentos análogos aos anteriores, podemos concluir que $A = B = 0$. Daí

$$(4D+4E)\cdot[3e^{(\sqrt{2}+1)x_1} - e^{(\sqrt{2}-1)x_1} - e^{2x_1} + 3] =$$

$$= [2(-D-E+F)e^{x_1} + 2(D+E+F)e^{-x_1}]\cdot[e^{(\sqrt{2}+2)x_1} - 3e^{\sqrt{2}x_1} + 3e^{x_1} - e^{-x_1}].$$

Segue que as constantes $D,\ E,\ F$ devem satisfazer ao sistema

$$\begin{cases} D+E+3F &= 0, \\ D+E-3F &= 0, \\ -D-E+F &= 0, \\ D+E+F &= 0, \end{cases}$$

cujas soluções são $E = -D$ e $F = 0$. Como antes, teremos $\Omega = W = 0$, o que não pode ocorrer em uma transformação de Ribaucour.

Finalmente, se $h = \dfrac{1}{\Lambda}$ então, de modo análogo ao caso anterior, vamos obter que $A = B = 0$ e que $D,\ E,\ F$ devem satisfazer ao mesmo sistema acima. Desta forma, temos a mesma conclusão dos itens anterios.

Vamos agora analisar a situação em que se tenha $1 - 2C_R \neq 0$. Observemos que, neste caso, as soluções da equação diferencial (3.60) são dadas por

$$g(x_2) = \begin{cases} B_1 cos(\sqrt{1-2c}\ x_2) + B_2 sen(\sqrt{1-2c}\ x_2), & \text{se } 1-2c > 0, \\ B_1 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2}, & \text{se } 1-2c < 0. \end{cases} \tag{3.88}$$

Caso 2: $1 - 2c > 0$

Neste caso, a função h é diferente das funções φ, $\dfrac{-1}{\varphi}$, $-\Lambda$ e $\dfrac{1}{\Lambda}$ uma vez que, fixado x_1, h é uma função periódica com relação a variável x_2 e o mesmo não ocorre com estas quatro funções.

Caso 3: $1 - 2c < 0$

Suponhamos $h = \varphi$. Considerando f e g soluções de (3.59) e (3.60) e p, dado por (3.61) então seguem de (3.83) e (3.86) que

$$(g + fcoshx_1)(x_2L_4 - \eta coshx_1 L_3) = (-gsenhx_1 + pcoshx_1)(\eta^2 x_2 L_3 + \eta coshx_1 L_4).$$

Denotemos por T_1 o primeiro membro desta equação e por T_2 o segundo. Usando (3.82) e (3.88), temos

$$\begin{aligned}
T_1 &= B_1\eta^2 x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + B_1\eta^2 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\
&\quad -B_1\eta coshx_1 e^{\sqrt{2}\ x_1} e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_1\eta coshx_1 e^{x_1} e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\
&\quad B_2\eta^2 x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + B_2\eta^2 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\
&\quad -B_2\eta coshx_1 e^{\sqrt{2}\ x_1} e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_2\eta coshx_1 e^{x_1} e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\
&\quad f(x_1)coshx_1 \left(\eta^2 x_2 e^{x_2} + \eta^2 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} x_2 - \eta coshx_1 e^{x_1} + \eta coshx_1 e^{x_1} e^{x_2}\right), \\
T_2 &= B_1\eta^2 senhx_1 e^{x_1} x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} - B_1\eta^2 senhx_1 e^{\sqrt{2}\ x_1} x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\
&\quad -B_1\eta coshx_1 senhx_1 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} - B_1\eta coshx_1 senhx_1 e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\
&\quad B_2\eta^2 senhx_1 e^{x_1} x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} - B_2\eta^2 senhx_1 e^{\sqrt{2}\ x_1} x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\
&\quad -B_2\eta coshx_1 senhx_1 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} - B_2\eta coshx_1 senhx_1 e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\
&\quad p(x_1)coshx_1 \left(-\eta^2 e^{x_1} x_2 e^{x_2} + \eta^2 e^{\sqrt{2}\ x_1} x_2 + \eta coshx_1 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} + \eta coshx_1 e^{x_2}\right).
\end{aligned}$$

Observemos que, fixado $x_1 \neq 0$, cada uma das expressões acima forma uma combinação linear envolvendo as seguintes funções (na variável x_2)

$$1,\ e^{x_2},\ e^{\sqrt{2c-1}\ x_2},\ e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2},\ e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2},\ e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2},$$

$$x_2,\ x_2e^{x_2},\ x_2e^{\sqrt{2c-1}\ x_2},\ x_2e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2},\ x_2e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2},\ x_2e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2}.$$

Note que, independente o valor de c ($c > \frac{1}{2}$), as funções

$$x_2 \mapsto e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2} \qquad \text{e} \qquad x_2 \mapsto e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2}$$

são distintas das demais. Portanto, da igualdade $T_1 = T_2$ temos que

$$\begin{cases} e^{x_1}B_1 &= -senhx_1 B_1, \\ B_2 &= e^{x_1} senhx_1 B_2. \end{cases}$$

Como B_1 e B_2 são constantes (independe do valor de x_1 que tenha sido fixado) então

$B_1 = B_2 = 0$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} & f(x_1)\left(\eta^2 x_2 e^{x_2} + \eta^2 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} x_2 - \eta coshx_1 e^{x_1} + \eta coshx_1 e^{x_1} e^{x_2}\right) = \\ & p(x_1)\left(-\eta^2 e^{x_1} x_2 e^{x_2} + \eta^2 e^{\sqrt{2}\ x_1} x_2 + \eta coshx_1 e^{(\sqrt{2}+1)x_1} + \eta coshx_1 e^{x_2}\right). \end{aligned}$$

Como f e p dependem apenas de x_1 e o conjunto $\{1, x_2, e^{x_2}, x_2 e^{x_2}\}$ é linearmente independente então, para cada $x_1 \neq 0$ fixado, obtemos (comparando os coeficientes de x_2 e $x_2 e^{x_2}$) que

$$\begin{cases} f(x_1) & = \ -e^{x_1} p(x_1), \\ \\ e^{x_1} f(x_1) & = \ p(x_1). \end{cases}$$

Como $x_1 \neq 0$ é arbitrário então $f = 0$. Como $B_1 = B_2 = 0$ então $g = 0$. Daí $\Omega = 0$, o que não pode ocorrer em uma transformação de ribaucour.

Se $h = \dfrac{-1}{\varphi}$ então, de (3.83) e (3.86), temos

$$(g + fcoshx_1)(\eta^2 x_2 L_3 + \eta coshx_1 L_4) = (-gsenhx_1 + pcoshx_1)(-x_2 L_4 + \eta coshx_1 L_3).$$

Denotemos por T_3 o primeiro membro desta equação e por T_4 o segundo. Segue de (3.82) e (3.88) que

$$\begin{aligned} T_3 \ = \ & \eta^2 e^{\sqrt{2}x_1} B_1 x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} - \eta^2 e^{x_1} B_1 x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\ & \eta coshx_1 B_1 e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2} + \eta coshx_1 e^{(1+\sqrt{2})x_1} B_1 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & \eta^2 e^{\sqrt{2}x_1} B_2 x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} - \eta^2 e^{x_1} B_2 x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\ & \eta coshx_1 B_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2} + \eta coshx_1 e^{(1+\sqrt{2})x_1} B_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & f(x_1) coshx_1 \left(\eta^2 e^{\sqrt{2}x_1} x_2 - \eta^2 e^{x_1} x_2 e^{x_2} + \eta coshx_1 e^{x_2} + \eta coshx_1 e^{(\sqrt{2}+1)x_1}\right), \\ T_4 \ = \ & senhx_1 B_1 x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2} + senhx_1 e^{(1+\sqrt{2})\ x_1} B_1 x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & -\eta senhx_1 coshx_1 e^{\sqrt{2}\ x_1} B_1 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \eta senhx_1 coshx_1 e^{x_1} B_1 e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\ & senhx_1 B_2 x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2} + senhx_1 e^{(1+\sqrt{2})\ x_1} B_2 x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & -\eta senhx_1 coshx_1 e^{\sqrt{2}\ x_1} B_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \eta senhx_1 coshx_1 e^{x_1} B_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})\ x_2} + \\ & p(x_1) coshx_1 \left(-e^{(1+\sqrt{2})x_1} x_2 - x_2 e^{x_2} - \eta coshx_1 e_1^{x} e^{x_2} + \eta coshx_1 e^{\sqrt{2}x_1}\right). \end{aligned}$$

Com argumentos análogos aos anteriores e usando, novamente, os coeficientes das funções $x_2 \mapsto e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2}$ e $x_2 \mapsto e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2}$ vamos obter da igualdade $T_3 = T_4$ que

$$\begin{cases} B_1 & = & senhx_1 e^{x_1} B_1, \\ e^{x_1} B_2 & = & -senhx_1 B_2. \end{cases}$$

Daí $B_1 = B_2 = 0$. Assim, como no caso anterior, teremos $f = g = 0$ e, consequentemente, $\Omega = 0$, o que não pode ocorrer em uma transformação de Ribaucour.

Suponhamos, agora, $h = -\Lambda$, onde Λ é dado em (3.84). De forma equivalente, suponhamos que

$$(g + fcoshx_1)\left(F_5 x_2 + F_4 e^{x_2} + F_6 x_2 e^{x_2} - F_2\right) =$$
$$= (gsenhx_1 - pcoshx_1)\left(F_1 x_2 + F_2 e^{x_2} + F_3 x_2 e^{x_2} + F_4\right),$$

uma vez que h é dado por (3.86). Denotando por T_5 (resp. T_6) o primeiro (resp. segundo) membro desta equação e usando (3.82) e (3.88) temos

$$\begin{aligned} T_5 \quad = \quad & B_1 F_5 x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_1 F_4 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & B_1 F_6 x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} - B_1 F_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & B_2 F_5 x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_2 F_4 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & B_2 F_6 x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} - B_2 F_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & f(x_1) coshx_1 \left(F_5 x_2 + F_4 e^{x_2} + F_6 x_2 e^{x_2} - F_2\right), \\ T_6 \quad = \quad & B_1 F_1 senhx_1 x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_1 F_2 senhx_1 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & B_1 F_3 senhx_1 x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + B_1 F_4 senhx_1 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & B_2 F_1 senhx_1 x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_2 F_2 senhx_1 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & B_2 F_3 senhx_1 x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + B_2 F_4 senhx_1 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & -p(x_1) coshx_1 \left(F_1 x_2 + F_2 e^{x_2} + F_3 x_2 e^{x_2} + F_4\right). \end{aligned}$$

Com argumentos análogos aos anteriores e usando, novamente, os coeficientes das funções

$x_2 \mapsto e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2}$ e $x_2 \mapsto e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2}$ vamos obter

$$\begin{cases} F_4 B_1 & = & F_2 senhx_1 B_1, \\ -F_2 B_2 & = & F_4 senhx_1 B_2. \end{cases}$$

Donde $B_1 = B_2 = 0$ pois, pela definição de F_2 e F_4, dados em (3.85), temos que $F_4 - F_2 senhx_1 = -\eta cosh^3 x_1$ e $F_2 + F_4 senhx_1 = \eta e^{x_1} cosh^3 x_1$ são não nulos. Como nos casos anteriores, obtemos $f = g = 0$. Consequentemente, $\Omega = 0$, o que não pode ocorrer em uma transformação de Ribaucour.

Finalmente, suponhamos $h = \dfrac{1}{\Lambda}$. Ou seja, usando (3.86) e (3.84) estamos supondo que

$$(g + fcoshx_1)(F_1 x_2 + F_2 e^{x_2} + F_3 x_2 e^{x_2} + F_4) =$$

$$(-gsenhx_1 + pcoshx_1)(F_5 x_2 + F_4 e^{x_2} + F_6 x_2 e^{x_2} - F_2).$$

Denotando por T_7 (resp. T_8) o primeiro (resp. segundo) membro desta equação e usando (3.82) e (3.88) temos

$$\begin{aligned} T_7 \;=\;& B_1 F_1 x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_1 F_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & B_1 F_3 x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + B_1 F_4 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & B_2 F_1 x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + B_2 F_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & B_2 F_3 x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + B_2 F_4 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & f(x_1) coshx_1 (F_1 x_2 + F_2 e^{x_2} + F_3 x_2 e^{x_2} + F_4), \\ T_8 \;=\;& -B_1 F_5 senhx_1 x_2 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} - B_1 F_4 senhx_1 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & -B_1 F_6 senhx_1 x_2 e^{(1+\sqrt{2c-1})x_2} + B_1 F_2 senhx_1 e^{\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & -B_2 F_5 senhx_1 x_2 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} - B_2 F_4 senhx_1 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + \\ & -B_2 F_6 senhx_1 x_2 e^{(1-\sqrt{2c-1})x_2} + B_2 F_2 senhx_1 e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2} + \\ & p(x_1) coshx_1 (F_5 x_2 + F_4 e^{x_2} + F_6 x_2 e^{x_2} - F_2). \end{aligned}$$

Com argumentos análogos aos anteriores e usando, novamente, os coeficientes das funções

$x_2 \mapsto e^{(1+\sqrt{2c-1})\ x_2}$ e $x_2 \mapsto e^{-\sqrt{2c-1}\ x_2}$ vamos obter

$$\begin{cases} F_2 B_1 &= -F_4 senh x_1 B_1, \\ F_4 B_2 &= F_2 senh x_1 B_2. \end{cases}$$

Analogamente ao último caso, temos $B_1 = B_2 = 0$. Como nos demais casos, obtemos $f = g = 0$. Consequentemente, $\Omega = 0$, mas isto não pode ocorrer com uma transformação de Ribaucour. Isto conclui a demonstração da afirmação.

Referências Bibliográficas

[1] Bäcklund. A. V., *Einiges über Curve and Flächentransformationen*, Lund Unversiët Arsskrift **10** (1875).

[2] Bäcklund. A. V., *Concerning surfaces with constant negative curvature* transled by E.M.Coddington, New Era Printing Co., Lancaster pa, 1905.

[3] Bianchi, L., *Sulla transformazioni di Bäcklund per le superfície pseuedosferiche*, Rend. Acc. Naz. Lincei **5**, (1892), 3-12.

[4] Bianchi, L., *Sulla teoria delle transformazioni delle superfície a curvatura constante*, Ann. de Matem. Pura ed Appl **5**, (1892), 3-12.

[5] Bianchi, L., *Sopra le deformazioni isogonali delle superfície a curvatura constante in geometria elliptica ed iperbolica*, Annali de Matem. 3, (1899), 185-298.

[6] Bianchi, L., *Lezioni di Geometria Differenciale*, Bologna Nicola Zanichelli Ed., 1927.

[7] Corro, A. V., Ferreira, W. and Tenenblat, K., *On Ribaucour transformation for hypersurfaces*, Mat. Contemp. **17** (1999), 137-160.

[8] Corro, A. V., Ferreira, W. and Tenenblat, K., *Minimal surfaces obtained by Ribaucour transformation*, Geom. Dedicata **96** (2003), 117-150.

[9] Corro, A. V., Ferreira, W. and Tenenblat, K., *Ribaucour transformation for constant mean curvature and linear Weingarten surfaces*, Pac. J. Math. **212** (2003), 265-296.

[10] Darboux, G., *Leçons sur la téorie generale des surfaces*, Gauthier-Villars, Paris, 1896, reprinted by Chelsea, New York, 1980.

[11] Hertrich-Jeromin, U. and Pedit, F., *Remarks on the Darboux transform of isothermic surfaces*, Doc. Math. **2** (1997), 313-333.

[12] Kobayashi, S. and Inoguchi, J., *Caracterizations of Bianchi-Bäcklund transformations of constant mean curvature surfaces*, Internat. J. Math. **16**, number 2, (2005), 101-110.

[13] do Carmo, M. C., *o Método o referencial móvel*, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[14] Lemes, M. V. and Tenenblat, K., *On Ribaucour transformation and minimal Surfaces*, Mat. Contemp. **29** (2005), 13-40.

[15] Lemes, M. V., Roitman, P., Tenenblat, K. and Tribuzi, R., *Lawson correspondence and Ribaucour transformation*, Trans. Amer. Math. Soc. **364**, n^o 12, (2012), 6229-6258.

[16] Sterling, I. and Wente, H. C., *Existende and classification of constant mean curvature multibubbleton of finite and infinite type*, Indiana. U. Math. J. **42**, n^o 4, (1993), 1239-1266.

[17] Tenenblat, K., *Transformações de superfícies e aplicações*, IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[18] Tenenblat, K., *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, IMPA, Rio de Janeiro, 1996.

[19] Tenenblat, K., *Transformations of manifolds and applications to differential equations*, Addison Wesley Longman, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 93, 1998.

[20] Tenenblat, K. and Wang, Q., *On Ribaucour transformation for hypersurfaces in spaces forms*, Ann. of Global An. and Geom. **29**, n^o 2 (2006), 157-185.

[21] Tenenblat, K. and Wang, Q., *New constante mean curvature surfaces in the hyperbolic space*, Illinois J. Math. **53**, n^o 1 (2009), 135-161.