

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO, CONTABILIDADE E CIÊNCIA DA  
INFORMAÇÃO E DOCUMENTAÇÃO**

**FÁBIO MONTEIRO VAZ**

**ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA E DEMANDA  
DO CONSUMIDOR**

**BRASÍLIA  
2012**



**FÁBIO MONTEIRO VAZ**

**ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA E DEMANDA  
DO CONSUMIDOR**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade de Brasília.

*Orientador:* José Guilherme de Lara Resende

**BRASÍLIA  
2012**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de  
Brasília. Acervo 1004064.

V393e Vaz, Fábio Monteiro.  
Escalas de equivalência e demanda do consumidor /  
Fábio Monteiro Vaz. - 2012.  
454 f.: il.; 30 cm.

Tese (doutorado) - Universidade de Brasília, Faculdade  
de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência  
da Informação e Documentação.  
Inclui bibliografia.  
Orientação: José Guilherme de Lara Resende.

1. Orçamento familiar - Custos. 2. Economia doméstica  
- Bem-estar. I. Resende, José Guilherme de Lara. II.  
Título.

CDU 330.567.28

**FÁBIO MONTEIRO VAZ**

**ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA E DEMANDA  
DO CONSUMIDOR**

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor pelo programa de  
Pós-Graduação em Economia da Universidade  
de Brasília.

Aprovada em: 16 de novembro de 2012

**Banca Examinadora**

---

José Guilherme de Lara Resende (orientador)  
Universidade de Brasília

---

Maria Eduarda Tannuri Pianto  
Universidade de Brasília

---

Moisés de Andrade Resende Filho  
Universidade de Brasília

---

Alexandre Xavier Ywata de Carvalho  
Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

---

Sergei Suarez Dillon Soares  
Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada



*Aos meus amores*

*Kátia, Alexandre e Maria Luiza*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a paciência do meu professor orientador, José Guilherme de Lara Resende. Agradeço também minha esposa, Kátia Cristina da Silva Vaz, pela força que me deu nos momentos de dificuldade, e a meus pais, pela fé que tiveram em mim, mesmo depois de eu já ter perdido a minha. Por fim, agradeço aos colegas do Ipea, em especial a toda a antiga equipe de Desigualdade e Pobreza, que me convenceram a terminar o doutorado e mantiveram a confiança em minha capacidade, apesar de esta confiança ter sido sistematicamente desafiada nos últimos dois anos.



## RESUMO

Vaz, Fábio M. **Escalas de equivalência e demanda do consumidor**. Brasília, 2012. Tese (Doutorado em Economia). Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação. Universidade de Brasília, Brasília, 2012.

Esta tese é composta de duas partes. Na primeira parte, analisam-se as origens e as consequências de uma característica muito comum em pesquisas de orçamentos familiares: a existência de um elevado percentual de domicílios que não possuem despesas com determinados produtos. Tais gastos nulos são de suma importância para a estimação de curvas de Engel, já que tratamentos inadequados destas observações podem resultar em estimativas viesadas e inconsistentes. Assim, primeiramente derivam-se os principais modelos desenvolvidos para lidar com este tipo de informação. Em seguida, utilizam-se alguns destes modelos para estimar os fatores que influenciam as despesas com alimentação fora do domicílio.

Na segunda parte o problema consiste em comparar o bem-estar de domicílios com diferentes composições demográficas. Dado que a função de utilidade é definida apenas para indivíduos, mas diversos bens e recursos são compartilhados dentro do domicílio, análises de bem-estar entre indivíduos devem se basear em um modelo de bem-estar para o domicílio. A partir desse modelo é possível definir um índice, o custo relativo entre dois domicílios com diferentes composições demográficas situados em um mesmo nível de bem-estar. Este índice denomina-se *escala de equivalência*, e permite transformar a renda (ou despesa) nominal de domicílios heterogêneos em uma medida comparável de bem-estar entre indivíduos homogêneos. Como o bem-estar de um domicílio pode ser definido de diversas formas, segue que diferentes modelos, apesar de utilizarem a mesma evidência empírica, podem obter valores distintos para as escalas de equivalência. Assim, essa parte da tese é constituída de três capítulos: no primeiro analisam-se os efeitos das escalas de equivalência sobre as medidas de desigualdade e pobreza; nos dois capítulos seguintes apresentam-se diferentes modelos de escalas de equivalência desenvolvidos dentro da abordagem de preferência revelada e da abordagem subjetiva. Em ambos os capítulos estes modelos são estimados, testados à luz de seus pressupostos e discutidos.

**Palavras-chave:** 1. Curvas de Engel; Gastos nulos. 2. Escalas de equivalência; Bem-estar; Preferência revelada; Método subjetivo.



## **ABSTRACT**

Vaz, Fábio M. **Equivalence scales and consumer demand**. Thesys (Doctor of Philosophy in Economy). Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Ciência da Informação e Documentação. Universidade de Brasília, Brasília, 2012.

This thesis is composed of two parts. The first part analyzes the origins and consequences of a very common feature in household budget surveys: the existence of a high percentage of households that do not have expenses with a product. Such zero expenses are extremely important for the estimation of Engel curves, since inadequate treatment of these observations can result in biased and inconsistent estimates. So, first we derive the main models developed to deal with this kind of information. Then, we use some of these models to estimate the factors that influence the demand of food away from home.

In the second part, we study the problem of how to compare the welfare of households with different demographic compositions. Since the utility function is defined only for individuals, but many goods and resources are shared within the household, analyzes of well-being among individuals need to be based in a household model of well-being. From this model, it is possible to define an index, the relative cost between two households in the same level of well-being, but with different demographic compositions. This index is called equivalence scale, and it transforms the nominal income (or expenditure) of heterogeneous households in a comparable measure of well-being among homogeneous individuals. Since the well-being of a household can be defined in many ways, it follows that different models, despite using the same empirical evidence, obtain different values for the equivalence scales. Thus, this part of the thesis consists of three chapters: the first analyzes the effects of equivalence scales on several measures of income inequality and poverty; the next two show different models of equivalence scales developed within the revealed preference approach and the subjective approach. In both chapters these models are estimated and tested in the light of their assumptions and a discussion is made from the results.

**Keywords:** 1. Engel curves; Zero expenditures. 2. Equivalence scale; Well-being; Revealed preference; Subjective method.



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>25</b>
<b>2 ESTIMAÇÃO DE CURVAS DE ENGEL NA PRESENÇA DE GASTOS NULOS .....</b>	<b>35</b>
2.1 Introdução .....	35
2.2 Gastos nulos em pesquisas de orçamentos familiares.....	37
2.3 O modelo Tobit para soluções de canto.....	41
2.4 Transformações normalizantes da variável dependente.....	55
2.5 Extensões do modelo Tobit .....	73
2.6 Conclusão .....	116
<b>3 A DEMANDA POR ALIMENTAÇÃO FORA DO DOMICÍLIO.....</b>	<b>119</b>
3.1 Introdução .....	119
3.2 Teoria da produção domiciliar.....	121
3.3 Gastos nulos na Pesquisa de Orçamentos Familiares.....	124
3.4 Modelos econométricos .....	127
3.5 Metodologia .....	134
3.6 Resultados .....	152
3.7 Conclusão .....	170
<b>4 EFEITOS DAS ESCALAS DE EQUIVALÊNCIAS SOBRE AS MEDIDAS DE DESIGUALDADE E POBREZA.....</b>	<b>175</b>
4.1 Introdução .....	175
4.2 Resenha da literatura.....	176
4.3 Metodologia .....	203
4.4 Resultados .....	205
4.5 Conclusão .....	226
<b>5 ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA BASEADAS NA ABORDAGEM DA PREFERÊNCIA REVELADA .....</b>	<b>229</b>
5.1 Introdução .....	229
5.2 Pressupostos e definições .....	232
5.3 A abordagem da preferência revelada.....	246
5.4 Metodologia .....	298
5.5 Resultados .....	307
5.6 Conclusão .....	335
<b>6 ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA SUBJETIVAS .....</b>	<b>337</b>
6.1 Introdução .....	337

6.2 Modelos .....	339
6.3 Base de dados e variáveis .....	369
6.4 Resultados .....	376
6.5 Conclusão .....	400
<b>7 CONCLUSÃO .....</b>	<b>403</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>405</b>
<b>APÊNDICE A - BASES DE DADOS.....</b>	<b>421</b>
A.1 Pesquisa de Orçamentos Familiares .....	421
A.2 Pesquisa sobre Padrões de Vida .....	434
<b>APÊNDICE B - COMPLEMENTO DO CAPÍTULO 3.....</b>	<b>437</b>
B.1 Derivadas da função de verossimilhança em relação aos parâmetros.....	437
B.2 Parâmetros estimados .....	440
<b>APÊNDICE C - COMPLEMENTO DO CAPÍTULO 6.....</b>	<b>449</b>
C.1 Parâmetros estimados .....	449

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

### Figuras

Figura 2.1 - Abstenção causada por um mal .....	40
Figura 2.2 - Solução de canto do problema do consumidor .....	41
Figura 2.3 - Transformação Box-Cox para vários valores de $\lambda$ e $c = 0$ .....	60
Figura 2.4 - Transformação de Manly (1976).....	65
Figura 2.5 - Transformação de John e Draper (1980).....	66
Figura 2.6 - Transformação de Bickel e Doksum (1981).....	67
Figura 2.7 - Transformação de Yeo e Johnson (2000).....	68
Figura 2.8 - Transformação IHS.....	70
Figura 2.9 - Relação entre as variáveis latentes e a variável observada no modelo Double Hurdle para $\rho > 0$ .....	89
Figura 3.1 - Exemplo de problema de maximização com máximos e mínimos locais .....	143
Figura 4.1 - Curva de Lorenz de uma distribuição hipotética.....	183
Figura 4.2 - Curvas de Lorenz de duas distribuições distintas.....	184
Figura 4.3 - Bem-estar social e medidas alternativas de pobreza.....	195
Figura 4.4 - Efeito reordenamento derivado de uma diminuição nas economias de escala do consumo.....	198
Figura 4.5 - Comportamento da distribuição da renda equivalente quando $\theta$ aumenta a partir de zero.....	202
Figura 5.1 - Modelo de Engel.....	248
Figura 5.2 - Curvas de indiferença no modelo de Prais e Houthakker .....	258
Figura 5.3 - Comparação dos modelos de Barten e de Prais-Houthakker .....	265
Figura 5.4 - Modelo de Barten para economias de escala .....	268
Figura 5.5 - Modelo de Rothbarth .....	278
Figura 5.6 - Efeitos da economia de escala no modelo de Rothbarth.....	293
Figura 6.1 - Respostas da questão de avaliação da renda e a função de utilidade da renda individual.....	343
Figura 6.2 - Função de utilidade da renda para vários valores de $\mu$ .....	344
Figura 6.3 - Função de utilidade da renda para vários valores de $\sigma$ .....	345
Figura 6.4 Determinação da linha de pobreza do método de Leyden .....	349
Figura 6.5 - Método da Renda Mínima .....	359
Figura 6.6 - Método de Antuérpia .....	363

## Gráficos

Gráfico 3.1 - Valor esperado da fração da despesa destinada à alimentação fora .....	166
Gráfico 3.2 Esperança condicional da fração da despesa destinada à alimentação fora.....	167
Gráfico 3.3 - Probabilidade de participação no mercado de alimentação fora do domicílio .....	168
Gráfico 3.4 - Probabilidade do consumo e da despesa ser positiva no modelo de Infrequência de Aquisição IHS .....	169
Gráfico 3.5 - Esperança condicional do consumo e da despesa do modelo de Infrequência de Aquisição IHS .....	170
Gráfico 4.1 - Coeficiente de correlação entre a despesa equivalente e o tamanho do domicílio .....	208
Gráfico 4.2 - Efeito das escalas de equivalência sobre o coeficiente de Gini - 3D .....	209
Gráfico 4.3 - Efeitos das escalas de equivalência sobre o coeficiente de Gini - 2D .....	210
Gráfico 4.4 - Efeitos das escalas de equivalência sobre o índice de Atkinson .....	212
Gráfico 4.5 - Efeitos das escalas de equivalência sobre o índice de Entropia Generalizada .....	213
Gráfico 4.6 – Combinações de $\theta$ e $\eta$ para as quais as medidas de desigualdade atingem o valor mínimo .....	215
Gráfico 4.7 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza absoluta - 3D .....	216
Gráfico 4.8 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza absoluta - 2D .....	217
Gráfico 4.9 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza relativa - 3D .....	218
Gráfico 4.10 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza relativa - 2D .....	219
Gráfico 5.1 - Estimacão não-paramétrica do modelo de Engel – adultos.....	308
Gráfico 5.2 - Estimacão não-paramétrica do modelo de Engel – 2 adultos e crianças .....	309
Gráfico 5.3 - Estimacão não-paramétrica do modelo de Barten.....	318
Gráfico 5.4 - Estimacão não-paramétrica do preço dos alimentos adquiridos para o domicílio .....	319
Gráfico 5.5 - Estimacão não-paramétrica da quantidade de alimentos adquiridos para o domicílio .....	321
Gráfico 5.6 - Estimacão não-paramétrica do gasto com bens de adultos .....	324
Gráfico 5.7 - Estimacão não-paramétrica do gasto com vestuário de adulto .....	325
Gráfico 6.1 - Densidades de probabilidade das rendas e despesas - PPV .....	378
Gráfico 6.2 - Valores esperados do método de Antuérpia em relação ao log da renda domiciliar – PPV .....	380
Gráfico 6.3 - Densidades de probabilidade das rendas e despesas - POF.....	385
Gráfico 6.4 - Valores esperados do método de Antuérpia em relação ao log da despesa domiciliar - POF .....	387
Gráfico 6.5 - Valores esperados do método da Renda Mínima em relação ao log da renda domiciliar - PPV .....	391

Gráfico 6.6 - Valores esperados do método da Renda Mínima em relação ao log da despesa domiciliar - POF.....	394
Gráfico 6.7 - Regressão de Leyden para a suficiência de renda - PPV.....	398

## **Quadros**

Quadro 3.1 - Relação entre os modelos .....	163
Quadro 5.1 - Algoritmo de estimação do modelo de Prais-Houthakker .....	303
Quadro 6.1 - Questão de Avaliação da Renda .....	340
Quadro 6.2 - Exemplo da Questão da Renda Mínima .....	358
Quadro 6.3 - Exemplo da Questão de Satisfação da Renda .....	362
Quadro 6.4 - Exemplo da Questão de Adequação do Consumo.....	364
Quadro 6.5 - Perguntas subjetivas na PPV .....	370
Quadro 6.6 - Perguntas subjetivas na POF 2002-2003 .....	372

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Composição da despesa corrente familiar nas principais regiões urbanas e metropolitanas.....	120
Tabela 3.2 - Despesas médias e gastos nulos na POF 2002-2003 .....	125
Tabela 3.3 - Despesas com alimentação fora do domicílio .....	127
Tabela 3.4 - Definição das variáveis utilizadas nos modelos.....	135
Tabela 3.5 - Estatísticas da amostra .....	139
Tabela 3.6 - Resumo dos testes de hipóteses aplicados aos modelos .....	152
Tabela 3.7 - Parâmetros estimados do modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados.....	153
Tabela 3.8 - Parâmetros estimados do modelo de Infrequência de Aquisição IHS.....	154
Tabela 3.9 - Efeitos marginais do modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados .....	157
Tabela 3.10 - Efeitos marginais do modelo de Infrequência de Aquisição IHS.....	160
Tabela 3.11 - Elasticidades estimadas do modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados .....	161
Tabela 3.12 - Elasticidades estimadas do modelo de Infrequência de Aquisição IHS.....	162
Tabela 3.13 - Testes de especificação dos modelos .....	165
Tabela 4.1 - Despesa média equivalente por tamanho do domicílio e $\theta$ .....	205
Tabela 4.2 - Despesa média equivalente por tamanho do domicílio e $\eta$ .....	206
Tabela 4.3 - Coeficiente de correlação entre a despesa <i>per capita</i> e o número de crianças por tamanho de domicílio .....	207
Tabela 4.4 - Efeito do peso da criança sobre a proporção de pobres, segundo características selecionadas.....	221
Tabela 4.5 - Efeito do peso da criança sobre a composição da pobreza, segundo características selecionadas.....	223
Tabela 4.6 - Efeito da economia de escala sobre a proporção de pobres, segundo características selecionadas.....	225
Tabela 4.7 - Efeito da economia de escala sobre a composição da pobreza, segundo características selecionadas.....	226
Tabela 5.1 - Descrição das variáveis utilizadas nos modelos .....	299
Tabela 5.2 - Escalas de equivalência estimadas pelo modelo de Engel .....	311
Tabela 5.3 - Teste de Hausman das estimativas obtidas por VI no modelo de Engel .....	313
Tabela 5.4 - Teste de Wald da validade do modelo de Engel .....	315
Tabela 5.5 - Parâmetros estimados por VI da fração da despesa com alimentação .....	317
Tabela 5.6 - Parâmetros estimados por LAD do preço e da quantidade adquirida de alimentos.....	322
Tabela 5.7 - Escalas de equivalência estimadas pelo modelo de Rothbarth .....	326
Tabela 5.8 - Teste de Hausman das estimativas obtidas por VI no modelo de Rothbarth.....	326

Tabela 5.9 - Frações implícitas das despesas de consumo entre adultos e crianças – vestuário de adulto .....	329
Tabela 5.10 - Escalas de equivalência do modelo de Prais-Houthakker .....	332
Tabela 5.11 - Parâmetros estimados das equações referentes às escalas de equivalência específicas do modelo de Prais-Houthakker .....	333
Tabela 5.12 - Elasticidades-dispêndio da despesa com cada grupo de bens, por tipo de domicílio.....	334
Tabela 6.1 - Descrição das variáveis utilizadas nos modelos .....	374
Tabela 6.2 - Valor médio das variáveis utilizadas segundo a dificuldade de viver com a renda atual .....	375
Tabela 6.3 - Linhas de pobreza segundo o método de Antuérpia - PPV .....	377
Tabela 6.4 - Linhas de pobreza e escala de equivalência pelo método de Antuérpia - PPV .....	382
Tabela 6.5 - Estatísticas descritivas na POF 2002-2003 .....	384
Tabela 6.6 - Escalas de equivalência pelo método de Antuérpia - POF .....	389
Tabela 6.7 - Linhas de pobreza e escalas de equivalência estimadas pelo método da Renda Mínima - PPV .....	392
Tabela 6.8 - Linhas de pobreza e escalas de equivalência estimadas pelo método da Renda Mínima - POF.....	395
Tabela 6.9 - Respostas da questão de avaliação da renda da PPV .....	397
Tabela 6.10 - Linhas de pobreza e escalas de equivalência estimadas pelo método de Leyden - PPV.....	399
Tabela A.1 - Períodos de referência das informações de despesas da POF 2002-2003.....	427
Tabela A.2 - Despesa média mensal familiar por tipo - POF 2002-2003.....	430
Tabela A.3 - Rendimento médio mensal familiar por tipo - POF 2002-2003 .....	432
Tabela B.1 - Parâmetros estimados do do modelo de Barreira Dupla IHS com erros independentes.....	440
Tabela B.2 - Parâmetros estimados do Tobit IHS .....	441
Tabela B.3 - Parâmetros estimados do modelo de Duas Partes IHS.....	442
Tabela B.4 - Parâmetros estimados do modelo de Infrequência de Aquisição .....	443
Tabela B.5 - Parâmetros estimados do modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados .....	444
Tabela B.6 - Parâmetros estimados do modelo de Barreira Dupla com erros independentes.....	445
Tabela B.7 - Parâmetros estimados do modelo Tobit .....	446
Tabela B.8 - Parâmetros estimados do modelo de Duas Partes .....	447
Tabela C.1 - Parâmetros estimados pelo método de Antuérpia - PPV .....	450
Tabela C.2 - Parâmetros estimados pelo método de Antuérpia - POF.....	451
Tabela C.3 - Parâmetros estimados pelo método da Renda Mínima - PPV .....	452
Tabela C.4 - Parâmetros estimados pelo método da Renda Mínima - POF.....	453
Tabela C.5 - Parâmetros estimados pelo método de Leyden - PPV .....	454

## LISTA DE ABREVIÇÕES E SIGLAS

POF: Pesquisa de Orçamentos Familiares do IBGE

PPV: Pesquisa sobre Padrões de Vida

FIML: *Full Information Maximum Likelihood*; modelo de máxima verossimilhança com informação completa

LR: *Likelihood Ratio*; teste da razão da verossimilhança

IBGE: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

MQO: mínimos quadrados ordinários

IHS: *inverse hyperbolic sine transformation*; transformação seno hiperbólica inversa.



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\phi(x)$ : função de densidade de probabilidade da distribuição normal padrão.

$\Phi(x)$ : função de distribuição acumulada normal padrão.

$\psi(x, y, \rho)$ : função de densidade de probabilidade da distribuição normal padrão bivariada.

$\Psi(x, y, \rho)$ : função de distribuição acumulada normal padrão bivariada.

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$ : variável aleatória  $x$  distribuída normalmente, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .

$\chi_{(q)}^2$ : distribuição qui-quadrado, com  $q$  graus de liberdade.

$x \sim \mathcal{B}(n, p)$ : a variável aleatória  $x$  possui distribuição binomial, com parâmetros dados pelo tamanho amostral  $n$  e a probabilidade de ocorrer o evento  $p$ .

$M(x) = \phi(x)/\Phi(x)$  é denominado de *razão inversa de Mills*.



## 1 INTRODUÇÃO

Na literatura sobre pobreza e desigualdade, utiliza-se em geral a renda domiciliar *per capita* como medida de comparação do bem-estar de famílias com diferentes composições demográficas. Esta medida de bem-estar, no entanto, contraria as ideias geralmente aceitas de que uma criança custa menos do que um adulto e que duas pessoas morando juntas podem viver com menos recursos do que duas pessoas separadas a um mesmo nível de bem-estar. Uma forma de incorporar estes fatores pode ser feita com a utilização de um índice que converte as rendas nominais de famílias de diferentes composições demográficas em uma medida comparável de bem-estar. Este índice denomina-se *escala de equivalência*, e permite transformar a renda (ou despesa) nominal de domicílios heterogêneos em uma medida comparável de bem-estar entre indivíduos homogêneos.

O conhecimento das escalas de equivalências é importante, pois pode ajudar o desenho de políticas públicas que têm na família a principal unidade beneficiária. Um exemplo são os programas de transferência de renda, que tendem a priorizar famílias com crianças em detrimento de famílias sem crianças. Em tais programas (por exemplo, o desenho original do Bolsa Família), define-se em geral um benefício fixo a ser recebido por todas as famílias pobres (definido a partir de uma determinada estrutura familiar), e um benefício variável destinado às crianças. Normalmente esse benefício variável é definido a partir de um critério arbitrário, sem levar em consideração as necessidades relativas de recursos das crianças em relação aos adultos.

Outro exemplo consiste na definição do valor da pensão por morte que uma viúva tem direito a receber. Quando vivo, o valor da aposentadoria que o marido recebia incorporava implicitamente uma determinada estrutura familiar. Com o seu falecimento, esta estrutura familiar é alterada e, junto com ela, os recursos necessários para que a viúva e os demais membros do domicílio mantenham o mesmo nível de bem-estar material. Nesse caso o conhecimento das escalas de equivalências pode ajudar a definir parâmetros gerais que

definem o valor da pensão necessário para restabelecer o nível de bem-estar material prévio do domicílio.

Dado que a função de utilidade é definida apenas para indivíduos, mas diversos bens e recursos são compartilhados dentro do domicílio, análises de bem-estar entre indivíduos devem ser baseadas em um modelo de bem-estar do domicílio. Como esse bem-estar pode ser definido de diversas formas, segue que diferentes modelos, utilizando-se a mesma evidência empírica, podem obter distintos valores para as escalas de equivalência estimadas.

A literatura sobre mensuração de escalas de equivalência se desenvolveu dentro de quatro abordagens distintas (Mancero, 2001), que serão denominadas ao longo desta tese de: *a)* abordagem nutricional; *b)* abordagem da preferência revelada; *c)* abordagem subjetiva; e *d)* abordagem paramétrica.

A abordagem *nutricional*, geralmente associada à construção de linhas de pobreza, utiliza a informação das necessidades nutricionais de diferentes grupos demográficos para determinar o custo relativo entre uma criança e um adulto. No Brasil, os trabalhos de Rocha (1998, 2001) e mais recentemente Claro *et al* (2010) constituem aplicações dessa abordagem para o país. Na literatura internacional, a metodologia desenvolvida por Mollie Orshansky nos anos 1960s representa a referência mais conhecida, pelo fato de ter sido aplicada na construção das linhas de pobreza dos Estados Unidos<sup>1</sup>.

A abordagem da *preferência revelada* parte da observação do comportamento do consumidor quanto aos gastos com diversos bens e serviços, e da relação entre estes gastos e a renda domiciliar, os preços relativos e a composição demográfica do domicílio para determinar suas preferências e, indiretamente, o seu bem-estar. Essa é a abordagem que será objeto de estudo do Capítulo 5.

A abordagem *subjetiva* utiliza informações de questões subjetivas coletadas em pesquisas domiciliares a respeito das preferências da pessoa de referência do domicílio e os

---

<sup>1</sup> Para uma resenha dos trabalhos de Orshansky, ver Fisher (1992).

valores monetários que ele atribui a determinados níveis de bem-estar para estimar a escala de equivalência. O objetivo é contrapor-se à abordagem de preferência revelada. Goedhart *et al.* (1977), por exemplo, apresentam um método baseado em pesquisas domiciliares onde se pergunta à pessoa de referência do domicílio qual a renda mínima necessária para que as necessidades da família sejam satisfeitas. A partir dessa informação, estima-se a relação existente entre a “renda mínima”, a renda domiciliar e a composição demográfica do domicílio, considerando o fato de que famílias ricas em geral irão atribuir valores mais altos para a “renda mínima”, embora abaixo de sua renda domiciliar, e o contrário irá ocorrer para famílias muito pobres (ancoragem das preferências).

Por fim, a abordagem *paramétrica* consiste em definir uma forma funcional arbitrária para as escalas de equivalências e atribuir a ela valores de parâmetros exógenos, geralmente extraídos de algum tipo de metanálise de trabalhos empíricos ou a partir da percepção do pesquisador dos valores que ele considera adequados.

Para se estimar os modelos de escalas de equivalências desenvolvidos dentro da abordagem de preferência revelada, deve-se utilizar dados de despesas dos domicílios com diferentes produtos e estimar um modelo de demanda apropriado. Ocorre que existem alguns problemas neste tipo de informação que complicam a estimação dos parâmetros de qualquer modelo de demanda. Em particular, uma característica muito comum em pesquisas de orçamentos familiares consiste na existência de um elevado número de domicílios que não possuem despesas com determinados produtos. Este fato pode ocorrer por diversos motivos, dentre os quais se destacam: *a)* a infreqüência de aquisição de determinados itens de despesas; *b)* a abstenção decorrente de hábitos e preferências do consumidor; e *c)* solução de canto do problema do consumidor. O conhecimento adequado de tais gastos nulos é de suma importância para a estimação de curvas de Engel, já que tratamentos inadequados destas observações podem resultar em estimativas viesadas e inconsistentes (Amemiya, 1984, 1985).

Assim, os objetivos gerais desta tese consistem em:

- a)* Discutir qual a forma mais apropriada para se estimar a demanda por um produto quando se observa um elevado percentual de famílias que não o adquiriram.

- b) Analisar o efeito das escalas de equivalências sobre as medidas de desigualdade e pobreza.
- c) Discutir os principais modelos teóricos definidos para as escalas de equivalência e estimar tais modelos com dados do Brasil.

Para se atingir estes objetivos gerais, dividiu-se a tese em duas partes. Na primeira parte analisa-se o problema dos gastos nulos presentes em pesquisas de orçamentos familiares. Isso é feito em dois capítulos. No Capítulo 2 derivam-se os principais modelos desenvolvidos para lidar com este tipo de informação. O Capítulo 3 utiliza alguns desses modelos para estimar os fatores que influenciam as despesas com alimentação fora do domicílio.

Nesta parte, procura-se responder à seguinte questão: qual a forma mais apropriada de estimar a demanda por um produto quando existe um percentual elevado de famílias que não apresentam gastos com este produto? A hipótese é que nem sempre o modelo correto é identificado a partir dos dados e, portanto, a identificação da origem dos gastos nulos deve ser definida pelo pesquisador como um pressuposto para a estimação do modelo. Um exemplo onde tal pressuposto pode ser definido é a análise da demanda por itens de fumo (cigarros, charutos, etc). Muitas pessoas não adquirem estes itens por considerá-los um “mal”; nesse caso, o pesquisador pode assumir que, para a maior parte das pessoas, a não aquisição de itens de fumo decorre mais de uma abstenção do consumidor do que de uma infrequência de aquisição. No final, o pressuposto assumido irá se traduzir na escolha de um modelo estatístico que incorpora a abstenção como um motivo para a existência dos gastos nulos e ignora completamente os valores nulos resultantes da infrequência de aquisição.

Na segunda parte, analisa-se o tema das escalas de equivalência em três capítulos. No Capítulo 4 investigam-se os efeitos das escalas de equivalência sobre as medidas de desigualdade e pobreza por meio de variações nos parâmetros de uma escala paramétrica específica. Nos Capítulos 5 e 6 apresentam-se diferentes modelos de escalas de equivalência desenvolvidos dentro da abordagem da preferência revelada e da abordagem subjetiva. Em ambos os capítulos estes modelos são estimados, testados à luz de seus pressupostos e discutidos.

Nesta parte, procura-se responder às seguintes questões:

- a) Como as escalas de equivalência alteram as análises de pobreza e distribuição de renda?
- b) Quais são os modelos teóricos existentes para estimar as escalas de equivalência? Quais são os seus pressupostos, limitações e aplicabilidade empírica? No que estes modelos diferem no que diz respeito à noção de bem-estar subjacente?
- c) Qual a sensibilidade das escalas de equivalência à escolha do modelo teórico?

As hipóteses são que *a)* a utilização das escalas de equivalência altera significativamente as medidas de pobreza e desigualdade de renda; e *b)* como diferentes modelos incorporam diferentes concepções do custo da criança, usualmente implícitas, segue que, diferentes modelos, apesar de objetivarem medir o “custo da criança”, não estão de fato medindo a mesma coisa. Assim, tão importante quanto o valor das estimativas obtidas para as escalas de equivalência é o conceito de bem-estar do domicílio nos quais estas estimativas se apoiam.

O foco da tese será em modelos que possam ser aplicados em pesquisas *cross section*, ou seja, assumindo-se que os preços são fixos. Na abordagem da preferência revelada, por exemplo, serão estudados apenas modelos que possam ser estimados por curvas de Engel. Portanto, não serão considerados modelos baseados em sistemas completos de demanda, onde é necessário ter informações de preços de cada um dos bens para realizar o processo de estimação.

Além disso, para limitar o escopo do trabalho, não se pretende fazer uma análise exaustiva de todos os modelos desenvolvidos nas distintas abordagens. A abordagem nutricional, por exemplo, não será contemplada nesta tese. Também não será analisada uma classe específica de modelos desenvolvidos dentro da abordagem da preferência revelada, os chamados modelos *coletivos* (Bargain; Donni, 2012; Browning; Chiappori; Lewbel, 2010; Browning et al., 1994; Lewbel; Pendakur, 2008).

Os modelos coletivos são baseados no pressuposto de que as alocações intradomiciliares são *eficientes*. Com base neste pressuposto, é possível determinar a regra de alocação de recursos dentro do domicílio por meio da atribuição de exclusividade do consumo de um determinado bem a um dos membros do domicílio. Essa formulação se assemelha muito àquela utilizada pelo modelo de Rothbarth – que será foco de análise no Capítulo 5 – onde se atribui o consumo de um conjunto de bens exclusivamente aos adultos, e a partir disso estima-se a regra de alocação de recursos entre adultos e crianças para o cálculo das escalas de equivalência. A diferença é que o modelo de Rothbarth pode ser visto como um caso particular do modelo coletivo, onde os pais são tratados como uma única entidade e a repartição de recursos no domicílio ocorre entre adultos e crianças, excluindo-se a possibilidade de existência de bens públicos no domicílio. Chiappori (1992) mostra que os pressupostos do modelo coletivo relaxam as restrições impostas sobre a demanda observada dos domicílios; em particular, as restrições de Slutsky, que frequentemente são rejeitadas nos modelos de demanda tradicionais, não precisam ser necessariamente satisfeitas no modelo coletivo. Percebe-se portanto que apesar dos modelos coletivos representarem um importante desenvolvimento teórico no campo de estudo das escalas de equivalências, uma análise aprofundada destes modelos requer um capítulo específico adicional, o que está fora do escopo desta tese.

Assim, o desenvolvimento desta tese busca contribuir para a literatura por meio de:

- a) Uma discussão e derivação completa dos principais modelos desenvolvidos para a estimação de demanda na presença de gastos nulos (funções de verossimilhança, valores esperados e efeitos marginais).
- b) Uma estimação e comparação dos resultados dos principais modelos desenvolvidos para a presença de gastos nulos para o caso específico da demanda por alimentação fora do domicílio no Brasil.
- c) Uma análise dos efeitos das escalas de equivalência sobre as medidas de desigualdade e pobreza em um país com a composição demográfica brasileira.

- d)* Um apanhado geral dos modelos de escalas de equivalência desenvolvidos dentro da abordagem subjetiva e da abordagem da preferência revelada, e a discussão a fundo dos seus pressupostos, limitações e aplicabilidade empírica.
- e)* Uma estimação dos principais modelos de escalas de equivalência existentes na abordagem subjetiva e na abordagem da preferência revelada com dados do Brasil.



## **PARTE I**

### **DEMANDA DO CONSUMIDOR**



## 2 ESTIMAÇÃO DE CURVAS DE ENGEL NA PRESENÇA DE GASTOS NULOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Pesquisas de orçamentos familiares constituem uma importante fonte de informação para a análise de políticas públicas. Isso porque tais pesquisas capturam em detalhes os componentes das despesas e dos rendimentos das famílias, possibilitando a análise da demanda de diversos produtos, a construção dos ponderadores dos índices de preços ao consumidor e o cálculo de linhas de pobreza absolutas, dentre outros usos. Apesar desta riqueza de informações, a estimação de modelos econométricos a partir destes dados frequentemente é dificultada pela ampla gama de problemas estatísticos presentes nas informações de despesas e rendimentos (*outliers*, não normalidade dos resíduos, correlação entre os erros de medida das variáveis dependentes e independentes, heterocedasticidade, simultaneidade entre a despesa com determinado produto e o valor da despesa total, etc).

Um dos problemas em particular que prejudica as análises de demanda do consumidor é a existência de um elevado percentual de domicílios que não apresentam despesas com o produto em análise. Este problema, que acomete quase todos os itens desagregados de despesas, pode ter origem em diversos fatores, e a escolha da técnica estatística apropriada para lidar com ele pode ser crucial para os resultados produzidos. Tratamentos inadequados dos gastos nulos podem gerar resultados viesados e inconsistentes (Amemiya, 1984, 1985).

A solução normalmente utilizada para lidar com o problema dos gastos nulos tem sido a utilização do modelo Tobit (Tobin, 1958) para estimar relações de demandas censuradas. O problema é que, no modelo Tobit, um único mecanismo determina tanto a decisão de *participação* do mercado quanto a escolha de *quanto* consumir. Em outras palavras, se uma variável aumenta a probabilidade de um valor positivo de consumo, ela possui um efeito positivo também sobre a quantidade consumida do produto para os indivíduos que já são consumidores. Esta restrição, no entanto, pode não ser válida para todos os casos. Por

exemplo, uma propaganda pode influenciar não-fumantes a fumar, mas tem pouco efeito em fazer indivíduos fumantes adquirirem quantidades maiores de cigarro.

Outro problema do modelo Tobit é que este baseia-se no pressuposto de que o gasto nulo origina-se de uma solução de canto do problema de maximização do consumidor. Isto faz com que este modelo seja inapropriado para os casos onde o gasto nulo é gerado por outros fatores, como, por exemplo, uma infrequência de aquisição ou a abstenção do consumo por parte do consumidor.

Buscando resolver estes problemas, Cragg (1971) desenvolveu uma classe de modelos conhecida como *double hurdle*, ou barreira dupla, para aplicação nos casos onde as observações nulas originam-se ou da solução de canto do consumidor ou de uma decisão de abstenção do consumo do produto. De acordo com a lógica do modelo *double hurdle*, os indivíduos devem passar por duas barreiras separadas antes que possamos observar um valor positivo de consumo. Estas barreiras representariam a decisão individual de *participação* do mercado consumidor e a decisão da *quantidade* a ser consumida do produto.

A razão para separar os processos de decisão é que, se o indivíduo decidiu ser um não-fumante, sua decisão de não fumar não será afetada pelos níveis de preços dos cigarros ou por sua renda domiciliar, pois sua motivação originou-se de fatores não-econômicos. Por outro lado, se um indivíduo for fumante, podem existir determinados níveis de preços e de renda domiciliar para os quais ele decide não consumir. Ou seja, o grupo de fatores que influencia a decisão de fumar é diferente daquele que determina a quantidade que um fumante em potencial irá eventualmente consumir.

Utilizando uma estrutura semelhante de barreiras, Deaton e Irish (1984) e posteriormente Blundell e Meghir (1987) elaboram um modelo onde os gastos nulos originam-se ou da solução de canto do consumidor ou da infrequência de aquisição de determinado produto. Neste caso, a primeira barreira resulta da observação de que as compras de determinados produtos são infrequentes e, portanto, muitos domicílios não irão reportar gastos no período de captação da pesquisa.

Tendo em vista a variedade de modelos desenvolvidos para o tratamento das observações com despesas nulas, é importante a realização de uma comparação destes modelos, de seus pressupostos e de suas formulações. Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar os principais modelos econométricos que dão um tratamento diferenciado aos gastos nulos presentes nas pesquisas de orçamentos familiares, bem como seus pressupostos, semelhanças e diferenças a fim de guiar o pesquisador na escolha do método estatístico mais apropriado para os seus propósitos empíricos.

Além desta introdução, este capítulo divide-se em mais quatro seções. Na Seção 2.2 serão revistos os principais motivos para a presença de gastos nulos em pesquisas de orçamentos familiares. Na Seção 2.3 será mostrado o modelo Tobit para estimação de dados censurados. Na Seção 2.4 serão apresentadas soluções para lidar com o efeito da não-normalidade dos erros nos estimadores de máxima verossimilhança, que constitui o processo de estimação dos modelos apresentados neste capítulo. Na Seção 2.5 serão apresentados modelos alternativos ao modelo Tobit para a estimação de dados censurados. Por fim, a Seção 2.6 conterá uma discussão final sobre o conteúdo deste capítulo.

## **2.2 GASTOS NULOS EM PESQUISAS DE ORÇAMENTOS FAMILIARES**

Dentre os principais motivos para a existência de gastos nulos nas pesquisas de orçamentos familiares estão: *a*) a infrequência de aquisição, *b*) o sub-registro de informações, *c*) a abstenção decorrente dos hábitos e preferências do consumidor e *d*) a solução de canto do problema do consumidor. Nas seções a seguir, cada um destes motivos será analisado separadamente.

### **2.2.1 Infrequência de aquisição**

Um dos grandes problemas na análise de demanda vem do fato de que a maioria das pesquisas de orçamentos familiares é baseada em um período de observação relativamente curto. Como coloca Pudney (1989), o pesquisador, ao estimar um modelo de demanda, deseja estimar as verdadeiras taxas de consumo dos bens, uma vez que é do *consumo* que se obtém a

utilidade. No entanto, em pesquisas *cross-section*, observamos apenas os *gastos* com os bens, e como se assume que o gasto não gera utilidade, os dados coletados por essas pesquisas são relevantes apenas se o consumo e a quantidade adquirida forem sempre iguais.

Este não é o caso das pesquisas de orçamentos familiares, onde o período restrito de coleta de informações faz com que o consumo e a despesa sejam significativamente diferentes. Por exemplo, se um bem que é adquirido regularmente uma vez a cada quatro semanas, então ele terá 75% de probabilidade de não ser adquirido na semana de referência da pesquisa e uma probabilidade de 25% de ser adquirido neste tempo em uma quantidade quatro vezes superior à sua taxa média semanal de consumo. Assim, um valor nulo de despesa pode não corresponder a uma solução de canto do problema de maximização do consumidor, e um registro de gasto positivo pode não ser uma medida acurada da verdadeira taxa de consumo do produto.

A seriedade do problema irá depender do bem e do consumidor envolvido. Domicílios que possuem carro ou geladeira poderão realizar grandes e infrequentes aquisições de comida. Por outro lado, na presença de restrições de crédito, um baixo nível de renda dificultaria a formação de estoques, levando os domicílios mais pobres a realizar pequenas e frequentes aquisições de comida.

### **2.2.2 Sub-registro das informações**

O sub-registro de informações ocorre quando despesas de baixo valor ou realizadas muito antes da data da entrevista não são coletadas por conta do esquecimento do entrevistado. Dentre os motivos para a existência de gastos nulos, este é o mais difícil de identificar e corrigir. Gastos com balas e esmolos, por exemplo, frequentemente são esquecidos pelos entrevistados. Também é comum o esquecimento e a perda de registro de pequenas despesas com reparos do domicílio realizadas há quase 12 meses da data de entrevista.

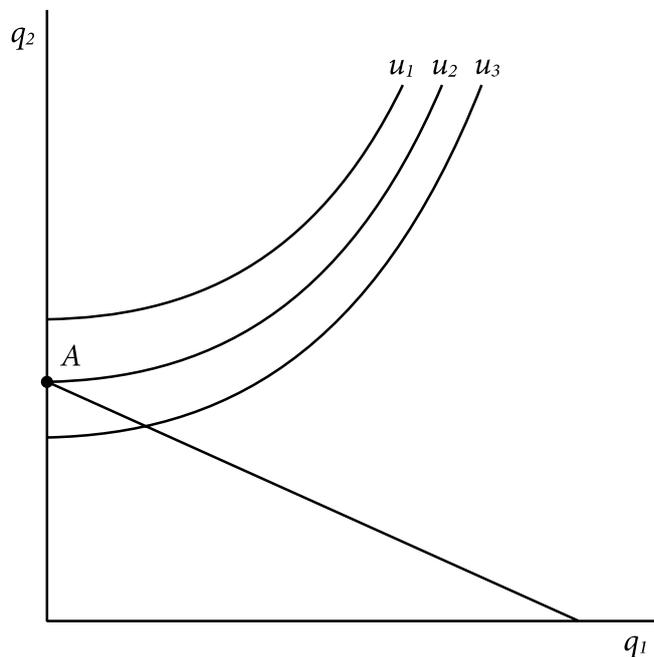
Outro motivo para o sub-registro de informações é a relutância dos entrevistados em declarar gastos associados a atividades ilegais ou “imorais”, tais como despesas com drogas, prostituição, jogos e apostas, etc.

### 2.2.3 Abstenção decorrente de hábitos e preferências do consumidor

Os hábitos e as preferências dos consumidores podem variar bastante entre os domicílios, e a observação de um gasto nulo pode ocorrer não apenas porque os domicílios são incapazes de adquirir o produto aos preços e à renda corrente, mas também por causa da abstenção, isto é, do fato de que o produto, para eles, simplesmente não seja um “bem”. Neste caso, motivos religiosos, problemas de saúde e fatores decorrentes do convívio social (prestígio ou estigma alcançado entre diferentes grupos sociais) podem fazer com que alguns indivíduos não participem do mercado de certos produtos. Exemplos disto são a abstenção do fumo e do álcool por algumas pessoas.

A Figura 2.1 ilustra esta situação. Nesta figura temos dois produtos, o produto 1 e o produto 2, com suas quantidades  $q_1$  e  $q_2$  representadas nos eixos horizontal e vertical respectivamente. O produto 2 é um “bem”, isto é, quanto maior o consumo, maior a utilidade obtida pelo consumidor. O produto 1, por outro lado, é um “mal”, isto é, quanto maior o seu consumo, menor é a utilidade do consumidor. Dada estas relações de preferência, as curvas de indiferença entre os produtos 1 e 2 terão inclinação positiva, fazendo com que, independentemente do nível de preços, o consumidor irá sempre demandar quantidades nulas do produto 1.

Figura 2.1 - Abstenção causada por um mal



Fonte: Elaboração própria.

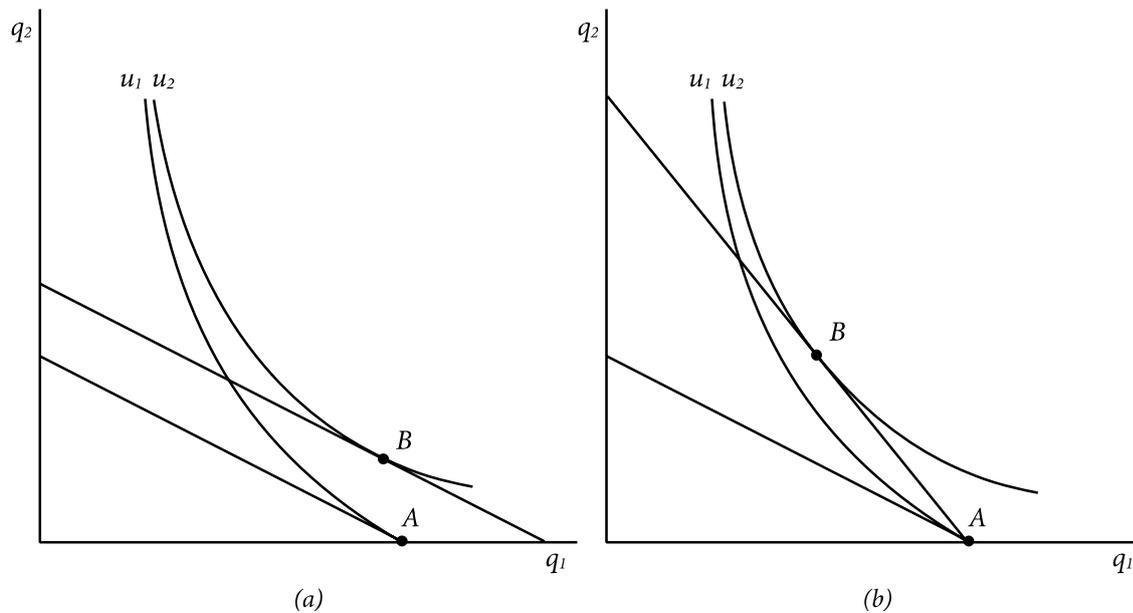
### 2.2.4 Solução de canto do problema do consumidor

Outra razão para se observar gastos nulos em pesquisas de orçamentos familiares ocorre quando o preço de mercado de um determinado produto excede o preço de reserva do domicílio, fazendo com que o domicílio opte por não adquirir o produto. Neste caso, apesar de o domicílio conter consumidores em potencial, eles não adquirem o produto, pois o preço de mercado é maior do que aquele que eles estão dispostos a pagar.

A Figura 2.2 ilustra esta situação. O eixo vertical representa as quantidades do bem 2 ( $q_2$ ), enquanto o eixo horizontal representa as quantidades do bem 1 ( $q_1$ ). Apesar de possuir utilidade marginal positiva em ambos os produtos, o consumidor não adquire o produto 2 aos preços e à renda corrente (ponto A em ambos os painéis). Isto ocorre porque, neste ponto, a taxa marginal de substituição entre os bens 1 e 2 é maior que a razão de preços entre estes dois bens. Em outras palavras, o consumidor prefere substituir o consumo do bem 2 pelo consumo do bem 1, mas está restrito pelo fato de não poder consumir quantidades negativas do bem 2. Neste caso, mudanças não-marginais na restrição orçamentária provocadas por um aumento

de renda (painel *a*) ou por uma diminuição no preço do bem 2 (painel *b*) podem fazer com que o domicílio opte por um consumo positivo de ambos os produtos (ponto *B* em ambos os painéis).

Figura 2.2 - Solução de canto do problema do consumidor



Fonte: Elaboração própria.

## 2.3 O MODELO TOBIT PARA SOLUÇÕES DE CANTO

Considere o problema de se estimar a demanda dos domicílios por computadores. Tal dado possui duas características principais:

- a) Ele não possui valores negativos
- b) Existe um grande número de observações com gastos nulos

Para ser coerente, um modelo econométrico deve estar apto a levar em consideração essas duas características. Em particular, este modelo deve: *a*) atribuir uma probabilidade positiva à massa de observações com consumo nulo e; *b*) não deve permitir valores preditos negativos.

Wooldridge (2002, p. 517–520) distingue este tipo de modelo, que chama de modelos de solução de canto, de uma classe de modelos muito parecida, denominada modelos de regressão censurada.

Nos *modelos de solução de canto*, a variável dependente  $y$  derivada de um comportamento otimizador de um agente econômico é perfeitamente observada. Sua característica principal é que  $y$  é contínua sobre o domínio de valores positivos, mas é nula para uma fração não trivial da população. Isso ocorre tipicamente em problemas de maximização do consumidor. Os valores nulos, neste caso, originam-se de uma solução de canto desse problema: o agente maximiza a sua utilidade escolhendo uma quantidade do bem sob a restrição de que a demanda por este bem deve ser não-negativa. Alguns indivíduos escolherão consumir quantidades positivas do produto ( $y > 0$ ), enquanto outros indivíduos escolherão não consumir este produto ( $y = 0$ ).

Nos *modelos de regressão censuradas*, por outro lado, a variável dependente  $y$  não é perfeitamente observada. Ela assume valores desconhecidos quando o seu valor está abaixo ou acima de uma determinada barreira; nesse caso, a variável dependente  $y$  possui valores faltantes (*missing data*) para algumas observações da amostra. Um exemplo típico é a codificação de rendas muito altas em pesquisas domiciliares com o objetivo de assegurar o sigilo das informações.

Ambos os tipos de modelos nos levam ao modelo Tobit para dados censurados, ou modelo Tobit tipo I, segundo a nomenclatura adotada por Amemya (1985)<sup>2</sup>.

Conforme argumentam Winkelmann e Boes (2009, p. 211), um modelo de regressão linear simples seria inapropriado neste contexto pelos seguintes motivos. Primeiro, ele ignora que a variável dependente – o valor consumido do produto – não pode ser negativa. Ao ignorar esta restrição, estaríamos escolhendo um modelo ineficiente, onde o valor predito da variável dependente pode assumir valores negativos. Segundo, o modelo linear impõe efeitos

---

<sup>2</sup> Ambos os modelos possuem a mesma função de verossimilhança. O que os difere é apenas a fórmula de cálculo dos valores esperados (Wooldridge, 2002).

marginais constantes, o que é irreal em um modelo onde a variável dependente é limitada inferiormente. Por fim, qualquer modelo estritamente contínuo será incapaz de levar em consideração as diferenças qualitativas entre as observações censuradas e as observações não-censuradas.

Isto não quer dizer que o modelo de MQO seja de todo desprezível. De fato, o método de MQO é o melhor preditor linear que se pode obter dos dados. Em outras palavras, apesar de o método de MQO falhar em capturar as não-linearidades dos efeitos marginais, os estimadores de MQO obtidos na amostra completa de dados podem dar uma boa aproximação do efeito marginal das variáveis nos valores médios das variáveis explicativas (Winkelmann; Boes, 2009, cap. 7).

A principal limitação do modelo de MQO, no entanto, parece ser que ele não pode ser utilizado para analisar quantidades de interesse além do valor esperado da variável dependente. Em outras palavras, enquanto o modelo de MQO é definido para estimar  $E[y | \mathbf{x}]$ , onde  $y$  é o valor da despesa com determinado bem e  $\mathbf{x}$  é um conjunto de características do domicílio, nos modelos de solução de canto o pesquisador está interessando também em conhecer outras informações, tais como:

- $\text{Prob}[y = 0 | \mathbf{x}]$ , a probabilidade de ocorrência de valores nulos na variável dependente; e
- $E[y | \mathbf{x}, y > 0]$ , o valor esperado da variável dependente, condicional na despesa com o produto ser positiva.

### 2.3.1 Derivação do modelo Tobit

Para lidar com os dados resultantes de uma solução de canto, Tobin (1958) propôs um método onde ambos os aspectos,  $\text{Prob}[y = 0 | \mathbf{x}]$  e  $E[y | \mathbf{x}, y > 0]$ , são manifestações de uma única variável latente parcialmente observada  $y_i^*$ . Seja

$$y_i^* = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \text{onde } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.1)$$

a variável latente que denota o montante que o consumidor está disposto a pagar para adquirir determinado produto,  $\mathbf{x}'_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{iK}]$  um vetor de características da observação  $i$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  um conjunto de parâmetros e  $\varepsilon_i$  um erro aleatório com distribuição  $N(0, \sigma^2)$ . Defina uma variável  $y_i$  que representa os valores observados da variável dependente na amostra. Como não é possível consumir quantidades negativas do produto, observamos  $y_i^*$  quando  $y_i^* > 0$ , mas não observamos  $y_i^*$  quando  $y_i^* \leq 0$ . Em outras palavras, observamos apenas a variável  $y_i$ , que assume os valores

$$y_i = \begin{cases} y_i^* & \text{se } y_i^* > 0 \\ 0 & \text{se } y_i^* \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

A variável dependente observada,  $y_i$ , neste caso, pode ser considerada censurada, uma vez que nós não observamos os valores de  $y_i^*$  quando  $y_i^* \leq 0$ , mas observamos que o domicílio não adquiriu o produto, assim como as características  $\mathbf{x}_i$  dos domicílios que não adquiriram o produto. Com uma mudança de formulação, no entanto, podemos transformar a variável dependente  $y_i$  como o resultado de um problema de maximização:

$$y_i = \max\{0, y_i^*\} = \max\{0, \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i\} \quad (2.3)$$

O modelo descrito pelas equações (2.1) e (2.3) é conhecido como modelo *Tobit*, em alusão ao nome de seu autor, Tobin (1958), e de sua semelhança com o modelo Probit. Para estimar os seus parâmetros, utiliza-se em geral o método de máxima verossimilhança.

O processo de estimação consiste no seguinte. Para as observações em que  $y_i = 0$ , a contribuição para a verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_i = 0 \mid \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i^* \leq 0 \mid \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}[\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \leq 0 \mid \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}[\varepsilon_i \leq -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}\left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \leq -\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \mid \mathbf{x}_i\right] \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de simetria da distribuição normal, tem-se  $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ , onde  $\Phi(\cdot)$  denota a função de distribuição acumulada normal padrão. Além disso, dado que  $\varepsilon_i / \sigma \sim N(0,1)$ , segue que

$$\text{Prob}\left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \leq -\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \mid \mathbf{x}_i\right] = \Phi\left(-\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)$$

Portanto,

$$\text{Prob}[y_i = 0 \mid \mathbf{x}_i] = 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.4)$$

Para as observações em que  $y_i > 0$ , a contribuição para a verossimilhança será dada por  $\text{Prob}[y_i > 0 \mid \mathbf{x}_i] f(y_i \mid \mathbf{x}_i, y_i > 0)$ , onde  $f(y_i \mid \mathbf{x}_i, y_i > 0)$  é a função de densidade de probabilidade de  $y_i$ , condicional em  $\mathbf{x}_i$  e nos valores positivos de  $y_i$ .

Note que como

$$f(y_i^* \mid \mathbf{x}_i, y_i^* > 0) = \frac{f(y_i^* \mid \mathbf{x}_i)}{\text{Prob}[y_i^* > 0 \mid \mathbf{x}_i]}$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_i > 0 \mid \mathbf{x}_i] f(y_i \mid \mathbf{x}_i, y_i > 0) &= \text{Prob}[y_i^* > 0 \mid \mathbf{x}_i] f(y_i^* \mid \mathbf{x}_i, y_i^* > 0) \\ &= \text{Prob}[y_i^* > 0 \mid \mathbf{x}_i] \frac{f(y_i^* \mid \mathbf{x}_i)}{\text{Prob}[y_i^* > 0 \mid \mathbf{x}_i]} \\ &= f(y_i^* \mid \mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Juntando todas as observações, obtém-se a função de verossimilhança:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma) &= \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\right] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)^2\right]\right] \\ &= \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left[1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\right] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \left[\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $\phi(\cdot)$  indica a função de densidade de probabilidade da distribuição normal padrão,  $\{i: y_i = 0\}$  indica que o produtório é calculado sobre o conjunto de observações que

apresentam valores nulos na variável dependente e  $\{i: y_i > 0\}$  indica que o produtório é calculado sobre o conjunto de observações com variável dependente positiva.

Alguns pontos podem ser notados observando-se a função (2.6). Em primeiro lugar, compare a função de verossimilhança do modelo Tobit com a função de verossimilhança do modelo Probit e do modelo de regressão truncada. As funções de verossimilhanças que representam a *probabilidade* de  $y_i > 0$  (Probit) e o *valor* de  $y_i > 0$  (modelo de regressão truncada) são dadas respectivamente por

$$L^{\text{Probit}} = \prod_{\{i: y_i=0\}} [1 - \Phi(z_i'\alpha)] \times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(z_i'\alpha)$$

$$L^{\text{Truncada}} = \prod_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{x_i'\beta}{\sigma}\right) \right]^{-1}$$

Se multiplicarmos e dividirmos a função de verossimilhança do modelo Tobit por  $\prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(x_i'\beta/\sigma)$ , teremos

$$L(\beta, \sigma) = \underbrace{\prod_{\{i: y_i=0\}} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{x_i'\beta}{\sigma}\right) \right] \times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi\left(\frac{x_i'\beta}{\sigma}\right)}_{\text{função de verossimilhança do modelo Probit}}$$

$$\times \underbrace{\prod_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{x_i'\beta}{\sigma}\right) \right]^{-1}}_{\text{função de verossimilhança do modelo de regressão truncada}}$$

A primeira linha corresponde à função de verossimilhança do modelo Probit utilizando  $\alpha = \beta/\sigma$  como parâmetro e  $z_i = x_i$  como variáveis explicativas, enquanto a segunda linha corresponde ao modelo de regressão truncada para  $y_i > 0$ . A hipótese  $H_0: \alpha = \beta/\sigma$  pode ser facilmente verificada com um teste de razão de verossimilhança. Se este teste levar a uma rejeição da hipótese nula, então o modelo Tobit pode estar impondo mais restrições que o necessário para a estimação dos parâmetros.

Por causa desta característica, a normalização  $\sigma = 1$  usualmente aplicada no modelo Probit para fins de identificação não pode ser feita no modelo Tobit. Isto decorre do fato de que, embora apenas a razão  $\beta/\sigma$  seja identificada na primeira parte da função de

verossimilhança do modelo Tobit (tal como ocorre no modelo Probit), os coeficientes  $\beta$  e  $\sigma$  são identificados separadamente na segunda parte da função de verossimilhança (tal qual ocorre no modelo de regressão truncado).

Esta característica peculiar é a grande responsável pelo modelo Tobit ser muito sensível à presença de heterocedasticidade. Tal sensibilidade resulta do fato de que uma especificação errada de  $\sigma$  afeta diretamente o coeficiente  $\beta$ , apesar de os dois coeficientes serem separadamente identificados.

A partir do logaritmo da função de verossimilhança, obtém-se a função de log-verossimilhança

$$l(\beta, \sigma) = \ln L(\beta, \sigma) = \sum_{\{i: y_i=0\}} \ln \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \beta}{\sigma} \right) \right] + \sum_{\{i: y_i>0\}} \left[ -\ln \sigma + \ln \phi \left( \frac{y_i - \mathbf{x}'_i \beta}{\sigma} \right) \right] \quad (2.7)$$

Os parâmetros de máxima verossimilhança são encontrados maximizando esta função em relação aos parâmetros  $\beta$  e  $\sigma$ . As condições de primeira ordem são dadas por

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = - \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{\phi_i}{1 - \Phi_i} \frac{\mathbf{x}_i}{\sigma} - \sum_{\{i: y_i>0\}} \left( \frac{y_i - \mathbf{x}'_i \beta}{\sigma} \right) \frac{\mathbf{x}_i}{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{1}{\sigma} \frac{\phi_i}{1 - \Phi_i} \frac{\mathbf{x}'_i \beta}{\sigma} + \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma} \left[ \left( \frac{y_i - \mathbf{x}'_i \beta}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (2.9)$$

onde  $\phi_i = \phi \left( (y_i - \mathbf{x}'_i \beta) / \sigma \right)$  e  $\Phi_i = \Phi \left( \mathbf{x}'_i \beta / \sigma \right)$ .

A maximização da função (2.6) é facilitada com o uso das transformações dos parâmetros proposta por Olsen (1978). Utilizando a transformação  $\theta = 1/\sigma$  e  $\xi = \beta/\sigma$ , Olsen (1978) mostra que a função de verossimilhança do modelo Tobit é globalmente côncava. Uma vez estimado o modelo transformado, os parâmetros originais podem ser recuperados através de  $\sigma = 1/\theta$  e  $\beta = \xi/\theta$ . A matriz de variância-covariância assintótica para os estimadores  $\beta$  e  $\sigma$  é derivada dos parâmetros estimados  $\theta$  e  $\xi$  pelo método Delta (Greene, 2003, p. 487).

Dado o sistema formado pelas equações (2.8) e (2.9), os estimadores de máxima verossimilhança podem ser calculados por meio da utilização de métodos numéricos

tradicionais. Os estimadores assim obtidos possuem as propriedades típicas do método de máxima verossimilhança: consistência, normalidade e eficiência assintótica (cf. Wooldridge, 2002, cap. 13).

### 2.3.2 Valores esperados e efeitos marginais do modelo Tobit

Uma vez estimado os parâmetros do modelo Tobit, pode-se distinguir quatro fatores, assim como seus efeitos marginais:

- $\text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i]$
- $\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]$
- $E[y_i | \mathbf{x}_i]$
- $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$

Além destes fatores, pode-se calcular também a esperança  $E[y_i^* | \mathbf{x}_i] = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$ . Esta expectativa, no entanto, só tem interesse prático quando estão sendo analisados dados verdadeiramente censurados. Para aplicações de solução de canto, a esperança  $E[y_i^* | \mathbf{x}_i]$  não possui significado especial, dado que a variável latente  $y_i^*$  é apenas uma construção teórica utilizada para derivar o modelo de maximização.

Dos fatores mostrados acima, dois deles estão inter-relacionados com os demais:

$$\text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i] = 1 - \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] \quad (2.10)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \quad (2.11)$$

Por construção, tem-se que

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.12)$$

Resta calcular  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$ . Para tanto, será utilizado o seguinte resultado, presente em Wooldridge (2002, p. 521): se  $z \sim N(0,1)$ , então, para qualquer constante  $c$ ,

$$E[z | z > c] = \frac{\int_c^\infty z \phi(z) dz}{\int_c^\infty \phi(z) dz} = \frac{-\int_c^\infty \phi'(z) dz}{1 - \Phi(c)} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(k) + \phi(c)}{1 - \Phi(c)} = \frac{\phi(c)}{1 - \Phi(c)} = \frac{\phi(-c)}{\Phi(-c)}$$

onde se utilizou o fato de que  $\phi'(z) = -z\phi(z)$ .

Com isso, a esperança de  $y_i$  condicionada nos valores positivos é dada por

$$\begin{aligned}
 E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + E[\varepsilon_i | y_i > 0] \\
 &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + E[\varepsilon_i | \varepsilon_i > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}] \\
 &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma E\left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \middle| \frac{\varepsilon_i}{\sigma} > \frac{-\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right] \\
 &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \frac{\phi(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)}{\Phi(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)} \\
 &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma M(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde o termo  $M(\cdot)$  é conhecido como a *razão inversa de Mills*,

$$M(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) = \frac{\phi(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)}{\Phi(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)} \tag{2.14}$$

Utilizando (2.11), portanto, pode-se calcular a esperança de  $y_i$

$$\begin{aligned}
 E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \\
 &= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Conhecidas as fórmulas das quantidades de interesse, pode-se calcular os efeitos marginais de uma variável  $k$  contínua sobre essas quantidades. O efeito marginal da probabilidade do gasto ser positivo é

$$\frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{\beta_k}{\sigma} \tag{2.16}$$

Para as esperanças matemáticas, os efeitos marginais são

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} = \beta_k \left\{ 1 - M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} + M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \right\} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \beta_k \tag{2.18}$$

Como  $\phi(z) > 0$  para todo  $z$  e  $\{1 - M(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)[\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma + M(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)]\}$  e  $\Phi(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)$  são estritamente limitados entre zero e um, segue que os coeficientes  $\beta_k$  nas equações (2.16),

(2.17) e (2.18) são multiplicados por fatores positivos (Wooldridge, 2002, p. 522). Isso significa que os sinais dos efeitos marginais (2.16), (2.17) e (2.18) são determinados exclusivamente pelos coeficientes  $\beta_k$  nestas equações.

Outra forma de calcular (2.18) é utilizar a regra da cadeia na expressão  $E[y_i | \mathbf{x}_i] = \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] \frac{\partial E[y_i | y_i > 0, \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \\ &+ E[y_i | y_i > 0, \mathbf{x}_i] \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta forma de calcular, em particular, possui uma interpretação econômica útil. Ela nos diz que o efeito total de uma variável sobre a esperança incondicional é a soma de dois efeitos (Winkelmann; Boes, 2009, p. 220):

- a) *Margem intensiva*: mede, dentre aqueles consumidores com consumo positivo, o efeito marginal da variável sobre a quantidade demandada.
- b) *Margem extensiva*: mede o efeito da variável sobre a demanda do produto, considerando-se que pessoas que antes não consumiam o produto são agora induzidas a adquiri-lo em quantidades positivas.

Por fim, pode-se calcular as elasticidades de  $y_i$  em relação a uma variável  $k$  a partir da equação (2.11). Para isso, basta tirar o logaritmo desta expressão, diferenciar tudo em relação a  $x_{ik}$  e multiplicar o resultado por  $x_{ik}$ , de onde se obtém

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i]} &= \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]} \\ &+ \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ou de forma resumida:

$$e_{ik} = e_{ik}^{\text{Prob}} + e_{ik}^E \quad (2.21)$$

$$\text{onde } e_{ik} = \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i]}$$

$$e_{ik}^{\text{Prob}} = \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}$$

$$e_{ik}^E = \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}$$

Dessa forma, é possível identificar três tipos de elasticidades:  $e_{ik}^E$  denota a elasticidade usual em economia, isto é, o efeito da variável sobre a quantidade consumida dentre os domicílios consumidores;  $e_{ik}^{\text{Prob}}$  denota o efeito da variável sobre o número de consumidores; e  $e_{ik}$  representa o resultado conjunto destes dois fatores.

### 2.3.3 Problemas do modelo Tobit

Uma das principais fraquezas do modelo Tobit é a sua dependência dos pressupostos distributivos do erro  $\varepsilon_i$ . Se o erro  $\varepsilon_i$  for heterocedástico ou não-normal, então os estimadores de máxima verossimilhança do modelo Tobit serão inconsistentes (cf. Cameron; Trivedi, 2005, p. 538).

Isso pode ser visto nas condições de primeira ordem (2.8) e (2.9). Por exemplo, note que a equação (2.8) pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} = - \sum_{i=1}^n \left\{ (1-d_i) \left( \frac{\phi_i}{1-\Phi_i} \right) + d_i \left( \frac{y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right\} \frac{\mathbf{x}_i}{\sigma} = \mathbf{0} \quad (2.22)$$

onde  $d_i$  é uma variável indicadora com valor zero se a observação é censurada e valor um se a observação não é censurada. Uma condição necessária para a consistência dos parâmetros é que a esperança de (2.22) seja igual a zero. Isso, no entanto, apenas ocorre se,

$$E[d_i] = \Phi_i$$

$$E[d_i y_i] = \Phi_i \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma \phi_i$$

Como estas condições dependem do pressuposto de normalidade e homocedasticidade dos erros, qualquer violação destes pressupostos gera estimadores inconsistentes.

Outra importante limitação do modelo Tobit é a sua hipótese de que o mesmo processo que determina a probabilidade de uma solução de canto é responsável também pela esperança condicional das observações positivas. Um corolário disso é que (cf. Seção 2.3.2)

$$\text{sign}\left(\frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}}\right) \quad (2.23)$$

onde  $\text{sign}(z)$  é a função sinal, que assume valores  $-1, 0$ , ou  $1$  se o valor do argumento for menor, igual ou maior que zero, respectivamente.

Em outras palavras, se uma variável possui um efeito positivo sobre a probabilidade de participação do mercado, ela terá um efeito positivo sobre o montante demandado pelos consumidores que já participam do mercado deste produto.

Isso pode ser inadequado em alguns casos. Por exemplo, considere o efeito da propaganda sobre a demanda por cigarro. É possível que a propaganda tenha uma grande influência em fazer alguém passar a fumar, mas pouca influência em aumentar o consumo dos indivíduos já fumantes. Como o modelo Tobit restringe a equação de participação e a equação de consumo a ter os mesmo parâmetros, o modelo Tobit não é adequado para este caso, o que pode provocar resultados indesejáveis sobre as estimativas obtidas.

Uma forma de avaliar se esta restrição do modelo Tobit é apropriada é estimar um modelo Probit, onde a variável dependente é dada por

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{se } y_i > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.24)$$

Como no modelo Probit o estimador obtido é  $\alpha = \beta/\sigma$ , onde  $\sigma$  é normalizado para  $\sigma = 1$  para efeitos de identificação, segue que o estimador  $\alpha$  do modelo Probit pode ser comparado com a razão dos estimadores do modelo Tobit,  $\beta/\sigma$ . Se os valores estimados forem “parecidos”, então as restrições impostas pelo modelo Tobit são inofensivas<sup>3</sup>. Por outro lado, se os coeficientes não tiverem a mesma ordem de magnitude, ou tiverem sinais

---

<sup>3</sup> Fin e Schmidt (1984) propõem um teste formal para esta hipótese.

invertidos, então existem fortes indícios de que as restrições impostas pelo modelo Tobit são muito severas.

Isto ocorre porque o modelo Tobit e o Probit são similares em diversos sentidos. Os dois possuem o mesmo modelo estrutural (2.1). O que muda é apenas como a variável latente  $y_i^*$  é traduzida na variável observada  $y_i$ . No modelo Tobit, o valor de  $y_i^*$  é conhecido quando  $y_i^* > 0$ . No modelo Probit, por outro lado, sabe-se apenas que  $y_i^* > 0$ , sem conhecer o valor que  $y_i^*$  assume. Como há mais informação no modelo Tobit do que no modelo Probit, segue que os estimadores obtidos pelo modelo Tobit são mais eficientes. Apesar disto, conforme mostra Greene (2003, p. 776), os estimadores do modelo Probit devem ser consistentes para  $\beta/\sigma$ .

Uma forma de contornar as restrições impostas pelo modelo Tobit seria considerar modelos de duas partes, primeiramente propostos por Craag (1971). Tais modelos conhecidos como *hurdle* ou *two-tiered models* (Wooldridge, 2002, p. 536) têm como característica duas equações estruturais: uma que determina  $\text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i]$  e outra que determina  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$ . Estes modelos, além de mais flexíveis, têm também a vantagem de trazer o modelo Tobit como um caso particular. Desta forma, pode-se utilizar um teste de razão de verossimilhança para testar as restrições impostas pelo modelo Tobit. Este ponto será retomado mais adiante.

### **2.3.4 Por que não utilizar MQO?**

Ao utilizar o modelo de MQO para estimar uma relação de demanda, o pesquisador pode tomar dois caminhos. Um deles é descartar parte da amostra e manter apenas as observações que possuem gastos positivos (amostra truncada). O outro caminho é estimar o modelo de MQO em toda a amostra, isto é, incluindo as observações em que  $y_i = 0$  (amostra censurada). Independente do caminho que se tomar, em ambos os casos o resultado que se irá obter, em geral, é uma estimativa inconsistente dos parâmetros (Winkelmann; Boes, 2009).

Um dos motivos da inconsistência do estimador de MQO para dados censurados é que tanto  $E[y_i | \mathbf{x}_i]$  quanto  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$  do modelo Tobit são funções não lineares de  $\mathbf{x}_i$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\sigma$ , enquanto que o modelo de MQO assume uma relação linear. De fato, partindo dos efeitos marginais (2.17) e (2.18), pode-se perceber que

$$\left| \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \right| < |\beta_k| \quad (2.25)$$

$$\left| \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} \right| < |\beta_k| \quad (2.26)$$

Seja  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{x}_i$  o vetor com o valor amostral médio das variáveis independentes.

Como o estimador de MQO representa uma aproximação linear do efeito marginal do modelo Tobit no ponto médio das variáveis independentes, então o coeficiente estimado por MQO será dado aproximadamente por

$$\beta_k^{\text{MQO}} \cong \frac{\partial E[y_i | \bar{\mathbf{x}}]}{\partial x_{ik}} \quad (2.27)$$

se a estimação ocorrer em toda a amostra, ou

$$\beta_k^{\text{MQO}} \cong \frac{\partial E[y_i | \bar{\mathbf{x}}, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} \quad (2.28)$$

se a estimação ocorrer apenas na amostra em que  $y_i > 0$ . Em todo caso, por (2.25) e (2.26), o resultado será que  $|\beta_k^{\text{MQO}}| < |\beta_k|$  e o coeficiente do modelo Tobit será maior que o coeficiente de MQO por um fator inverso de aproximadamente  $\Phi(\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma)$  na amostra completa e de aproximadamente  $\{1 - M(\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma)[\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma + M(\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma)]\}$  na amostra censurada (cf. equações (2.17) e (2.18)).

Dado que  $\Phi(\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma)$  é a probabilidade de (em média) ocorrer  $y_i > 0$  e considerando que  $\Phi(z)$  e  $M(z)$  são respectivamente funções crescentes e decrescentes no argumento  $z$ , segue que quanto menos observações censuradas, mais próximo  $\Phi(\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma)$  fica de 1 (um) e consequentemente maior o valor de  $\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma$  e menor o valor de  $M(\bar{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\beta}/\sigma)$ . Como resultado, mais próximo o coeficiente estimado por MQO em qualquer amostra fica do modelo Tobit.

Em outras palavras, se o percentual de observações com gastos nulos for pequeno, o valor do coeficiente estimado pelo modelo Tobit tenderá ao valor do coeficiente estimado por MQO e o viés causado pela censura das observações será pequeno.

Outra razão para a inconsistência do estimador de MQO é que ele sofre do problema de variável omitida. Considere, por exemplo, a esperança de  $y_i$  condicionada nos valores positivos,  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma M(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} / \sigma)$ . É fácil perceber que se o modelo de MQO for estimado na amostra truncada, o termo  $\sigma M(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} / \sigma)$  estará sendo omitido. Dessa forma, o erro da regressão seria dado por  $u_i = \sigma M(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} / \sigma) + \varepsilon_i$ . Isto significa que a distribuição deste erro, além de não ter média zero, será dependente de  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\sigma$  e  $\mathbf{x}_i$ , violando os pressupostos do modelo de mínimos quadrados ordinários.

A direção do viés depende do sinal da correlação entre  $\mathbf{x}_i$  e  $u_i$ . Como  $M(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} / \sigma)$  diminui com o aumento de  $\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$ , se  $\beta_k$  for positivo, existe uma correlação negativa entre  $x_{ik}$  e  $u_i$ , fazendo com que o coeficiente  $\beta_k$  tenha um viés para baixo. Se  $\beta_k$  for negativo, haverá uma correlação positiva entre  $x_{ik}$  e  $u_i$  e o viés sofrido pelo coeficiente será para cima. Em todo caso, haverá um viés de atenuação do coeficiente estimado por MQO. Este resultado ocorre sem ambiguidade quando temos apenas um regressor. Para o caso de haver mais regressores, as correlações entre as variáveis podem gerar resultados diversos.

## 2.4 TRANSFORMAÇÕES NORMALIZANTES DA VARIÁVEL DEPENDENTE

### 2.4.1 Distribuição de uma função de uma variável aleatória

Conforme foi visto na Seção 2.3.3, um dos problemas do modelo Tobit é a sua sensibilidade à violação do pressuposto de normalidade dos erros. Se este pressuposto não é atendido, então as estimativas de máxima verossimilhança serão inconsistentes. É importante frisar, no entanto, que isto não é uma fraqueza do modelo Tobit em si, mas do método de máxima verossimilhança utilizado para estimar os parâmetros do modelo. Como o método de

máxima verossimilhança é notoriamente sensível a violações dos pressupostos distributivos, qualquer modelo estimado por ele está sujeito em maior ou menor grau ao mesmo problema.

Diversos trabalhos têm mostrado que os dados provenientes de pesquisas de orçamentos familiares não satisfazem os pressupostos distributivos usuais do modelo Tobit. Reynolds e Shonkwiler (1991), por exemplo, apresentam evidências de que a demanda por alimentos apresenta erros heterocedásticos e não normais.

Uma maneira de acomodar o pressuposto de normalidade é transformar as variáveis latentes ou dependentes do modelo de maneira que a distribuição da variável dependente transformada seja aproximadamente normal. A justificativa teórica para a utilização destas transformações está na técnica de transformação de variáveis aleatórias.<sup>4</sup>

A técnica consiste no seguinte: sejam  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{y}$  dois vetores aleatórios tais que  $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), \dots, g_n(\mathbf{y}))$ , onde  $\mathbf{g}(\cdot)$  é uma função diferenciável e monotônica. Neste caso, a sua inversa  $\mathbf{y} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{z})$  existe e é diferenciável. Sabendo que a função de densidade de probabilidade de  $\mathbf{z}$  é  $f_z(\mathbf{z})$ , qual a função de densidade de probabilidade de  $\mathbf{y}$ ,  $f_y(\mathbf{y})$ ? Uma forma de encontrar esta distribuição é aplicando a seguinte relação (Greene, 2003, p. 856–858)

$$\begin{aligned} f_z(\mathbf{z}) &= f_y(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{z})) \left| \det \left[ \frac{d\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}} \right] \right| \\ &= f_y(\mathbf{y}) \left| \det \left[ \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{z}} \right] \right| \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde  $|\cdot|$  é a função que retorna o valor absoluto de uma variável e  $\det[d\mathbf{y}/d\mathbf{z}]$  é o determinante do Jacobiano da transformação de  $\mathbf{y}$  para  $\mathbf{z}$ ,

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_1^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_n^{-1}(\mathbf{z})}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

<sup>4</sup> Existem diversos métodos que podem ser utilizados na transformação de variáveis aleatórias. No que segue, apenas um método será apresentado. Para maiores detalhes, cf. Casella e Berger (2002).

Manipulando a relação (2.29) de forma que a função de densidade de probabilidade  $f_Y(\mathbf{y})$  fique no lado esquerdo, obtém-se

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= f_Z(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \left| \det \left[ \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \right] \right| \\ &= f_Z(\mathbf{z}) \left| \det \left[ \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{y}} \right] \right| \end{aligned} \quad (2.30)$$

Utilizando-se esta técnica, portanto, é possível construir um modelo estatístico no qual se adota o pressuposto de que a distribuição da variável dependente transformada  $\mathbf{z}$  provém de uma distribuição normal. A técnica de transformação é então aplicada para reescrever o modelo em termos da variável dependente não transformada  $\mathbf{y}$ , uma vez que é esta a variável que o pesquisador consegue observar a partir dos dados.

#### 2.4.2 Transformações não-paramétricas

Existem diversas transformações não-paramétricas que podem ser aplicadas à variável dependente com o objetivo de “normalizar” a distribuição dos erros e ao mesmo tempo diminuir o efeito da heterocedasticidade dos dados originais. Uma das transformações mais populares é a transformação logarítmica. Em economia, sua popularidade reside no fato de que diversas informações relevantes (renda e despesa das famílias, por exemplo) possuem distribuições assimétricas à direita, semelhante à distribuição lognormal. E um fato bem conhecido em estatística é que se uma variável possui distribuição lognormal, então o seu logaritmo natural possui distribuição normal.

Assim, o modelo Tobit pode ser modificado de maneira a garantir que os pressupostos distributivos não sejam severamente violados. Uma forma de se fazer isto é aplicando-se o logaritmo natural na variável latente  $y_i^*$  e assumir que os erros desta nova variável possuem distribuição normal. Se isto for feito, seriam necessárias as seguintes modificações no modelo. Seja  $y_i^*$  a variável latente e  $T(y_i^*) = \ln y_i^*$  a variável latente transformada. Como a transformação logarítmica só pode ser aplicada a valores positivos, é interessante incorporar

ao modelo uma constante exógena  $c > 0$  de modo que  $y_i^* + c > 0$ . Assim, a variável latente original tem como domínio  $y_i^* > -c$ . O modelo é caracterizado por

$$T(y_i^* + c) = \ln(y_i^* + c) = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \text{onde } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} y_i &= \max\{0, y_i^*\} \\ &= \max\{0, e^{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i} - c\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Note que como  $e^z > 0$  para qualquer  $z$ , a introdução da constante  $c$  em (2.31) é necessária para que haja observações censuradas, pois senão a solução de (2.32) seria  $\max\{0, y_i^*\} = e^{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i}$  para  $\forall y_i^*$ . Este detalhe é importante, pois muitos estudos que empregam a transformação logarítmica em um contexto de variáveis censuradas simplesmente assumem que  $c = 0$ , o que só pode ser justificado quando o modelo é constituído por duas variáveis latentes, tal como ocorre nos modelos discutidos na Seção 2.5.

Para construir a função de verossimilhança, é preciso estipulá-la em termos de  $y_i$ , e não de  $T(y_i^* + c)$ . Para tanto, primeiro se calcula o Jacobiano da transformação

$$\frac{dT(y_i^* + c)}{dy_i^*} = \frac{d \ln(y_i^* + c)}{dy_i^*} = \frac{1}{y_i^* + c} \quad (2.33)$$

Em seguida, aplicando-se a técnica de transformação de variáveis aleatórias, se obtém a função de densidade de  $y_i$

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i) &= f\left(T(y_i^* + c) | \mathbf{x}_i\right) \left| \frac{dT(y_i^* + c)}{dy_i^*} \right| \\ &= \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\ln(y_i + c) - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{y_i + c} \quad \text{para } y_i > -c \end{aligned} \quad (2.34)$$

A função de densidade (2.34) é exatamente a função de densidade de probabilidade lognormal. Isto significa que se for elaborado um modelo no qual o erro da variável latente possui distribuição lognormal (e, portanto, distribuição assimétrica à direita), então os erros serão normalmente distribuídos em um modelo contendo como variável dependente  $T(y_i^* + c) = \ln(y_i^* + c)$ .

Para as observações em que  $y_i = 0$ , a contribuição para a verossimilhança será dada por

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[e^{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i} - c \leq 0 | \mathbf{x}_i] \\
 &= \text{Prob}[\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \leq \ln c | \mathbf{x}_i] \\
 &= \text{Prob}\left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \leq \frac{\ln c - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \middle| \mathbf{x}_i\right] \\
 &= \Phi\left(\frac{\ln c - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} - \ln c}{\sigma}\right)
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Para as observações em que  $y_i > 0$ , a contribuição para a verossimilhança será dada por  $\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) = f(y_i | \mathbf{x}_i)$ . Juntando todas as observações, obtém-se a função de verossimilhança do modelo Tobit com a aplicação da transformação logarítmica na variável dependente:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} - \ln c}{\sigma}\right) \right] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\ln(y_i + c) - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{y_i + c} \tag{2.36}$$

Esta função de verossimilhança é semelhante à do modelo Tobit padrão, exceto que agora a função de densidade lognormal aparece no lugar da função de densidade normal.

### 2.4.3 Transformação Box-Cox

Outra forma de adequar os pressupostos distributivos do modelo é utilizar transformações paramétricas na variável dependente. Uma transformação paramétrica normalizante muito popular é sugerida por Box e Cox (1964). A transformação é dada por

$$T(\lambda, y) = \begin{cases} \frac{(y + c)^\lambda - 1}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \ln(y + c) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro desconhecido a ser estimado e  $c > 0$  é uma constante exógena. Esta transformação é contínua em  $\lambda$  e bem definida para todo  $y + c > 0$ . Note que ela inclui como casos especiais a transformação linear ( $\lambda = 1$ ) e a transformação logarítmica ( $\lambda \rightarrow 0$ ). Uma

vez estimado  $\lambda$ , pode-se facilmente aplicar um teste de razão de verossimilhança para  $H_0 : \lambda = \lambda_0$  ao invés de simplesmente assumir um determinado valor para  $\lambda$ .

As derivadas da transformação são dadas por

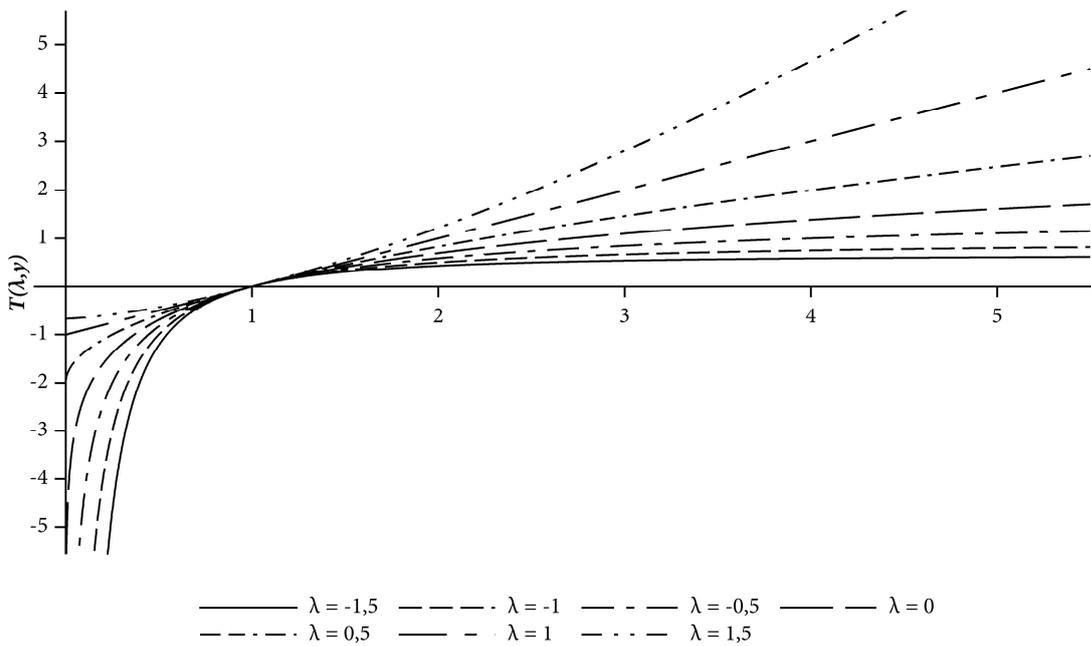
$$\frac{\partial T(\lambda, y)}{\partial y} = (y + c)^{\lambda-1} \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial T(\lambda, y)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda^2} [(y + c)^\lambda (\lambda \ln(y + c) - 1) + 1] \quad \text{se } \lambda \neq 0$$

$$\text{e } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial T(\lambda, y)}{\partial \lambda} = \frac{[\ln(y + c)]^2}{2} \tag{2.39}$$

A Figura 2.3 mostra a transformação Box-Cox para vários valores de  $\lambda$ . Note que quanto maior o valor de  $|\lambda| - 1$ , maior será a curvatura induzida pela transformação Box-Cox.

Figura 2.3 - Transformação Box-Cox para vários valores de lambda e  $c = 0$



Fonte: Elaboração própria.

Draper e Cox (1969) mostram que mesmo nos casos onde a transformação Box-Cox falha em tornar a distribuição de  $T(\lambda, y)$  uma normal exata, ainda assim ela irá gerar uma distribuição que satisfaz certas restrições nos primeiros quatro momentos, isto é, a distribuição resultante tenderá a ser simétrica.

Esta transformação pode ser aplicada ao modelo Tobit apresentado anteriormente como forma de torná-lo robusto à violação do pressuposto de normalidade dos erros. O modelo teórico consiste em redefinir a variável latente para

$$T(\lambda, y_i^*) = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \text{onde } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.40)$$

Para que a transformação seja bem definida, é necessário que

$$y_i^* + c > 0 \Rightarrow \begin{cases} T(\lambda, y_i^*) > -1/\lambda & \text{se } \lambda > 0 \\ T(\lambda, y_i^*) > -\infty & \text{se } \lambda = 0 \\ T(\lambda, y_i^*) < -1/\lambda & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Isto significa que  $T(\lambda, y_i^*)$  é truncado abaixo quando  $\lambda$  é positivo e truncado acima quando  $\lambda$  é negativo, fazendo com que os erros (2.40) tenham domínio

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda} - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} < \varepsilon_i < +\infty & \quad \text{se } \lambda > 0 \\ -\infty < \varepsilon_i < +\infty & \quad \text{se } \lambda = 0 \\ -\infty < \varepsilon_i < -\frac{1}{\lambda} - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} & \quad \text{se } \lambda < 0 \end{aligned}$$

Como resultado,  $\varepsilon_i$  – e consequentemente  $T(\lambda, y_i^*)$  – não podem ter uma distribuição normal, a menos que  $\lambda = 0$ . Isso significa que a especificação (2.40) é logicamente inconsistente com o pressuposto de normalidade dos erros. Esta não normalidade inerente da variável transformada  $T(\lambda, y_i^*)$  pode fazer com que os parâmetros estimados, inclusive o próprio  $\lambda$ , sejam inconsistentes.

Buscando resolver esta inconsistência lógica, Poirier (1978) sugere uma alteração na aplicação da transformação Box-Cox, especificando o erro  $\varepsilon_i$  como resultante de uma distribuição normal truncada em  $-\frac{1}{\lambda} - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$ . Desta forma, o erro em (2.40) teria a seguinte densidade de probabilidade:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_i) &= \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma} \right) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}}{\sigma} \right) \right]^{-1} & \text{se } \lambda > 0, \text{ com } \varepsilon_i > -\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{\lambda} \\ f(\varepsilon_i) &= \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma} \right) & \text{se } \lambda = 0 \\ f(\varepsilon_i) &= \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma} \right) \left[ \Phi \left( \frac{-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{\lambda}}{\sigma} \right) \right]^{-1} & \text{se } \lambda < 0, \text{ com } \varepsilon_i < -\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Os termos  $\Phi((\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda})/\sigma)^{-1}$  e  $\Phi((-\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} - \frac{1}{\lambda})/\sigma)^{-1}$  em (2.42) representam os fatores de correção que devem ser aplicados na função de densidade de probabilidade para garantir que a função de distribuição seja válida (cf. Maddala, 1983, p. 191). Para  $\lambda > 0$ , quanto maior for  $\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}$  em relação ao desvio-padrão dos erros  $\sigma$ , mais próximo este fator será de 1 e, portanto, mais próxima a distribuição de probabilidade do erro  $\varepsilon_i$  se aproximará de uma distribuição normal não-truncada.

O modelo é completado especificando-se a relação entre a variável dependente observada e a variável latente

$$\begin{aligned} y_i &= \max\{0, y_i^*\} \\ &= \max\left\{0, \left[\lambda(\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i) + 1\right]^{1/\lambda} - c\right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Considerando-se apenas o caso em que  $\lambda > 0$  no restante da análise, para as observações em que  $y_i = 0$ , a contribuição para a verossimilhança será dada por

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i^* \leq 0 | \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}[\left[\lambda(\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i) + 1\right]^{1/\lambda} - c \leq 0 | \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}[\varepsilon_i \leq (c^\lambda - 1)/\lambda - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} | \mathbf{x}_i] \\ &= \int_{-\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} - \frac{1}{\lambda}}^{(c^\lambda - 1)/\lambda - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma}\right) \left[\Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}}{\sigma}\right)\right]^{-1} d\varepsilon_i \\ &= \left[\Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}}{\sigma}\right)\right]^{-1} \left[\Phi\left(\frac{(c^\lambda - 1)/\lambda - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} - \frac{1}{\lambda}}{\sigma}\right)\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} - (c^\lambda - 1)/\lambda}{\sigma}\right) \left[\Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}}{\sigma}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para as observações em que  $y_i > 0$ , a contribuição para a verossimilhança será

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i) &= f\left(T(\lambda, y_i^*) | \mathbf{x}_i\right) \left| \frac{dT(\lambda, y_i^*)}{dy_i^*} \right| \\ &= \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[\Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}}{\sigma}\right)\right]^{-1} (y_i + c)^{\lambda-1} \quad \text{para } y_i > -c \end{aligned} \quad (2.45)$$

Note que tanto a presença da transformação Box-Cox quanto do Jacobiano da transformação permitem que a função de densidade de probabilidade de  $y_i$  apresente um grau variável de assimetria.

Juntando todas as observações, obtém-se a função de verossimilhança do modelo Box-Cox Tobit (Lankford; Wyckoff, 1991)

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \lambda) = \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} - (c^\lambda - 1)/\lambda}{\sigma} \right) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \right\} \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{\lambda}}{\sigma} \right) \right]^{-1} (y_i + c)^{\lambda-1} \quad (2.46)$$

Observe que agora temos algumas diferenças em relação à função de verossimilhança do modelo Tobit padrão. Além do Jacobiano da transformação de  $T(\lambda, y_i^*)$  para  $y_i^*$ , a função (2.46) abriga também um termo originado do truncamento do erro em (2.40) e um parâmetro adicional  $\lambda$  a ser estimado junto com os demais parâmetros.

A função de verossimilhança (2.46) aninha um número de modelos relevantes como casos especiais. Por conta do truncamento dos erros, no entanto, o modelo Tobit Box-Cox não aninha o próprio modelo Tobit padrão. Quando  $\lambda \rightarrow 0$ , o modelo converge para o Tobit com transformação logarítmica na variável dependente visto na seção anterior (cf. equação (2.36)). Para  $c = 0$  e  $\lambda = 1$  o modelo se reduz a uma regressão truncada. Por fim, com  $c = 1$  e  $\lambda = 1$  a função de verossimilhança acima se aproxima de um modelo Tobit, mas com os erros  $\varepsilon_i$  resultantes de uma distribuição normal truncada.

Apesar de ser eficaz em normalizar distribuições de probabilidades assimétricas, a transformação Box-Cox apresenta problemas. O primeiro é a sua incompatibilidade com o pressuposto de normalidade dos erros já comentada acima, o que obriga a adoção do pressuposto *ad-hoc* de normalidade truncada dos erros. O segundo é que a transformação não é definida para todo o conjunto real, isto é, a transformação só é bem definida para  $y_i^* + c > 0$ . Isso limita o uso da transformação em modelos onde a variável latente, por construção, pode ser zero ou negativa. Um último problema refere-se ao fato de a

transformao Box-Cox no ser invariante à escala, o que faz com que as estimativas obtidas variem com uma mudana na unidade de medida de  $y_i$ .

Para entender melhor o problema da invariância à escala, considere o escalonamento  $\omega y_i$  na variável original, para algum  $\omega > 0$ . Aplicando-se a transformao Box-Cox com  $c = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} T(\lambda, \omega y) &= \frac{(\omega y)^\lambda - 1}{\lambda} \\ &= \omega^\lambda T(\lambda, y) + \frac{\omega^\lambda - 1}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ou seja, exceto quando  $\lambda = 0$ , tem-se que  $T(\lambda, \omega y) \neq \omega^\lambda T(\lambda, y)$ , o que significa que a variável transformada não é reescalada de forma proporcional ao escalonamento feito na variável original. O responsável por esta invariância está no termo  $(\omega^\lambda - 1)/\lambda$ . Consequentemente, se dois modelos que diferem apenas pela escala empregada na variável  $y_i$  forem estimados, diferentes resultados empíricos seriam obtidos, pois o termo  $(\omega^\lambda - 1)/\lambda$  será incorporado à função de verossimilhança do modelo onde o escalonamento foi aplicado. Apenas no caso de modelos lineares a invariância à escala da transformao Box-Cox seria inofensiva, pois neste caso o termo adicional gerado pelo reescalamento da variável modificada seria incorporado ao intercepto do modelo, e todos os demais parâmetros do modelo se manteriam inalterados (Schlesselman, 1971).

#### 2.4.4 Extensões da transformao Box-Cox

Desde o trabalho de Box e Cox (1964), diversas modificações foram propostas com o intuito de resolver alguns dos contratempos da transformao Box-Cox. Manly (1976) propôs a seguinte transformao exponencial

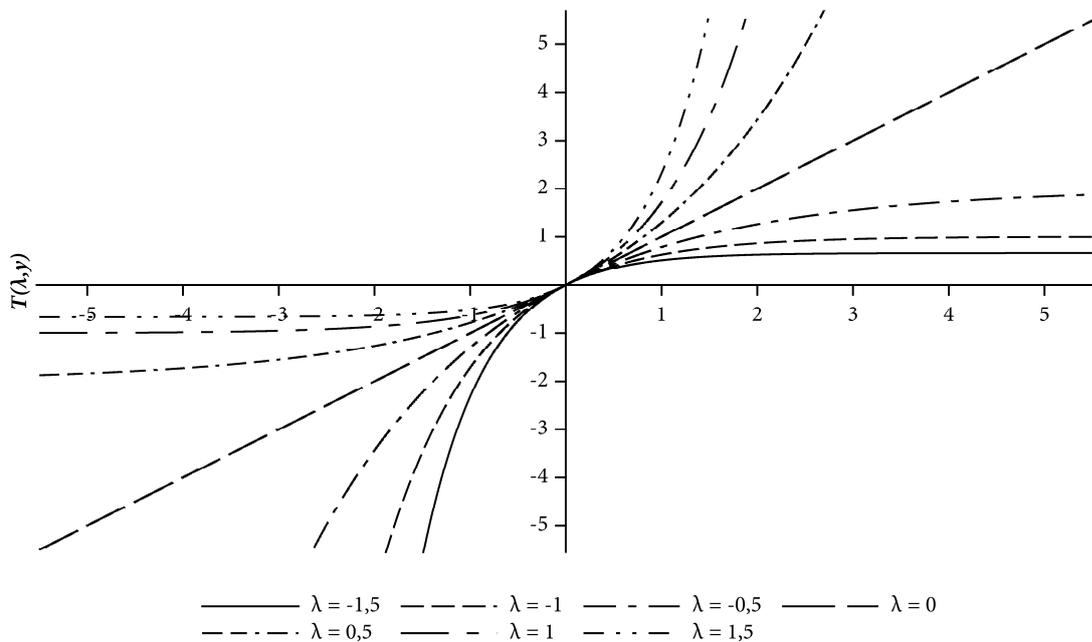
$$T(\lambda, y) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda y} - 1}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ y & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Apesar da transformao de Manly admitir valores de  $y$  no domínio real, a transformao em si também é limitada, isto é,

$$\begin{aligned}
 -1/\lambda < T(\lambda, y) < +\infty & \quad \text{se } \lambda > 0 \\
 -\infty < T(\lambda, y) < +\infty & \quad \text{se } \lambda = 0 \\
 -\infty < T(\lambda, y) < -1/\lambda & \quad \text{se } \lambda < 0
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

que corresponde à mesma imagem da transformação Box-Cox. Sendo assim, tal como a transformação Box-Cox, a transformação de Manly não pode possuir distribuição identicamente normal. Por fim, além de também sofrer o problema de invariância à escala, a transformação de Manly é menos eficaz que a Box-Cox em normalizar a distribuição de uma variável aleatória que possui distribuição assimétrica.

Figura 2.4 - Transformação de Manly (1976)



Fonte: Elaboração própria.

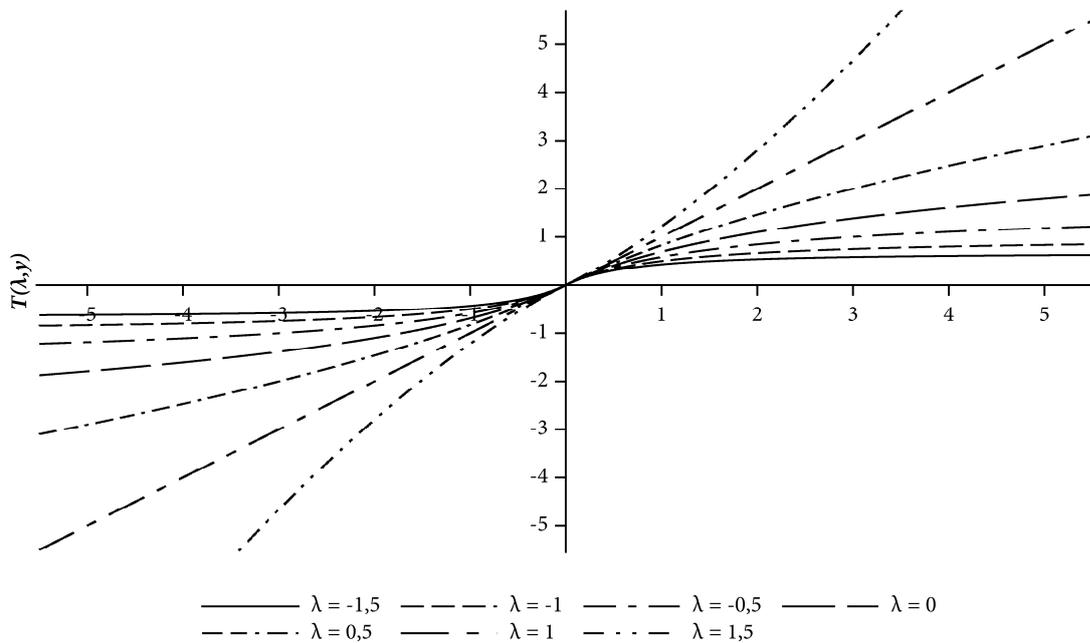
John e Draper (1980) propuseram a seguinte transformação

$$T(\lambda, y) = \begin{cases} \text{sign}(y) \frac{(|y|+1)^\lambda - 1}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \text{sign}(y) \ln(|y|+1) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}
 \tag{2.50}$$

Assim como a transformação proposta por Manly (1976), esta transformação permite o uso de valores negativos de  $y$ , mas ela não é invariante à escala. Além disso, quando  $\lambda < 0$ , esta transformação também é limitada, pois

$$\begin{aligned} 1/\lambda < T(\lambda, y) < -1/\lambda & \text{ se } \lambda < 0 \\ -\infty < T(\lambda, y) < +\infty & \text{ se } \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Figura 2.5 - Transformação de John e Draper (1980)



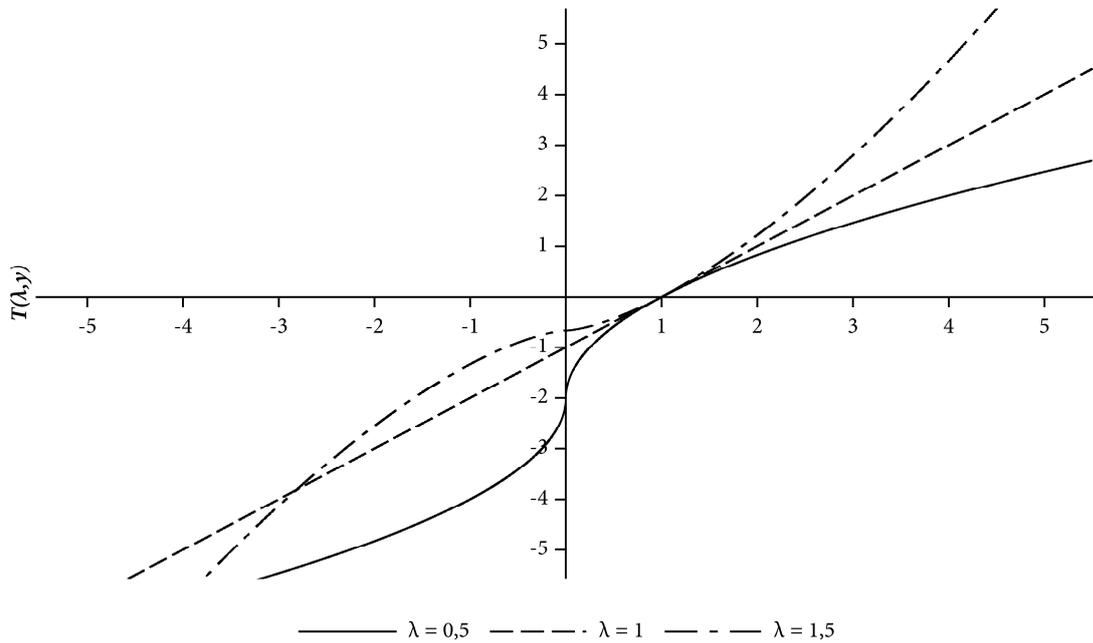
Fonte: Elaboração própria.

Bickel e Doksum (1981) fizeram uma pequena modificação da transformação proposta por John e Draper (1980)

$$T(\lambda, y) = \frac{|y|^\lambda \text{sign}(y) - 1}{\lambda} \quad \text{para } \lambda > 0 \tag{2.52}$$

É possível aplicar a transformação em variáveis que possuam valores pequenos ou negativos, mas não em variáveis que assumam valor exatamente zero. Além disso, quando  $y < 0$ , a transformação tende a  $-\infty$  quando  $\lambda$  tende a zero. Por fim, segundo argumentam Mackinnon e Magee (1990), o Jacobiano da transformação na função de verossimilhança irá tender a mais ou a menos infinito (dependendo do valor de  $\lambda$ ) à medida que  $y$  tende a zero. Isto faz com que esta transformação não seja adequada para variáveis que assumem valores relativamente próximos de zero.

Figura 2.6 - Transformação de Bickel e Doksum (1981)



Fonte: Elaboração própria.

Yeo e Johnson (2000) propuseram a seguinte transformação

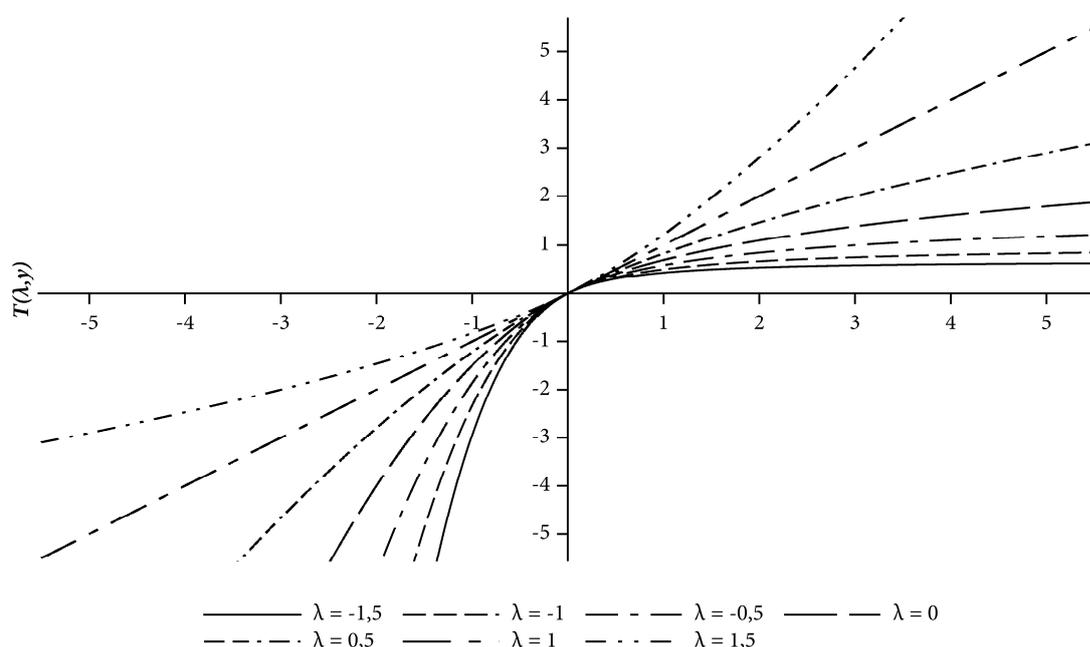
$$T(\lambda, y) = \begin{cases} \frac{(y+1)^\lambda - 1}{\lambda} & \text{se } \lambda \neq 0, y \geq 0 \\ \ln(y+1) & \text{se } \lambda = 0, y \geq 0 \\ \frac{(1-y)^{2-\lambda} - 1}{\lambda - 2} & \text{se } \lambda \neq 2, y < 0 \\ -\ln(1-y) & \text{se } \lambda = 2, y < 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Para  $y$  estritamente positivo, a transformação de Yeo-Johnson é idêntica à transformação Box-Cox para  $y+1$ . Se  $y$  é estritamente negativo, então a transformação de Yeo-Johnson equivale à transformação Box-Cox em  $-y+1$ , mas com expoente  $2-\lambda$ . Ou seja, se a transformação for aplicada em uma variável que assume tanto valores positivos quanto negativos, a variável transformada será uma mistura dos dois casos citados acima, e diferentes expoentes serão aplicados aos dados positivos e negativos. Em aplicações econométricas, isto significa que o parâmetro  $\lambda$  terá um significado diferente para as observações que satisfazem  $y \geq 0$  e  $y < 0$  (Weisberg, 2001). Por fim, observe que a transformação Yeo-Johnson possui imagem

$$\begin{aligned}
-1/(\lambda - 2) < T(\lambda, y) < +\infty & \quad \text{se } \lambda > 2 \\
-\infty < T(\lambda, y) < +\infty & \quad \text{se } 0 \leq \lambda \leq 2 \\
-\infty < T(\lambda, y) < -1/\lambda & \quad \text{se } \lambda < 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

isto é, a transformação é limitada para determinados domínios de  $\lambda$ , o que significa que a distribuição de probabilidade da variável transformada  $T(\lambda, y)$  não pode ser identicamente normal nestes domínios.

Figura 2.7 - Transformação de Yeo e Johnson (2000)



Fonte: Elaboração própria.

### 2.4.5 Transformação seno hiperbólica inversa (IHS)

Uma transformação alternativa que permite o uso de valores não-positivos e não sofre dos problemas da transformação Box-Cox é a transformação seno hiperbólica inversa (Johnson, 1949), doravante IHS (do inglês *inverse hyperbolic sine*), definida por

$$\begin{aligned}
T(\lambda, y) &= \sinh^{-1}(\lambda y) / \lambda \\
&= \frac{\ln\left(\lambda y + \sqrt{1 + (\lambda y)^2}\right)}{\lambda}
\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro desconhecido a ser estimado.

A transformação é linear quando  $\lambda$  se aproxima de zero ( $T(\lambda, y) \rightarrow y$  se  $\lambda \rightarrow 0$ ) e se comporta de maneira logarítmica quanto maior for o valor de  $y$  em relação a  $\lambda$  em termos absolutos. Ela pode ser feita em qualquer variável aleatória que possua valores positivos, nulos ou negativos. Além disso, a transformação é simétrica em zero no parâmetro  $\lambda$ , isto é,  $T(\lambda, y) = T(-\lambda, y)$  de modo que o seu uso pode ser limitado apenas nos valores positivos de  $\lambda$ . Por fim, ela também possui a propriedade de invariância à escala, isto é, se permitirmos o parâmetro  $\lambda$  variar apropriadamente, pode-se mostrar que a transformação IHS é homogênea de grau 1 em  $y$  (MacKinnon; Magee, 1990). De fato, observe que se  $y$  for multiplicado por  $\omega$  e  $\lambda$  for multiplicado por  $1/\omega$ , o efeito será simplesmente multiplicar  $T(\lambda, y)$  por  $\omega$  também. Isto significa que mudanças na unidade de medida não possuem efeitos nos parâmetros estimados do modelo.

A função tem como derivadas

$$\frac{\partial T(\lambda, y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y)^2}} \quad (2.56)$$

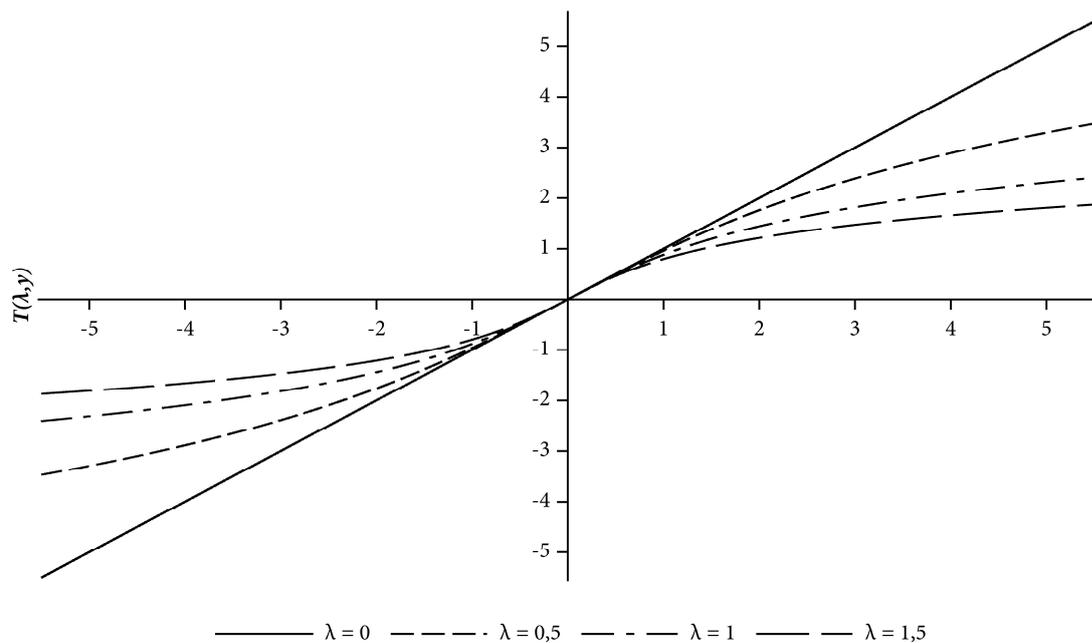
$$\frac{\partial T(\lambda, y)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{y}{\sqrt{1 + (\lambda y)^2}} - T(\lambda, y) \right] \quad (2.57)$$

Quanto maior o valor de  $y$  em relação a  $\lambda$  (em termos absolutos), melhor a aproximação  $\partial T(\lambda, y)/\partial y \approx 1/|\lambda y|$  e a transformação se comporta de maneira logarítmica para a maior parte do domínio de  $y$ . Para  $y$  próximo de zero, a derivada (2.56) se aproxima de 1 e a função se torna aproximadamente linear na origem. A linearidade da transformação IHS na origem pode ser interessante, pois trata um aumento de 1 para 2 de maneira diferente de um aumento de 10.000 para 20.000, por exemplo.

Comparando-se as transformações Box-Cox e IHS, observam-se diferenças importantes nos seus resultados. Apesar de ambas terem o efeito de “puxar” as observações extremas para mais perto das demais observações, este efeito será tipicamente maior na transformação IHS do que na Box-Cox (Burbidge; Magee; Robb, 1988). Note que quanto maior o valor de  $|\lambda y|$ , mais a transformação IHS se aproxima de  $\text{sign}(\lambda y) \ln(2|\lambda y|)/\lambda$ . Assim, apesar de haver alguma flexibilidade na escolha de  $\lambda$ , esta aproximação do logaritmo será o

maior efeito de amortecimento possível da transformação IHS. Para  $\lambda$  distante de zero, a transformação Box-Cox possui um efeito amortecimento menor do que a IHS quando  $y$  não está próximo de zero (Burbidge; Magee; Robb, 1988).

Figura 2.8 - Transformação IHS



Fonte: Elaboração própria.

Apesar de a transformação IHS ser menos utilizada, ela tem sido sugerida como uma boa alternativa à Box-Cox em acomodar assimetrias na distribuição dos erros em modelos de variáveis censuradas (Horowitz; Neumann, 1989, Reynolds; Shonkwiler, 1991). Reynolds e Shonkwiler (1991) foram os primeiros a utilizar a transformação IHS no modelo Tobit.

Infelizmente, a transformação IHS possui uma característica indesejável. Segundo McKinnon e Magee (1990), como ela é simétrica em relação a zero no parâmetro  $\lambda$ , isto significa que em modelos lineares a primeira derivada da função de verossimilhança é zero neste ponto, pois  $\partial T(\lambda, y)/\partial \lambda \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Com isto,  $\lambda = 0$  será sempre um máximo local ou um mínimo local, de modo que a estimativa  $\lambda = 0$  pode ocorrer com alguma frequência ao maximizar a função de verossimilhança. Este problema, no entanto, não

invalida a sua aplicação, já que ele pode ser resolvido com aplicação de métodos numéricos apropriados.

Aplicando-se esta transformação ao modelo Tobit, obtêm-se as seguintes modificações. A variável latente transformada e a variável observada são dadas pelas equações

$$T(\lambda, y_i^*) = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \text{onde } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.58)$$

$$y_i = \max \{0, y_i^*\} \quad (2.59)$$

Como  $T(\lambda, y_i^*) > 0$  quando  $y_i^* > 0$  e vice-versa, então a contribuição para a verossimilhança das observações em que  $y_i = 0$  será dada por

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[T(\lambda, y_i^*) \leq 0 | \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}[\varepsilon_i \leq -\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} | \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}\left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \leq \frac{-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \mid \mathbf{x}_i\right] \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Para as observações em que  $y_i > 0$ , a densidade de probabilidade será

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i) &= f(T(\lambda, y_i^*) | \mathbf{x}_i) \left| \frac{dT(\lambda, y_i^*)}{dy_i^*} \right| \\ &= \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dessa maneira, a função de verossimilhança do modelo Tobit IHS possui a seguinte forma (Reynolds; Shonkwiler, 1991):

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \lambda) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} \quad (2.62)$$

Em alguns casos pode ser problemático encontrar os parâmetros de máxima verossimilhança do modelo, pois a função de verossimilhança (2.62) é altamente não-linear em  $\lambda$ . Além disso, conforme observam Reynolds e Shonkwiler (1991, p. 318), à medida que  $\lambda$  tende a infinito, a função de verossimilhança vai se tornando plana, dificultando a identificação do ponto de máximo. Estas dificuldades numéricas, porém, são

contrabalanceadas pela superioridade da transformação IHS em relação às demais transformações, que resultam em uma melhor acomodação dos erros à normalidade e na especificação de um modelo mais simplificado.

Note que, assim como no modelo Tobit Box-Cox, temos um parâmetro  $\lambda$  adicional a ser estimado, sendo que o modelo Tobit IHS aninha o modelo Tobit padrão quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Ao contrário do modelo Box-Cox, no entanto, a função de verossimilhança acima não necessita de termos adicionais para incorporar o truncamento dos erros. Isto faz com que a função de verossimilhança fique mais simples, facilitando o cálculo das condições de primeira ordem e dos valores esperados dos modelos. Por conta destas características, apenas a transformação IHS será utilizada no restante do trabalho.

#### 2.4.6 Valores esperados das variáveis transformadas

Uma vez aplicada uma determinada transformação na variável dependente do modelo Tobit, os parâmetros estimados não podem mais ser comparados com aqueles do modelo Tobit padrão. Isso porque enquanto  $\beta_k$  equivale a  $\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i] / \partial x_{ik}$  no modelo Tobit padrão, em um modelo com variável dependente transformada,  $\beta_k$  equivale a  $\partial E[T(\lambda, y_i^*) | \mathbf{x}_i] / \partial x_{ik}$ . Como o interesse do pesquisador geralmente recai sobre a variável original  $y_i^*$ , e não sobre a variável transformada, deve-se considerar também o efeito que a transformação produz nas esperanças e nos efeitos marginais.

Partindo da definição, a esperança de  $y_i$  condicional em  $y_i > 0$  no modelo Tobit transformado é dada por

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \int_0^{\infty} y_i f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) dy_i \\ &= \int_0^{\infty} y_i \frac{f(y_i | \mathbf{x}_i)}{\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]} dy_i \\ &= \frac{1}{\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]} \int_0^{\infty} y_i f(y_i | \mathbf{x}_i) dy_i \end{aligned} \quad (2.63)$$

Logo,

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (2.64)$$

A esperança incondicionada, por sua vez, é dada por

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \end{aligned} \quad (2.65)$$

Note que como a fórmula da probabilidade de  $y_i > 0$  permaneceu a mesma após a transformação IHS, então o efeito marginal de uma variável  $k$  contínua sobre esta probabilidade permanece dado por (2.16). Os efeitos marginais das esperanças são obtidos derivando-se as expressões (2.64) e (2.65) acima. Como as integrais destas expressões são feitas em  $y_i$ , o cálculo dos efeitos marginais pode ser feito primeiro derivando-se o integrando em relação a  $x_{ik}$  e depois calculando-se a integral.

## 2.5 EXTENSÕES DO MODELO TOBIT

Os modelos desenvolvidos para flexibilizar o Tobit têm em comum o fato de que modelam dois tipos de decisão:

- a) A decisão de *participação* do mercado consumidor ou de *aquisição* do produto,  $d_i^* = \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + u_i$ .
- b) A decisão de *consumo*,  $y_i^* = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i$ .

Essas decisões podem ser:

- a) *Correlacionadas* ou *independentes*, isto é,  $\varepsilon_i$  e  $u_i$  possuem distribuições bivariadas ou univariadas;
- b) *Simultâneas* ou *sequenciais*, isto é, se a decisão for sequencial, não há censura de informações uma vez que  $d_i^* > 0$  (dominância da primeira barreira).

Tendo em vista estas diferentes formas de tomada de decisão, apresentar-se-á diferentes modelos criados com o objetivo de servir como alternativas ao Tobit.

### 2.5.1 Modelo de Duas Partes

Conforme visto na Seção 2.3.3, no modelo Tobit, um único mecanismo determina as decisões de participação e de consumo. Buscando resolver este problema, Cragg (1971) desenvolveu um modelo que ficou conhecido como *modelo de Duas Partes* (Duan *et al.*, 1983), onde  $\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]$  e  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$  possuem diferentes determinantes.

O modelo basicamente assume duas hipóteses. Primeiro, a probabilidade de se observar um gasto positivo é dada por um Probit

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \quad (2.66)$$

Segundo, a densidade de  $y_i$  condicional em  $y_i > 0$  é dada por uma distribuição normal truncada em zero:

$$f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \quad (2.67)$$

O truncamento da distribuição (2.67) visa a garantir que o valor esperado de  $y_i$  seja positivo. Pode-se supor outras distribuições para  $y_i$  condicional em  $y_i > 0$ , sendo que o mais comum nos trabalhos empíricos é assumir uma distribuição lognormal

$$f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\ln y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{y_i} \quad (2.68)$$

O ponto de partida desta formulação é a função de verossimilhança do modelo Tobit. Conforme visto na Seção 2.3.1, essa função de verossimilhança consiste na junção de um modelo Probit com um modelo de regressão truncada, mas com as variáveis independentes e os parâmetros do modelo Probit e de regressão truncada restritos a serem iguais. O modelo de Duas Partes apenas relaxa estas restrições, permitindo que os parâmetros e as variáveis que determinam a probabilidade de uma observação ser positiva sejam diferentes daqueles que determinam o valor esperado de uma observação positiva.

Formalmente, o modelo equivale à especificação de duas variáveis latentes

$$d_i^* = \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + u_i \quad (2.69)$$

$$y_i^* = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad (2.70)$$

onde  $u_i \sim N(0,1)$  e  $\varepsilon_i \sim NT(-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}; 0, \sigma^2)$  possui distribuição normal com média zero e desvio padrão  $\sigma^2$  truncada em  $-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$ . A primeira variável latente governa a decisão de participação, isto é, se o indivíduo tem interesse em adquirir o produto, e a segunda variável governa a decisão de consumo, isto é, o quanto o indivíduo irá adquirir do produto, dado que decidiu participar do seu mercado consumidor. O truncamento do erro  $\varepsilon_i$  em  $-\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$  é feito para garantir que o truncamento de  $y_i^*$  ocorra em zero.

A partir destas variáveis latentes, tem-se a variável observada

$$y_i = \begin{cases} y_i^* & \text{se } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{se } d_i^* \leq 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

Portanto, o modelo de Duas Partes estende o modelo Tobit através da alteração do ponto de censura das informações. No modelo Tobit, o valor  $y_i^*$  é observado quando  $y_i^* > 0$ . No modelo de Duas Partes, o ponto de censura é dado por uma variável aleatória  $d_i^*$ , de modo que  $y_i^*$  é observado quando  $d_i^* > 0$ . Este caso é chamado de censura casual (do inglês *incidental censoring*) (Winkelmann; Boes, 2009).

A função de verossimilhança do modelo é dada por

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma) = \prod_{\{i: y_i=0\}} [1 - \Phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha})] \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}) \times \prod_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \quad (2.72)$$

A primeira linha da função de verossimilhança corresponde ao modelo Probit, enquanto a segunda linha corresponde a um modelo de regressão truncada, com truncamento no ponto zero. Note que como estas duas partes são inteiramente separáveis, o modelo de Duas Partes pode ser estimado por um Probit e um modelo de regressão truncada separadamente, daí o nome proposto por Duan *et al.* (1983) para denominá-lo. Por fim, observe que o modelo Tobit é uma forma particular deste modelo quando  $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i$  e  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}/\sigma$ .

Apesar de semelhante ao modelo Tobit, o modelo de Duas Partes possui uma diferença teórica importante com relação a este último. Esta diferença diz respeito à origem dos gastos nulos. No modelo Tobit, os gastos nulos advêm de uma solução de canto do problema do consumidor. No modelo de Duas Partes, por outro lado, os valores nulos *não* resultam de uma solução de canto. Eles são gerados por uma decisão consciente de não participação. Assim, uma vez que a primeira barreira é transposta, não é mais possível haver zeros resultantes de solução de canto; o valor consumido será necessariamente positivo. Neste ponto, portanto, a censura das informações não é mais relevante. Isso significa que no modelo de Duas Partes há uma dominância da decisão de participação sobre a decisão de consumo (dominância da primeira barreira).

### 2.5.1.1 Valores esperados e efeitos marginais

A partir das equações (2.66) e (2.67), é possível obter os valores esperados da variável dependente:

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \int_0^{\infty} y_i \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) dy_i \\ &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma M(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \left[ \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma M(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) \right] \quad (2.75)$$

onde  $M(\cdot)$  é a razão inversa de Mills definida anteriormente.

Os efeitos marginais, por sua vez, são dados por

$$\frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0]}{\partial x_{ik}} = \alpha_k \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} = \beta_k \left\{ 1 - M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} + M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \right\} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} &= \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \beta_k \\ &+ \left[ \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} + M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \left\{ \sigma \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \alpha_k - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \beta_k \right\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Se a densidade condicional de  $y_i$  for definida a partir de uma distribuição lognormal, então os valores esperados serão dados por

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \exp(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma^2/2) \quad (2.79)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \exp(\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma^2/2) \quad (2.80)$$

### 2.5.1.2 Transformação da variável dependente

O modelo de Duas Partes pode ser facilmente estendido por meio da inclusão da transformação IHS na variável dependente. Neste caso, a equação da decisão de consumo (2.70) se torna

$$T(\lambda, y_i^*) = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad (2.81)$$

A relação entre as variáveis latentes e a variável observada é descrita por

$$T(\lambda, y_i) = \begin{cases} T(\lambda, y_i^*) & \text{se } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{se } d_i^* \leq 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

Como  $\varepsilon_i$  possui uma distribuição normal truncada, a função de densidade de  $y_i$  pode ser obtida a partir da técnica de transformação de variáveis aleatórias

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) &= f\left(T(\lambda, y_i) | \mathbf{x}_i, T(\lambda, y_i) > 0\right) \left| \frac{\partial T(\lambda, y_i)}{\partial y_i} \right| \\ &= \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Com estas modificações, obtém-se a seguinte função de verossimilhança (Yen; Huang, 1996):

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \lambda) &= \prod_{\{i: y_i = 0\}} [1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})] \\ &\times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Note que agora existe um parâmetro a mais a ser estimado,  $\lambda$ . A esperança condicional de  $y_i$ , neste caso, será dada por

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} dy_i \quad (2.85)$$

De onde se obtém

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} dy_i \end{aligned} \quad (2.86)$$

Como estas expressões não possuem solução analítica, elas devem ser calculadas por métodos numéricos.

### 2.5.2 Modelo de seleção amostral de Heckman

Em uma série de artigos famosos, Heckman (1976, 1979) propôs um modelo para lidar com o problema de censura casual de informações para o contexto em que a decisão de participação é correlacionada com a decisão de consumo. Este modelo recebeu diversas denominações ao longo do tempo, sendo Heckit, Tobit tipo II e modelo de seleção amostral as denominações mais comuns.

O modelo de Heckman guarda muitas semelhanças com o modelo de Duas Partes apresentado na seção anterior. De fato, o modelo de Heckman também é constituído por uma equação de participação e uma equação de consumo

$$d_i^* = \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + u_i \quad (2.87)$$

$$y_i^* = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad (2.88)$$

Tais variáveis latentes não são observadas perfeitamente. A partir delas define-se uma variável binária de participação  $d_i$

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{se } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{se } d_i^* \leq 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

E a relação entre estas variáveis latentes e a variável observada  $y_i$  é dada por

$$y_i = \begin{cases} y_i^* & \text{se } d_i^* > 0 \\ - & \text{se } d_i^* \leq 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

onde o traço (–) indica que o valor de  $y_i$  não é observado quando  $d_i^* \leq 0$  (valor *missing*).

A variável  $d_i$  indica se o indivíduo participa do mercado consumidor. A variável  $y_i$ , por outro lado, representa o valor consumido com o produto. Note, portanto, que diferentemente do modelo Tobit, aqui não se tem um ponto de censura claro para os dados. A variável  $y_i^*$  é observável apenas se  $d_i^* > 0$ .

Apesar de desenvolvido originalmente para ser aplicado na relação (2.90), o modelo de Heckman pode ser também aplicado nos casos onde assume-se que  $y_i = 0$  se  $d_i^* \leq 0$ , pois a função de verossimilhança não se altera com a mudança de interpretação, apenas os valores esperados (Dow; Norton, 2003).

A grande diferença do modelo de Heckman para o modelo de Duas Partes reside na especificação dos erros. No modelo de Heckman original, os erros  $(u_i, \varepsilon_i)$  possuem distribuição normal bivariada, com coeficiente de correlação  $\rho$ ,

$$\begin{bmatrix} u_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.91)$$

Isto significa que, ao invés de serem tomadas independentemente, as decisões de participação e de consumo são feitas conjuntamente, e características não-observáveis que influenciam a decisão de participação possuem um efeito também sobre a decisão de consumo.

Pode-se estimar o modelo de Heckman pelo método de máxima verossimilhança. No caso em que  $d_i = 0$ , tudo o que se observa é que este evento ocorreu, e a densidade de probabilidade da observação é a probabilidade deste evento ocorrer, isto é,  $\text{Prob}[d_i = 0 | \mathbf{x}_i]$ :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[d_i = 0 | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[d_i^* \leq 0 | \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}[u_i \leq -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{x}_i] \\ &= 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.92)$$

No caso em que  $d_i = 1$ , a função de verossimilhança é composta pela probabilidade do evento conjunto  $y_i$  e  $d_i = 1$  acontecer, isto é, por  $\text{Prob}[d_i = 1 | \mathbf{x}_i] f(y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1)$ . Para

encontrar esta expressão, o truque consiste em transformar  $\text{Prob}[d_i = 1 | \mathbf{x}_i]f(y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1)$  em  $\text{Prob}[d_i = 1 | \mathbf{x}_i, y_i]f(y_i | \mathbf{x}_i)$ . Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} \text{Prob}[d_i = 1 | \mathbf{x}_i]f(y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1) &= \text{Prob}[d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i]f(y_i^* | \mathbf{x}_i, d_i^* > 0) \\ &= \text{Prob}[u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}]f(\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} f(u_i, \varepsilon_i) du_i \\ &= \int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} f(\varepsilon_i) f(u_i | \varepsilon_i) du_i \\ &= f(\varepsilon_i) \int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} f(u_i | \varepsilon_i) du_i \\ &= f(\varepsilon_i) \text{Prob}[u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | \varepsilon_i] \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que  $u_i$  e  $\varepsilon_i$  possuem distribuição normal bivariada, pode-se escrever  $u_i = \rho\varepsilon_i/\sigma + \eta_i$ , onde  $\eta_i$  é uma variável aleatória com distribuição  $N(0, 1 - \rho^2)$ .

Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Prob}[u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | \varepsilon_i] &= \text{Prob}\left[ \frac{u_i - \frac{\rho}{\sigma} \varepsilon_i}{\sqrt{1 - \rho^2}} > \frac{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} \varepsilon_i}{\sqrt{1 - \rho^2}} \middle| \varepsilon_i \right] \\ &= \int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} \phi\left( \frac{u_i - \frac{\rho}{\sigma} \varepsilon_i}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) du_i \\ &= 1 - \Phi\left( \frac{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} (y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \\ &= \Phi\left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \\ &= \text{Prob}[d_i = 1 | \mathbf{x}_i, y_i] \end{aligned} \tag{2.93}$$

A distribuição marginal de  $\varepsilon_i$ , por outro lado, é dada por

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma} \phi\left( \frac{\varepsilon_i}{\sigma} \right) \Rightarrow f(y_i | \mathbf{x}_i) = \frac{1}{\sigma} \phi\left( \frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \tag{2.94}$$

Juntando (2.93) e (2.94), obtém-se

$$\text{Prob}[d_i = 1 | \mathbf{x}_i, y_i]f(y_i | \mathbf{x}_i) = \Phi\left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \frac{1}{\sigma} \phi\left( \frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \tag{2.95}$$

Assim, a função de verossimilhança é

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \rho) = \prod_{\{i: y_i=0\}} \{1 - \Phi(z_i' \boldsymbol{\alpha})\} \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi\left(\frac{z_i' \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma}(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.96)$$

onde  $\rho$  é restrito no intervalo aberto entre  $-1$  e  $1$ . Se  $\rho = 0$ , então a função de verossimilhança converge para uma combinação do modelo Probit com o modelo de regressão linear nas observações com valores positivos.

Esta função de verossimilhança é altamente não-linear e, como mostram Zuehlke e Kassekert (2008) e Olsen (1975), não é globalmente côncava. Utilizando simulações Monte Carlo, Zuehlke e Kassekert (2008) mostram que as condições de primeira ordem do problema de maximização da função de log-verossimilhança possuem múltiplas raízes nas seguintes situações: *a*) quando a censura das informações é elevada (percentual elevado de valores nulos); *b*) quando a correlação entre os erros da equação de participação e de consumo é alta; ou *c*) quando o instrumento utilizado na equação de participação é fraco<sup>5</sup>. Isto significa que métodos tradicionais de maximização da função podem convergir para um máximo local. O máximo global da função pode ser encontrado apenas se os parâmetros iniciais partirem de uma vizinhança relativamente próxima dos valores do máximo global.

Apesar da possibilidade de máximos locais, Olsen (1982) mostra que a função de verossimilhança do modelo de seleção de Heckman é globalmente côncava se condicionada em  $\rho$ . Logo, o ponto de máximo pode ser encontrado através de uma busca em grade (*grid search*) do parâmetro  $\rho$ . Isso é feito fixando-se  $\rho$  em um valor no intervalo  $(-1, 1)$  e estimando a função de verossimilhança nos parâmetros remanescentes. Ao fazer isso para diversos valores de  $\rho$ , obtemos o perfil do valor de máxima verossimilhança condicional no espaço de  $\rho$ . Como o conjunto de pontos resultantes é finito, a localização do maior valor é facilmente encontrada, e os parâmetros subjacentes a este valor podem ser tomados como parâmetros iniciais para o processo de maximização do modelo.

---

<sup>5</sup> Esse ponto será retomado adiante nesta seção.

Uma solução alternativa é utilizar o procedimento de dois estágios proposto por Heckman (1979) para estimar os parâmetros iniciais. Heckman (1979) sugere a estimação deste modelo em dois estágios, onde no primeiro estágio estima-se um modelo Probit para  $d_i = 1$  e então se inclui a razão inversa de Mills estimada como uma variável adicional na regressão  $y_i = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \gamma \lambda(\mathbf{z}'_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}) + \eta_i$ . Os passos para a estimação dos parâmetros são:

- *Passo 1: Estimar o termo de correção por um Probit.* Seja  $d_i$  a variável binária com  $d_i = 1$  se  $y_i > 0$  e  $d_i = 0$  se  $y_i = 0$ . O passo consiste em estimar um modelo Probit  $\text{Prob}[d_i = 1] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})$  e, com os parâmetros estimados  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ , calcular o termo de correção do viés de seleção  $M(\mathbf{z}'_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \phi(\mathbf{z}'_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}) / \Phi(\mathbf{z}'_i \hat{\boldsymbol{\alpha}})$ .
- *Passo 2: Rodar um modelo de MQO com o termo de correção como uma variável adicional.* Estimar  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\sigma$  e  $\gamma$  por mínimos quadrados ordinários no modelo  $y_i = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \gamma M(\mathbf{z}'_i \hat{\boldsymbol{\alpha}}) + \eta_i$ , utilizando apenas as observações em que  $y_i > 0$ . O parâmetro  $\gamma$  estimado representa a covariância dos erros  $u_i$  e  $\varepsilon_i$ , isto é,  $\gamma = \rho\sigma$ .

O problema do estimador de dois estágios proposto por Heckman é o seu desempenho ruim em pequenas amostras (Zuehlke; Zeman, 1991), com  $\rho$  frequentemente saindo do intervalo entre  $-1$  e  $1$ . Heckman (1979) mostra que este estimador em dois estágios é consistente. No entanto, ele não é eficiente quando comparado com o estimador obtido por máxima verossimilhança.

Como o modelo de Heckman não exige que a distribuição marginal de  $\varepsilon_i$  seja proveniente de uma normal truncada, então os valores preditos de  $y_i$  podem ser negativos mesmo nos casos em que o indivíduo decide participar do mercado consumidor. Para corrigir isto, Yen (2005) estende o modelo de Heckman combinando a ideia de Cragg (1971) de truncamento dos erros com a ideia de correlação dos erros presente no modelo de Heckman (1979). Para tanto, ele modela os erros como originários de uma distribuição normal bivariada truncada em  $\varepsilon_i > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}$ . A modificação proposta pelo autor visa a garantir que  $y_i > 0$  no caso de o indivíduo decidir participar do mercado consumidor. Assim, a função de densidade de probabilidade conjunta dos erros é dada por

$$f(u_i, \varepsilon_i | \varepsilon_i > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}) = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \psi \left( u_i, \frac{\varepsilon_i}{\sigma}, \rho \right) \quad (2.97)$$

onde  $\psi(\cdot)$  representa a função de densidade de probabilidade normal padrão bivariada.

Com esta alteração, a probabilidade de uma despesa ser nula passa a ser

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[d_i^* \leq 0, y_i^* \leq 0 | \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob}[\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + u_i \leq 0, \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \leq 0 | \mathbf{x}_i] \\ &= \text{Prob} \left[ u_i \leq -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\varepsilon_i}{\sigma} \leq -\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \middle| \mathbf{x}_i \right] \\ &= 1 - \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho \right) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.98)$$

O que resulta na seguinte função de verossimilhança (Yen, 2005):

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \rho) &= \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left\{ 1 - \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho \right) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \right\} \\ &\times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Teoricamente, não é necessário impor restrições sobre os regressores para se obter a identificação dos parâmetros no modelo de Heckman. No entanto, se forem usadas as mesmas variáveis nos vetores  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{z}_i$  (isto é,  $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i$ ), a identificação dos parâmetros só é alcançada em função das não linearidades presentes na forma funcional do modelo, em especial no pressuposto de que os erros possuem distribuição normal bivariada. Tal identificação, além de pouco confiável, cria problemas de multicolinearidade, pois se  $\mathbf{x}_i = \mathbf{z}_i$ , então  $E[y_i | d_i = 1] \simeq \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + a + b\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\alpha}$ , dado que a razão inversa de Mills é aproximadamente linear em uma grande área de seu domínio (Cameron; Trivedi, 2005). Sendo assim, mesmo que se consiga identificar separadamente os coeficientes  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$ , ainda assim estes parâmetros serão altamente correlacionados. Neste caso, portanto, a solução usualmente adotada é utilizar instrumentos na equação de seleção, isto é, impor uma restrição de exclusão em algum componente do vetor  $\mathbf{x}_i$ . Isto pode ser uma grande limitação, dado que tais pressupostos de exclusão são frequentemente indisponíveis ou difíceis de justificar do ponto de vista teórico.

Resumindo, o modelo de Heckman difere do modelo Tobit padrão (Tobit tipo I) nos seguintes aspectos. Primeiro, ele reconhece o processo de decisão como sendo de dois estágios, onde inicialmente decide-se pela participação no mercado consumidor e em seguida decide-se o montante a ser consumido (isto é, a decisão de participação domina a decisão de consumo). Segundo, no modelo Tobit, a variável dependente é censurada quando  $y_i^* \leq 0$ , enquanto no modelo de Heckman o ponto de censura depende de uma segunda variável aleatória  $d_i^*$ . Por conta disto,  $y_i$  pode assumir tantos valores positivos quanto negativos quando  $d_i = 1$ . Observe também que, no modelo de Heckman original, o valor de  $y_i$  quando  $d_i^* \leq 0$  é não observado, ao invés de ser zero<sup>6</sup>. Por fim, as variáveis (e os parâmetros) da equação de seleção podem ser diferentes daqueles da equação de consumo, ao passo que no modelo Tobit padrão estas variáveis e parâmetros são idênticos por construção. Por conta destas características, Amemiya (1985), em sua tradicional classificação, deu a este modelo o nome Tobit tipo II, por considerá-lo uma generalização do modelo Tobit padrão.

### 2.5.2.1 Valores esperados e efeitos marginais

O valor esperado da variável dependente no modelo de Heckman é dado por

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1] &= E[y_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \\ &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + E[\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \end{aligned}$$

onde  $E[\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \neq 0$  por causa da correlação entre os erros. Como os erros provêm de uma distribuição normal bivariada, pode-se escrever

$$\varepsilon_i = \rho \sigma u_i + \eta_i \quad \text{onde } \eta_i \sim N(0, 1 - \rho^2) \quad (2.100)$$

A partir deste resultado, tem-se

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1] &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + E[\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \\ &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + E[\rho \sigma u_i + \eta_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \\ &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \rho \sigma E[u_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup> Note, porém, que se assumirmos que  $y_i = 0$  quando  $d_i^* \leq 0$ , a função de verossimilhança (2.96) não se altera, o que torna esta diferença inócua para os nossos propósitos.

Como  $E[u_i | u_i > -z_i'\alpha] = M(z_i'\alpha)$  (cf. Seção 2.3.2), então

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1] = \mathbf{x}_i'\beta + \rho\sigma \frac{\phi(z_i'\alpha)}{\Phi(z_i'\alpha)} \quad (2.101)$$

O segundo termo pode ser tanto positivo quanto negativo, dependendo do sinal de  $\rho$ . Assim, se  $\rho > 0$ , então  $E[y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1] > E[y_i | \mathbf{x}_i]$ . Nesta situação, diz-se que há um viés de seleção positivo, pois características não observadas que afetam positivamente a probabilidade de participação possuem um efeito positivo também sobre a quantidade consumida. Por outro lado, se  $\rho < 0$ , então há um viés de seleção negativo.

Pela equação (2.92), temos  $\text{Prob}[d_i = 1 | \mathbf{x}_i] = \Phi(z_i'\alpha)$ , o que implica

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \Phi(z_i'\alpha)\mathbf{x}_i'\beta + \rho\sigma\phi(z_i'\alpha) \quad (2.102)$$

Os efeitos marginais do modelo de seleção bivariado são dados por

$$\frac{\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \beta_k \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1]}{\partial x_{ik}} = \beta_k - \rho\sigma\alpha_k \frac{\phi(z_i'\alpha)}{\Phi(z_i'\alpha)} \left[ \frac{\phi(z_i'\alpha)}{\Phi(z_i'\alpha)} + z_i'\alpha \right] \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} &= \alpha_k \phi(z_i'\alpha)\mathbf{x}_i'\beta + \Phi(z_i'\alpha)\beta_k - \rho\sigma z_i'\alpha \phi(z_i'\alpha)\alpha_k \\ &= \Phi(z_i'\alpha)\beta_k + \alpha_k \phi(z_i'\alpha) [\mathbf{x}_i'\beta - \rho\sigma z_i'\alpha] \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial \text{Prob}[d_i = 1]}{\partial x_{ik}} = \alpha_k \phi(z_i'\alpha) \quad (2.106)$$

Assim, uma variável  $x_k$  afeta a esperança  $E[y_i | \mathbf{x}_i]$  de três formas distintas: a) através do seu efeito na equação de seleção; b) através do seu efeito direto na equação de consumo; e c) através do efeito indireto dado pela razão inversa de Mills.

Se os erros forem modelados a partir da distribuição normal bivariada truncada em zero para  $y_i^*$ , então a esperança condicional será (Muthén, 1990; Yen, 2005):

$$\begin{aligned}
 E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + E[\varepsilon_i | \mathbf{x}_i, \varepsilon_i > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}, u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \\
 &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \left[ \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho \right) \right]^{-1} \\
 &\times \left\{ \phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) + \rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}/\sigma - \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

O valor esperado de  $y_i$  será dado por

$$\begin{aligned}
 E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\
 &= \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho \right) \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \\
 &\times \left\{ \phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) + \rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}/\sigma - \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

### 2.5.2.2 Transformação da variável dependente

Podemos incorporar a transformação IHS no modelo de Heckman. Para tanto, as equações (2.88) e (2.90) são substituídas por

$$T(\lambda, y_i^*) = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \tag{2.109}$$

$$T(\lambda, y_i) = \begin{cases} T(\lambda, y_i^*) & \text{se } d_i^* > 0 \\ - & \text{se } d_i^* \leq 0 \end{cases} \tag{2.110}$$

Com essas modificações, a função de verossimilhança se torna:

$$\begin{aligned}
 L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \rho, \lambda) &= \prod_{\{i: y_i=0\}} \{1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})\} \\
 &\times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \\
 &\times \prod_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}}
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

### 2.5.3 Modelo de Barreira Dupla

O modelo de Barreira Dupla (do inglês *double-hurdle*) desenvolvido por Cragg (1971) estende o modelo Tobit tradicional de forma a separar o primeiro estágio de decisão (participação no mercado) do segundo estágio (quantidade demandada). De acordo com a

lógica do modelo, duas barreiras têm que ser vencidas antes que gastos positivos sejam observados: *a*) o domicílio tem que ser um consumidor potencial; e *b*) o domicílio tem que ser um consumidor efetivo (isto é, não restrito por solução de canto). Em termos práticos, isso significa que mesmo tendo decidido participar do mercado consumidor, ainda assim a variável latente de consumo  $y_i^*$  pode ser censurada em razão de o consumidor não adquirir o produto aos preços e à renda corrente (solução de canto). Isso contrasta com o modelo de Heckman, onde a dominância da primeira barreira faz com que não existam observações censuradas no segundo estágio de decisão. Neste sentido, o modelo de Barreira Dupla pode ser considerado uma generalização tanto do modelo Tobit quanto do modelo de Heckman.

O modelo especifica duas equações separadas para cada um dos processos de decisão, em que uma variável latente governa a decisão de participação,  $d_i^*$ , e uma variável latente governa a decisão de consumo,  $y_i^*$ . Estas variáveis são dadas por

$$\begin{aligned} d_i^* &= \mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha} + u_i \\ y_i^* &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (2.112)$$

onde  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  são vetores de parâmetros e  $u_i$  e  $\varepsilon_i$  representam os erros do modelo. A distribuição destes erros pode supor dependência ou independência entre eles.

Se ambas as decisões são feitas conjuntamente, então os erros possuem uma distribuição normal bivariada dada por

$$\begin{bmatrix} u_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.113)$$

onde  $\rho$  representa o coeficiente de correlação dos erros. Se as decisões são independentes, então os erros possuem distribuições normais univariadas

$$\begin{aligned} u_i &\sim N(0,1) \\ \varepsilon_i &\sim N(0,\sigma^2) \end{aligned} \quad (2.114)$$

A variável dependente observada  $y_i^*$  é tal que

$$y_i = \begin{cases} y_i^* & \text{se } y_i^* > 0 \text{ e } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.115)$$

Este mecanismo de censura pode ser escrito de forma alternativa como

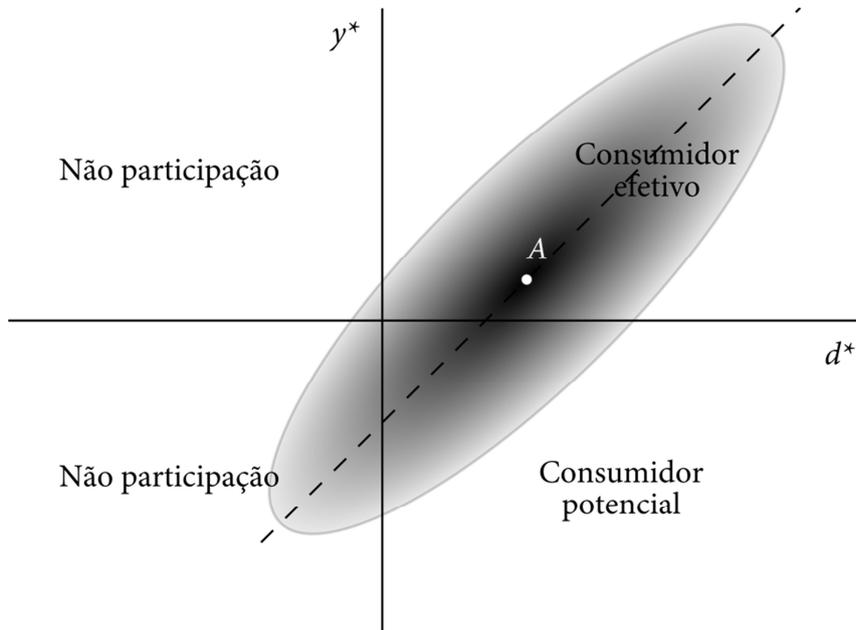
$$y_i = 1(d_i^* > 0) \max \{ 0, y_i^* \} \quad (2.116)$$

onde  $1(A)$  é uma função indicadora com valor 1 se a condição  $A$  for verdadeira e valor zero se a condição  $A$  for falsa.

Assim, um valor positivo é observado apenas se o domicílio participa do mercado e escolhe uma quantidade positiva de consumo ( $y_i^* > 0$  e  $d_i^* > 0$ ). Por outro lado, valores nulos podem ocorrer quando: *a*) o indivíduo participa do mercado, mas consome quantidades nulas ( $d_i^* > 0$  e  $y_i^* \leq 0$ ); *b*) o indivíduo não participa do mercado, mas consumiria quantidades positivas se participasse ( $d_i^* \leq 0$  e  $y_i^* > 0$ ); *c*) o indivíduo não participa do mercado e não consumiria quantidades positivas se participasse ( $d_i^* \leq 0$  e  $y_i^* \leq 0$ ).

A Figura 2.9 representa cada um desses casos. A elipse da figura representa uma curva de nível da densidade conjunta das variáveis latentes  $y_i^*$  e  $d_i^*$  no caso em que há uma correlação positiva entre os erros  $\varepsilon_i$  e  $u_i$ . Esta densidade de probabilidade está centrada no ponto  $A = (z_i'\alpha, x_i'\beta)$ , o que significa que toda a distribuição se move pelo plano à medida que os valores das variáveis explicativas se alteram. As partes mais escuras representam regiões onde a densidade de probabilidade é maior. A inclinação da elipse depende tanto do desvio padrão dos erros  $\sigma$  quanto do coeficiente de correlação  $\rho$ . No quadrante I está o conjunto de consumidores efetivos do bem. No quadrante II estão os indivíduos que decidiram participar do mercado para o produto, mas foram restritos pelos níveis de preços dos bens e pelo tamanho do conjunto orçamentário (solução de canto); estes indivíduos representam os consumidores potenciais do bem, dado que alterações nos preços ou no nível de renda do domicílio podem fazer com que eles passem a consumir quantidades positivas. Por fim, nos quadrantes III e IV estão os indivíduos que não participam do mercado (voluntária ou involuntariamente). Aqui se encontram os indivíduos que se abstiveram do consumo do bem ou que foram impedidos de participar do mercado por conta de alguma barreira à participação (restrição de oferta, etc).

Figura 2.9 - Relação entre as variáveis latentes e a variável observada no modelo Double Hurdle para  $\rho > 0$



Fonte: Elaboração própria.

Para estimar os parâmetros do modelo, é necessário montar a equação de verossimilhança. Se  $y_i = 0$ , a contribuição da observação para a função de verossimilhança é

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i] &= 1 - \text{Prob}[y_i^* > 0, d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] \\ &= 1 - \text{Prob}\left[u_i > -\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha}, \frac{\varepsilon_i}{\sigma} > -\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \mid \mathbf{x}_i\right] \\ &= 1 - \Psi\left(\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right) \end{aligned} \quad (2.117)$$

onde  $\Psi(\cdot)$  representa a função de distribuição acumulada normal padrão bivariada.

Se  $y_i > 0$ , a contribuição da observação para a verossimilhança é

$$\text{Prob}[y_i^* > 0, d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] \times f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0, d_i^* > 0) \quad (2.118)$$

De (2.117), sabe-se que

$$\text{Prob}[y_i^* > 0, d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] = \Psi\left(\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right) \quad (2.119)$$

Utilizando a fórmula de uma distribuição truncada, o segundo componente de (2.118) representa a densidade de  $y_i$  condicionada nos valores positivos

$$f(y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0, d_i^* > 0) = \frac{f(y_i^* | \mathbf{x}_i)}{\text{Prob}[y_i^* > 0, d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i]} \quad (2.120)$$

Para se encontrar a solução analítica desta distribuição, é preciso partir da distribuição conjunta dos erros. Suponha que os erros tenham distribuição normal bivariada dada pela equação (2.113). Então a distribuição truncada dos erros será (Jones, 1992):

$$\begin{aligned} f(u_i, \varepsilon_i | y_i^* > 0, d_i^* > 0) &= f(u_i, \varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i / \sigma > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) \\ &= \frac{f(u_i, \varepsilon_i)}{\Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right)} \\ &= \frac{f(\varepsilon_i) f(u_i | \varepsilon_i)}{\Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right)} \end{aligned}$$

Integrando sobre o domínio relevante de  $u_i$ , obtém-se a densidade marginal truncada de  $\varepsilon_i$ ,

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i / \sigma > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) &= \int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} f(u_i, \varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i / \sigma > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) du_i \\ &= \frac{f(\varepsilon_i) \int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} f(u_i | \varepsilon_i) du_i}{\int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} \int_{-\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}^{\infty} f(u_i, \varepsilon_i) d\varepsilon_i du_i} \\ &= \frac{f(\varepsilon_i) \int_{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}^{\infty} f(u_i | \varepsilon_i) du_i}{\Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right)} \end{aligned}$$

Como a densidade marginal de  $\varepsilon_i$  é uma  $N(0, \sigma^2)$ , então

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma}\right) \quad (2.121)$$

Por outro lado, utilizando o fato de que em uma distribuição normal bivariada a distribuição condicionada dos erros possui distribuição  $f(u_i | \varepsilon_i) \sim N(\rho \varepsilon_i / \sigma, 1 - \rho^2)$ , segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-z'_i\alpha}^{\infty} f(u_i | \varepsilon_i) du_i &= \int_{-z'_i\alpha}^{\infty} \phi\left(\frac{u_i - \frac{\rho}{\sigma}\varepsilon_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) du_i \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-z'_i\alpha - \frac{\rho}{\sigma}\varepsilon_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{z'_i\alpha + \frac{\rho}{\sigma}\varepsilon_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Juntando as equações acima e fazendo a mudança de variável de  $\varepsilon_i$  para  $y_i^*$ , obtém-se a função de densidade condicional de  $y_i^*$ :

$$\begin{aligned}
f(y_i^* | u_i > -z'_i\alpha, \varepsilon_i/\sigma > -x'_i\beta/\sigma) &= \left[ \Psi\left(z'_i\alpha, \frac{x'_i\beta}{\sigma}, \rho\right) \right]^{-1} \\
&\times \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i^* - x'_i\beta}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{z'_i\alpha + \frac{\rho}{\sigma}(y_i^* - x'_i\beta)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Com isto, a função de verossimilhança do modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados é

$$\begin{aligned}
L(\alpha, \beta, \sigma, \rho) &= \prod_{\{i:y_i=0\}} \left\{ 1 - \Psi\left(z'_i\alpha, \frac{x'_i\beta}{\sigma}, \rho\right) \right\} \\
&\times \prod_{\{i:y_i>0\}} \Phi\left(\frac{z'_i\alpha + \frac{\rho}{\sigma}(y_i - x'_i\beta)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - x'_i\beta}{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{2.124}$$

A presença da combinação linear  $z'_i\alpha + \frac{\rho}{\sigma}(y_i - x'_i\beta)$  na função de verossimilhança – também observada no modelo de Heckman – mostra a importância do papel das restrições de exclusão em  $x_i$  para identificar os parâmetros do modelo. Se  $x_i = z_i$ , os parâmetros do modelo são identificados apenas pela forma funcional, e um problema sério de multicolineariedade pode ocorrer.

No caso de erros independentes, a função de verossimilhança se reduz para

$$L(\alpha, \beta, \sigma) = \prod_{\{i:y_i=0\}} \left\{ 1 - \Phi(z'_i\alpha) \Phi\left(\frac{x'_i\beta}{\sigma}\right) \right\} \times \prod_{\{i:y_i>0\}} \Phi(z'_i\alpha) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - x'_i\beta}{\sigma}\right) \tag{2.125}$$

Note que quando  $z'_i\alpha \rightarrow \infty$ , então  $\Phi(z'_i\alpha) \rightarrow 1$  e a função de verossimilhança acima converge para o modelo Tobit.

O modelo de Barreira Dupla tem sido aplicado em uma variedade de áreas. Apenas para citar alguns dos trabalhos empíricos publicados, Burton, Dorsett e Young (1996) e Newman, Henschion e Matthews (2001) utilizaram o modelo para estimar a demanda por carne dos domicílios; Jensen e Yen (1996) aplicam o modelo no gasto com alimentos fora do domicílio das famílias americanas; Yen e Jensen (1996) e Yen e Jones (1997) respectivamente estimam o consumo de álcool e queijo das famílias americanas; Vredin-Johansson (1999) analisa doações de caridade; e Moffatt (2005) utiliza o modelo para analisar os determinantes das inadimplências de empréstimos.

Flood e Gråsjö (2001) comparam o modelo de Barreira Dupla com erros dependentes por meio de simulações Monte Carlo com os modelos de Heckman e Tobit. Os resultados mostram que o modelo de Barreira Dupla é mais robusto a erros de especificação e produz viés menor do que os modelos Tobit e de Heckman. O modelo Tobit inclusive apresenta melhor performance do que o modelo de Heckman no que se refere à robustez dos resultados.

Em uma revisão do modelo de Barreira Dupla, Smith (2003) critica a especificação do modelo com erros independentes. Segundo ele, em quase todos os trabalhos que utilizaram o modelo de Barreira Dupla, o coeficiente de correlação dos erros não foi significativamente diferente de zero. Para o autor, muitos motivos podem ser dados para a falta de significância do parâmetro de dependência, incluindo: *a)*  $\rho$  ser de fato zero; *b)* os parâmetros do modelo não serem identificados; *c)* erros de especificação podem estar tornando o estimador ineficiente; *d)* o poder do teste de hipótese  $\rho = 0$  é fraco; e *e)*  $\rho$  é um componente da matriz de variância-covariância, e tais parâmetros são tipicamente difíceis de se estimar precisamente. Smith (2003), no entanto, argumenta que a recorrência de insignificância do parâmetro nos diversos estudos sugere uma fraqueza estatística fundamental do modelo. Para o autor, a inclusão de dependência entre as decisões de participação e consumo adiciona pouco ao conteúdo informacional do modelo. Na sua opinião, isto significa que a introdução de dependência nos modelos de Barreira Dupla é uma generalização estatística espúria do modelo sem dependência.

### 2.5.3.1 Valores esperados e efeitos marginais

Conforme visto na seção anterior, a probabilidade de consumo ( $y_i > 0$ ) no modelo com erros correlacionados é dada por (2.119). O valor esperado de  $y_i$ , condicional em  $y_i > 0$  é dado por (cf. equação (2.123))

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \int_0^{\infty} y_i f(y_i^* | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i / \sigma > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) dy_i \\ &= \frac{\int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - (\rho/\sigma)(y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) dy_i}{\Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right)} \end{aligned}$$

Ou, de outra forma,

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + E[\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}] \\ &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \int_{-\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}^{\infty} \varepsilon_i f(\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}) d\varepsilon_i \\ &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \frac{\int_{-\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}^{\infty} \varepsilon_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - (\rho/\sigma)\varepsilon_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\varepsilon_i}{\Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right)} \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades da distribuição normal bivariada truncada (Muthén, 1990, p. 134), esta expressão se resume a (Yen, 2005):

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \left[ \Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right) \right]^{-1} \left\{ \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \rho \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \rho \sigma \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma - \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Da qual se obtém

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right) \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \\ &\quad + \left\{ \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \rho \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \sigma \rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma - \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.127)$$

A partir destas expressões, é possível calcular os efeitos marginais. O efeito da variável sobre a probabilidade de consumo é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} &= \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma - \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \alpha_k \\ &+ \phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \rho \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \frac{\beta_k}{\sigma} \end{aligned} \quad (2.128)$$

O efeito total da variável sobre o consumo, por sua vez, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} &= \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho \right) \beta_k + \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma - \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) [\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} - \sigma \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}] \alpha_k \\ &+ \sigma \phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \rho \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \left[ \frac{\alpha_k - \rho \beta_k / \sigma}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \\ &+ \sigma \rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma - \rho \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \left[ \frac{\beta_k / \sigma - \rho \alpha_k}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.129)$$

Utilizando o fato de que  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = E[y_i | \mathbf{x}_i] / \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]$ , o efeito marginal de  $x_{ij}$  sobre a esperança condicionada pode ser calculado através da utilização da regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] \frac{\partial E[y_i | y_i > 0, \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \\ &+ E[y_i | y_i > 0, \mathbf{x}_i] \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Alternativamente, o efeito marginal (2.129) pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} &= \int_0^\infty y_i \frac{\partial h_i}{\partial x_{ik}} dy_i \\ \text{onde } h_i &= \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha} + (\rho/\sigma)(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\ \text{e } \frac{\partial h_i}{\partial x_{ik}} &= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \phi\left(\frac{\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha} + \rho(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})/\sigma}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \alpha_k \\ &\quad + \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha} + \rho(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})/\sigma}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \frac{y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \phi\left(\frac{\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha} + \rho(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})/\sigma}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right\} \frac{\beta_k}{\sigma} \end{aligned}$$

Essa forma de calcular o efeito marginal sob a integral será útil quando se trabalhar com transformações na variável dependente, dado que nesse caso a esperança  $E[y_i | \mathbf{x}_i]$  não terá uma forma fechada e deve ser calculada numericamente.

Para o modelo de Barreira Dupla sem erros correlacionados, temos

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \\ &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma M\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \Phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma M\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \\ &= \Phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma \Phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}) \phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Os valores marginais são:

$$\frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \alpha_k + \Phi(\mathbf{z}_i' \boldsymbol{\alpha}) \phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{\beta_k}{\sigma} \quad (2.134)$$

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} = \beta_k \left\{ 1 - M\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} + M\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \right\} \quad (2.135)$$

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \beta_k + \alpha_k \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \left\{ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right\} \quad (2.136)$$

### 2.5.3.2 Transformação da variável dependente

O modelo de Barreira Dupla pode ser estendido de maneira a introduzir a transformação IHS na variável dependente. Neste caso, a equação (2.115) se torna

$$T(\lambda, y_i^*) = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad (2.137)$$

$$T(\lambda, y_i) = \begin{cases} T(\lambda, y_i^*) & \text{se } T(\lambda, y_i^*) > 0 \text{ e } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.138)$$

Para incorporar esta alteração na função de verossimilhança, deve-se acrescentar o determinante do Jacobiano da transformação na função de densidade de  $y_i^*$  no momento em que for feita a mudança de variável de  $\varepsilon_i$  para  $y_i^*$  em  $f(\varepsilon_i | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i / \sigma > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma)$  (equação (2.123)),

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= T(\lambda, y_i^*) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} \\ \Rightarrow \frac{d\varepsilon_i}{dy_i^*} &= \frac{\partial T(\lambda, y_i^*)}{\partial y_i^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^{*2}}} \end{aligned}$$

Dessa forma, a função de densidade condicional de  $y_i^*$  se torna

$$\begin{aligned} f(y_i^* | u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \varepsilon_i / \sigma > -\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} / \sigma) &= \left[ \Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right) \right]^{-1} \\ &\times \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i^*) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma}(T(\lambda, y_i^*) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^{*2}}} \end{aligned} \quad (2.139)$$

O que resulta na seguinte função de verossimilhança (Yen; Jones, 1997)

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \rho, \lambda) &= \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho \right) \right\} \\
&\times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \\
&\times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}}
\end{aligned} \quad (2.140)$$

Os valores esperados desse modelo são dados por:

$$\begin{aligned}
E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \left[ \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho \right) \right]^{-1} \int_0^\infty \left\{ y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i)_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right. \\
&\times \left. \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} (T(\lambda, y_i)_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} \right\} dy_i
\end{aligned} \quad (2.141)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \int_0^\infty y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i)_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} (T(\lambda, y_i)_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (2.142)$$

No caso de erros independentes, a função de verossimilhança (2.140) se modifica para:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \lambda) &= \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right\} \\
&\times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}}
\end{aligned} \quad (2.143)$$

E obtêm-se os seguintes valores esperados:

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (2.144)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \int_0^\infty y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (2.145)$$

### 2.5.4 Modelo p-Tobit

Até então, os modelos discutidos aqui procuraram tratar o problema dos gastos nulos do ponto de vista da teoria do consumidor. Neste sentido, o trabalho de Deaton e Irish (1984) foi pioneiro ao focar um determinante amostral dos gastos nulos: a infreqüência com que os domicílios adquirem seus produtos. Para lidar com o problema de infreqüência de aquisição,

Deaton e Irish (1984) propuseram uma modificação simples do modelo Tobit. O modelo deles, batizado de p-Tobit, possui dois componentes: um modelo de demanda, definido em termos de um consumo não observado (que pode ser nulo), e um modelo de aquisição de bens, que provê a ligação entre consumo e aquisições e permite que exista um bem que é consumido pelos membros do domicílio mas que não foi adquirido no período de referência da pesquisa.

A ideia por trás do p-Tobit é que se existe um bem que é ao menos parcialmente durável, o domicílio não precisa estar sempre adquirindo-o; ao invés disso, ele pode consumir o produto a partir de um estoque prévio. Considerando que em pesquisas de orçamentos familiares o período de coleta de informações normalmente é diferente do intervalo de aquisição do produto, então um domicílio que adquire um produto pode não consumir toda a aquisição durante a coleta de informações da pesquisa, e um domicílio que não adquiriu o produto pode estar consumindo-o no período de coleta da pesquisa. O modelo de infrequência de aquisição pode, portanto, ser visto como uma fotografia do processo dinâmico que determina a acumulação de estoques e o consumo de um determinado bem (Blundell; Meghir, 1987).

Considere que o período de referência da pesquisa é uma fração  $p$  do período de aquisição de um produto e que a aquisição do produto entre os domicílios se distribua uniformemente no tempo. Então, mesmo que todos os domicílios sejam consumidores deste bem, apenas uma proporção  $p$  dos domicílios reportaria despesas no período, enquanto, por conta da infrequência de aquisição, uma proporção  $1 - p$  dos domicílios não seria visto adquirindo o produto. O comportamento de aquisição dos domicílios pode então ser representado pela probabilidade  $p$  de que ao menos uma aquisição do bem ocorreu no período de referência da pesquisa.

Em uma pesquisa de orçamentos familiares, no entanto, a ausência de aquisição de um produto pode ocorrer tanto por causa da infrequência de aquisição quanto de uma solução de canto do problema do consumidor. Quando a duração do ciclo de aquisição do produto é menor ou igual ao período de captação da pesquisa, o modelo Tobit padrão pode ser utilizado

para modelar os gastos nulos como resultantes exclusivamente de uma solução de canto do problema do consumidor. Caso contrário, é preciso definir uma variável  $d_i$  que assume valor  $d_i = 1$  se o domicílio saiu em busca de uma aquisição do produto no período de coleta da pesquisa, independentemente dele ter efetivamente adquirido o produto, e valor  $d_i = 0$  no caso contrário. Definida esta variável, tem-se que  $\text{Prob}[d_i = 1] = p$ .

Seja  $y_i$  o gasto com um determinado produto e  $y_i^*$  a sua correspondente variável latente, o valor do consumo efetivo. A taxa de consumo depende de todos os fatores que afetam as preferências do domicílio, além dos preços e da renda. A forma que o consumo planejado é traduzido em aquisições irá variar entre os domicílios, dependendo dos hábitos de compra dos mesmos, da posse de carros ou freezers, etc. Supondo que o valor consumido e o valor dispendido são iguais na média, tem-se

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = E[y_i^* | \mathbf{x}_i] \quad (2.146)$$

O pressuposto de identificação aqui é que se o período de observação for longo o suficiente, a variável latente de consumo e a variável observada de despesa teriam o mesmo valor. Como o gasto observado é nulo para quem não adquiriu o produto, utilizando-se a propriedade das expectativas iteradas, o lado esquerdo de (2.146) pode ser escrito como  $E[y_i | \mathbf{x}_i] = pE[y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1]$ . Assim,

$$pE[y_i | \mathbf{x}_i, d_i = 1] = E[y_i^* | \mathbf{x}_i] \quad (2.147)$$

Considerando que  $0 \leq p \leq 1$ , esta equação implica que as despesas observadas dos domicílios, quando positivas, serão em média maiores do que o valor do consumo daquele bem pelos domicílios.

Defina a variável de consumo latente como

$$y_i^* = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.148)$$

Utilizando-se (2.147) e (2.148), a relação entre  $y_i$  e  $y_i^*$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} py_i &= y_i^* + v_i \\ &= (\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i) + v_i, \quad \text{se } d_i = 1 \end{aligned} \quad (2.149)$$

A interpretação é que enquanto  $\varepsilon_i$  representa a heterogeneidade das preferências dos domicílios,  $v_i$  captura as discrepâncias aleatórias presentes no processo de aquisição dos bens, como, por exemplo, a indivisibilidade dos produtos, que impede uma relação determinística entre  $py_i$  e  $y_i^*$ .

Se na equação (2.149) for introduzida uma segunda barreira com o objetivo de se incorporar no modelo o não consumo resultante de uma solução de canto, então a variável observada  $y_i$  será regida pelo seguinte mecanismo de censura

$$y_i = \begin{cases} (y_i^* + v_i)/p & \text{se } y_i^* > 0 \text{ e } d_i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.150)$$

Deaton e Irish (1984) assumem que a aquisição  $y_i = y_i^*/p$  é observada com probabilidade  $p$  durante o período da pesquisa, enquanto que com probabilidade  $1-p$  nenhuma aquisição é observada. Isso significa que  $v_i = 0$ , de modo que a variável observada  $y_i$  é dada por

$$y_i = \begin{cases} y_i^*/p & \text{se } y_i^* > 0 \text{ e } d_i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.151)$$

Ou, seja (Deaton; Irish, 1984, eq. 10),

$$y_i = d_i \max \{ 0, y_i^*/p \} \quad (2.152)$$

O valor de  $p$  no modelo p-Tobit é considerado uma característica fixa do bem, e é tratado como um parâmetro a ser estimado.

Neste modelo, portanto, o valor da variável latente  $y_i^*$  nunca é plenamente observado. Isto ocorre porque um gasto positivo com determinado bem irá representar tipicamente uma aquisição de estoques cujo consumo total será realizado em um período superior ao período de captação da pesquisa.

Assim, um valor nulo de despesa será observado em dois casos: a) se o domicílio não consome o produto, pois está situado em uma solução de canto do problema do consumidor

(( $y_i^* \leq 0$  e  $d_i = 0$ ) ou ( $y_i^* \leq 0$  e  $d_i = 1$ )); *b*) se o domicílio consome o produto, mas não o adquiriu no período de captação da pesquisa ( $y_i^* > 0$  e  $d_i = 0$ ).

Com isso, a densidade de probabilidade da variável observada  $y_i$  possui dois componentes: para  $y_i = 0$ , a distribuição é representada pela probabilidade de ocorrência de um valor nulo em  $y_i$ :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_i = 0 \mid \mathbf{x}_i] &= 1 - \text{Prob}[y_i^* > 0, d_i = 1 \mid \mathbf{x}_i] \\ &= 1 - p \text{Prob}[y_i^* > 0 \mid \mathbf{x}_i] \\ &= 1 - p \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.153)$$

Para  $y_i > 0$ , a distribuição é dada por  $f(y_i \mid \mathbf{x}_i, y_i > 0)$ . Utilizando-se o fato de que

$$f(y_i^* \mid \mathbf{x}_i, y_i^* > 0) = \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i^* - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.154)$$

Tem-se o seguinte

$$\begin{aligned} f(y_i \mid \mathbf{x}_i, y_i > 0) &= f(y_i^* \mid \mathbf{x}_i, y_i^* > 0) \left| \frac{dy_i^*}{dy_i} \right| \\ &= \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{py_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) p \end{aligned} \quad (2.155)$$

Além destes componentes, pode-se definir a probabilidade do consumo ser positivo:

$$\text{Prob}[y_i^* > 0 \mid \mathbf{x}_i] = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.156)$$

e também a probabilidade de que o consumo é positivo, mas que nenhuma aquisição ocorreu durante o período de captação da pesquisa:

$$\text{Prob}[y_i^* > 0, d_i = 0 \mid \mathbf{x}_i] = [1 - p] \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.157)$$

Utilizando as equações (2.153) e (2.155), obtém-se a seguinte função de verossimilhança

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, p) = \prod_{\{i: y_i=0\}} \left[ 1 - p\Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \times \prod_{\{i: y_i>0\}} p^2 \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{py_i - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.158)$$

Conforme mostram Deaton e Irish (1984), esta função de verossimilhança é equivalente à função de um modelo onde  $y_i$  é gerado por um mecanismo Tobit, mas existe uma probabilidade  $p$  que qualquer gasto positivo seja erroneamente reportado como nulo. De fato, o modelo de infrequência de aquisição e um modelo de erros de reportagem não são distinguíveis, ao menos com  $p$  constante. Sem  $p$  constante, a identificação dos parâmetros requer alguma separação das variáveis que influenciam o consumo daquelas que influenciam  $p$ .

Comparando-se a função (2.158) com a função de verossimilhança do modelo Tobit, notam-se muitas semelhanças, exceto que, agora, temos um parâmetro a mais no modelo que deve ser estimado junto com os demais parâmetros. De fato, o modelo Tobit tradicional é um caso especial do modelo p-Tobit quando  $p=1$ , ou seja, quando não há infrequência de aquisição.

Se a função de verossimilhança (2.158) for maximizada, nada garante que o parâmetro estimado  $\hat{p}$  se encontre no intervalo  $0 \leq \hat{p} \leq 1$ . Uma forma de impor o intervalo  $0 \leq p \leq 1$  ao parâmetro  $p$  pode ser feita por meio da transformação logística

$$p(\tau) = \frac{e^\tau}{1 + e^\tau} \quad (2.159)$$

Com esta transformação, a função de verossimilhança (2.158) é maximizada em relação a  $\tau$ , e não em relação a  $p$ , e o parâmetro  $\hat{p}$  estimado pode ser recuperado através de  $\hat{p} = p(\hat{\tau})$  e sua variância através do método Delta (Greene, 2003, p. 487):

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}[\hat{p} | \mathbf{x}_i] &= \left( \frac{\partial p(\hat{\tau})}{\partial \hat{\tau}} \right)^2 \widehat{\text{Var}}[\hat{\tau} | \mathbf{x}_i] \\ &= \left( \frac{e^\tau}{(1 + e^\tau)^2} \right) \widehat{\text{Var}}[\hat{\tau} | \mathbf{x}_i] \end{aligned} \quad (2.160)$$

Segundo Pudney (1989), formulações alternativas para (2.151) podem ter performances melhores em alguns casos, considerando a informação *a priori* que se tem sobre

a natureza do bem em análise. Por exemplo, alguns bens são necessariamente consumidos por todo mundo – roupas, por exemplo – e é mais plausível neste caso utilizar uma distribuição para  $y_i^*$  que não permita o não consumo, tal como a distribuição lognormal

$$f(y_i^* | \mathbf{x}_i, d_i = 1) = \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{\ln y_i^* - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{y_i^*} \quad (2.161)$$

Nesse caso, a função de verossimilhança se torna

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, p) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} [1 - p] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} p \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{\ln(py_i) - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{1}{y_i} \quad (2.162)$$

Apesar de Deaton e Irish (1984) rejeitarem o modelo Tobit em favor do modelo p-Tobit, o parâmetro  $p$  estimado por eles em várias especificações é maior que 1. Segundo Pudney (1989, cap. 4), uma explicação possível para isso está na restritividade dos pressupostos de que  $p$  é constante e que a relação  $y_i = y_i^*/p$  ocorre deterministicamente. A natureza não estocástica da relação  $y_i = y_i^*/p$  implica que, dada a taxa prevalecente de consumo e frequência de aquisição, os bens serão sempre adquiridos na mesma quantidade. Uma forma de relaxar esse pressuposto é igualar  $y_i$  a  $y_i^*/p$  apenas na média, estipulando  $y_i$  como oriundo de uma distribuição com média  $y_i^*/p$ . Pudney (1988) elabora um modelo para este caso.

#### 2.5.4.1 Valores esperados e efeitos marginais

A probabilidade de uma observação ser positiva é dada por:

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = p \Phi \left( \frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \quad (2.163)$$

Para calcular os valores esperados, é mais fácil partir da especificação da variável latente de consumo. Utilizando (2.154), tem-se:

$$E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0] = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma M \left( \frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \quad (2.164)$$

O que implica que o valor esperado do consumo é dado por:

$$\begin{aligned}
E[y_i^* | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0] \\
&= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \text{Prob}[d_i^* > 0, y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\
&\quad \text{e} \\
E[y_i^* | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]
\end{aligned}$$

o que, utilizando o pressuposto de identificação do modelo,  $E[y_i | \mathbf{x}_i] = E[y_i^* | \mathbf{x}_i]$ , implica

$$\text{Prob}[d_i^* > 0, y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \text{Prob}[y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[d_i^* > 0, y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] \\
&= \text{Prob}[d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] \text{Prob}[y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i]
\end{aligned}$$

Segue que

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \frac{E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]}{\text{Prob}[d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i]} = \frac{E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]}{p}$$

Logo, a esperança condicional das aquisições é:

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{p} + \frac{\sigma}{p} M\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \tag{2.166}$$

De onde se obtém o valor esperado das aquisições:

$$\begin{aligned}
E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\
&= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Com isso, chega-se novamente ao pressuposto de identificação do modelo,  $E[y_i | \mathbf{x}_i] = E[y_i^* | \mathbf{x}_i]$ . Note que as expressões (2.166) e (2.167) representam os valores esperados do *gasto* com o bem, e não do *consumo*. Como nos modelos de Infrequência de Aquisição a variável de interesse é o consumo efetivo, então os valores  $E[y_i^* | \mathbf{x}_i]$  e  $E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]$  são mais importantes para a análise.

Dadas as expressões acima, é possível calcular os efeitos marginais das variáveis

$$\frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = p\phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\frac{\beta_k}{\sigma} \quad (2.168)$$

$$\frac{\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]}{\partial x_{ik}} = \beta_k \left\{ 1 - M\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\left[\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma} + M\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\right] \right\} \quad (2.169)$$

$$\frac{\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\beta_k \quad (2.170)$$

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} = \frac{1}{p} \frac{\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]}{\partial x_{ik}} \quad (2.171)$$

#### 2.5.4.2 Transformação da variável dependente

O modelo pode ser adaptado de forma a se incorporar a transformação IHS na variável dependente. Com esta alteração, a equação da variável latente de consumo e a regra de censura são dadas respectivamente por:

$$T(\lambda, y_i^*) = \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \text{onde } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.172)$$

$$T(\lambda, py_i) = \begin{cases} T(\lambda, y_i^*) & \text{se } T(\lambda, y_i^*) > 0 \text{ e } d_i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.173)$$

A função de densidade condicional de  $y_i$  é

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) &= f\left(T(\lambda, y_i^*) | \mathbf{x}_i, T(\lambda, y_i^*) > 0\right) \left| \frac{dT(\lambda, y_i^*)}{dy_i} \right| \\ &= \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, py_i) - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{p}{\sqrt{1 + (\lambda py_i)^2}} \end{aligned} \quad (2.174)$$

Obtendo-se a seguinte função de verossimilhança

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, p, \lambda) &= \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left[ 1 - p\Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \\ &\times \prod_{\{i: y_i > 0\}} p^2 \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, py_i) - \mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda py_i)^2}} \end{aligned} \quad (2.175)$$

Por fim, os valores esperados podem ser calculados a partir de (2.174)

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \frac{p \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, py_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda py_i)^2}} dy_i}{\Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)} \quad (2.176)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = p^2 \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, py_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda py_i)^2}} dy_i \quad (2.177)$$

### 2.5.5 Modelo de Infrequência de Aquisição

O modelo p-Tobit apresentado na seção anterior pode ser generalizado de diversas formas. A mais simples é substituir a constante  $p$  por uma função paramétrica de variáveis exógenas (Blundell; Meghir, 1987). Isto expande o espaço de parâmetros, mas por outro lado não altera de forma substancial a função de verossimilhança do modelo. Esta alteração dá origem ao modelo de Infrequência de Aquisição, originalmente formulado por Blundell e Meghir (1987)<sup>7</sup>.

O modelo de Infrequência de Aquisição baseia-se em uma estrutura similar ao do modelo de Barreira Dupla. Ele é caracterizado por uma equação de consumo e uma equação de aquisição

$$y_i^* = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad (2.178)$$

$$d_i^* = \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + u_i \quad (2.179)$$

onde  $y_i^*$  representa o consumo do domicílio e  $d_i^*$  é a variável latente de aquisição.

Assumindo que os erros possuem distribuições normais univariadas  $u_i \sim N(0,1)$  e  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ , a probabilidade de aquisição é

$$\text{Prob}[d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \quad (2.180)$$

Assim, a relação entre a variável observada  $y_i$  e as variáveis latentes é dada por

<sup>7</sup> O artigo de Blundell e Meghir (1987) apresenta diversos modelos. O modelo descrito aqui é aquele que os autores denominaram de “Tobit com infrequência de aquisição”.

$$y_i = \begin{cases} y_i^* / \Phi(z_i' \alpha) & \text{se } y_i^* > 0 \text{ e } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.181)$$

Tal como no modelo de Barreira Dupla, o modelo de Infrequência de Aquisição também contém dois processos estocásticos separados: um mecanismo similar ao Probit para modelar a equação de aquisição e um mecanismo similar ao Tobit para gerar os valores nulos advindos de uma solução de canto do problema do consumidor. Dessa forma, observações nulas podem ocorrer ou porque o domicílio não adquiriu o produto no período de referência da pesquisa, ou porque o domicílio não deseja consumir o produto à renda e aos preços correntes.

É importante frisar que nem todos os bens possuem solução de canto. Em outras palavras, existem bens que são necessariamente consumidos por todos. Um exemplo são os itens de vestuário, cujo consumo raramente é zero (ao menos quando consideramos o grupo como um todo), mas qualquer pesquisa de orçamentos familiares irá reportar domicílios que não adquiriram o produto por causa da durabilidade dos itens de vestuário. Blundell e Meghir (1987) elaboram uma modificação do modelo de Infrequência de Aquisição para o caso onde não há zeros originados de uma solução de canto.

A partir da especificação das variáveis latentes, pode-se definir a probabilidade de o consumo ser positivo por

$$\text{Prob}[y_i^* > 0 \mid \mathbf{x}_i] = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.182)$$

e a probabilidade de que o consumo é positivo, mas que nenhuma aquisição ocorreu durante o período de captação da pesquisa por

$$\text{Prob}[y_i^* > 0, d_i^* \leq 0 \mid \mathbf{x}_i] = [1 - \Phi(z_i' \alpha)] \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.183)$$

A probabilidade de um valor nulo para a despesa é dada por

$$\text{Prob}[y_i = 0 \mid \mathbf{x}_i] = 1 - \Phi(z_i' \alpha) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.184)$$

Para se obter a densidade condicional de  $y_i$ , primeiro calcula-se o Jacobiano da transformação de  $y_i^*$  para  $y_i$ :

$$\frac{dy_i^*}{dy_i} = \frac{d\Phi(z_i'\alpha)y_i}{dy_i} = \Phi(z_i'\alpha) \quad (2.185)$$

Depois, utilizando o fato que

$$f(y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0, d_i^* > 0) = \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i^* - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.186)$$

Obtém-se a função de densidade condicionada de  $y_i$

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) &= f(y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0, d_i^* > 0) \left| \frac{dy_i^*}{dy_i} \right| \\ &= \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\Phi(z_i'\alpha)y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi(z_i'\alpha) \end{aligned} \quad (2.187)$$

Juntando (2.187) e (2.184), chega-se à seguinte função de verossimilhança:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma) &= \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Phi(z_i'\alpha) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right\} \\ &\times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(z_i'\alpha)^2 \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\Phi(z_i'\alpha)y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.188)$$

A função de verossimilhança acima generaliza o modelo p-Tobit de Deaton e Irish (1984) ao substituir a probabilidade de aquisição pela função de distribuição acumulada normal. Ela também aninha o modelo Tobit quando  $\mathbf{z}_i'\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \infty$ .

Nessa formulação, Blundell e Meghir (1987) mantêm a hipótese de que a probabilidade de aquisição é independente de  $y_i^*$ . Pudney (1989, p. 179) argumenta que esta hipótese é pouco razoável, uma vez que ela implica que uma família que pouco consome um bem irá ter a mesma probabilidade de ser observada adquirindo o produto do que uma família similar que consome o bem em grandes quantidades. Em outras palavras, isso significa que o primeiro domicílio irá realizar uma frequência de pequenas aquisições do produto, enquanto o outro domicílio irá realizar a mesma frequência de grandes aquisições. Para Pudney (1989),

a experiência do dia-a-dia contradiz esse pressuposto e deve-se esperar que  $\text{Prob}[d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i]$  seja uma função crescente de  $y_i^*$ , *ceteris paribus*.

Para se incorporar este efeito no modelo de Infrequência de Aquisição, deve-se estendê-lo através da formulação dos erros como provenientes de uma distribuição normal bivariada (Gould, 1992; Mihalopoulos; Demoussis, 2002),

$$\begin{bmatrix} u_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.189)$$

Com esta alteração, as decisões de aquisição e de consumo não são mais realizadas independentemente. Se, por exemplo, obtivermos um coeficiente de correlação positivo, então quanto maior o nível de consumo, maior será a probabilidade de aquisição do produto. Isto significa que a probabilidade de aquisição depende agora de  $y_i^*$ , ou seja

$$\begin{aligned} \text{Prob}[d_i^* > 0 | \mathbf{x}_i, y_i^*] &= \text{Prob}[u_i > -\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | \varepsilon_i] \\ &= \text{Prob} \left[ \frac{u_i - \frac{\rho}{\sigma} \varepsilon_i}{\sqrt{1-\rho^2}} > \frac{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} \varepsilon_i}{\sqrt{1-\rho^2}} \mid \varepsilon_i \right] \\ &= 1 - \Phi \left( \frac{-\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma} (y_i^* - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\ &= \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (y_i^* - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\ &= \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \end{aligned} \quad (2.190)$$

Assim, a relação entre a variável observada  $y_i$  e as variáveis latentes é dada por

$$y_i = \begin{cases} y_i^* / \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) & \text{se } y_i^* > 0 \text{ e } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.191)$$

Note que, por esta formulação, o valor de  $y_i^*$  não pode ser isolado na equação (2.191), ou seja, seu valor só pode ser obtido pela função implícita  $y_i^* = y_i^*(y_i, \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \sigma, \rho)$  quando  $y_i > 0$ . Para  $y_i = 0$ , o valor de  $y_i^*$  não pode ser determinado com exatidão. Consequentemente, não existe uma maneira fácil de calcular (2.190). Este é um ponto não mencionado por Goudy (1992) e Mihalopoulos e Demoussis (2002), cujos artigos utilizam

esse modelo para estimar o consumo de queijo e vestuário respectivamente, mas não explicam como foi feito o processo de estimação dos parâmetros.<sup>8</sup>

Blundell e Meghir (1987) também elaboram um modelo de infreqüência de aquisição para o caso em que os erros são correlacionados. No entanto, assumem que não há solução de canto, isto é,  $y_i^* > 0$  para todos os domicílios, o que faz com que o termo  $\Phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*)$  apareça na função de verossimilhança apenas quando  $y_i > 0$ . Nesse caso, portanto, o valor de  $y_i^*$  pode ser determinado com exatidão através da função implícita dada por  $y_i = y_i^* / \Phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*)$ .

Para encontrar a densidade condicional de  $y_i$  no modelo de Infreqüência de Aquisição com erros correlacionados, primeiro se calcula o Jacobiano da transformação (Blundell; Meghir, 1987; Gould, 1992; Mihalopoulos; Demoussis, 2002):

$$\frac{dy_i^*}{dy_i} = \frac{d\Phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*)y_i}{dy_i} = \Phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \left[ 1 - \frac{\rho\phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*)y_i}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \right]^{-1} \quad (2.192)$$

E depois se obtém a densidade condicional de  $y_i$

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) &= f(y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0, d_i^* > 0) \left| \frac{dy_i^*}{dy_i} \right| \\ &= \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\Phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*)y_i - \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \\ &\quad \times \Phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \left[ 1 - \frac{\rho\phi(\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} | y_i^*)y_i}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.193)$$

De (2.190), a probabilidade de um valor nulo é:

$$\text{Prob}[y_i = 0 | \mathbf{x}_i] = 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'\boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma}(y_i^* - \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.194)$$

---

<sup>8</sup> Apesar de  $y_i^*$  não poder ser determinado com exatidão quando  $y_i = 0$ , tanto a sua função de densidade quanto as condições necessárias para que  $y_i = 0$  ocorra são conhecidas (equação (2.191)). Com isto, métodos de simulação poderiam ser utilizados para gerar um valor aleatório de  $y_i^*$  no caso em que  $y_i = 0$  e incorporá-lo posteriormente no processo de estimação através da equação (2.190).

Juntando (2.193) e (2.194) obtém-se a função de verossimilhança do modelo de Infrequência de Aquisição com erros correlacionados (Gould, 1992; Mihalopoulos; Demoussis, 2002)

$$\begin{aligned}
 L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \rho) = & \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left\{ 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right\} \\
 & \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \\
 & \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \left[ 1 - \frac{\rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i}{\sigma \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.195}$$

Kimhi (1999) compara o modelo de Infrequência de Aquisição com o modelo de Barreira Dupla e um modelo integrado, que incorpora os três principais processos geradores de valores nulos na despesa: *a)* solução de canto; *b)* infrequência de aquisição; e *c)* abstenção ou barreiras à entrada. Por meio de simulações Monte Carlo, o autor mostra que quando os três processos geradores estão presentes, o modelo de Infrequência de Aquisição é aquele que obtém um valor médio de log-verossimilhança mais próximo do modelo integrado. Além disso, os estimadores obtidos com esse modelo apresentaram viés menor do que o de Barreira Dupla quando os três processos geradores de dados estão presentes.

### 2.5.5.1 Valores esperados e efeitos marginais

A probabilidade da despesa com o produto ser positiva no modelo com erros independentes é dada por

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \tag{2.196}$$

A partir da especificação da variável latente de consumo, tem-se

$$E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0] = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \tag{2.197}$$

O que implica que o valor esperado do consumo é dado por

$$\begin{aligned} E[y_i^* | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0] \\ &= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.198)$$

Além disso, de (2.181), segue que a esperança condicional do gasto é

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \frac{E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]}{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})} \\ &= \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})} + \frac{\sigma}{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})} M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.199)$$

De onde se obtém o valor esperado da despesa

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \sigma \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.200)$$

Os efeitos marginais, portanto, são dados por

$$\frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \alpha_k + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{\beta_k}{\sigma} \quad (2.201)$$

$$\frac{\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]}{\partial x_{ik}} = \beta_k \left\{ 1 - M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} + M\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \right\} \quad (2.202)$$

$$\frac{\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \beta_k \quad (2.203)$$

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{\partial E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0]}{\partial x_{ik}} - \frac{\phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})}{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2} \alpha_k E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0] \quad (2.204)$$

Para o modelo com erros correlacionados, estas expressões ficam um pouco mais complicadas:

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (2.205)$$

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \end{aligned} \quad (2.206)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty \left\{ y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right. \\ \left. \times \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \left[ 1 - \frac{\rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i}{\sigma \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^{-1} \right\} dy_i \quad (2.207)$$

De (2.190), o efeito marginal sobre a probabilidade de aquisição é

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)}{\partial x_{ik}} = \phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (y_i^* - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \left[ \frac{\alpha_k + \frac{\rho}{\sigma} [\phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i \alpha_k - \beta_k]}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \quad (2.208)$$

### 2.5.5.2 Transformação da variável dependente

Para aplicar a transformação IHS na variável dependente do modelo de Infrequência de Aquisição, deve-se modificar a equação da variável latente de consumo (2.178) de maneira que

$$T(\lambda, y_i^*) = \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad (2.209)$$

De  $y_i = y_i^* / \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})$  se  $y_i^* > 0$  e  $d_i^* > 0$ , temos:

$$T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) = \begin{cases} T(\lambda, y_i^*) & \text{se } T(\lambda, y_i^*) > 0 \text{ e } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.210)$$

Com essa alteração, a função de densidade condicionada de  $y_i$  passa a incorporar o Jacobiano da transformação

$$f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) = f \left( T(\lambda, y_i^*) | \mathbf{x}_i, T(\lambda, y_i^*) > 0, d_i^* > 0 \right) \left| \frac{dT(\lambda, y_i^*)}{dy_i} \right| \quad (2.211)$$

onde

$$\frac{dT(\lambda, y_i^*)}{dy_i} = \frac{\partial T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i)}{\partial y_i} = \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 \lambda^2 y_i^2}} \quad (2.212)$$

Nesse caso, a função de densidade condicional é

$$f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \times \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 \lambda^2 y_i^2}} \quad (2.213)$$

Substituindo a equação (2.213) no lugar de (2.187), obtém-se a função de verossimilhança do modelo de Infrequência de Aquisição com erros independentes (Su; Yen, 1996)

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left\{ 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right\} \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 \lambda^2 y_i^2}} \quad (2.214)$$

Assim, os valores esperados podem ser escritos como

$$E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i] &= \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \\ &= \int_0^\infty y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 \lambda^2 y_i^2}} dy_i \\ &= E[y_i^* | \mathbf{x}_i] \end{aligned} \quad (2.216)$$

$$E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0] = \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} E[y_i^* | \mathbf{x}_i] \quad (2.217)$$

Para o modelo com erros correlacionados, a variável dependente observada é dada por

$$T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i) = \begin{cases} T(\lambda, y_i^*) & \text{se } T(\lambda, y_i^*) > 0 \text{ e } d_i^* > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.218)$$

O Jacobiano da transformação se modifica para

$$\begin{aligned} \frac{dT(\lambda, y_i^*)}{dy_i} &= \frac{\partial T(\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i)}{\partial y_i} \\ &= \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)^2 \lambda^2 y_i^2}} \left[ 1 - \frac{\rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i}{\sigma \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.219)$$

onde  $\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)$  agora incorpora a transformação IHS em  $y_i^*$

$$\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) = \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma} (T(\lambda, y_i^*) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \quad (2.220)$$

Assim, a função de densidade condicional de  $y_i$  é dada por

$$\begin{aligned} f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0) &= \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \\ &\quad \times \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)^2 \lambda^2 y_i^2}} \left[ 1 - \frac{\rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i}{\sigma \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.221)$$

Dessa forma, substituindo (2.221) no lugar de (2.193), obtém-se a função de verossimilhança do modelo de Infreqüência de Aquisição com erros correlacionados (Mihalopoulos; Demoussis, 2002)

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \rho) &= \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left\{ 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right\} \\ &\quad \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \\ &\quad \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)^2 \lambda^2 y_i^2}} \left[ 1 - \frac{\rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i}{\sigma \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.222)$$

Por fim, os valores esperados desse modelo são dados por

$$\begin{aligned} E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] &= \left[ \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty \left\{ y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)^2 \lambda^2 y_i^2}} \left[ 1 - \frac{\rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i}{\sigma \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^{-1} \right\} dy_i \end{aligned} \quad (2.223)$$

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \int_0^{\infty} \left\{ y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \right. \\ \left. \times \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)^2}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*)^2 \lambda^2 y_i^2}} \left[ 1 - \frac{\rho \phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} | y_i^*) y_i}{\sigma \sqrt{1 - \rho^2}} \right]^{-1} \right\} dy_i \quad (2.224)$$

## 2.6 CONCLUSÃO

Ao longo deste capítulo foram discutidos diversos modelos que dão um tratamento diferenciado para os gastos nulos presentes em pesquisas de orçamentos domiciliares. Dentre estes modelos, os mais gerais são o modelo de Barreira Dupla e o modelo de Infrequência de Aquisição. No modelo de Barreira Dupla, os valores nulos podem se originar tanto de uma solução de canto do problema do consumidor quanto de uma decisão consciente de não participação. No modelo de Infrequência de Aquisição, por outro lado, além dos valores nulos resultantes de uma solução de canto, tem-se também a incorporação do fato de que as aquisições dos bens são infrequentes e, portanto, considerando o período limitado de observação de uma pesquisa de orçamentos familiares, invariavelmente encontraremos domicílios nos quais o consumo e a despesa são diferentes.

Dentro destas duas classes de modelos estão incorporadas diversos casos especiais, como, por exemplo, o próprio modelo Tobit. Para facilitar na escolha, dois fatores cruciais devem ser levados em conta na hora de especificar o modelo: *a)* a dependência/independência dos erros do modelo e *b)* a dominância da primeira barreira. Se os erros são dependentes, então as decisões de consumo e de participação (ou de aquisição, para os modelos de Infrequência de Aquisição) são interrelacionadas, o que significa que as decisões são tomadas simultaneamente. A propriedade de dominância da primeira barreira, por sua vez, implica que uma vez que o indivíduo tenha decidido participar ou adquirir o produto, a variável latente não é mais censurada. Este é o caso quando a estimação é feita em grandes agregados, onde é razoável supor que itens como alimentação e vestuário são consumidos por todos os indivíduos.

Para a análise de itens mais desagregados, no entanto, pode não ser válido assumir que todos os indivíduos são consumidores, o que dificulta também a identificação de se o valor nulo observado originou-se de uma infrequência de aquisição ou de uma decisão consciente de não participação. Considere o gasto com carne, por exemplo. Se observarmos um domicílio sem nenhum gasto, significa que o domicílio nunca consome carne ou significa que o domicílio não realizou nenhum gasto no período de captação da pesquisa? O mais provável é que ambos os casos estejam presentes, e neste caso testes de hipóteses podem ser aplicados para identificar qual o modelo mais “provável” (cf. Clarke, 2007; Vuong, 1989).

Meghir e Robin (1992), no entanto, argumentam que, do ponto de vista econométrico, a natureza dos valores nulos deve ser vista como uma hipótese e, como tal, definida *a priori*, pois não é possível identificar a natureza dos gastos nulos sem uma informação anterior. Um exemplo onde tal pressuposto pode ser definido é a análise da demanda por itens de fumo (cigarros, charutos, etc). Muitas pessoas não adquirem estes itens por considerá-los um “mal”; nesse caso, o pesquisador pode assumir que, para a maior parte das pessoas, a não aquisição de itens de fumo decorre mais de uma abstenção do consumidor do que de uma infrequência de aquisição. No final, o pressuposto assumido irá se traduzir na escolha de um modelo estatístico que incorpora a abstenção como um motivo para a existência dos gastos nulos e ignora completamente os valores nulos resultantes da infrequência de aquisição.

Por fim, é fácil perceber que os modelos de Barreira Dupla e de Infrequência de Aquisição fazem parte de um modelo mais geral, onde os três mecanismos de censura estão presentes: solução de canto, decisão de participação do consumidor e infrequência de aquisição. De fato, há trabalhos empíricos que procuram estimar este modelo (cf. Kimhi, 1999). O problema é que tal modelo mais geral embute três equações diferentes para as variáveis latentes, e para garantir que os parâmetros destas equações sejam devidamente identificados é necessário impor restrições de exclusão de variáveis entre as equações, de preferência de variáveis contínuas. Mesmo que a pesquisa de orçamentos familiares tenha informação suficiente para permitir a especificação de três conjuntos de variáveis explicativas diferentes – o que dificilmente ocorre –, ainda assim teríamos o problema de justificar com

base na teoria econômica por que algumas variáveis influenciam a decisão de participação mas não influenciam a decisão de consumo ou a de aquisição do produto.

## 3 A DEMANDA POR ALIMENTAÇÃO FORA DO DOMICÍLIO

### 3.1 INTRODUÇÃO

O padrão de consumo das famílias brasileiras modificou-se entre 1987-1988 e 2002-2003 (Castro; Vaz, 2007). Dentre as modificações observadas neste período está o aumento do gasto com alimentação fora do domicílio como proporção da despesa total com alimentação. Conforme mostra a Tabela 3.1, embora o percentual gasto com alimentação fora do domicílio tenha diminuído de 6,1% para 5,7% das despesas correntes entre 1987-1988 e 2002-2003 nas principais regiões urbanas e metropolitanas, a sua participação no total da despesa com alimentação aumentou de 26,6% para 29,7%. Tal mudança é de especial importância para estudos de nutrição e de pobreza, dado que os alimentos adquiridos fora do domicílio são normalmente caracterizados por uma pior composição nutricional e por um preço médio por caloria maior que os consumidos dentro do domicílio<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup> Note que quando nos referimos à alimentação fora do domicílio, estamos nos referindo aos alimentos *preparados* fora do domicílio, independentemente de onde eles são efetivamente consumidos. Entram nesta categoria, portanto, alimentos adquiridos por serviços de entrega a domicílio (pizza, etc), mas não entram alimentos preparados no domicílio e consumidos fora dele (lanches caseiros, marmita própria, etc).

Tabela 3.1 - Composição da despesa corrente familiar nas principais regiões urbanas e metropolitanas

Despesa	1987-1988	1996-1997	2002-2003
Despesas Correntes	100,0%	100,0%	100,0%
Despesas de Consumo	87,0%	85,7%	82,4%
Alimentação	22,8%	20,9%	19,1%
Alimentação Dentro	16,7%	15,3%	13,4%
Alimentação Fora	6,1%	5,6%	5,7%
Habitação	18,3%	24,2%	21,7%
Vestuário	11,3%	5,8%	5,2%
Transporte	13,0%	11,4%	13,4%
Higiene	1,7%	1,7%	2,1%
Saúde	6,3%	8,0%	7,1%
Educação	3,2%	4,3%	5,6%
Cultura	3,8%	3,1%	3,1%
Fumo	1,3%	1,2%	0,7%
Serviços Pessoais	1,4%	1,4%	1,2%
Despesas Diversas	4,0%	3,8%	3,2%
Outras Despesas Correntes	13,0%	14,3%	17,6%

Fonte: Estimativas obtidas a partir das POFs 1987-1988, 1996-1997 e 2002-2003.

Nota: 1) Regiões metropolitanas de Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba e Porto Alegre, além do município de Goiânia e do Distrito Federal. 2) Grupos de despesas foram compatibilizados de forma a torná-los comparáveis ao longo das edições da POF.

Diversos fatores podem ter contribuído para esta alteração no padrão de consumo alimentar dos brasileiros. Do lado demográfico, o crescimento da taxa de participação feminina no mercado de trabalho (Corseuil *et al.*, 2011) pode ter tornado o tempo disponível para a preparação de alimentos relativamente mais caro. Por outro lado, o aumento da renda domiciliar *per capita* (Paes de Barros *et al.*, 2011) possibilitou aos domicílios adquirir um montante maior de alimentos fora.

Na teoria da família de Becker (1965, 1991), não apenas a renda, mas também o tempo é um fator importante na determinação da demanda do domicílio. Por exemplo, os alimentos consumidos pelo domicílio são uma combinação de matéria prima (o alimento bruto) com o tempo necessário para a sua preparação. Assim, os domicílios que consomem alimentos fora (em restaurantes, lanchonetes, etc) estão adquirindo não apenas o alimento em si, mas também o tempo dispendido na sua preparação. Se o custo de oportunidade do tempo dispendido na preparação do alimento aumenta – o salário-hora do morador –, o domicílio

pode substituir o consumo de alimentos dentro do domicílio pelo consumo de alimentos fora. Assim, a relação entre o valor do tempo e a alimentação fora do domicílio possui grande relevância. Desta forma, é importante saber que fatores influenciam os gastos das famílias fora do domicílio.

Apesar da relevância deste tema, poucos estudos no Brasil tentaram analisar os efeitos de variáveis demográficas e de características socioeconômicas sobre o gasto com alimentação fora do domicílio (cf. Claro; Levy; Bandoni, 2009). Uma das dificuldades de se tentar estimar tais efeitos é que um elevado número de domicílios não reporta despesas com alimentação fora. Conforme foi visto no capítulo anterior, isso pode ocorrer por três motivos principais: a infrequência de aquisição, a decisão dos domicílios de não-participação ou o não consumo decorrente de uma solução de canto do problema do consumidor. No que se refere à alimentação fora do domicílio, qualquer um dos três fatores pode estar presente. Por exemplo, a insuficiência de oferta de serviços de alimentação em determinadas localidades pode impedir a participação de um domicílio do mercado consumidor, mesmo que ele deseje adquirir estes alimentos ao preço e à renda corrente. Como não é possível saber *a priori* qual modelo é o mais apropriado para explicar o processo gerador dos dados de despesas, a escolha entre qual modelo melhor se adapta aos dados torna-se, portanto, uma questão empírica.

Assim, este capítulo tem por objetivo analisar o efeito de variáveis demográficas e de características socioeconômicas sobre a alimentação fora do domicílio. Além deste objetivo geral, pretende-se também identificar o modelo econométrico mais adequado para estimar a demanda por alimentação fora do domicílio. A base de dados utilizada nesse trabalho provém da Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) de 2002-2003 realizada pelo IBGE em todo o país.

### 3.2 TEORIA DA PRODUÇÃO DOMICILIAR

Becker (1965, 1991) desenvolveu uma teoria da produção domiciliar que tem sido utilizada para explicar os fatores que influenciam a demanda por alimentos fora do domicílio (Bai *et al.*, 2010; Byrne; Capps; Saha, 1996; Islam *et al.*, 2010; McCracken; Brandt, 1987;

Mihalopoulos; Demoussis, 2001; Mutlu; Gracia, 2006; Yen; Kasteridis; Riley, 2012; Yen, 1993). Segundo esse modelo, os bens e serviços de mercado  $q_k$  são utilizados como insumos de produção junto com o fator tempo para produzir bens domésticos  $q_k^D$ , e é a partir do consumo destes bens domésticos que o domicílio obtém o seu bem-estar. Em outras palavras, o domicílio é visto tanto como uma unidade produtora quanto consumidora. A função de utilidade do domicílio é definida como

$$u = u(q_1^D, \dots, q_K^D) \quad (3.1)$$

O tempo disponível é sujeito à seguinte restrição

$$T_g = \sum_{k=1}^K t_{kg} + l_g \quad g = 1, \dots, G \quad (3.2)$$

onde  $T_g$  é o tempo total disponível do membro  $g$  do domicílio,  $t_{kg}$  é o tempo gasto pelo morador  $g$  na produção do bem  $k$ , e  $l_g$  é o tempo deste membro destinado ao mercado de trabalho.

A restrição orçamentária é definida como

$$\sum_{k=1}^K p_k q_k = \sum_{g=1}^G l_g \omega_g + v \quad (3.3)$$

onde  $\omega_g$  é taxa salarial do morador  $g$ ,  $p_k$  e  $q_k$  são o preço e a quantidade do bem  $k$  utilizado na produção de  $q_k^D$ , e  $v$  é a renda domiciliar obtida através de transferências.

As funções de produção dos bens domésticos são dadas por

$$q_k^D = f_k(q_k, t_{k1}, \dots, t_{kG}) \quad k = 1, \dots, K \quad (3.4)$$

Maximizando a função de utilidade familiar (3.1) em relação a  $q_k$  e  $t_{kg}$ , sujeita às restrições acima, obtém-se a função de demanda do bem  $k$  (Becker, 1991):

$$q_k = g_k(\mathbf{p}, \omega_1, \dots, \omega_G, v), \quad \text{onde } \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K) \quad (3.5)$$

Uma das previsões do modelo acima é que, à medida que o custo de oportunidade do tempo de produção dos bens domésticos aumenta, as famílias tendem a adquirir produtos que requerem menos tempo para serem produzidos. Este é o caso da alimentação fora de casa.

Assim, espera-se que além dos fatores que determinam as preferências domiciliares sobre o consumo de bens (características da pessoa de referência, composição demográfica, localização geográfica, etc), a demanda por alimentos fora do domicílio seja influenciada também pelos custos de produção e de oportunidade da preparação de alimentos (proficiência dos moradores na produção de alimentos, tecnologias de produção incorporadas em determinados bens duráveis, oferta de trabalho e salário-hora dos membros adultos, etc), além de fatores exógenos que afetam a restrição orçamentária (renda de aluguel obtida pela posse de domicílio próprio, acesso a crédito, etc).

O modelo de Becker apresentado aqui não será estimado neste capítulo, pelos seguintes motivos:

- a) Limitação da fonte de informação: a Pesquisa de Orçamentos Familiares não mensura adequadamente a oferta de trabalho dos indivíduos<sup>10</sup>, apenas os seus rendimentos; assim, não é possível calcular os salários-hora  $\omega_g$  necessários para estimar a equação (3.5);
- b) O modelo de Becker não se encaixa perfeitamente nos arcabouços teóricos que serão estimados, onde assumem-se diferentes determinantes para decisão de participação do mercado consumidor (ou, no caso do modelo de infrequência, para a decisão de aquisição do produto) e para a quantidade consumida do produto.

Apesar disso, a teoria da produção familiar de Becker fornece uma base para identificar os fatores que afetam o consumo de alimentos fora do domicílio, e esses fatores serão incorporados neste capítulo através da escolha das variáveis utilizadas nos modelos empíricos.

---

<sup>10</sup> Por exemplo, não é possível saber o número de horas trabalhadas ou contratadas de uma ocupação.

### 3.3 GASTOS NULOS NA PESQUISA DE ORÇAMENTOS FAMILIARES

Conforme discutido no capítulo anterior, uma característica comum das pesquisas de orçamentos familiares é a concentração da despesa dos domicílios em apenas poucos produtos, ou, de outra forma, a existência de um elevado percentual de domicílios que não apresentam despesas com diversos produtos. Dentre os principais motivos para a existência de gastos nulos nas pesquisas de orçamentos familiares estão a infrequência de aquisição, o sub-registro de informações, a abstenção decorrente dos hábitos e preferências do consumidor e a solução de canto do problema do consumidor.

Nas pesquisas de orçamentos familiares, as informações de despesas são coletadas utilizando um determinado período de apuração. Para produtos de aquisição mais frequente, este período de apuração é menor (uma semana, em geral), enquanto para produtos cuja aquisição ocorre poucas vezes no ano, o período de apuração é maior (12 meses, no máximo). Tais períodos de apuração são escolhidos procurando-se balancear, por um lado, a frequência com que determinado produto é adquirido e, por outro lado, a existência de registros e memória destas despesas. Quanto mais frequente a aquisição de um produto, maior tende a ser a perda de memória e registro da aquisição deste produto no tempo. Por outro lado, quanto mais raro a aquisição de determinado produto, maior tende ser a preservação dos registros e memória desta aquisição.

Ocorre que nem sempre os valores das *despesas* capturados desta forma correspondem ao *consumo* da família durante o ano. Segundo Diniz *et al.* (2007, p. 30), como uma grande proporção das informações de despesas possui um período curto de apuração – 7 e 30 dias – ou apresenta um caráter marcadamente sazonal, não existe uma relação direta entre a despesa realizada e o consumo efetivo do domicílio. Em particular, pode haver domicílios que consumiram um produto durante o ano, mas que não o adquiriram no período de captação da pesquisa, seja devido à existência de um estoque doméstico ou simplesmente porque a aquisição do produto ocorreu em algum momento antes ou depois do período de captação. Nestes casos, a utilização de modelos econométricos inadequados pode levar o pesquisador a

considerar erroneamente estas ausências de despesas como um não-consumo por parte do domicílio.

A seriedade do problema irá depender do bem e do tipo de consumidor envolvido. Domicílios que possuem automóveis ou geladeira poderão realizar grandes e infrequentes aquisições de comida. Por outro lado, na presença de restrições de crédito, um baixo nível de renda dificultaria a formação de estoques, obrigando as famílias mais pobres a realizar pequenas e frequentes aquisições de comida.

A Tabela 3.2 mostra o valor gasto com cada um dos grandes grupos de despesa da POF 2002-2003 e o percentual de famílias que não reportaram nenhum gasto com os grupos em questão.

Tabela 3.2 - Despesas médias e gastos nulos na POF 2002-2003

Despesa	Despesa média (em R\$)		Percentual de gastos nulos
	Todas as famílias	Famílias com gastos positivos	
Despesa Total	1.778,01	1.778,01	0,0%
Despesas Correntes	1.658,25	1.658,25	0,0%
Despesas de Consumo	1.465,30	1.465,30	0,0%
Alimentação	304,12	313,32	2,9%
Alimentação dentro	230,98	245,34	5,9%
Alimentação fora	73,14	109,19	33,0%
Habitação	520,22	520,84	0,1%
Vestuário	83,21	92,09	9,6%
Transporte	270,16	337,93	20,1%
Higiene	31,80	44,33	28,3%
Saúde	95,14	116,20	18,1%
Educação	59,86	98,68	39,3%
Cultura	34,95	58,79	40,5%
Fumo	10,20	33,17	69,2%
Serviços pessoais	14,85	18,49	19,7%
Despesas diversas	40,81	65,14	37,4%
Outras despesas correntes	192,95	243,14	20,6%
Aumento de ativo	84,59	282,54	70,1%
Diminuição de passivo	35,17	223,28	84,2%

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Duas observações são dignas de nota.

Em primeiro lugar, apesar de as despesas estarem agrupadas em grandes agregados, ainda assim existe um elevado percentual de gastos nulos em quase todos os grupos de

despesas. Os gastos nulos são observados inclusive em grupos essenciais como Alimentação e Vestuário. O percentual mais baixo de gastos nulos no grupo Habitação decorre da imputação do valor do aluguel nos domicílios próprios ou cedidos feita pelo IBGE, conforme metodologia própria adotada por este instituto (cf. Apêndice A).

Em segundo lugar, o percentual de gastos nulos varia substancialmente entre os grupos de despesas. Enquanto menos de 10% das famílias não reportaram gastos com vestuário no período de coleta da pesquisa, no caso do fumo este percentual foi de quase 70%. Como tais despesas referem-se a grupos muito distintos de consumidores, é razoável supor que os motivos que levaram a estas ausências de despesas são diferentes. Mesmo que uma família não tenha realizado gastos com vestuário, é improvável que o consumo de itens de vestuário tenha sido zero. Neste caso, os valores nulos observados podem ser atribuídos ou a uma solução de canto do problema do consumidor ou a uma infrequência de aquisição. No caso do fumo, por outro lado, atribuir a principal causa dos valores nulos à infrequência de aquisição pode ser incorreto, dado que existe um percentual elevado de indivíduos que se abstêm do consumo de cigarros, charutos, etc. por motivos diversos.

Assim, é possível que as razões para a existência de gastos nulos sejam diferentes entre os produtos. Se esse for o caso, então, em uma análise de demanda, cada produto precisaria de um modelo econométrico específico para ser estimado. E como para a maior parte dos produtos a escolha do modelo mais correto não é evidente de antemão, seria necessário também utilizar testes estatísticos que indiquem o modelo econométrico mais “verossímil” para uma dada amostra.

A Tabela 3.3 mostra o gasto com alimentação fora do domicílio desagregado de acordo com os seus componentes. Percebe-se que embora 33% das famílias não tenha realizado despesas com alimentação fora, o percentual dentro de cada subgrupo é significativamente maior, variando de um mínimo de 66,4% para refrigerantes e outras bebidas não-alcoólicas para um máximo de 91,3% para café, leite e chocolate.

Tabela 3.3 - Despesas com alimentação fora do domicílio

Despesa	Despesa média (em R\$)		Percentual de gastos nulos
	Todas as famílias	Famílias com gastos positivos	
Alimentação fora	73,14	109,19	33,0%
Almoço e jantar	30,55	123,78	75,3%
Café, leite e chocolate	1,29	14,84	91,3%
Sanduíches e salgados	7,42	25,47	70,9%
Refrigerantes e outras bebidas não-alcoólicas	7,03	20,90	66,4%
Lanches	11,58	39,06	70,4%
Cervejas, chopes e outras bebidas alcoólicas	10,15	62,01	83,6%
Outras	5,12	18,91	72,9%

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Além disso, pela composição das despesas com alimentação, pode-se especular que os valores nulos de despesas decorrem de diversos motivos. Podemos ter indivíduos não efetuando despesas com bebidas alcoólicas tanto por causa de uma abstenção quanto de uma solução de canto ou uma infrequência de aquisição. Na maior parte dos demais subgrupos de despesa com alimentação fora, no entanto, não há muitos motivos para supor que a abstenção seja um motivo relevante. Entretanto, outras barreiras à participação podem estar atuando, como insuficiência de oferta, custos de transporte para o local de alimentação, etc.

### 3.4 MODELOS ECONOMÉTRICOS

Para se estimar os fatores que influenciam a demanda por alimentação fora do domicílio, portanto, é preciso utilizar modelos que incorporem as diferentes naturezas dos valores nulos observados em pesquisas domiciliares. Tais modelos foram estudados em profundidade no Capítulo 2. Nesta seção apenas serão listados os modelos utilizados.

Os modelos utilizados e suas respectivas funções de verossimilhança foram:

a) Modelo Tobit

$$L(\beta, \sigma) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \beta}{\sigma} \right) \right] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \left[ \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{y_i - \mathbf{x}'_i \beta}{\sigma} \right) \right] \quad (3.6)$$

b) Modelo de Duas Partes

$$L(\alpha, \beta, \sigma) = \prod_{\{i: y_i=0\}} [1 - \Phi(z'_i \alpha)] \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(z'_i \alpha) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - x'_i \beta}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{x'_i \beta}{\sigma}\right) \right]^{-1} \quad (3.7)$$

c) Modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados

$$L(\alpha, \beta, \sigma, \rho) = \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Psi\left(z'_i \alpha, \frac{x'_i \beta}{\sigma}, \rho\right) \right\} \times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi\left(\frac{z'_i \alpha + \frac{\rho}{\sigma}(y_i - x'_i \beta)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - x'_i \beta}{\sigma}\right) \quad (3.8)$$

d) Modelo de Barreira Dupla com erros independentes

$$L(\alpha, \beta, \sigma) = \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Phi(z'_i \alpha) \Phi\left(\frac{x'_i \beta}{\sigma}\right) \right\} \times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(z'_i \alpha) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y_i - x'_i \beta}{\sigma}\right) \quad (3.9)$$

e) Modelo de Infrequência de Aquisição com erros independentes

$$L(\alpha, \beta, \sigma) = \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Phi(z'_i \alpha) \Phi\left(\frac{x'_i \beta}{\sigma}\right) \right\} \times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(z'_i \alpha)^2 \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\Phi(z'_i \alpha) y_i - x'_i \beta}{\sigma}\right) \quad (3.10)$$

onde  $\phi(\cdot)$  representa a função de densidade de probabilidade da distribuição normal padrão,  $\Phi(\cdot)$  e  $\Psi(\cdot)$  representam respectivamente as funções de distribuição acumuladas normal padrão e normal padrão bivariada,  $\{i: y_i = 0\}$  indica que o produtório é calculado sobre o conjunto de observações que apresenta valores nulos na variável dependente e  $\{i: y_i > 0\}$  indica que o produtório é calculado sobre o conjunto de observações com variável dependente positiva. O vetor  $x_i$  contém as características do domicílio  $i$  que influenciam o consumo potencial de alimentos fora do domicílio, e  $z_i$  contém as características do domicílio que influenciam a probabilidade de participação no mercado consumidor (nos modelos de Duas Partes ou de Barreira Dupla) ou a probabilidade de aquisição do produto no período de captação da pesquisa (no modelo de Infrequência de Aquisição).

Em função da assimetria dos dados de despesas em pesquisas de orçamentos familiares, optou-se também pelo uso da transformação IHS na variável dependente como forma de corrigir e testar a não-normalidade dos erros

$$T(\lambda, y) = \frac{\ln(\lambda y + \sqrt{1 + (\lambda y)^2})}{\lambda} \quad (3.11)$$

Assim, além dos modelos listados acima, foram estimados também as suas respectivas versões com a aplicação da transformação IHS:

f) Modelo Tobit IHS

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \lambda) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} \quad (3.12)$$

g) Modelo de Duas Partes IHS

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \lambda) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} [1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})] \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} \quad (3.13)$$

h) Modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \rho, \lambda) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left\{ 1 - \Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right) \right\} \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma}(T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} \quad (3.14)$$

i) Modelo de Barreira Dupla IHS com erros independentes

$$L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, \lambda) = \prod_{\{i: y_i = 0\}} \left\{ 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right\} \times \prod_{\{i: y_i > 0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} \quad (3.15)$$

j) Modelo de Infrequência de Aquisição IHS com erros independentes

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \sigma) &= \prod_{\{i: y_i=0\}} \left\{ 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right\} \\
&\times \prod_{\{i: y_i>0\}} \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \\
&\times \prod_{\{i: y_i>0\}} \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 \lambda^2 y_i^2}}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Conforme visto na Seção 2.3.3, os estimadores de máxima verossimilhança podem ser inconsistentes se o pressuposto de homocedasticidade for violado. Para garantir que a presença de heteroscedasticidade não prejudique os modelos, utilizou-se a seguinte especificação para o desvio-padrão dos erros

$$\sigma_i = \exp(\mathbf{h}'_i \boldsymbol{\gamma}) \tag{3.17}$$

onde  $\mathbf{h}_i$  é um vetor que contém um intercepto ( $h_{i1} = 1$  para todo  $i$ ) e um subconjunto das variáveis utilizadas no modelo. Esta especificação garante que o desvio-padrão seja positivo. A hipótese de homocedasticidade pode ser testada utilizando testes de Wald para  $H_0 : \boldsymbol{\gamma}_{k \neq 1} = \mathbf{0}$ .

A diferença básica entre os modelos, conforme discutido no Capítulo 2, é a seguinte. O modelo Tobit assume que os valores nulos encontrados na amostra originam-se exclusivamente de uma solução de canto do problema de maximização do consumidor. Tanto o modelo de Barreira Dupla quanto o modelo de Duas Partes acrescentam ao universo de análise a decisão de participação do domicílio. Se o domicílio não participa do mercado consumidor, o seu consumo será necessariamente nulo. Por outro lado, se o domicílio decide participar do mercado consumidor, o seu consumo será positivo no modelo de Duas Partes (dominância da decisão de participação sobre a decisão de consumo), mas poderá ser nulo no modelo de Barreira Dupla (pois, apesar de decidir participar do mercado, o consumidor poderá ficar restrito por uma solução de canto). Por fim, o modelo de Infrequência de Aquisição não considera a decisão de participação dos domicílios, mas sim se as despesas de aquisição do produto estão sendo capturadas corretamente durante o período de referência da pesquisa de orçamentos familiares. Neste modelo, portanto, os gastos nulos podem ocorrer ou porque a família não adquiriu o produto no período de referência da pesquisa, ou porque a família não deseja consumir o produto à renda e preços correntes (solução de canto).

### 3.4.1 Valores esperados

Nos modelos de Barreira Dupla, de Duas Partes e Tobit, os valores  $E[y_i | \mathbf{x}_i]$  e  $\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]$  representam respectivamente o consumo esperado e a probabilidade do consumo ser positivo; por fim,  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$  representa a esperança condicional do consumo, isto é, o valor esperado do consumo condicional a ele ser positivo. Os valores de  $E[y_i | \mathbf{x}_i]$  e  $\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]$  nos modelos de Barreira Dupla, de Duas Partes e Tobit com a aplicação da transformação IHS são dados por:

a) Modelo Tobit IHS

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (3.18)$$

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (3.19)$$

b) Modelo de Duas Partes IHS

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \left[ \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \right]^{-1} \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda y_i)^2}} dy_i \quad (3.20)$$

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.21)$$

c) Modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} - \frac{\rho}{\sigma}(T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (3.22)$$

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Psi\left(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}, \rho\right) \quad (3.23)$$

d) Modelo de Barreira Dupla com erros independentes

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (3.24)$$

$$\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi\left(\frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \quad (3.25)$$

Nos modelos apresentados acima, a esperança condicional pode ser obtida isolando-se  $E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$  na expressão

$$E[y_i | \mathbf{x}_i] = \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0] \quad (3.26)$$

Para o modelo de Infrequência de Aquisição, por outro lado,  $\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]$  não representa a probabilidade de o consumo ser positivo, mas a probabilidade de a *despesa* ser positiva. Como o interesse teórico desse trabalho recai sobre o consumo, e não sobre a despesa, a esperança relevante que se deseja calcular é

$$E[y_i^* | \mathbf{x}_i] = \text{Prob}[y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i^* | \mathbf{x}_i, y_i^* > 0] \quad (3.27)$$

onde  $y_i^*$  é a variável latente que representa o consumo potencial do domicílio.

Assim, o consumo esperado e a probabilidade de o consumo ser positivo no modelo de Infrequência de Aquisição são dados pelas seguintes expressões:

e) Modelo de Infrequência de Aquisição IHS

$$E[y_i^* | \mathbf{x}_i] = E[y_i | \mathbf{x}_i] = \int_0^{\infty} y_i \frac{1}{\sigma} \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \frac{\Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2}{\sqrt{1 + \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 \lambda^2 y_i^2}} dy_i \quad (3.28)$$

$$\text{Prob}[y_i^* > 0 | \mathbf{x}_i] = \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma} \right) \quad (3.29)$$

Quando  $\lambda = 0$ , a transformação IHS se torna uma transformação linear e os jacobianos da transformação desaparecem das fórmulas das esperanças mostradas acima. Com isso, é possível convertê-las em expressões analíticas que dependem apenas da função de densidade e da função de distribuição acumulada normal univariada ou bivariada, a depender do modelo (cf. Capítulo 2). No caso de  $\lambda \neq 0$ , não há como resumir as fórmulas acima em expressões analíticas, e as integrais que constam nas esperanças devem ser calculadas por métodos numéricos.

### 3.4.2 Efeitos marginais e elasticidades

Para se calcular a elasticidade de uma variável sobre a probabilidade de o consumo ser positivo ou sobre a esperança condicional e incondicional do consumo, é preciso derivar os

seus efeitos marginais. Os efeitos marginais podem ser encontrados derivando-se as expressões da Seção 3.4.1 em relação a uma variável  $x_{ik}$ . Como as integrais que constam nas fórmulas dos valores esperados são calculadas em relação a  $y_i$ , então os efeitos marginais podem ser obtidos primeiramente derivando-se o integrando do valor esperado em relação a  $x_{ik}$  e depois realizando-se o cálculo da integral

$$\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial}{\partial x_{ik}} \int_0^{\infty} y_i h(y_i | \mathbf{x}_i) dy_i = \int_0^{\infty} y_i \frac{\partial h(y_i | \mathbf{x}_i)}{\partial x_{ik}} dy_i \quad (3.30)$$

onde  $h(y_i | \mathbf{x}_i)$  é a função de densidade de probabilidade utilizada para calcular o valor esperado. Como  $E[y_i | y_i > 0, \mathbf{x}_i] = E[y_i | \mathbf{x}_i] / \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]$ , então pela regra da cadeia, o efeito marginal sobre a esperança condicionada será dado por

$$\frac{\partial E[y_i | y_i > 0, \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} = \frac{\frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] - E[y_i | \mathbf{x}_i] \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}}}{\{\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]\}^2} \quad (3.31)$$

e similarmente para o modelo de Infrequência de Aquisição. Por questão de espaço, as fórmulas dos efeitos marginais não serão apresentadas<sup>11</sup>.

Para as variáveis dummies, o cálculo dos efeitos marginais corresponde à variação na esperança quando mudamos o valor da variável de zero para um.

Por fim, as elasticidades de  $y_i$  em relação a uma variável  $k$  podem ser calculadas a partir de  $E[y_i | \mathbf{x}_i] = \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i] E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]$ . Para isto, basta tirar o logaritmo desta expressão, diferenciar em relação a  $x_{ik}$  e multiplicar o resultado por  $x_{ik}$ , com o qual se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i]} &= \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]} \\ &+ \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ou, de forma resumida,

---

<sup>11</sup> Além das expressões das esperanças serem complicadas, temos também o fato de que a inclusão da correção para heteroscedasticidade faz com que o desvio padrão dos erros dependa de algumas das variáveis presentes em  $\mathbf{x}_i$ , e isto deve ser incorporado no cálculo do efeito marginal.

$$e_{ik} = e_{ik}^{\text{Prob}} + e_{ik}^E \quad (3.33)$$

$$\text{onde } e_{ik} = \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i]}$$

$$e_{ik}^{\text{Prob}} = \frac{\partial \text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{\text{Prob}[y_i > 0 | \mathbf{x}_i]}$$

$$e_{ik}^E = \frac{\partial E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}{\partial x_{ik}} \frac{x_{ik}}{E[y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0]}$$

Dessa forma, é possível identificar três tipos de elasticidades:  $e_{ik}^E$  denota a elasticidade usual em economia, isto é, o efeito da variável sobre a quantidade consumida dentre os domicílios consumidores;  $e_{ik}^{\text{Prob}}$  denota o efeito da variável sobre o número de consumidores; e  $e_{ik}$  representa o resultado conjunto destes dois fatores.

### 3.5 METODOLOGIA

#### 3.5.1 Base de dados e variáveis

A base de dados utilizada nesse trabalho provém da Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) de 2002-2003 realizada pelo IBGE em todo o país. Uma descrição da POF, suas características e desenho amostral encontram-se no Apêndice A.

Para a estimação dos modelos, foram aplicados alguns filtros na base de dados de modo a se trabalhar com uma informação mais fidedigna. Foram excluídas as unidades de consumo cujas rendas ou despesas totais não fossem positivas; domicílios da área rural; domicílios com mais de uma unidade de consumo; domicílios que tivessem entre seus moradores pensionistas, empregados domésticos e parentes de empregados domésticos; e domicílios cujo número de moradores fosse maior que oito. Eliminaram-se também as famílias que possuíam informação ignorada em alguma das variáveis independentes. Disso resultou 35.718 domicílios na amostra, de um total de 48.470 (ou 48.568 unidades de consumo). A maior parte dos registros foi eliminada por se situar na área rural (10.648 unidades de consumo). Tanto para o cálculo das estatísticas descritivas quanto para a estimação dos modelos, utilizou-se o fator de expansão da amostra presente na base de dados do IBGE.

A variável dependente utilizada nos modelos foi a fração da despesa total gasta com alimentação fora do domicílio. Como variáveis independentes, utilizaram-se aquelas indicadas na Tabela 3.4 abaixo.

Tabela 3.4 - Definição das variáveis utilizadas nos modelos

Variável	Tipo	Descrição
<i>Variável dependente</i>		
w_alimfora	Contínua	Fração da despesa de consumo gasta com alimentação fora do domicílio
<i>Variáveis independentes</i>		
logxn	Contínua	Logaritmo da despesa de consumo domiciliar <i>per capita</i>
logn	Contínua	Logaritmo do número de membros do domicílio
peessoas_0_4	Contínua	Percentual de pessoas entre 0 e 4 anos
peessoas_5_9	Contínua	Percentual de pessoas entre 5 e 9 anos
peessoas_10_14	Contínua	Percentual de pessoas entre 10 e 14 anos
peessoas_15_64	Contínua	Percentual de pessoas entre 15 e 64 anos (base)
peessoas_65_mais	Contínua	Percentual de pessoas com 65 anos ou mais
cartao	Dummy	Algum membro do domicílio possui cartão de crédito
dom_proprio	Dummy	Domicílio é próprio
sexochefe	Dummy	Pessoa de referência é do sexo feminino
cor_pele	Dummy	Pessoa de referência possui cor branca ou amarela
conjuge	Dummy	Presença de cônjuge na família
ocupado_ref	Dummy	Pessoa de referência teve uma ocupação no ano
ocupado_conj	Dummy	Cônjuge (quando houver) teve uma ocupação no ano
idade_25_menos	Dummy	Pessoa de referência tem menos de 25 anos (base)
idade_25_34	Dummy	Pessoa de referência tem entre 25 e 34 anos
idade_35_44	Dummy	Pessoa de referência tem entre 35 e 44 anos
idade_45_54	Dummy	Pessoa de referência tem entre 45 e 54 anos
idade_55_64	Dummy	Pessoa de referência tem entre 55 e 64 anos
idade_65_mais	Dummy	Pessoa de referência com 65 anos ou mais
educachefe_1	Dummy	Menos de 1 ano de estudo (base)
educachefe_2	Dummy	De 1 a 3 anos de estudo
educachefe_3	Dummy	De 4 a 7 anos de estudo
educachefe_4	Dummy	De 8 a 10 anos de estudo
educachefe_5	Dummy	11 anos de estudo
educachefe_6	Dummy	12 ou mais anos de estudo
metropolitano	Dummy	Domicílio de área metropolitana
norte	Dummy	Domicílio da região Norte
nordeste	Dummy	Domicílio da região Nordeste
sudeste	Dummy	Domicílio da região Sudeste (base)
sul	Dummy	Domicílio da região Sul
centrooeste	Dummy	Domicílio da região Centro-Oeste
trimestre_1	Dummy	Informações captadas no 1o. Trimestre (base)
trimestre_2	Dummy	Informações captadas no 2o. Trimestre
trimestre_3	Dummy	Informações captadas no 3o. Trimestre
trimestre_4	Dummy	Informações captadas no 4o. Trimestre
automovel	Contínua	Número de automóveis
geladeirafreezer	Contínua	Número de geladeiras ou freezer
microondas	Contínua	Número de microondas

Fonte: Elaboração própria.

Portanto, os modelos foram estimados assumindo a equação de Working-Leser para a decisão de consumo<sup>12</sup>:

$$T(w, \lambda) = \alpha + \beta \ln(Y/n) + \eta \ln(n) + \mathbf{r}'\boldsymbol{\theta} + \varepsilon \quad (3.34)$$

onde  $T(w, \lambda)$  representa a aplicação da transformação IHS na fração da despesa com alimentação fora do domicílio<sup>13</sup>,  $Y$  é o dispêndio total,  $n$  é o número de moradores do domicílio,  $\mathbf{r}$  é um vetor que contém as demais características que influenciam a demanda por alimentação fora do domicílio e  $\varepsilon$  é um erro aleatório cuja distribuição depende do modelo escolhido (Seção 3.4). Ou seja, o vetor de variáveis independentes da equação de consumo é dado por

$$\mathbf{x}' = [1 \quad \ln(Y/n) \quad \ln(n) \quad \mathbf{r}'] \quad (3.35)$$

No modelo de Barreira Dupla e de Infrequência de Aquisição, optou-se por um conjunto de variáveis diferentes para as equações de consumo e de participação/aquisição (vetores  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{z}_i$  respectivamente), de modo a garantir a identificação dos parâmetros do modelo. No vetor  $\mathbf{x}_i$  foram incluídas variáveis referentes à condição socioeconômica da família (despesa total *per capita*, número de moradores, posse de cartão de crédito e se o domicílio é próprio), composição demográfica (percentual dos moradores por faixa etária), características das pessoas de referências (sexo, cor, faixa etária, escolaridade, se possui cônjuge no domicílio e se a pessoa de referência ou o cônjuge tiveram uma ocupação nos últimos 12 meses), localização geográfica e trimestre do ano no qual as informações de despesas foram captadas na POF 2002-2003. Além de todas estas variáveis presentes em  $\mathbf{x}_i$ , foram incluídas também no vetor  $\mathbf{z}_i$  variáveis relacionadas à decisão de participação ou de frequência de aquisição da alimentação fora do domicílio (número de automóveis, geladeira

---

<sup>12</sup> Esta forma de se estimar a demanda é conhecida como equação de Working-Leser (devido aos trabalhos de Working (1943) e Leser (1963)) e é muito utilizada na literatura por causa de um conjunto desejável de propriedades que ela apresenta (cf. Deaton; Muellbauer, 1980a).

<sup>13</sup> Nos modelos sem transformação IHS, temos  $\lambda \rightarrow 0$ , ou seja,  $T(w, \lambda) = w$ .

ou freezer e microondas). Para a equação de heteroscedasticidade, optou-se por utilizar um modelo parcimonioso que incorpora apenas as características da pessoa de referência<sup>14</sup>.

Uma consequência de se utilizar a equação de Working-Leser para a variável latente de consumo é que agora a variável dependente dessa equação é a *fração* ( $w = pq/Y$ ) da despesa destinada à alimentação fora do domicílio (ou uma transformação dessa fração). Com isso, as fórmulas das elasticidades apresentadas da Seção 3.4.2 referem-se a esta fração, e não à *quantidade* ( $q$ ) demandada com alimentação fora. Felizmente, como a despesa esperada com alimentação fora é  $E[pq | \mathbf{x}] = E[w | \mathbf{x}]Y$ , que é o produto do dispêndio total do domicílio,  $Y$  (que está incluso no vetor  $\mathbf{x}$  na forma logarítmica, vide (3.35)), pelo valor esperado da fração da despesa com alimentação fora,  $E[w | \mathbf{x}]$ , então, assumindo-se preços fixos ( $p = 1$ ), temos as seguintes relações:

$$\frac{\partial E[q | \mathbf{x}]}{\partial x_k} = \frac{\partial E[w | \mathbf{x}]}{\partial x_k} Y, \quad \text{se } x_k \neq Y \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial E[q | \mathbf{x}]}{\partial Y} = \frac{\partial E[w | \mathbf{x}]}{\partial Y} Y + E[w | \mathbf{x}] = \frac{\partial E[w | \mathbf{x}]}{\partial \ln Y} + E[w | \mathbf{x}] \quad (3.37)$$

E no caso das elasticidades,

$$e_k^q = \frac{\partial E[q | \mathbf{x}]}{\partial x_k} \frac{x_k}{E[q | \mathbf{x}]} = \frac{\partial E[w | \mathbf{x}]}{\partial x_k} \frac{x_k}{E[w | \mathbf{x}]} = e_k^w, \quad \text{se } x_k \neq Y \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} e_Y^q &= \frac{\partial E[q | \mathbf{x}]}{\partial Y} \frac{Y}{E[q | \mathbf{x}]} \\ &= \frac{\partial E[w | \mathbf{x}]}{\partial Y} \frac{Y}{E[w | \mathbf{x}]} + 1 = \left( e_Y^w + 1 \right) \\ &= \frac{\partial E[w | \mathbf{x}]}{\partial \ln Y} \frac{1}{E[w | \mathbf{x}]} + 1 = \left( \frac{e_{\ln Y}^w}{\ln Y} + 1 \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde  $e_Y^q$  e  $e_k^q$  representam as elasticidades da demanda em relação à renda e a uma variável  $x_k \neq Y$  respectivamente, e  $e_{\ln Y}^w$  e  $e_k^w$  as elasticidades da fração em relação ao logaritmo da renda e uma variável  $x_k \neq Y$  respectivamente, calculadas diretamente do valor esperado da

<sup>14</sup> Essa decisão foi tomada pois além das características da pessoa de referência terem se mostrado um bom preditor da heteroscedasticidade dos erros, a inclusão de um conjunto muito amplo de variáveis adiciona multicolinearidade aos modelos.

equação (3.34). Note que esse cálculo é válido apenas para a elasticidade geral; para os demais componentes de (3.33) a correspondência entre as elasticidades exige cálculos adicionais que não serão feitos neste capítulo.

Lewbel (1997, p. 180) aponta que existe uma inconsistência em assumir normalidade dos erros quando a variável dependente – a fração da despesa destinada à alimentação fora – é limitada entre zero e um. Para o autor, no entanto, o efeito desse tipo de inconsistência é mínimo, a menos que a variância dos resíduos seja elevada em relação ao intervalo  $[0,1]$ . Davidson e MacKinnon (1993) utilizam argumentação semelhante; para eles, se a amostra não contém muitas observações próximas de zero ou de 1, a distribuição normal pode ser utilizada como uma aproximação no processo de inferência estatística. Deve-se frisar que nesse capítulo decidiu-se pelo uso da transformação IHS nos modelos estimados justamente para garantir que os erros tenham uma distribuição aproximadamente normal.

A Tabela 3.5 mostra algumas estatísticas da amostra. Do total de domicílios da amostra, 22.511 (63%) apresentaram despesas com alimentação fora do domicílio. Este grupo de domicílios destinou em média 7,2% do gasto total com a alimentação fora. Dentre as características, vale mencionar: *a*) o dispêndio *per capita* daqueles domicílios que se alimentaram fora (apresentaram despesas positivas) é maior que o daqueles domicílios que não se alimentaram fora; *b*) pessoas de referência do sexo feminino, sem cônjuge, sem ocupação, com 65 anos ou mais e com menos de 4 anos de estudo estão mais presentes no grupo de domicílios que não consumiu alimentos fora; *c*) domicílios que não possuíam automóvel e microondas estão mais presentes entre os domicílios que não consumiram alimentos fora.

Tabela 3.5 - Estatísticas da amostra

Variáveis	Domicílios com despesas nulas		Domicílios com despesas positivas		Todos os domicílios	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
<i>Variável dependente</i>						
w_alimfora	0,000	0,000	0,072	2,694	0,049	2,412
<i>Variáveis independentes</i>						
logxn	5,443	26,651	5,939	30,237	5,777	29,961
logn	0,998	17,439	1,178	16,887	1,119	17,320
peessoas_0_4	0,075	4,413	0,067	4,452	0,070	4,439
peessoas_5_9	0,070	4,230	0,073	4,585	0,072	4,458
peessoas_10_14	0,064	4,082	0,082	4,842	0,076	4,584
peessoas_15_64	0,625	9,931	0,719	8,579	0,688	9,219
peessoas_65_mais	0,167	10,189	0,059	6,173	0,094	8,076
cartao	0,201	12,421	0,407	16,795	0,340	15,653
dom_proprio	0,722	13,883	0,710	15,515	0,714	14,933
sexochefe	0,323	14,495	0,263	15,050	0,282	14,876
cor_pele	0,537	15,461	0,568	16,933	0,558	16,411
conjuge	0,628	14,989	0,706	15,583	0,680	15,413
ocupado_ref	0,688	14,363	0,831	12,818	0,784	13,590
ocupado_conj	0,253	13,472	0,399	16,741	0,351	15,775
idade_25_menos	0,058	7,258	0,051	7,535	0,053	7,435
idade_25_34	0,199	12,387	0,225	14,273	0,217	13,612
idade_35_44	0,218	12,801	0,286	15,457	0,264	14,570
idade_45_54	0,158	11,297	0,219	14,138	0,199	13,193
idade_55_64	0,147	10,974	0,123	11,232	0,131	11,143
idade_65_mais	0,220	12,846	0,095	10,045	0,136	11,328
educachefe_1	0,165	11,500	0,085	9,539	0,111	10,381
educachefe_2	0,220	12,835	0,148	12,130	0,171	12,445
educachefe_3	0,331	14,588	0,290	15,519	0,304	15,194
educachefe_4	0,127	10,325	0,160	12,519	0,149	11,766
educachefe_5	0,110	9,713	0,178	13,089	0,156	11,998
educachefe_6	0,048	6,603	0,139	11,825	0,109	10,307
metropolitano	0,305	14,280	0,383	16,619	0,358	15,840
norte	0,058	7,234	0,056	7,843	0,056	7,624
nordeste	0,228	13,014	0,205	13,814	0,213	13,528
sudeste	0,459	15,452	0,513	17,088	0,495	16,523
sul	0,167	11,551	0,156	12,413	0,160	12,102
centrooeste	0,088	8,781	0,070	8,719	0,076	8,746
trimestre_1	0,249	13,408	0,246	14,729	0,247	14,255
trimestre_2	0,253	13,486	0,230	14,383	0,237	14,063
trimestre_3	0,250	13,428	0,277	15,297	0,268	14,639
trimestre_4	0,248	13,381	0,247	14,746	0,247	14,256
automovel	0,248	15,669	0,456	23,094	0,388	20,911
geladeira/freezer	1,016	16,478	1,155	19,715	1,110	18,706
microondas	0,138	10,704	0,240	14,783	0,207	13,513
<i>Número de observações</i>	13207		22511		35718	

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

### 3.5.2 Estimação dos modelos e cálculo de valores

Seja  $L(\boldsymbol{\theta})$  a função de verossimilhança de um determinado modelo, com  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  representando o vetor de parâmetros a ser estimado. Para que isso ocorra, deve-se maximizar a função  $L(\boldsymbol{\theta})$  em relação a  $\boldsymbol{\theta}$ . Assim, os parâmetros estimados  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  são dados por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \max_{\boldsymbol{\theta}} \{ L(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \Theta \} \quad (3.40)$$

Como o problema de maximização não se altera com a aplicação de uma transformação monotônica positiva, na prática é mais fácil (analiticamente e computacionalmente) maximizar o logaritmo de  $L(\boldsymbol{\theta})$ , denominado de função de log-verossimilhança:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.41)$$

Uma propriedade interessante do método de máxima verossimilhança é que os modelos estimados são invariantes com relação a determinadas funções dos parâmetros. Suponha que ao invés de utilizar os parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ , decide-se descrever o modelo em termos de outro conjunto de parâmetros  $\boldsymbol{\psi}$ , sendo que a relação entre  $\boldsymbol{\psi}$  e  $\boldsymbol{\theta}$  é dada por  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$ , onde  $\mathbf{h}(\cdot)$  é uma transformação inversível. Seja  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$  os parâmetros de máxima verossimilhança estimados por estes dois modelos respectivamente. Então  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{h}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\psi}})$  e ambos os modelos representam a mesma densidade de probabilidade (Cramer, 1986, cap. 3).

A primeira derivada da função de log-verossimilhança com respeito ao vetor de parâmetros é conhecida como função gradiente ou função *score*:

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l}{\partial \theta_K} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Para encontrar os parâmetros que maximizam a função de verossimilhança, deve-se calcular as condições de primeira ordem do problema e certificar-se que as condições de segunda ordem estejam sendo satisfeitas. Isso é, deve-se encontrar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  que satisfaça

$$\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

A segunda derivada da função de log-verossimilhança com relação aos parâmetros é conhecida como função Hessiana

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right] \quad \text{onde} \quad \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} = \left[ \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_K} \right] \quad (3.44)$$

Ou, de forma expandida,

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \partial \theta_K} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \partial \theta_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_K \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_K \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_K \partial \theta_K} \end{bmatrix}$$

Esta matriz é quadrada e simétrica. A condição de segunda ordem do problema de maximização é que esta matriz seja definida negativa no ponto  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , isto é,  $\mathbf{v}' \mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{v} < 0$  para qualquer vetor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ .

Os estimadores  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  assim obtidos possuem as propriedades de consistência, normalidade e eficiência assintótica, ou seja,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{a}{\sim} N(\boldsymbol{\theta}, \mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

onde  $\mathcal{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  é a inversa da matriz de informação de Fisher (Wooldridge, 2002, cap. 13).

A matriz de informação de Fisher é definida de duas formas distintas

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}) = E \left[ \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})' \right] = -E \left[ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) \right] \quad (3.45)$$

Na prática, portanto, a matriz de variância-covariância pode ser calculada a partir da inversa da negativa da Hessiana, avaliada no ponto de máxima verossimilhança

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left\{ -\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\}^{-1} \quad (3.46)$$

ou pode ser calculada a partir da inversa do produto cruzado dos gradientes, calculados no ponto de máxima verossimilhança

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta}) = \left\{ \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n s_i(\hat{\theta}) s_i(\hat{\theta})' \right\}^{-1} \quad (3.47)$$

$$\text{onde } s_i(\hat{\theta}) s_i(\hat{\theta})' = \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \\ \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \frac{\partial l_i(\hat{\theta})}{\partial \theta_K} \end{bmatrix}$$

As funções  $l_i(\cdot)$  e  $s_i(\cdot)$  representam a função de verossimilhança e o seu respectivo gradiente calculados para a observação  $i$ , e  $n$  representa o número de observações.

Por fim, pode-se combinar (3.46) e (3.47) e estimar a variância-covariância dos parâmetros através do estimador robusto (Gould; Pitblado; Sribney, 2006):

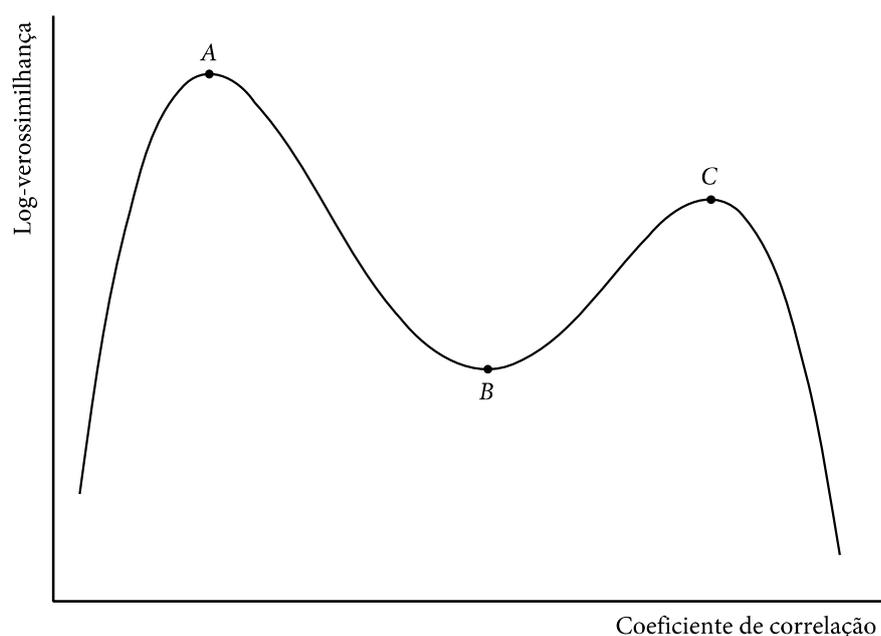
$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta}) = \left\{ -H(\hat{\theta}) \right\}^{-1} \left\{ \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n s_i(\hat{\theta}) s_i(\hat{\theta})' \right\} \left\{ -H(\hat{\theta}) \right\}^{-1} \quad (3.48)$$

Para se estimar os modelos, utilizou-se o módulo matricial do software SAS System®, o SAS/IML. Para tanto, programou-se a função de log-verossimilhança e o respectivo gradiente de cada modelo, e os parâmetros foram encontrados por otimização numérica da função de log-verossimilhança. A matriz hessiana da função de log-verossimilhança foi calculada por derivada numérica dos gradientes analíticos programados no IML, e a matriz de variância-covariância dos parâmetros foi obtida por meio da equação (3.48). Os erros padrões dos parâmetros correspondem à raiz quadrada da diagonal desta matriz.

No caso do modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados, foram enfrentadas algumas dificuldades com o algoritmo de maximização. Estas dificuldades decorreram do fato de que nem sempre a função de verossimilhança (3.14) é globalmente côncava em  $\rho$ , embora

ela possa ser reescrita de maneira a ser globalmente côncava *condicional* a  $\rho$ . De fato, nos testes realizados a partir de diversos dados para a montagem do algoritmo de maximização do modelo, foram obtidas situações como aquelas mostradas na Figura 3.1, onde os pontos A e C foram identificados como máximos locais, com o valor de log-verossimilhança de A apenas ligeiramente maior que o valor obtido no ponto C.<sup>15</sup> Achados como estes nos levam a corroborar a crítica de Smith (2003) ao uso da dependência dos erros no modelo de Barreira Dupla (cf. Capítulo 2, Seção 2.4.3). Segundo este autor, situações como a ilustrada na Figura 3.1 mostram que o parâmetro  $\rho$ , mesmo quando identificado, é apenas fracamente identificado, e a introdução de dependência nos modelos de Barreira Dupla é uma generalização estatística espúria do modelo com erros independentes.

Figura 3.1 - Exemplo de problema de maximização com máximos e mínimos locais



Fonte: Elaboração própria.

A solução que se adotou para se estimar este modelo é a mesma que se costuma utilizar para estimar o modelo de seleção amostral de Heckman por máxima verossimilhança. Ela consiste em selecionar um *grid* de valores para  $\rho$  no intervalo  $(-1,1)$  e, fixado  $\rho$  nos valores

<sup>15</sup> Para nosso conhecimento, Bettin *et al.* (2009) é o único trabalho que cita um problema semelhante.

selecionados, maximizar a função de verossimilhança nos parâmetros remanescentes. Desta forma, é possível identificar o ponto de máximo da função de verossimilhança para todos os parâmetros.

De modo a se fazer inferências estatísticas sobre as elasticidades e sobre os efeitos marginais, calculou-se também o erro padrão dos efeitos marginais e das elasticidades estimadas pelo método Delta (Greene, 2003), que consiste no seguinte. Seja  $e_k = h_k(\boldsymbol{\theta})$  o valor da elasticidade de uma quantidade de interesse (probabilidade de participação do mercado, esperança condicional, etc) em relação a uma determinada variável  $k$ , com  $h_k(\cdot)$  diferenciável. Então a elasticidade estimada é dada por  $\hat{e}_k = h_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  e a variância de  $\hat{e}_k$  pode ser aproximada por uma expansão de Taylor de primeira ordem:

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{e}_k) = \left[ \frac{\partial h_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \left[ \frac{\partial h_k(\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T \quad (3.49)$$

A maior dificuldade com este cálculo é a diferenciação da já complicada função da elasticidade  $h_k(\cdot)$  em relação a  $\boldsymbol{\theta}$ . Para realizar este cálculo, optou-se por utilizar uma diferenciação numérica da equação da elasticidade. Os procedimentos adotados para a estimação da variância dos efeitos marginais das variáveis foram exatamente os mesmos.

As elasticidades e os efeitos marginais das variáveis contínuas foram calculados para cada variável independente, mantendo-se as demais variáveis fixas. As variáveis contínuas foram fixas nos valores médios da amostra de todas as famílias, enquanto as variáveis dummies foram fixas nos seus valores bases, isto é, zero. Para as variáveis dummies não foram calculadas elasticidades, uma vez que as elasticidades aplicam-se apenas a variáveis contínuas. Neste caso, calculou-se apenas a diferença resultante da mudança de seu valor de zero para um.

### 3.5.3 Testes de hipótese

#### 3.5.3.1 Teste de razão de verossimilhança

Seja  $\theta$  um vetor de parâmetros a ser estimado por máxima verossimilhança e suponha que se deseja testar a hipótese nula de que existem  $q$  restrições do tipo  $r(\theta) = \mathbf{0}$  no vetor de parâmetros. A ideia por trás do teste de razão de verossimilhança é que se as restrições são verdadeiras, então impor estas restrições ao vetor de parâmetros não deve levar a uma grande redução no valor da função de verossimilhança. Como o valor de verossimilhança do modelo restrito  $r$  não pode ser maior que a do modelo irrestrito  $u$ , isto é,  $L(\hat{\theta}_r) \leq L(\hat{\theta}_u)$ , os dois valores são iguais apenas se  $\hat{\theta}_u = \hat{\theta}_r$ . Assim, um teste da hipótese  $H_0 : r(\theta) = \mathbf{0}$  é equivalente ao teste de que  $L(\hat{\theta}_u)/L(\hat{\theta}_r)$  é igual a um. Caso seja encontrado um valor significativamente menor que um, então as restrições impostas não são neutras, e deve-se concluir que a hipótese nula é falsa. Esta é a essência do teste de razão de verossimilhança (LR – *Likelihood Ratio*).

O teste de razão de verossimilhança é obtido a partir da estatística de teste

$$LR = -2 \left[ l(\hat{\theta}_r) - l(\hat{\theta}_u) \right] \sim \chi^2_{(q)} \quad (3.50)$$

onde  $l(\hat{\theta}_u)$  é o valor de log-verossimilhança do modelo completo,  $l(\hat{\theta}_r)$  é o valor de log-verossimilhança do modelo restrito e  $q$  é o número de restrições a serem testadas na hipótese nula. A estatística LR – também chamada de *razão de verossimilhança* – possui distribuição  $\chi^2$  com graus de liberdade igual ao número de hipóteses a serem testadas  $q$ . A hipótese nula é rejeitada se o valor de LR for maior que o valor crítico  $\chi^2_{(\alpha, q)}$ , obtido a partir do nível de significância  $\alpha$ . Uma das vantagens deste teste é que a razão de verossimilhança é facilmente calculável quando os parâmetros dos modelos restritos e irrestritos estão disponíveis.

Conforme coloca Woodridge (2002, p. 397), no entanto, o teste de razão de verossimilhança não possui distribuição qui-quadrado quando são realizados testes na fronteira do domínio dos parâmetros. Em outras palavras, suponha que determinado parâmetro tenha domínio  $\theta_k > 0$ . Isto significa que não se pode utilizar o teste LR para a

hipótese  $H_0: \theta_k = 0$ , pois a estatística derivada deste teste provavelmente não teria distribuição  $\chi^2$ .

Além disso, como a razão de verossimilhança testa restrições do tipo  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ , isso significa que ela pode ser aplicada apenas a modelos aninhados (do inglês *nested*). Para modelos não aninhados, isto é, modelos que não se convertem em outro modelo apenas com a imposição de restrições ao vetor de parâmetros, são necessários outros tipos de testes, como o teste de Vuong e o teste de Clarke discutidos adiante.

### 3.5.3.2 Teste de Wald

Assim como o teste de razão de verossimilhança, o teste de Wald serve para testar  $q$  restrições do tipo  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ . Entretanto, ao contrário do primeiro, o teste de Wald depende apenas das estimativas obtidas do modelo irrestrito.

O teste de Wald baseia-se em dois resultados, a saber: a) Seja  $\boldsymbol{\theta}$  um vetor aleatório de dimensão  $K$  com distribuição  $\boldsymbol{\theta} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ; então  $(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_K^2$ . b) Seja  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})$  uma função (possivelmente não-linear) de  $\boldsymbol{\theta}$ ; então, pelo método Delta (Greene, 2003, p. 487)

$$\text{Var}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})) \simeq \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \text{Var}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})' \tag{3.51}$$

onde  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$  é o jacobiano de  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})$ , isto é, a matriz  $q \times K$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial r_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial r_q(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_K} \end{bmatrix}$$

Juntando estes dois resultados se obtém a estatística do teste, dada por:

$$W = \mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}})' \left[ \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}})' \right]^{-1} \mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \sim \chi_{(q)}^2 \tag{3.52}$$

Esta estatística, tal qual a estatística LR, possui distribuição  $\chi^2$  com graus de liberdade igual ao número de hipóteses a serem testadas  $q$  e pode ser utilizada apenas em modelos aninhados.

### 3.5.3.3 Teste de Vuong

Conforme foi visto na Seção 3.5.3.1, o teste de razão de verossimilhança e o teste de Wald pode ser aplicado somente a modelos aninhados. Para modelos não aninhados, deve-se adotar outro caminho. Vuong (1989), utilizando o valor da função de log-verossimilhança de cada observação, elaborou uma forma de testar modelos deste tipo.

Considere dois modelos não aninhados, chamados de modelos 1 e 2. Sejam  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os vetores de parâmetros dos modelos e  $f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \theta_1)$  e  $f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \theta_2)$  as suas respectivas funções de densidade de probabilidade condicional para a observação  $i$ . Denote por  $f_0(y_i | \mathbf{x}_i)$  a verdadeira densidade de probabilidade condicional a partir da qual os dados da amostra foram gerados. A partir destas definições, as funções de log-verossimilhança dos modelos 1 e 2 são:

$$l_1(\theta_1) = \sum_{i=1}^n \ln f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \theta_1) \quad \text{e} \quad l_2(\theta_2) = \sum_{i=1}^n \ln f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \theta_2)$$

onde  $n$  é o tamanho amostral.

Maximizando as funções de log-verossimilhança acima se obtém os estimadores  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ , que são consistentes para os parâmetros populacionais  $\theta_1^*$  e  $\theta_2^*$ .

Utilizando o critério de informação de Kullback-Leibler (Kullback; Leibler, 1951) como ponto de partida, Vuong (1989) especifica a hipótese nula de que ambos os modelos são igualmente distantes do verdadeiro modelo gerador dos dados:

$$H_0 : E_0 \left[ \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \theta_1^*)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \theta_2^*)} \right] = 0 \quad (3.53)$$

onde  $E_0$  denota a esperança calculada a partir da verdadeira função de densidade de probabilidade condicional  $f_0(y_i | \mathbf{x}_i)$ .

Esta hipótese é testada contra a hipótese alternativa (3.54), segundo a qual o modelo 1 é mais apropriado que o modelo 2

$$H_{A1} : E_0 \left[ \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right] > 0 \quad (3.54)$$

ou contra a hipótese alternativa (3.55) segundo a qual o modelo 2 está mais próximo da especificação verdadeira do que o modelo 1.

$$H_{A2} : E_0 \left[ \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right] < 0 \quad (3.55)$$

Para calcular a esperança presente nas hipóteses acima, Vuong demonstra que, sob condições gerais,

$$\frac{1}{n} LR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)} \xrightarrow{a.s.} E_0 \left[ \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right]$$

onde  $LR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2) = l_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - l_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}_2)$  representa a diferença das log-verossimilhanças dos dois modelos. Em outras palavras, o valor esperado pode ser estimado consistentemente pela média das diferenças das funções de log-verossimilhanças individuais.

A partir deste resultado, Vuong deriva a estatística de teste, que possui distribuição assintótica normal. Isto é, sob a hipótese nula,

$$\hat{V} = \frac{LR(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)}{\hat{\omega} \sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad (3.56)$$

onde

$$\hat{\omega}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)} \right]^2 - \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)} \right]^2 \quad (3.57)$$

Em termos matriciais, portanto, a estatística do teste é dada por

$$\hat{V} = \frac{\mathbf{i}' \mathbf{d}}{\left[ \mathbf{d}' \mathbf{d} - \frac{1}{n} (\mathbf{i}' \mathbf{d})^2 \right]^{1/2}} \quad (3.58)$$

onde  $\mathbf{d} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$  é a diferença dos vetores contendo os valores de log-verossimilhança dos modelos 1 e 2 e  $\mathbf{i}$  é um vetor de uns.

A ideia é que, ao comparar dois modelos, deve-se favorecer aquele que, em média, exibe funções de log-verossimilhança individuais significativamente maiores que as do outro

modelo. Se  $\hat{V}$  for positivo ( $\hat{V} > z_{\alpha/2}$ , onde  $z$  é o valor crítico da distribuição normal padrão e  $\alpha$  é o nível de significância), então o modelo 1 é preferível ao modelo 2. Se  $\hat{V}$  for negativo ( $\hat{V} < -z_{\alpha/2}$ ), então o modelo 2 é preferível ao modelo 1. Por fim, se  $|\hat{V}| \leq z_{\alpha/2}$ , então os dois modelos são estatisticamente equidistantes do verdadeiro modelo populacional.

Cabe notar que as funções de log-verossimilhanças utilizadas no teste de Vuong são afetadas se o número de coeficientes dos dois modelos for diferente. Para tanto, Vuong (1989) sugere utilizar uma correção que corresponde ao critério de informação bayesiano de Schwarz (1978):

$$\widetilde{LR}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = LR(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) - \left[ \frac{K_1 - K_2}{2} \right] \ln n \quad (3.59)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  representam o número de coeficientes dos modelos 1 e 2 respectivamente. Esta correção é utilizada nos testes realizados na parte empírica.

### 3.5.3.4 Teste de Clarke

Clarke (2007) propôs um teste alternativo para comparar modelos não aninhados. O objetivo foi criar um teste mais robusto a pressupostos distributivos e com maior poder estatístico, principalmente em pequenas amostras. O teste de Clarke guarda alguma semelhança com o teste de Vuong, exceto que, ao invés de comparar a média das diferenças das funções de log-verossimilhança de dois modelos, busca comparar a *mediana* desta diferença.

A ideia é que se os modelos são igualmente equidistantes da verdadeira especificação, aproximadamente metade das diferenças entre as log-verossimilhanças individuais seriam maior do que zero e aproximadamente metade seriam menor do que zero. Caso um modelo seja mais provável que o outro, então esta hipótese seria falsa e veríamos a diferença das funções de log-verossimilhança acusando preferência por um modelo ou por outro, com mais ou menos da metade das diferenças entre as log-verossimilhanças individuais sendo maior que zero.

A hipótese nula do teste de Clarke é

$$H_0 : \text{mediana} \left[ \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_2^*)} \right] = 0 \quad (3.60)$$

Ou, equivalentemente

$$H_0 : \text{Prob} \left[ \ln \frac{f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_1^*)}{f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}_2^*)} > 0 \right] = \frac{1}{2} \quad (3.61)$$

A estatística de teste é dada por

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^n 1(\Delta l_i > 0) \quad (3.62)$$

onde  $\Delta l_i = f_1(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) - f_2(y_i | \mathbf{x}_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)$  representa a diferença das log-verossimilhanças individuais e  $1(A)$  é uma função indicadora que assume valor 1 se a condição  $A$  for verdadeira e valor zero se a condição  $A$  for falsa.

Em outras palavras, a estatística de teste é simplesmente o número de casos em que as diferenças entre as funções de log-verossimilhanças individuais foram positivas. Esta estatística possui distribuição binomial, com parâmetros dados pelo tamanho amostral e pela probabilidade de evento igual a  $\frac{1}{2}$ , isto é,  $\hat{C} \sim \mathcal{B}(n, p = \frac{1}{2})$ .

Se o modelo 1 for “melhor” que o modelo 2, então  $\hat{C}$  será significativamente maior que o seu valor esperado sob a hipótese nula ( $N/2$ ). Isto ocorrerá quando  $\hat{C} \geq b_\alpha^U$ , onde  $b_\alpha^U$  é o menor número inteiro que satisfaz

$$\text{Prob}[\hat{C} \geq b_\alpha^U] \leq \alpha \Rightarrow 1 - \sum_{i=0}^{b_\alpha^U} \binom{n}{i} (0.5)^n \leq \alpha \quad (3.63)$$

Caso o modelo 2 for melhor que o modelo 1, então teremos  $\hat{C} \leq b_\alpha^L$ , onde  $b_\alpha^L$  é o menor número inteiro que satisfaz

$$\text{Prob}[\hat{C} \leq b_\alpha^L] \leq \alpha \Rightarrow \sum_{i=0}^{b_\alpha^L} \binom{n}{i} (0.5)^n \leq \alpha \quad (3.64)$$

Esse teste, tal qual o teste de Vuong, é sensível à dimensão dos modelos que estão sendo comparados. No entanto, como a estatística é calculada a partir da diferença das funções de log-verossimilhanças individuais, não é possível aplicar a correção de Schwarz conforme foi feito no teste de Vuong. Para resolver este problema, Clarke (2007) propõe aplicar a correção *média* de Schwarz nas diferenças individuais da log-verossimilhança. Isto é, corrige-se as log-verossimilhanças individuais do modelo 1 por um fator de

$$\left( \frac{K_1}{2n} \right) \ln n \quad (3.65)$$

e as funções de log-verossimilhança individuais do modelo 2 por um fator de

$$\left( \frac{K_2}{2n} \right) \ln n \quad (3.66)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  representam o número de coeficientes dos modelos 1 e 2 respectivamente. Esta correção é utilizada nos testes realizados na parte empírica.

### 3.5.3.5 Aplicação dos testes de hipótese

Para os modelos aninhados, utilizou-se a razão de verossimilhança (LR) como estatística de teste dos modelos. Para os modelos não aninhados utilizou-se o teste de Vuong e, nos casos em que o teste de Vuong não pôde rejeitar a hipótese nula, utilizou-se o teste de Clarke como informação adicional<sup>16</sup>. O teste de Wald foi aplicado para verificar a hipótese  $H_0 : \gamma_{k \neq 1} = \mathbf{0}$  nas equações de heteroscedasticidades (3.17), isso é, para verificar se todos os coeficientes (exceto o intercepto,  $k = 1$ ) são conjuntamente insignificantes.

Nas comparações entre os modelos de Barreira Dupla e o modelo Tobit por um lado, e os modelos de Infrequência de Aquisição e o modelo Tobit por outro lado, é tentador utilizar o teste de razão de verossimilhança, dada a sua simplicidade. De fato, aplicando a restrição  $\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} \rightarrow \infty$  tanto nos modelos de Infrequência de Aquisição quanto nos modelos de Barreira Dupla, obtém-se uma versão do modelo Tobit (com ou sem a aplicação da transformação

---

<sup>16</sup> Kimhi (1999) mostra que o teste de Vuong possui um poder baixo para discriminar entre o modelo de Barreira Dupla e o de Infrequência de Aquisição.

IHS). Tais restrições, no entanto, não satisfazem as condições necessárias para se aplicar o teste LR, pois pelo menos um dos parâmetros deve atingir o limite do espaço dos parâmetros (algum  $\alpha_k$  deve tender a infinito) e, portanto, não é identificado sob a hipótese nula. Nestes casos, portanto, o correto é aplicar os testes para modelos não aninhados (testes de Vuong e Clarke). A Tabela 3.6 abaixo mostra os testes que foram utilizados.

Tabela 3.6 - Resumo dos testes de hipóteses aplicados aos modelos

Modelo	Tipo de teste	Restrição
Barreira Dupla IHS com erros correlacionados <i>versus</i>		
Barreira Dupla IHS	LR	$\rho = 0$
Barreira Dupla com erros correlacionados	LR	$\lambda = 0$
Barreira Dupla	LR	$\rho = 0$ e $\lambda = 0$
Tobit IHS	Vuong, Clarke	$z'_{i1}\alpha \rightarrow \infty$
Tobit	Vuong, Clarke	$z'_{i1}\alpha \rightarrow \infty$ e $\lambda = 0$
Duas partes IHS	Vuong, Clarke	
Duas partes	Vuong, Clarke	
Infrequência de aquisição IHS	Vuong, Clarke	
Infrequência de aquisição	Vuong, Clarke	
Infrequência de aquisição IHS <i>versus</i>		
Infrequência de aquisição	LR	$\lambda = 0$
Barreira Dupla IHS	Vuong, Clarke	
Tobit IHS	Vuong, Clarke	$z'_{i1}\alpha \rightarrow \infty$
Infrequência de aquisição <i>versus</i>		
Barreira Dupla	Vuong, Clarke	
Tobit	Vuong, Clarke	$z'_{i1}\alpha \rightarrow \infty$
Duas partes IHS <i>versus</i> Tobit IHS	LR	$\alpha = \beta/\sigma$
Duas partes <i>versus</i> Tobit	LR	$\alpha = \beta/\sigma$
Tobit IHS <i>versus</i> Tobit	LR	$\lambda = 0$
Duas partes IHS <i>versus</i> Duas partes	LR	$\lambda = 0$

Fonte: Elaboração própria.

## 3.6 RESULTADOS

### 3.6.1 Parâmetros estimados

A Tabela 3.7 mostra os parâmetros estimados do modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados e a Tabela 3.8 mostra os parâmetros estimados do modelo de

Infrequência de aquisição IHS. Dentre os modelos considerados neste capítulo, estes são os mais gerais, por abarcarem um maior número de modelos aninhados. Os parâmetros estimados dos demais modelos com transformação IHS apresentados no Quadro 3.1 estão no apêndice deste capítulo (Apêndice B).

Tabela 3.7 - Parâmetros estimados do modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados

Variável	Equação de consumo		Equação de participação		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	0,0349*	0,0040	-5,8475*	0,2891	-3,4848*	0,0900
logxn	0,0016*	0,0005	1,0273*	0,0480		
logn	0,0025*	0,0009	1,3117*	0,0673		
peessoas_0_4	-0,0205*	0,0030	-0,4845*	0,1758		
peessoas_5_9	-0,0122*	0,0026	-0,1035	0,1678		
peessoas_10_14	-0,0069*	0,0024	0,0716	0,1560		
peessoas_65_mais	-0,0172*	0,0042	-0,7527*	0,1826		
cartao	0,0009	0,0007	0,1745*	0,0528		
dom_proprio	-0,0033*	0,0007	-0,1102**	0,0435		
sexochefe	-0,0051*	0,0012	-0,1279**	0,0628	-0,0682**	0,0332
cor_pele	0,0009	0,0008	-0,1763*	0,0470	-0,0674*	0,0183
conjuge	-0,0076*	0,0015	-0,3953*	0,0810	-0,0858**	0,0376
ocupado_ref	0,0033*	0,0011	0,2357*	0,0626	0,0149	0,0286
ocupado_conj	0,0011	0,0009	0,2278*	0,0556	0,0083	0,0223
idade_25_34	-0,0028	0,0018	0,0228	0,0837	-0,0095	0,0460
idade_35_44	-0,0060*	0,0018	-0,0456	0,0873	-0,0610	0,0443
idade_45_54	-0,0082*	0,0019	-0,0542	0,0921	-0,0428	0,0457
idade_55_64	-0,0107*	0,0020	-0,1952	0,1021	-0,0467	0,0506
idade_65_mais	-0,0091*	0,0029	0,2272	0,1730	0,0675	0,0599
educachefe_2	-0,0031	0,0017	-0,0095	0,0798	0,0191	0,0400
educachefe_3	-0,0021	0,0016	-0,0823	0,0794	-0,0801**	0,0380
educachefe_4	-0,0023	0,0017	-0,0689	0,0929	-0,1398*	0,0418
educachefe_5	-0,0034**	0,0017	-0,0885	0,1014	-0,1542*	0,0414
educachefe_6	-0,0004	0,0018	-0,3125**	0,1220	-0,3058*	0,0425
metropolitano	0,0017**	0,0007	-0,1505*	0,0486		
norte	0,0008	0,0009	-0,0580	0,0577		
nordeste	0,0010	0,0007	0,1442*	0,0478		
sul	-0,0004	0,0007	-0,0439	0,0493		
centrooeste	-0,0016	0,0008	-0,1728*	0,0511		
trimestre_2	0,0010	0,0009	-0,0532	0,0524		
trimestre_3	-0,0006	0,0008	0,0667	0,0538		
trimestre_4	-0,0015	0,0009	-0,0284	0,0543		
automovel			-0,1726*	0,0438		
geladeirafreezer			-0,1364*	0,0373		
microondas			-0,2607*	0,0673		
rho	0,1100*	0,0270				
lambda	39,2418*	2,2779				
Log Likelihood	21.296,51					
Wald $H_0: \gamma_{k+1} = 0$	186,79					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela 3.8 - Parâmetros estimados do modelo de Infrequência de Aquisição IHS

Variável	Equação de consumo		Equação de participação		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-0,0055	0,0044	-5,0954*	0,2860	-3,4926*	0,1051
logxn	0,0069*	0,0007	0,8990*	0,0475		
logn	0,0095*	0,0011	1,1830*	0,0675		
peessoas_0_4	-0,0235*	0,0030	-0,3096	0,1741		
peessoas_5_9	-0,0128*	0,0025	-0,0848	0,1621		
peessoas_10_14	-0,0066*	0,0023	0,0235	0,1530		
peessoas_65_mais	-0,0238*	0,0037	-0,4622**	0,2074		
cartao	0,0014**	0,0007	0,1821*	0,0554		
dom_proprio	-0,0042*	0,0007	-0,0752	0,0434		
sexochefe	-0,0057*	0,0012	-0,0215	0,0862	-0,0504	0,0409
cor_pele	-0,0001	0,0007	-0,1952*	0,0532	-0,0774*	0,0203
conjuge	-0,0101*	0,0014	-0,2588**	0,1014	-0,0620	0,0459
ocupado_ref	0,0045*	0,0010	0,2344*	0,0715	0,0470	0,0311
ocupado_conj	0,0022*	0,0008	0,2089*	0,0657	0,0124	0,0258
idade_25_34	-0,0022	0,0017	0,0016	0,0920	-0,0254	0,0504
idade_35_44	-0,0061*	0,0018	-0,0604	0,0967	-0,0792	0,0494
idade_45_54	-0,0089*	0,0018	-0,0342	0,1014	-0,0441	0,0504
idade_55_64	-0,0122*	0,0020	-0,0996	0,1134	-0,0505	0,0558
idade_65_mais	-0,0080*	0,0027	0,2780	0,1864	0,0755	0,0646
educachefe_2	-0,0030	0,0016	0,0425	0,0950	0,0284	0,0440
educachefe_3	-0,0021	0,0014	-0,1034	0,0890	-0,0847**	0,0410
educachefe_4	-0,0021	0,0015	-0,0659	0,1041	-0,1314*	0,0460
educachefe_5	-0,0037**	0,0016	-0,1164	0,1161	-0,1452*	0,0461
educachefe_6	-0,0029	0,0017	-0,4046*	0,1305	-0,2880*	0,0477
metropolitano	0,0010	0,0007	-0,1406*	0,0498		
norte	0,0009	0,0009	-0,0474	0,0601		
nordeste	0,0020*	0,0007	0,1427*	0,0500		
sul	-0,0007	0,0007	-0,0842	0,0493		
centroeste	-0,0026*	0,0008	-0,1470*	0,0527		
trimestre_2	0,0006	0,0008	-0,0582	0,0520		
trimestre_3	-0,0001	0,0008	0,0999	0,0567		
trimestre_4	-0,0015	0,0008	-0,0087	0,0547		
automovel			-0,1275*	0,0483		
geladeirafreezer			-0,0253	0,0440		
microondas			-0,2340*	0,0724		
lambda	36,9601*	2,4989				
Log Likelihood	21.288,31					
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	143,22					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tanto no modelo de Barreira Dupla quanto no modelo de Infrequência de Aquisição observam-se os seguintes fatos:

Primeiro, os resíduos da equação de consumo são heteroscedásticos em ambos os modelos. A presença de heteroscedasticidade é confirmada pela aplicação do teste de Wald, que mostra que os parâmetros conjuntos da equação de heteroscedasticidade (exceto o intercepto) são diferentes de zero a 1% de significância em ambos os modelos. Dentre as variáveis desta equação, merece destaque a escolaridade da pessoa de referência: quanto maior a escolaridade, menor a variância dos resíduos.

Em segundo lugar, o parâmetro estimado da transformação IHS ( $\lambda$ ) em ambos os modelos é significativamente diferente de zero e possui valores próximos em termos absolutos (39,2 no modelo de Barreira Dupla e 36,9 no modelo de Infrequência de Aquisição). Embora o valor absoluto do parâmetro não tenha muito significado<sup>17</sup>, o fato de ele ser parecido em dois modelos tão diferentes mostra que a densidade de probabilidade condicionada da variável dependente,  $f(y_i | \mathbf{x}_i, y_i > 0)$ , possui coeficientes de assimetria semelhantes em ambos os modelos<sup>18</sup>. A significância estatística do parâmetro, por outro lado, implica dizer que os resíduos da equação de consumo não possuem uma distribuição normal. Este resultado é importante, pois mostra que a utilização de modelos que assumem a normalidade dos erros pode gerar resultados inconsistentes.

Em terceiro lugar, em ambos os modelos, os parâmetros de algumas variáveis possuem sinais diferentes quando estão na equação de participação e quando estão na equação de consumo. Isto ocorre, por exemplo, com o percentual de moradores com idade entre 10 e 14 anos, com a dummy que indica que a pessoa de referência possui 65 ou mais anos e se o domicílio é de área metropolitana. Isso não é suficiente para dizer que as variáveis possuem efeitos marginais distintos sobre a probabilidade de participação e sobre a fração esperada da despesa destinada à alimentação fora, uma vez que as fórmulas dos efeitos marginais envolvem os parâmetros destas duas equações. Porém, o fato de estas variáveis apresentarem

---

<sup>17</sup> Afinal, por conta da invariância à escala da transformação IHS, se o valor de  $y_i$  for multiplicado por 100 e o modelo for reestimado, o valor de  $\lambda$  estimado no novo modelo será de aproximadamente  $\lambda/100$ .

<sup>18</sup> Não há nada que garanta que o valor de  $\lambda$  tenha que ser semelhante entre os modelos, como mostra o valor de  $\lambda$  estimado pelos modelos Tobit IHS, Duas Partes IHS e de Barreira Dupla IHS com erros independentes no apêndice desse capítulo (cf. Seção 0).

sinais diferentes mostra a flexibilidade dos modelos de Barreira Dupla e de Infrequência de Aquisição sobre o modelo Tobit, cujos efeitos marginais sobre a probabilidade de participação e sobre a esperança do consumo estão restritos a terem o mesmo sinal.

Por fim, a Tabela 3.7 mostra que o coeficiente de correlação dos erros ( $\rho$ ) no modelo de Barreira Dupla é positivo e significativamente diferente de zero ( $\hat{\rho} = 0,11$ ). Assim, se o modelo de Barreira Dupla for o modelo correto, então: *a*) as decisões de participação e de consumo são feitas *simultaneamente*, e não independentemente; e *b*) As mesmas características não-observadas do domicílio que aumentam a demanda potencial de alimentos fora possuem também o efeito de aumentar a probabilidade de participação do domicílio no consumo de alimentos fora e vice-versa. Por exemplo, em domicílios nas quais nenhuma das pessoas adultas possui muita proficiência em preparar alimentos, espera-se tanto uma probabilidade de participação maior quanto um montante maior de alimentos consumidos fora do domicílio em comparação com domicílios semelhantes, mas nos quais as pessoas adultas possuem proficiência na preparação de alimentos.

### 3.6.2 Efeitos marginais e elasticidades

A Tabela 3.9 mostra os efeitos marginais das variáveis sobre a probabilidade de participação do mercado e sobre o valor esperado incondicional de  $y_i$  e condicional em  $y_i > 0$  para o modelo de Barreira Dupla. Algumas das variáveis mais relevantes serão comentadas a seguir.

Tabela 3.9 - Efeitos marginais do modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados

Variável	Tipo	Probabilidade		Esperança		Esperança condicional	
		Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão
logxn	Contínua	0,2181*	0,0359	0,0351*	0,0067	0,0027	0,003
logn	Contínua	0,28*	0,0442	0,0466*	0,0091	0,0054	0,0051
peessoas_0_4	Contínua	-0,184*	0,0346	-0,1127*	0,0174	-0,1078*	0,0194
peessoas_5_9	Contínua	-0,0713**	0,0329	-0,0619*	0,0128	-0,065*	0,015
peessoas_10_14	Contínua	-0,0135	0,0314	-0,0316*	0,0111	-0,0375*	0,013
peessoas_65_mais	Contínua	-0,2256*	0,0413	-0,1037*	0,0193	-0,0884*	0,0227
cartao	Dummy	0,0364*	0,0106	0,0087**	0,0036	0,0039	0,004
dom_proprio	Dummy	-0,0383*	0,0093	-0,018*	0,0035	-0,0163*	0,004
sexochefe	Dummy	-0,0384*	0,0121	-0,0342*	0,0058	-0,0379*	0,0072
cor_pele	Dummy	-0,0259**	0,0128	-0,0115*	0,0038	-0,01**	0,0049
conjuge	Dummy	-0,1156*	0,0189	-0,0503*	0,007	-0,0489*	0,0082
ocupado_ref	Dummy	0,0534*	0,0122	0,0267*	0,006	0,0222*	0,0071
ocupado_conj	Dummy	0,0445*	0,0108	0,0127*	0,0048	0,0072	0,0055
idade_25_34	Dummy	-0,0059	0,0168	-0,0138	0,0076	-0,0165	0,0096
idade_35_44	Dummy	-0,0258	0,0177	-0,0347*	0,008	-0,0404*	0,01
idade_45_54	Dummy	-0,0432**	0,0189	-0,0405*	0,0084	-0,0457*	0,0104
idade_55_64	Dummy	-0,0874*	0,0206	-0,0512*	0,009	-0,0543*	0,0112
idade_65_mais	Dummy	-0,0219	0,0285	-0,0238**	0,0119	-0,0268	0,0148
educachefe_2	Dummy	-0,0193	0,0137	-0,0115	0,0068	-0,0111	0,0086
educachefe_3	Dummy	-0,013	0,0138	-0,0235*	0,0068	-0,0278*	0,0085
educachefe_4	Dummy	-0,0011	0,0167	-0,0306*	0,0076	-0,0387*	0,0097
educachefe_5	Dummy	-0,0077	0,0188	-0,0363*	0,0078	-0,0451*	0,0099
educachefe_6	Dummy	-0,0378	0,0333	-0,0434*	0,009	-0,0503*	0,0116
metropolitano	Dummy	-0,0273**	0,0128	0,0037	0,0035	0,0103**	0,0041
norte	Dummy	-0,009	0,0119	0,0025	0,0043	0,005	0,0051
nordeste	Dummy	0,0316*	0,0101	0,0086**	0,0036	0,0047	0,0041
sul	Dummy	-0,0107	0,0101	-0,0029	0,0035	-0,0016	0,0041
centrooeste	Dummy	-0,0452*	0,0118	-0,0122*	0,0039	-0,0073	0,0045
trimestre_2	Dummy	-0,0072	0,0109	0,0037	0,0042	0,0061	0,005
trimestre_3	Dummy	0,0107	0,0105	-0,0012	0,0038	-0,0036	0,0045
trimestre_4	Dummy	-0,0122	0,0108	-0,0078**	0,0039	-0,0077	0,0046
automovel	Contínua	-0,0355*	0,0106	-0,0046*	0,0015	0,001*	0,0004
geladeirafreezer	Contínua	-0,0281*	0,0096	-0,0036*	0,0013	0,0008**	0,0003
microondas	Contínua	-0,0536*	0,0167	-0,0069*	0,0023	0,0016*	0,0006

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Das características socioeconômicas do domicílio, a despesa domiciliar *per capita*, o número de moradores e a posse de cartão de crédito influenciam positivamente tanto a participação do domicílio no mercado consumidor quanto o valor esperado do consumo de alimentos fora. O efeito dessas variáveis sobre o consumo de alimentos fora para aqueles domicílios que já participavam do mercado, no entanto, não é significativo. Por outro lado,

observa-se que a posse de domicílio próprio influencia negativamente os valores esperados e a probabilidade de consumo de alimentos fora.

Além disso, pessoas de referência do sexo masculino, de cor branca/amarela, sem cônjuge morando no domicílio, e que tiveram uma ocupação remunerada durante os últimos doze meses criam um efeito positivo sobre a probabilidade de participação e sobre o consumo de alimentos fora. Até os 64 anos de idade, quanto maior a idade da pessoa de referência do domicílio, menor é a probabilidade de participação e os valores esperados do consumo de alimentos fora. Quanto à escolaridade, esta não possui efeitos significativos sobre a probabilidade de participação, mas possui efeitos negativos sobre o consumo condicional e incondicional de alimentos fora.

No que se refere à composição demográfica, tanto a probabilidade de participação quanto os valores esperados do consumo de alimentos fora são negativamente relacionados com a proporção de crianças de 0 a 14 anos no domicílio e esse efeito negativo é tanto maior quanto mais nova for a criança. Domicílios com pessoas com 65 anos ou mais de idade também possuem probabilidades de participação e valores esperados menores do que os demais domicílios.

Por fim, as variáveis que indicam os números de geladeiras ou freezers, microondas e automóveis (incluídas apenas na equação de participação) possuem um efeito negativo sobre a probabilidade de consumo de alimentos fora do domicílio. Para geladeiras ou freezers e micro-ondas este efeito era esperado, dado que a posse destes bens duráveis ou contribuem para a preparação de alimentos dentro do domicílio ou representam um aumento na capacidade de armazenagem de alimentos. Para a posse de automóveis, por outro lado, poder-se-ia esperar tanto um sinal positivo quanto negativo, já que um veículo automotivo possui efeitos ambíguos sobre a probabilidade de se alimentar fora. De um lado, a posse de automóvel diminui o tempo de locomoção até restaurantes, lanchonetes, etc. De outro lado, além de diminuir o tempo de locomoção para os locais de aquisição de alimentos, o automóvel diminui também os custos de aquisição de alimentos, pois permite à família realizar compras maiores e mais baratas de alimentos para consumo dentro do domicílio.

A Tabela 3.10 mostra os efeitos marginais das variáveis no modelo de Infrequência de Aquisição. Neste modelo, existe mais de uma definição de probabilidade relevante. A primeira é a probabilidade de o domicílio *consumir* um determinado produto. A segunda é a probabilidade de o domicílio *adquirir* este produto no período de captação da pesquisa. Juntando estas duas probabilidades, se obtém a probabilidade de uma despesa positiva ser observada na amostra. Para que a análise não fique muito prolongada, no entanto, a Tabela 3.10 apresenta apenas os efeitos marginais das variáveis em relação ao *consumo* de alimentos fora, e não em relação à despesa com este bem. Isso foi feito porque esta forma de apresentar os dados permite comparar melhor o modelo de Infrequência de Aquisição com o modelo de Barreira Dupla.

Os dados da Tabela 3.10 mostram que apesar de o modelo de Infrequência de Aquisição partir de uma formulação diferente daquela do modelo de Barreira Dupla, o efeito de quase todas as variáveis possui a mesma direção sobre as probabilidades e sobre os valores esperados do consumo de alimentos fora. Em particular, tanto o logaritmo da despesa domiciliar *per capita* quanto o logaritmo do número de membros do domicílio possuem efeitos positivos sobre a probabilidade e sobre a esperança condicional do consumo de alimentos fora. As variáveis de posse de bens duráveis não tiveram seus efeitos marginais calculados, pois elas não entram na fórmula da probabilidade de consumo do modelo de Infrequência de Aquisição e, no caso dos valores esperados, a influência destas variáveis se dá apenas através da transformação IHS sobre a variável latente de consumo, cujo efeito marginal é praticamente nulo.

Tabela 3.10 - Efeitos marginais do modelo de Infrequência de Aquisição IHS

Variável	Tipo	Probabilidade		Esperança		Esperança condicional	
		Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão
logxn	Contínua	0,0405*	0,0067	0,0373*	0,0071	0,0257*	0,0032
logn	Contínua	0,0561*	0,0098	0,0491*	0,0097	0,0355*	0,0051
peessoas_0_4	Contínua	-0,1384*	0,0263	-0,114*	0,0176	-0,0876*	0,0136
peessoas_5_9	Contínua	-0,0755*	0,0188	-0,0622*	0,013	-0,0478*	0,0099
peessoas_10_14	Contínua	-0,0387*	0,0147	-0,0316*	0,0112	-0,0245*	0,0086
peessoas_65_mais	Contínua	-0,1398*	0,0305	-0,1038*	0,02	-0,0885*	0,0143
cartao	Dummy	0,0078**	0,004	0,0092**	0,0037	0,0052	0,0027
dom_proprio	Dummy	-0,0266*	0,0059	-0,0182*	0,0035	-0,0143*	0,0027
sexochefe	Dummy	-0,0258	0,0159	-0,0347*	0,006	-0,0263*	0,0057
cor_pele	Dummy	0,0166**	0,0075	-0,0118*	0,004	-0,0124*	0,0039
conjuge	Dummy	-0,057*	0,0193	-0,051*	0,0072	-0,0388*	0,0066
ocupado_ref	Dummy	0,0142	0,0108	0,0269*	0,0061	0,0286*	0,0063
ocupado_conj	Dummy	0,0097	0,009	0,0132*	0,0049	0,011**	0,0046
idade_25_34	Dummy	-0,0078	0,0195	-0,0139	0,0077	-0,012	0,0073
idade_35_44	Dummy	-0,0218	0,0201	-0,0349*	0,0081	-0,0309*	0,0076
idade_45_54	Dummy	-0,0514**	0,0209	-0,0407*	0,0086	-0,0338*	0,0079
idade_55_64	Dummy	-0,0786*	0,0234	-0,0515*	0,0092	-0,0423*	0,0086
idade_65_mais	Dummy	-0,073*	0,0281	-0,0238**	0,0121	-0,0131	0,0112
educachefe_2	Dummy	-0,0254	0,018	-0,0118	0,0069	-0,0056	0,0064
educachefe_3	Dummy	0,0066	0,0158	-0,0241*	0,0069	-0,0198*	0,0065
educachefe_4	Dummy	0,0164	0,0172	-0,0312*	0,0078	-0,0256*	0,0073
educachefe_5	Dummy	0,0098	0,0174	-0,0369*	0,008	-0,0316*	0,0075
educachefe_6	Dummy	0,0436**	0,0177	-0,0434*	0,0093	-0,0413*	0,0088
metropolitano	Dummy	0,0056	0,004	0,0033	0,0035	0,0037	0,0026
norte	Dummy	0,0053	0,0051	0,0022	0,0043	0,0035	0,0033
nordeste	Dummy	0,0115*	0,0044	0,0088**	0,0037	0,0079*	0,0028
sul	Dummy	-0,004	0,0044	-0,0029	0,0035	-0,0024	0,0027
centrooeste	Dummy	-0,016*	0,0054	-0,0125*	0,0039	-0,0091*	0,0029
trimestre_2	Dummy	0,0036	0,0049	0,0037	0,0042	0,0024	0,0032
trimestre_3	Dummy	-0,0008	0,0047	-0,0012	0,0039	-0,0005	0,003
trimestre_4	Dummy	-0,0092	0,0052	-0,008**	0,0039	-0,0055	0,003

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Dentre as variáveis cujos efeitos marginais tiveram direções diferentes entre os modelos estão a cor da pessoa de referência, as variáveis de escolaridade para quem tem 4 anos ou mais de estudo e se o domicílio se localiza em uma área metropolitana. Todas estas variáveis tiveram um efeito negativo sobre a probabilidade de participação no modelo de Barreira Dupla, mas um efeito positivo no modelo de Infrequência de Aquisição.

A Tabela 3.11 mostra as elasticidades calculadas para as variáveis contínuas do modelo de Barreira Dupla. A variável mais importante aqui é a despesa domiciliar *per capita* (*logxn*).

A tabela mostra que o aumento de 1% no logaritmo da despesa domiciliar *per capita* tende a aumentar em 1,64% a fração da despesa destinada à alimentação fora. Desse valor, a maior contribuição ocorre por conta do aumento da participação dos domicílios no mercado consumidor (1,54%) enquanto o restante (0,0978%) ocorre por causa do efeito da variável sobre o gasto dos domicílios que já são consumidores (esperança condicional). Um padrão similar observa-se também no logaritmo do número de pessoas do domicílio (*logn*). Quanto às variáveis relativas à composição demográfica, o componente de maior peso na elasticidade total da esperança vem do efeito destas variáveis sobre o consumo dos domicílios que já participavam do mercado. Vale lembrar que no modelo de Barreira Dupla, um efeito positivo de uma variável sobre a participação no mercado consumidor pode significar tanto que os domicílios não estão mais restritos por uma solução de canto quanto que o incremento de renda reverteu uma decisão de não-participação do domicílio no mercado consumidor.

Tabela 3.11 - Elasticidades estimadas do modelo de Barreira Dupla IHS com erros correlacionados

Variável	Probabilidade		Esperança		Esperança condicional	
	Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão
logxn	1,5453*	0,2922	1,6431*	0,2978	0,0978	0,1093
logn	0,4093*	0,0744	0,4502*	0,0813	0,0408	0,0381
peessoas_0_4	-0,0173*	0,0034	-0,0699*	0,0081	-0,0526*	0,0077
peessoas_5_9	-0,0071**	0,0033	-0,0409*	0,0076	-0,0337*	0,0071
peessoas_10_14	-0,0014	0,0032	-0,0213*	0,0073	-0,0199*	0,0067
peessoas_65_mais	-0,025*	0,0051	-0,076*	0,0134	-0,051*	0,0129

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

A Tabela 3.12 mostra as elasticidades estimadas para o modelo de Infrequência de Aquisição. Aqui se observa uma diferença um pouco maior entre o modelo de Barreira Dupla e o de Infrequência de Aquisição. O logaritmo da despesa domiciliar *per capita* continua tendo um efeito positivo sobre a fração da despesa destinada à alimentação fora (+1,51%). Porém, ao contrário do que ocorre com o modelo de Barreira Dupla, a quase totalidade deste efeito (1,26%) ocorre devido ao aumento das despesas daqueles domicílios que já participavam do mercado consumidor (esperança condicional), e não da incorporação de

novos domicílios consumidores (0,25%). Tal inversão também ocorre no logaritmo do número de pessoas do domicílio ( $\log n$ ).

Tabela 3.12 - Elasticidades estimadas do modelo de Infrequência de Aquisição IHS

Variável	Probabilidade		Esperança		Esperança condicional	
	Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão	Valor estimado	Erro padrão
logxn	0,2518*	0,0491	1,5169*	0,1133	1,2651*	0,1094
logn	0,0719*	0,0147	0,4329*	0,0393	0,361*	0,0359
peessoas_0_4	-0,0114*	0,0025	-0,0686*	0,0078	-0,0572*	0,0069
peessoas_5_9	-0,0066*	0,0018	-0,0398*	0,0074	-0,0332*	0,0062
peessoas_10_14	-0,0035**	0,0014	-0,0208*	0,0071	-0,0174*	0,0059
peessoas_65_mais	-0,0136*	0,0033	-0,0819*	0,0118	-0,0683*	0,01

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

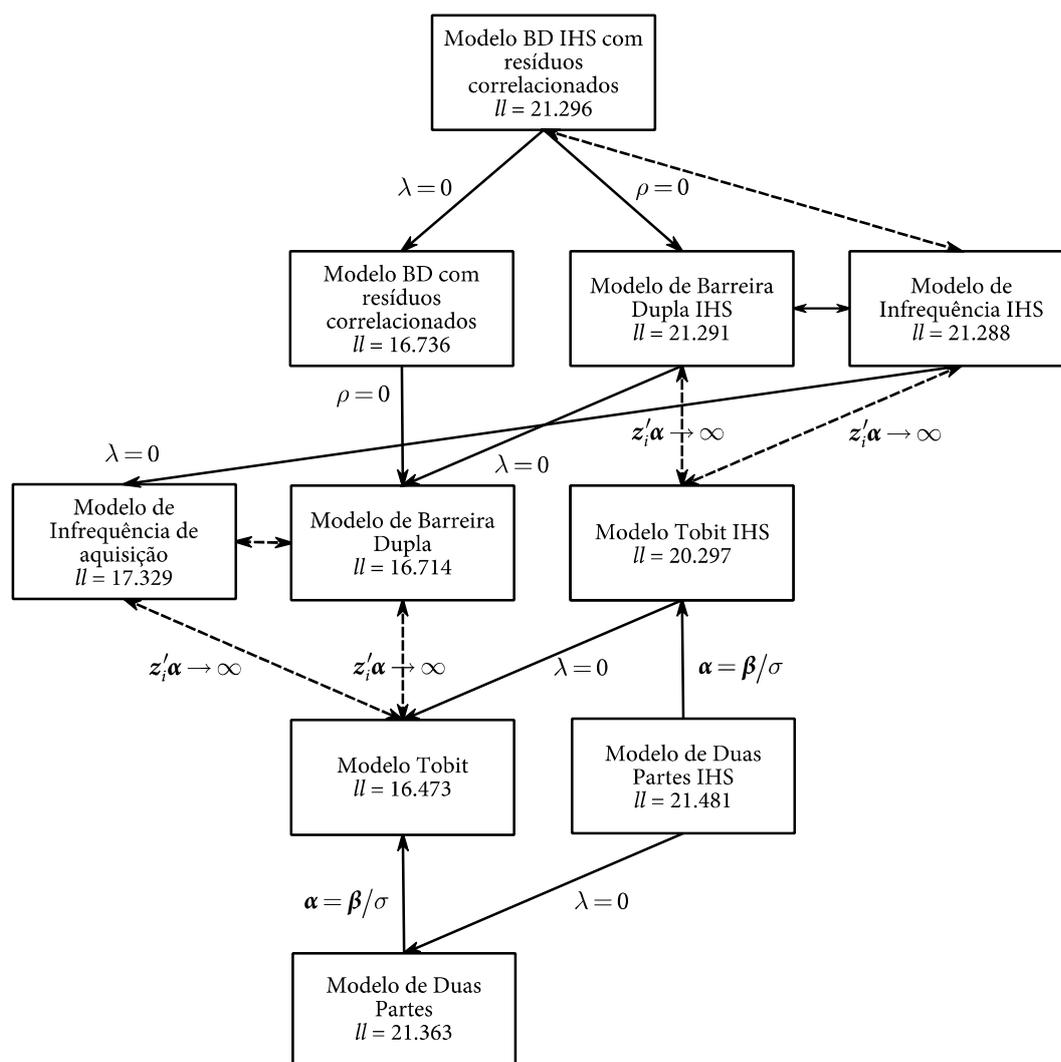
Como comparar as estimativas da Tabela 3.11 e Tabela 3.12 com outros trabalhos empíricos feitos para o Brasil? Utilizando o valor médio  $\overline{\log(Y/n)} = 5,7773$  (Tabela 3.5) e a equação (3.39) para obter a elasticidade-dispêndio geral da alimentação fora, obtemos os valores  $e_Y^q = 1,284$  no modelo de Barreira Dupla IHS e  $e_Y^q = 1,262$  no modelo de Infrequência de Aquisição IHS. Tais valores são muito próximos do valor  $e_Y^q = 1,292$  obtido por Claro, Levy e Bandoni (2009), mas superiores àqueles obtidos por Hoffmann (2007), de  $e_Y^q = 0,798$ . Ambos os trabalhos utilizam a POF 2002-2003. A diferença fundamental entre esses trabalhos e este capítulo é que a estimação dos modelos é feita utilizando-se um agrupamento de domicílios, e não as observações individuais. Em Hoffmann (2007), os domicílios são agrupados por classes de renda; em Claro, Levy e Bandoni (2009) os domicílios são agrupados pelos 443 estratos geográficos/estatísticos da POF 2002-2003 que serviram como base para a seleção dos setores censitários da amostra.

### 3.6.3 Testes dos modelos

Os resultados comentados na Seção 3.6.2 referem-se apenas aos modelos mais gerais: o modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados e transformação IHS e o modelo de Infrequência de Aquisição com transformação IHS. No entanto, conforme foi visto na Seção

3.4, estes modelos aninham outros modelos, e a aplicação de testes de hipóteses para ver se as diferenças entre eles são estatisticamente significativas pode ajudar na resposta de qual modelo é o mais adequado para se estimar o consumo alimentar fora do domicílio.

Quadro 3.1 - Relação entre os modelos



Fonte: Elaboração própria.

Nota: BD significa “Barreira Dupla”.

O Quadro 3.1 apresenta os modelos utilizados e a relação existente entre eles. Quando a ligação dos modelos é representada por uma linha sólida, significa que um dos modelos é uma versão do outro com a aplicação de restrições sobre os parâmetros (modelo aninhado). Quando a ligação dos modelos é representada por uma linha pontilhada, então os modelos são

não-aninhados. Os valores mostrados dentro de cada retângulo são os valores de log-verossimilhança de cada modelo.

Observando-se o Quadro 3.1, percebe-se que as maiores diferenças no valor das log-verossimilhanças ocorrem na utilização ou não da transformação IHS. A diferença entre o modelo de Barreira Dupla IHS e o modelo de Infrequência de Aquisição IHS, por exemplo, é significativamente menor do que aquela observada entre este último e a sua versão sem a aplicação da transformação IHS. Para avaliar as diferenças entre os modelos, no entanto, deve-se analisar as informações da Tabela 3.13, que mostra os resultados obtidos por meio de testes de hipótese.

Em primeiro lugar, conforme constatado pela análise preliminar do Quadro 3.1, todos os modelos com a transformação IHS se mostraram estatisticamente superiores às suas respectivas versões sem a aplicação da transformação. Isso é uma evidência forte a favor do uso dessa transformação na variável dependente dos modelos. Em segundo lugar, a Tabela 3.13 mostra aquilo que já havia sido comentado na Seção 3.6.1: a introdução da correlação dos erros representa uma melhoria significativa na especificação do modelo de Barreira Dupla. Em terceiro lugar, quando o modelo de Barreira Dupla é comparado com o de Infrequência de Aquisição, os resultados obtidos são ambíguos. Utilizando-se a transformação IHS, o modelo de Barreira Dupla se mostra estatisticamente superior ao de Infrequência de Aquisição, mas a diferença em favor do modelo de Barreira Dupla não é estatisticamente significativa a 5%, pelo teste de Vuong, embora seja significativa pelo teste de Clarke. Por outro lado, quando a comparação é feita sem a transformação IHS, o modelo de Infrequência de Aquisição mostra-se estatisticamente superior, com a diferença sendo significativa a 1% em qualquer teste. Em quarto lugar, a aplicação do teste de razão de verossimilhança apresentado na Tabela 3.13 mostra que o modelo de Duas Partes é superior ao modelo Tobit, com ou sem a utilização da transformação IHS. Por fim, os testes de Vuong e Clarke mostram que o modelo de Duas Partes IHS é estatisticamente superior ao modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados.

Tabela 3.13 - Testes de especificação dos modelos

Modelo	Tipo de teste	Graus de liberdade	Valor do teste	p-valor
<i>Barreira Dupla IHS com erros correlacionados versus</i>				
Barreira Dupla IHS	LR	1	10,388	0,001
Barreira Dupla com erros correlacionados	LR	1	9.120,481	< 0,001
Barreira Dupla	LR	2	9.164,453	< 0,001
Tobit IHS	Vuong	33	15,041	< 0,001
Tobit IHS	Clarke	33	21242	< 0,001
Tobit	Vuong	34	22,908	< 0,001
Tobit	Clarke	34	19912	< 0,001
Infrequência de aquisição IHS	Vuong	1	0,422	0,337
Infrequência de aquisição IHS	Clarke	1	19183	< 0,001
Infrequência de aquisição	Vuong	2	20,063	< 0,001
Infrequência de aquisição	Clarke	2	18706	< 0,001
Duas partes IHS	Vuong	4	-2,647	0,996
Duas partes IHS	Clarke	4	17374	> 0,999
Duas partes	Vuong	5	-0,528	0,701
Duas partes	Clarke	5	18298	< 0,001
<i>Infrequência de aquisição IHS versus</i>				
Infrequência de aquisição	LR	1	7.916,667	< 0,001
Barreira Dupla IHS	Vuong	0	-0,087	0,535
Barreira Dupla IHS	Clarke	0	16700	> 0,999
Tobit IHS	Vuong	32	15,608	< 0,001
Tobit IHS	Clarke	32	21091	< 0,001
<i>Infrequência de aquisição versus</i>				
Barreira Dupla	Vuong	0	5,141	< 0,001
Barreira Dupla	Clarke	0	21467	< 0,001
Tobit	Vuong	32	8,929	< 0,001
Tobit	Clarke	32	21580	< 0,001
<i>Duas partes IHS versus Tobit IHS</i>				
Duas partes IHS versus Tobit IHS	LR	29	2.368,009	< 0,001
Duas partes versus Tobit	LR	29	9.780,305	< 0,001
Tobit IHS versus Tobit	LR	1	7.647,650	< 0,001
Duas partes IHS versus Duas partes	LR	1	235,354	< 0,001

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

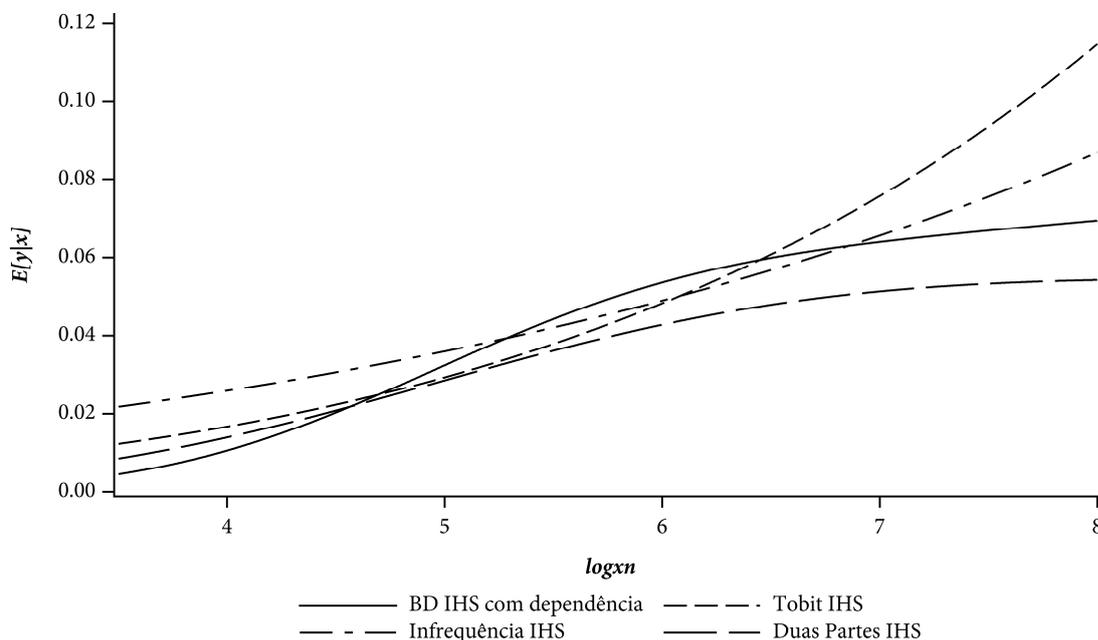
### 3.6.4 Probabilidades e valores esperados

Uma forma de comparar os modelos pode ser feita por meio dos testes estatísticos realizados na seção anterior. No entanto, como os modelos assumem pressupostos diferenciados a respeito da natureza dos gastos nulos observados nas pesquisas de orçamentos familiares, uma análise dos valores esperados do gasto e do consumo pode ser mais útil para mostrar as suas similaridades e diferenças.

O Gráfico 3.1 abaixo mostra o valor esperado do consumo de alimentos fora do domicílio – expresso como uma fração das despesas de consumo do domicílio – em relação ao logaritmo da despesa domiciliar *per capita*, mantendo-se constante as demais variáveis no valor médio da amostra. Por conta do excesso de informação, os modelos estimados sem a transformação IHS não serão apresentados nos gráficos desta seção.

O Gráfico 3.1 mostra que em todos os modelos o valor esperado do consumo aumenta com a despesa domiciliar *per capita*. Além disso, para valores intermediários da despesa domiciliar *per capita*, os valores esperados dos diferentes modelos são muito semelhantes. As maiores diferenças ocorrem nos domicílios que possuem uma despesa domiciliar *per capita* mais alta. Para estes domicílios, o modelo Tobit estima uma fração maior da despesa destinada à alimentação fora, enquanto o modelo de Duas Partes estima uma fração menor.

Gráfico 3.1 - Valor esperado da fração da despesa destinada à alimentação fora

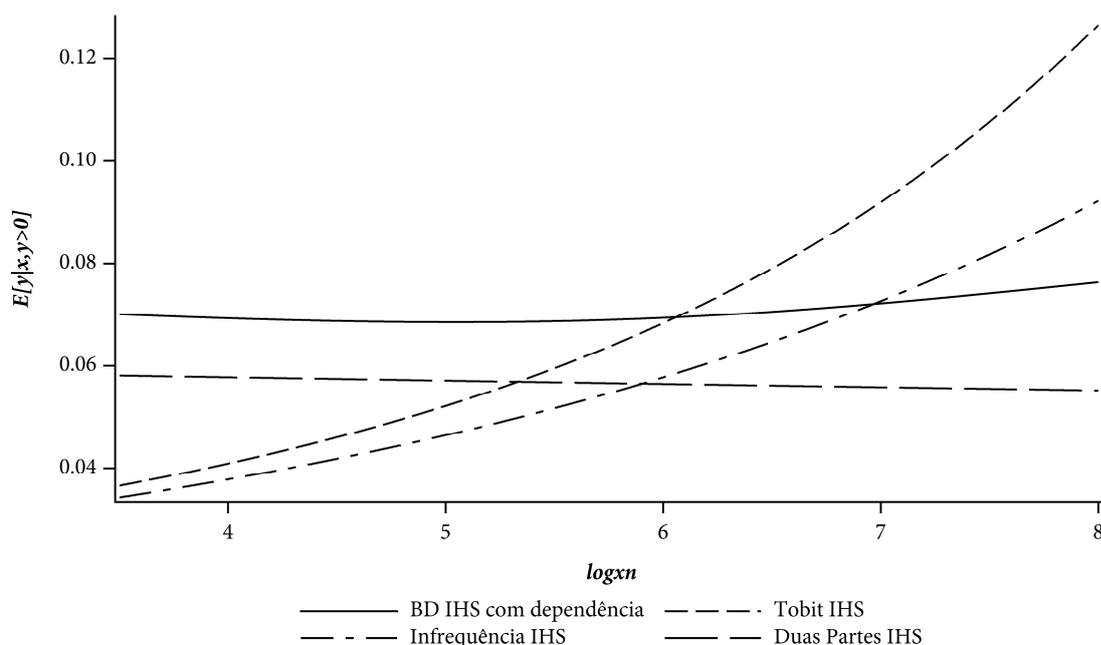


Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Quando se plota a esperança condicional do consumo, isto é, o valor esperado dos domicílios que possuem consumo positivo de alimentação fora, o quadro muda bastante (Gráfico 3.2). Neste caso, os valores esperados do modelo Tobit e do modelo de Infrequência

de Aquisição se comportam de maneira semelhante, com a fração da despesa iniciando-se próxima de 0,04 para valores baixos de  $\log x_n$  e subindo monotonicamente à medida que a despesa *per capita* do domicílio aumenta. A esperança condicional do modelo de Barreira Dupla também é crescente com o logaritmo da despesa domiciliar *per capita*, mas a curva inicia-se em um nível superior, por volta de 0,07, e apresenta uma inclinação muito menor que a dos modelos citados anteriormente. Por fim, a esperança condicional do modelo de Duas Partes apresenta uma curva levemente decrescente em relação ao logaritmo da despesa domiciliar *per capita*.

Gráfico 3.2 Esperança condicional da fração da despesa destinada à alimentação fora



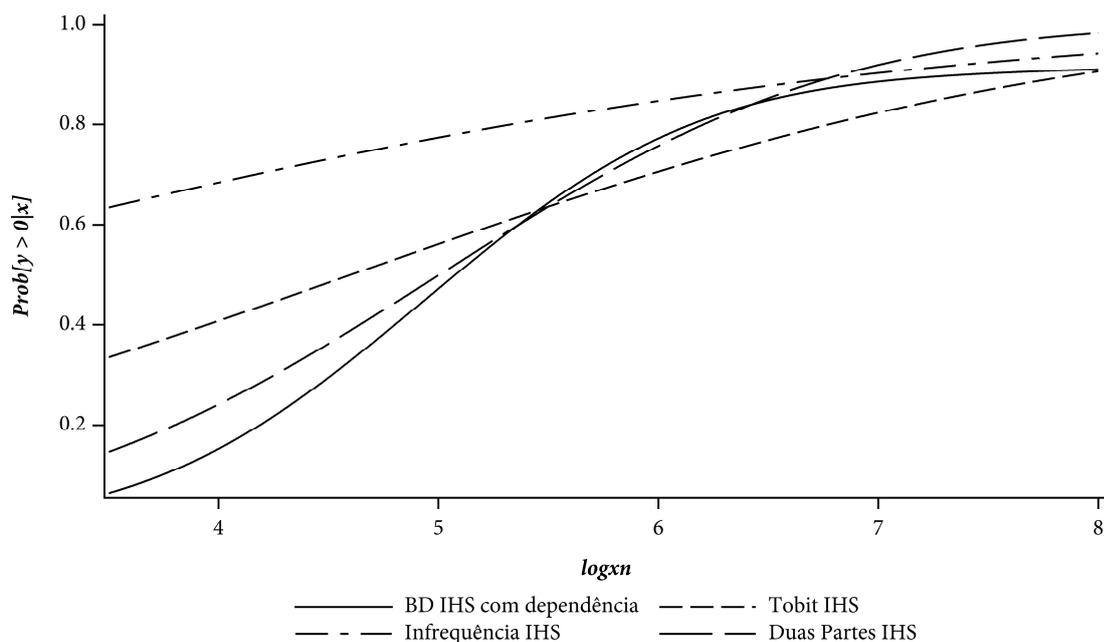
Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Novamente, estas diferenças entre os modelos ocorrem devido às hipóteses adotadas a respeito da natureza dos gastos nulos observados em pesquisas domiciliares. Estas hipóteses fazem com que o modelo de Barreira Dupla e o modelo de Duas Partes tenham mais semelhanças entre si do que em relação ao modelo Tobit e o de Infrequência de Aquisição. Isto porque tanto o modelo de Barreira Dupla quanto o modelo de Duas Partes assumem que os gastos nulos observados em pesquisas domiciliares podem ser resultado de uma decisão

consciente de não-participação (abstenção) do consumidor, pressuposto este que não é assumido nem pelo modelo Tobit nem pelo modelo de Infrequência de Aquisição.

Estas diferenças nos pressupostos são vistas na probabilidade de participação do domicílio no consumo de alimentos fora (Gráfico 3.3). Percebe-se por este gráfico que as curvas da probabilidade de consumo do modelo de Barreira Dupla e do modelo de Duas Partes são semelhantes, quase sobrepostas uma à outra. Ambas as curvas estimam uma probabilidade de participação substancialmente menor para os domicílios com despesa domiciliar *per capita* mais baixa quando comparados com os modelos Tobit e de Infrequência de Aquisição.

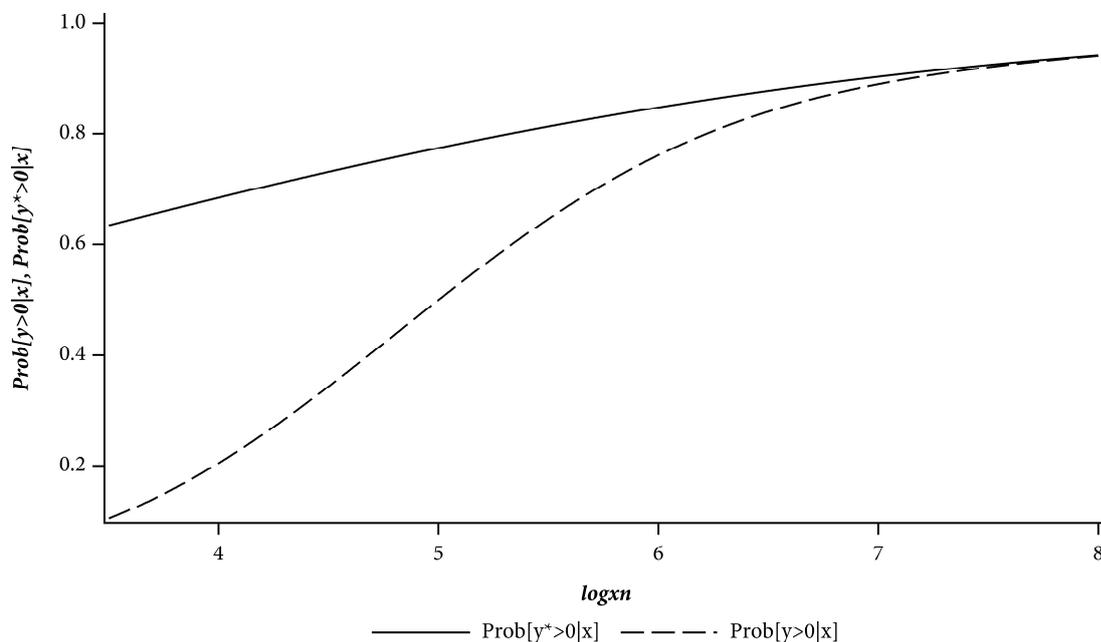
Gráfico 3.3 - Probabilidade de participação no mercado de alimentação fora do domicílio



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

O Gráfico 3.4 mostra novamente a probabilidade de consumo do modelo de Infrequência de Aquisição, mas desta vez comparada com a probabilidade da *despesa* com alimentação fora ser positiva.

Gráfico 3.4 - Probabilidade do consumo e da despesa ser positiva no modelo de Infrequência de Aquisição IHS



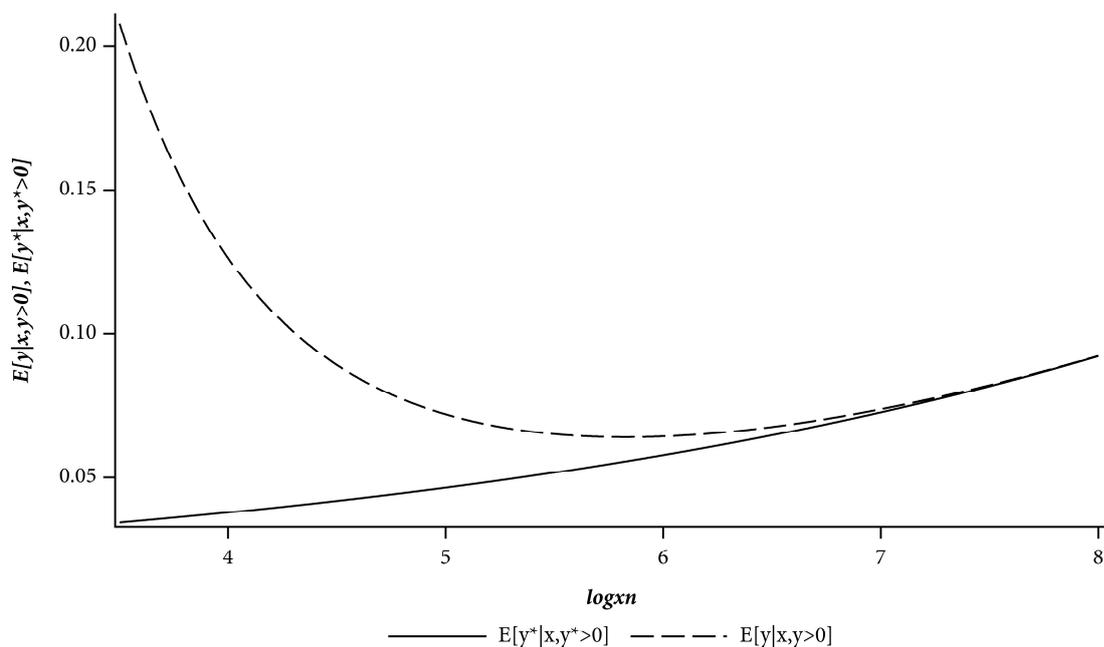
Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Note que apesar de ambas as probabilidades serem crescentes com o logaritmo da despesa domiciliar *per capita*, a curva de probabilidade referente à despesa ( $y_i$ ) é diferente da curva que se refere ao consumo de alimentos fora ( $y_i^*$ ). Para as famílias mais pobres, o modelo de Infrequência de Aquisição prevê uma probabilidade de participação do consumo bem maior do que a probabilidade de a despesa ser positiva. Isso significa que as famílias de baixa renda consomem alimentos fora do domicílio, mas a uma frequência menor do que aquela feita pelas famílias mais ricas.

O que este padrão implica para o valor esperado da despesa com alimentos fora do domicílio? O Gráfico 3.5 mostra a resposta. Quando o logaritmo da despesa domiciliar *per capita* é menor do que 5,95 (aproximadamente R\$ 380,00 domiciliar *per capita*), a despesa esperada dos domicílios que adquirem alimentos fora é decrescente em relação a  $\log x_n$  e muito superior ao consumo esperado dos domicílios que consomem quantidades positivas de alimentos fora. Ou seja, a esperança condicional da despesa possui uma relação em forma de “U” com o logaritmo da despesa domiciliar *per capita*. A partir de  $\log x_n = 5,95$  a esperança

condicional do consumo e da despesa tornam-se bastante próximas umas das outras. Esse resultado significa que as famílias de baixa renda adquirem alimentos fora com pouca frequência e, quando o fazem, gastam em média uma fração maior de suas despesas com a alimentação fora. Conforme discutido nas Seções 2.5.4 e 2.5.5 do Capítulo 2, essa conclusão decorre do pressuposto de que a relação  $y_i = y_i^* / \Phi(z_i' \alpha)$  ocorre deterministicamente para os domicílios que foram vistos adquirindo alimentos fora do domicílio.

Gráfico 3.5 - Esperança condicional do consumo e da despesa do modelo de Infrequência de Aquisição IHS



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

### 3.7 CONCLUSÃO

Neste capítulo analisaram-se os efeitos de variáveis socioeconômicas, demográficas e de localização geográfica das famílias sobre o consumo de alimentos fora do domicílio. Para tanto, foram estimados diversos modelos, cada um embutindo diferentes hipóteses sobre a natureza dos valores nulos de despesas encontrados na Pesquisa de Orçamentos Familiares. O foco principal do capítulo, no entanto, recaiu sobre os dois modelos mais gerais: o modelo de Barreira Dupla e o de Infrequência de Aquisição. No modelo de Barreira Dupla, assume-se

que os gastos nulos originam-se ou de uma solução de canto do problema do consumidor, ou de uma decisão de não-participação da família no mercado consumidor. No modelo de Infrequência de Aquisição, os gastos nulos podem originar-se tanto da solução de canto do problema do consumidor quanto de uma infrequência de aquisição, que impede que as despesas com o produto sejam captadas durante o período de referência da pesquisa.

Como não é possível saber *a priori* qual o modelo mais correto para cada tipo de produto analisado, testes estatísticos devem ser feitos para determinar o modelo mais adequado, dada as informações disponíveis. Para a determinação do modelo mais “provável”, estes dois modelos foram comparados entre si e também em relação a diversos outros modelos aninhados e não aninhados. No caso dos dois modelos principais analisados neste capítulo, no entanto, os testes estatísticos foram inconclusivos: enquanto o modelo de Barreira Dupla se mostrou superior ao de Infrequência de Aquisição quando a transformação IHS foi aplicada na variável latente de consumo, o modelo de Infrequência de Aquisição se mostrou estatisticamente mais “provável” do que o de Barreira Dupla quando a transformação IHS não foi aplicada.

Apesar dos diferentes aspectos teóricos embutidos nestes modelos, a análise dos efeitos marginais das variáveis sobre a probabilidade de consumo e sobre as esperanças condicional e incondicional do consumo de alimentação fora mostrou que os efeitos das variáveis são semelhantes em ambos os modelos. Em particular, o dispêndio domiciliar *per capita*, o número de moradores do domicílio e o fato de a pessoa de referência e seu cônjuge terem uma ocupação possuem efeitos positivos sobre a participação do mercado e sobre a fração da despesa destinada à alimentação fora em ambos os modelos. Por outro lado, a presença de crianças até 14 anos de idade e de um cônjuge entre os moradores do domicílio diminuem a probabilidade de participação e o montante consumido de alimentos fora do domicílio.

As maiores diferenças entre os modelos ocorreram no peso dado a cada um dos componentes da elasticidade do logaritmo da despesa domiciliar *per capita* em sua constituição, a saber, a elasticidade condicional do consumo e a elasticidade da probabilidade de participação. No modelo de Barreira Dupla, a maior contribuição para a elasticidade total

do logaritmo da despesa domiciliar *per capita* veio da incorporação de novos consumidores – expressa pela elasticidade da probabilidade de participação –, e não do aumento do consumo dos domicílios que já adquiriam alimentação fora. No modelo de Infrequência de Aquisição, por outro lado, a maior contribuição para a elasticidade total decorreu do aumento do consumo daqueles domicílios que já possuíam um consumo positivo de alimentos fora.

A análise dos valores esperados e das probabilidades de consumo e de aquisição feita na Seção 3.6.4 mostrou que os diferentes pressupostos adotados pelo modelo de Barreira Dupla e pelo modelo de Infrequência de Aquisição implicam valores esperados e probabilidades de consumo muito diferentes. Portanto, conclui-se a escolha do modelo mais apropriado para um determinado produto não deve se basear unicamente nos testes estatísticos desenhados para comparar estes modelos entre si, pois muitas vezes os modelos mais gerais não são separadamente identificados a partir dos dados. Nesse caso, o conhecimento *a priori* que o pesquisador tem sobre as características do bem analisado deve ser incluído como uma hipótese identificadora. Para a alimentação fora do domicílio, por exemplo, assumindo-se que em áreas urbanas a oferta e a variedade de serviços de alimentação é suficiente para atender a demanda dos domicílios, conclui-se naturalmente que os principais motivos para a existência de valores nulos em pesquisas de orçamentos familiares decorre ou da infrequência de aquisição ou porque os domicílios não desejam adquirir alimentos fora aos preços e à renda corrente.

## **PARTE II**

### **ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA**



## **4 EFEITOS DAS ESCALAS DE EQUIVALÊNCIAS SOBRE AS MEDIDAS DE DESIGUALDADE E POBREZA**

### **4.1 INTRODUÇÃO**

Na literatura sobre pobreza e desigualdade, utiliza-se em geral a renda domiciliar *per capita* como medida de comparação do bem-estar de domicílios com diferentes composições demográficas. No entanto, esta medida de bem-estar contraria as ideias geralmente aceitas que uma criança custa menos do que um adulto e que duas pessoas morando juntas podem viver com menos recursos do que duas pessoas separadas a um mesmo nível de bem-estar. Uma forma de incorporar estes fatores pode ser feita com a utilização de um índice que converte as rendas nominais de domicílios com diferentes composições demográficas em uma medida comparável de bem-estar. Este índice é chamado de escala de equivalência e incorpora a economia de escala no consumo domiciliar e as diferenças de necessidades existentes entre indivíduos de idades e sexos diferentes.

Embora o conceito das escalas de equivalência seja intuitivo, seu uso nos estudos de pobreza e desigualdade de renda ainda é pouco difundido, ao menos no Brasil. Um dos motivos é o desafio de se determinar o valor que elas devem assumir para uma dada população. Conforme será visto nesta parte da tese (principalmente Capítulos 5 e 6), existe uma variedade de modelos e métodos para se determinar estes valores, e a adoção de métodos distintos pode gerar conclusões conflitantes sobre o nível de bem-estar dos domicílios.

Por esse motivo, este capítulo tem por objetivo analisar a sensibilidade das medidas de desigualdade e pobreza às alterações nos parâmetros das escalas de equivalência. Mais especificamente, procura-se analisar como as medidas de desigualdade e pobreza – definidas sobre uma distribuição de renda equivalente (e, portanto, condicional em alguma medida de escala de equivalência) – se alteram quando os parâmetros que compõem as escalas de equivalências se modificam. Neste capítulo, portanto, não haverá preocupação de estimar o

valor que as escalas de equivalência assumem. Não serão examinados os problemas teóricos e as possibilidades relacionadas com a determinação das escalas de equivalência. A principal contribuição é mostrar como as medidas de desigualdade e pobreza são sensíveis à escala utilizada.

## 4.2 RESENHA DA LITERATURA

A literatura de bem-estar desenvolveu uma variedade de índices para analisar os níveis de pobreza e desigualdade de uma população. Tais índices são calculados em geral sobre as informações de renda ou de despesa, dado que estas medidas são os correspondentes empíricos que melhor representam o ordenamento de bem-estar dos indivíduos. Ocorre que os dados de consumo e rendimentos estão normalmente disponíveis no nível domiciliar, enquanto a pobreza e a desigualdade são definidas para o nível individual. Nesse processo, diferenças de necessidades entre indivíduos ou são ignoradas ou assume-se que as rendas ou despesas foram transformadas em uma medida comparável com o uso de uma escala de equivalência. Ao ajustar o consumo de cada domicílio por sua escala de equivalência, a distribuição da renda observada entre domicílios heterogêneos é convertida em uma distribuição de renda equivalente entre indivíduos homogêneos.

A questão então é a escolha da escala de equivalência. Diante da falta de alternativas consensuais, a maior parte dos estudos opta por utilizar a renda domiciliar *per capita* como medida de bem-estar dos indivíduos. Na prática, no entanto, isto implica assumir que os recursos do domicílio são distribuídos igualmente entre seus membros, independente do sexo, da idade e do compartilhamento de bens públicos intradomiciliares. Ocorre que esta escolha representa apenas um caso particular dentre um conjunto infinito de possibilidades, e não há razões para assumir que este seja o valor mais adequado de todo o conjunto de alternativas disponíveis.

Conforme será visto adiante, toda análise de desigualdade e pobreza pressupõe um julgamento normativo a respeito do valor relativo que o nível da renda e a sua desigualdade possuem sobre o bem-estar de uma dada sociedade. Só a partir deste julgamento (e de sua

função de bem-estar subjacente) é que podemos classificar uma determinada distribuição como melhor ou pior que outra. Coulter, Cowell e Jenkins (1992) argumentam que as análises distributivas devem também tornar explícitos os julgamentos sociais sobre as diferenças de necessidades entre indivíduos. Daí resulta a importância de analisar o impacto desses julgamentos sobre os índices de desigualdade e pobreza, e em como esses impactos dependem da aversão à pobreza e à desigualdade de uma dada sociedade. Esta é a motivação deste e de diversos outros estudos que se debruçaram sobre o tema (Aaberge; Melby, 1998; Buhmann *et al.*, 1988; Burkhauser; Smeeding; Merz, 1996; Coulter; Cowell; Jenkins, 1992; Creedy; Sleeman, 2004; Jenkins; Cowell, 1994).

Exceto por Aaberge e Melby (1998), todos estes estudos focam em escalas de equivalência que são independentes da renda do domicílio de referência. Resultados baseados em avaliações subjetivas da renda indicam, no entanto, que o efeito de um aumento do número de membros do domicílio sobre as escalas de equivalências é maior quando o domicílio é pobre do que quando ele é rico (van Praag; van der Sar, 1988). Isto ocorre por que os domicílios pobres possuem necessidades maiores de bens privados básicos como vestuário ou alimentos, de forma que a incorporação de mais um membro ao domicílio representa um incremento quase que proporcional nas necessidades de consumo do domicílio. As escalas de equivalência paramétricas convencionais ignoram esta relação. Ao analisar a questão, Conniffe (1992) mostra que as escalas de equivalência não são constantes em relação à renda, e conclui que a prática corrente deve ser alterada. Neste trabalho, no entanto, serão utilizadas apenas escalas de equivalência que independem da renda, dado que assim se pode restringir o número de parâmetros a serem analisados e, conseqüentemente, tornar mais simples a análise visual dos efeitos das escalas de equivalência sobre as medidas de desigualdade e pobreza.

Em resumo, as escalas de equivalência, ao proporcionar uma medida de comparação do bem-estar entre indivíduos, possuem um papel essencial na avaliação do bem-estar social (Cowell, 2000). A falha em estabelecer a ligação entre a renda nominal do domicílio e a renda equivalente do indivíduo pode gerar conclusões equivocadas. Um exemplo interessante é o trabalho de Glewwe (1991), no qual o autor mostra que transferências de renda nominais de

domicílios pobres para domicílios ricos pode diminuir a desigualdade medida pela renda equivalente, dada a composição demográfica distinta destes domicílios.

#### 4.2.1 Escalas de equivalência paramétricas

Uma forma de analisar a sensibilidade das medidas de desigualdade e pobreza à escolha da escala de equivalência é feita a partir da utilização da abordagem paramétrica. A abordagem paramétrica consiste em definir uma forma funcional arbitrária para as escalas de equivalências e atribuir a ela valores de parâmetros exógenos, geralmente extraídos de algum tipo de metanálise de trabalhos empíricos ou a partir da percepção do pesquisador dos valores que ele considera adequados. O problema é que sua utilização depende justamente de estudos prévios obtidos a partir de outras abordagens, e os parâmetros obtidos a partir dessas metanálises não discriminam diferentes metodologias, que representam não só diferentes formas de mensurar a mesma coisa, mas também diferentes concepções do bem-estar do domicílio. Por outro lado, a abordagem paramétrica possui a vantagem de que as formas funcionais mencionadas se ajustam bem às escalas de equivalências estimadas para diversos países, e a utilização de uma forma funcional comum é importante para garantir certa comparabilidade internacional (Buhmann *et al.*, 1988).

As escalas de equivalência são compostas por dois componentes, não necessariamente separáveis. O primeiro componente é chamado *unidade de consumo equivalente*, e representa as diferenças de necessidades dos membros do domicílio em relação a um membro de comparação (geralmente um adulto). Ele é baseado na noção intuitiva de que uma criança possui necessidades menores de consumo do que um adulto. O segundo componente, por sua vez, equivale à *economia de escala* e deriva do fato de que alguns bens consumidos no domicílio são públicos e, portanto, seu preço diminui à medida que aumenta o número de moradores.

Diversas formas funcionais foram criadas para especificar as escalas paramétricas. Uma forma funcional bastante utilizada na literatura se encontra em Buhmann *et al.* (1988) e é dada por:

$$m = n^\theta \quad (4.1)$$

onde  $m$  é o número de pessoas por equivalentes,  $n$  é o número de membros do domicílio e  $\theta \in [0,1]$  é um parâmetro que representa a economia de escala de um membro adicional<sup>19</sup>. Buhmann *et al.* (1988) mostram que esta especificação simples proporciona uma boa aproximação para uma grande gama de escalas de equivalências estimadas em estudos empíricos nos países desenvolvidos. Se  $\theta = 0$ , a economia de escala do domicílio é absoluta, e dois domicílios com a mesma renda domiciliar *total* usufruirão o mesmo nível de bem-estar, independentemente do número de moradores. Se  $\theta = 1$ , então não há economias de escala, e a renda domiciliar *per capita* se torna o indicador relevante de bem-estar dos membros do domicílio. Estes dois valores são vistos como limites para o parâmetro ideal.

Outras formas funcionais têm sido utilizadas na literatura. A OECD (1982), por exemplo, utiliza a função

$$m = 1 + 0,7(A - 1) + 0,5C \quad (4.2)$$

onde  $A$  é o número de adultos no domicílio e  $C$  é o número de crianças. Por esta especificação, o primeiro adulto do domicílio possui peso 1, cada adulto adicional possui peso 0,7 e as crianças possuem peso 0,5. Esta escala de equivalência foi utilizada por muito tempo em estudos na Europa, até vir a ser substituída pela escala OECD modificada  $m = 1 + 0,5(A - 1) + 0,3C$ , proposta primeiramente por Hagenaars *et al.* (1994).

Banks e Johnson (1994) e Jenkins e Cowell (1994) sugerem a utilização de

$$m = (A + \eta C)^\theta \quad (4.3)$$

onde  $A$  e  $C$  possuem o mesmo significado de antes. Nesta especificação,  $\eta \in [0,1]$  representa o peso da criança em relação a um adulto, enquanto  $\theta \in [0,1]$  é o parâmetro que representa a economia de escala do domicílio. Citro e Michael (1995) sugerem a utilização desta forma funcional na construção da linha de pobreza dos Estados Unidos, pois assim o custo marginal

---

<sup>19</sup> Depois de Buhmann *et al.* (1988), diversos outros autores passaram a utilizar este tipo de escala de equivalência, dentre eles Coulter *et al.* (1992), Banks e Johnson (1994) e Jenkins e Cowell (1994).

de um membro adicional do domicílio irá depender tanto do tamanho<sup>20</sup> quanto da composição demográfica prévia do domicílio. Outra vantagem desta especificação é que uma mudança no peso atribuído à criança pode mudar o ordenamento de domicílios que possuem a mesma quantidade de indivíduos, mas diferentes proporções de adultos e crianças.

Definida a escala de equivalência, o passo seguinte é converter a renda monetária total do domicílio em uma renda por adulto equivalente. Seja  $A_h$  e  $C_h$  o número de adultos e crianças respectivo de um domicílio  $h$ . Utilizando esta definição, o tamanho do domicílio  $h$  em termos de um domicílio padrão equivalente será dado por

$$m_h = m(A_h, C_h) \quad (4.4)$$

onde  $m(\cdot)$  é a função que converte o número de membros e a composição demográfica do domicílio em uma unidade demográfica comum.

Feito isto, a renda monetária total do domicílio ( $Y_h$ ) pode ser transformada em renda individual equivalente ( $y_i$ ) através da divisão

$$y_i = \frac{Y_h}{m_h} \quad (4.5)$$

A equação (4.5) transforma a renda domiciliar de domicílios heterogêneos em uma renda individual de  $m_h$  indivíduos homogêneos. Desta forma, um domicílio com renda  $y_i$  composto por apenas um adulto possui o mesmo nível de bem-estar que os membros de um domicílio com  $A_h$  adultos e  $C_h$  crianças e renda domiciliar  $y_i m_h$ .

Note que como a escala de equivalência é uma medida relativa e, portanto, definida em relação a um domicílio de referência  $r$ , para a forma funcional (4.3) a escala de equivalência será dada por

$$m_h = \frac{(A_h + \eta C_h)^\theta}{(A_r + \eta C_r)^\theta} \quad (4.6)$$

---

<sup>20</sup> Ao longo deste e dos próximos capítulos, a expressão “tamanho do domicílio” será utilizada unicamente como sinônimo para “número de moradores do domicílio”.

Isto significa que a escala de equivalência  $m_h = (A_h + \eta C_h)^\theta$  utilizada nesse capítulo e nos trabalhos empíricos citados acima corresponde à escala de equivalência em relação a um domicílio composto por um único adulto e  $m_h$  corresponderá ao número de adultos equivalentes do domicílio, compensado pelo efeito da economia de escala do consumo.

Deaton e Paxton (1997) sugerem que se trabalhe com uma pequena modificação de (4.6), de forma a manter a maior comparabilidade possível com a medida mais conhecida da renda domiciliar *per capita*

$$m_h = \frac{(A_h + \eta C_h)^\theta}{(A_r + \eta C_r)^\theta} (A_r + C_r) \quad (4.7)$$

Neste caso, a escala de equivalência do domicílio de referência corresponderá ao número de membros deste domicílio, e a renda equivalente dos membros do domicílio de referência será normalizada para corresponder à renda domiciliar *per capita*.

#### 4.2.2 Medidas de desigualdade

Diversos indicadores foram construídos para mensurar a desigualdade da distribuição de uma variável aleatória<sup>21</sup>. Por ser um conceito abstrato, que se refere às diferenças de bem-estar entre indivíduos, seu cálculo é realizado a partir de índices que satisfazem um determinado conjunto de axiomas. Segundo Fields (2002), são estes axiomas que em última instância compõem a própria definição de desigualdade. O principal dos axiomas é conhecido como princípio da transferência, ou condição de Pigou-Dalton devido ao trabalho de Pigou (1912) e Dalton (1920). Este princípio diz que se transferirmos a renda de uma pessoa relativamente mais rica para uma pessoa relativamente mais pobre – sem alterar o ordenamento destas pessoas na distribuição de renda –, então o valor do índice de desigualdade depois da transferência deve ser menor que aquele vigente antes da transferência. Outros axiomas são: *a)* o da identidade anônima, que estabelece que a renda é a única informação relevante para o cálculo do índice, e não quem a recebe; *b)* o axioma da

---

<sup>21</sup> No contexto desse capítulo, para medir a desigualdade da renda ou do consumo entre a população.

independência de escala, que estabelece que o índice de desigualdade não deve se alterar se todas as rendas forem multiplicadas pelo mesmo escalar positivo; e c) o axioma da homogeneidade da população, que estabelece que se todos os indivíduos de uma população forem replicados um número positivo de vezes (por exemplo, se todas as pessoas fossem clonadas), a medida de desigualdade não irá se alterar (Fields, 2002).

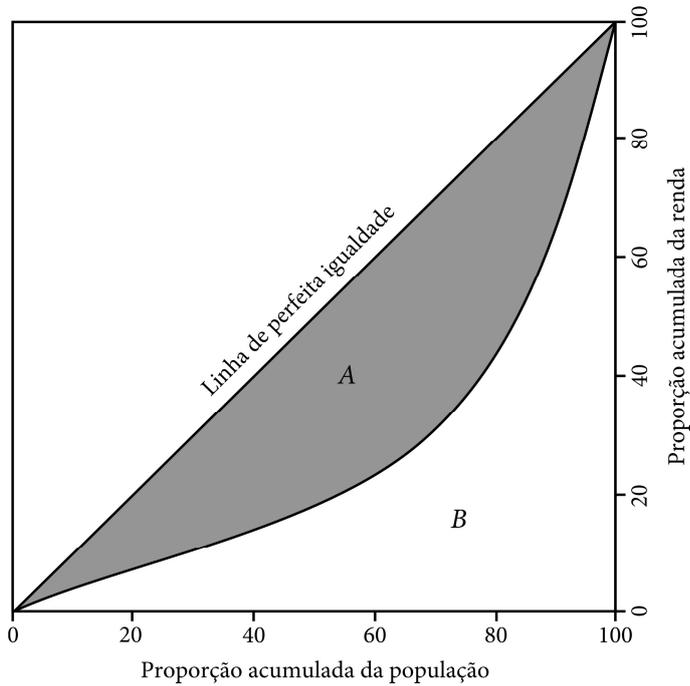
Além dos axiomas, os índices de desigualdade possuem uma estreita relação com a chamada curva de Lorenz, devido a Lorenz (1905). A curva de Lorenz é uma descrição gráfica da distribuição de renda, construída da seguinte forma. A população (de tamanho  $n$ ) é ordenada da menor para a maior renda. No eixo horizontal, coloca-se o percentual acumulado da população (ordenado em ordem crescente de renda). No eixo vertical, coloca-se o percentual acumulado da renda recebida por cada percentual acumulado da população. O gráfico do percentual acumulado da renda contra o percentual acumulado da população é a curva de Lorenz. Matematicamente, dada uma população ordenada por renda  $y_1 \leq \dots \leq y_n$ , a curva de Lorenz é dada por (Lambert, 1993):

$$L\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{i=1}^j \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.8)$$

onde  $j/n$  representa o percentual acumulado da população ordenada pela renda, e o somatório representa o percentual acumulado da renda.

Como a população é acumulada do mais pobre para o mais rico, a renda do indivíduo  $j$  será sempre (fracamente) maior do que a renda do indivíduo  $j-1$ , fazendo com que a curva de Lorenz tenha uma forma convexa (cf. Figura 4.1). No caso especial em que todos os indivíduos recebem a mesma renda, a curva seria representada por uma linha com ângulo de 45 graus saindo da origem. Esta linha é denominada de linha de perfeita igualdade.

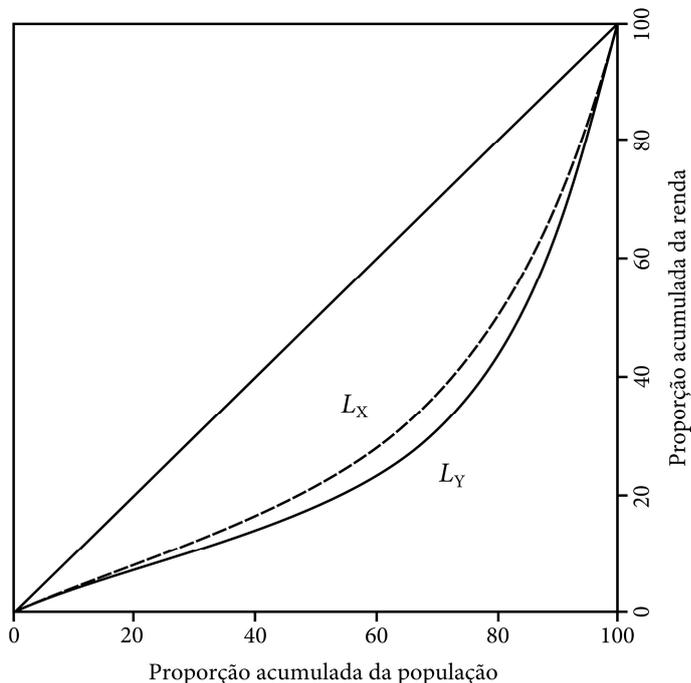
Figura 4.1 - Curva de Lorenz de uma distribuição hipotética



Fonte: Elaboração própria.

Desta definição, percebe-se que se a curva de Lorenz  $L_X$  de uma distribuição  $X$  se situa acima da curva de Lorenz  $L_Y$  da distribuição  $Y$ , então a distribuição de renda  $X$  é mais igualitária que  $Y$  (cf. Figura 4.2). Neste caso, diz-se que a distribuição  $X$  domina  $Y$  pelo critério de Lorenz. Para o caso em que as duas curvas se cruzam, não é possível estabelecer uma relação de Lorenz. Isto significa que alguns índices de desigualdade podem considerar a distribuição  $X$  mais igualitária enquanto outros podem considerá-la menos igualitária, a depender do peso atribuído pelo índice às rendas relativas nas distintas partes da distribuição.

Figura 4.2 - Curvas de Lorenz de duas distribuições distintas



Fonte: Elaboração própria.

Note que pela forma como são construídas as curvas de Lorenz, existe uma relação muito próxima entre o critério de dominância de Lorenz e o critério estabelecido pelos axiomas mencionados acima. De fato, Fields (2002) mostra que ambos são equivalentes, isto é, quando se ordena duas distribuições de renda a partir do critério de dominância de Lorenz, implicitamente os axiomas mencionados acima estão sendo assumidos. Em outras palavras, se o pesquisador não aceita algum desses axiomas, então ele não deve utilizar o critério de dominância de Lorenz para comparar diferentes distribuições de renda.

O critério de dominância de Lorenz permite estabelecer um ordenamento de duas distribuições quando uma das curvas se situa acima da outra em todo o domínio da população. Mas o que dizer quando as curvas de Lorenz se cruzam? Neste caso, uma abordagem baseada na teoria do bem-estar social nos fornece respostas mais transparentes.

Quando economistas emitem julgamentos a respeito do grau de desigualdade de uma distribuição de renda, estes julgamentos são realizados em geral a favor de uma distribuição mais igualitária. Ao fazerem isto, assumem-se pressupostos – frequentemente implícitos – a respeito do bem-estar que um determinado nível de renda e sua distribuição geram para a

sociedade. Infelizmente, as medidas de desigualdade mais usuais como o coeficiente de Gini e o coeficiente de variação são apenas ferramentas estatísticas criadas para medir a dispersão relativa de uma distribuição de renda. Elas não explicitam os julgamentos normativos necessários para descrever uma distribuição como “boa” ou “ruim” em relação a outra em termos do bem-estar que ela gera para a sociedade (Atkinson, 1970). Por conta dessa característica, Atkinson (1970) mostra que tais medidas assumem implicitamente funções de bem-estar que em sua grande maioria possuem propriedades que dificilmente seriam geradas pelos valores sociais de uma população. Uma forma de tornar explícitos estes julgamentos normativos é estabelecer uma função de bem-estar social e, a partir dela, derivar uma medida de desigualdade que descreva o quanto a atual distribuição de renda está distante daquela que proporciona o máximo de bem-estar para a renda total que ela representa.

Como coloca Deaton (1997, p. 137), uma das vantagens de se partir da função de bem-estar para medir a desigualdade é que assim é possível fugir do erro de considerar as próprias medidas de desigualdades como medidas de bem-estar. Nos casos em que todos os indivíduos estão tendo um aumento de renda, mas este aumento é proporcionalmente maior para os indivíduos mais ricos, todos os indivíduos estarão melhores, mas a distribuição estará mais desigual. Se apenas a medida de desigualdade for observada, pode-se concluir que houve uma piora no bem-estar da sociedade, quando na verdade ocorreu o contrário.

Para definir uma medida de desigualdade a partir de uma função de bem-estar, deve-se começar assumindo que existe uma relação entre renda e bem-estar<sup>22</sup>. Seja

$$W = V(y_1, \dots, y_n) \quad (4.9)$$

uma função de bem-estar, onde  $y_i$  é a renda do  $i$ -ésimo indivíduo da sociedade. A função de bem-estar deve ser vista como um agregador que representa o julgamento da sociedade sobre

---

<sup>22</sup> A discussão sobre funções de bem-estar social feita neste capítulo serve apenas para ilustrar a relação entre medidas de desigualdade e os julgamentos normativos a respeito da importância que uma sociedade atribui a transferências que ocorrem em diferentes partes da distribuição de renda. Para uma discussão mais aprofundada sobre o assunto, cf. Cowell (2011).

o nível e a distribuição de recursos desta sociedade. Assuma que esta função satisfaça as seguintes propriedades:

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = \frac{\partial V}{\partial y_j}, \quad \text{para } y_i = y_j \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2} < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

Esta forma de bem-estar pode ser especificada por um observador igualitário que julga que a sociedade está melhor, *ceteris paribus*, quando os recursos estão equalizados entre os indivíduos (propriedade da *aversão à desigualdade*, decorrente de (4.12)). Alternativamente, pode-se simplesmente interpretar a condição (4.12) no sentido utilitarista de que os indivíduos possuem uma capacidade marginal decrescente de aproveitar uma renda adicional. Quando a função  $V$  é crescente nos seus argumentos, o bem-estar é maior sempre que um indivíduo estiver melhor que antes e nenhum outro indivíduo estiver em situação pior (melhora de Pareto).

Suponha que a sociedade no agregado receba renda  $Y = \sum_{i=1}^n y_i$ . É fácil perceber que a função  $V$  tem o seu máximo para este montante fixo de renda quando

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} = \frac{\partial V}{\partial y_2} = \dots = \frac{\partial V}{\partial y_n} = \lambda > 0 \quad (4.13)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange. Da condição (4.11), segue que este máximo ocorrerá quando cada indivíduo na sociedade receber a mesma renda  $\mu = Y/n$ .

Esta preferência pela equidade será satisfeita sempre que função de bem-estar tiver retornos marginais decrescentes para cada  $y_i$ , isto é, sempre que ela for côncava. A convexidade implica que uma função de bem-estar irá aumentar se transferirmos uma renda de uma pessoa rica para uma pessoa mais pobre, contanto que esta transferência não seja grande o suficiente para reverter a posição relativa destes dois indivíduos na distribuição de

renda. Note que isto equivale ao princípio da transferência de Pigou-Dalton mencionado anteriormente.

Conforme será visto adiante, pode-se também interpretar a mensuração da pobreza em termos de sua contribuição para o bem-estar social, e isto tipicamente requer uma função de bem-estar insensível a aumentos no bem-estar dos indivíduos não pobres. Este caso pode ser acomodado se adotarmos uma versão fraca da condição de Pareto, isto é, se assumirmos que  $V$  é não-decrescente em cada um de seus argumentos.

Suponha que a função  $V$  seja homogênea de grau 1, de forma que um aumento proporcional na renda de todos os indivíduos aumenta o valor do bem-estar social  $W$  na mesma proporção. Então pode-se escrever (Deaton, 1997):

$$W = \mu V\left(\frac{y_1}{\mu}, \dots, \frac{y_n}{\mu}\right) \quad (4.14)$$

onde  $\mu$  é a renda média. A equação (4.14) acima possibilita separar o efeito de aumentos da renda média dos efeitos de mudanças na sua distribuição, permitindo decompor mudanças no bem-estar social em mudanças na média e mudanças em uma medida de desigualdade adequadamente definida. Finalmente, escolhem-se unidades de medida de tal forma que  $V(1, \dots, 1) = 1$ , isto é, se todo mundo tiver a mesma renda (e, portanto, tivermos a igualdade perfeita), o valor da função de bem-estar será igual ao valor da renda média,  $W = \mu$ . Esse é o valor máximo da função de bem-estar, dada a normalização empregada.

Como a função de bem-estar é igual à renda média apenas quando a renda total é distribuída igualmente entre os indivíduos, então, pelas propriedades definidas acima, o valor da função de bem-estar não poderá ser maior que  $\mu$  para uma alocação desigual da renda. Desta forma, pode-se escrever (4.14) como

$$W = \mu(1 - I) \quad (4.15)$$

onde  $I$  representa o “custo” da desigualdade, ou o montante que o bem-estar da sociedade diminui em relação a uma sociedade igualitária (Deaton, 1997, p. 136). Construído desta forma,  $I$  é uma medida de desigualdade que assume valor zero quando a renda é perfeitamente distribuída e assume valor 1 quando toda a renda se concentra em apenas um indivíduo. O

valor de  $I$  aumenta quanto mais desigual for a distribuição da renda de uma sociedade, dado o julgamento de valor explícito na construção da função de bem-estar. Dada esta abordagem, pode-se criar medidas de desigualdade a partir da definição de uma função de bem-estar, ou então pode-se partir de uma medida estatística de dispersão e verificar se ela é consistente com uma função de bem-estar da forma (4.15). O índice de Atkinson é uma das poucas medidas de desigualdade construídas explicitamente para representar uma função de bem-estar social subjacente (Cowell, 2011).

#### 4.2.2.1 Índice de Atkinson

O índice de Atkinson mede a fração da renda total que poderia ser sacrificada sem que haja perdas para o bem-estar social se o restante da renda fosse dividido igualmente<sup>23</sup>. Em outras palavras, dada uma distribuição de renda com índice de Atkinson igual a  $A$ , o mesmo nível de bem-estar poderia ser obtido com  $100(1 - A)\%$  da renda total se a distribuição fosse igualitária (Hoffmann, 1998, p. 154). A fórmula do índice de Atkinson é dada por:

$$A(\varepsilon) = 1 - \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad \text{para } \varepsilon > 0 \text{ e } \varepsilon \neq 1 \quad (4.16)$$

Para o caso especial em que  $\varepsilon = 1$ , temos

$$A(1) = 1 - \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{y_i}{\mu} \right) \right) = 1 - \prod_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.17)$$

onde o parâmetro  $\varepsilon$  indica o grau de aversão à desigualdade. O índice possui valor zero se a distribuição é perfeitamente igualitária e valor 1 se toda a renda está concentrada em apenas um indivíduo.

A formulação do índice de Atkinson origina-se da função de bem-estar social aditiva

---

<sup>23</sup> Essa interpretação está diretamente ligada à fórmula da função de bem-estar, que assume um parâmetro de aversão à desigualdade constante (equações (4.18) e (4.19)).

$$W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}, \quad \text{para } \varepsilon > 0 \text{ e } \varepsilon \neq 1 \quad (4.18)$$

$$\ln W = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln y_i, \quad \varepsilon = 1 \quad (4.19)$$

onde o parâmetro  $\varepsilon > 0$  indica o grau de aversão à desigualdade, ou o grau no qual a função de bem-estar substitui mudanças na renda média por mudanças na igualdade da distribuição. Esta função de bem-estar possui a propriedade de que a razão da utilidade social marginal de dois indivíduos é dada por

$$\frac{\partial W / \partial y_i}{\partial W / \partial y_j} = \left( \frac{y_i}{y_j} \right)^{-\varepsilon} \quad (4.20)$$

Assim, quando  $\varepsilon = 0$ , existe uma indiferença em relação à desigualdade, ou seja, o bem-estar adicional decorrente de um aumento na renda de uma pessoa pobre é igual ao bem-estar adicional decorrente do mesmo aumento na renda de uma pessoa rica. À medida que  $\varepsilon$  tende a infinito, a função de bem-estar social converge para a renda do indivíduo mais pobre. Neste caso, diz-se que a função de bem-estar é do tipo Rawlsiana, pois o seu objetivo é maximizar o nível de utilidade social do indivíduo mais pobre.

#### 4.2.2.2 Coeficiente de Gini

O coeficiente de Gini é uma das medidas de desigualdade mais populares. Seu valor corresponde à área situada entre a curva de Lorenz e a linha de perfeita igualdade como uma fração da área total abaixo da linha de perfeita igualdade (áreas  $A$  e  $A + B$  respectivamente da Figura 4.1)

$$\begin{aligned} G &= \frac{A}{A+B} \\ &= 2A \quad (\text{pois } A+B = \frac{1}{2}) \\ &= 1-2B \end{aligned} \quad (4.21)$$

Note que como  $B$  representa a área abaixo da curva de Lorenz, pode-se utilizar a fórmula desta última para ter uma expressão matemática final do coeficiente de Gini (Fields, 2002)

$$G = \frac{2}{n^2 \mu} \sum_{i=1}^n i y_i - \frac{n+1}{n} \quad (4.22)$$

onde  $n$  representa a população total,  $\mu$  é a renda média,  $i$  representa a  $i$ -ésima pessoa (ordenada de forma crescente com a renda) e  $y_i$  a renda domiciliar apropriada pela  $i$ -ésima pessoa. Se todos os indivíduos tiverem a mesma renda, o valor do Gini será zero; no caso de um único indivíduo deter toda a renda, então o valor do Gini será um. O coeficiente de Gini é mais sensível a mudanças na desigualdade em torno da mediana da distribuição, e menos sensível a mudanças na desigualdade que ocorrem no topo ou na base da distribuição (Hoffmann, 2000).

#### 4.2.2.3 Índice de Entropia Generalizada

Outra família de índices de desigualdade é a classe denominada de Entropia Generalizada. Sua fórmula é dada por:

$$E(\alpha) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \left( \frac{y_i}{\mu} \right)^\alpha \right], \quad \alpha \notin \{0,1\} \quad (4.23)$$

Pertencem a esta classe o desvio logarítmico médio:

$$E(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{\mu}{y_i} \right) \quad (4.24)$$

E a medida de entropia de Theil:

$$E(1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\mu} \ln \left( \frac{y_i}{\mu} \right) \quad (4.25)$$

Diferentes valores de  $\alpha$  correspondem a diferenças na sensibilidade da distribuição. Quanto maior e mais positivo o valor de  $\alpha$ , mais sensível a medida de Entropia Generalizada será às diferenças de rendas do topo da distribuição; por outro lado, quanto mais negativo  $\alpha$ , mais sensível será a Entropia Generalizada a diferenças de renda na base da distribuição.

Para cada membro da família de medidas de desigualdade de Atkinson, existe um membro equivalente da família de índices da Entropia Generalizada. Segundo Lambert (1993), para cada valor de  $\varepsilon$  do índice de Atkinson existe um índice de Entropia Generalizada

com  $\alpha = 1 - \varepsilon$  que ordena um par de distribuições de renda de forma igual, mas em uma escala diferente. Ou seja, o índice de Atkinson pode ser obtido por meio de um índice de Entropia Generalizada através da equação:

$$A(\varepsilon) = 1 - \left[ \varepsilon(\varepsilon - 1)E(1 - \varepsilon) + 1 \right]^{1/(1-\varepsilon)} \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Medidas de pobreza

Neste trabalho, define-se pobreza como a incapacidade de um indivíduo ou um domicílio de auferir recursos suficientes para atingir um determinado nível de bem-estar. Um número de axiomas deve ser satisfeito para que um índice de pobreza tenha propriedades desejáveis (Sen, 1976). Entre os mais importantes estão o axioma da monotonicidade, da transferência e o da focalização. O axioma da focalização estabelece que um índice de pobreza deve ser insensível às rendas superiores à linha de pobreza. O axioma da monotonicidade estabelece que se a renda de um indivíduo pobre aumenta, então o indicador de pobreza deve diminuir. Por fim, o axioma da transferência estabelece que uma transferência de renda de um indivíduo pobre para qualquer outro relativamente mais rico deve aumentar a medida de pobreza e vice-versa.

Para mensurar a pobreza, precisa-se primeiro definir uma linha de pobreza  $z$ , isto é, uma linha no qual um indivíduo é considerado pobre se a sua renda é inferior ao valor de  $z$ . Este valor corresponde à linha de pobreza de um indivíduo que integra o domicílio de referência, definido neste capítulo como um adulto que mora sozinho. Se o cálculo estivesse sendo feito no nível de domicílio, então a linha de pobreza necessária para classificar todos os membros do domicílio como pobres seria  $z_h = m_h z$ .

A linha de pobreza pode ser de dois tipos:

- a) Uma linha de pobreza absoluta, definida em relação ao nível mínimo de subsistência que um indivíduo pode ter. Neste caso teríamos  $z = \bar{z}$  para um escalar  $\bar{z}$  definido arbitrariamente.

- b) Uma linha de pobreza relativa, definida como um percentual do padrão médio ou mediano da renda de uma sociedade. Neste caso teríamos  $z = \pi\mu$ , onde  $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$  é a renda equivalente média e  $\pi \in (0,1)$  representa uma proporção desta renda.

No que segue, serão apresentados alguns indicadores de pobreza. Para uma discussão mais completa, cf. Hoffmann (1998).

#### 4.2.3.1 Proporção de pobres

A proporção de pobres ( $P$ ) é simplesmente a razão entre o número de pessoas que vivem abaixo da linha de pobreza ( $q$ ) e a população total ( $n$ ). Para uma população discreta de  $n$  pessoas com renda  $y_1, \dots, y_n$  arranjada em ordem ascendente, tal que  $y_1 \leq \dots \leq y_{q-1} \leq y_q \leq z \leq y_{q+1} \leq \dots \leq y_n$ , o cálculo é feito utilizando a função indicadora

$$p(y_i, z) = \begin{cases} 1 & \text{se } y_i < z \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

Esta função em seguida é somada e calculada como uma média sobre o total da população (Fields, 2002)

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(y_i, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q p(y_i, z) = \frac{q}{n} \quad (4.28)$$

A proporção de pobres não considera o quanto os pobres são pobres. Ela implicitamente assume que a pobreza é um conceito discreto, no sentido de que não importa o quanto você possui, contanto que você seja pobre. Em outras palavras, a proporção de pobres não é sensível à intensidade da pobreza e não satisfaz os axiomas de monotonicidade e de transferência (Deaton, 1997). Conforme argumenta Sen (1979), o fato da proporção de pobres não aumentar (e pode inclusive diminuir) como resultado de uma transferência de uma pessoa pobre para uma pessoa relativamente mais rica (mas ainda pobre) mostra o quão esta medida é inadequada para a mensuração da pobreza. Apesar desta característica, a sua simplicidade de cálculo faz com que ela seja bastante popular.

#### 4.2.3.2 Insuficiência de renda

A insuficiência de renda mede a distância média da renda das pessoas pobres em relação à linha de pobreza, calculada como um percentual da linha de pobreza. Sua fórmula é:

$$I = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \left( \frac{z - y_i}{z} \right) = \frac{z - \bar{y}_q}{z} \quad (4.29)$$

onde  $\bar{y}_q$  é a renda média dos indivíduos situados abaixo da linha de pobreza,

$$\bar{y}_q = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q y_i \quad (4.30)$$

Pela equação (4.29) percebe-se que, dado  $z$  e  $\bar{y}_q$ , a insuficiência de renda é insensível ao número de pobres. No entanto, ela trata a pobreza como uma medida contínua, no sentido de que uma pessoa contribui mais para o indicador à medida que sua renda se torna menor que o valor da linha de pobreza. Apesar desta qualidade, a insuficiência de renda, assim como a proporção de pobres, também sofre o problema de falta de sensibilidade a transferências regressivas de renda. Se transferirmos renda de uma pessoa pobre para outra pessoa pobre mas com renda superior, o valor de  $I$  não irá se alterar, o que significa que esta medida não é sensível a transferências de renda entre os pobres (Sen, 1979).

#### 4.2.3.3 Hiato de pobreza

O hiato de pobreza é uma medida de pobreza que combina as melhores qualidades das medidas anteriores. Para distribuições discretas, seu cálculo é obtido a partir da função

$$p(y_i, z) = \begin{cases} (z - y_i)/z & \text{se } y_i < z \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.31)$$

onde  $(z - y_i)/z$  é o hiato de renda como proporção da linha de pobreza. Esta função em seguida é somada e calculada como uma média sobre o total da população.

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(y_i, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{z - y_i}{z} \right) \quad (4.32)$$

Isto é, o hiato de pobreza nada mais é que um hiato de renda *per capita* da população em questão. Note também que

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \left( \frac{z - y_i}{z} \right) = \frac{q}{n} \left[ \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \left( \frac{z - y_i}{z} \right) \right] = PI \quad (4.33)$$

Ou seja, o hiato de pobreza é obtido pela multiplicação da proporção de pobres com a insuficiência de renda. Desta forma, esta medida combina as qualidades complementares existentes em  $P$  e  $I$ , a saber, a sensibilidade de  $I$  à intensidade da pobreza (medida pela insuficiência de renda dos domicílios abaixo da linha de pobreza) e a sensibilidade de  $P$  à extensão da pobreza (medida pela proporção do número de pobres).

#### 4.2.3.4 O índice de Foster, Green e Thorbecke

Foster, Green e Thorbecke (1984) desenvolveram um índice de pobreza mais geral, que inclui tanto a proporção de pobres quanto o hiato de pobreza como casos especiais. Tal como no hiato de pobreza, o índice criado por eles – denominado FGT – é baseado no hiato de pobreza individual  $g_i = z - x_i$ , mas permite que se estabeleça um peso maior para os indivíduos mais pobres entre os pobres da distribuição de renda, dependendo do valor que se atribui ao parâmetro  $\alpha$  da função.

O índice FGT utiliza a classificação

$$p(y_i, z) = \begin{cases} (z - y_i)/z & \text{se } y_i < z \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.34)$$

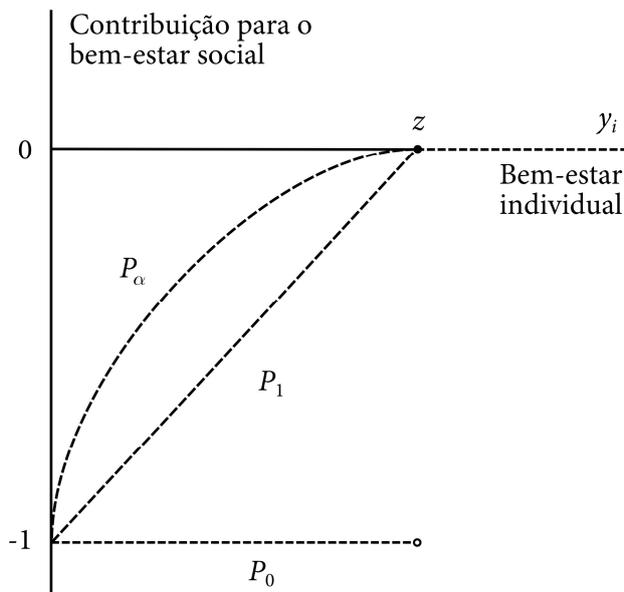
Esta função em seguida é agregada para toda a população, utilizando um parâmetro  $\alpha$  para ponderar o hiato da renda individual em relação à linha de pobreza:

$$P(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(y_i, z)^\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \left( \frac{z - y_i}{z} \right)^\alpha, \quad \text{onde } \alpha \geq 0 \quad (4.35)$$

Com isso, o parâmetro  $\alpha$  pode ser considerado uma medida de aversão à desigualdade. Assim, à medida que  $\alpha$  aumenta,  $P(\alpha)$  se torna cada vez mais sensível às rendas dos extremamente pobres. Para  $\alpha = 0$ ,  $P(0) = q/n$  e o índice FGT se torna equivalente

à proporção de pobres. Para  $\alpha=1$  a fórmula se transforma no hiato de pobreza. Para  $\alpha=2$ , o índice é normalmente denominado de severidade da pobreza. O índice FGT satisfaz o axioma da monotonicidade para  $\alpha > 0$  e o axioma da transferência para  $\alpha > 1$ .

Figura 4.3 - Bem-estar social e medidas alternativas de pobreza



Fonte: Deaton (1997).

Segundo Deaton (1997, p. 145), com uma mudança de sinal, a função (4.35) pode ser considerada uma função de bem-estar social. Para  $\alpha = 0$ , seu valor é dado pela média de uma função de bem-estar individual que possui valor  $-1$  se o indivíduo está abaixo da linha de pobreza e valor zero no caso contrário (cf. Figura 4.3). Para  $\alpha = 1$  esta função de bem-estar é contínua e côncava em  $y_i$ , de forma que o princípio da transferência se aplica, ao menos na sua forma fraca. Para  $\alpha > 1$  a função é estritamente côncava entre os indivíduos pobres, fazendo com que ela seja sensível ao grau de desigualdade existente entre eles.

#### 4.2.4 Efeitos das escalas de equivalência sobre as medidas de desigualdade

Nesta seção serão mostrados alguns dos resultados empíricos e teóricos encontrados na literatura.

O ponto de partida é o artigo de Coulter *et al.* (1992), que analisa a sensibilidade de algumas medidas de desigualdade a mudanças no parâmetro de economia de escala.

Utilizando uma escala de equivalência do tipo  $m_h = n_h^\theta$  os autores mostram que, tanto do ponto de vista teórico quanto dos resultados empíricos, o parâmetro de economia de escala gera um efeito em formato de U sobre as medidas de desigualdade mais utilizadas na literatura. Isso significa que quando se aumenta  $\theta$  a partir de valores próximos de zero, a desigualdade medida pela renda equivalente diminui inicialmente, até que chega a um ponto a partir do qual ela começa a aumentar. Esta forma em U depende da distribuição conjunta das rendas nominais e das características demográficas dos domicílios analisados. Utilizando dados da Inglaterra, Coulter *et al.* (1992) estimam o ponto no qual os índices de desigualdade começam a aumentar como sendo em torno de  $\theta = 0,6$ .

Este formato em U, segundo os autores, decorre de dois efeitos distintos. O primeiro é o *efeito concentração*, que age sobre a razão  $y_i/\mu$  presente nas medidas de desigualdade apresentadas anteriormente, diminuindo a desigualdade à medida que o valor de  $\theta$  aumenta. A explicação deste efeito é a seguinte: conforme  $\theta$  aumenta a partir de valores próximos de zero, as economias de escala se reduzem, fazendo com que a renda equivalente  $y_i$  diminua proporcionalmente mais para aqueles domicílios que possuem um maior número de moradores. Dado que existe uma correlação positiva entre a renda domiciliar nominal e o tamanho do domicílio (medido pelo número de moradores)<sup>24</sup>, os indivíduos dos domicílios com maior renda nominal terão uma queda proporcionalmente maior na renda equivalente. Em outras palavras, a razão  $y_i/\mu$  decrescerá mais para os moradores dos domicílios com muitos membros do que para os moradores dos domicílios com poucos membros. Enquanto o ordenamento dos indivíduos não se alterar, isto irá aproximá-los na distribuição de renda equivalente e terá um efeito redutor sobre a desigualdade.

O segundo efeito é chamado de *efeito reordenamento*. Ele ocorre quando, à medida que se aumenta  $\theta$ , a queda relativamente maior na renda equivalente daqueles domicílios que possuem um maior número de moradores eventualmente induz a uma troca de posição dos domicílios no ordenamento da renda equivalente. Ou seja, à medida que a economia de escala

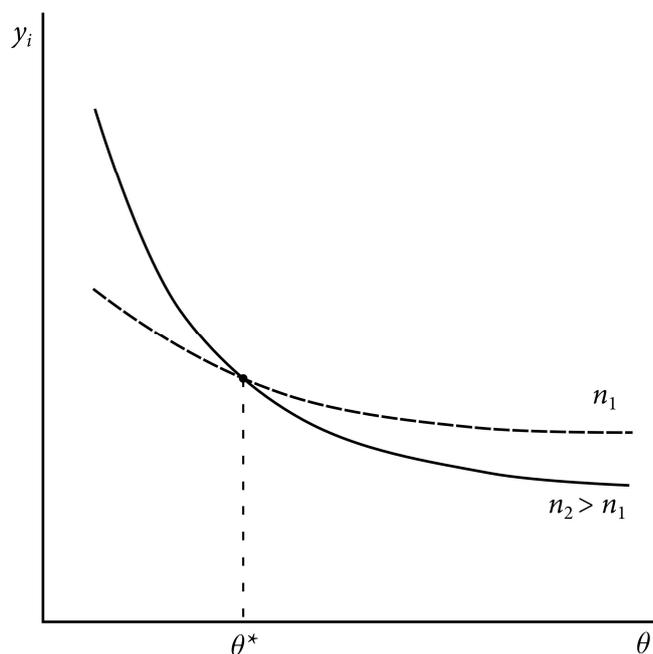
---

<sup>24</sup> Isto é um fato estilizado da literatura. Cf. Deaton (1997).

diminui ( $\theta$  aumenta), os membros dos domicílios maiores ficam relativamente mais pobres, podendo inclusive ficar mais pobres que os membros dos domicílios menores. Neste ponto, temos um reordenamento das pessoas na distribuição de renda, cujo efeito é o de aumentar a desigualdade da renda equivalente.

Como estes dois efeitos agem simultaneamente à medida que  $\theta$  aumenta, para valores elevados de  $\theta$  o efeito reordenamento pode dominar o efeito concentração e, por isso, a desigualdade pode aumentar ao invés de diminuir. As condições para que isto ocorra foram estudadas por Creedy e Sleeman (2004). Segundo estes autores, o efeito reordenamento tende a superar o efeito concentração a partir do momento em que a correlação entre a renda equivalente e o número de membros do domicílio se torna negativa. Apesar de ser um fato estilizado que a correlação entre a renda domiciliar e o número de membros do domicílio é positiva, a renda equivalente  $y_i$  é dependente dos parâmetros da escala de equivalência, o que torna o sinal da sua correlação com o número de membros do domicílio menos óbvio. Creedy e Sleeman (2004) mostram que para  $\theta = 0$  a correlação entre  $y_i$  e  $n_i$  é positiva, mas vai se tornando cada vez menor (e eventualmente negativa) à medida que  $\theta$  aumenta. Quando esta correlação chega a zero, a distância média entre a renda equivalente dos domicílios atinge o nível mínimo. A partir daí, incrementos adicionais em  $\theta$  irão diminuir mais que proporcionalmente a renda equivalente dos domicílios maiores, fazendo com que a diferença absoluta de renda entre eles e os domicílios menores (mais pobres em termos nominais) cresça novamente, aumentando assim a desigualdade da distribuição (cf. Figura 4.4).

Figura 4.4 - Efeito reordenamento derivado de uma diminuição nas economias de escala do consumo



Fonte: Elaboração própria.

Segundo Banks e Johnson (1994), este padrão em forma de U na relação entre a economia de escala e os indicadores de desigualdade é, no entanto, dependente dos dados utilizados, pois é possível que a covariância entre a renda e o tamanho do domicílio permaneça positiva além do ponto em que  $\theta$  atinja o seu valor máximo. Uma situação em que isto ocorre é quando a renda *per capita* dos domicílios maiores é maior que a renda *per capita* dos domicílios menores. Neste caso, os índices de desigualdade tenderão a cair em todos os pontos à medida que  $\theta$  cresce de zero para 1.

Deve-se notar também que como as medidas de desigualdade agregam as razões de renda equivalente  $y_i/\mu$  de diferentes formas ao longo da distribuição de renda, o impacto total de uma mudança no parâmetro da economia de escala irá depender do grau de aversão à desigualdade (implícito ou explícito) presente no índice de desigualdade utilizado. De fato, Coulter *et al.* (1992) mostram que para o índice de Entropia Generalizada com parâmetro  $\alpha=2$  (isto é, com maior sensibilidade a mudanças nas rendas situadas no topo da distribuição), o gráfico da medida de desigualdade em relação a  $\theta$  se torna mais parecido com

um J do que com um U. Ou seja, neste caso, um aumento em  $\theta$  tende apenas a piorar a desigualdade de renda.

O contrário ocorre quando  $\alpha = -1$ , isto é, quando se priorizam mudanças ocorridas nas rendas situadas na base da distribuição. Neste caso, aumentos em  $\theta$  terão o efeito de melhorar a desigualdade de renda em todo o domínio de  $\theta$ . Isso ocorre porque, à medida que  $\theta$  aumenta de zero para 1, o percentual da renda apropriada pelos mais pobres (ou seja,  $y_i/\mu$ ) diminui, e o contrário ocorre para os indivíduos mais ricos. Esta transição faz com que a relação entre o índice de desigualdade e  $\theta$  tenha comportamento diferente conforme a sensibilidade do índice de desigualdade às alterações nas rendas situadas no topo e na base da distribuição (Coulter; Cowell; Jenkins, 1992).

Identificados os efeitos da economia de escala sobre as medidas de desigualdade, a análise volta-se então para investigar os efeitos que o parâmetro  $\eta$  (isto é, o peso de uma criança em relação a um adulto) possui sobre estas medidas.

Banks e Johnson (1994) e Jenkins e Cowell (1994) mostram que para qualquer valor de economia de escala, a desigualdade é positivamente relacionada com o peso atribuído à criança ( $\eta$ ). Apesar de este resultado ser válido empiricamente, Jenkins e Cowell (1994) argumentam que, do ponto de vista teórico esta relação monotônica não precisa ocorrer sempre, embora eles não consigam caracterizar os casos nos quais ela não ocorrerá. Segundo estes autores, aumentos em  $\eta$  provocam os mesmos efeitos que um aumento de  $\theta$  sobre as medidas de desigualdade, a saber, o efeito concentração e o efeito reordenamento. Do ponto de vista teórico, portanto, seria possível ter uma relação negativa entre o peso da criança e a desigualdade de renda, embora Banks e Johnson (1994) mostrem que esta relação não é observada empiricamente.

Jenkins e Cowell (1994) e Creedy e Sleeman (2004) mostram que existe um efeito conjunto entre  $\eta$  e  $\theta$  sobre as medidas de desigualdade. Segundo estes autores, quanto maior o peso dado às crianças, maior é o efeito reordenamento derivado de um aumento de  $\theta$ , fazendo com que a relação entre a medida de desigualdade e  $\theta$  apresente uma curvatura mais

inclinada para valores maiores de  $\theta$ . O resultado deste efeito conjunto é que à medida que  $\eta$  diminui, também diminui o valor de  $\theta$  que minimiza a desigualdade da distribuição de renda. Além disso, o padrão em forma de U observado quando  $\theta$  se altera é menos pronunciado quanto menor for o valor de  $\eta$ . Como consequência, a sensibilidade das medidas de desigualdade a mudanças no parâmetro da economia de escala será máxima justamente no ponto em que  $\eta$  e  $\theta$  são iguais a um. Este ponto equivale à utilização da renda domiciliar *per capita* como medida de bem-estar individual. Note, portanto, que a renda domiciliar *per capita*, além de ser um caso particular dentre um conjunto infinito de possibilidades, representa também o ponto no qual pequenas mudanças no parâmetro da economia de escala tendem a gerar grandes alterações na desigualdade de renda de uma determinada população.

Por fim, Jenkins e Cowell (1994) e Creedy e Sleeman (2004) destacam também que as medidas de desigualdade são mais sensíveis a alterações em  $\theta$ , qualquer que seja o valor de  $\eta$ . Estes trabalhos mostram que qualquer que seja o efeito de  $\eta$  sobre as medidas de desigualdade, ele será pequeno quando  $\theta$  for próximo de zero. Para Jenkins e Cowell (1994), portanto, as variações em  $\theta$  são mais importantes para investigar a sensibilidade das medidas de desigualdade do que as variações em  $\eta$ , dado que alterações em  $\eta$  provocam um efeito praticamente linear sobre a desigualdade de renda, enquanto alterações em  $\theta$  geram um efeito não-linear significativo.

#### 4.2.5 Efeitos das escalas de equivalência sobre as medidas de pobreza

Quando se analisa o efeito dos parâmetros  $\eta$  e  $\theta$  sobre as medidas de pobreza, os resultados irão depender de se a linha de pobreza utilizada é absoluta ou relativa.

Para linhas de pobreza absoluta, Creedy e Sleeman (2004) mostram que a pobreza aumenta monotonicamente tanto com o aumento de  $\theta$  quanto de  $\eta$ , resultado demonstrado teoricamente por Coulter *et al.* (1992) para um conjunto geral de medidas de pobreza.

Por outro lado, quando se utiliza uma linha de pobreza relativa, os resultados não são muito diferentes daqueles encontrados para as medidas de desigualdade. Ou seja, um aumento em  $\theta$  possui um efeito em forma de U sobre a pobreza relativa, inicialmente

diminuindo o nível de pobreza à medida que  $\theta$  cresce a partir de valores próximos de zero, até que chega um ponto no qual o nível de pobreza passa a aumentar (cf. Coulter *et al.* (1992) para o Reino Unido e Mariano e Figueiredo (2008) para o Brasil). No caso do peso dado à criança, Banks e Johnson (1994) mostram que um aumento em  $\eta$  eleva monotonicamente as medidas de pobreza. Jenkins e Cowell (1994), no entanto, mostram tanto teórica quanto empiricamente que, para algumas medidas de pobreza, aumentos de  $\eta$  a partir de valores próximos de zero podem diminuir os níveis de pobreza relativa.

Esta diferença de resultados que se observa quando utilizamos linhas de pobreza relativas ou linhas de pobreza absolutas emerge da influência que  $\theta$  possui nas medidas de pobreza. Segundo Coulter *et al.* (1992), esta influência pode ser explicada por três efeitos, não necessariamente separáveis. O primeiro efeito é o que os autores chamam de *efeito linha de pobreza pura*. No contexto deste trabalho, ele pode ser colocado da seguinte forma: à medida que  $\theta$  aumenta, a renda equivalente dos indivíduos diminui, dado que ela é resultado da divisão da renda domiciliar nominal  $Y_h$  – que é fixa – pelo número de adultos equivalentes  $m_h$  – que é positivamente relacionado com  $\theta$ . Com isso, a renda equivalente média irá diminuir, deslocando a distribuição de renda para a esquerda e fazendo com que um número maior de pessoas passe a ter renda menor que a linha de pobreza.

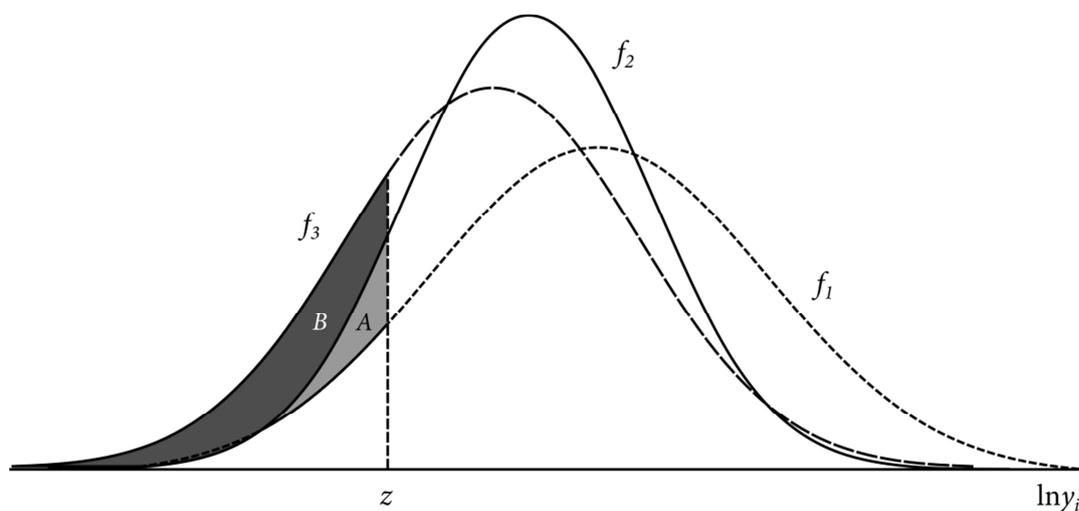
O segundo efeito é gerado pelos efeitos *concentração e reordenamento* discutidos anteriormente para as medidas de desigualdade, e se reflete em mudanças no formato da distribuição de renda, que se torna menos desigual à medida que  $\theta$  aumenta a partir de zero e volta a se tornar mais dispersa para valores mais altos de  $\theta$ . Este efeito, combinado com o primeiro, faz com que os níveis de pobreza cresçam à medida que  $\theta$  aumenta. Este ponto será melhor explicado adiante.

Por fim, o terceiro efeito é o que os autores denominam de *efeito indireto da linha de pobreza* e surge apenas quando se utiliza uma linha de pobreza relativa. Ele ocorre porque um aumento em  $\theta$  diminui a renda equivalente média  $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  e, portanto, também a linha de pobreza relativa  $z = \pi\mu$ . Com isto, haverá um número menor de pessoas abaixo da linha

de pobreza. Assim, um padrão em forma de U na relação entre  $\theta$  e os níveis de pobreza será observado para alguns valores de  $\theta$  quando este terceiro efeito se sobrepuser aos dois efeitos anteriores.

A explicação gráfica para os dois primeiros efeitos pode ser vista na Figura 4.5 abaixo (cf. Creedy; Sleeman, 2004). Se  $\theta$  aumenta a partir de zero, o efeito concentração faz com que a distribuição da renda equivalente se torne menos dispersa (isto é, a distribuição muda de  $f_1$  para  $f_2$ ), o que diminui a desigualdade de renda. Ao mesmo tempo, observa-se um aumento no número de indivíduos pobres, pois a diminuição da renda média decorrente da alteração de  $\theta$  promove um deslocamento de toda a densidade de probabilidade da renda para a esquerda. Isso faz com que uma área maior da distribuição se situe abaixo da linha de pobreza. A proporção de indivíduos que se incorpora à pobreza é representada pela área  $A$  na Figura 4.5.

Figura 4.5 - Comportamento da distribuição da renda equivalente quando  $\theta$  aumenta a partir de zero



Fonte: Adaptado de Creedy e Sleeman (2004).

Com os subsequentes aumentos de  $\theta$ , o efeito reordenamento passa a predominar a partir de certo momento. Isto faz com que a distribuição de renda, que havia se tornado mais concentrada, passe a se tornar mais dispersa (isto é, a distribuição muda de  $f_2$  para  $f_3$ ), causando um aumento na desigualdade de renda. Este aumento de dispersão, combinado com

o decréscimo da renda média equivalente, aumenta a área da distribuição abaixo da linha de pobreza, elevando os níveis de pobreza. Nessa situação, a proporção de indivíduos que se incorpora à pobreza é representada pela área  $B$  na Figura 4.5. Assim, independente do efeito reordenamento que  $\theta$  provoca nas medidas de desigualdade, a pobreza absoluta diminui monotonicamente quando  $\theta$  aumenta.

Da discussão anterior, conclui-se que embora a análise teórica nos forneça algumas respostas sobre o efeito de  $\theta$  e  $\eta$  nas medidas de desigualdade e pobreza, diversos resultados dependem das características específicas da população, de forma que algumas das conclusões teóricas obtidas podem não ser relevantes empiricamente. Assim, é importante estimar os efeitos da economia de escala e das necessidades relativas das crianças em relação aos adultos para cada população, com o intuito de captar as suas particularidades.

## 4.3 METODOLOGIA

### 4.3.1 Banco de dados e variáveis

Os dados utilizados são provenientes da Pesquisa de Orçamentos Familiares de 2002-2003 realizada pelo IBGE (cf. Apêndice A). Para o cálculo dos efeitos da escala de equivalência sobre as medidas de desigualdade e pobreza, utilizou-se como agregado de bem-estar do domicílio a *despesa de consumo* construída da forma descrita no Apêndice A. Para calcular as escalas de equivalência, definiu-se como *crianças* todas as pessoas com idade menor ou igual a 14 anos. A escolha deste corte se deve às características da pesquisa, que captura separadamente a despesa de alguns bens (principalmente itens de vestuário) para crianças com idade de 0 a 14 anos de itens destinados às pessoas com 15 anos ou mais de idade. Essa separação é útil, pois ajuda identificar melhor o efeito do peso da criança nas medidas de desigualdade e pobreza. Para todas as estimativas, utilizou-se o fator de expansão amostral disponibilizado na POF 2002-2003 pelo IBGE para replicar os dados da população brasileira.

### 4.3.2 Procedimento empírico

Para testar o efeito da economia de escala e do peso atribuído à criança nas medidas de desigualdade e pobreza, optou-se pela forma funcional (4.3). A escala de equivalência será dada então por

$$m_h = (A_h + \eta C_h)^\theta \quad (4.36)$$

Ou seja, o domicílio de referência será composto por um único adulto e  $m_h$  corresponderá ao número de adultos equivalentes do domicílio, compensado pelo efeito da economia de escala do consumo.

A partir desta escala de equivalência, calculou-se a despesa de consumo equivalente  $y_i$  para diferentes valores de  $\eta$  e  $\theta$ , utilizando-se esta despesa no cálculo das medidas de desigualdade e pobreza. Os parâmetros variaram no intervalo [0,1] com um passo de 0,01, ou seja, calcularam-se os índices de desigualdade e pobreza para cada uma das 10.201 combinações dos parâmetros  $\eta$  e  $\theta$ . O número de indivíduos de cada simulação corresponde ao número de adultos equivalentes.

A linha de pobreza absoluta  $\bar{z}$  para cada pessoa equivalente foi definida como o valor do salário mínimo vigente em janeiro de 2003, isto é, R\$ 200,00. Similarmente, a linha de pobreza relativa foi definida como 40% da despesa equivalente média de consumo (aproximadamente R\$ 152,00 no ponto inicial  $(\eta, \theta) = (1,1)$ , isto é, no ponto da despesa domiciliar *per capita*). Esses valores são muito superiores aos normalmente adotados em políticas públicas ou estimados por pesquisadores a partir de distintas metodologias (cf. Soares, 2009)<sup>25</sup>. Isso não é um problema, pois o objetivo não é analisar o *nível* da pobreza, mas a *sensibilidade* das medidas de pobreza aos parâmetros da escala de equivalência. Apesar destas definições, foram feitos testes para diferentes valores de linhas de pobreza e constatou-se que, fora as diferenças de nível, o resultado final manteve-se fundamentalmente o mesmo.

---

<sup>25</sup> O Benefício de Prestação Continuada (BPC), por exemplo, utiliza uma linha de corte de  $\frac{1}{4}$  salário mínimo *per capita*.

## 4.4 RESULTADOS

### 4.4.1 Efeitos sobre a despesa equivalente

A Tabela 4.1 mostra como a despesa equivalente varia com a economia de escala do consumo. Quando não há economias de escala ( $\theta = 1$ ), a despesa equivalente média dos indivíduos é inversamente relacionada com o tamanho do domicílio em que eles vivem. Enquanto os indivíduos que moram sozinhos possuem uma despesa correspondente a 2,4 vezes a média da população, os indivíduos de domicílios com mais de cinco moradores consomem cerca de metade do montante do consumo médio da população. À medida que a economia de escala no consumo aumenta, no entanto, esta situação começa a se alterar. Com  $\theta = 0,25$ , por exemplo, os indivíduos que vivem em domicílios com mais de cinco moradores ainda têm uma despesa equivalente abaixo da despesa média, porém os indivíduos que moram sozinhos não usufruem mais uma despesa equivalente superior à média.

Tabela 4.1 - Despesa média equivalente por tamanho do domicílio e  $\theta$

Número de moradores	Despesa equivalente média				
	(como % da despesa média de todos os domicílios)				
	$\theta = 0,00$	0,25	0,50	0,75	1,00
1	69,79	93,40	126,98	175,13	244,68
2	91,48	102,94	117,69	136,49	160,36
3	100,75	102,45	105,84	110,91	117,75
4	115,30	109,11	104,90	102,30	101,06
5	110,07	98,51	89,57	82,61	77,18
6 ou mais	96,51	80,78	68,64	59,12	51,54
Todos	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Este efeito da economia de escala é importante pois altera não só o ordenamento dos domicílios na distribuição de despesa, mas também o ordenamento de diferentes grupos demográficos. Explica-se: como o tamanho do domicílio é correlacionado com o número de crianças (domicílios maiores tendem a ter mais crianças e vice-versa) e como os idosos tendem a viver em domicílios menores, usualmente sozinhos ou com o(a) companheiro(a), as mudanças que a economia de escala produz no ordenamento dos domicílios afetam também a

intensidade da pobreza que idosos e crianças possuem, com reflexos importantes na discussão sobre a distribuição dos recursos públicos entre estes distintos grupos demográficos.

A Tabela 4.2 mostra como a despesa equivalente dos domicílios varia com mudanças no peso atribuído à criança. Neste caso, não se percebem alterações no ordenamento dos domicílios decorrente de uma diminuição no valor de  $\eta$ . Mesmo se atribuirmos um peso nulo para as crianças no cômputo da despesa equivalente, ainda assim a despesa equivalente será inversamente relacionada com o tamanho do domicílio.

Tabela 4.2 - Despesa média equivalente por tamanho do domicílio e  $\eta$

Número de moradores	Despesa equivalente média				
	(como % da despesa média de todos os domicílios)				
	$\eta = 0,00$	0,25	0,50	0,75	1,00
1	176,21	193,33	210,44	227,56	244,68
2	121,27	131,40	141,29	150,94	160,36
3	109,20	111,77	114,01	115,99	117,75
4	105,88	104,31	103,03	101,96	101,06
5	85,33	82,57	80,40	78,64	77,18
6 ou mais	60,44	57,31	54,93	53,05	51,54
Todos	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

A Tabela 4.3 mostra que, fixando-se o tamanho do domicílio, o coeficiente de correlação entre a despesa *per capita* e o número de crianças é negativo, isto é, um domicílio composto por dois adultos e duas crianças tende a ter uma despesa *per capita* (e, portanto, uma despesa total) menor que um domicílio composto por quatro adultos. Note também que esta correlação aumenta à medida que o número de membros do domicílio aumenta. Isso mostra que uma redução no peso dado à criança deve reduzir as medidas de desigualdade e de pobreza.

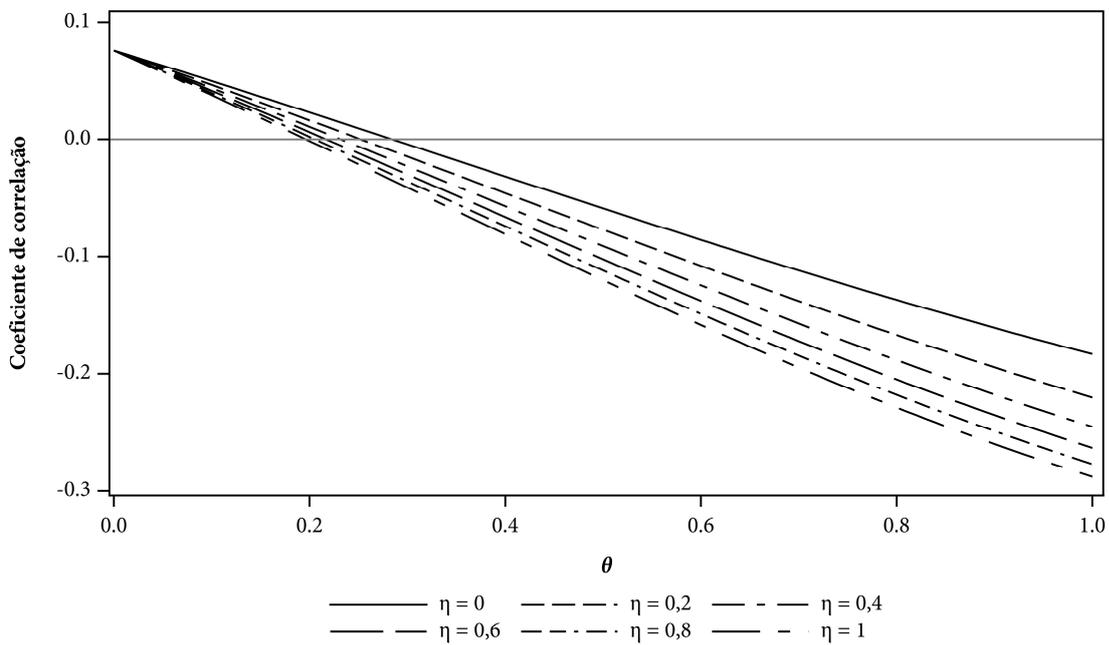
Tabela 4.3 - Coeficiente de correlação entre a despesa *per capita* e o número de crianças por tamanho de domicílio

Número de moradores	Correlação
2	-0,091
3	-0,154
4	-0,201
5	-0,238
6 ou mais	-0,300

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

O Gráfico 4.1 mostra o coeficiente de correlação entre a renda equivalente e o tamanho do domicílio para diversos valores de  $\theta$  e  $\eta$ . Observe que, partindo de uma situação na qual a economia de escala é absoluta ( $\theta = 0$ ), o sinal do coeficiente de correlação é inicialmente positivo. No entanto, à medida que a economia de escala diminui, o valor do coeficiente de correlação começa a decrescer, até que finalmente se torna negativo. Além do mais, o coeficiente de correlação se torna negativo mais cedo quanto maior o peso atribuído à criança. Este achado é importante, pois, conforme foi visto na Seção 4.2.4, um coeficiente de correlação negativo está relacionado com o ponto no qual o efeito reordenamento passa a superar o efeito concentração. No caso do Brasil, o coeficiente de correlação se torna negativo entre  $\theta = 0,2$  e  $\theta = 0,3$ , bem abaixo dos valores obtidos por Creedy e Sleeman (2004) para a Nova Zelândia (entre 0,4 e 0,7).

Gráfico 4.1 - Coeficiente de correlação entre a despesa equivalente e o tamanho do domicílio

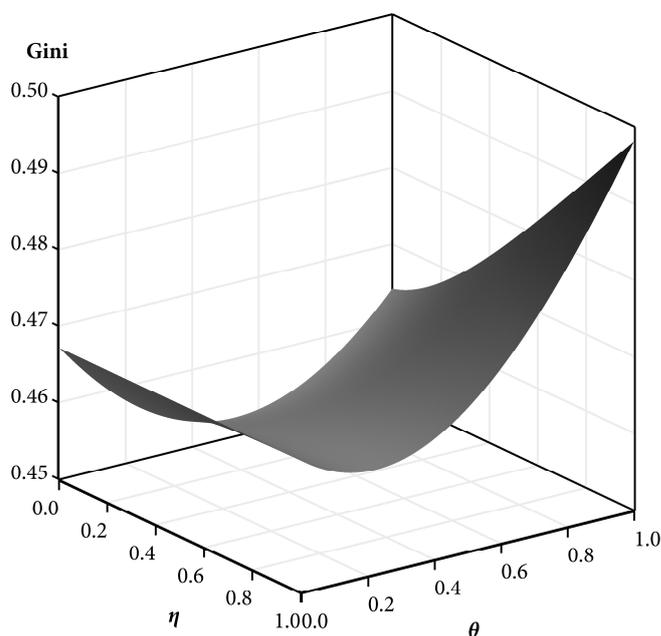


Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

#### 4.4.2 Efeitos sobre as medidas de desigualdade

O Gráfico 4.2 mostra como o coeficiente de Gini da despesa equivalente varia com mudanças nos valores de  $\theta$  e  $\eta$ . O gráfico é uma representação em três dimensões, o que permite uma visão global dos efeitos destes parâmetros.

Gráfico 4.2 - Efeito das escalas de equivalência sobre o coeficiente de Gini - 3D



Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

Em primeiro lugar, pode-se observar que o valor máximo do coeficiente de Gini (0,4982) ocorre justamente no ponto  $\theta=1$  e  $\eta=1$ , que equivale ao ponto da despesa domiciliar *per capita*. Assumindo que exista algum tipo de economia de escala no consumo e que uma criança possui necessidades menores que um adulto, conclui-se que a despesa domiciliar *per capita* superestima o grau de desigualdade da população brasileira.

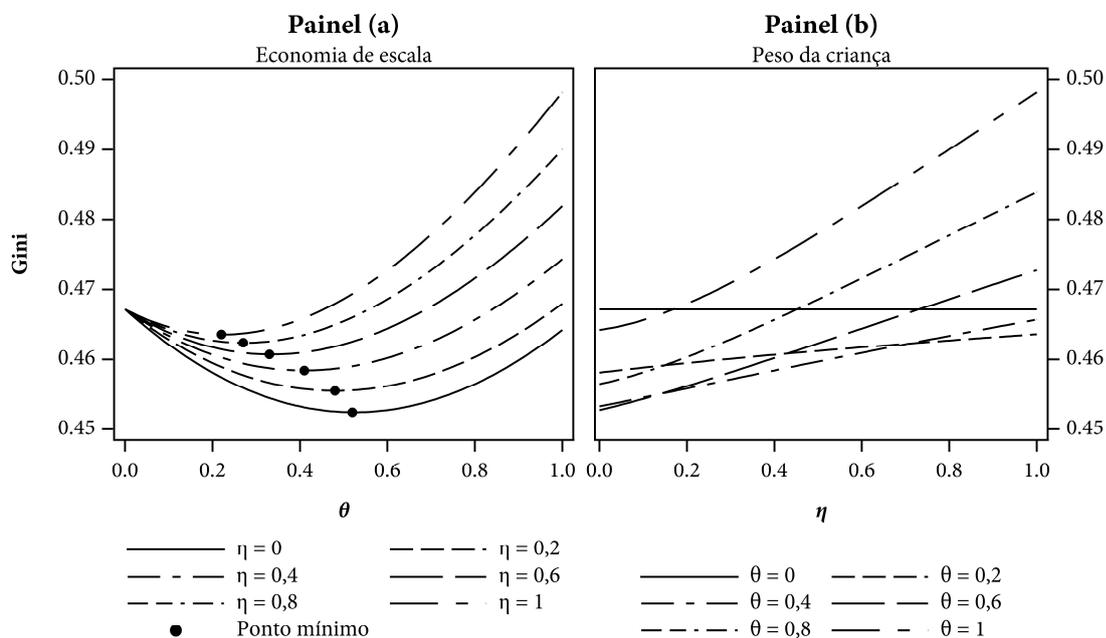
Em segundo lugar, percebe-se que alterações no parâmetro  $\theta$  criam um efeito em forma de U sobre o índice. Ou seja, conforme a economia de escala aumenta ( $\theta$  diminui), a desigualdade da despesa domiciliar equivalente diminui, até que se chega a um ponto no qual aumentos adicionais da economia de escala provocam um aumento na desigualdade. Note também que este padrão em forma de U não ocorre quando o parâmetro  $\eta$  é alterado. De fato, mudanças no peso atribuído à criança possuem um efeito quase linear sobre o coeficiente de Gini. A única região onde alterações em  $\eta$  produzem um pequeno efeito não linear ocorre quando  $\theta$  está próximo de 1 e  $\eta$  situa-se entre 0 e 0,2. Nesta região percebe-se uma pequena curvatura, tornando a relação entre  $\eta$  e o coeficiente de Gini mais parecida com um J inclinado.

Este formato em U que o parâmetro  $\theta$  provoca sobre o coeficiente de Gini decorre dos efeitos concentração e reordenamento citados na Seção 4.2.4. Conforme foi visto nessa seção, essa forma de U está intimamente relacionada com o sinal do coeficiente de correlação entre a despesa equivalente e o número de membros do domicílio. O Gráfico 4.1 mostra que esta correlação muda de sinal aproximadamente no ponto em que  $\theta = 0,2$ , enquanto o coeficiente de Gini atinge o valor mínimo para um dado  $\eta$  entre  $\theta = 0,2$  e  $\theta = 0,5$  aproximadamente.

Por fim, pode-se observar que o ponto de maior sensibilidade do coeficiente de Gini a alterações nos parâmetros  $\theta$  e  $\eta$  ocorre quando ambos são iguais a um, isto é, no ponto da despesa domiciliar *per capita*. Neste ponto, o diferencial total do coeficiente de Gini atinge o seu valor máximo.

O Gráfico 4.3 representa a imagem em duas dimensões do Gráfico 4.2 e serve para visualizar melhor alguns aspectos contidos neste último.

Gráfico 4.3 - Efeitos das escalas de equivalência sobre o coeficiente de Gini - 2D



Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

Comparando-se os painéis (a) e (b), percebe-se que  $\theta$  gera um efeito não-linear sobre o coeficiente de Gini, enquanto  $\eta$  gera um efeito aproximadamente linear. Isso não significa

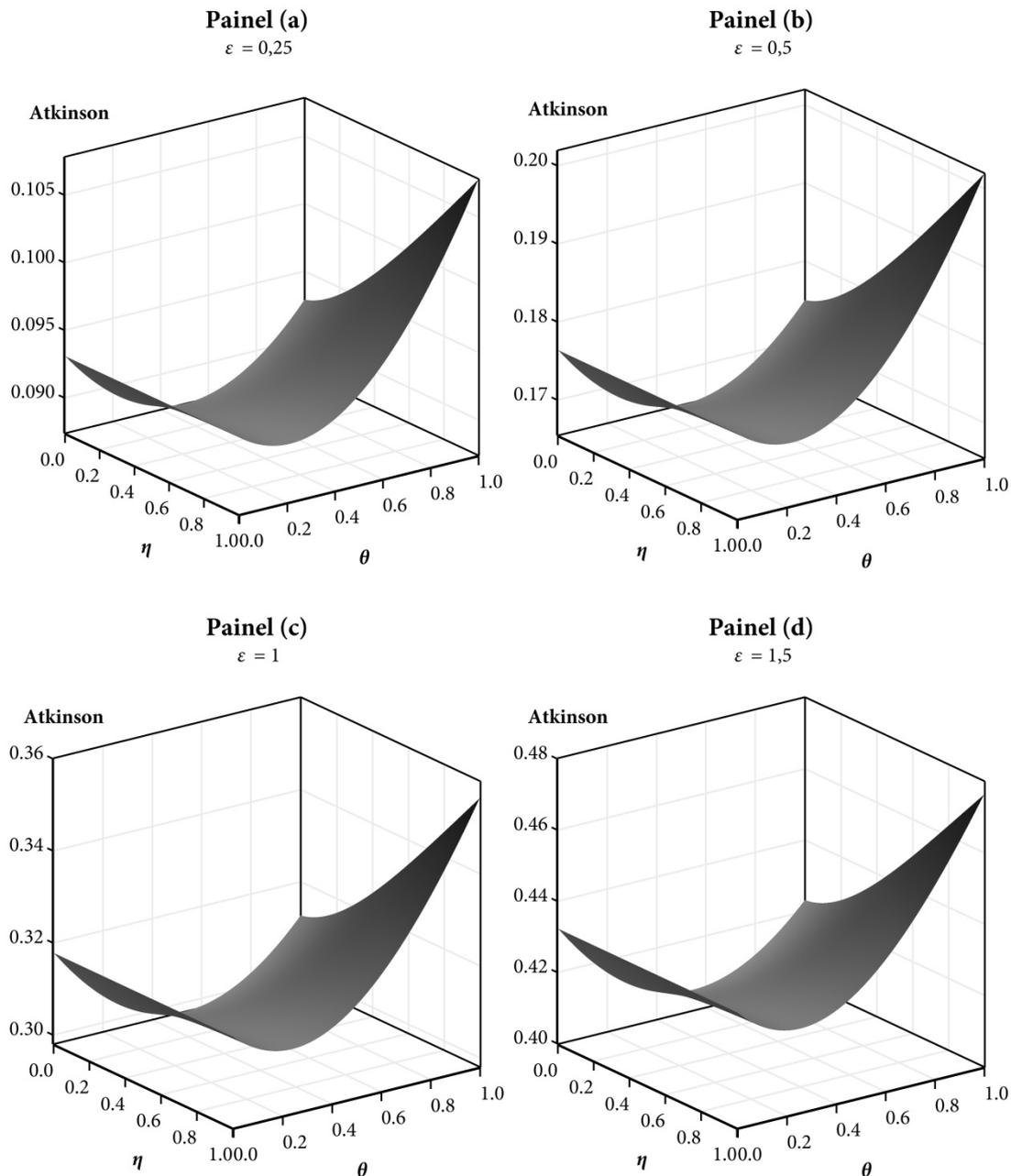
que mudanças em  $\theta$  sejam mais importantes para a desigualdade do que alterações em  $\eta$ . De fato, para  $\eta = 1$ , o coeficiente de Gini varia entre 0,4635 e 0,4982 à medida que  $\theta$  se altera; e para  $\theta = 1$ , o coeficiente de Gini varia entre 0,4642 e 0,4982 à medida que  $\eta$  se altera. Como tais intervalos de variação são muito próximos uns dos outros, conclui-se que ambos os parâmetros são igualmente relevantes para a queda da desigualdade.

Outra observação é que o efeito reordenamento passa a dominar o efeito concentração para valores de  $\theta$  cada vez menores à medida que o valor de  $\eta$  se torna mais elevado (painel (a)). Isto pode ser visto comparando-se a curva em que  $\eta = 1$  e a curva em que  $\eta = 0$ . No primeiro caso, a curva atinge o ponto de mínimo para um valor de  $\theta$  mais baixo do que no segundo caso ( $\theta = 0,22$  versus  $\theta = 0,52$  respectivamente). Novamente, esta conclusão é coerente com aquilo que foi observado no Gráfico 4.1, onde o coeficiente de correlação entre a renda equivalente e o tamanho do domicílio se torna negativo mais cedo quanto maior for o peso dado à criança.

O Gráfico 4.4 mostra como a economia de escala e o peso dado à criança alteram o índice de Atkinson. O índice de Atkinson foi calculado para diferentes graus de aversão à desigualdade ( $\varepsilon$ ).

Note que, independentemente do parâmetro  $\varepsilon$  utilizado, o padrão geral permanece o mesmo que aquele observado para o coeficiente de Gini. Aumentos no grau de aversão à desigualdade geram basicamente um efeito de escalonamento sobre índice, aumentando o valor do índice para todos os pontos  $(\eta, \theta)$ , mas não alterando significativamente o formato da curva em si.

Gráfico 4.4 - Efeitos das escalas de equivalência sobre o índice de Atkinson

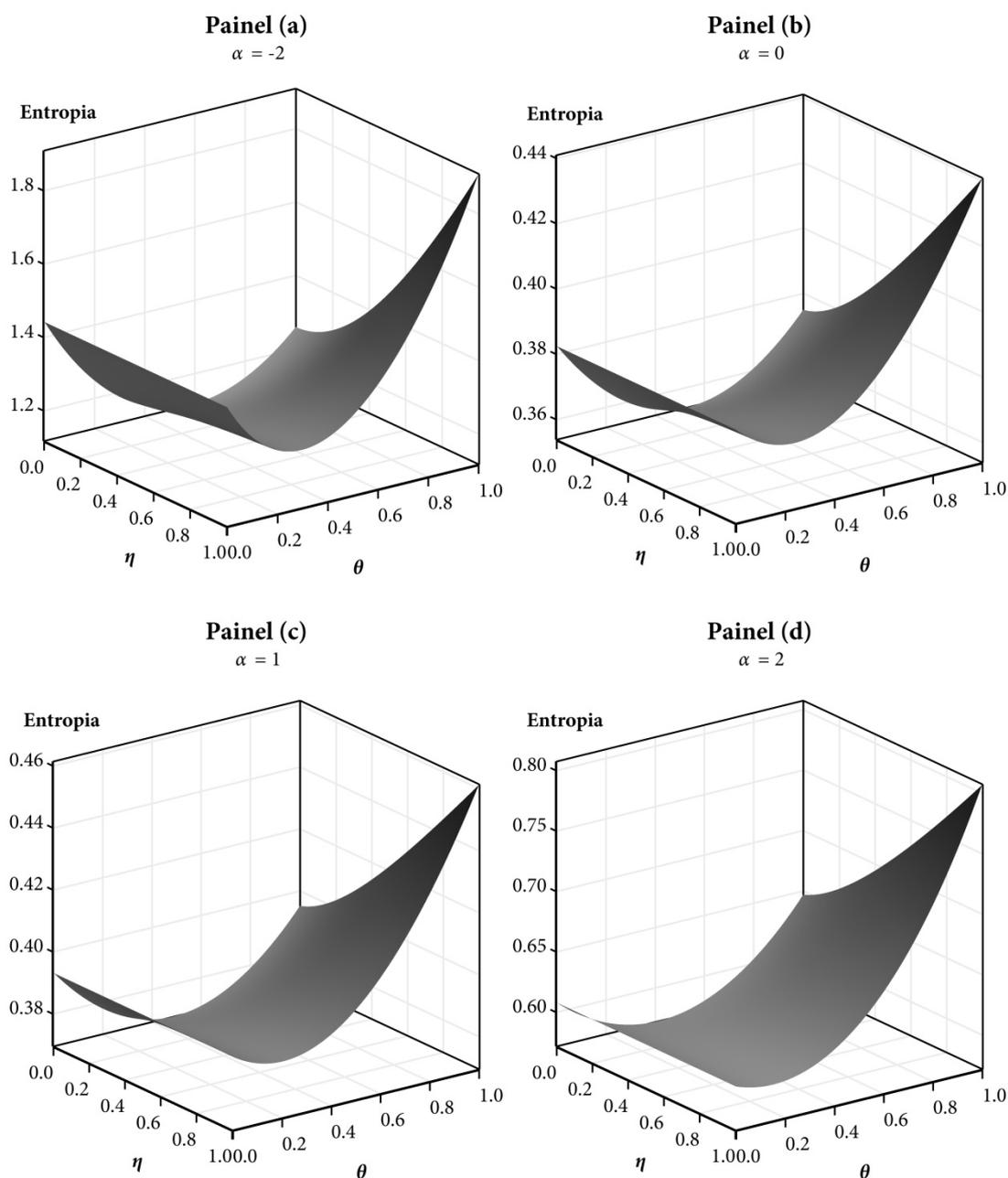


Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

Por fim, o Gráfico 4.5 ilustra o efeito dos parâmetros  $\theta$  e  $\eta$  sobre o índice de Entropia Generalizada. Aqui se observam diferenças um pouco maiores nas curvas conforme se consideram diferentes parâmetros de aversão à desigualdade ( $\alpha$ ). Por exemplo, à medida que se aumenta o peso atribuído às rendas mais altas no cômputo do índice (isto é, à medida que se aumenta o valor de  $\alpha$ ), a curva de desigualdade vai se alterando de um formato de U para

um formato de J. Embora com  $\alpha=2$  ainda seja possível observar pontos nos quais um aumento de  $\theta$  pode tanto diminuir quanto aumentar a desigualdade da despesa equivalente, para  $\alpha=3$  (não mostrado aqui) uma diminuição na economia de escala somente aumenta a desigualdade. Este achado é compatível com aquele encontrado por Coulter *et al.* (1992) para o Reino Unido.

Gráfico 4.5 - Efeitos das escalas de equivalência sobre o índice de Entropia Generalizada



Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

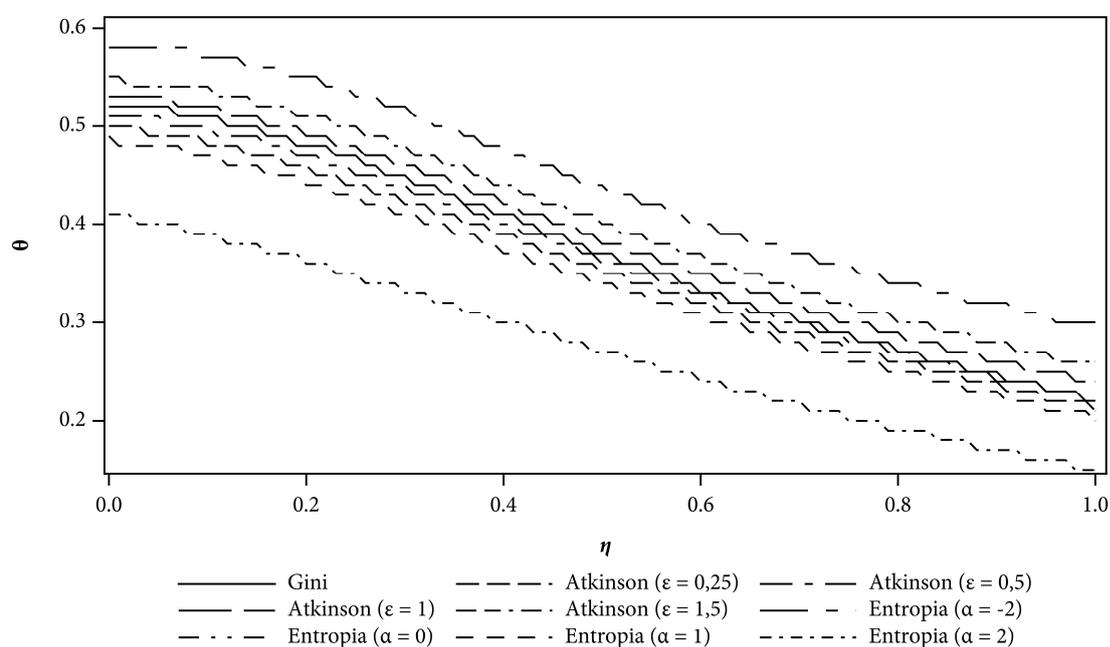
Um resultado que difere daquele encontrado por Coulter *et al.* (1992), por outro lado, é o efeito da economia de escala sobre o índice de Entropia Generalizada para valores negativos de  $\alpha$ , isto é, para medidas de desigualdade que colocam um grande peso na renda dos mais pobres. Coulter *et al.* (1992) encontraram que para  $\alpha = -1$  uma diminuição na economia de escala somente teria um efeito equalizador sobre a distribuição da despesa equivalente. No caso do Brasil, no entanto, mesmo utilizando  $\alpha = -2$ , os dados mostram que variações em  $\theta$  ainda possuem um efeito em forma de U sobre a desigualdade. Claro que se formos diminuindo o valor de  $\alpha$  até o limite  $\alpha \rightarrow -\infty$ , em algum momento podemos encontrar um valor nos quais alterações de  $\theta$  terão apenas um efeito equalizante. A diferença é que tal valor representaria um caso extremo, e dificilmente emergiria como resultado de uma escolha da sociedade a respeito da intolerância que ela atribui à desigualdade, pois significa que o bem-estar de toda a sociedade dependeria da renda de apenas uma única pessoa: o indivíduo mais pobre<sup>26</sup>.

Antes de finalizar esta seção, convém resumir uma informação em um único gráfico. O Gráfico 4.6 mostra as combinações entre  $\eta$  e  $\theta$  para as quais os índices de desigualdade atingem o valor mínimo. Percebe-se que o valor mínimo da maior parte dos índices de desigualdade ocorre entre  $\theta = 0,1$  e  $\theta = 0,6$  e que a relação entre  $\eta$  e  $\theta$  que minimiza os índices de desigualdade possui inclinação negativa.

---

<sup>26</sup> Conferir Seção 4.2.2.1 sobre a relação entre o índice de Atkinson e bem-estar e a Seção 4.2.2.3 sobre a relação entre o índice de Entropia Generalizada e o índice de Atkinson.

Gráfico 4.6 – Combinações de  $\theta$  e  $\eta$  para as quais as medidas de desigualdade atingem o valor mínimo

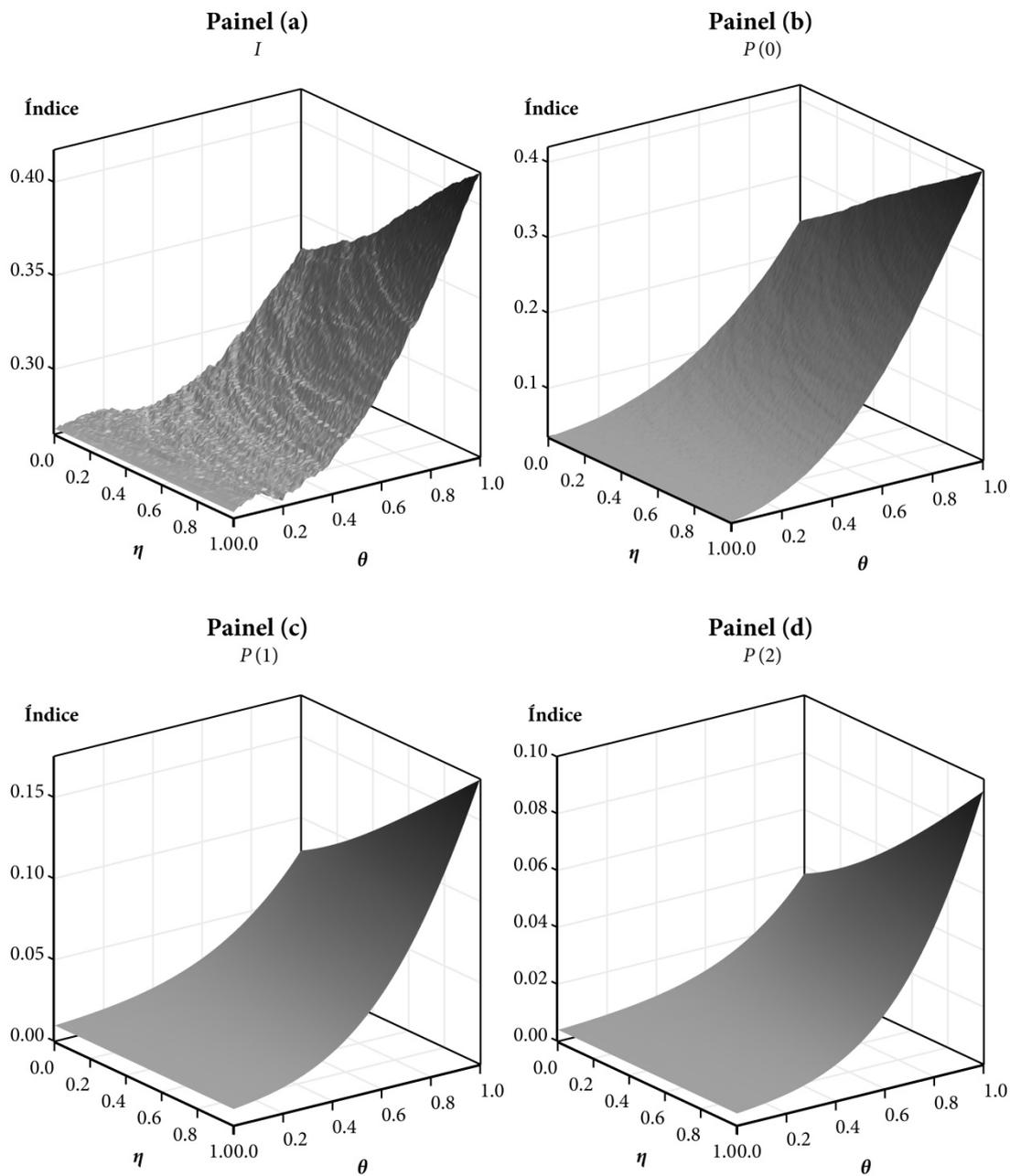


Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

#### 4.4.3 Efeitos sobre as medidas de pobreza

O Gráfico 4.7 mostra uma representação em três dimensões de como as medidas de pobreza se alteram com mudanças nos parâmetros da escala de equivalência, quando se utiliza uma linha de pobreza absoluta. O Gráfico 4.8 mostra essa relação em duas dimensões apenas para o hiato de pobreza com o objetivo de realçar alguns aspectos não visualizados adequadamente no gráfico em três dimensões.

Gráfico 4.7 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza absoluta - 3D



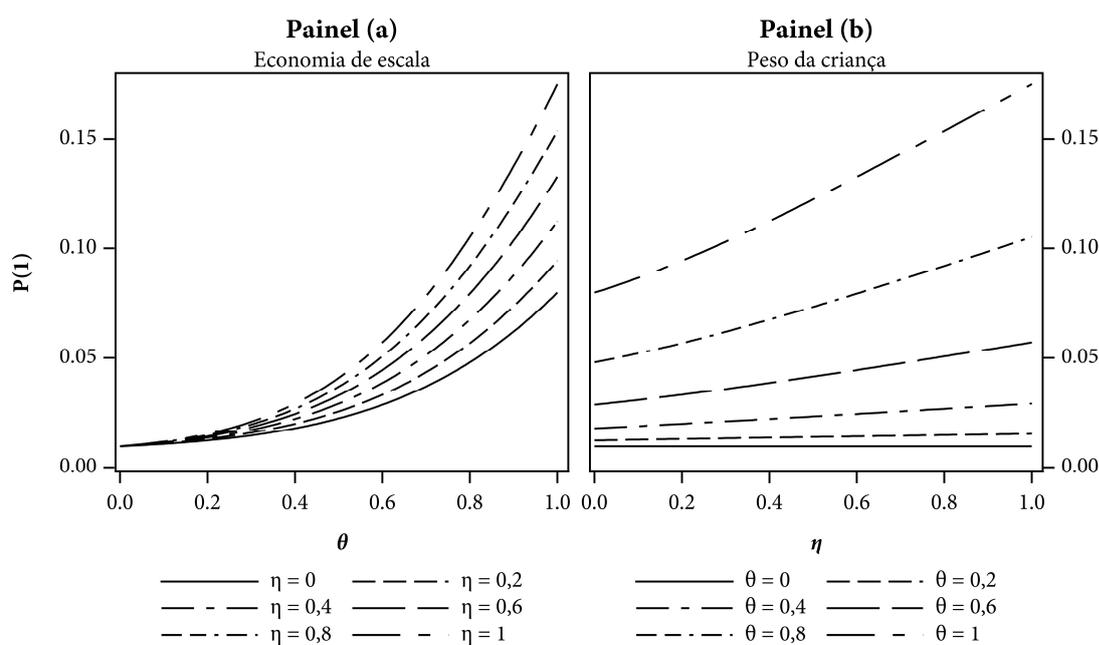
Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

Algumas conclusões são semelhantes, porém há diferenças em relação aos resultados obtidos para as medidas de desigualdade (Seção 4.4.2). Dentre as conclusões semelhantes, a despesa domiciliar calculada em termos *per capita* ( $\theta = 1$  e  $\eta = 1$ ) representa o ponto no qual a pobreza atinge o valor máximo. Além disso, alterações no peso dado à criança possuem um

efeito praticamente linear sobre as medidas de pobreza, enquanto alterações em  $\theta$  possuem um efeito não-linear. Por fim, os efeitos da economia de escala são maiores quanto maior for o valor de  $\eta$ , o que nos leva a concluir que o ponto despesa domiciliar *per capita* é aquele no qual a sensibilidade das medidas de pobreza é maior a alterações em  $\eta$  e  $\theta$ .

Por outro lado, tanto diminuições na economia de escala quanto aumentos no peso dado à criança resultam em um aumento da pobreza. Desta forma, o ponto onde as medidas de pobreza são menores ocorre em  $\theta = 0$  e  $\eta = 0$ . Isto é uma consequência do fato de a linha de pobreza ser fixa, enquanto a renda equivalente é inflada pela diminuição de  $\theta$  e  $\eta$ .

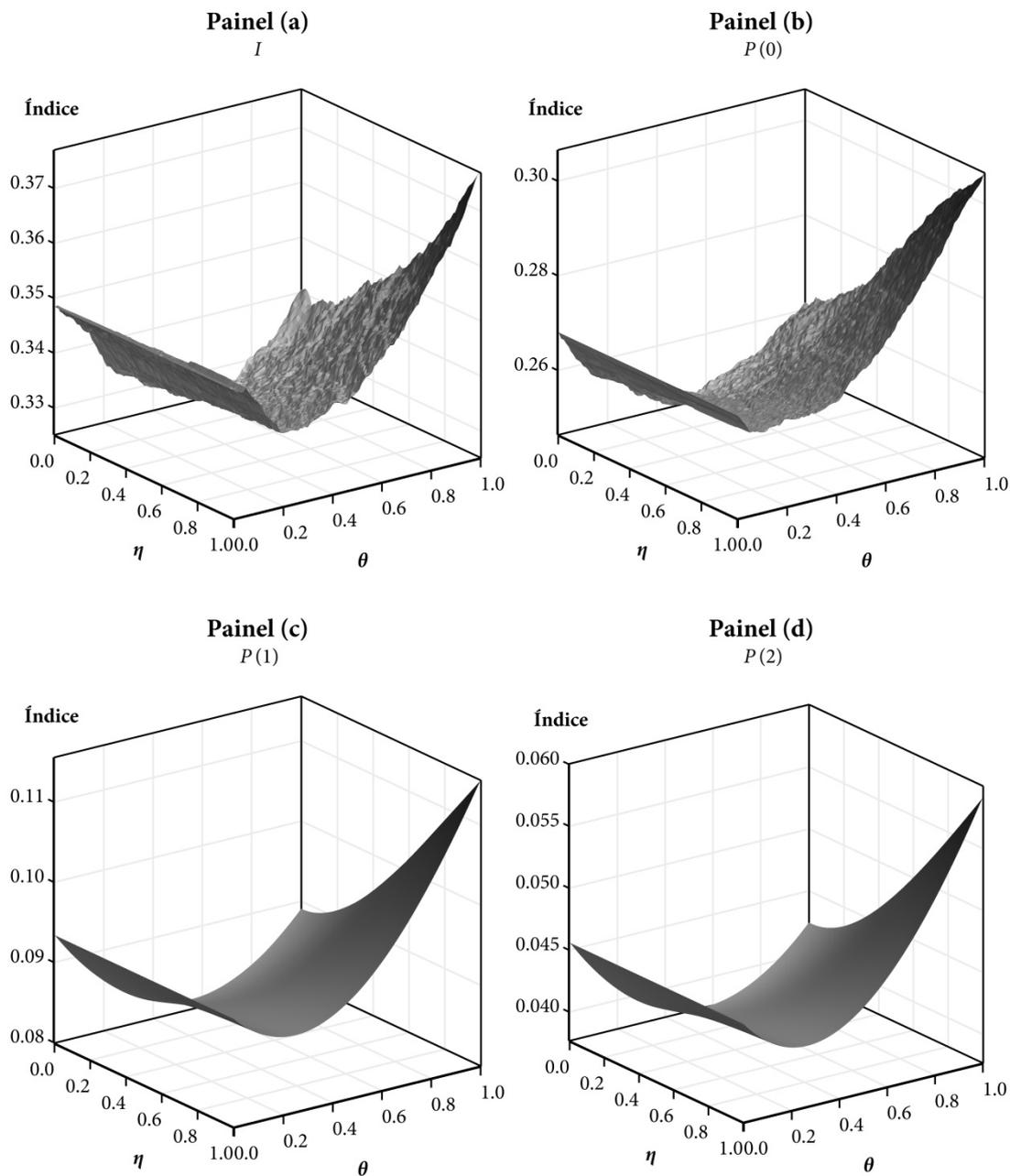
Gráfico 4.8 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza absoluta - 2D



Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

O Gráfico 4.9 mostra o efeito da escala de equivalência sobre a pobreza relativa. Neste caso, a linha de pobreza, ao invés de permanecer fixa, varia junto com os parâmetros  $\theta$  e  $\eta$ , já que a despesa equivalente média também se altera com mudanças nestes parâmetros. O Gráfico 4.10 mostra esta mesma relação para o índice de pobreza  $P(1)$  em duas dimensões.

Gráfico 4.9 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza relativa - 3D

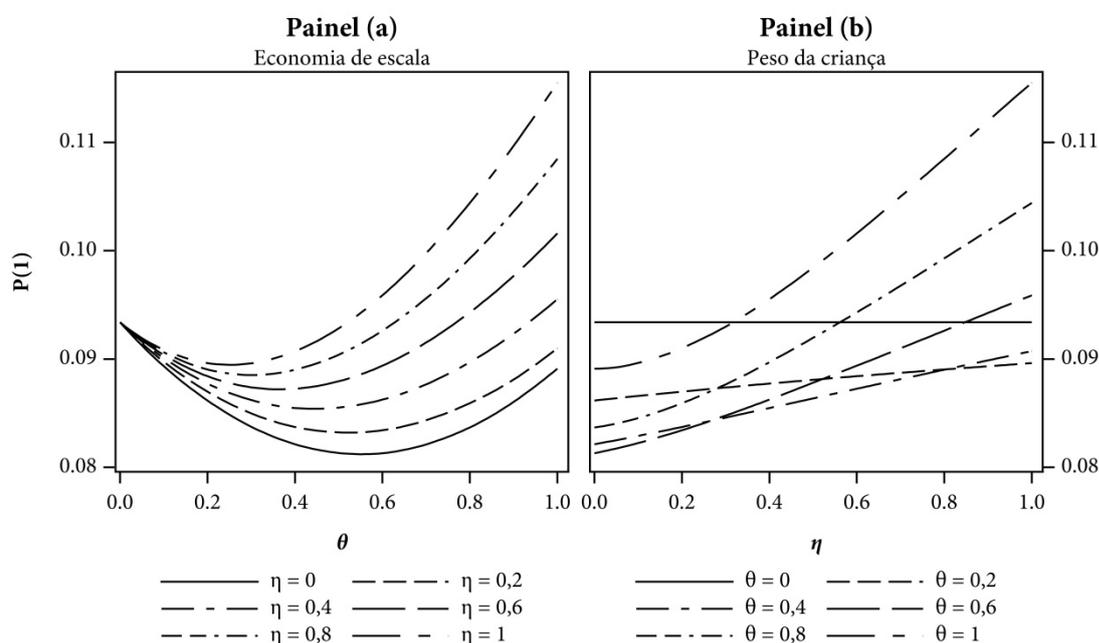


Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

Percebe-se que, excluindo-se algumas imperfeições nos gráficos, o efeito da economia de escala e do peso atribuído à criança nos índices de pobreza relativa age da mesma forma que nas medidas de desigualdade. Ou seja, aqui a relação entre os índices de pobreza e  $\theta$  também possui um formato de U. Um dos motivos para isso ocorrer é porque, com uma linha

de pobreza relativa, o nível de pobreza permanece o mesmo se todas as rendas aumentarem ou diminuïrem na mesma proporção. Este resultado é consistente com Coulter *et al.* (1992). Além disso, o valor máximo dos índices de pobreza ocorre justamente no ponto da despesa domiciliar *per capita*. É nesse ponto que se observa a maior sensibilidade da pobreza relativa a alterações nos parâmetros  $\theta$  e  $\eta$ .

Gráfico 4.10 - Efeitos das escalas de equivalência sobre a pobreza relativa - 2D



Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

#### 4.4.4 Efeitos sobre a incidência e a composição da pobreza absoluta

Embora a análise dos efeitos da escala de equivalência sobre as medidas de pobreza seja relevante, é importante lembrar que alterações nos parâmetros da economia da escala e do peso da criança também alteram a composição demográfica das pessoas que vivem abaixo da linha de pobreza.

Por exemplo, como os domicílios maiores tendem a ser aqueles com uma maior proporção de crianças, é provável que um aumento na economia de escala diminua a participação das crianças no percentual de pessoas pobres. Utilizando a mesma lógica, um

aumento nas economias de escala tenderia a aumentar a proporção de idosos dentre os indivíduos pobres, dado que em geral pessoas idosas vivem em domicílios menores e, portanto, seriam menos beneficiadas pelo acréscimo de bem-estar gerado pela economia de escala. Note que isso não significa que os idosos se tornam mais pobres com o aumento da economia de escala; pelo contrário, a análise da Seção 4.4.3 mostrou que todos os domicílios se beneficiam da economia de escala do consumo. O que se está afirmando é apenas que os domicílios com crianças obterão um aumento maior na renda equivalente do que os domicílios com idosos e, portanto, a participação de crianças dentre o contingente pobre da população tenderia a diminuir.

A análise a seguir mostra esta diferença de interpretação entre incidência e composição da população pobre. A Tabela 4.4 mostra como a proporção de pobres se modifica quando alteramos o peso da criança em relação a um adulto. No cenário básico da renda domiciliar *per capita* ( $\eta = 1$ ), 34,6% dos domicílios possuem despesa domiciliar equivalente abaixo da linha de pobreza. Isto corresponde a 42% da população na condição de pobreza. Neste cenário, a incidência da pobreza é maior entre os domicílios cuja pessoa de referência é do sexo masculino (35,5%), não-branca (46,8%), com menos de 25 anos de idade (43,2%) e sem escolaridade (58,8%). A incidência da pobreza é maior também entre os domicílios situados nas áreas rurais (61,3%) e nas regiões Norte e Nordeste (48,2% e 56,6% respectivamente). Por fim, dentre o total de pessoas da população, a pobreza tem uma incidência maior entre as crianças de 0 a 14 anos de idade (55,7%).

Tabela 4.4 - Efeito do peso da criança sobre a proporção de pobres, segundo características selecionadas

Características	Peso da criança em relação a um adulto										
	$\eta = 0$	$\eta = 0,1$	$\eta = 0,2$	$\eta = 0,3$	$\eta = 0,4$	$\eta = 0,5$	$\eta = 0,6$	$\eta = 0,7$	$\eta = 0,8$	$\eta = 0,9$	$\eta = 1$
<i>Pessoa de referência</i>											
Masculino	21,1%	23,0%	24,6%	26,4%	28,0%	29,3%	30,6%	32,0%	33,1%	34,4%	35,5%
Feminino	19,8%	21,2%	22,8%	24,3%	25,7%	27,2%	28,1%	29,2%	30,2%	31,1%	32,1%
Branco	13,7%	15,1%	16,1%	17,5%	18,5%	19,6%	20,5%	21,6%	22,5%	23,4%	24,3%
Não-Branco	29,1%	31,3%	33,6%	35,8%	37,9%	39,7%	41,2%	42,7%	44,0%	45,5%	46,8%
Menos de 25 anos	24,6%	26,5%	29,6%	31,7%	34,0%	36,7%	38,3%	40,1%	41,2%	42,3%	43,2%
25 a 34 anos	16,5%	19,8%	22,7%	25,8%	28,0%	30,4%	32,4%	34,5%	36,7%	39,0%	40,7%
35 a 44 anos	19,1%	21,4%	23,1%	24,9%	27,0%	28,8%	30,4%	32,0%	33,5%	34,8%	36,1%
45 a 54 anos	21,5%	22,5%	23,5%	24,5%	25,5%	26,1%	27,0%	28,0%	28,7%	29,3%	30,3%
55 a 64 anos	23,6%	24,4%	25,0%	25,8%	26,8%	27,4%	27,7%	28,2%	28,5%	29,0%	29,5%
65 anos ou mais	24,8%	25,6%	26,3%	27,3%	27,7%	28,0%	28,4%	28,7%	29,1%	29,6%	29,9%
Sem escolaridade	46,2%	48,3%	50,0%	52,0%	53,5%	54,6%	55,4%	56,3%	57,3%	57,9%	58,8%
1 a 3 anos de estudo	33,6%	36,7%	39,0%	41,4%	43,6%	45,5%	47,2%	48,8%	49,7%	50,9%	52,1%
4 a 7 anos de estudo	19,4%	21,7%	23,8%	26,0%	28,0%	29,9%	31,4%	33,2%	34,6%	36,4%	37,9%
8 a 10 anos de estudo	9,8%	10,9%	12,7%	14,5%	16,3%	18,0%	19,3%	20,6%	22,7%	24,1%	25,3%
11 anos de estudo	5,1%	5,7%	6,0%	6,8%	7,2%	7,9%	8,6%	9,7%	10,4%	11,0%	11,9%
12 ou mais anos de estudo	0,7%	0,7%	0,8%	0,8%	0,8%	0,9%	1,0%	1,2%	1,2%	1,4%	1,6%
<i>Localização geográfica</i>											
Urbano	16,8%	18,3%	19,7%	21,4%	22,8%	24,1%	25,2%	26,5%	27,6%	28,7%	29,8%
Rural	42,9%	46,0%	48,7%	50,8%	53,1%	54,8%	56,5%	57,9%	58,9%	60,2%	61,3%
Norte	26,4%	29,0%	31,5%	34,1%	37,1%	39,6%	41,3%	43,5%	45,0%	46,6%	48,2%
Nordeste	39,1%	42,0%	44,7%	47,0%	49,0%	50,5%	52,0%	53,3%	54,4%	55,6%	56,6%
Sudeste	12,6%	13,8%	14,8%	16,3%	17,3%	18,5%	19,4%	20,4%	21,6%	22,6%	23,7%
Sul	13,7%	15,0%	16,3%	17,6%	19,1%	20,2%	21,6%	23,1%	24,0%	25,1%	26,2%
Centro-Oeste	20,5%	22,2%	23,9%	25,5%	27,1%	28,9%	30,3%	31,7%	33,0%	34,3%	35,7%
<i>Demográficas</i>											
Pessoas de 0 a 14 anos	23,8%	28,4%	32,3%	36,5%	40,1%	43,4%	46,0%	48,7%	51,1%	53,5%	55,7%
Pessoas de 14 a 64 anos	23,9%	25,6%	27,1%	28,8%	30,3%	31,5%	32,7%	33,9%	35,0%	36,1%	37,2%
Pessoas de 65 anos ou mais	25,1%	25,8%	26,4%	27,3%	27,7%	28,1%	28,5%	28,9%	29,3%	29,8%	30,2%
<i>População</i>											
Domicílios	20,7%	22,5%	24,1%	25,8%	27,4%	28,8%	29,9%	31,2%	32,3%	33,5%	34,6%
Pessoas	24,0%	26,4%	28,5%	30,8%	32,9%	34,7%	36,2%	37,8%	39,1%	40,6%	42,0%

Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

À medida que se diminui o peso relativo de uma criança em relação a um adulto no cálculo da despesa de consumo equivalente, percebem-se importantes alterações na incidência da pobreza dentre os grupos domiciliares. No caso extremo em que uma criança não representa nenhum acréscimo de necessidades ao domicílio ( $\eta = 0$ ), o percentual de domicílios que vivem abaixo da linha de pobreza diminui para 20,7%. No entanto, os grupos que eram mais pobres antes continuam sendo mais pobres agora. O que muda neste cenário é que, em alguns casos, a incidência de pobreza entre os grupos se atenua. Por exemplo, enquanto o percentual de crianças que vivem em domicílios pobres é 1,8 vezes o percentual de

idosos nesta mesma situação quando  $\eta = 1$ , no caso de  $\eta = 0$  a diferença de incidência da pobreza entre estes grupos demográficos é praticamente inexistente.

Outra forma de analisar o efeito do peso da criança em relação a um adulto é por meio da *composição* da pobreza. Conforme mostra a Tabela 4.5, no caso de uma criança ter as mesmas necessidades de consumo de um adulto ( $\eta = 1$ ), os grupos de domicílios mais representativos dentre aqueles que estão abaixo da linha de pobreza são aqueles que possuem uma pessoa de referência do sexo masculino (75,6%), de cor não-branca (61,8%), com idade entre 35 e 44 anos (27,2%) e com escolaridade de 4 a 7 anos de estudo (32,5%). Quanto à localização geográfica, 73,2% dos domicílios pobres estariam em áreas urbanas e 40,3% viveriam no Nordeste. Por fim, 58,4% das pessoas pobres teriam entre 15 e 64 anos de idade e 37,1% teriam 14 anos ou menos.

Tabela 4.5 - Efeito do peso da criança sobre a composição da pobreza, segundo características selecionadas

Características	Peso da criança em relação a um adulto										
	$\eta = 0$	$\eta = 0,1$	$\eta = 0,2$	$\eta = 0,3$	$\eta = 0,4$	$\eta = 0,5$	$\eta = 0,6$	$\eta = 0,7$	$\eta = 0,8$	$\eta = 0,9$	$\eta = 1$
<i>Pessoa de referência</i>											
Masculino	74,8%	75,2%	75,2%	75,3%	75,3%	75,1%	75,3%	75,4%	75,4%	75,6%	75,6%
Feminino	25,2%	24,8%	24,8%	24,7%	24,7%	24,9%	24,7%	24,6%	24,6%	24,4%	24,4%
Branco	35,9%	36,5%	36,4%	36,8%	36,8%	37,0%	37,1%	37,5%	37,8%	37,9%	38,2%
Não-Branco	64,1%	63,5%	63,6%	63,2%	63,2%	63,0%	62,9%	62,5%	62,2%	62,1%	61,8%
Menos de 25 anos	6,3%	6,3%	6,5%	6,6%	6,6%	6,8%	6,8%	6,9%	6,8%	6,7%	6,7%
25 a 34 anos	17,1%	18,9%	20,2%	21,4%	22,0%	22,7%	23,2%	23,7%	24,4%	25,0%	25,3%
35 a 44 anos	24,0%	24,7%	24,9%	25,1%	25,7%	26,1%	26,4%	26,7%	26,9%	27,0%	27,2%
45 a 54 anos	20,5%	19,7%	19,2%	18,7%	18,3%	17,9%	17,8%	17,7%	17,5%	17,2%	17,3%
55 a 64 anos	15,3%	14,6%	13,9%	13,4%	13,2%	12,8%	12,4%	12,1%	11,9%	11,6%	11,5%
65 anos ou mais	16,7%	15,9%	15,3%	14,8%	14,2%	13,7%	13,3%	12,9%	12,6%	12,4%	12,1%
Sem escolaridade	30,8%	29,6%	28,6%	27,8%	27,0%	26,2%	25,5%	24,8%	24,4%	23,8%	23,4%
1 a 3 anos de estudo	31,5%	31,7%	31,5%	31,1%	31,0%	30,8%	30,7%	30,4%	29,9%	29,6%	29,3%
4 a 7 anos de estudo	27,8%	28,6%	29,3%	29,8%	30,3%	30,8%	31,1%	31,5%	31,7%	32,2%	32,5%
8 a 10 anos de estudo	6,3%	6,4%	7,0%	7,4%	7,9%	8,3%	8,5%	8,8%	9,3%	9,5%	9,7%
11 anos de estudo	3,3%	3,4%	3,4%	3,6%	3,6%	3,7%	3,9%	4,2%	4,3%	4,5%	4,7%
12 ou mais anos de estudo	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,3%	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%
<i>Localização geográfica</i>											
Urbano	68,7%	69,1%	69,5%	70,3%	70,7%	71,2%	71,5%	72,0%	72,5%	72,9%	73,2%
Rural	31,3%	30,9%	30,5%	29,7%	29,3%	28,8%	28,5%	28,0%	27,5%	27,1%	26,8%
Norte	7,9%	8,0%	8,1%	8,2%	8,5%	8,6%	8,6%	8,7%	8,7%	8,7%	8,7%
Nordeste	46,5%	46,0%	45,7%	44,8%	44,1%	43,3%	42,8%	42,1%	41,4%	40,9%	40,3%
Sudeste	27,6%	27,9%	28,0%	28,7%	28,9%	29,3%	29,5%	29,8%	30,4%	30,8%	31,2%
Sul	10,8%	10,9%	11,0%	11,1%	11,4%	11,5%	11,7%	12,0%	12,1%	12,2%	12,3%
Centro-Oeste	7,2%	7,2%	7,2%	7,2%	7,2%	7,3%	7,4%	7,4%	7,4%	7,4%	7,5%
<i>Características demográficas</i>											
Pessoas de 0 a 14 anos	27,8%	30,1%	31,7%	33,1%	34,1%	35,1%	35,6%	36,1%	36,5%	36,9%	37,1%
Pessoas de 15 a 64 anos	65,7%	63,8%	62,6%	61,4%	60,6%	59,9%	59,5%	59,1%	58,8%	58,5%	58,4%
Pessoas de 65 anos ou mais	6,5%	6,1%	5,7%	5,5%	5,2%	5,0%	4,9%	4,8%	4,7%	4,6%	4,5%

Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

No caso de a criança não representar nenhum acréscimo de necessidades ao domicílio ( $\eta = 0$ ), a composição da pobreza se altera em algumas situações. Neste cenário, observa-se um aumento da participação dos domicílios com pessoas de referência com mais de 44 anos de idade e com escolaridade de zero a três anos de estudo. As maiores alterações na composição da pobreza, no entanto, ocorrem em relação à região geográfica e em relação às características demográficas dos moradores. Observa-se um aumento substancial dos domicílios da região Nordeste (de 40,3% para 46,5%) na composição dos domicílios pobres. Quanto às características demográficas, há uma diminuição da participação das crianças de 0 a 14 anos entre as pessoas pobres (de 37,1% para 27,8%) e o consequente aumento de participação das pessoas com 15 anos ou mais de idade.

A Tabela 4.6 abaixo mostra o efeito da economia de escala sobre a proporção de pobres. Os dados apontam que quando se parte da situação em que não há economias de escala ( $\theta = 1$ ) para o caso extremo em que as economias de escala são absolutas ( $\theta = 0$ ), as mudanças na incidência da pobreza entre os grupos domiciliares são muito maiores do que aquelas provocadas por uma alteração no peso da criança em relação a um adulto. A mudança mais óbvia que se observa é o acentuado declínio da incidência de pobreza em todos os grupos analisados. O percentual de domicílios pobres, por exemplo, cai de 34,6% para 3,6%. Até aqui, este efeito já havia sido reportado na Seção 4.4.3. O que é novo na Tabela 4.6 é a observação de que a incidência da pobreza deixou de ser predominante em alguns grupos domiciliares e passou a ser predominante em outros.

Tabela 4.6 - Efeito da economia de escala sobre a proporção de pobres, segundo características selecionadas

Características	Economia de escala										
	$\theta = 0$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,2$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,4$	$\theta = 0,5$	$\theta = 0,6$	$\theta = 0,7$	$\theta = 0,8$	$\theta = 0,9$	$\theta = 1$
<i>Pessoa de referência</i>											
Masculino	3,3%	4,1%	5,5%	7,3%	9,8%	12,9%	16,6%	20,7%	25,3%	30,3%	35,5%
Feminino	4,5%	5,2%	6,6%	8,2%	10,4%	13,0%	16,0%	20,2%	24,1%	28,0%	32,1%
Branco	2,0%	2,5%	3,3%	4,3%	5,9%	8,0%	10,3%	13,2%	16,4%	20,3%	24,3%
Não-Branco	5,4%	6,7%	8,8%	11,3%	14,9%	18,7%	23,8%	29,3%	35,3%	41,0%	46,8%
Menos de 25 anos	6,1%	7,6%	9,6%	12,6%	16,2%	19,5%	24,3%	28,9%	34,1%	39,2%	43,2%
25 a 34 anos	3,5%	4,5%	6,4%	8,5%	11,5%	15,3%	19,6%	24,6%	29,6%	34,8%	40,7%
35 a 44 anos	2,7%	3,5%	4,9%	6,5%	9,2%	12,3%	16,1%	20,9%	26,1%	31,2%	36,1%
45 a 54 anos	2,6%	3,3%	4,4%	6,0%	7,8%	10,3%	13,3%	16,7%	20,4%	25,3%	30,3%
55 a 64 anos	4,1%	4,7%	5,8%	7,2%	9,1%	11,3%	14,5%	17,6%	21,4%	25,2%	29,5%
65 anos ou mais	5,3%	6,0%	7,2%	8,6%	10,5%	12,9%	15,6%	18,8%	22,6%	26,2%	29,9%
Sem escolaridade	10,9%	13,1%	16,2%	20,3%	25,1%	30,4%	35,9%	42,2%	48,6%	53,6%	58,8%
1 a 3 anos de estudo	5,4%	6,7%	9,3%	12,0%	16,0%	21,3%	26,9%	32,8%	39,2%	45,7%	52,1%
4 a 7 anos de estudo	2,7%	3,4%	4,6%	6,3%	8,8%	11,8%	15,8%	20,7%	25,9%	32,0%	37,9%
8 a 10 anos de estudo	1,2%	1,4%	1,9%	2,5%	4,1%	5,6%	8,2%	11,3%	15,4%	20,0%	25,3%
11 anos de estudo	0,4%	0,6%	1,0%	1,3%	1,7%	2,4%	3,5%	5,1%	6,7%	9,2%	11,9%
12 ou mais anos de estudo	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	0,2%	0,4%	0,5%	0,7%	1,0%	1,6%
<i>Localização geográfica</i>											
Urbano	2,6%	3,2%	4,2%	5,5%	7,4%	9,8%	12,9%	16,5%	20,6%	25,1%	29,8%
Rural	9,0%	11,3%	14,8%	18,9%	24,3%	30,2%	36,6%	43,2%	49,8%	55,6%	61,3%
Norte	3,2%	4,4%	6,4%	9,0%	12,3%	16,9%	21,9%	28,2%	35,1%	41,4%	48,2%
Nordeste	7,9%	9,9%	13,2%	17,0%	21,8%	27,4%	33,3%	39,6%	45,8%	51,2%	56,6%
Sudeste	1,9%	2,2%	2,8%	3,6%	4,9%	6,5%	9,0%	12,0%	15,4%	19,5%	23,7%
Sul	1,8%	2,2%	2,9%	3,8%	5,4%	7,6%	9,8%	13,0%	16,6%	21,3%	26,2%
Centro-Oeste	3,7%	4,7%	5,8%	7,3%	9,7%	12,6%	16,1%	20,2%	25,1%	30,2%	35,7%
<i>Demográficas</i>											
Pessoas de 0 a 14 anos	3,3%	4,8%	7,6%	10,8%	15,5%	21,0%	27,3%	34,3%	41,7%	48,7%	55,7%
Pessoas de 14 a 64 anos	2,4%	3,2%	4,7%	6,4%	9,0%	12,2%	16,2%	20,8%	26,0%	31,5%	37,2%
Pessoas de 65 anos ou mais	4,1%	4,7%	5,9%	7,1%	9,0%	11,6%	14,5%	17,9%	22,2%	26,0%	30,2%
<i>População</i>											
Domicílios	3,6%	4,4%	5,8%	7,5%	10,0%	12,9%	16,5%	20,6%	25,0%	29,7%	34,6%
Pessoas	2,8%	3,8%	5,6%	7,7%	10,8%	14,6%	19,2%	24,4%	30,1%	36,0%	42,0%

Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

Tome o caso das características demográficas dos moradores. No cenário onde não há economias de escala ( $\theta = 1$ ), a pobreza incide mais sobre as crianças de 0 a 14 anos. No cenário onde as economias de escala são absolutas ( $\theta = 0$ ), por outro lado, a pobreza passa a incidir mais sobre as pessoas com 65 anos ou mais de idade. Este tipo de efeito ocorre também em relação ao sexo e em algumas faixas etárias da pessoa de referência do domicílio, além de em algumas regiões geográficas.

A Tabela 4.7 mostra como a composição da pobreza se modifica à medida que aumenta a economia de escala do consumo ( $\theta$  diminui). Dentre os efeitos mais significativos estão: a) uma diminuição da participação dos domicílios com pessoas de referência entre 25 e

54 anos; *b*) um aumento na participação dos domicílios com pessoa de referência sem escolaridade; *c*) um aumento de participação dos domicílios da região Nordeste entre os domicílios pobres; e *d*) um aumento da participação das pessoas com 65 anos ou mais entre os indivíduos pobres.

Tabela 4.7 - Efeito da economia de escala sobre a composição da pobreza, segundo características selecionadas

Características	Economia de escala										
	$\theta = 0$	$\theta = 0,1$	$\theta = 0,2$	$\theta = 0,3$	$\theta = 0,4$	$\theta = 0,5$	$\theta = 0,6$	$\theta = 0,7$	$\theta = 0,8$	$\theta = 0,9$	$\theta = 1$
<i>Pessoa de referência</i>											
Masculino	67,2%	68,7%	70,1%	71,4%	72,4%	73,4%	74,4%	74,2%	74,6%	75,2%	75,6%
Feminino	32,8%	31,3%	29,9%	28,6%	27,6%	26,6%	25,6%	25,8%	25,4%	24,8%	24,4%
Branco	30,8%	30,5%	30,6%	31,2%	31,9%	33,7%	34,0%	34,9%	35,6%	37,0%	38,2%
Não-Branco	69,2%	69,5%	69,4%	68,8%	68,1%	66,3%	66,0%	65,1%	64,4%	63,0%	61,8%
Menos de 25 anos	9,0%	9,3%	8,8%	8,9%	8,7%	8,1%	7,9%	7,5%	7,3%	7,0%	6,7%
25 a 34 anos	21,0%	22,1%	23,5%	24,4%	24,9%	25,5%	25,6%	25,7%	25,4%	25,2%	25,3%
35 a 44 anos	19,7%	20,6%	21,7%	22,3%	24,0%	24,9%	25,5%	26,5%	27,1%	27,3%	27,2%
45 a 54 anos	14,2%	14,8%	15,0%	15,6%	15,5%	15,7%	15,9%	16,0%	16,0%	16,8%	17,3%
55 a 64 anos	15,5%	14,2%	13,5%	12,8%	12,2%	11,8%	11,8%	11,5%	11,5%	11,4%	11,5%
65 anos ou mais	20,6%	19,1%	17,4%	16,0%	14,8%	14,0%	13,3%	12,8%	12,7%	12,3%	12,1%
Sem escolaridade	42,0%	41,2%	38,4%	37,2%	34,8%	32,5%	30,1%	28,3%	26,8%	24,8%	23,4%
1 a 3 anos de estudo	29,3%	29,7%	31,3%	31,0%	31,2%	32,1%	31,8%	31,0%	30,5%	29,9%	29,3%
4 a 7 anos de estudo	22,9%	22,7%	23,5%	24,8%	26,1%	27,0%	28,4%	29,8%	30,7%	31,9%	32,5%
8 a 10 anos de estudo	4,3%	4,3%	4,3%	4,5%	5,5%	5,7%	6,6%	7,3%	8,2%	8,9%	9,7%
11 anos de estudo	1,5%	2,0%	2,4%	2,4%	2,4%	2,5%	2,9%	3,3%	3,7%	4,2%	4,7%
12 ou mais anos de estudo	0,1%	0,1%	0,2%	0,2%	0,1%	0,1%	0,2%	0,2%	0,3%	0,3%	0,4%
<i>Localização geográfica</i>											
Urbano	61,8%	61,1%	61,5%	62,0%	63,1%	64,6%	66,4%	68,3%	70,0%	71,7%	73,2%
Rural	38,2%	38,9%	38,5%	38,0%	36,9%	35,4%	33,6%	31,7%	30,0%	28,3%	26,8%
Norte	5,5%	6,2%	6,8%	7,5%	7,7%	8,1%	8,3%	8,6%	8,7%	8,7%	8,7%
Nordeste	54,8%	55,4%	55,8%	55,7%	53,8%	52,3%	49,9%	47,5%	45,1%	42,4%	40,3%
Sudeste	24,1%	22,6%	21,9%	21,6%	22,6%	22,9%	25,0%	26,5%	28,0%	29,9%	31,2%
Sul	8,1%	8,1%	8,2%	8,2%	8,8%	9,6%	9,7%	10,3%	10,8%	11,7%	12,3%
Centro-Oeste	7,5%	7,7%	7,3%	7,1%	7,1%	7,1%	7,1%	7,1%	7,3%	7,4%	7,5%
<i>Características demográficas</i>											
Pessoas de 0 a 14 anos	33,5%	35,7%	38,2%	39,2%	40,1%	40,1%	39,8%	39,3%	38,7%	37,9%	37,1%
Pessoas de 15 a 64 anos	57,4%	56,5%	55,3%	55,0%	54,8%	54,9%	55,5%	56,1%	56,7%	57,6%	58,4%
Pessoas de 65 anos ou mais	9,1%	7,8%	6,6%	5,8%	5,2%	4,9%	4,7%	4,6%	4,6%	4,5%	4,5%

Fonte: Estimativas obtidas a partir dos dados da POF 2002-2003.

## 4.5 CONCLUSÃO

Os resultados apresentados neste capítulo mostram que a utilização de escalas de equivalência pode alterar significativamente a percepção de pobreza e de desigualdade de uma sociedade, com impactos variados entre os grupos demográficos que a compõem. Em

particular, diferentes parâmetros no peso relativo à criança e na economia de escala do consumo domiciliar podem alterar as posições relativas de idosos e crianças na distribuição de despesa, com reflexos importantes para a discussão de como os recursos públicos devem ser repartidos entre estes grupos demográficos.



## **5 ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA BASEADAS NA ABORDAGEM DA PREFERÊNCIA REVELADA**

### **5.1 INTRODUÇÃO**

Nos estudos sobre desigualdade e pobreza, a abordagem mais comum é centrar a análise em um indicador de bem-estar obtido a partir de informações do domicílio ou da família – em geral a renda familiar ou domiciliar *per capita* – para indicar o bem-estar de cada membro. Como muitas decisões são tomadas dentro do âmbito familiar, a existência de membros que consomem recursos mas que não possuem renda própria faz com que os rendimentos auferidos pelos membros remunerados sejam em alguma medida repartidos entre os demais membros da família. Isso faz com que a família ou o domicílio seja uma unidade de referência natural para se analisar o bem-estar dos indivíduos.

É importante saber, portanto, o quanto os membros de um domicílio estão melhores em relação aos membros de outro domicílio. Dado que ambos os domicílios se deparam com os mesmos preços, uma maneira de se fazer esta comparação de bem-estar é simplesmente comparar a renda domiciliar *per capita*. Entretanto, tal abordagem levanta a questão de o quanto essas medidas *per capita* formam uma base para a comparação de bem-estar entre domicílios. Como colocam Deaton e Muellbauer (1980a, cap. 8), é possível (e provável) que as necessidades dos indivíduos variem com as características dos membros do domicílio: crianças possuem menos necessidades que os adultos; idosos possuem necessidades diferentes de crianças. Além disso, é provável que a organização dos indivíduos em domicílios crie espaço para a existência de economias de escala no consumo domiciliar, seja porque os membros da família se beneficiam do consumo um do outro, seja porque existem bens públicos que podem ser utilizados por todos os membros da família sem nenhum custo adicional.

Nelson (1988) cita diversas fontes de economia de escala no consumo domiciliar. Uma delas ocorre com o compartilhamento de bens públicos (ou parcialmente públicos) pelos membros do domicílio. Tais bens são caracterizados pelo fato de que o seu consumo por parte de um morador não exclui completamente o seu consumo por outros membros do domicílio. À medida que se aumenta o número de membros do domicílio, o bem público se torna mais barato, reduzindo o custo individual necessário para se alcançar o nível de bem-estar anterior à chegada de um novo membro. Enquadram-se nesta categoria de bens a energia elétrica que ilumina uma sala, a imagem e o som de uma televisão e a refrigeração produzida por uma geladeira.

Outra fonte de economias de escala é a presença de retornos crescentes na produção de bens e serviços dentro do domicílio como, por exemplo, na preparação de alimentos. Como a adição de um novo membro exige um acréscimo pequeno no tempo de preparação das refeições, o tempo total desta atividade e o seu custo correspondente sofrerão um acréscimo menos que proporcional ao aumento do número de membros do domicílio.

Por fim, a economia de escala pode ocorrer também no consumo de bens privados, quando há vantagens nas compras de alguns produtos em grandes quantidades (como, por exemplo, alimentos) ou quando os custos de transação são diminuídos por meio do aproveitamento de bens entre os membros do domicílio (por exemplo, em famílias com filhos, as roupas e brinquedos dos filhos mais velhos podem ser em alguma medida reaproveitados pelos filhos mais novos).

De acordo com Deaton e Muellbauer (1986), em todas as pesquisas domiciliares de que se tem notícia, a despesa de consumo é positivamente relacionada com o tamanho do domicílio, mas menos que proporcionalmente, o que faz com que a despesa domiciliar *per capita* decresça com o número de membros do domicílio<sup>27</sup>. Como resultado, o uso da despesa (ou renda) domiciliar *per capita* como medida de bem-estar leva automaticamente a uma

---

<sup>27</sup> Ao longo deste capítulo, as denominações “tamanho do domicílio” e “número de membros do domicílio” serão utilizadas indistintamente.

sobrerrepresentação dos domicílios com muitos membros entre os pobres, e o contrário ocorre para os domicílios com poucos membros. Se, ao invés da despesa domiciliar *per capita*, for utilizado um índice que atribui um baixo valor para as necessidades das crianças e que incorpore as economias de escala do consumo domiciliar, será observado um número menor de crianças na pobreza, e um número relativamente maior de idosos e de domicílios com poucos membros nessa condição em comparação com as medições feitas pela renda domiciliar *per capita*.

Segundo Deaton (1997, p. 242), a solução mais óbvia para esse problema é definir um sistema de pesos onde uma criança conte apenas uma fração de um adulto e um membro adicional conte uma fração do membro anterior, de maneira que o tamanho efetivo do domicílio, representado pela soma dessas frações, é mensurado não mais pelo número de moradores, mas pelo número de “unidades equivalentes efetivas”. O primeiro componente desse sistema equivale à unidade de consumo equivalente, e representa as diferenças de necessidades dos membros da família em relação a um membro de comparação (geralmente um adulto). O segundo componente equivale à economia de escala e representa a economia de gasto trazida por um membro adicional ao domicílio, mantida a mesma renda domiciliar *per capita*. Os dois componentes combinados formariam a escala de equivalência propriamente dita. Definido esse sistema de pesos através de uma função  $m^h = m(z^h)$  que relaciona o vetor de características demográficas do domicílio ( $z^h$ ) com o número de unidades equivalentes efetivas  $m^h$ , a comparação de bem-estar dos domicílios poderia ser feita utilizando-se não mais a renda domiciliar *per capita*, mas a renda domiciliar por equivalente.

Definida a importância das escalas de equivalência, o desafio é saber qual o valor que as escalas assumem. Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar os principais modelos de escalas de equivalência desenvolvidos dentro da abordagem da preferência revelada, assim como seus pressupostos, limitações e aplicabilidade empírica. Em seguida, os principais modelos são estimados para o Brasil a partir dos dados da Pesquisa de Orçamento Familiar 2002-2003.

## 5.2 PRESSUPOSTOS E DEFINIÇÕES

### 5.2.1 Teoria do consumidor

Antes de começar a discussão sobre escalas de equivalências, vale lembrar alguns conceitos da teoria do consumidor tradicional que serão utilizados ao longo do capítulo. Segundo esta teoria, as preferências dos indivíduos podem ser representadas por uma função utilidade crescente e quase-côncava  $u = u(\mathbf{q})$  que atribui um valor numérico para cada cesta de consumo, onde  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K)$  é um vetor com  $K$  bens de consumo. Este valor numérico possui um significado apenas ordinal: uma cesta que dá um valor maior para a utilidade é preferida a uma cesta que dá um valor menor para a utilidade, mas não é possível saber o *quão* preferida ela é. Desta forma, a função de utilidade não é única; qualquer transformação monotônica positiva dela representa as mesmas preferências do consumidor.

Dada a utilidade de um indivíduo – representada por  $u(\cdot)$  –, o dispêndio total ou a renda disponível  $x$  e o vetor de preços  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_K)$ , o problema do consumidor consiste em maximizar a sua utilidade escolhendo a melhor cesta de bens  $\mathbf{q}$  que satisfaça a restrição orçamentária  $\mathbf{p}'\mathbf{q} = \sum_{k=1}^K p_k q_k \leq x$ ,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}} \quad & u(\mathbf{q}) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{p}'\mathbf{q} \leq x \end{aligned} \quad (5.1)$$

A solução deste problema é o sistema de funções de demanda Marshallianas  $\mathbf{q} = \mathbf{g}(x, \mathbf{p})$  que fornece a cesta de consumo ótima do indivíduo como uma função dos preços e do dispêndio total. Substituindo este vetor de funções na função de utilidade  $u(\mathbf{q})$ , se obtém a função de utilidade indireta  $v(x, \mathbf{p}) = u(\mathbf{g}(x, \mathbf{p}))$ , definida como

$$v(x, \mathbf{p}) = \max_{\mathbf{q}} \{ u(\mathbf{q}) \mid \mathbf{p}'\mathbf{q} \leq x \} \quad (5.2)$$

O problema dual ao de maximização do consumidor é o problema de minimização do custo  $\mathbf{p}'\mathbf{q}$  de se alcançar um determinado nível de utilidade  $u$ ,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q}} \quad & \mathbf{p}'\mathbf{q} \\ \text{sujeito a} \quad & u(\mathbf{q}) \geq u \end{aligned} \quad (5.3)$$

A solução deste problema consiste no sistema de funções de demandas Hicksianas  $\mathbf{q} = \mathbf{h}(u, \mathbf{p})$  que fornece o vetor de consumo necessário para se atingir o nível de utilidade  $u$  a preços  $\mathbf{p}$ . Substituindo este vetor de funções na função valor do problema de minimização do custo, obtém-se a função custo correspondente,  $c(u, \mathbf{p}) = \mathbf{p}'\mathbf{h}(u, \mathbf{p})$ , definida como

$$c(u, \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{q}} \{ \mathbf{p}'\mathbf{q} \mid u(\mathbf{q}) \geq u \} \quad (5.4)$$

Esta função fornece o custo mínimo necessário para se obter o nível de utilidade  $u$  ao nível de preços  $\mathbf{p}$ . Usando a relação de dualidade  $c(v(x, \mathbf{p}), \mathbf{p}) = x$ , podemos inverter  $c(u, \mathbf{p})$  para obter a função de utilidade indireta (5.2).

Conhecida a função custo, é possível recuperar a função de demanda Hicksiana usando o *lema de Shephard*

$$h_k(u, \mathbf{p}) = \frac{\partial c(u, \mathbf{p})}{\partial p_k} \quad (5.5)$$

Ou, na forma de frações do dispêndio total,

$$w_k(u, \mathbf{p}) = \frac{\partial \ln c(u, \mathbf{p})}{\partial \ln p_k} = \frac{p_k}{c(u, \mathbf{p})} \frac{\partial c(u, \mathbf{p})}{\partial p_k} \quad (5.6)$$

As funções de demanda Marshalianas podem ser obtidas a partir da função de utilidade indireta utilizando a *identidade de Roy*

$$g_k(x, \mathbf{p}) = - \frac{\partial v(x, \mathbf{p}) / \partial p_k}{\partial v(x, \mathbf{p}) / \partial x} \quad (5.7)$$

Por fim, as funções de demanda Marshaliana e Hicksiana se relacionam da seguinte forma

$$g_k(x, \mathbf{p}) = h_k(v(x, \mathbf{p}), \mathbf{p}) \quad (5.8)$$

$$h_k(u, \mathbf{p}) = g_k(c(u, \mathbf{p}), \mathbf{p}) \quad (5.9)$$

O problema de maximização do consumidor impõe algumas restrições ao sistema de demanda. A primeira é a propriedade da *aditividade*, segundo a qual a soma das despesas com a cesta de consumo é igual ao dispêndio total (ou a renda disponível do domicílio),  $\sum_{k=1}^K p_k q_k = x$ . A propriedade da *homogeneidade* estabelece que um aumento simultâneo e

proporcional na renda e em todos os preços não altera a demanda pelos bens de consumo. A propriedade da *negatividade* estabelece que a matriz de substituição (testável a partir da matriz de Slutsky) é semidefinida negativa, implicando que um aumento no preço de um bem deve fazer com que a demanda por aquele bem não aumente, isto é,  $\partial h_k(u, \mathbf{p}) / \partial p_k \leq 0$ . A propriedade de *simetria* impõe a restrição de que as derivadas cruzadas da demanda Hicksiana em relação aos preços sejam simétricas, isto é,  $\partial h_i(u, \mathbf{p}) / \partial p_j = \partial h_j(u, \mathbf{p}) / \partial p_i$ .

Uma forma útil de se estimar curvas de Engel consistentes com a teoria do consumidor é utilizar a equação concebida independentemente por Working (1943) e Lesser (1963), e que ficou conhecida como *equação de Working-Lesser*:

$$w_k = \alpha_k + \beta_k \ln x \quad (5.10)$$

onde  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  são parâmetros a serem estimados. De acordo com Deaton e Muellbauer (1980a, cap. 1), se a equação (5.10) for estimada por Mínimos Quadrados Ordinários para cada bem  $k$  separadamente, a condição de aditividade será automaticamente satisfeita. Isso significa que  $\sum_{k=1}^K w_k = 1$  ou, alternativamente,

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^K \beta_k = 0 \quad (5.11)$$

A equação (5.10) é o ponto de partida o Modelo de Demanda Ideal de Deaton e Muellbauer (1980b) e será utilizada diversas vezes ao longo deste capítulo.

Por fim, a *métrica monetária da função utilidade* é definida por

$$\mu(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = c(u(\mathbf{q}), \mathbf{p}) \quad (5.12)$$

Esta função define o custo mínimo de se adquirir uma cesta ao menos tão boa quanto  $\mathbf{q}$ . Para  $\mathbf{p}$  fixo, esta função pode ser interpretada como uma função de utilidade. Para  $\mathbf{q}$  fixo, esta função pode ser interpretada como uma função custo. Conforme se discute no Apêndice A, este conceito pode ser aproximado empiricamente adicionando-se todas as despesas de consumo do domicílio e dividindo-as por um índice de Paasche de preços (Deaton; Zaidi, 2002). O agregado de consumo assim construído pode ser utilizado como uma medida de bem-estar econômico do domicílio.

### 5.2.2 Escalas de equivalências: definição

Na teoria do custo de vida tradicional, um índice de custo de vida  $P(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, u)$  é definido como o custo relativo necessário para igualar o bem-estar de um indivíduo em dois regimes de preços diferentes. Se  $u$  é o nível de bem-estar de referência e  $\mathbf{p}^1$  e  $\mathbf{p}^0$  são dois vetores quaisquer de preços, então o índice de custo de vida é dado por:

$$P(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, u) = \frac{c(u, \mathbf{p}^1)}{c(u, \mathbf{p}^0)} \quad (5.13)$$

onde  $c(\cdot)$  representa a função custo do domicílio, conforme discutido anteriormente. Assim, se  $P(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, u) > 1$ , então o custo de vida do domicílio aumentou aos novos preços  $\mathbf{p}^1$ , e uma compensação é necessária para restabelecer o nível de bem-estar do domicílio àquele do momento anterior à mudança de preços, quando os preços eram dados por  $\mathbf{p}^0$ .

A literatura sobre escalas de equivalências estende a definição (5.13) de forma a incorporar as características demográficas dos domicílios. Assim, da mesma forma que os índices de custo de vida comparam o custo relativo de um indivíduo em dois regimes de preços diferentes, na abordagem das escalas de equivalência as características demográficas fazem um papel similar ao dos preços, e a comparação do custo de vida é feita entre dois domicílios com composições demográficas diferentes.

Para que isto seja possível, no entanto, é necessário abandonar o foco no *indivíduo* que consta em (5.13) e centrar o problema no *domicílio*, entendido como um conjunto de pessoas com relações afetivas e econômicas comuns, mas com necessidades e demandas individuais distintas. Ao proceder dessa forma, nos deparamos com novos desafios teóricos e empíricos, como a questão das comparações interpessoais de bem-estar, a definição da função de bem-estar do domicílio, a dimensão do conjunto na qual as preferências sociais do domicílio são representadas, além de uma série de problemas de identificação do modelo teórico. Cada um destes desafios teóricos será tratado ou em uma seção específica ou ao longo do capítulo. Por ora, basta saber que eles existem e não devem ser negligenciados.

O ponto de partida para se definir as escalas de equivalências consiste em definir o problema de alocação de recursos do domicílio. Como um domicílio compreende um agrupamento de indivíduos, esse problema de alocação pode ser interpretado como um mini problema de escolha social. Assim, suponha que o bem-estar do domicílio seja representado por<sup>28</sup>

$$u = u(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{q}$  é a cesta de consumo da família e  $\mathbf{z}$  é um vetor de características demográficas como, por exemplo, o número de pessoas por faixa etária e sexo. Dado um vetor de preços  $\mathbf{p}$  e um montante de renda total disponível  $x$ , o problema do domicílio consiste em

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{q}} \quad & u(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \\ \text{sujeito a} \quad & \mathbf{p}'\mathbf{q} \leq x \end{aligned} \quad (5.15)$$

Note que a maximização da utilidade domiciliar é feita apenas em relação a  $\mathbf{q}$ , isto é, assume-se que o domicílio não possui preferências sobre as suas características demográficas  $\mathbf{z}$ , consideradas exógenas (cf. Seção 5.2.4). Observe também que, neste nível de generalidade, a função de bem-estar (5.14) não incorpora nenhum pressuposto a respeito do modelo de barganha implícito em uma função de utilidade domiciliar, onde o importante é a determinação das escolhas familiares em detrimento das escolhas individuais de seus membros. De fato, a função de bem-estar (5.14) pode representar apenas as preferências dos pais sobre a alocação de recursos do domicílio, excluindo as considerações que as crianças possam possuir sobre esta alocação; ou então cada membro do domicílio pode ter uma função de utilidade separada e uma regra de repartição de recursos é estabelecida entre eles com base em um modelo de barganha cooperativo; ou então podemos ter um ditador benevolente que decide a alocação de recursos de todos os membros com base em um critério de eficiência de Pareto.

---

<sup>28</sup> Durante este capítulo os termos “família” e “domicílio”, e “bem-estar” e “utilidade” serão utilizados como sinônimos, apenas para manter a discussão mais próxima das diversas denominações empregadas na literatura. Do ponto de vista conceitual, no entanto, os termos “domicílio” e “bem-estar” são os mais corretos para a discussão sobre escalas de equivalência.

Associado ao problema de maximização (5.15), temos uma função custo  $c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z})$  que fornece o dispêndio mínimo necessário para se alcançar o nível de utilidade  $u$  a preços  $\mathbf{p}$  e composição demográfica familiar  $\mathbf{z}$ . Denote por  $r$  um domicílio de referência e  $h$  um domicílio de comparação. Assim, se  $\mathbf{p}$  e  $u$  representam um nível de preços e de bem-estar de referência, então

$$m(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h) = \frac{c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h)}{c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^r)} \quad (5.16)$$

representa o custo relativo de dois domicílios com características demográficas diferentes necessário para se obter um mesmo nível de bem-estar. A este custo relativo se dá o nome de *escala de equivalência*.

Ao se introduzir as características demográficas do domicílio na função custo, ela deve satisfazer um conjunto de restrições para que a consistência do arcabouço teórico apresentado na Seção 5.2.1 se mantenha válida, isto é, o vetor  $\mathbf{z}^h$  não pode ser introduzido de forma arbitrária. Além disso, por definição,  $m(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^r) = 1$ , isto é, a escala de equivalência do domicílio de referência será sempre igual a um. Se, por exemplo: *a)* o domicílio de referência é composto por dois adultos; *b)* o domicílio de comparação é composto por dois adultos e uma criança; e *c)* a escala de equivalência entre estes dois domicílios é  $m = 1,2$ ; então o domicílio com criança precisa de 20% mais recursos para obter o mesmo nível de bem-estar do domicílio de referência.

Alternativamente, ao invés de calcularmos o custo relativo de dois domicílios com composições demográficas diferentes, pode-se simplesmente calcular a compensação necessária para que o domicílio de comparação  $h$  fique ao menos tão bem quanto o domicílio de referência  $r$ ,

$$C = c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h) - c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^r) \quad (5.17)$$

Este custo pode ser interpretado como o incremento orçamentário necessário para restaurar o bem-estar de uma família com composição demográfica  $\mathbf{z}^h$  ao nível de bem-estar de uma família com composição demográfica  $\mathbf{z}^r$ .

### 5.2.3 Comparações interpessoais de bem-estar

Segundo Lind (2000), para que a razão entre as funções custo de dois domicílios diferentes possua algum sentido, é necessário que se façam comparações de utilidade entre domicílios diferentes, ou seja, devemos ser capazes de dizer se dois domicílios diferentes usufruem o mesmo bem-estar material. Para tanto, será útil apresentar a classificação desenvolvida por Sen (1977) e Roberts (1980) a respeito dos diversos tipos de comparações interpessoais de utilidade.

Seja  $U_h : X \rightarrow \mathbb{R}$  a utilidade de um domicílio  $h$ ,  $h = 1, \dots, H$ , e  $U = (U_1, \dots, U_H) \in \mathcal{U}$  um perfil de funções de utilidade. Denote por  $\psi_h$  uma transformação de  $U_h$  e  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_H) : \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}^H$  uma função vetorial com as transformações de cada domicílio. Suponha que  $\mathcal{U}$  foi particionado em um conjunto de conjuntos de informação  $S = \{S_t \mid t \in T\}$ , onde  $S_t$  é um conjunto de informação para cada  $t \in T$  e  $T$  é um índice dos elementos da partição. Diz-se que a função vetorial  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_H) \in \Psi$  é uma transformação invariante se para cada  $\psi \in \Psi$  e  $U \in \mathcal{U}$ ,  $U^*(x) = \psi(U(x)) = [\psi_1(U_1(x)), \dots, \psi_H(U_H(x))]$  implica que  $U, U^* \in S_t$  para algum  $t \in T$ , isto é,  $U$  e  $U^*$  são informacionalmente equivalentes.

Conforme expõem Blackordy, Donaldson e Weymark (1984), a ideia é a seguinte: em um dado conjunto informacional, um domicílio  $h$  possui a mesma curva de indiferença para todos os possíveis perfis de funções de utilidade deste conjunto. Assim, a diferença entre dois perfis  $U$  e  $U^*$  que são informacionalmente equivalentes será apenas o número atribuído a cada curva de indiferença do domicílio. Consequentemente, é possível definir implicitamente um vetor de funções crescentes  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_H)$  cuja função é mudar os números atribuídos a qualquer lista de curvas de indiferenças de qualquer domicílio do perfil  $U$  de forma a obter uma lista correspondente de números do perfil  $U^*$ . Se pegarmos outro par de perfis  $\bar{U}$  e  $\bar{U}^*$  que estão no mesmo conjunto informacional de  $U$  e  $U^*$ , poderemos também encontrar um vetor de funções  $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_H)$  necessário para obter  $\bar{U}^*$  a partir de  $\bar{U}$ . Continuando desta maneira, é possível determinar a classe  $\Psi$  de todas as funções obtidas a partir de pares de perfis de utilidades do mesmo conjunto informacional.

Utilizando-se as definições acima, pode-se classificar o grau de mensurabilidade e comparabilidade das utilidades nos seguintes tipos:

*Ordinalmente mensurável, não comparável interpessoalmente (ONC):*  $\psi \in \Psi$  se e somente se  $\psi_h$  é uma transformação monotônica estritamente crescente para todo  $h = 1, \dots, H$ . Este é o pressuposto usual utilizado na teoria do consumidor tradicional.

*Cardinalmente mensurável, não comparável interpessoalmente (CNC):*  $\psi \in \Psi$  se e somente se  $\psi_h(U_h(x)) = a_h + b_h U_h(x)$ , com  $b_h > 0$  para todo  $h = 1, \dots, H$ . Ou seja, para que esta restrição na informação seja possível, deve-se escolher transformações afins positivas independentes para cada domicílio. Consequentemente, embora seja possível comparar ganhos e perdas de utilidades intrapessoalmente, não é possível fazê-lo interpessoalmente. Este é o pressuposto utilizado na função de utilidade de Von Neuman-Morgenstern.

*Ordinalmente mensurável, com comparabilidade de níveis de utilidade (OCN):*  $\psi \in \Psi$  se e somente se  $\psi_h = \psi_0$  para todo  $h = 1, \dots, H$ , sendo  $\psi_0$  uma transformação monotônica crescente. Neste caso, apenas uma transformação comum entre os domicílios é permitida. Esta restrição na informação permite comparações dos *níveis* de utilidade, uma vez que  $U_1 \geq U_2 \Leftrightarrow \psi_0(U_1) \geq \psi_0(U_2)$ .

*Cardinalmente mensurável, com comparabilidade de unidades de utilidade (CCU):*  $\psi \in \Psi$  se e somente se  $\psi_h(U_h(x)) = a_h + b U_h(x)$ , com  $b > 0$  para todo  $h = 1, \dots, H$ . Neste caso, o valor de  $b$  é restrito para ser igual a todos os domicílios, enquanto  $a_h$  pode variar de domicílio para domicílio. Com utilidades cardinalmente mensuráveis e comparabilidade de unidades de utilidade, podemos comparar *diferenças* de utilidade entre domicílios, mas não podemos fazer a comparação de *níveis* de utilidades entre domicílios.

*Cardinalmente mensurável, com comparabilidade de níveis de utilidade (CCN):*  $\psi \in \Psi$  se e somente se  $\psi_h(U_h(x)) = a + b U_h(x)$ , com  $b > 0$  para todo  $h = 1, \dots, H$ . Para obtermos comparabilidade total de utilidade entre domicílios com mensuração cardinal, devemos utilizar uma transformação afim positiva idêntica para cada domicílio.

Outras formas de restrição no conjunto informacional são possíveis (cf. Blackorby; Donaldson; Weymark, 1984), mas para os propósitos deste trabalho apenas estes listados acima são relevantes.

Os conjuntos de informação podem ser classificados da seguinte forma

$$ONC \supset CNC \supset CCU \supset CCN$$

e

$$ONC \supset OCN \supset CCU \supset CCN$$

onde  $A \supset B$  significa que  $B$  é um conceito mais forte do que  $A$ . Para que escalas de equivalências tenham algum sentido, é necessário supor que as preferências sejam ao menos  $OCN$ , isto é, ordinalmente mensuráveis e com comparabilidade de níveis de utilidade (cf. Blackorby; Donaldson, 1991). Este é o pressuposto padrão que será adotado ao longo deste capítulo. Uma justificativa para o uso deste pressuposto está em Pollak (1991), segundo o qual o argumento mais convincente de que comparações interpessoais são possíveis é a elevada frequência com que as pessoas as fazem no seu dia-a-dia.

#### 5.2.4 Preferências condicionais e incondicionais

Uma questão crucial na discussão sobre escalas de equivalência é: como o vetor de características demográficas é determinado? Ou mais especificamente, de onde vêm as crianças? O pressuposto adotado na maior parte da literatura sobre escalas de equivalência é que elas são “trazidas por cegonhas” para os domicílios (Deaton; Muellbauer, 1980a, p. 208). No mundo real, no entanto, os pais procuram ter algum controle sobre quando e quantos filhos desejam ter. Quaisquer que sejam os motivos por trás desta decisão, o fato é que para os pais que decidem ter uma criança, é razoável supor que (em geral) eles estão melhores com a presença da criança do que sem ela. Se este for o caso, então não haverá necessidade de se compensar a família para restabelecer o seu nível de bem-estar prévio à chegada da criança. Os pais poderiam inclusive estar dispostos a pagar uma taxa para criar a criança. Em um sentido amplo, portanto, a decisão de criar uma criança pode ser vista como uma escolha de consumo (Schulte, 2007). Neste caso, é difícil dizer o que as escalas de equivalência significam. Escalas de equivalência que levam em consideração a decisão de se ter uma criança são chamadas

escalas de equivalência *incondicionais*. Escalas de equivalência que são calculadas assumindo que os pais não participam da decisão de ter a criança são chamadas escalas de equivalência *condicionais*. Este é o problema das comparações condicionais e incondicionais das escalas de equivalência introduzido por Pollak e Wales (1979) e retomado posteriormente por Pollak (1991).

O problema pode ser explicado nos seguintes termos. Para se estimar escalas de equivalência condicionais, utilizam-se relações de preferência do tipo  $\succsim(\mathbf{z})$ , onde  $\mathbf{q}_1 \succsim(\mathbf{z}) \mathbf{q}_2$  significa que o domicílio com composição demográfica  $\mathbf{z}$  prefere a cesta  $\mathbf{q}_1$  à cesta  $\mathbf{q}_2$ . Isso é, a relação de preferência  $\succsim(\mathbf{z})$  é condicional à composição demográfica  $\mathbf{z}$ , que se assume ser exógena. Uma relação de preferência incondicional é uma relação  $\succsim$  tal que  $(\mathbf{q}_1, \mathbf{z}_1) \succsim (\mathbf{q}_2, \mathbf{z}_2)$  significa que uma cesta de consumo  $\mathbf{q}_1$  associada a uma composição demográfica  $\mathbf{z}_1$  é ao menos tão preferível à cesta  $\mathbf{q}_2$  associada a um composição  $\mathbf{z}_2$ .

Pollak e Wales (1979) argumentam que as preferências incondicionais são a base apropriada de comparação de bem-estar entre domicílios. O problema é que, utilizando dados de despesas, apenas as preferências condicionais podem ser recuperadas. Isto é facilmente percebido no caso de preferências fracamente separáveis. Seja  $u = U(u(\mathbf{q}), \mathbf{z})$  onde  $u(\cdot)$  é uma função que dá a subutilidade associada a um vetor de bens  $\mathbf{q}$ . Como as preferências são separáveis, o ordenamento relativo da cesta de bens  $\mathbf{q}$  não é afetado por  $\mathbf{z}$ . Dessa forma, observando-se apenas as escolhas dos domicílios sobre  $\mathbf{q}$  condicionadas em  $\mathbf{z}$ , pode-se no máximo identificar  $u(\cdot)$  ao invés de  $U(\cdot)$ .

Deaton e Muellbauer (1980a) admitem que uma comparação completa de bem-estar requer relações de preferências incondicionais. Mas, segundo eles, a utilidade de “longo prazo” associada com as crianças pode ser separada, ao menos em princípio, dos benefícios de curto prazo derivados dos bens de consumo. Se isto é verdade, então o conhecimento das preferências “condicionais” pode prover uma informação útil para comparações de bem-estar, da mesma forma que a subutilidade derivada do consumo de bens em um determinado ano é um insumo útil para tecer considerações sobre o bem-estar ao longo do ciclo de vida de um

indivíduo. No curto prazo, portanto, é razoável supor que  $z$  é fixo e, portanto, exógeno. Fazendo isso, obtemos uma definição clara de escalas de equivalência.

Na opinião de Deaton e Muellbauer (1986), pode ser muito difícil recuperar as preferências incondicionais, mesmo se os dados sobre as despesas domiciliares forem suplementados com informações sobre fertilidade. Os dados de despesas são tipicamente obtidos ao nível do domicílio, de modo que não é possível distinguir o consumo dos pais do consumo das crianças. A existência de bens públicos intradomiciliares complica ainda mais a questão. Assim, existem enormes dificuldades conceituais e empíricas que, no presente, parecem impedir a recuperação das preferências incondicionais. Para Bojer e Nelson (1999), outra crítica que se pode fazer para as relações de preferência incondicionais é que elas tratam as crianças como se fossem bens de consumo, o que nos levaria facilmente a ignorar a utilidade da criança na determinação das escalas de equivalência.

Segundo Deaton e Muellbauer (1986), se supusermos que em geral os pais são pais porque desejaram ter uma criança, então a compensação que deveria ser paga para restaurar o nível de bem-estar prévio deles seria negativa, pois eles estão melhores agora do que estavam antes. Para os autores, no entanto, isto é simplesmente irrelevante para o problema de mensurar os custos de se criar uma criança, isto é, os custos do nascimento, os custos da alimentação e os custos da educação. Segundo eles, o fato de os pais escolherem ter uma criança significa que os benefícios de tê-la são maiores que os custos, mas isso não significa que os custos são inexistentes.

Utilizando uma análise histórica da discussão sobre escalas de equivalências, Nelson (1993a) aborda o problema de forma semelhante a Deaton e Muellbauer (1986). Segundo a autora, a abordagem subjetiva defendida por Pollak e Wales (1979) associa bem-estar com *felicidade*. Em contraste, a maior parte da literatura sobre escalas de equivalências e as situações políticas nas quais elas são utilizadas estão preocupadas com o bem-estar no sentido de *padrão de vida* material. Um morador do domicílio pode ou não estar mais feliz com a presença de outro membro, mas, mantendo-se constantes os recursos do domicílio, as demandas adicionais que este outro membro traz certamente reduz a habilidade (ou nas

palavras de Sen (1987), a “capacidade”) do primeiro morador de se manter bem vestido, bem alimentado, etc.

Para Nelson (1993a), as críticas de que não faz sentido “compensar” os adultos por escolherem ter uma criança perde força quando o foco da discussão muda para o bem-estar da criança. Enquanto as crianças podem ou não gostar de ter irmãos, é evidente que o padrão de vida delas será afetado com a presença de muitos irmãos, embora elas provavelmente tenham muito pouco poder de decisão sobre o número de membros do domicílio.

Por fim, Coulter, Cowell e Jenkins (1992) argumentam que nem sempre uma criança a mais no domicílio implica um aumento de bem-estar. Segundo os autores:

We do not live a perfect contraceptive society, and many children (and multiple births) are unplanned. Decisions to have children may have been taken given a set of expectations about unemployment rates and income growth, and such decisions are irreversible. If expectations are not in fact realized, living standards may be reduced, not enhanced, by children. (Coulter; Cowell; Jenkins, 1992, p. 90)

### **5.2.5 O problema de identificação**

Um corolário direto que a discussão sobre as preferências condicionais e incondicionais trouxe para a literatura é que o conhecimento da função demanda não é suficiente para identificar nem as escalas de equivalências, nem a medida do custo da criança.

Um parâmetro é considerado identificado se o seu valor numérico pode ser determinado unicamente a partir de dados observados. Como as escalas de equivalências dependem do nível de utilidade de referência, elas não podem ser observadas diretamente; seus valores devem ser inferidos a partir dos dados de demanda, isto é, das quantidades que os consumidores adquirem dos bens em diferentes regimes de preços e de renda.

Ocorre que como as preferências do consumidor são invariantes a transformações monotônicas na função de utilidade, utilizando apenas dados de despesas não somos capazes de distinguir um domicílio que maximiza  $u = u(\mathbf{q}, \mathbf{z})$  de outro que maximiza  $U = U(u(\mathbf{q}, \mathbf{z}), \mathbf{z})$  para  $U(\cdot)$  monotonicamente crescente em  $u$ . Visto de outra forma, isto significa que as funções de demanda derivadas de uma função custo  $c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z})$  são as mesmas

obtidas a partir de  $c(U(u, z), p, z)$ . Como resultado, se tudo o que observamos é o comportamento do consumidor, é impossível descobrir qual função custo gerou os dados. Por outro lado, apesar de as funções de demanda permanecerem iguais, as escalas de equivalência podem ser diferentes, pois em geral  $U(u, z^h) \neq U(u, z^r)$ , ou seja:

$$m(u, p, z^h) = \frac{c(u, p, z^h)}{c(u, p, z^r)} \neq \frac{c(U(u, z^h), p, z^h)}{c(U(u, z^r), p, z^r)} \quad (5.18)$$

Assim, as escalas de equivalências não são únicas a transformações monotônicas positivas da função utilidade, exceto no caso em que a transformação é independente das características demográficas do domicílio. O problema de identificação ocorre porque uma mudança de  $z^r$  para  $z^h$  possui um efeito não observado sobre  $m(\cdot)$  através de  $U(\cdot)$ . Este efeito é relevante, pois como  $U(\cdot)$  pode ser qualquer função crescente em  $u$ , a função custo  $c(U(u, z), p, z)$  pode representar diferentes regras de repartição de recursos dentro do domicílio e diferentes atitudes dos pais em relação às crianças, com consequências importantes para o bem-estar do domicílio.

O problema da identificação é demonstrado formalmente por Blundell e Lewbel (1991). Segundo estes autores, apenas os *efeitos* nas escalas de equivalências resultantes de mudanças de preços podem ser identificados a partir de dados de demanda. O *nível* das escalas de equivalências não pode ser identificado, pois para qualquer função custo  $c(\cdot)$  e qualquer número positivo  $d$  existe uma função  $U(u, z)$  capaz de satisfazer  $m(U(u, z), p, z) = d$ . Assim, identificação das escalas de equivalências requer ou informações adicionais ou pressupostos não testáveis relacionados às preferências dos domicílios sobre as características demográficas e, portanto, a  $U(u, z)$ .

Por conta deste resultado, alguns autores argumentam que não faz sentido tentar mensurar o custo da criança. Esta opinião é partilhada por Blundell e Lewbel (1991, p. 66), que consideram as escalas de equivalências estimadas a partir da demanda um exercício “desonesto e desinformativo”.

Nelson (1993b) rebate este tipo de argumento. Segundo a autora, se o pesquisador tem uma *teoria* de alocação intradomiciliar e de como esta alocação se traduz em demanda, é

possível justificar a preferência por um tipo específico de função utilidade ou função custo. O exemplo dado pela autora é o seguinte: suponha que o mundo é tal que todos os agentes são idênticos e tratados simetricamente dentro do domicílio, e que não existem economias de escalas no consumo. Então se  $c(u, \mathbf{p})$  é a função custo de um único indivíduo,  $nc(u, \mathbf{p})$  é a função custo de um domicílio composto por  $n$  pessoas. Neste contexto, aplicar uma transformação monotônica em  $u$  que dependa do número de membros do domicílio não faz sentido, porque agora existe uma teoria explícita que diz que todo indivíduo que partilha a mesma despesa de consumo *per capita* usufrui o mesmo nível de bem-estar  $u$ .

Deaton (1997) utiliza uma argumentação semelhante. Para o autor, se há um problema de identificação, o resultado não significa que a mensuração é impossível; significa apenas que alguma informação adicional é necessária, e os modelos de escalas de equivalência procuram fornecer esta informação por meio da adoção de novos pressupostos.

Na ausência de uma teoria sobre como a demanda por bens é convertida no bem-estar do domicílio, as escalas de equivalências podem ser “identificadas” pela escolha de uma forma funcional específica da função utilidade. Nesse caso, a identificação é obtida escolhendo-se arbitrariamente uma das infinitas funções de utilidades consistente com os dados observados, cada qual passível de gerar um conjunto de escalas de equivalência diferentes. Para Deaton (1997), no entanto, para que escalas de equivalências estimadas desta forma façam sentido, elas têm que ser baseadas em pressupostos explícitos dados pelo modelo teórico.

Por fim, Lewbel e Pendakur (2008) argumentam que a identificação da escala de equivalência depende de como definimos utilidade ou bem-estar. A identificação não é um problema se o significado de “mesmo nível de bem-estar” utilizado para o cálculo das escalas de equivalências refere-se a uma característica observada como a adequação nutricional da dieta. Da mesma forma, a identificação pode ser obtida a partir de pesquisas que avaliam a felicidade do entrevistado em alguma escala cardinal, tal qual fazem os métodos de pobreza subjetiva.

### 5.3 A ABORDAGEM DA PREFERÊNCIA REVELADA

Nesta seção serão apresentados os principais modelos da abordagem das preferências reveladas para a determinação das escalas de equivalência. Estes modelos têm em comum o fato de que partem da investigação empírica do comportamento de consumo das famílias para determinar suas preferências e, indiretamente, o bem-estar relativo de dois domicílios com composições demográficas diferentes. O trabalho de Guimarães e Belluzzo (2006) – focado exclusivamente na mensuração da economia de escala – representa uma das poucas aplicações conhecidas para o Brasil. Castro e Belluzzo (2006) têm por objetivo estimar o custo de uma criança, mas os autores não calculam escalas de equivalência. Agüero e Gould (2003) estimam escalas de equivalências para o Brasil, mas não apresentam nenhum modelo teórico que justifique a identificação dos valores estimados. Por fim, Vaz e Vaz (2007) contém uma versão preliminar de parte deste capítulo, em que as escalas de equivalências do modelo de Engel e de Rothbarth são estimadas.

A abordagem das preferências reveladas possui a vantagem de ser teoricamente fundamentada, pois utiliza o arcabouço da teoria do consumidor para derivar os modelos de estimação necessários. No entanto, como se pretende mostrar, a sua aplicação apresenta uma série de desafios, tanto empíricos quanto teóricos. Nas palavras de Deaton e Muellbauer (1986, p. 721): “[...] different models embody different conceptions of child costs, usually implicitly, so that different models, although each purports to measure the ‘cost of children’, are not in fact measuring the same thing.”. Como consequência, a mesma evidência empírica pode levar a medidas bastante diferentes da economia de escala do consumo e do chamado “custo da criança”.

### 5.3.1 O modelo de Engel

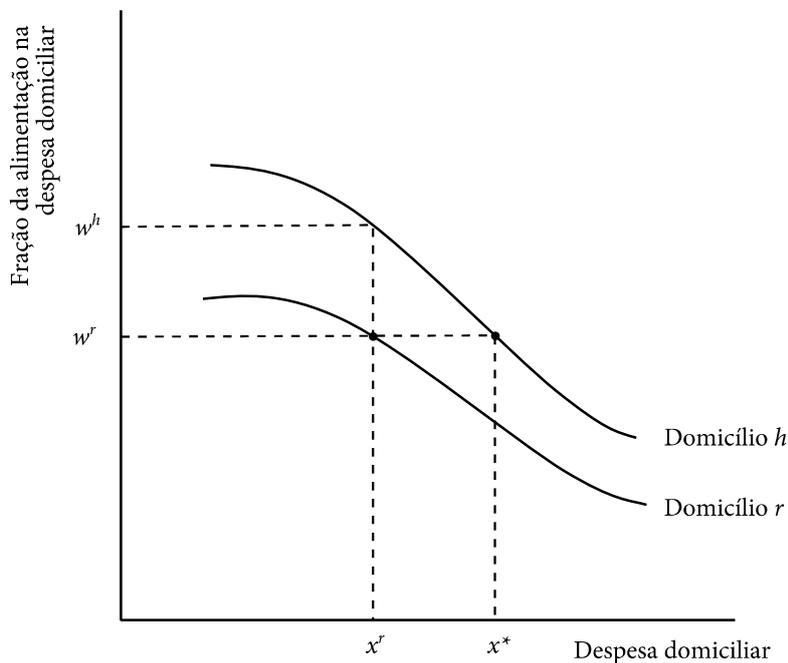
O modelo de Engel, também conhecido como modelo de *iso-prop*<sup>29</sup>, derivou-se da famosa observação empírica de Engel (1895) de que, para qualquer composição domiciliar, quanto mais pobre são os moradores de um domicílio, maior é a fração das despesas totais deste domicílio destinada à alimentação. Engel observou também que, fixando-se o valor da despesa domiciliar total, quanto maior o número de membros do domicílio, maior a fração das despesas destinada à aquisição de alimentos. Diante destas regularidades empíricas, Engel concluiu que a fração das despesas totais com alimentação poderia ser utilizada como um indicador indireto de bem-estar de uma família: quanto maior a proporção de gastos com alimentos, menor o nível de bem-estar da família.

A Figura 5.1 mostra a hipótese de Engel para dois domicílios diferentes, um deles composto por dois adultos (domicílio de referência  $r$ ) e outro composto por dois adultos e uma criança (domicílio de comparação  $h$ ). O eixo vertical mostra a fração dos gastos com alimentação na despesa de consumo total ( $w$ ), enquanto o eixo horizontal mostra a despesa de consumo domiciliar ou a renda disponível ( $x$ ). Para qualquer composição domiciliar dada, a Lei de Engel postula uma relação negativa entre o percentual de gastos com alimentos e o dispêndio total.

---

<sup>29</sup> A rigor, os dois modelos não são iguais, embora os pressupostos do modelo de Engel sejam suficientes para o modelo de *iso-prop* (para maiores detalhes, cf. Browning, 1992). Em pesquisas *cross-section*, nas quais se assume que os preços são fixos, os dois modelos são equivalentes.

Figura 5.1 - Modelo de Engel



Fonte: Deaton (1997).

Observa-se assim que, para um dado nível de despesa total  $x^r$ , o domicílio com a criança possui um nível de bem-estar menor do que o domicílio sem criança, pois a fração dos gastos com alimentação no primeiro é maior ( $w^h > w^r$ ). Alternativamente, para cada nível de bem-estar (por exemplo,  $w^r$ ), o domicílio com a criança necessita de um montante maior de recursos para obter o mesmo nível de bem-estar do domicílio sem criança ( $x^r < x^*$ ). Tomando o domicílio sem criança como o domicílio de referência, a escala de equivalência do modelo de Engel é obtida pela razão das despesas nominais  $m^h = x^*/x^r$  em  $w^r$ . Note que como as curvas não são necessariamente equidistantes, a escala de equivalência poderá depender do nível do dispêndio total do domicílio de referência,  $x^r$ .

Formalmente, o modelo de Engel é baseado na idéia de que os domicílios com padrões de consumo similares devem possuir o mesmo nível de bem-estar. Suponha que a função de utilidade do domicílio  $h$  seja definida por (Deaton; Muellbauer, 1980a)

$$u = u\left(\frac{\mathbf{q}^h}{m(\mathbf{z}^h)}\right) = u(\tilde{\mathbf{q}}^h) \quad (5.19)$$

onde  $\tilde{q}^h = q^h/m(z^h)$ . Defina  $\tilde{p}^h = m(z^h)p$ . Então  $p'q^h = \tilde{p}^h\tilde{q}^h$  e o problema de maximização do domicílio consiste em resolver

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } u(\tilde{q}^h) \\ & \text{sujeito a } \tilde{p}^h\tilde{q}^h = x^h \end{aligned} \quad (5.20)$$

A função custo associada ao problema (5.20) é  $\tilde{c}(u, \tilde{p}^h)$ . Como a função custo é homogênea de grau 1 nos preços, segue que

$$\begin{aligned} c(u, p, z^h) &= \tilde{c}(u, \tilde{p}^h) \\ &= \tilde{c}(u, m(z^h)p) \\ &= m(z^h)c_0(u, p) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ou seja, a função custo de um domicílio com criança é um múltiplo da função custo do domicílio de referência. Este é um caso especial da propriedade de *independência de base* desenvolvido por Blackorby e Donaldson (1991) e Lewbel (1989)<sup>30</sup>.

Resolvendo o problema (5.20) obtém-se o sistema de demanda Marshaliana representado por  $\tilde{q}_k^h = g_k(x^h, \tilde{p}^h)$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Como  $g_k(\cdot)$  é homogênea de grau zero em  $(x^h, \tilde{p}^h)$ , a função de demanda por unidade equivalente é dada por:

$$\tilde{q}_k^h = \frac{q_k^h}{m(z^h)} = g_k\left(\frac{x^h}{m(z^h)}, p\right) \quad k = 1, \dots, K \quad (5.22)$$

ou na forma de frações do dispêndio total:

$$w_k^h = \frac{p_k q_k^h}{x^h} = \frac{p_k g_k(x^h/m(z^h), p)}{x^h/m(z^h)} \quad k = 1, \dots, K \quad (5.23)$$

cujos componentes são observados. Note que  $w_k^h$  é uma função de  $x^h/m(z^h)$  conjuntamente, e não de  $x^h$  e  $m(z^h)$  separadamente. Isto significa que a função de demanda, uma vez expressa em termos de unidades equivalentes, é a mesma entre os domicílios. Logo, se os domicílios se deparam com os mesmos preços – pressuposto normalmente utilizado em dados

---

<sup>30</sup> Uma função custo satisfaz a propriedade de independência da base se, e somente, se ela pode ser escrita como  $c(u, p, z) = m(p, z)c_0(u, p)$  para qualquer nível de utilidade  $u$  e preços  $p$  (Blackorby; Donaldson, 1991; Lewbel, 1989). Ao impor esta restrição, o valor da escala de equivalência se torna independente do nível de utilidade  $u$  escolhido.

*cross-section* – e se o domicílio  $h$  e o domicílio de referência  $r$  possuem a mesma proporção de despesas com o bem  $k$ , segue que

$$w_k^h = w_k^r \Leftrightarrow \frac{x^h}{m(\mathbf{z}^h)} = \frac{x^r}{m(\mathbf{z}^r)} \quad k = 1, \dots, K \quad (5.24)$$

Utilizando-se a definição  $m(\mathbf{z}^r) = 1$ , obtém-se

$$m(\mathbf{z}^h) = x^h / x^r \quad (5.25)$$

Como a equação (5.24) é válida para todos os bens ( $k = 1, \dots, K$ ), a identificação da escala de equivalência pelo modelo de Engel não se restringe à utilização da fração da despesa total com alimentação. De fato, de acordo com o modelo teórico apresentado acima, a mesma escala de equivalência será obtida se, ao invés da fração das despesas com alimentação, utilizarmos a fração das despesas com qualquer um dos demais bens da cesta de consumo dos domicílios. Naturalmente tal restrição pode ser utilizada para testar a validade do modelo. Assim, uma forma de testar a validade do modelo de Engel é estimar o valor das escalas de equivalências a partir de todos os bens da cesta de consumo do domicílio e posteriormente comparar os valores calculados para ver se são estatisticamente semelhantes.

A função de utilidade (5.19) e a sua respectiva função custo (5.21) não são as únicas preferências que racionalizam o modelo de Engel. Segundo Deaton e Muellbauer (1980a), o modelo de Engel pode ser obtido por meio de preferências que impliquem a seguinte função custo

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h) = m(u, \mathbf{z}^h) c_0(u, \mathbf{p}) \quad (5.26)$$

Nesse caso as escalas de equivalências irão depender diretamente do nível de utilidade e indiretamente do dispêndio total do domicílio de referência, isto é, elas não irão mais satisfazer a propriedade de independência de base apresentada anteriormente.

Por fim, observe que a fração da despesa com o bem  $k$  é um indicador inverso de bem-estar pois

$$\begin{aligned}
w_k &= \frac{\partial \ln c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h)}{\partial \ln p_k} \\
&= \frac{\partial \ln m(u, \mathbf{z}^h)}{\partial \ln p_k} + \frac{\partial \ln c_0(u, \mathbf{p})}{\partial \ln p_k} \\
&= \frac{\partial \ln c_0(u, \mathbf{p})}{\partial \ln p_k} \quad k = 1, \dots, K
\end{aligned} \tag{5.27}$$

que independe da composição demográfica do domicílio. Assim, assumindo que os preços são constantes,  $w_k$  varia diretamente com  $u$ . Conseqüentemente, na medida em que  $w_k$  é monotonicamente decrescente em relação a  $u$ , o inverso da fração das despesas com alimentação é um indicador apropriado de bem-estar.

### 5.3.1.1 Discussão

Uma das maiores vantagens do modelo de Engel é a sua simplicidade de cálculo. Apesar dessa vantagem, o modelo possui alguns problemas teóricos que serão discutidos a seguir.

De acordo com Deaton (1997), o modelo baseia-se em duas regularidades empíricas e em uma afirmação. A primeira regularidade é a conhecida “lei de Engel” de que o percentual da despesa com alimentação diminui à medida que a renda ou as despesas totais aumentam. A segunda regularidade é que, mantendo-se constante a renda ou a despesa total, o percentual do gasto com alimentação aumenta com o número de membros do domicílio. Por fim, a afirmação, feita pelo próprio Engel, é que a fração das despesas destinadas à alimentação é um bom indicador de bem-estar do domicílio. Para Deaton (1997), no entanto, é importante salientar que a afirmação de Engel não é uma implicação das duas regularidades empíricas citadas acima. Para o autor, a lei de Engel certamente implica que entre domicílios com a mesma composição demográfica, aqueles com uma fração maior da despesa destinada à alimentação são em geral aqueles com menor renda, e conseqüentemente aqueles que usufruem um menor nível de bem-estar. No entanto, apesar de uma criança aumentar a fração da despesa com alimentação, isto é muito diferente de demonstrar que um aumento na renda do domicílio suficiente para restabelecer o percentual da despesa com alimentação anterior à presença da criança compensará o domicílio pelos gastos adicionais associados com a criança.

Segundo o autor, mesmo que se assuma que a principal preocupação das famílias é com a sua alimentação e, portanto, o consumo de alimentos pode ser considerado uma medida válida de bem-estar, por que então devemos focar o percentual do gasto com alimentação ao invés de medidas mais diretas de bem-estar como o consumo alimentar ou a ingestão nutricional dos domicílios?

De fato, Nicholson (1976) mostra que a fração da despesa total destinada à alimentação *não* indica corretamente o bem-estar de domicílios de diferentes composições demográficas. O argumento do autor é o seguinte: considere um casal de adultos que acaba de ter um filho e suponha que a compensação necessária para restabelecer o nível anterior de bem-estar dos pais seja conhecida. Se pagarmos esta compensação à família, os pais retornarão ao nível de bem-estar prévio e podemos esperar que o padrão de consumo deles volte a ser mais ou menos o que era antes de a criança se incorporar ao domicílio. Agora suponha que o padrão de consumo da criança é diferente do padrão do consumo dos pais; em particular, assuma que a maior parte do consumo de uma criança se destine à alimentação, já que este é um dos poucos bens consumidos por crianças pequenas. Como resultado, mesmo após o pagamento da compensação, a fração das despesas do domicílio destinada à alimentação irá aumentar. Pelo modelo de Engel, portanto, o domicílio estará em situação pior do que antes, e uma compensação adicional teria que ser paga para restabelecer o nível de bem-estar vigente antes da chegada da criança. Desta forma, segundo Nicholson (1976), o modelo de Engel superestima o custo da criança, e as escalas de equivalências obtidas por esse método tendem a ser maiores do que o necessário. Isto é consistente com os resultados empíricos encontrados por Tsakloglou (1991) e Deaton e Muellbauer (1986), onde as escalas de equivalência das crianças estimadas por meio da metodologia de Engel foram em geral maiores do que aquelas estimadas a partir de outros métodos.

Quanto aos corolários do modelo de Engel, Tsakloglou (1991) testa a hipótese de que as escalas de equivalência estimadas por este método são iguais, independentemente do bem que se utiliza para mensurá-la. O autor mostra que a hipótese é rejeitada, o que coloca em dúvida a validade teórica do modelo.

Por fim, Deaton (1997) mostra que os pressupostos adotados pelo modelo de Engel não são suficientes para resolver o problema de identificação discutido por Pollak e Wales (1979) no que se refere à mensuração de economias de escala. Isso pode ser visto no seguinte exemplo (Deaton, 1997)<sup>31</sup>: suponha que a função custo de um domicílio seja

$$c(u, \mathbf{p}, n) = m(n)c_0(u, \mathbf{p}) = n^\theta \alpha(\mathbf{p})u^{\beta(\mathbf{p})} \quad (5.28)$$

onde  $\alpha(\mathbf{p})$  é homogênea linear,  $\beta(\mathbf{p})$  é homogênea de grau zero,  $n$  é o número de membros do domicílio e  $\theta$  é o parâmetro que controla a economia de escala. Uma especificação conveniente para as funções  $\alpha(\cdot)$  e  $\beta(\cdot)$  utilizada em trabalhos empíricos é dada pela função Cobb-Douglas<sup>32</sup>

$$\begin{aligned} \ln \alpha(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \ln p_k, & \text{com } \sum_{k=1}^K \alpha_k &= 1 \\ & \text{e} & & \\ \ln \beta(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^K \beta_k \ln p_k, & \text{com } \sum_{k=1}^K \beta_k &= 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para se calcular a fração da despesa com o bem  $k$ , deve-se calcular a elasticidade da função custo (5.28) em relação ao preço deste bem:

$$w_k = \frac{\partial \ln c(u, \mathbf{p}, n)}{\partial \ln p_k} = \alpha_k + \beta_k \beta(\mathbf{p}) \ln u \quad (5.30)$$

Note que para os domicílios que enfrentam os mesmos preços,  $w_k$  é uma transformação afim da utilidade (embora não necessariamente positiva, pois podemos ter  $\beta_k < 0$ ) e, portanto, um indicador de bem-estar dos domicílios. Utilizando a propriedade de aditividade de que a soma das despesas é igual ao dispêndio total (Seção 5.2.1), pode-se inverter a função custo e encontrar a função de utilidade indireta

$$c(u, \mathbf{p}, n) = x \Leftrightarrow \ln u = \frac{\ln(x/n^\theta) - \ln \alpha(\mathbf{p})}{\beta(\mathbf{p})} \quad (5.31)$$

<sup>31</sup> Cf. Lanjouw e Ravallion (1995) para outro exemplo semelhante.

<sup>32</sup> Esta é uma versão simplificada do modelo AIDS de Deaton e Muellbauer (1980b), utilizada apenas para o propósito de exemplificação.

Substituindo  $\ln u$  de (5.31) em (5.30) obtemos uma variação do sistema de equação proposto por Working (1943) e Leser (1963) (cf. Seção 5.2.1):

$$\begin{aligned} w_k &= \bar{\alpha}_k + \beta_k \ln(x/n^\theta) \\ &= \bar{\alpha}_k + \beta_k \ln(x/n) + \beta_k(1-\theta)\ln n \end{aligned} \quad (5.32)$$

A equação (5.32) é a que deve ser aplicada aos dados. Para ilustrar o problema de identificação, suponha que, ao invés de (5.28), a função custo seja formulada com  $m(\cdot)$  dependendo não só do tamanho do domicílio, mas também do nível de utilidade de referência,  $m(u, n) = n^{\theta+\varphi\ln u}$ . Com esta especificação, as economias de escalas passam a depender indiretamente do nível de consumo do domicílio. Substituindo  $m(u, n)$  na função custo, obtém-se

$$\begin{aligned} c(u, \mathbf{p}, n) &= m(u, n)c_0(u, \mathbf{p}) \\ &= n^{\theta+\varphi\ln u}\alpha(\mathbf{p})u^{\beta(\mathbf{p})} \\ &= n^\theta\alpha(\mathbf{p})u^{\beta(\mathbf{p})+\varphi\ln n} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Se calcularmos a fração da despesa com o bem  $k$  usando a elasticidade da função custo em relação ao preço deste bem, chegaremos novamente em (5.32). Isso significa que a especificação de uma função custo diferente não teve nenhum efeito sobre o comportamento observado do consumidor, de forma que não podemos distinguir (5.28) de (5.33) a partir dos dados. O problema é que as duas funções possuem implicações bem diferentes para o bem-estar do domicílio. A função de utilidade indireta de (5.33) é

$$\ln u = \frac{\ln(x/n^\theta) - \ln\alpha(\mathbf{p})}{\beta(\mathbf{p}) + \varphi\ln n} \quad (5.34)$$

que contém o termo  $\varphi\ln n$  no denominador, agindo como deflator do bem-estar do domicílio. Esse exemplo mostra, portanto, que o modelo de Engel não é capaz de inferir o bem-estar do domicílio a partir do comportamento observado, uma vez que as equações de demanda não são afetadas pela especificação da função  $m(\cdot)$ . Assim, apesar de os parâmetros da função custo (5.28) serem estimados empiricamente, a equação (5.32) possui as mesmas implicações empíricas que outros modelos nos quais as escalas de equivalência são notoriamente diferentes. Como resultado, segundo Deaton (1997), seja lá o que for que o

modelo de Engel mensura com  $\theta$ , não há nenhuma base para supor que sejam economias de escala.

Dessa forma, Deaton (1997) conclui que o pressuposto de identificação no qual se baseia o modelo de Engel é falso e, portanto, o método não deveria ser utilizado. Para o autor, como o modelo de Engel não é defensável, e como a atribuição da renda total do domicílio a cada um dos membros requer economias de escalas implausíveis, a escolha da melhor abordagem para se calcular as escalas de equivalências fica entre utilizar o modelo de Rothbarth (Seção 5.3.4) e a renda domiciliar *per capita*.

Apesar dessas críticas, o modelo de Engel ainda é um dos mais utilizados para estimar escalas de equivalências (Deaton; Muellbauer, 1986; Gozalo, 1997; Lancaster; Ray, 1998; Lanjouw; Ravallion, 1995; Livada; Kandilorou; Tzortzopoulos, 1996; Murthi, 1994; Tsakloglou, 1991, entre outros). Conforme afirmado anteriormente, um dos motivos de sua popularidade decorre de sua facilidade de cálculo. Outro motivo está relacionado aos resultados encontrados por Deaton e Paxson (1998) naquilo que ficou conhecido como o *paradoxo de Deaton e Paxson* e que desqualificaram empiricamente o principal modelo alternativo ao de Engel para a estimação de economias de escala. Este último ponto será retomado adiante (cf. Seção 5.3.3).

### 5.3.2 O modelo de Prais e Houthakker

Foi visto na Seção 5.3.1 que o modelo de Engel gera funções de demanda do tipo  $q_k^h/m(\mathbf{z}^h) = g_k(x^h/m(\mathbf{z}^h), \mathbf{p})$ ,  $k = 1, \dots, K$ , isto é, o gasto com o bem  $k$  deflacionado por uma escala de equivalência geral  $m(\mathbf{z}^h)$  é uma função dos preços e do gasto total deflacionado pela mesma escala  $m(\mathbf{z}^h)$ . Observando-se estas funções de demanda, percebe-se que a especificação do modelo de Engel é restrita, pois assume que a inclusão de um novo membro no domicílio possui o mesmo efeito sobre o consumo de todos os bens, independentemente de sua natureza pública ou privada ou se o consumo deste bem é intensivo/exclusivo de algum grupo demográfico. Por exemplo, no modelo de Engel, o acréscimo de um bebê entre os membros do domicílio aumenta igualmente tanto a demanda por fraldas e chupetas quanto a

demanda por fumo e bebidas alcoólicas. Uma extensão natural deste método, portanto, é fazer com que as escalas de equivalências possam ser diferentes para cada um dos bens consumidos pelo domicílio. Esta ideia foi defendida primeiramente por Sydenstricker e King (1921) e formalizada posteriormente por Prais e Houthakker (1955). Para implementá-la, Prais e Houthakker especificam funções de demanda do tipo

$$\frac{q_k^h}{m_k(z^h)} = g_k \left( \frac{x^h}{m_0}, \mathbf{p} \right) \quad k = 1, \dots, K \quad (5.35)$$

Aqui,  $m_k(\cdot)$  são escalas específicas de cada bem e  $m_0$  é uma escala de equivalência geral que depende implicitamente do dispêndio total e das escalas de equivalências específicas. Assim, um domicílio com crianças terá uma escala de equivalência maior para determinados bens como vestuário infantil e educação básica do que um domicílio composto apenas por adultos. Por conseguinte, estas escalas de equivalências específicas se refletirão em uma escala de equivalência geral  $m_0$  maior. Para o domicílio de referência, tanto a escala geral  $m_0$  quanto as escalas específicas  $m_k$  são definidas como iguais a um.

Em sua formulação original, Prais e Houthakker (1955) não utilizaram a teoria da utilidade para derivar as funções de demanda (5.35). Coube a Muellbauer (1980) realizar esta tarefa posteriormente. Segundo Muellbauer, o modelo de Prais e Houthakker baseia-se em uma função de utilidade direta do tipo

$$u = u \left( \frac{q_1^h}{m_1(z^h)}, \dots, \frac{q_K^h}{m_K(z^h)} \right) \quad (5.36)$$

com demanda Hicksiana dada por

$$\frac{q_k^h}{m_k(z^h)} = h_k(u, \mathbf{p}) \quad k = 1, \dots, K \quad (5.37)$$

e função custo

$$c(u, \mathbf{p}, z^h) = \sum_{k=1}^K p_k m_k(z^h) h_k(u, \mathbf{p}) \quad (5.38)$$

Apesar de as escalas específicas  $m_k$  variarem entre os bens, as funções de demanda (5.35) dependem apenas do nível de bem-estar geral  $x/m_0$ . Para Muellbauer (1980),

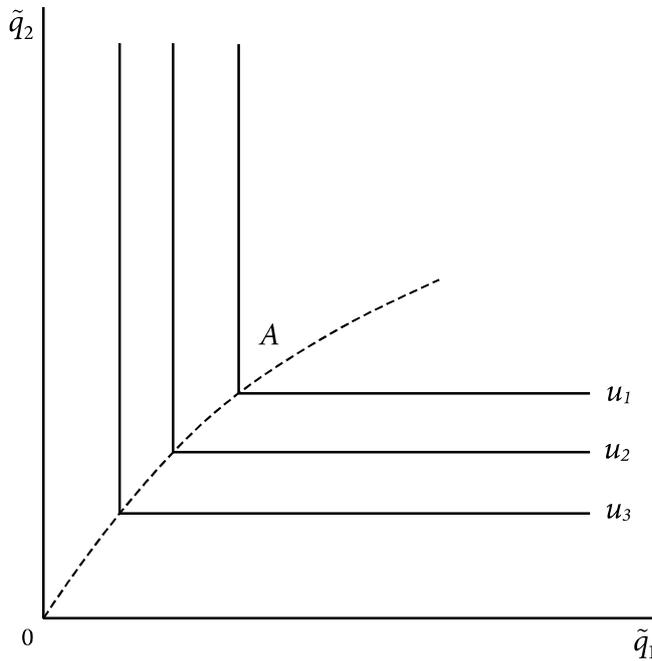
considerando que os preços são os mesmos para todos os domicílios, isto significa que existem apenas duas situações nas quais o modelo de Prais e Houthakker é consistente com a teoria do consumidor: *a)* se o modelo convergir para o modelo de Engel, isto é,  $m_k = m_0$  para todo  $k$ ; ou *b)* se a função de utilidade for tal que não é possível haver substituição entre os bens, isto é,

$$\begin{aligned} u &= \min \left\{ \frac{q_1^h}{m_1(\mathbf{z}^h)\alpha_1(u)}, \dots, \frac{q_K^h}{m_K(\mathbf{z}^h)\alpha_K(u)} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\tilde{q}_1^h}{\alpha_1(u)}, \dots, \frac{\tilde{q}_K^h}{\alpha_K(u)} \right\} \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde  $\tilde{q}_k^h = q_k^h/m_k(\mathbf{z}^h)$  e a função de utilidade é definida implicitamente por (5.39). Neste caso, como não há substituição entre os bens, a função de demanda Hicksiana é independente dos preços, isto é,  $\tilde{q}_k^h = h_k(u) = u\alpha_k(u)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , o que significa que as funções de demanda Marshallianas são do tipo  $\tilde{q}_k^h = g_k(x^h/m_0)$ .

As curvas de indiferença que representam estas preferências são ilustradas na Figura 5.2. Note que apesar de as curvas de indiferença possuírem ângulos retos, isto não significa necessariamente que o caminho de expansão  $OA$  seja uma linha reta a partir da origem. Segundo Muellbauer (1980), exceto pelo fato de a função de utilidade ilustrada na Figura 5.2 excluir a possibilidade de bens inferiores, as curvas de Engel representadas por ela podem ter qualquer formato. Isso é possível pois a utilidade (5.39) não é homotética que nem a função de Leontieff tradicional, dado que seus argumentos possuem as funções  $\alpha_k(u)$  no denominador.

Figura 5.2 - Curvas de indiferença no modelo de Prais e Houthakker



Fonte: Muellbauer (1980).

Dada esta formulação, a escala de equivalência geral  $m_0^h$  pode ser definida como o custo relativo de um domicílio  $h$  em relação a um domicílio de referência  $r$  (onde  $m_k(z^r) = 1, \forall k$ ) a partir do nível de utilidade  $u$  do domicílio de comparação

$$\begin{aligned}
 m_0^h &= \frac{c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h)}{c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^r)} = \frac{\sum_{k=1}^K p_k m_k(z^h) h_k(u)}{\sum_{k=1}^K p_k h_k(u)} \\
 &= \sum_{k=1}^K \tilde{w}_k^h m_k(z^h), \quad \text{onde} \quad \tilde{w}_k^h = \frac{p_k h_k(u)}{\sum_{k=1}^K p_k h_k(u)}
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

Assim,  $m_0^h$  é uma média ponderada das escalas de equivalências específicas  $m_k$ , com o peso de ponderação dado pela fração da despesa total com o bem  $k$  do domicílio de referência, avaliado no nível de utilidade do domicílio de comparação,  $u$ . Como  $u$  é desconhecido, devemos modificar o problema de forma a utilizar variáveis observadas. Para isso, note que por causa da restrição orçamentária,

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h) = x^h \Rightarrow \sum_{k=1}^K p_k m_k(\mathbf{z}^h) h_k(u) = x^h \quad (5.41)$$

A equação (5.41) define implicitamente o valor de  $u$ . Considerando que  $h_k(u) = g_k(x^h/m_0^h)$  e utilizando-se (5.40), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K p_k m_k(\mathbf{z}^h) h_k(u) = x^h &\Rightarrow m_0^h \sum_{k=1}^K p_k h_k(u) = x^h \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^K p_k g_k\left(\frac{x^h}{m_0^h}\right) = \frac{x^h}{m_0^h} \end{aligned} \quad (5.42)$$

que pode ser utilizada para encontrar numericamente o valor de  $m_0^h$ .

### 5.3.2.1 Identificação

Conforme demonstrado por Cramer (1969) e Muellbauer (1980), o modelo de Prais e Houthakker possui um problema grave de identificação. Segundo estes autores, as escalas de equivalências específicas de cada bem do modelo de Prais e Houthakker são identificadas apenas relativamente umas às outras, mas não em valores absolutos. Intuitivamente, o problema ocorre porque o modelo busca identificar  $K$  escalas de equivalências específicas  $m_k$  através da estimação de  $K$  curvas de Engel distintas. Devido à restrição orçamentária, no entanto, as curvas de Engel devem satisfazer a propriedade da aditividade, o que faz com que tenhamos apenas  $K-1$  equações independentes. Com  $K$  valores desconhecidos e apenas  $K-1$  equações, a identificação do sistema é impossível. Para resolver o problema, é preciso recorrer a alguma informação adicional. Neste caso, utilizar uma base de dados na qual os preços variam (um painel de domicílios ou uma *pooled cross-section*) não ajuda, pois como o modelo não admite a possibilidade de substituição entre bens, variações de preços possuem um efeito semelhante a alterações no nível do dispêndio total.

Felizmente, conforme salienta Muellbauer (1980), o problema de identificação ocorre em apenas uma dimensão. Isto significa que se fixarmos o valor da escala de equivalência específica de um único bem, então  $m_0$  e o valor das outras escalas de equivalências  $m_k$  podem ser determinados. Isto requer uma informação *a priori* em relação a pelo menos uma das

escalas de equivalências específicas. Muellbauer (1980) cita duas soluções possíveis para o problema de identificação. Uma delas é assumir que existem bens privados de consumo exclusivo de adultos e fixar o valor da escala de equivalência deste bem para 1. Esta solução é semelhante ao pressuposto de identificação utilizado pelo modelo de Rothbarth para a estimação de escalas de equivalências (cf. Seção 5.3.4) e assume implicitamente que as economias de escala do consumo intradomiciliar não possuem efeito sobre o consumo de bens de adultos. Outra solução sugerida pelo autor é utilizar informações fisiológicas a respeito das necessidades nutricionais dos indivíduos para fixar o valor das escalas de equivalências dos alimentos.

### 5.3.3 O modelo de Barten

Barten (1964) desenvolveu um modelo para calcular escalas de equivalências muito semelhante ao de Prais e Houthakker discutido anteriormente. Assim como no modelo de Prais e Houthakker, assume-se que cada bem possui a sua própria escala de equivalência específica. No entanto, o modelo de Barten utiliza uma forma mais geral da função de utilidade que permite a possibilidade de substituição entre bens decorrente de alterações nos preços relativos. Formalmente, o modelo de Barten assume que um domicílio possui uma função de utilidade do tipo

$$u = u \left( \frac{q_1^h}{m_1(z^h)}, \dots, \frac{q_K^h}{m_K(z^h)} \right) \quad (5.43)$$

onde  $q_k^h$  é a quantidade consumida do bem  $k$  e  $m_k(\cdot)$  são funções que representam as escalas de equivalência específicas de cada bem. Assume-se que estas funções são exógenas, isto é, elas dependem do tamanho e da composição demográfica do domicílio, mas não dos preços ou do nível de utilidade do domicílio<sup>33,34</sup>. Para o domicílio de referência  $r$ , utiliza-se a normalização  $m_k(z^r) = 1$  para todo  $k = 1, \dots, K$ .

---

<sup>33</sup> Observe que esta é uma diferença importante entre o modelo de Barten e o de Prais e Houthakker.

Para encontrar o vetor de demanda do domicílio, deve-se maximizar (5.43) sujeito à restrição orçamentária  $\sum_{k=1}^K p_k q_k^h = x^h$ . Defina  $\tilde{q}_k^h = q_k^h / m_k(z^h)$  e  $\tilde{p}_k^h = m_k(z^h) p_k$ . Então o problema de maximização do domicílio pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } u(\tilde{\mathbf{q}}^h) \\ & \text{sujeito a } \tilde{\mathbf{p}}^h \tilde{\mathbf{q}}^h = x^h \end{aligned} \quad (5.44)$$

Este problema de maximização gera funções de demanda do tipo

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k^h &= g_k(x^h, \tilde{\mathbf{p}}^h) \\ \Rightarrow q_k^h &= m_k(z^h) g_k(x^h, \tilde{\mathbf{p}}^h) \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (5.45)$$

Assim, no modelo de Barten, ao contrário do que ocorre no modelo de Prais e Houthakker, as características demográficas possuem dois efeitos sobre a demanda do domicílio: *a*) um efeito *direto*, decorrente do impacto que as características demográficas provocam sobre a escala de equivalência específica  $m_k(z^h)$ ; e *b*) um efeito *indireto*, decorrente do efeito substituição que ocorre quando mudanças nas características demográficas afetam os preços efetivos  $(\tilde{p}_1^h, \dots, \tilde{p}_K^h)$ . Se uma criança é adicionada ao domicílio, é de se esperar que o consumo de leite aumente e, portanto, a escala de equivalência específica do leite aumente para este domicílio. Este corresponde ao efeito direto. Por outro lado, em um domicílio com crianças, o preço do leite também aumenta em relação a outros bens, e isto provoca um efeito de substituição do leite por outros bens, tais como sucos, refrigerantes, etc. Este corresponde ao efeito indireto.

Associado ao problema de maximização (5.44), temos um problema de minimização do custo, cuja solução é o sistema de equações de demanda Hicksianas

$$q_k^h = m_k(z^h) h_k(u, \tilde{\mathbf{p}}^h) \quad (5.46)$$

A partir destas funções, é possível obter a função custo,

---

<sup>34</sup> Segundo Muellbauer (1977), como as funções  $m_k(\cdot)$  independem dos preços e da renda do domicílio, elas podem ser interpretadas como “requerimentos” de bens específicos para domicílios de diferentes tamanhos e composição demográfica. Tais requerimentos seriam análogos aos requerimentos nutricionais dos indivíduos utilizados no cálculo de linhas de pobreza nutricionais.

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h) = c(u, \tilde{\mathbf{p}}) = c(u, p_1 m_1^h, \dots, p_K m_K^h) \quad (5.47)$$

que representa o dispêndio mínimo necessário para se atingir a utilidade  $u$  a preços  $\mathbf{p}$  e escalas  $(m_1^h, \dots, m_K^h)$ .

Definida a função custo de um domicílio  $h$  qualquer, a escala de equivalência geral é dada pela razão das funções custos do domicílio  $h$  em relação a um domicílio de referência  $r$

$$m(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h) = \frac{c(u, p_1 m_1^h, \dots, p_K m_K^h)}{c(u, p_1, \dots, p_K)} \quad (5.48)$$

Embora do ponto de vista teórico o modelo de Barten seja relativamente simples, as dificuldades empíricas para estimá-lo são enormes. Isto porque a identificação das escalas de equivalências baseia-se no pressuposto de que as características demográficas agem de forma análoga aos preços, o que torna impossível estimar o modelo sem que tenhamos um banco de dados onde há variação nos preços. Como em geral as informações de valores unitários<sup>35</sup> só estão disponíveis para alguns poucos bens e serviços nas pesquisas de orçamentos familiares (por exemplo, alimentos, energia, aluguéis), a incorporação de preços requer o uso de uma fonte de dados externa. Mesmo que se consiga fazer isto em uma pesquisa *cross-section*, ainda assim é necessário um segundo ponto no tempo para que tenhamos variações nos preços dos produtos. Isto requer informações de painéis ou o uso de pseudo painéis derivados de repetidas *cross-sections*, onde os domicílios são agrupados em clusters e cada cluster é incorporado no processo de estimação como se fosse um único domicílio. Feito este trabalho, restaria ainda toda uma série de problemas resultante da compatibilização de grupos de despesas entre as pesquisas e a atualização dos preços e dos valores monetários em um ponto comum do tempo, cujo resultado mais evidente seria a introdução de uma série de erros de medidas no processo de estimação.

---

<sup>35</sup> Um valor unitário corresponde à divisão do valor da despesa pela quantidade de um determinado bem adquirida pelo domicílio. Do ponto de vista teórico, valores unitários e preços são dois conceitos diferentes, embora exista uma relação entre eles. Um dos motivos é que o preço unitário embute em seu valor a “qualidade” do produto, e esta é em alguma medida uma escolha do consumidor (cf. Deaton, 1997).

### 5.3.3.1 Discussão

O modelo de Barten, por tratar o efeito de alterações na estrutura demográfica do domicílio de forma similar aos preços, pode produzir alguns resultados inusitados.

Um primeiro problema está na função de utilidade (5.43). Para que as escalas de equivalências específicas  $m_k$  sejam definidas, é necessário que a função de utilidade seja a mesma para todos os domicílios. Isso significa que tanto o domicílio de referência quanto os domicílios com crianças devem demandar os mesmos bens, o que não seria consistente com a evidência empírica de que domicílios sem crianças não consomem bens de uso exclusivo de crianças, tais como fraldas, chupetas ou vestuário de criança. Se supusermos que todos os domicílios demandam fraldas, então o consumo nulo de fraldas por parte dos domicílios sem crianças só pode ser justificado com base em uma solução de canto do problema do consumidor. Considerando-se que para calcular as escalas de equivalências deve-se comparar dois domicílios em um mesmo nível de utilidade, a existência desta solução de canto só seria justificável se o efeito-substituição fosse muito significativo.

Para entender este argumento, lembre que no modelo de Barten a demanda Hicksiana de um domicílio com crianças é dada por  $q_k^h = m_k(z^h)h_k(u, \tilde{p}^h)$  (equação (5.46)). É fácil perceber que se a demanda por um bem  $k$  do domicílio de referência for zero (isto é,  $q_k^r = h_k(u, p) = 0$ ), não existirá nenhum fator multiplicativo  $m_k(z^h)$  capaz de transformar uma demanda nula em uma demanda positiva. Para que uma demanda positiva ocorra, é necessário que os preços relativos  $\tilde{p}^h$  se alterem de tal maneira que o valor de  $h_k(\cdot)$  mude de zero para um valor positivo. Mantendo-se fixo o nível de utilidade  $u$ , esta alteração na demanda só pode ocorrer se o efeito-substituição for significativo.

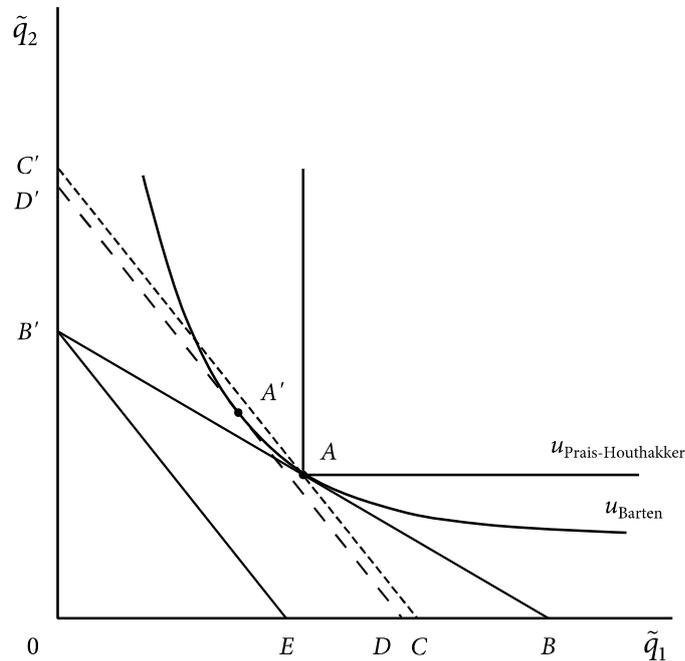
Nelson (1993a) aponta uma das possíveis consequências que este tipo de efeito substituição pode trazer para os resultados do modelo. Segundo a autora, é possível que existam bens de consumo intensivo de crianças – como o leite – que possuam uma alta elasticidade-preço da demanda em domicílios sem crianças. Afinal, para adultos, o consumo de leite pode ser substituído por sucos, refrigerante ou bebidas alcoólicas, enquanto para as

crianças a possibilidade de substituição do leite é menor. Se o efeito substituição for grande o suficiente, então, de acordo com o modelo de Barten, a inclusão de uma criança no domicílio pode gerar uma redução na demanda por leite e um aumento no consumo de bebidas alcoólicas. Em outras palavras, as possibilidades de substituição dentro da estrutura de preferências dos adultos podem fazer com que as crianças recebam menos recursos do que receberiam sob um esquema de repartição proporcional às suas necessidades (Nelson, 1993a). Para Deaton (1997), esta mera possibilidade teórica é suficiente para comprometer o uso do modelo em políticas públicas.

Schulte (2007) argumenta que este problema é mais teórico do que prático, já que bens de consumo exclusivos de crianças podem ser agregados em grupos de despesas mais amplos, misturados com bens de consumo adultos. Ao fazer isto, no entanto, nós estamos abdicando justamente de utilizar uma das características especiais do modelo de Barten, que é a estimação de escalas de equivalências específicas para cada bem. Se a solução para o problema da substituição é partir para a agregação de produtos, então fica difícil justificar o uso do modelo de Barten perante alternativas mais simples como o modelo de Engel.

A Figura 5.3 mostra como a incorporação do efeito substituição no modelo de Barten altera os valores das escalas de equivalências quando comparado com o modelo de Prais e Houthakker. Suponha que haja apenas dois bens  $k = 1, 2$  e que a inclusão de uma criança no domicílio aumente a escala específica do bem 1,  $m_1$ , mas mantenha inalterada a escala específica do bem 2,  $m_2$ . Como os eixos da figura estão expressos em termos de  $\tilde{q}_1 = q_1/m_1$  e  $\tilde{q}_2 = q_2/m_2$ , a inclusão da criança deve deslocar a linha orçamentária  $B'B$  para  $B'E$ . Assim, para restaurar o nível de utilidade prévio que o domicílio usufruía no ponto  $A$ , o domicílio deve ser compensado de maneira que sua linha orçamentária se desloque para  $C'C$  no caso do modelo de Prais e Houthakker e  $D'D$  no modelo de Barten. Observe que devido ao efeito substituição, a cesta de consumo do domicílio após a compensação pela adição de uma criança no modelo de Barten muda de  $A$  para  $A'$ . Além disso, como a linha orçamentária  $D'D$  corresponde a um nível de despesa menor que  $C'C$ , a escala de equivalência geral do modelo de Barten é menor que aquela obtida pelo modelo de Prais e Houthakker.

Figura 5.3 - Comparação dos modelos de Barten e de Prais-Houthakker



Fonte: Deaton e Muellbauer (1980a, fig. 8.3, p. 199).

Portanto, ambos os modelos tratam as escalas de equivalências de forma extrema. Enquanto no modelo de Prais e Houthakker não se admite a possibilidade de substituição entre os bens, o modelo de Barten incorpora um efeito-substituição excessivo como resposta a mudanças na composição demográfica do domicílio (Deaton; Muellbauer, 1980a).

Uma forma de atenuar o problema do efeito-substituição no modelo de Barten é incorporar a sugestão feita por Gorman (1976) e introduzir um montante fixo de consumo para cada um dos bens da cesta de consumo do domicílio. De acordo com esta sugestão, a função custo e a função de demanda Marshalliana do domicílio seriam dadas respectivamente por

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}^h) = c(u, \tilde{\mathbf{p}}^h) + \sum_{k=1}^K p_k \gamma_k(\mathbf{z}^h) \quad (5.49)$$

$$q_k = m_k(\mathbf{z}^h) g_k \left( x^h - \sum_{k=1}^K p_k \gamma_k(\mathbf{z}^h), \tilde{\mathbf{p}}^h \right) + \gamma_k(\mathbf{z}^h) \quad (5.50)$$

Na prática, isto implicaria a incorporação de uma série de custos fixos  $\gamma_k(\mathbf{z}^h)$  associados à presença das crianças. Com esta modificação, mudanças nas características

demográficas do domicílio provocam um efeito fixo através de  $\gamma_k(\cdot)$  e um efeito escalamento  $m_k(\cdot)$  proporcional ao consumo do domicílio de referência.

Por fim, Nelson (1992) testa a validade do pressuposto de que as escalas de equivalências específicas  $m_k(\cdot)$  são exógenas, isto é, independentes do nível de utilidade ou da quantidade consumida. Para tanto, a autora realiza um teste de exogeneidade na escala de equivalência para vestuário, dado que na maior parte das pesquisas de orçamentos familiares este item é separado entre adultos e crianças. No modelo de Barten tradicional, se a escala de equivalência for exógena, então a elasticidade renda dos gastos com vestuário para adultos e crianças deve ser igual. Os resultados encontrados pela autora mostram, no entanto, que a elasticidade-renda do vestuário de criança é menor que a de vestuário de adulto. Nelson (1992) conclui então que ao menos uma das escalas específicas do modelo de Barten não é exógena. Neste caso, segundo a autora, as escalas de equivalências devem ser interpretadas como o *resultado* das decisões de alocação intradomiciliares e não – como o modelo de Barten supõe – como fatores que *determinam* a alocação de recursos do domicílio.

### 5.3.3.2 Economias de escala do consumo

Embora o modelo de Barten seja mais geral que o de Engel e o de Prais e Houthakker, a sua implementação empírica é complicada por conta do volume de informação necessário para a sua estimação. Porém, identificando uma motivação interessante na ideia de que as características demográficas agem de forma análoga aos preços, Deaton e Paxson (1998) elaboraram uma versão simplificada do modelo de Barten com o intuito de estimar somente a economia de escala do consumo domiciliar. O modelo desenvolvido por estes autores tornou-se a principal alternativa ao modelo de Engel para a estimação de economias de escala. No entanto, apesar de o modelo de Barten apresentado por Deaton e Paxson (1998) ser supostamente superior ao modelo de Engel, os resultados empíricos obtidos com a sua aplicação contradizem o que se deveria esperar do ponto de vista teórico. Essa contradição ficou conhecida na literatura como o *paradoxo de Deaton e Paxson* e será apresentada na sequência.

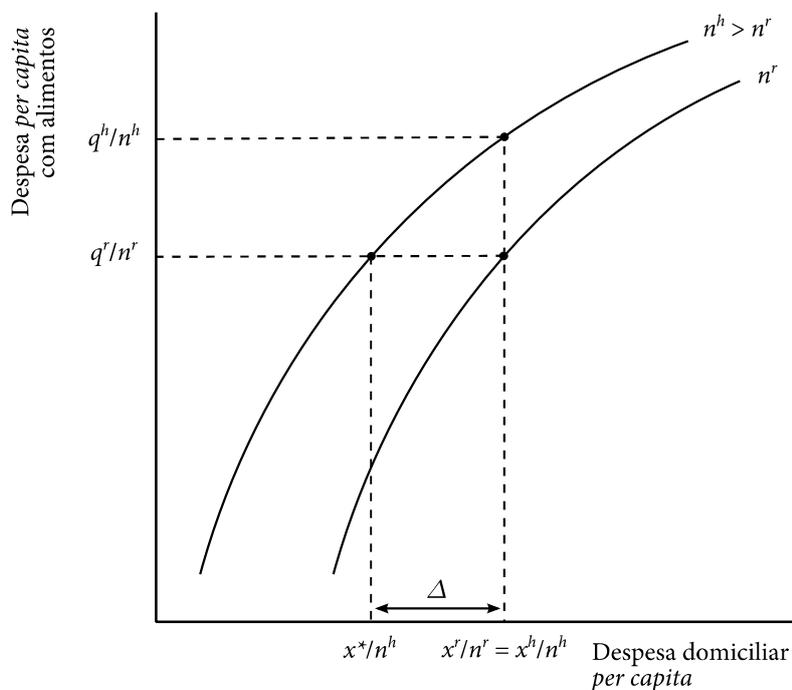
No modelo de Engel apresentado na Seção 5.3.1, as economias de escalas do domicílio foram incorporadas usando uma função isoelástica  $m(n) = n^\theta$  que agia como um deflator do consumo domiciliar e da despesa total do domicílio (cf. exemplo da Seção 5.3.1.1). Quanto menor o valor de  $\theta$ , menor era o valor no qual o consumo domiciliar era deflacionado na função utilidade e, portanto, maior era o bem-estar dos membros do domicílio. O problema desta abordagem, segundo Deaton (1997), é a falta de uma justificativa explícita para o misterioso processo que impede o consumo *per capita* do domicílio diminuir na mesma proporção do aumento do número de moradores, tudo o mais permanecendo constante. Se aceitarmos o pressuposto de que as economias de escalas ocorrem devido à presença de bens públicos dentro do domicílio, então uma forma mais apropriada de estimá-las é atribuir formalmente o efeito das economias de escalas ao partilhamento desses bens públicos. Este é o caminho tomado por Deaton e Paxson (1998).

A ideia desse modelo é a seguinte. Considere um bem privado cuja demanda relaciona-se positivamente com a renda (bem normal). Se aumentarmos o número de membros do domicílio mantendo a renda domiciliar *per capita* constante, é de se esperar que a queda no preço do bem público gere um efeito-renda positivo sobre o consumo do bem privado. Suponha que seja possível identificar previamente um bem privado que não é facilmente substituído por nenhum outro – como alimentos, por exemplo –; este é o pressuposto de identificação utilizado pelo modelo de Barten modificado. Se não há efeito-substituição no consumo do bem privado, a variação do seu consumo decorrente do efeito-renda pode ser utilizada para mensurar economias de escala. Em particular, pode-se calcular a redução na renda domiciliar *per capita* necessária para restaurar o consumo *per capita* do bem privado ao seu nível anterior (Deaton, 1997).

A Figura 5.4 ilustra a essência do modelo. No eixo vertical está representada a despesa *per capita* com alimentos ou qualquer outro bem privado que tenha baixa elasticidade de substituição. O eixo horizontal representa a despesa domiciliar *per capita*. Mantendo-se constante a despesa domiciliar *per capita* em  $x^r/n^r$ , um aumento no número de moradores

do domicílio de referência de  $n^r$  para  $n^h$  deve provocar um aumento no consumo *per capita* de alimentos de  $q^r/n^r$  para  $q^h/n^h$ .

Figura 5.4 - Modelo de Barten para economias de escala



Fonte: Deaton (1997).

Seja  $\Delta$  a diferença entre: a) a despesa domiciliar *per capita* necessária para que o domicílio maior ( $h$ ) consuma a mesma quantidade *per capita* de alimentos do domicílio de referência ( $r$ ); e b) a despesa domiciliar *per capita* do domicílio de referência,  $x^r/n^r$ . Segundo Deaton (1997), se supusermos que a elasticidade compensada de substituição dos alimentos é zero, então o consumo *per capita* de alimentos é um indicador exato de bem-estar e  $\Delta$  corresponde ao valor monetário *per capita* da economia de escala. Por outro lado, se a elasticidade de substituição compensada não for nula,  $\Delta$  ainda assim representa um limite inferior para o valor das economias de escala.

Formalmente, o modelo desenvolvido por Deaton e Paxson (1998) pode ser descrito da seguinte forma. Suponha que existam apenas dois bens: um bem privado  $f$ , que será denominado *alimentação*, e um bem público familiar  $F$ , que será denominado *habitação*. Se  $q_f$  e  $q_F$  representam as quantidades consumidas pelo domicílio de alimentos e habitação

respectivamente, e se todos os bens forem partilhados de forma igual entre os membros do domicílio, então a função de utilidade domiciliar pode ser escrita como

$$u = u(q_f, q_F, n) = \sum_{i=1}^n \tilde{u}\left(\frac{q_f}{n}, q_F\right) = n\tilde{u}\left(\frac{q_f}{n}, q_F\right) \quad (5.51)$$

onde  $\tilde{u}(\cdot)$  representa uma função de utilidade individual que é agregada entre os  $n$  membros do domicílio para formar a função de bem-estar do domicílio. Note que enquanto o consumo de alimentos é dividido entre os membros do domicílio, o consumo de habitação não é, dado que este é um bem público intradomiciliar.

O problema do domicílio consiste em maximizar (5.51) sujeito à restrição orçamentária  $p_f q_f + p_F q_F = x$  ou, em termos *per capita*,

$$p_f \left(\frac{q_f}{n}\right) + \left(\frac{p_F}{n}\right) q_F = \frac{x}{n} \quad (5.52)$$

A solução deste problema gera respectivamente equações de demanda para o bem privado e para o bem público do tipo

$$\frac{q_f}{n} = g_f(x/n, p_f, \tilde{p}_F) \quad (5.53)$$

$$q_F = g_F(x/n, p_f, \tilde{p}_F) \quad (5.54)$$

onde  $\tilde{p}_F = p_F/n$  é o preço efetivo do bem público intradomiciliar.

Por esta formulação, quando duas pessoas se juntam para formar um único domicílio, nem a renda domiciliar *per capita*  $x/n$  nem o preço do bem privado  $p_f$  se modificam. No entanto, o acréscimo de pessoas no domicílio age de forma a diminuir o preço efetivo do bem público intradomiciliar,  $\tilde{p}_F = p_F/n$ . Como consequência, deve-se esperar tanto um efeito renda positivo quanto um efeito substituição negativo sobre a demanda do bem privado. Se o bem privado for um bem necessário como, por exemplo, alimentação, então o efeito substituição será menor que o efeito renda e é de se esperar que haja um aumento no consumo *per capita* de alimentos.

Para tornar o modelo mais geral, suponha que tanto a alimentação quanto a habitação sejam sujeitas a graus variáveis de economia de escala, de modo que o tamanho efetivo do domicílio para o consumo de cada bem não é mais  $n$ , mas  $m_k(n)$ ,  $k = f, F$  (Deaton; Paxson, 1998). Neste caso, o problema de maximização do domicílio consiste em

$$\begin{aligned} \max_{q_f, q_F} \quad & n\tilde{u}\left(\frac{q_f}{m_f(n)}, \frac{q_F}{m_F(n)}\right) \\ \text{sujeito a} \quad & p_f\left(\frac{q_f}{n}\right) + \left(\frac{p_F}{n}\right)q_F = \frac{x}{n} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Redefinindo as quantidades como  $\tilde{q}_f = q_f/m_f(n)$  e  $\tilde{q}_F = q_F/m_F(n)$  e os preços como  $\tilde{p}_f = p_fm_f(n)/n$  e  $\tilde{p}_F = p_Fm_F(n)/n$ , pode-se reescrever o problema (5.55) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{q}_f, \tilde{q}_F} \quad & n\tilde{u}(\tilde{q}_f, \tilde{q}_F) \\ \text{sujeito a} \quad & \tilde{p}_f\tilde{q}_f + \tilde{p}_F\tilde{q}_F = \frac{x}{n} \end{aligned} \quad (5.56)$$

A solução desse problema gera a função de demanda por alimentos:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_f &= g_f\left(\tilde{p}_f, \tilde{p}_F, \frac{x}{n}\right) \\ \Rightarrow \frac{p_f q_f}{n} &= \frac{p_f m_f(n)}{n} g_f\left(\frac{p_f m_f(n)}{n}, \frac{p_F m_F(n)}{n}, \frac{x}{n}\right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde multiplicou-se ambos os lados por  $p_f$  e dividiu-se por  $n$  na última passagem de (5.57) de forma a se obter a função da despesa alimentar *per capita*.

Tirando o logaritmo de (5.57) e diferenciando-o em relação a  $\ln n$ , obtém-se<sup>36</sup>

$$\delta = \frac{\partial \ln(p_f q_f/n)}{\partial \ln n} = \sigma_F(\varepsilon_{fx} + \varepsilon_{ff}) + \sigma_f(1 + \varepsilon_{ff}) \quad (5.58)$$

onde  $\varepsilon_{ff}$  é a elasticidade-preço da demanda pelo bem privado (alimentos),  $\varepsilon_{fx}$  é a elasticidade-renda do bem privado e  $\sigma_k$  é a medida de economia de escala do bem  $k$ ,<sup>37</sup>

<sup>36</sup> Utilizou-se também o fato da função de demanda ser homogênea de grau zero em seus argumentos.

<sup>37</sup> Supondo que a alimentação é um bem normal com poucos substitutos, é de se esperar que  $\varepsilon_{ff} \leq 0$  e  $\varepsilon_{fx} \geq 0$ .

$$\sigma_k = 1 - \frac{\partial \ln m_k(n)}{\partial \ln n}, \quad k = f, F \quad (5.59)$$

Observe que uma especificação consistente com (5.59) é dada pela função isoelástica  $m_k(n) = n^{1-\sigma_k}$ . Se  $\sigma_k = 0$ , então o bem é puramente privado e não gera economias de escala no consumo ( $m_k(n) = n$ ). Se  $\sigma_k = 1$ , então o bem é puramente público e  $m_k(n) = 1$  para qualquer número de membros do domicílio.

Segundo Gan e Vernon (2003), o parâmetro  $\delta$  da equação (5.58) é o elemento chave do modelo de Barten para economias de escala desenvolvido por Deaton e Paxson (1998). Ele representa a elasticidade do consumo *per capita* de alimentos em relação ao número de membros do domicílio. Se a elasticidade-preço dos alimentos ( $\varepsilon_{ff}$ ) for próxima de zero em valores absolutos (isto é, se a alimentação for um bem inelástico) e se a alimentação tiver economias de escala significativamente menores do que a habitação (isto é, se  $\sigma_f/\sigma_F$  for suficientemente próximo de zero), então  $\delta > 0$ . Ou seja, mantendo-se constante a despesa domiciliar *per capita*, uma predição do modelo de Barten é que a fração da despesa com alimentação ( $w_f$ ) deve aumentar com o número de membros do domicílio. Gan e Vernon (2003) argumentam que este efeito positivo do tamanho do domicílio sobre a fração da despesa com alimentos deve ser maior quanto mais pobre for o domicílio.

Deaton e Paxson (1998) estendem a análise anterior de maneira a incorporar o efeito das crianças sobre a demanda do bem privado. Para tanto, os autores assumem que a alimentação é um bem privado puro e que o consumo de uma criança representa uma fração fixa  $\eta \in [0,1]$  do consumo de um adulto. Tais pressupostos são consistentes com a especificação das funções  $m_f(A,C) = A + \eta C$  e  $m_F(A,C) = (A + \eta C)^{1-\sigma_F}$ , onde  $A$  corresponde ao número de adultos no domicílio e  $C$  ao número de crianças. Neste caso, segundo os autores, um aumento na proporção de crianças, fixando-se tanto a despesa domiciliar *per capita* quanto o número de membros do domicílio, tenderá a reduzir a demanda de alimentos *per capita* do domicílio, desde que

$$(1 - \varepsilon_{fx}) + \sigma_F(\varepsilon_{fx} + \varepsilon_{ff}) > 0 \quad (5.60)$$

Esta condição será satisfeita se a alimentação for um bem necessário ( $\varepsilon_{fx} < 1$ ) e se tiver poucos substitutos (isto é, se  $\varepsilon_{ff}$  for próximo de zero em valores absolutos).

Para testar a validade do modelo de Barten modificado, Deaton e Paxson (1998) o estimam para um conjunto de sete países<sup>38</sup>. No que se refere às economias de escala, os resultados empíricos obtidos rejeitam fortemente as previsões do modelo de Barten. Tanto as estimativas paramétricas quanto as não-paramétricas realizadas pelos autores mostram que, fixando-se a despesa domiciliar *per capita*, os domicílios maiores possuem uma fração *menor* de gastos com alimentos, e este efeito é maior nos países mais pobres do que nos países mais ricos. Considerando-se que a fração das despesas com alimentos corresponde à razão da despesa *per capita* com alimentos em relação à despesa domiciliar *per capita*, este resultado implica dizer que o consumo *per capita* de alimentos diminui com o aumento do número de membros do domicílio se a despesa domiciliar *per capita* permanecer constante. Além disso, este declínio é maior nos países mais pobres, justamente aqueles onde se deveria esperar um aumento no consumo *per capita* de alimentos.

No caso das unidades equivalentes das crianças, as evidências empíricas obtidas pelos autores foram ambíguas. No geral, no entanto, os resultados indicam que a substituição de uma criança por um adulto reduz a fração do gasto com alimentos nos países mais desenvolvidos e a deixa inalterada ou a aumenta nos países mais pobres (Deaton; Paxson, 1998, p. 919).

Apesar das evidências empíricas contradizerem o modelo desenvolvido por Deaton e Paxson (1998), elas estão de acordo com o previsto pelo modelo de Engel. Lembre-se que no modelo de Engel, fixando-se a despesa domiciliar *per capita*, um domicílio com três moradores usufrui um bem-estar maior do que um domicílio com dois moradores, por conta dos benefícios gerados pela economia de escala do consumo. Como consequência, a fração da

---

<sup>38</sup> Os países analisados por estes autores foram: Estados Unidos, Grã-bretanha, França, Tailândia, Taiwan, Paquistão, e África do Sul.

despesa com alimentos do domicílio de três moradores é menor, dado que no modelo de Engel ela representa um indicador inverso de bem-estar.

Para Deaton (1997) este resultado é implausível pois, em países pobres, melhorar o bem-estar dos domicílios significa eles adquirirem *mais* alimentos por cabeça, e não menos. Além disso, considerando-se que a alimentação como um todo é um bem normal, o efeito-renda gerado pelas economias de escala deveria resultar em um aumento no consumo *per capita* de alimentos. O fato de isso não ocorrer empiricamente é interpretado por Deaton e Paxson (1998) como um *puzzle* (enigma)<sup>39</sup>.

Diante destes resultados, Deaton (1997) é pessimista quanto à possibilidade de mensurar economias de escala:

When it comes to the measurement of economies of scale [...] we have a model that works, and fits the data, but makes no sense [o modelo de Engel], and a model that makes sense, but whose most elementary implications are contradicted by the data [o modelo de Barten para economias de escala]. It is hard to see how we can make much progress until we can understand the paradoxical relationship between food consumption and household size. On this, there has been little or no progress so far. (Deaton, 1997, p. 267)

Para entender melhor o enigma, Deaton e Paxson (1998) listam algumas possíveis explicações para o fracasso do modelo de Barten. Dentre estas explicações, estão:

*Economias de escala diretas no consumo de alimentos.* Domicílios maiores podem obter descontos por realizarem aquisições em massa, permitindo-os adquirir alimentos a um preço unitário menor. O problema é que a evidência empírica existente mostra justamente o contrário: fixando-se a despesa domiciliar *per capita*, domicílios maiores pagam preços maiores para a mesma quantidade de alimentos, não menos (Deaton, 1997). Uma explicação é que como os domicílios maiores com a mesma despesa domiciliar *per capita* estão em melhor condição que os domicílios menores, eles podem adquirir alimentos de melhor qualidade, mas que possuem um preço unitário mais elevado. Como consequência, o enigma de Deaton e Paxson (1998) se aprofunda, pois os domicílios maiores pagam preços maiores para os

---

<sup>39</sup> Gan e Vernon (2003) foram os primeiros a usar a denominação *paradoxo de Deaton e Paxson*, como ficou melhor conhecido, em detrimento de *puzzle*.

alimentos – o que faz sentido –, ao mesmo tempo em que reduzem a despesa de consumo – o que não faz sentido.

*Economias de escala na preparação de alimentos.* Embora as informações disponíveis não permitam captar este efeito (dado que ele está relacionado ao tempo utilizado na preparação dos alimentos), as economias de escala na preparação dos alimentos tornam o valor do tempo mais barato, e este é complementar ao consumo de alimentos. Sendo assim, deveríamos observar um aumento no consumo de alimentos nos domicílios maiores, o que apenas aprofunda o enigma.

*Desperdício.* Domicílios maiores desperdiçam menos alimentos graças a uma melhor administração dos estoques. Embora esta explicação seja plausível, é difícil imaginar que o seu efeito seja grande, principalmente nos domicílios mais pobres onde a falta de alimentos não dá margem para o desperdício.

*Elasticidade-preço dos alimentos.* Se a elasticidade-preço da demanda compensada dos alimentos for alta, então o consumo *per capita* de alimentos pode diminuir com o tamanho do domicílio. Isto pode ocorrer se o domicílio deixar de se alimentar fora para consumir alimentos mais baratos preparados dentro de casa. As evidências empíricas apresentadas por Deaton e Paxson (1998), no entanto, não corroboram esta hipótese.

*Erros de medida.* Gastos com alimentos podem ter uma subestimação sistematicamente maior quanto maior for o número de moradores do domicílio. Se a captação dos gastos com alimentos for feita através da entrevista de uma única pessoa, o entrevistado pode não conhecer as despesas de alimentos efetuadas por todos os outros membros, resultando em uma subestimação destes gastos. Para Deaton e Paxson (1998), essa não parece ser a resposta do problema, principalmente porque os gastos com alimentação são em sua maioria domiciliares, o que significa que todos os membros do domicílio consomem alimentos a partir do mesmo “pote”, cujo montante é conhecido pelas pessoas responsáveis do domicílio. Entretanto, Gibson (2002) compara duas formas diferentes de captação das

despesas com alimentação em domicílios de uma mesma localidade – o método retrospectivo e o método da caderneta de despesas<sup>40</sup> – e conclui que erros de medida obtidos na captação dos dados com alimentação pelo método retrospectivo possuem alguma correlação com o tamanho do domicílio. Mesmo corrigindo a presença de erros de medida, no entanto, Gibson (2002) mostra que o modelo de Barten continua sendo rejeitado pelos dados<sup>41</sup>.

*Desigualdade intradomiciliar.* Se a curva de Engel for côncava, a demanda média por alimentos do domicílio se reduzirá quanto mais desigual for a distribuição dos alimentos dentro do domicílio. Para explicar os dados observados, no entanto, essa desigualdade teria que ser mais pronunciada nas economias mais pobres. Para Deaton e Paxson (1998), a existência de um pote único de alimentos no domicílio dificulta esta explicação: quando todos os membros do domicílio consomem do mesmo pote, é implausível que a alocação de alimentos seja desigual.

#### **5.3.4 O modelo de Rothbarth**

Outra forma de se estimar o custo da criança é por meio da abordagem sugerida originalmente por Rothbarth (1943). De acordo com este modelo, os bens e serviços consumidos pelas famílias podem ser divididos em dois grupos: aqueles bens que são consumidos *exclusivamente* por adultos (bens de adultos) e os demais bens, que podem ser consumidos tanto por adultos quanto por crianças. A ideia de Rothbarth é que os gastos com os bens de adultos poderiam ser utilizados para indicar o bem-estar do domicílio de forma que, se uma criança adicional reduzir estes gastos, é porque os recursos antes dispendidos no consumo de bens de adultos foram redirecionados para a criança. Em uma passagem, Rothbarth escreve

---

<sup>40</sup> O método retrospectivo consiste em perguntar à pessoa responsável pelo domicílio os gastos que ela teve em um determinado período de referência. O método da caderneta de despesa consiste em entregar ao entrevistado uma caderneta para que ele anote as despesas efetuadas durante um determinado período.

<sup>41</sup> Vale lembrar que a Pesquisa de Orçamentos Familiares realizada pelo IBGE – que será utilizada neste capítulo para a estimação dos modelos – emprega o método da caderneta de despesas e, portanto, as suas informações estão sujeitas a um erro de medida menor (cf. Apêndice A).

How much additional income does a family of given size require to compensate it for the cost of upkeep of an additional child? We should expect the answer to depend on the standard of living of the parents, for there will be a broad correspondence between the standard of living attained by the parents and the standard of living of the child. The technique under consideration consists in taking 'excess income' as a criterion for the standard of living of the parents, 'excess income' being the residual after provision has been made for expenditure on rent, rates, state insurance, travel, income tax, food, fuel and clothing. The families are, provisionally, taken to be equally well off, if their excess income is equal. (Rothbarth, 1943, p. 123).

A passagem acima mostra que o “excedente de renda” definido por Rothbarth seria representado por uma seleção abrangente de bens, incluindo virtualmente todos os bens de luxo. A literatura subsequente passou a utilizar uma definição mais restrita, identificando o “excedente de renda” como o gasto com “bens de adultos”, isto é, bens consumidos exclusivamente por adultos, normalmente confinados a álcool, fumo e itens de vestuário adulto (Nelson, 1993a).

De acordo com esta abordagem, ao adicionar uma criança entre os membros do domicílio, a demanda por bens infantis aumenta. Como as crianças não possuem recursos próprios, este aumento na demanda por bens infantis deve ser financiado por uma redução no consumo de outros bens, incluindo aqueles de consumo exclusivo dos adultos. Supondo que o bem-estar dos adultos (e do domicílio) seja monotonicamente relacionado com o consumo de bens de adultos, este efeito-renda negativo provocará uma redução no bem-estar do domicílio.

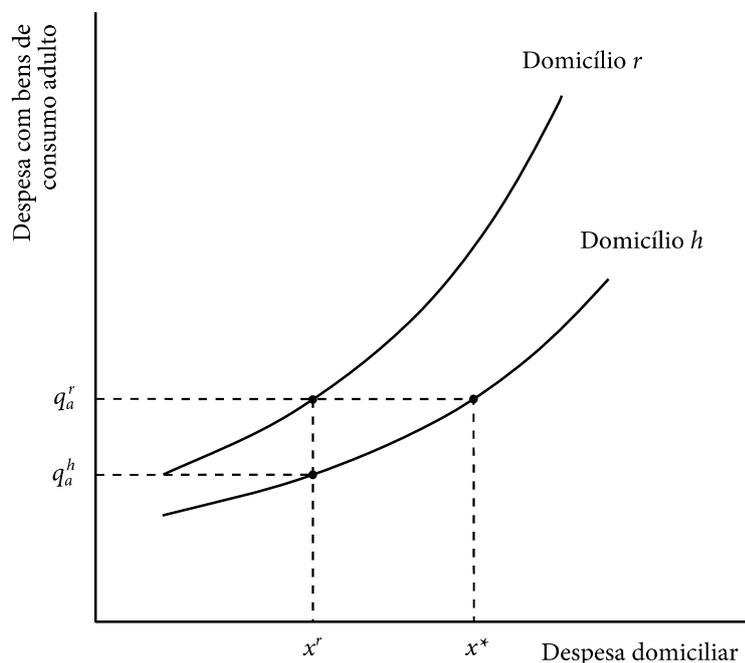
Assim, a compensação monetária necessária para recuperar o nível de bem-estar do domicílio ao vigente antes da inclusão da criança – o chamado “custo da criança” – deve ser o montante de dinheiro necessário para restaurar o nível de consumo de bens de adultos. De outra forma, se duas famílias com o mesmo número de adultos consomem a mesma quantidade de bens de adultos, então elas usufruem o mesmo nível de bem-estar, independentemente do número de crianças e da despesa total do domicílio. No modelo de Rothbarth, portanto, diferentemente do modelo de Engel, a estimação das escalas de equivalências baseia-se na comparação das rendas (ou das despesas) de domicílios com o mesmo nível de despesas com bens de adultos.

Gronau (1988, 1991) mostra que, do ponto de vista teórico, o modelo desenvolvido por Rothbarth equivale essencialmente a um modelo de repartição de recursos dentro do

domicílio, onde a regra de repartição de recursos é identificada com base no pressuposto de que existe um bem que é consumido exclusivamente por um grupo no domicílio, neste caso, adultos (cf. também Deaton, 1997). Desta forma, o modelo de Rothbarth pode ser interpretado como um modelo de alocação intradomiciliar dos recursos entre adultos e crianças. Nota-se que, assim como em outros modelos de estimação das escalas de equivalência, o foco da abordagem desenvolvida por Rothbarth recai nitidamente sobre a utilidade dos pais. No entanto, nenhum método desenvolvido para calcular escalas de equivalências deixa isso tão explícito quanto no modelo de Rothbarth.

A Figura 5.5 mostra a representação gráfica do modelo de Rothbarth. No eixo vertical está representada a despesa domiciliar com bens de adultos, e no eixo horizontal está representada a despesa domiciliar total. As curvas possuem inclinação positiva, pois assume-se que os bens de consumo adulto são normais. Suponha que o domicílio de referência ( $r$ ) seja composto por dois adultos e o domicílio de comparação ( $h$ ) seja composto por dois adultos e uma criança. Percebe-se pela Figura 5.5 que, tomando o nível de despesa domiciliar de referência  $x^r$ , o domicílio com a criança consome uma quantidade menor de bens de adultos do que o domicílio sem crianças ( $q_a^h < q_a^r$ ). De outra forma, para uma dada quantidade consumida com bens de adultos  $q_a^r$ , o domicílio com a criança precisará de mais recursos do que o domicílio de referência para manter o mesmo nível de consumo com bens de adultos ( $x^r < x^*$ ). Sendo assim, o custo da criança será igual a  $(x^* - x^r)$  e a escala de equivalência será dada pelo quociente  $m^h = (x^*/x^r)$ .

Figura 5.5 - Modelo de Rothbarth



Fonte: Deaton (1997).

Da mesma forma que no modelo de Engel, as escalas de equivalência estimadas por esta abordagem só terão um único valor se as curvas forem equidistantes. Em geral, no entanto, as escalas de equivalências irão depender do nível de renda ou de despesa do domicílio de referência. Por fim, note que as escalas estimadas pelo modelo de Rothbarth são especificamente designadas para a estimação do custo da criança. Elas permitem a comparação de domicílios com o mesmo número de adultos e um número diferente de crianças, mas não é possível calcular a escala de equivalência entre domicílios com diferentes números de adultos.

Formalmente, suponha que o domicílio consuma apenas bens privados<sup>42</sup> e que seja possível particionar a sua cesta de consumo  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_m)$  em: a) bens de consumo exclusivo de adultos ( $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_a^A$ ); e b) bens mistos ( $\mathbf{q}_m = \mathbf{q}_m^A + \mathbf{q}_m^C$ ), que podem ser consumidos tanto por

<sup>42</sup> Bens privados são bens rivais (o consumo de uma pessoa diminui a disponibilidade do bem para outra pessoa) e exclusivos (uma pessoa pode ser impedida de consumi-lo). A justificativa para esta hipótese será mostrada adiante. É importante observar, no entanto, que como o modelo de Rothbarth não incorpora bens públicos intradomiciliares, ele não é adequado para a estimação de economias de escala. Mais ainda, a presença de bens públicos pode afetar os resultados estimados por este modelo (Nelson, 1992).

adultos ( $\mathbf{q}_m^A$ ) quanto por crianças ( $\mathbf{q}_m^C$ ). Da mesma forma, seja  $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c)$  o vetor de características demográficas do domicílio, onde  $\mathbf{z}_c$  representa características demográficas exclusivas das crianças e  $\mathbf{z}_a$  as demais características, incluindo características demográficas dos adultos e socioeconômicas do domicílio; e  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m)$  o vetor de preços, onde  $\mathbf{p}_a$  é o vetor de preços dos bens de adultos e  $\mathbf{p}_m$  o vetor de preços dos bens mistos. Segundo Blackorby e Donaldson (1994, p. 59), uma condição necessária e suficiente para a validade do modelo de Rothbarth é que a função custo seja escrita de forma aditiva<sup>43</sup>

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}) = c_A(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a) + c_C(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c) \quad (5.61)$$

onde  $c_C(\cdot)$  é homogênea de grau zero em  $\mathbf{p}_a$ . Se existe apenas um bem adulto, então  $c_C(\cdot)$  deve ser independente de  $\mathbf{p}_a$ .

O primeiro termo de (5.61) representa a função custo dos adultos, enquanto o segundo termo representa o custo das crianças. O dispêndio total é igual à soma do gasto com bens de adultos  $x_a = \mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a$  com o gasto dos demais bens  $x_m = \mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m$ ,

$$x = x_a + x_m = \mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a + \mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m \quad (5.62)$$

Dado (5.61), a despesa com bens de adultos será independente das características demográficas das crianças<sup>44</sup>

$$\begin{aligned} x_a &= \sum_{k \in \mathcal{A}} p_k \frac{\partial c_A(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a)}{\partial p_k} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{A}} p_k h_k(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a) \\ &= \mu(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a) \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde  $\mathcal{A}$  representa o conjunto dos bens de adultos e  $h_k(\cdot)$  a função de demanda compensada do bem  $k$ . Assumindo que os bens de adultos como um todo são normais, a equação (5.63) pode ser invertida de forma a se obter o nível de utilidade  $u$  como uma função das despesas com bens de adultos  $x_a$ , dos preços  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m)$  e das demais características do domicílio.

<sup>43</sup> Diversos autores assumem a hipótese mais restritiva de que  $c_C(\cdot)$  deve ser independente de  $\mathbf{p}_a$  (cf. Browning, 1992; Tsakloglou, 1991).

<sup>44</sup> Esta equação resulta da aplicação do lema de Shepard.

(Deaton; Ruiz-Castillo; Thomas, 1989, p. 185; Gronau, 1988, p. 1196). Dessa forma, a despesa com bens de adultos pode ser utilizada como um indicador de bem-estar do domicílio.

Para se calcular a escala de equivalência, suponha que a família de referência consista em um casal sem filhos,  $c_C(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c) = 0$ . Então, a escala de equivalência entre um casal com filhos e um casal sem filhos é

$$m(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}_c) = \frac{c_C(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c) + c_A(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a)}{c_A(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a)} \quad (5.64)$$

onde  $\mathbf{z}_c$  indica as características das crianças do domicílio de comparação, que deve possuir as mesmas características  $\mathbf{z}_a$  do domicílio de referência. Observe que as escalas de equivalências dependem do nível de utilidade do domicílio de referência, ou seja, elas não são independentes da base (cf. Seção 5.3.1).

A função custo (5.61) pode ser gerada por diferentes estruturas de preferências. A principal hipótese adotada na literatura para gerar funções custo deste tipo consiste na chamada *hipótese de separabilidade demográfica* das preferências (Bourguignon, 1999; Deaton; Ruiz-Castillo; Thomas, 1989; Gronau, 1988, 1991; Nelson, 1992). De acordo com esta hipótese, o consumo dos adultos é afetado pela presença de uma criança apenas pelo efeito-renda negativo que ela gera. Em outras palavras, a taxa marginal de substituição entre dois bens consumidos pelos adultos permanece a mesma após a inclusão da criança: duas garrafas de champanhe são tão boas quanto uma noite no cinema, não importa se o casal possui uma criança ou não; e se ele possui uma criança, a taxa marginal de substituição permanece a mesma, independentemente daquilo que a criança consome (Bourguignon, 1999).

Blackorby e Donaldson (1994) mostram que nem as preferências requeridas pelo modelo de Rothbarth nem aquelas derivadas da hipótese de separabilidade demográfica representam casos especiais umas das outras. Essa conclusão não é partilhada por Deaton *et al.* (1989, p. 180), que afirmam que a validade da hipótese de separabilidade demográfica é necessária para a sustentação do modelo de Rothbarth, embora não represente uma condição suficiente:

[...] Demographic separability is an empirical proposition that is true or false on any given set of data, and so its truth cannot support any particular scheme for calculating child costs. However, its falsity would cast great doubt on the usefulness of Rothbarth's method. (Deaton; Ruiz-Castillo; Thomas, 1989, p. 180).

Essa questão é importante, pois dela depende a validade dos testes de hipótese usados no modelo de Rothbarth, todos eles desenvolvidos para verificar a existência de separabilidade demográfica. Para esclarecê-la, deve-se definir o conceito de separabilidade demográfica e compará-lo com a estrutura de preferências requeridas pelo modelo de Rothbarth. Isto será feito na Seção 5.3.4.1 a seguir. Em seguida, será apresentado outro conceito semelhante – a separabilidade dos bens de adultos – e serão feitas comparações deste conceito com o modelo de Rothbarth e a separabilidade demográfica (Seção 5.3.4.2).

#### 5.3.4.1 Separabilidade demográfica

Considere um grupo demográfico  $\mathcal{C}$ , por exemplo, crianças de sexo e faixa etárias diferentes. Um grupo de bens  $\mathcal{A}$  é *separável demograficamente* de  $\mathcal{C}$  se mudanças na estrutura demográfica dentro de  $\mathcal{C}$  exercem apenas efeitos-renda sobre a demanda dos bens de  $\mathcal{A}$ , isto é,

$$\frac{\partial q_a}{\partial z_c} = \theta_c \frac{\partial q_a}{\partial x}, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall c \in \mathcal{C} \quad (5.65)$$

onde  $z_c$  corresponde a uma característica demográfica de  $c \in \mathcal{C}$ ,  $q_a$  a quantidade demandada do bem  $a \in \mathcal{A}$ ,  $x$  corresponde ao dispêndio total e  $\theta_c$  corresponde a um fator de proporcionalidade que é independente do bem  $a$ .

Da equação (5.65), temos

$$\frac{\partial q_i / \partial z_c}{\partial q_j / \partial z_c} = \frac{\partial q_i / \partial x}{\partial q_j / \partial x}, \quad \forall i, j \in \mathcal{A}, \forall c \in \mathcal{C} \quad (5.66)$$

Ou seja, a característica demográfica  $z_c$  altera a demanda relativa por dois bens de adultos da mesma forma que uma mudança na renda alteraria esta demanda relativa.

Utilizando dados de despesas das famílias, apenas as derivadas da expressão (5.65) podem ser observadas.<sup>45</sup> Sendo assim, é evidente que, com apenas um bem de consumo adulto, não é possível testar a hipótese de separabilidade demográfica; qualquer efeito da criança sobre o consumo do bem  $a \in \mathcal{A}$  (doravante, bens de adultos) pode ser interpretado como um efeito-renda (Deaton; Ruiz-Castillo; Thomas, 1989). No entanto, se existirem vários bens de adultos diferentes, o efeito de uma criança em cada um deles deve ser proporcional ao efeito de mudanças no orçamento do domicílio ( $x$ ), o que consiste em uma restrição testável empiricamente.

Blackorby e Donaldson (1994) mostram que a separabilidade demográfica é satisfeita se, e somente se, a função custo puder ser escrita como

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}) = c_A(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a) + c_C(u, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c)$$

ou

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}) = \min_{\xi} \left\{ c_A(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \xi) + c_C(u, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c, \xi) \right\} \quad (5.67)$$

Note que, ao contrário do que afirmam Deaton *et al.* (1989), a função custo do modelo de Rothbarth (equação (5.61)) não é um caso especial de (5.67). Logo, a separabilidade demográfica *não* é uma condição necessária para o modelo de Rothbarth (Blackorby; Donaldson, 1994). No entanto, se  $c_C(\cdot)$  em (5.61), ao invés de ser homogênea de grau zero em  $\mathbf{p}_a$ , for independente dos preços dos bens de adultos  $\mathbf{p}_a$ <sup>46</sup>, então a separabilidade demográfica será uma condição necessária para o modelo de Rothbarth.

Uma formulação teórica do modelo de Rothbarth que *satisfaz* a hipótese de separabilidade demográfica consiste na utilização de uma função de utilidade que possui a propriedade de *separabilidade latente das preferências* (Blundell; Robin, 2000). A propriedade de separabilidade latente das preferências definida por Blundell e Robin (2000) consiste em

---

<sup>45</sup> A separabilidade demográfica será satisfeita se, e somente se, a função de demanda tiver a forma  $q_a = h_a(v(x, \mathbf{p}, \mathbf{z}), \mathbf{p}, \mathbf{z}_a)$  (Deaton; Ruiz-Castillo; Thomas, 1989). Derivando-se esta equação em relação a  $x$  e em relação a  $z_c$  se obtém  $\theta_c = (\partial v / \partial z_c) / (\partial v / \partial x)$  cujos componentes não são observados, dado que dependem da função de utilidade indireta  $v(\cdot)$ .

<sup>46</sup> Hipótese esta que é assumida pela maior parte da literatura, cf. Nota de Rodapé n. 43 na página 279.

uma generalização da conhecida hipótese da *separabilidade fraca* das preferências de Gorman (1959) (cf. Seção 5.3.4.2), que requer que os vetores de consumo entre adultos e crianças sejam mutuamente exclusivos e exaustivos (Varian, 1993, cap. 9; Deaton; Muellbauer, 1980a, cap. 5). No caso da separabilidade latente, a separação das preferências entre adultos e crianças não requer que os bens consumidos pelos adultos sejam mutuamente exclusivos com os bens consumidos pelas crianças. Como a cesta de consumo dos adultos contém alguns bens presentes também na cesta de consumo das crianças (por exemplo, leite, transporte, etc), o conceito mais apropriado a ser utilizado no modelo de Rothbarth é aquele definido por Blundell e Robin (2000).

A formulação teórica consiste no seguinte: suponha que em um domicílio com crianças, o bem-estar dos pais é constituído por

$$u = U(u^A, u^C) \quad (5.68)$$

onde  $u^A$  consiste no bem-estar dos pais obtido de seu próprio consumo e  $u^C$  o bem-estar que os adultos obtêm com a presença e o consumo das crianças. Utilizando a hipótese de que o bem-estar do domicílio possui a propriedade de separabilidade latente das preferências entre o consumo dos adultos  $q^A$  e o consumo das crianças  $q^C$ , então

$$u = U\left(u^A(q_a^A, q_m^A, z_a), u^C(q_m^C, z_a, z_c)\right) \quad (5.69)$$

onde  $q = (q_a, q_m)$  representa a cesta de consumo total do domicílio e  $u^A(\cdot)$  e  $u^C(\cdot)$  representam as subutilidades obtidas do consumo dos adultos e das crianças respectivamente. As funções de utilidade  $U(\cdot)$ ,  $u^A(\cdot)$  e  $u^C(\cdot)$  possuem as propriedades usuais com relação a seus argumentos, isto é, são crescentes e quase-côncavas em relação aos vetores de consumo.

Nos domicílios sem crianças, as funções  $U(\cdot)$  e  $u^C(\cdot)$  não são definidas. Neste caso, o bem-estar do domicílio é dado por

$$u = u^A(q_a^A, q_m^A, z_a) \quad (5.70)$$

Para que a função  $u^A(\cdot)$  do domicílio sem crianças seja comparável com a do domicílio com crianças, é necessário assumir que as suas preferências são *estáveis*, isto é, que as preferências dos pais sobre seu próprio consumo não se alterem com a presença da criança

(Nelson, 1992). Segundo Gronau (1988), isto é consistente com o comportamento dos pais de encherem o prato dos filhos com espinafre para que eles cresçam saudáveis, mas é inconsistente com o comportamento dos pais de começar a comer espinafre como forma de dar um exemplo positivo para as crianças. O pressuposto também é violado se a presença da criança afeta o prazer que os pais obtém de atividades como assistir televisão, beber, fumar, etc.

O domicílio maximiza a sua função de utilidade sujeito à restrição

$$\mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a^A + \mathbf{p}'_m (\mathbf{q}_m^A + \mathbf{q}_m^C) = x \quad (5.71)$$

Utilizando o pressuposto de ausência de bens públicos intradomiciliares, pode-se mostrar que o problema de maximização da utilidade (5.69) sujeito a (5.71) equivale a um processo de orçamento em dois estágios (Blundell; Robin, 2000; Deaton; Muellbauer, 1980a). De acordo com este processo, no primeiro estágio os pais decidem qual o montante da despesa total que será destinado às despesas com o seu próprio consumo ( $x^A$ ) e qual o montante que será destinado às despesas com o consumo das crianças ( $x^C$ ), isto é:

$$x = x^A + x^C \quad (5.72)$$

Segundo Gronau (1991), o estudo das alocações intradomiciliares foca principalmente esse primeiro estágio com o objetivo de estimar a regra de distribuição de recursos

$$x^A = \mu(\mathbf{p}, x, \mathbf{z}) \quad (5.73)$$

No segundo estágio, os pais decidem como alocar cada suborçamento entre os diferentes bens de acordo com as preferências dos adultos sobre o seu consumo  $u^A(\cdot)$  e sobre o consumo das crianças  $u^C(\cdot)$ , respeitando as restrições orçamentárias:

$$\mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a^A + \mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m^A = x^A = \mu \quad (5.74)$$

$$\mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m^C = x^C = x - \mu \quad (5.75)$$

O resultado deste segundo estágio consiste no sistema de funções de demanda condicionais:

$$\mathbf{q}_k^A = \mathbf{g}_k^A(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, x^A, \mathbf{z}_a), \quad k = a, m \quad (5.76)$$

$$\mathbf{q}_m^C = \mathbf{g}_m^C(\mathbf{p}_m, x^C, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c) \quad (5.77)$$

Pode-se observar, portanto, que as funções de demanda não dependem mais do dispêndio total  $x$ , mas apenas da parcela deste destinada às despesas de consumo de cada grupo demográfico. Ou seja, se as preferências dos pais são separáveis entre o seu próprio consumo e o consumo das crianças, existirão funções de demanda que relacionam o consumo de cada bem de adulto com o dispêndio total dos adultos e com o preço de todos os bens consumidos pelos adultos, alguns dos quais também consumidos pelas crianças (Deaton; Muellbauer, 1986).

Como consequência, se  $x^A$  e  $x^C$  forem conhecidos, é possível resolver os subproblemas de maximização de  $u^A(\cdot)$  e  $u^C(\cdot)$  e determinar as equações de demanda (5.76) e (5.77). Em particular, observe que para casais sem filhos,  $x = x^A$  e, portanto, a demanda por bens de adultos  $g_a^A(\cdot)$  é completamente observada a partir dos dados. Sendo assim, é possível também identificar implicitamente a regra de alocação de recursos  $\mu(\cdot)$  por meio da comparação da demanda por bens de adultos em domicílios com e sem crianças

$$g_a^A(x^h - \mu(x^h, \mathbf{p}, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c), \mathbf{p}, \mathbf{z}_a) = g_a^A(x^r, \mathbf{p}, \mathbf{z}_a) \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (5.78)$$

onde o lado direito de (5.78) corresponde à função de demanda por bens de adultos de um casal sem filhos e dispêndio total  $x^r$ , e o lado esquerdo corresponde à função de demanda por bens de adultos de um casal com filhos e dispêndio total  $x^h$ . Este método é empiricamente conveniente, já que o consumo de bens de adultos pode ser observado tanto para domicílios com crianças quanto para domicílios sem crianças em pesquisas de orçamentos familiares. Por fim, conforme mostra a equação (5.78), informação do dispêndio total de todos os domicílios e a observação do consumo de *ao menos* um bem de adultos é suficiente para determinar a regra de repartição de recursos (5.73).

Para terminar, segue a caracterização desta abordagem de acordo com o problema dual de minimização do custo.

A função de custo condicional associada ao subproblema de maximização de  $u^A(\cdot)$  em (5.69) é dada por

$$c_A(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \xi) = \min_{\mathbf{q}_a^A, \mathbf{q}_m^A} \left\{ \mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a^A + \mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m^A \mid u^A(\mathbf{q}_a^A, \mathbf{q}_m^A, \mathbf{z}_a) \geq \xi \right\} \quad (5.79)$$

E a função de custo condicional associada ao subproblema de maximização de  $u^C(\cdot)$  é dada por

$$c_C(\mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c, \zeta) = \min_{\mathbf{q}_m^C} \left\{ \mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m^C \mid u^C(\mathbf{q}_m^C, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c) \geq \zeta \right\} \quad (5.80)$$

Juntando (5.79) e (5.80), obtém-se a função custo do problema geral

$$\begin{aligned} c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}) &= \min_{\xi, \zeta} \left\{ c_A(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \xi) + c_C(\mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c, \zeta) \mid U(\xi, \zeta) \geq u \right\} \\ &= \tilde{c}_A(u, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a) + \tilde{c}_C(u, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c) \end{aligned} \quad (5.81)$$

Comparando-se (5.81) com (5.61) e (5.67) respectivamente, percebe-se que esta formulação: *a)* representa um caso especial do modelo de Rothbarth, onde  $c_C(\cdot)$  é independente de  $\mathbf{p}_a$  em (5.61); e *b)* satisfaz a hipótese de separabilidade demográfica definida anteriormente. A formulação teórica apresentada acima foi utilizada por diversos autores para justificar o modelo de Rothbarth (cf. Bourguignon, 1999; Gronau, 1988, 1991; Nelson, 1992, entre outros).

#### 5.3.4.2 Separabilidade dos bens de adultos

Além da separabilidade demográfica, existe um outro tipo de estrutura de preferências que possui implicações distintas para o bem-estar do domicílio, mas que em alguns casos gera o mesmo comportamento de consumo quando captado em pesquisas *cross-section*. Esta estrutura de preferências consiste em separar os bens de adultos dos demais bens nas relações de preferências do domicílio. Ou seja, ela estabelece que as relações de preferências sobre  $\mathbf{q}_a$  condicional a  $\mathbf{q}_m$  e  $\mathbf{z}$  sejam independentes de  $\mathbf{q}_m$ . Esta estrutura de preferências será denominada de *separabilidade dos bens de adultos*.

Formalmente, a separabilidade dos bens de adultos consiste em especificar uma função de utilidade direta na qual a preferência por bens de adultos é fracamente separável da preferência dos demais bens consumidos pelo domicílio

$$u = u(\varphi(\mathbf{q}_a, \mathbf{z}), \mathbf{q}_m, \mathbf{z}) \quad (5.82)$$

onde  $u(\cdot)$  e  $\varphi(\cdot)$  são crescentes nos seus primeiros argumentos.

Pode-se mostrar que, na ausência de bens públicos, o problema de maximização da utilidade (5.82) sujeito à restrição orçamentária  $\mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a + \mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m = x$  equivale a um processo de orçamento em dois estágios (Deaton; Muellbauer, 1980a, cap. 5)<sup>47</sup>. De acordo com este processo, no primeiro estágio decide-se o montante da despesa total que será destinado para as despesas com bens de adultos ( $x_a$ ) e o montante que será destinado para as despesas com os demais bens ( $x_m$ ). No segundo estágio, de posse de cada suborçamento  $x_a$  e  $x_m = x - x_a$ , decide-se a quantidade demandada de cada um dos bens  $a \in \mathcal{A}$  e  $m \in \mathcal{A}^c$  respectivamente (onde  $\mathcal{A}^c$  é o conjunto complementar de  $\mathcal{A}$ ), de acordo com as preferências específicas expressas pelas funções  $\varphi(\cdot)$  e  $u(\cdot)$ , e respeitando-se as restrições orçamentárias  $\mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a = x_a$  e  $\mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m = x_m$ .

Como consequência desse processo, a separabilidade dos bens de adultos implica (e é implicada por) funções de demanda do tipo

$$q_a = g_a(x_a, \mathbf{p}_a), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (5.83)$$

ou seja, as quantidades demandadas por bens de adultos podem ser escritas como funções do dispêndio total em bens de adultos e do vetor de preços dos bens de adultos apenas.

A função custo associada a  $\varphi(\cdot)$  em (5.82) é:

$$c_\varphi(\mathbf{p}_a, \mathbf{z}, \xi) = \min_{\mathbf{q}_a} \{ \mathbf{p}'_a \mathbf{q}_a \mid \varphi(\mathbf{q}_a, \mathbf{z}) \geq \xi \} \quad (5.84)$$

E a função custo condicional associada a  $u(\cdot)$  é:

$$c_u(u, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}, \xi) = \min_{\mathbf{q}_m} \{ \mathbf{p}'_m \mathbf{q}_m \mid u(\xi, \mathbf{q}_m, \mathbf{z}) \geq u \} \quad (5.85)$$

---

<sup>47</sup> Segundo Deaton e Muellbauer (1980a), preferências separáveis e orçamento em dois estágios não são conceitos equivalentes. Mas a separabilidade fraca das preferências é tanto uma condição necessária quanto uma condição suficiente para o *segundo* estágio do orçamento. Em outras palavras, preferências separáveis não implicam um orçamento em dois estágios, mas a existência de um segundo estágio implica a separabilidade das preferências.

Assim, segundo Blackorby e Donaldson (1994), os bens de adultos são separáveis dos demais bens na função de utilidade direta se, e somente se, a função custo puder ser escrita como

$$c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}) = \min_{\xi} \left\{ c_{\varphi}(\mathbf{p}_a, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c, \xi) + c_u(u, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c, \xi) \right\} \quad (5.86)$$

Comparando-se (5.86) com (5.67) observa-se que se  $c_A(\cdot)$  em (5.67) fosse independente de  $\mathbf{p}_m$ , a função custo resultante teria tanto a propriedade da separabilidade demográfica quanto a propriedade da separabilidade de bens de adultos. Da mesma forma, se  $c_{\varphi}(\cdot)$  fosse independente de  $\mathbf{z}_c$  em (5.86), então a função custo resultante teria ambos os tipos de separabilidade de preferências. Isto significa que a separabilidade demográfica e a separabilidade dos bens de adultos serão satisfeitas simultaneamente se, e somente se, a função custo puder ser escrita como (Blackorby; Donaldson, 1994):

$$\begin{aligned} c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}) &= \min_{\xi} \left\{ c_A(\mathbf{p}_a, \mathbf{z}_a, \xi) + c_C(u, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c, \xi) \right\} \\ &\text{ou} \\ c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}) &= c_A(\mathbf{p}_a, \mathbf{z}_a) + c_C(u, \mathbf{p}_m, \mathbf{z}_a, \mathbf{z}_c) \end{aligned} \quad (5.87)$$

Isto mostra que nenhuma destas formas de separabilidade é derivada uma da outra.

### 5.3.4.3 Testes de separabilidade demográfica

Foi visto na Seção 5.3.4.1 que a hipótese de separabilidade demográfica não é nem condição necessária nem suficiente para a validade do modelo de Rothbarth. Entretanto, se assumirmos uma versão um pouco mais restrita do modelo, onde as preferências dos adultos sobre seu consumo é separável de suas preferências sobre o consumo das crianças, então a hipótese de separabilidade demográfica passa a ser necessária para o modelo de Rothbarth. Logo, é importante saber em que medida os dados observados satisfazem ou não esta hipótese. Como as condições para a validade do modelo implicam restrições nas preferências, mas não são implicadas por elas, segue que testes para a verificação da hipótese de separabilidade demográfica só são conclusivos no caso de rejeição. Testes da hipótese de separabilidade demográfica foram feitos por Deaton *et al.* (1989), Gronau (1991) e Nelson (1992).

Gronau (1991) utiliza o modelo de Rothbarth para analisar exclusivamente a alocação intradomiciliar de recursos entre adultos e crianças. Os resultados encontrados pelo autor mostram que a existência de crianças reduz a propensão marginal a consumir de vestuário de adulto em cerca de  $\frac{1}{4}$ . Em outras palavras, a propensão marginal do consumo dos pais em um domicílio com crianças é de 0,75, enquanto a propensão marginal das crianças é de 0,25. O autor testa a hipótese de separabilidade demográfica verificando se a presença de uma criança afeta a propensão marginal a consumir dos pais de forma semelhante para todos os bens de adultos. Os resultados obtidos pelo autor não rejeitam a hipótese de separabilidade demográfica.

Nelson (1992) realiza um teste informal para verificar se a hipótese de separabilidade demográfica e a de preferências estáveis são plausíveis conjuntamente. A ideia do teste é a seguinte: se os pressupostos de preferências estáveis e de separabilidade demográfica forem verdadeiros, então não apenas o valor total dos bens de adultos deve ser o mesmo nos domicílios com e sem crianças que usufruem o mesmo nível de bem-estar, mas também o consumo dos bens desagregados, item por item. Como o consumo dos adultos tanto nos domicílios com crianças quanto nos domicílios sem crianças depende de uma mesma função de demanda,  $q_k^A = g_k^A(\mathbf{p}, x^A)$ , e como a diferença no montante gasto com um bem  $k$  entre os dois domicílios que possuem o mesmo orçamento dos adultos  $x^A$  só pode ser explicado pelos gastos das crianças com este bem, então as despesas das crianças podem ser inferidas pela diferença  $p_k q_k^C = p_k q_k - p_k q_k^A$ .

Para realizar o teste, Nelson (1992) utiliza dois grupos de bens de adultos distintos: *a*) vestuário de adulto; e *b*) um combinado de álcool, fumo e vestuário de adulto. Em todos os casos analisados, a autora obteve despesas negativas das crianças com seguro de vida, cuidados pessoais, educação pública e o grupo que equivale aos itens de higiene e limpeza. Nelson mostra também que as crianças teriam despesas positivas com fumo e álcool correspondente a cerca de 10% das despesas do domicílio com estes itens. Para a autora, se assumirmos que estes resultados não decorrem de um problema de especificação do modelo, então eles colocam em dúvida a validade do pressuposto de separabilidade demográfica. Segundo ela, no

entanto, como essas conclusões estão sujeitas a uma certa dose de subjetividade (pois não existe um teste de hipótese formal), os resultados podem estar sujeitos a interpretações alternativas.

Por fim, Deaton *et al.* (1989) estimam curvas de Engel para vários bens de adultos em potencial e utilizam os parâmetros estimados em um teste para verificar a validade da hipótese de separabilidade demográfica. Para tanto, os autores expressam a influência das características demográficas sobre o padrão de consumo das famílias pelas *razões equivalentes de despesas* (do inglês *outlay equivalent ratios*), definidas como

$$\pi_{kg} = \frac{\partial(p_k q_k) / \partial n_g}{\partial(p_k q_k) / \partial x} \frac{n}{x} \quad (5.88)$$

onde  $k$  representa o índice do bem de adulto e  $g$  representa o índice das características demográficas do domicílio (por exemplo, faixa etária das crianças). Cada  $\pi_{kg}$  representa o efeito que uma pessoa do tipo  $g$  tem sobre a demanda do bem  $k$ , medida pela quantidade de recursos que seria necessária para produzir este mesmo efeito sobre a demanda do bem  $k$ , expresso como uma fração da despesa *per capita* do domicílio. Se o bem  $k$  pertence ao grupo de bens de consumo de adultos, então, pela hipótese de separabilidade demográfica, os coeficientes  $\pi_{kg}$  estimados serão os mesmos para todos os bens do grupo (Deaton; Ruiz-Castillo; Thomas, 1989).

De posse dos valores estimados de  $\pi_{kg}$ , o teste da hipótese de separabilidade demográfica para um grupo de  $N$  bens de adultos é dado por

$$H_0 : \Delta_{kg} \equiv \pi_{kg} - \sum_{i=1}^{N_A} \frac{\pi_{ig}}{N} = 0 \quad (5.89)$$

onde o teste em  $H_0$  possui distribuição  $\chi^2$  com  $N-1$  graus de liberdade. O resultado geral obtido pelos autores mostra que vestuário de adulto, educação de adulto, entretenimento e saúde não satisfazem a hipótese de separabilidade demográfica, principalmente quando o grupo demográfico analisado é o de crianças de 0 a 4 anos de idade.

Apesar destas tentativas de validação da hipótese de separabilidade demográfica, Deaton *et al.* (1989) demonstram que mesmo se a separabilidade demográfica não for rejeitada, testes estatísticos aplicados em pesquisas *cross-section* (ou seja, sem variação de preços) não conseguem distinguir o caso em que o consumo total *dos pais* é separável do consumo das crianças (Seção 5.3.4.1) do caso em que o consumo *de bens de adultos* é separável do consumo dos demais bens (Seção 5.3.4.2). Conforme discutido anteriormente, a validade do modelo de Rothbarth depende se os gastos com bens de adultos representam um indicador satisfatório de bem-estar. Sob a separabilidade demográfica eles representam; sob a separabilidade de bens de adultos, não.

Para Gronau (1991), embora exista a possibilidade das preferências dos domicílios serem separáveis no consumo dos bens de adultos, este não parece ser o caso mais provável. Segundo o autor, em geral o pressuposto de separabilidade é aplicado a um grupo de bens que possuem certas afinidades, como, por exemplo, a separação entre o consumo e o lazer ou a separação entre o consumo futuro e o consumo presente. Embora essa afinidade exista no caso da separabilidade demográfica, ela é difícil de justificar no caso da separabilidade dos bens de adultos, dado que não há nada em termos de preferências que por si só justifique a junção de bens tão diversos quanto vestuário de adulto, fumo e álcool em um grupo separado dos demais bens.

Para elaborar melhor este argumento, observe que a separabilidade das preferências implica que a elasticidade de substituição entre qualquer bem pertencente ao grupo separado e um bem fora deste grupo seja a mesma. Se a separabilidade de bens de adultos estiver correta, então a elasticidade de substituição entre o consumo de bebidas não-alcoólicas dos pais (fora do grupo de bens de adultos) e álcool (dentro do grupo de bens de adultos) deve ser a mesma que entre bebidas não-alcoólicas e vestuário de adulto, o que representa uma restrição difícil de ser aceita.

#### 5.3.4.4 Efeitos das economias de escala sobre o modelo de Rothbarth

Conforme foi visto na Seção 5.3.4.1, a validade do modelo de Rothbarth depende, dentre outras coisas, do pressuposto de que todos os bens consumidos pelo domicílio são privados. Se existirem bens públicos dentro do domicílio, estes podem criar uma ligação entre o consumo dos pais e o consumo das crianças, o que viesaria as estimativas das escalas de equivalência das crianças. Para Nelson (1992), portanto, quando o assunto é a presença de economias de escala, a questão que efetivamente está sendo analisada é se o pressuposto de separabilidade demográfica é plausível ou não.

Para mostrar o efeito das economias de escala sobre o modelo de Rothbarth, considere o seguinte exemplo (Nelson, 1992; Schulte, 2007). Suponha que existam apenas dois tipos de bens consumidos por adultos e crianças: um bem público domiciliar  $F$  que é consumido conjuntamente por adultos e crianças,  $q_F = q_F^A = q_F^C$ , e um bem privado  $f$ , parte do qual é consumido pelos adultos e parte consumido pelas crianças,  $q_f = q_f^A + q_f^C$ . O problema do domicílio com criança consiste em maximizar a função de utilidade separável  $U(u^A(q_f^A, q_F), u^C(q_f^C, q_F))$  sujeito à restrição orçamentária  $p_f(q_f^A + q_f^C) + p_F q_F = x$ . Para um domicílio sem crianças, o problema consiste em maximizar  $u^A(q_f^A, q_F)$  sujeito a  $p_f q_f^A + p_F q_F = x$ .

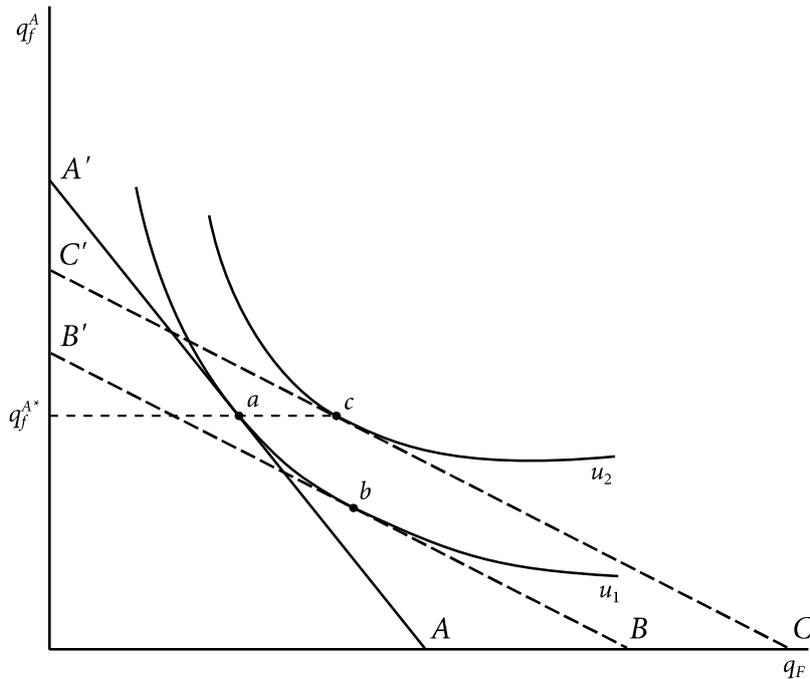
Dadas estas condições, percebe-se que para um casal sem filhos a solução ocorrerá no ponto em que a taxa marginal de substituição dos adultos entre os bens  $f$  e  $F$  é igual à razão  $p_F/p_f$ , enquanto que para o domicílio com a criança a solução ocorrerá em

$$\frac{(\partial u^A / \partial q_F)}{(\partial u^A / \partial q_f^A)} = \frac{p_F}{p_f} - \frac{(\partial u^C / \partial q_F)}{(\partial u^C / \partial q_f^C)} \quad (5.90)$$

onde  $(\partial u^C / \partial q_F) / (\partial u^C / \partial q_f^C)$  corresponde à taxa marginal de substituição da criança entre o bem público  $F$  e o bem privado  $f$ . Observe que o efeito de  $(\partial u^C / \partial q_F) / (\partial u^C / \partial q_f^C)$  na solução é similar ao efeito de uma redução no preço do bem público. Logo, apesar de a função de utilidade do domicílio ser separável na utilidade dos adultos e das crianças, o problema de

maximização geral do domicílio não é separável, porque a presença de um bem público puro gera não apenas um efeito-renda, mas também um efeito-substituição.

Figura 5.6 - Efeitos da economia de escala no modelo de Rothbarth



Fonte: Schulte (2007).

Isto pode ser ilustrado na Figura 5.6 (cf. Schulte, 2007). No eixo horizontal da figura está representada a quantidade de bens públicos domiciliares ( $q_F$ ) e no eixo vertical está representada a quantidade de bens privados consumidos pelos adultos ( $q_f^A$ ). Seja  $A'A$  a restrição orçamentária de um casal sem filhos. Ao maximizar a utilidade, o casal escolherá como cesta de consumo ótima aquela representada pelo ponto  $a$ . Nesse ponto, a quantidade de bens de adultos consumida pelo domicílio é dada por  $q_f^{A*}$ .

Considere agora um domicílio que teve uma criança incorporada entre seus membros. Se a criança provoca apenas um efeito-renda sobre o consumo dos adultos, então um casal com filhos perfeitamente compensado pela presença da criança retornará ao ponto  $a$  de consumo. Ocorre que a presença da criança não gera apenas um efeito-renda; a simples existência de um bem público na função de utilidade do domicílio faz com que a restrição orçamentária se torne mais plana, pois o preço do bem público ficou mais barato. Sendo

assim, um casal com filhos perfeitamente recompensado pela presença da criança passará a usufruir a cesta de consumo  $b$ , no mesmo nível de utilidade  $u_1$ , a partir da restrição orçamentária  $B'B$ . Neste caso, portanto, os pais estarão consumindo menos bens de adultos e mais bens públicos.

Para o pesquisador que observar apenas as informações de despesas dos domicílios, no entanto, o uso do modelo de Rothbarth levará à conclusão de que a compensação necessária para restabelecer o nível de bem-estar dos domicílios com crianças será aquela necessária para recompor a quantidade de bens de adultos consumida pelo domicílio ( $q_f^{A*}$ , no ponto  $c$ ). Entretanto, ao fazer isto, o pesquisador estabelecerá uma compensação muito alta para o domicílio. Portanto, assumindo-se que os bens de adultos são bens normais, a compensação paga pelo modelo de Rothbarth (e, portanto, o valor das escalas de equivalências) será maior que a necessária para equalizar o bem-estar dos domicílios quando houver bens públicos intradomiciliares sendo repartidos entre os moradores.

Para Nelson (1992), apesar de ser fácil estabelecer exemplos teóricos nos quais os efeitos-substituição provocados pelas economias de escala tornam inválido o pressuposto de separabilidade demográfica, a questão de se tais efeitos são importantes é eminentemente empírica. Pode ser que todos os bens sejam afetados igualmente pelas economias de escala, fazendo com que os preços relativos implícitos entre os bens não se alterem significativamente; ou pode ocorrer de os bens de adultos serem complementares aos bens públicos, isto é, que as elasticidades-preço compensadas sejam próximas de zero, fazendo com que mudanças nos preços relativos implícitos tenham pouco efeito sobre o consumo observado (Nelson, 1992; Schulte, 2007). Para Nelson (1992), portanto, a direção do viés provocado pelas economias de escala no modelo de Rothbarth é ambígua.

Deaton e Muellbauer (1986) comparam os modelos de Rothbarth e o de Engel em relação ao modelo de Barten com modificação de Gorman (Seção 5.3.3.1), que os autores consideram ser um caso mais geral dos outros dois. Com base nesta comparação, os autores mostram que a compensação estimada pelo modelo de Rothbarth é menor do que a obtida pelo modelo geral de Barten. Entretanto, Schulte (2007) aponta uma falha na análise de

Deaton e Muellbauer (1986), que é a constatação de que as preferências no modelo de Barten-Gorman não satisfazem a hipótese de separabilidade demográfica. Ao contrário, grande parte dos efeitos que uma criança têm sobre o modelo ocorrem através de mudanças nos preços implícitos e, portanto, geram efeitos-substituição no consumo de bens de adultos. Dessa forma, analisar a compensação paga pelo modelo de Rothbarth pela ótica do modelo de Barten-Gorman não seria correto, pois os dois modelos não são comparáveis.

Para Gronau (1988), o pressuposto da separabilidade demográfica na presença de economias de escala pode ser mantido se: *a*) as preferências dos adultos para os bens privados e para os bens públicos forem separadas; e *b*) o conceito de escalas de equivalências for redefinido de maneira a refletir apenas o bem-estar gerado pelo consumo de *bens privados* dos adultos. Para Nelson (1992), além de esta definição de escalas de equivalência ser demasiadamente restrita, ela não é satisfatória, pois bens que produzem economias de escalas significativas, tais como habitação, transporte, recreação e cultura – e, portanto, não estão cobertos por esta definição – representam uma parcela importante das despesas domiciliares.

#### 5.3.4.5 A escolha dos bens de adultos

Conforme argumenta Schulte (2007), o fato de um bem ser consumido exclusivamente por adultos não é suficiente para utilizá-lo na estimação do modelo de Rothbarth; é importante também que a demanda por este bem não seja afetada por mudanças nas preferências dos adultos decorrentes da presença da criança ou por algum efeito-substituição que influencie o consumo de bens de adultos.

Um efeito substituição importante que as crianças geram sobre a demanda dos pais ocorre devido à mudança do valor no tempo (Becker, 1965, 1991). Excetuando-se os efeitos sobre a oferta de trabalho – que não são incorporados neste modelo – todas as atividades intensivas em tempo se tornam mais caras. Uma visita dos pais ao cinema, por exemplo, depende da ajuda de algum familiar ou de uma babá no cuidado das crianças, com a incorrência de custos monetários para o casal. Sendo assim, bens e serviços intensivos em tempo, como educação de adultos, alguns serviços pessoais (cabelereiro, etc.) ou algumas

atividades culturais ou recreativas (academia de ginástica, cinema, teatro, etc.) não são bons candidatos para bens de adultos. Da mesma forma, preocupações relacionadas à saúde das crianças podem fazer com que as preferências dos adultos em relação ao fumo ou ao consumo de bebidas alcoólicas se modifiquem, tornando estes bens inadequados para a estimação do modelo, apesar do seu uso generalizado na literatura.

Além destas condições, Schulte (2007) coloca que para que os erros de estimação sejam pequenos, a elasticidade-renda da demanda por bens de adultos tem que ser suficientemente elevada. Conforme foi visto no começo da Seção 5.3.4, no caso limite em que a elasticidade-renda for zero, as curvas de Engel de bens de adultos do domicílio de referência e do domicílio de comparação serão paralelas, o que impossibilitaria o cálculo das escalas de equivalências. Além disso, para que exista apenas uma solução, a curva de Engel deve ser também monotônica com a renda. Isto faz com que fumo e álcool sejam candidatos ruins para bens de adultos: a demanda por fumo é tradicionalmente inelástica, enquanto a demanda por bebidas alcoólicas não é sempre monotônica (Banks; Blundell; Lewbel, 1997).

Desta forma, o bem de adulto mais apropriado para se estimar o modelo de Rothbarth é vestuário de adulto (Schulte, 2007). Dentre os motivos por esta preferência, pode-se citar:

- a) Ele possui uma elasticidade-renda alta o suficiente para permitir identificar os valores das escalas de equivalência;
- b) Ele representa um percentual não desprezível das despesas de um casal sem filhos;
- c) Não há motivos para supor que a preferência por vestuário de adulto se altere com a presença de uma criança, tal como pode ocorrer com fumo e álcool;
- d) Ao contrário dos demais bens de consumo exclusivo de adultos, pode-se assumir que nenhum indivíduo se abstém do consumo de itens de vestuário, tal como pode ocorrer com fumo e bebidas alcoólicas; e
- e) Apesar de as despesas com vestuário também estarem sujeitas a valores nulos oriundos de infreqüência de aquisição, esse problema é menor no grupo vestuário do que em outros grupos agregados de despesas (cf. Seção 3.3).

#### 5.3.4.6 Discussão

A literatura que compara os modelos de Engel e Rothbarth tende a preferir o segundo ao primeiro, pois: *a)* os pressupostos nos quais se baseia o modelo de Engel são de difícil aceitação; e *b)* apesar de as hipóteses do modelo de Rothbarth serem difíceis de comprovar empiricamente, elas são mais plausíveis.

Apesar de o modelo de Rothbarth possuir maior consistência teórica, a sua aplicação empírica pode apresentar problemas. A primeira dificuldade ocorre já na escolha dos “bens de adultos”. Além das pesquisas de orçamentos familiares oferecerem um conjunto limitado de opções para a escolha desses bens, a rejeição de um ou outro bem nos testes de separabilidade demográfica acaba tornando a escolha do grupo arbitrária e controversa.

Outra dificuldade ocorre quando, ao estimar o modelo, obtém-se uma elasticidade-renda nula ou próxima de zero. Neste caso, fica impossível calcular a compensação a ser paga pelo modelo de Rothbarth. Segundo Nelson (1992), se isto ocorre, significa que a teoria simplesmente não está funcionando, uma vez que as crianças não estão afetando as despesas dos adultos da mesma forma que mudanças na renda. Se a inclusão de uma criança altera as despesas com fumo e bebidas alcoólicas, mas a renda não está gerando o mesmo efeito, então as crianças devem estar exercendo algum efeito-substituição e estes bens não podem ser utilizados para mensurar as escalas de equivalência.

Por fim, alguns dos principais bens de adultos, como fumo e álcool, por exemplo, conflitam com a própria noção de bem-estar. Além de estes bens possuírem um percentual elevado de não-consumidores, para diversos indivíduos eles não são considerados bens, e sim “males”. Utilizar fumo ou álcool como bens de adultos implica que o bem-estar do domicílio é proporcional ao consumo destes bens, o que parece contraditório (Browning, 1992).

Para finalizar esta seção, Deaton e Muellbauer (1986), utilizando alguns pressupostos extremos<sup>48</sup>, mostram que, do ponto de vista teórico, as escalas de equivalência estimadas pelo

---

<sup>48</sup> Como, por exemplo, que todos os bens exceto alimentação são classificados como bens de adultos.

modelo de Rothbarth serão menores que as de Engel. Suponha que quando uma criança nasce, os pais são pagos conforme a compensação de Rothbarth, de forma que os gastos com bens de adultos (isto é, tudo o que não for alimentação, cf. Nota de Rodapé n. 48) é restaurado ao seu nível original. Como a compensação elevou o dispêndio total, mas o consumo de bens de adultos permaneceu no mesmo nível, então houve um aumento na fração das despesas destinadas à alimentação. Mas, de acordo com o modelo de Engel, isto significa uma perda de bem-estar em relação à situação original, ou seja, a compensação paga pelo modelo de Rothbarth foi insuficiente. Logo, a escala de Engel deve ser maior que a escala de Rothbarth. Isto é consistente com os resultados empíricos encontrados por Tsakloglou (1991) entre outros autores, onde as escalas de equivalência estimadas através da metodologia de Engel são maiores que as estimadas pelo modelo de Rothbarth.

## 5.4 METODOLOGIA

### 5.4.1 Base de dados e variáveis

A base de dados utilizada nesse trabalho provém da Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) de 2002-2003 realizada pelo IBGE em todo o país. Uma descrição da POF, suas características e desenho amostral encontra-se no Apêndice A.

Para a estimação dos modelos, foram aplicados alguns filtros na base de dados de modo a se trabalhar com uma informação mais fidedigna. Foram excluídos os domicílios cujas rendas ou despesas totais não fossem positivas; domicílios com mais de uma unidade de consumo e domicílios que tivessem entre seus moradores pensionistas, empregados domésticos e parentes de empregados domésticos; e domicílios que tivessem mais de oito moradores. Eliminaram-se também as famílias que possuíam informação ignorada em alguma das variáveis independentes. A amostra final foi de 45.783 domicílios, de um total de 48.470 (ou 48.568 unidades de consumo). No processo de estimação, utilizou-se o fator de expansão amostral disponibilizado pelo IBGE na própria base de dados. Em função da não-linearidade das fórmulas, os erros-padrão das estimativas das escalas de equivalência de Engel e Rothbarth foram calculados por *bootstrap* com 1000 repetições (Rao; Wu; Yue, 1992 e Rao; Wu, 1988),

onde em cada replicação os fatores de expansão amostrais foram recalculados para incorporar o desenho amostral da POF (cf. Apêndice A). Nos modelos de Barten e Prais-Houthakker, os erros-padrão foram obtidos diretamente dos parâmetros estimados.

Para se estimar os modelos, utilizou-se um conjunto de variáveis de controle referentes às características demográficas e econômicas do domicílio, características da pessoa de referência e características da região e do trimestre em que o domicílio foi entrevistado na pesquisa (Tabela 5.1).

Tabela 5.1 - Descrição das variáveis utilizadas nos modelos

Variável	Descrição	Tipo
<i>Características demográficas e econômicas</i>		
logx	Log da despesa domiciliar	Contínua
logn	Log do número de moradores	Contínua
peessoas_0_4	Prop. de pessoas de 0 a 4 anos	Contínua
peessoas_5_9	Prop. de pessoas de 5 a 9 anos	Contínua
peessoas_10_14	Prop. de pessoas de 10 a 14 anos	Contínua
peessoas_15_64	Prop. de pessoas de 15 a 64 anos	Contínua
peessoas_65_mais	Prop. de pessoas de 65 anos ou mais	Contínua
cartao	Posse de cartão de crédito	Dummy
dom_proprio	Domicílio próprio	Dummy
<i>Características da pessoa de referência</i>		
sexochefe	Sexo (1=Feminino)	Dummy
cor_pele	Cor/Raça (1=Branco/Amarelo)	Dummy
conjuge	Presença de cônjuge	Dummy
idade_25_menos	Menos de 25 anos	Dummy
idade_25_34	De 25 a 34 anos	Dummy
idade_35_44	De 35 a 44 anos	Dummy
idade_45_54	De 45 a 54 anos	Dummy
idade_55_64	De 55 a 64 anos	Dummy
idade_65_mais	65 anos ou mais	Dummy
educachefe_1	Menos de 1 ano de estudo	Dummy
educachefe_2	1 a 3 anos de estudo	Dummy
educachefe_3	4 a 7 anos de estudo	Dummy
educachefe_4	8 a 10 anos de estudo	Dummy
educachefe_5	11 anos de estudo	Dummy
educachefe_6	12 anos ou mais de estudo	Dummy
<i>Características regionais e temporais</i>		
norte	Norte	Dummy
nordeste	Nordeste	Dummy
sudeste	Sudeste	Dummy
sul	Sul	Dummy
centrooeste	Centro-Oeste	Dummy
trimestre_1	1º trimestre	Dummy
trimestre_2	2º trimestre	Dummy
trimestre_3	3º trimestre	Dummy
trimestre_4	4º trimestre	Dummy

Fonte: Elaboração própria.

### 5.4.2 Estimação e cálculo de valores

Abaixo são listados os procedimentos utilizados para o cálculo das escalas de equivalência a partir dos parâmetros estimados de cada modelo.

#### 5.4.2.1 Engel

Para se calcular as escalas de equivalência do modelo de Engel, é necessário estimar uma curva de Engel que relacione a fração da despesa com alimentação com o dispêndio total e um conjunto de variáveis demográficas. Para isso, utilizou-se a forma funcional de Working-Leser,

$$w_k^h = \alpha_k + \beta_k \ln(x^h/n^h) + \eta_k \ln(n^h) + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{kg} r_g^h + u_k^h \quad (5.91)$$

onde  $w_k^h$  representa a participação de um grupo de despesa  $k$  no dispêndio total do domicílio ( $x^h$ ),  $n^h$  é número de membros do domicílio,  $r_g^h = n_g^h/n^h$  representa a fração de membros do domicílio em cada categoria demográfica  $g = 1, \dots, G$ , e  $u_k^h$  é um erro aleatório. Os coeficientes  $\gamma_{kg}$  representam o efeito de uma mudança na composição demográfica – por exemplo, substituindo uma criança de 0 a 4 anos por outra de 5 a 9 anos – mantendo-se constante o dispêndio total e o número de membros do domicílio. Conforme foi visto na Seção 5.2.1, essa forma funcional, além de se ajustar bem a uma ampla gama de dados de despesas, tem também a vantagem de ser consistente com a teoria do consumidor.

Seja  $f_k(x^h, z^h)$  a função que retorna o valor predito da equação (5.91) para um domicílio com despesa domiciliar  $x^h$  e composição demográfica  $z^h = (n^h, r_1^h, \dots, r_G^h)$ :

$$f_k(x^h, z^h) = \hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k \ln(x^h/n^h) + \hat{\eta}_k \ln(n^h) + \sum_{g=1}^{G-1} \hat{\gamma}_{kg} r_g^h \quad (5.92)$$

onde o símbolo (^) sobre a variável significa que os valores referem-se aos seus coeficientes estimados. A escala de equivalência de Engel é obtida resolvendo  $f_k(x^*, z^h) = f_k(x^r, z^r)$  para  $x^*$  e calculando  $m^h = x^*/x^r$ , onde o sobrescrito  $r$  refere-se ao domicílio de referência, composto por um casal de adultos de características médias. Fazendo isso, obtém-se

$$\ln\left(\frac{x^*}{x^r}\right) = \left(1 - \frac{\eta_k}{\beta_k}\right) \ln\left(\frac{n^h}{n^r}\right) - \sum_{g=1}^{G-1} \frac{\gamma_{kg}(r_g^h - r_g^r)}{\beta_k} \quad (5.93)$$

De modo que a escala de equivalência de Engel estimada a partir de um bem  $k$  é

$$m_k^h = \left(\frac{n^h}{n^r}\right)^{\theta_k} \exp\left(-\sum_{g=1}^{G-1} \frac{\gamma_{kg}(r_g^h - r_g^r)}{\beta_k}\right), \quad \text{onde } \theta_k = (1 - \eta_k/\beta_k) \quad (5.94)$$

Pela equação (5.24), as escalas de equivalências estimadas para todos os bens da cesta de consumo do domicílio devem fornecer o mesmo valor, isto é,  $m_1^h = \dots = m_k^h = \dots = m_K^h$ . Esta restrição será utilizada como teste do modelo de Engel na Seção 5.5.1.2.

Assim, se o domicílio de referência ( $r$ ) é composto por dois adultos e o domicílio de comparação ( $h$ ) é composto por dois adultos e uma criança da categoria demográfica  $g$ , então a escala de equivalência deste último domicílio será

$$m_k^h = (3/2)^{\theta_k} \exp\left(\frac{-\gamma_{kg}}{3\beta_k}\right) \quad (5.95)$$

O parâmetro  $\theta_k$  é uma medida da economia de escala do consumo obtida pela inclusão de um membro adicional ao domicílio. Se  $\eta_k = 0$ , então  $\theta_k = 1$  e não há economia de escala; neste caso, o dispêndio total aumenta na mesma proporção do número de membros do domicílio. Se  $\theta_k < 1$ , então existe algum grau de economia de escala e o dispêndio total aumenta menos que proporcionalmente ao tamanho do domicílio. Como  $\beta_k < 0$  pela lei de Engel, então  $\theta_k < 1$  implica  $\eta_k < 0$ . Idealmente, os valores do parâmetro  $\theta_k$  devem ficar confinados no intervalo  $[0, 1]$ .

#### 5.4.2.2 Prais e Houthakker

Para estimar as escalas de equivalências pelo modelo de Prais e Houthakker, utilizar-se-á como ponto de partida a equação de Working-Leser discutida na Seção 5.2.1. Conforme foi dito na Seção 5.3.2, assume-se para o domicílio de referência que  $m_k^r = 1$  para  $k = 1, \dots, K$ , de modo que a fração da despesa total com o bem  $k$  é:

$$w_k^r = \alpha_k + \beta_k \ln x^r \quad k = 1, \dots, K \quad (5.96)$$

As despesas com cada bem ( $e_k^r$ ) que são consistentes com (5.96) são dadas pela multiplicação de  $w_k^r$  pelo dispêndio total do domicílio de referência, ou seja,

$$e_k^r = x^r w_k^r = x^r [\alpha_k + \beta_k \ln x^r] \quad (5.97)$$

Logo, para um domicílio  $h$  qualquer, o valor da despesa  $e_k^h/m_k^h = g_k(x^h/m_0^h)$  é:

$$\begin{aligned} e_k^h &= m_k^h g_k(x^h/m_0^h) \\ &= m_k^h (x^h/m_0^h) [\alpha_k + \beta_k \ln(x^h/m_0^h)] \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (5.98)$$

ou, na forma de frações da despesa com cada um dos bens,

$$w_k^h = e_k^h/x^h = (m_k^h/m_0^h) [\alpha_k + \beta_k \ln(x^h/m_0^h)] \quad k = 1, \dots, K \quad (5.99)$$

Assim, para se estimar o modelo de Prais e Houthakker, deve-se estimar o sistema de equações (5.99), onde

$$m_k^h = 1 + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{kg} n_g \quad (5.100)$$

representa a função que relaciona o número de membros  $n_g$  do domicílio em cada categoria demográfica  $g = 1, \dots, G$  às escalas de equivalências específicas. Nesse sistema, a escala de equivalência geral  $m_0^h$  é determinada implicitamente por

$$\begin{aligned} x^h &= \sum_{k=1}^K m_k^h g_k(x^h/m_0^h) = \sum_{k=1}^K m_k^h (x^h/m_0^h) [\alpha_k + \beta_k \ln(x^h/m_0^h)] \\ \Rightarrow m_0^h &= \sum_{k=1}^K m_k^h [\alpha_k + \beta_k \ln(x^h/m_0^h)] \end{aligned} \quad (5.101)$$

O sistema de equações composto por (5.99), (5.100) e (5.101) é estimado por SUR iterativo. O procedimento de estimação é complicado pelo fato de que  $m_0^h$  é uma função implícita do dispêndio total e das características demográficas do domicílio, que influenciam indiretamente a escala de equivalência geral por meio das escalas de equivalência específicas. Assim, para se estimar de todo o sistema de equações conjuntamente, utilizou-se o seguinte algoritmo:

Quadro 5.1 - Algoritmo de estimação do modelo de Prais-Houthakker

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Inicializa: <math>iter\_max \leftarrow 2000</math>, <math>m_0^h(i) \leftarrow n^h(i)/n^r(i), \forall i</math> e <math>\gamma_{kg} \leftarrow 1</math> para <math>k = 1, \dots, K</math> e <math>g = 1, \dots, G</math>, onde <math>(i)</math> representa uma observação.</li> <li>2. Para <math>rep = 1</math> até <math>iter\_max</math>, faça: <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>m\_1(i) \leftarrow m_0^h(i), \forall i</math>.</li> <li>4. Estima o sistema de equações composto por (5.99), (5.100) por SUR para todos os bens, exceto um, mantendo-se fixo o valor de <math>m_0^h(i), \forall i</math>.</li> <li>5. Calcula-se um novo valor de <math>m_0^h(i), \forall i</math>, iterativamente através da equação (5.101).</li> <li>6. <math>m\_2(i) \leftarrow m_0^h(i), \forall i</math>.</li> <li>7. <math>m\_max = \max_i \{ m\_2(i) - m\_1(i) \}</math>.</li> <li>8. Se <math>m\_max &lt; 0,01</math>, encerrar o loop e apresentar o resultado final.</li> </ol> </li> </ol>
---

Fonte: Elaboração própria.

O modelo de Prais e Houthakker, assim com o modelo de Rothbarth, serve apenas para calcular o “custo” das crianças. Assim, os parâmetros foram estimados apenas nos domicílios que tinham dois adultos e um número variável de crianças. Por construção, o valor  $\gamma_{kg}$  representa o peso relativo de uma criança da categoria demográfica  $g$  em relação a dois adultos no consumo do bem  $k$  (equação (5.100)).

### 5.4.2.3 Barten

Conforme visto na Seção 5.3.3.2, a elasticidade do consumo *per capita* de alimentos em relação ao número de membros do domicílio é dada pela equação (5.58) rerepresentada abaixo

$$\delta = \frac{\partial \ln(p_f q_f / n)}{\partial \ln n} = \sigma_F(\varepsilon_{fx} + \varepsilon_{ff}) + \sigma_f(1 + \varepsilon_{ff}) \quad (5.58)$$

Sob certos pressupostos, o valor de  $\delta$  pode ser considerado uma medida da economia de escala do consumo (cf. Seção 5.3.3.2). Para estimá-lo, tudo o que se precisa é de uma equação do tipo (5.91) que relacione a fração da despesa com alimentação ( $w_f$ ) com a despesa domiciliar *per capita* e o número de moradores do domicílio. Feito isso, o valor de  $\delta$  é obtido por  $\delta = \eta_f / w_f$ , onde  $f$  é o subscrito que indica o grupo de despesa “alimentação” e  $w_f$  é a

fração da despesa com alimentos, normalmente estimada no ponto médio da amostra. Se os pressupostos adotados pelo modelo de Barten forem válidos, então  $\delta > 0$  e deve-se esperar que o valor estimado de  $\eta_f$  seja positivo.

Observe que a equação (5.91) é a mesma utilizada para estimar o modelo de Engel a partir das despesas com alimentação (Seção 5.4.2.1). No modelo de Engel, nenhuma distinção é feita entre bens privados ou públicos, e a fração da despesa destinada à alimentação é uma medida suficiente de bem-estar. Sendo assim, para que haja economias de escala nesse modelo, o valor estimado de  $\eta_f$  tem que ser negativo (cf. Seção 5.3.1). Isso mostra que a mesma evidência empírica serve para comparar dois modelos distintos.

#### 5.4.2.4 Rothbarth

Para se estimar o modelo de Rothbarth, utilizou-se a equação log-log ao invés da equação de Working-Leser,

$$\ln(e_a^h) = \alpha + \beta \ln(x^h/n^h) + \eta \ln(n^h) + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g r_g^h + u^h \quad (5.102)$$

onde  $e_a^h = p_a q_a^h$  é o valor da despesa com bens de adultos.

O motivo de se utilizar a equação (5.102) é porque o modelo de Rothbarth, ao contrário do modelo de Engel, considera que dois domicílios distintos usufruem o mesmo nível de bem-estar se a *quantidade* consumida de bens de adultos por estes domicílios for igual. Como em pesquisas *cross section* a quantidade consumida de um bem é representada pela despesa do domicílio com este bem (pois os preços são fixos e, portanto, podem ser normalizados para  $p_a = 1$ ), o uso da equação (5.102) permite um cálculo mais direto das escalas de equivalências de Rothbarth<sup>49</sup>. Tal equação não satisfaz automaticamente a propriedade da aditividade quando estimada para diferentes produtos. Entretanto, se ela for

---

<sup>49</sup> Se ao contrário da equação (5.102) fosse utilizada como variável dependente a fração da despesa com bens de adultos (equação de Working-Leser), a fórmula final das escalas de equivalência teria o termo  $x \ln(x)$  em sua composição, e encontrar a raiz de uma função com este termo é uma tarefa reconhecidamente difícil (Press *et al.*, 2007, cap. 6).

estimada para um produto que não representa uma grande fração da despesa domiciliar, o viés das estimativas provocado por uma violação da propriedade de aditividade será pequeno (Deaton; Muellbauer, 1980a).

Seja  $f_a(x^h, z^h)$  a função que retorna o valor predito da equação (5.102) para um domicílio com despesa domiciliar  $x^h$  e composição demográfica  $z^h = (n^h, r_1^h, \dots, r_G^h)$ :

$$f_a(x^h, z^h) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \ln(x^h/n^h) + \hat{\eta} \ln(n^h) + \sum_{g=1}^{G-1} \hat{\gamma}_g r_g^h \quad (5.103)$$

onde o símbolo (^) significa que os valores referem-se aos coeficientes estimados. Utilizando o pressuposto de identificação  $f_a(x^*, z^h) = f_a(x^r, z^r)$  para encontrar  $x^*$ , obtém-se

$$\ln\left(\frac{x^*}{x^r}\right) = \left(1 - \frac{\eta}{\beta}\right) \ln\left(\frac{n^h}{n^r}\right) - \sum_{g=1}^{G-1} \frac{\gamma_g (r_g^h - r_g^r)}{\beta} \quad (5.104)$$

Portanto, a escala de equivalência de Rothbarth é:

$$m^h = \left(\frac{n^h}{n^r}\right)^\theta \exp\left(-\sum_{g=1}^{G-1} \frac{\gamma_g (r_g^h - r_g^r)}{\beta}\right), \quad \text{onde } \theta = (1 - \eta/\beta) \quad (5.105)$$

Conforme visto na Seção 5.3.4, o modelo de Rothbarth foi concebido apenas para estimar o custo das crianças, isto é, ele não permite a comparação de domicílios com um número diferente de adultos. Sendo assim, todas as aplicações do modelo de Rothbarth feitas neste trabalho foram baseadas em domicílios compostos por dois adultos e um número variável de crianças.

Para a aplicação do modelo, utilizou-se a despesa com vestuário de adulto para identificar o bem-estar dos domicílios. De acordo com a discussão feita na Seção 5.3.4.5, esta despesa é a que melhor reflete os fundamentos teóricos do modelo. Para manter a comparação com outros trabalhos, no entanto, foram utilizadas também as despesas com fumo, jogos e apostas, bebidas alcólicas e uma parte das despesas com diversões e esportes de consumo exclusivo de adultos.

#### 5.4.2.5 Solução de problemas

Em pesquisas de orçamentos familiares como a POF 2002-2003, é comum as informações apresentarem toda a sorte de problemas que dificultam a estimação adequada dos parâmetros das regressões. Dentre estes problemas, estão:

- a) A presença de heteroscedasticidade nos resíduos da regressão;
- b) O possível viés causado pela correlação dos erros de medida entre a fração da despesa com determinado bem ( $w_k^h$ ) e o dispêndio total ( $x^h$ );
- c) O problema de simultaneidade entre  $x^h$  e  $w_k^h$  em pesquisas *cross-section*;

O item (a) dispensa explicações. O item (b) ocorre pela seguinte razão (Deaton; Paxson, 1998): como  $w_k^h$  e  $x^h$  são construídos a partir da mesma fonte de informação (lembre-se que  $x^h$  é o denominador de  $w_k^h$ ), os erros de medida de  $w_k^h$  serão necessariamente correlacionados com os erros de medida em  $\ln(x^h/n^h)$ , o que provoca um viés no coeficiente  $\beta$  das equações (5.91) e (5.99). Não bastasse isso, como o dispêndio domiciliar *per capita* é correlacionado tanto com o tamanho do domicílio quanto com sua composição demográfica, é provável que a correlação entre os erros de medida de  $w_k^h$  e  $x^h$  provoquem um viés nas estimativas de  $\eta_k$  e  $\gamma_{kg}$ , os parâmetros de interesse.

Para o item (c), a explicação é a seguinte: em pesquisas *cross section*, o dispêndio total  $x^h$  é calculado pela soma das despesas  $\sum_{k=1}^K p_k q_k$ , apesar de  $x^h$  representar o orçamento do domicílio na teoria do consumidor – que é exógeno<sup>50</sup> – e  $q_k$  representar a demanda pelo bem  $k$  – que é endógena<sup>51</sup>. Por conta desse problema de identificação, tanto  $x^h$  quanto  $w_k^h$  são variáveis endógenas quando o sistema de demanda é estimado em pesquisas *cross section*, e

<sup>50</sup> Para os modelos apresentados neste capítulo, isto é, assumindo-se dentre outras coisas que a oferta de trabalho é fixa.

<sup>51</sup> Esse problema é menos grave em pesquisas de painéis, onde o dispêndio total pode ser calculado como uma média das despesas de consumo do domicílio de todo o período, tornando  $x^h$  e  $\sum_{k=1}^K p_k q_k$  dissociados empiricamente.

tentar explicar variações de uma variável endógena a partir de outra variável endógena não é possível. Uma das situações em que esta simultaneidade se manifesta é quando grandes despesas com um bem afetam simultaneamente ambos os lados das equações (5.91), (5.99) e (5.102).

A solução adotada para os itens (b) e (c) acima, segundo recomendação de Deaton e Paxton (1998, p. 914), é utilizar o logaritmo dos componentes não-imputados da renda *per capita* (isto é, a renda monetária *per capita*) como instrumento para  $\ln(x^h/n^h)$  em todas as regressões. Esse foi o procedimento utilizado neste capítulo. Para o problema da heteroscedasticidade (item (a)), utilizou-se o tratamento usual, que foi corrigir os erros-padrão dos parâmetros pela matriz de variância-covariância robusta de White (1980).

## **5.5 RESULTADOS**

### **5.5.1 Modelo de Engel**

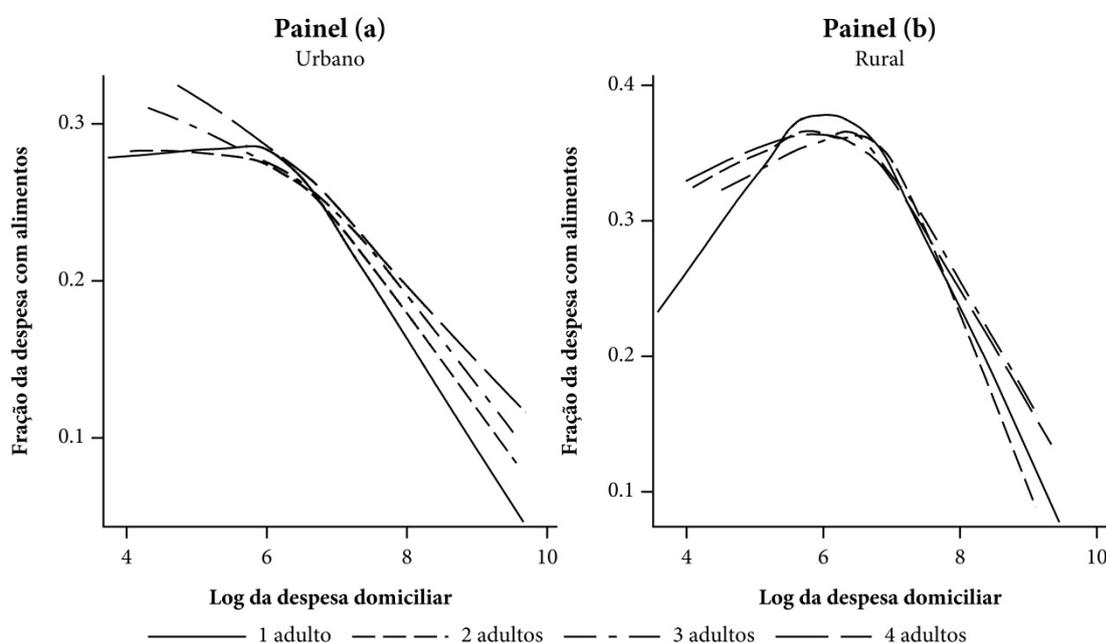
Antes de estimar o modelo paramétrico de Engel, convém fazer uma análise preliminar dos dados e verificar se os pressupostos do modelo são satisfeitos. No caso do modelo de Engel, isto consiste em verificar: a) se a fração da despesa total destinada à alimentação diminui com a despesa domiciliar, para qualquer tipo de domicílio; e b) fixando-se a despesa total do domicílio, se a fração das despesas destinadas à alimentação aumenta com o número de membros do domicílio. Para fazer isso, utilizou-se uma série de regressões não-paramétricas, também conhecidas como *regressões locais* ou *LOESS*. Os detalhes do processo de estimação podem ser vistos em Pagan e Ullah (1999, cap. 3).

O Gráfico 5.1 mostra as estimativas não-paramétricas da relação entre a fração da despesa com alimentos e o logaritmo da despesa domiciliar total dos domicílios compostos apenas por adultos.

Em primeiro lugar, observa-se que a fração da despesa com alimentos não decresce monotonicamente em relação à despesa domiciliar. Tanto na área urbana quanto na área rural existem determinados domínios da despesa domiciliar nos quais, para alguns tipos de família,

a fração da despesa com alimentos está positivamente relacionada com a despesa domiciliar. O ponto de inflexão desta relação ocorre entre  $\ln x = 6$  e  $\ln x = 6,5$ , o que equivale a uma despesa domiciliar entre R\$ 400,00 e R\$ 700,00 aproximadamente. Considerando que o salário mínimo na data de referência da POF 2002-2003 era de R\$ 200,00 então, para um domicílio composto por dois adultos, o intervalo inferior desta região de inflexão corresponde a uma despesa domiciliar *per capita* igual à do salário mínimo, o que não é pouco<sup>52</sup>.

Gráfico 5.1 - Estimação não-paramétrica do modelo de Engel – adultos



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

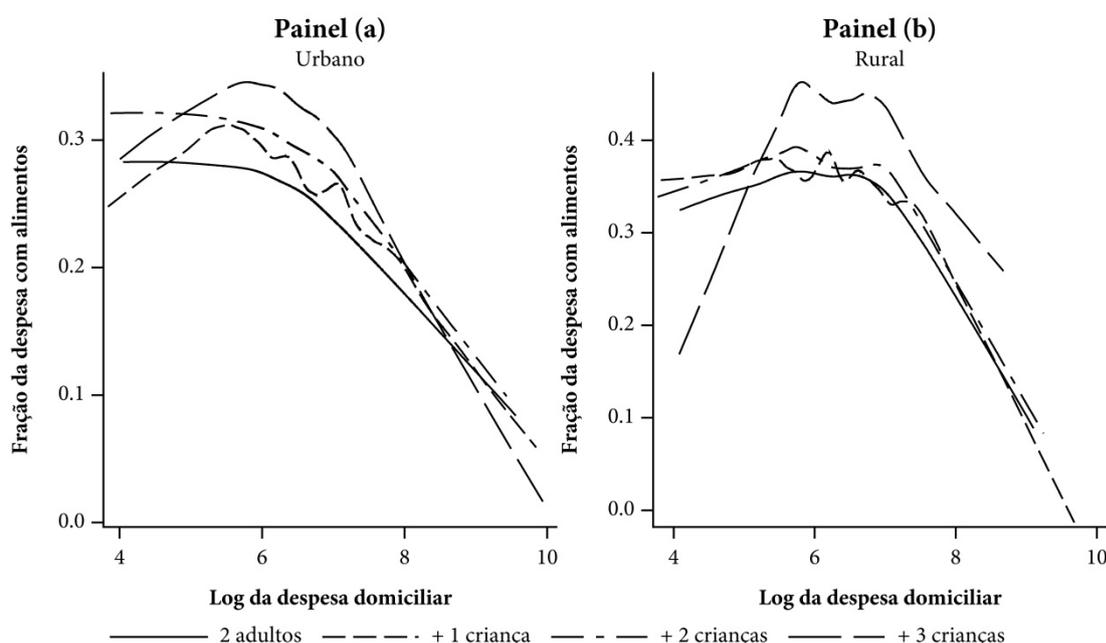
Em segundo lugar, percebe-se que embora existam domínios da despesa domiciliar nos quais, mantendo-se tudo o mais constante, um acréscimo de pessoas no domicílio provoca um aumento na fração da despesa com alimentos, por outro lado existem domínios da despesa domiciliar nos quais esta relação monotônica não é verdadeira. Na área urbana, por exemplo, a curva de Engel dos domicílios compostos por apenas um adulto cruza a curva de Engel dos domicílios compostos por dois e três adultos aproximadamente em  $\ln x = 6,5$ .

<sup>52</sup> Principalmente considerando-se que diversos estudos no Brasil consideram pobres e extremamente pobres aqueles domicílios que possuem renda domiciliar *per capita* abaixo de  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  de salário mínimo respectivamente.

Em defesa do modelo de Engel, no entanto, observe que como as curvas de Engel dos diferentes tipos de domicílios são muito próximas umas das outras, as diferenças observadas podem não ser estatisticamente significantes. Neste caso, os testes de hipótese aplicados nos coeficientes das equações paramétricas (Seção 5.5.1.1) devem iluminar melhor este ponto.

O Gráfico 5.2 mostra estimativas não-paramétricas do modelo de Engel, mas agora para domicílios compostos por dois adultos e um número variável de crianças. Os resultados são semelhantes àqueles obtidos pelo Gráfico 5.1, isto é: *a)* em geral, as curvas de Engel não decrescem monotonicamente com a despesa domiciliar para todos os tipos de domicílios; e *b)* as curvas de Engel se cruzam, o que significa que um aumento no número de crianças do domicílio não implica necessariamente um acréscimo na fração das despesas com alimentos.

Gráfico 5.2 - Estimação não-paramétrica do modelo de Engel – 2 adultos e crianças



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Assim, a análise não-paramétrica dos dados da POF 2002-2003 mostra a princípio que as regularidades empíricas defendidas por Engel (1895) para elaborar o seu modelo são observadas apenas em determinados domínios da despesa domiciliar. Para outros domínios, os pressupostos do modelo não são satisfeitos. Dentre estes pressupostos, o mais preocupante

para a validade do método é o fato de a fração da despesa com alimentos não ser monotônica em relação à despesa domiciliar, uma vez que isso põe em dúvida a utilização desta fração como medida inversa de bem-estar do domicílio.

#### 5.5.1.1 Estimativas paramétricas

A Tabela 5.2 mostra os valores estimados das escalas de equivalência pelo modelo de Engel de acordo com a metodologia descrita na Seção 5.4.2.1. Conforme discutido na Seção 5.3.1, o modelo de Engel prevê que as escalas de equivalências estimadas utilizando diferentes tipos de bens devem ser iguais. Assim, as escalas de equivalências foram estimadas para todos os itens da despesa de consumo, exceto o item “despesas diversas” que foi eliminado do processo de estimação por conta da restrição de aditividade ( $\sum_{k=1}^K w_k^h = 1$ ).

Tabela 5.2 - Escalas de equivalência estimadas pelo modelo de Engel

Tipo de família	Alimentação		Habitação		Vestuário		Transporte		Higiene		Saúde		Educação		Cultura		Fumo		Serviços Pessoais	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
<i>1 adulto morando...</i>																				
Sozinho	0,555*	0,544*	1,751*	2,348	12,863	2,335	0,842*	0,773*	5,838	2,275	0,765*	0,615*	1,358*	27,216	1,071	1,249	0,629*	0,541	1,028	1,414
	(0,027)	(0,043)	(0,142)	(0,749)	(∞)	(∞)	(0,028)	(0,035)	(∞)	(∞)	(0,046)	(0,087)	(0,091)	(∞)	(0,053)	(0,131)	(0,082)	(∞)	(0,104)	(0,318)
Com criança de 0 a 4 anos	0,984	1,094	1,475*	1,582	1,85	2,038	1,148	1,023	60,01	8,073	0,659*	0,472*	1,538*	394,14	1,222*	1,195	0,357*	0,067	2,093	4,196
	(0,101)	(0,162)	(0,151)	(0,461)	(∞)	(∞)	(0,086)	(0,1)	(∞)	(∞)	(0,081)	(0,14)	(0,203)	(∞)	(0,105)	(0,19)	(0,111)	(∞)	(0,894)	(4,618)
Com criança de 5 a 9 anos	0,997	1,033	1,367*	1,679	13,813	2,831	1,004	1,013	27,164	7,612	1,101	0,825	0,605*	0,304	1,247*	1,281	0,383*	0,081	1,808	3,184
	(0,09)	(0,149)	(0,122)	(0,549)	(∞)	(∞)	(0,077)	(0,1)	(∞)	(∞)	(0,137)	(0,184)	(0,061)	(∞)	(0,097)	(0,186)	(0,098)	(∞)	(0,486)	(3,153)
Com criança de 10 a 14 anos	1,091	1,501*	1,323*	1,103	4,851	1,593	1,146*	1,25*	7,087	3,101	1,081	1,163	0,587*	0,001	1,433*	1,852*	0,338*	0,026	1,766	2,692
	(0,108)	(0,248)	(0,107)	(0,221)	(∞)	(0,647)	(0,073)	(0,113)	(∞)	(∞)	(0,128)	(0,347)	(0,06)	(∞)	(0,113)	(0,302)	(0,093)	(∞)	(0,466)	(1,675)
Com pessoa de 65 anos ou mais	0,918	1,136	1,386*	1,192	5,899	1,903	1,431*	1,233*	5,623	2,12	0,25*	0,389*	1,224*	1,657	1,391*	1,148	0,444*	0,231	1,328	1,5
	(0,083)	(0,136)	(0,122)	(0,201)	(∞)	(1,046)	(0,085)	(0,1)	(∞)	(∞)	(0,055)	(0,122)	(0,103)	(∞)	(0,106)	(0,109)	(0,151)	(∞)	(0,333)	(0,356)
<i>2 adultos morando...</i>																				
Sozinhos	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Com criança de 0 a 4 anos	1,396*	1,515*	0,934	0,824	0,338*	0,979	1,213*	1,181*	5,461	2,488	0,885	0,806	1,114	7,782	1,098	0,989	0,66*	0,237	1,61	2,124
	(0,097)	(0,161)	(0,049)	(0,096)	(0,137)	(0,176)	(0,052)	(0,071)	(∞)	(∞)	(0,069)	(0,136)	(0,074)	(∞)	(0,057)	(0,075)	(0,118)	(∞)	(0,35)	(0,62)
Com criança de 5 a 9 anos	1,408*	1,459*	0,888*	0,857	1,292	1,219	1,109*	1,173*	3,219	2,393	1,247*	1,169	0,598*	0,065	1,113*	1,036	0,692*	0,269	1,461*	1,768
	(0,093)	(0,15)	(0,041)	(0,089)	(0,703)	(0,325)	(0,052)	(0,07)	(∞)	(∞)	(0,097)	(0,167)	(0,038)	(∞)	(0,051)	(0,074)	(0,11)	(∞)	(0,227)	(0,484)
Com criança de 10 a 14 anos	1,495*	1,871*	0,868*	0,648*	0,643*	0,831	1,212*	1,349*	1,314	1,315	1,232*	1,47	0,586*	0,002	1,221*	1,324*	0,637*	0,127	1,437	1,58
	(0,103)	(0,226)	(0,041)	(0,096)	(0,174)	(0,136)	(0,048)	(0,07)	(∞)	(0,849)	(0,09)	(0,268)	(0,042)	(∞)	(0,061)	(0,097)	(0,108)	(∞)	(0,224)	(0,344)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1,332*	1,553*	0,896	0,682*	0,733	0,935	1,404*	1,337*	1,127	1,02	0,464*	0,708	0,957	0,203	1,197*	0,962	0,763	0,539	1,189	1,07
	(0,091)	(0,17)	(0,062)	(0,107)	(0,236)	(0,16)	(0,068)	(0,091)	(0,439)	(0,244)	(0,074)	(0,166)	(0,068)	(∞)	(0,072)	(0,093)	(0,201)	(∞)	(0,229)	(0,176)
<i>3 adultos morando...</i>																				
Sozinhos	1,411*	1,427*	0,721*	0,607*	0,224*	0,609*	1,106*	1,163*	0,356*	0,618*	1,169*	1,329*	0,836*	0,145	0,96	0,878*	1,311*	1,432	0,984	0,817*
	(0,04)	(0,068)	(0,033)	(0,081)	(0,101)	(0,114)	(0,021)	(0,03)	(0,128)	(0,133)	(0,041)	(0,123)	(0,032)	(∞)	(0,027)	(0,051)	(0,098)	(∞)	(0,058)	(0,087)
Com criança de 0 a 4 anos	1,786*	1,921*	0,694*	0,536*	0,106*	0,611*	1,273*	1,309*	1,327	1,249	1,061	1,118	0,914	0,729	1,032	0,875	0,95	0,48	1,407	1,449*
	(0,115)	(0,205)	(0,042)	(0,089)	(0,07)	(0,122)	(0,044)	(0,068)	(∞)	(0,5)	(0,076)	(0,147)	(0,049)	(∞)	(0,052)	(0,066)	(0,139)	(∞)	(0,237)	(0,194)
Com criança de 5 a 9 anos	1,798*	1,867*	0,668*	0,552*	0,289*	0,721*	1,19*	1,303*	0,893	1,213	1,371*	1,477*	0,573*	0,02	1,042	0,906	0,984	0,527	1,308	1,262
	(0,119)	(0,195)	(0,041)	(0,086)	(0,122)	(0,12)	(0,047)	(0,067)	(0,258)	(0,197)	(0,098)	(0,237)	(0,037)	(∞)	(0,048)	(0,069)	(0,141)	(∞)	(0,175)	(0,177)
Com criança de 10 a 14 anos	1,881*	2,251*	0,657*	0,447*	0,171*	0,541*	1,272*	1,447*	0,456*	0,774	1,359*	1,754*	0,565*	0,001	1,117*	1,089	0,924	0,3	1,293	1,16
	(0,124)	(0,267)	(0,043)	(0,094)	(0,093)	(0,134)	(0,047)	(0,065)	(0,169)	(0,164)	(0,091)	(0,309)	(0,043)	(∞)	(0,057)	(0,075)	(0,136)	(∞)	(0,179)	(0,167)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1,725*	1,957*	0,672*	0,465*	0,189*	0,591*	1,421*	1,437*	0,406*	0,64	0,653*	1,015	0,815*	0,047	1,101	0,858	1,059	0,888	1,121	0,866
	(0,118)	(0,238)	(0,057)	(0,104)	(0,113)	(0,151)	(0,071)	(0,101)	(0,191)	(0,192)	(0,09)	(0,233)	(0,067)	(∞)	(0,071)	(0,104)	(0,262)	(∞)	(0,212)	(0,169)

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Indica valores diferentes de 1 (um) a 5% de significância; (∞) indica a existência de valores muito altos para o erro-padrão. Erro-padrão das estimativas entre parênteses obtido por bootstrap com 1000 repetições.

Focando apenas os valores estimados para a alimentação – a medida utilizada originalmente por Engel para a mensuração do custo das crianças –, os dados mostram que uma criança de 10 a 14 anos possui um peso maior do que um adulto nas necessidades de consumo do domicílio. Tomando como exemplo a área urbana, uma criança de 10 a 14 anos acrescenta 49,5% às necessidades de um domicílio composto por dois adultos, mais do que o acréscimo de 41,1% proporcionado por um adulto a este mesmo domicílio. Exceto para as crianças da faixa etária entre 0 a 4 anos e entre 10 a 14 anos na área rural, os pesos das crianças estimados são inferiores àqueles preconizados pelo uso das medidas *per capita* ( $m^h = 1,5$ ).

Ainda na alimentação, todos os grupos demográficos possuem escalas de equivalência maiores na área rural do que na área urbana. Uma criança de 10 a 14 anos, por exemplo, possui uma escala de 1,495 na área urbana e 1,871 na área rural. No mais, observa-se que as estimativas não apresentam uma economia de escala significativa. Tanto na área urbana quanto na área rural a escala de um domicílio composto por três adultos em relação ao domicílio de referência é de pouco mais que  $m^h = 1,4$ , o que significa que a economia de recursos obtida juntando-se um domicílio unipessoal com outro composto por dois adultos é da ordem de 6,6% ( $1 - 1,4/1,5$ ).

Quando as escalas de equivalência obtidas com a equação de alimentação são comparadas com aquelas obtidas pelas demais equações (Tabela 5.2), percebem-se algumas anomalias. Em primeiro lugar, exceto em transporte, saúde e fumo, todas as demais escalas de equivalência embutem um *benefício* de se ter um adulto adicional no domicílio. Ou seja, um domicílio unipessoal possui um nível de necessidade de recursos *maior* do que o de um domicílio composto por dois adultos, o que é altamente inverossímil. Tais “benefícios” também são observados nas estimativas das crianças ou nas estimativas das pessoas com 65 anos ou mais de idade nas equações de habitação, vestuário, saúde, educação, cultura e fumo. Por fim, observam-se estimativas muito elevadas para algumas escalas de equivalências e/ou para os erros-padrão nas equações de vestuário, higiene, educação, fumo e serviços pessoais. Nas equações de fumo e de educação na área rural, por exemplo, os erros-padrão foram

considerados indeterminados (símbolo ‘ $(\infty)$ ’ da Tabela 5.2) para todos os grupos demográficos. Observando os parâmetros estimados destas equações<sup>53</sup>, percebe-se que os problemas decorrem de: *a*) coeficiente  $\beta_k$  próximo de zero; ou *b*) erro-padrão elevado dos coeficientes  $\beta_k$  e  $\eta_k$ . Em ambos os casos pode-se considerar a escala de equivalência como indeterminada, pois as circunstâncias necessárias para a sua identificação não estão presentes.

Conforme descrito na Seção 5.4.2.5, os valores da Tabela 5.2 foram estimados por variáveis instrumentais (VI) de forma a corrigir a simultaneidade e os possíveis erros de medida existentes entre a fração da despesa com determinado item e o total da despesa de consumo do domicílio. Desse procedimento, é possível calcular o teste de Hausman (1978) para verificar se as diferenças de estimativas obtidas por mínimos quadrados ordinários (MQO) e por variáveis instrumentais são estatisticamente significativas. Se todas as variáveis forem exógenas e livres de erros de medida, tanto as estimativas obtidas por MQO quanto por VI serão consistentes, embora os estimadores de MQO sejam mais eficientes neste caso (Woodridge, 2002). Se o teste de Hausman acusar diferenças significativas entre os dois modelos, então se pode concluir que o logaritmo da despesa domiciliar *per capita* (a variável instrumentalizada) é endógeno. Esse teste é mostrado na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Teste de Hausman das estimativas obtidas por VI no modelo de Engel

Equação	Urbano		Rural	
	$\chi^2$	<i>p</i> -valor	$\chi^2$	<i>p</i> -valor
Alimentação	2855,49	< 0,01	389,78	< 0,01
Habituação	27,08	0,57	143,22	< 0,01
Vestuário	-16,66	ND	41,26	0,07
Transporte	-636,94	ND	-40,14	ND
Higiene	4,59	1,00	0,01	1,00
Saúde	-139,65	ND	-29,29	ND
Educação	134,97	< 0,01	0,03	1,00
Cultura	35,80	0,18	-0,01	ND
Fumo	0,00	1,00	-0,04	ND
Serviços Pessoais	3,63	1,00	236,26	< 0,01

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: ND significa ‘não definido’.

<sup>53</sup> Tendo em vista os objetivos do capítulo, os parâmetros estimados não serão apresentados neste trabalho.

A Tabela 5.3 mostra que as diferenças entre as estimativas obtidas por MQO e por VI não são estatisticamente significantes para as equações de higiene e educação na área rural, e para as equações de habitação, higiene, cultura, fumo e serviços pessoais na área urbana. Por outro lado, observam-se diferenças significativas para alimentação e educação na área urbana e para alimentação, habitação, vestuário e serviços pessoais na área rural. Nas demais equações nada pode ser dito, pois a estatística obtida foi negativa e a distribuição  $\chi^2$  não é definida para valores negativos.

Qual a relevância da Tabela 5.3 para as estimativas de escalas de equivalências apresentadas na Tabela 5.2? Em parte, ela ajuda a explicar os erros-padrão elevados obtidos nas estimativas de higiene e educação (esta última na área rural), já que as estimativas obtidas por VI são ineficientes no caso de todas as variáveis dependentes serem exógenas.

Assim, apenas as escalas estimadas para os grupos “Alimentação” e “Transporte” foram as únicas que não apresentaram anomalias como erros-padrão elevados ou um custo negativo de se ter um adulto adicional no domicílio.

#### 5.5.1.2 Teste do modelo

Foi visto na Seção 5.3.1 que a escala de equivalência de Engel não depende do tipo de bem utilizado para mensurá-la. Ou seja, utilizando a fração da despesa com alimentos ou utilizando a fração da despesa com vestuário, as escalas de equivalências estimadas devem ser as mesmas. Se isso não ocorrer, então os pressupostos adotados pelo modelo de Engel não obtêm comprovação empírica. Essa característica do modelo pode ser tomada como base para a elaboração de um teste de hipótese de sua validade empírica.

Para tanto, observe que, pela equação (5.94), a escala de equivalência de Engel será a mesma para todos os bens se

$$\begin{bmatrix} \eta_1/\beta_1 \\ \gamma_{11}/\beta_1 \\ \vdots \\ \gamma_{1g}/\beta_1 \\ \vdots \\ \gamma_{1G-1}/\beta_1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \eta_k/\beta_k \\ \gamma_{k1}/\beta_k \\ \vdots \\ \gamma_{kg}/\beta_k \\ \vdots \\ \gamma_{kG-1}/\beta_k \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \eta_K/\beta_K \\ \gamma_{K1}/\beta_K \\ \vdots \\ \gamma_{Kg}/\beta_K \\ \vdots \\ \gamma_{KG-1}/\beta_K \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

onde  $k = 1, \dots, K$  representam os tipos de bens,  $g = 1, \dots, G$  os grupos demográficos, e  $\eta_k$ ,  $\beta_k$  e  $\gamma_{kg}$  os parâmetros estimados pelo modelo. Sendo assim, pode-se testar a validade do modelo de Engel aplicando-se um teste de Wald da hipótese nula de que as razões (5.106) são conjuntamente iguais às razões da equação de alimentos. Esse teste tem distribuição qui-quadrado com grau de liberdade igual ao número de restrições (no caso,  $(G-1)+1$ ).

Tabela 5.4 - Teste de Wald da validade do modelo de Engel

Equação	Urbano		Rural	
	Estatística	p-valor	Estatística	p-valor
Habitação	725,96	< 0,01	72,78	< 0,01
Vestuário	56,99	< 0,01	45,05	< 0,01
Transporte	287,26	< 0,01	28,64	< 0,01
Higiene	50,19	< 0,01	30,22	< 0,01
Saúde	175,42	< 0,01	21,99	< 0,01
Educação	678,64	< 0,01	3,19	0,67
Cultura	413,89	< 0,01	67,98	< 0,01
Fumo	114,55	< 0,01	2,95	0,71
Serviços Pessoais	180,24	< 0,01	35,07	< 0,01
Despesas Diversas	72,59	< 0,01	10,00	0,08

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

A Tabela 5.4 mostra os resultados do teste de Wald das restrições (5.106). A hipótese nula é rejeitada a 5% de significância em todas as equações, exceto duas, as equações de fumo e de educação na área rural. Conforme comentado acima, no entanto, os coeficientes destas equações relativos à despesa domiciliar *per capita* e ao número de membros do domicílio ( $\beta$  e  $\eta$  respectivamente) possuem variância muito grande, isto é, a curva de Engel estimada pode ser qualquer coisa, inclusive horizontal, o que impede a identificação das escalas de equivalência. Assim, os resultados do teste rejeitam as fundamentações teóricas do modelo de Engel para os dados do Brasil.

### 5.5.2 Modelo de Barten

Na Seção 5.5.1.1 discutiram-se as estimativas do modelo de Engel obtidas de forma paramétrica. Considerando que o modelo de Barten proposto por Deaton e Paxson (1998) utiliza a mesma evidência empírica obtida pelo modelo de Engel, mas a partir de um arcabouço teórico distinto (cf. Seções 5.3.3.2 e 5.4.2.3), os parâmetros estimados por este método na equação de alimentos podem ser utilizados para analisar o modelo de Barten, bastando para isso que se dê uma nova interpretação aos resultados.

Conforme visto na Seção 5.3.3.2, a medida mais importante do modelo de Barten proposto por Deaton e Paxson (1998) é a elasticidade do consumo *per capita* de alimentos em relação ao número de membros do domicílio. Utilizando a equação de Working-Leser (equação (5.91)), essa elasticidade é dada por

$$\delta = \frac{\partial \ln(p_f q_f / n)}{\partial \ln n} = \eta_f / w_f \quad (5.107)$$

onde  $\eta_f$  é o parâmetro relativo ao logaritmo do número de moradores do domicílio e  $w_f$  é a fração da despesa destinada à alimentação. Sob uma série de pressupostos plausíveis a respeito da elasticidade-preço dos alimentos e da economia de escala do seu consumo, o valor de  $\delta$  representa a multiplicação da medida de economia de escala  $\sigma_F \in [0,1]$  pelo valor da elasticidade-renda  $\varepsilon_{fx}$  dos alimentos. Assumindo que a alimentação é um bem normal, o valor de  $\delta$  deve ser não-negativo. Como  $w_f$  é sempre positivo, o sinal de  $\delta$  é determinado exclusivamente pelo sinal de  $\eta_f$ . Assim, em última instância, o teste do modelo de Barten equivale ao teste  $H_0 : \eta > 0$ .

A Tabela 5.5 mostra os parâmetros estimados da equação de alimentação obtidos por variáveis instrumentais. Tanto na área urbana quanto na área rural o valor estimado de  $\eta_f$  ( $\log n$ ) é negativo, embora o parâmetro da área rural não seja significativo a 5%. Utilizando o teste unicaldal  $H_0 : \eta > 0$ , obtemos uma rejeição do modelo de Barten na POF 2002-2003 nas áreas urbanas.

Tabela 5.5 - Parâmetros estimados por VI da fração da despesa com alimentação

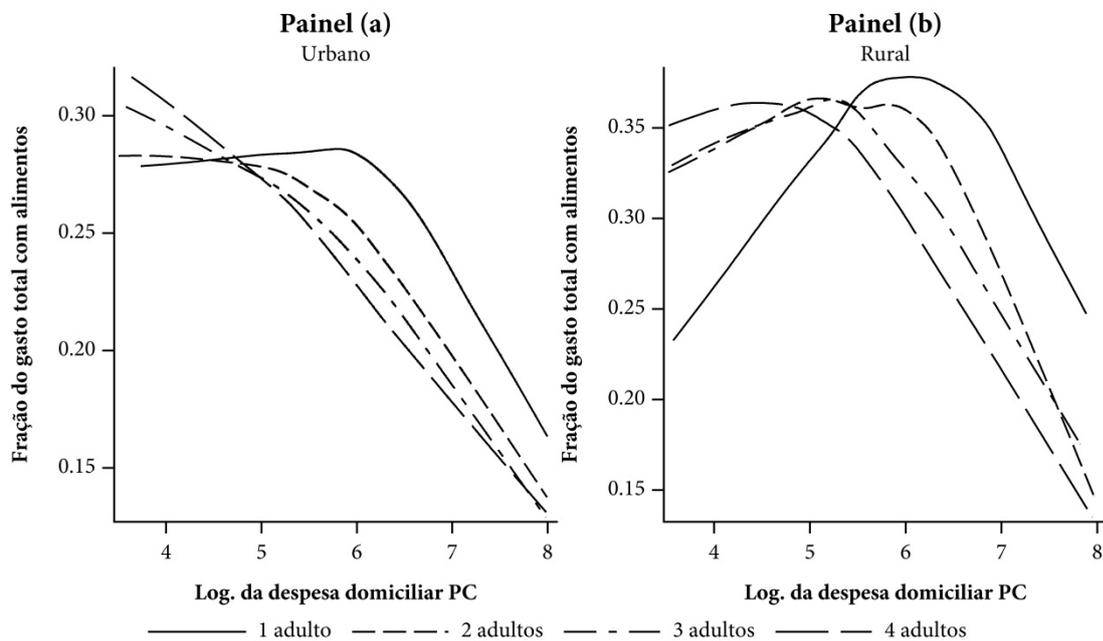
Variável	Urbano			Rural		
	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor
Intercept	0,6098	0,0156	<0,01	0,7319	0,0537	<0,01
logxn	-0,0610	0,0026	<0,01	-0,0824	0,0094	<0,01
logn	-0,0092	0,0026	<0,01	-0,0101	0,0089	0,25
peessoas_0_4	-0,0020	0,0073	0,79	0,0148	0,0230	0,52
peessoas_5_9	-0,0003	0,0068	0,96	0,0054	0,0214	0,80
peessoas_10_14	0,0106	0,0066	0,11	0,0670	0,0207	<0,01
peessoas_65_mais	-0,0105	0,0064	0,10	0,0210	0,0198	0,29
cartao	-0,0009	0,0019	0,64	-0,0107	0,0091	0,24
dom_proprio	-0,0086	0,0018	<0,01	0,0090	0,0061	0,14
sexochefe	-0,0296	0,0024	<0,01	-0,0466	0,0094	<0,01
cor_pele	0,0036	0,0018	0,04	0,0032	0,0058	0,58
conjuge	-0,0136	0,0026	<0,01	-0,0227	0,0094	0,02
idade_25_34	0,0127	0,0041	<0,01	0,0190	0,0123	0,12
idade_35_44	0,0089	0,0041	0,03	0,0162	0,0127	0,20
idade_45_54	0,0127	0,0043	<0,01	0,0277	0,0131	0,04
idade_55_64	0,0071	0,0045	0,12	0,0280	0,0137	0,04
idade_65_mais	0,0197	0,0060	<0,01	0,0241	0,0175	0,17
educachefe_2	-0,0093	0,0035	<0,01	0,0078	0,0067	0,24
educachefe_3	-0,0188	0,0034	<0,01	0,0015	0,0080	0,85
educachefe_4	-0,0188	0,0038	<0,01	-0,0103	0,0127	0,42
educachefe_5	-0,0244	0,0041	<0,01	-0,0411	0,0147	<0,01
educachefe_6	-0,0177	0,0050	<0,01	-0,0426	0,0236	0,07
norte	0,0483	0,0036	<0,01	0,0975	0,0098	<0,01
nordeste	0,0492	0,0023	<0,01	0,0723	0,0076	<0,01
sul	0,0029	0,0022	0,19	0,0429	0,0078	<0,01
centrooeste	-0,0195	0,0031	<0,01	-0,0169	0,0126	0,18
trimestre_2	0,0081	0,0022	<0,01	0,0185	0,0069	<0,01
trimestre_3	0,0103	0,0021	<0,01	0,0094	0,0066	0,16
trimestre_4	0,0160	0,0022	<0,01	0,0082	0,0069	0,23
$\sigma$	0,1558			0,1677		
Número de observações	35718			10065		

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Para entender melhor porque o modelo de Barten não se adere aos dados da POF 2002-2003, deve-se analisar as despesas com alimentação e os seus respectivos componentes: preço e quantidade. Isso será feito a seguir.

O Gráfico 5.3 mostra a fração da despesa total com alimentação em relação ao logaritmo da despesa domiciliar *per capita* para domicílios compostos apenas por adultos. A informação contida no Gráfico 5.3 é similar àquela mostrada no Gráfico 5.1, exceto que agora no eixo horizontal temos o logaritmo da despesa domiciliar *per capita*, e não da despesa domiciliar total. Observe que, de maneira similar ao que foi obtido na Seção 5.5.1, a fração das despesas destinada à alimentação não decresce monotonicamente com a despesa domiciliar *per capita* para todos os tipos de domicílios, mas se comporta de maneira semelhante a um “U” ou um “L” invertido para determinados tipos de domicílios.

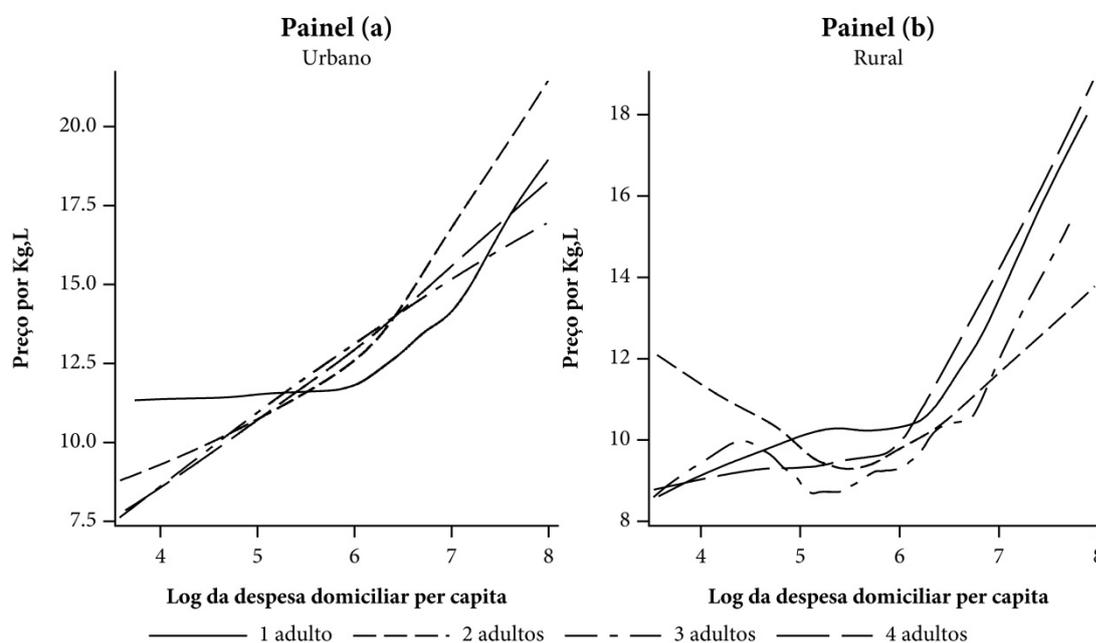
Gráfico 5.3 - Estimação não-paramétrica do modelo de Barten



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

O importante a mostrar no Gráfico 5.3 é que, para a faixa de despesa domiciliar *per capita* compreendida entre  $\ln(x/n) = 5,5$  e  $\ln(x/n) = 8$  aproximadamente, a fração da despesa com alimentos *diminui* com o aumento do número de membros do domicílio, dada a despesa domiciliar *per capita* (cf. também Seção 5.3.3.2). Isso significa que o consumo *per capita* de alimentos diminui com o aumento do número de membros do domicílio, um resultado que contraria as hipóteses do modelo de Barten.

Gráfico 5.4 - Estimação não-paramétrica do preço dos alimentos adquiridos para o domicílio



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

O Gráfico 5.4 mostra o preço unitário médio pago pelos domicílios em relação ao logaritmo da despesa domiciliar *per capita*. O preço unitário é obtido na POF 2002-2003 através da divisão do valor da despesa pela quantidade adquirida (medida em Kilogramas para sólidos e Litros para líquidos). Esse valor, além de sujeito a uma série de erros de medida, não representa o conceito de “preço” utilizado em economia<sup>54</sup> e nem está disponível para todos os produtos alimentícios<sup>55</sup>. Porém, ele pode ser utilizado para entender alguns dos problemas do modelo de Barten.

Conforme visto na Seção 5.3.3.2, uma das possíveis explicações para o fracasso do modelo de Barten (e rejeitada por Deaton e Paxson (1998)) é que os domicílios maiores podem estar se beneficiando de aquisições em massa de alimentos por meio da compra destes itens de despesa por um preço unitário menor. Porém, analisando os dados do Gráfico 5.4,

<sup>54</sup> Cf. Nota de Rodapé n. 35 na página 262.

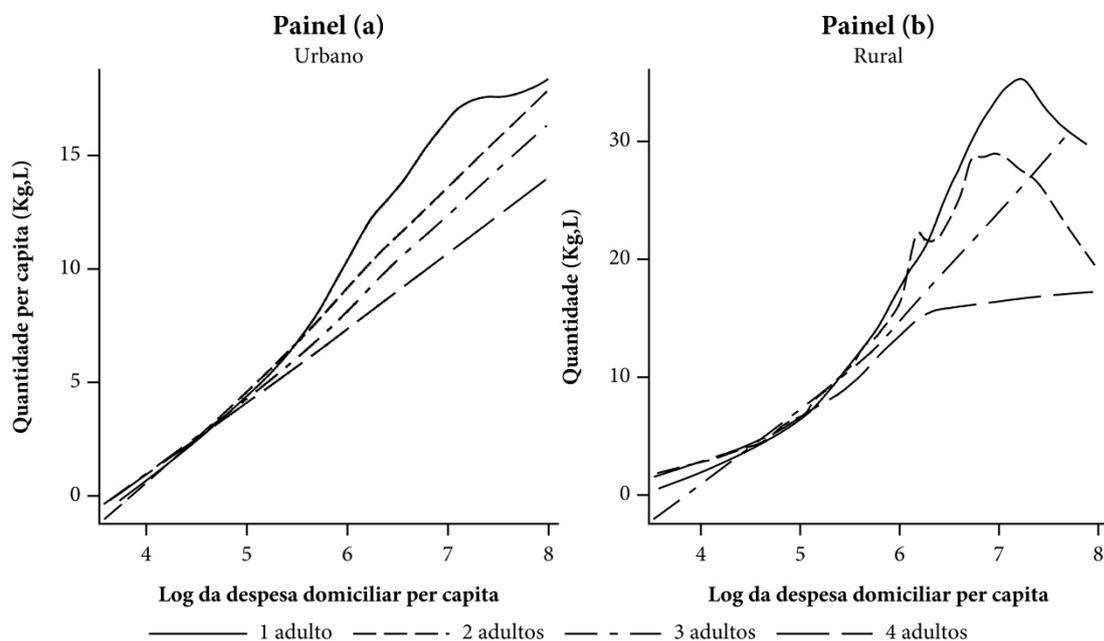
<sup>55</sup> Gastos com alimentação fora do domicílio (restaurantes, etc) ou feitos em sacolões, por exemplo, não possuem informação de quantidade. Os itens alimentícios que não possuem a informação do montante adquirido representam cerca de 24% da despesa total com alimentação na amostra utilizada.

não é possível tirar nenhuma conclusão inequívoca a respeito da relação entre o número de moradores e o preço do alimento. Na área rural, os domicílios unipessoais adquirem alimentos a um preço maior do que os domicílios compostos por dois adultos para quase todo o domínio da despesa domiciliar *per capita*. Por outro lado, entre os domicílios compostos por três e quatro adultos essa relação se inverte, e os últimos adquirem alimentos a um preço unitário maior. Na área urbana as curvas estimadas de todos os grupos de domicílios se cruzam em algum ponto, não sendo possível estabelecer nenhuma relação entre o preço do alimento e o tamanho do domicílio.

Analisando a quantidade *per capita* de alimentos adquiridos pelo domicílio (Gráfico 5.5), as conclusões são mais interessantes. Na área rural, embora se observem alguns cruzamentos entre as curvas, é possível pelo menos fazer uma comparação parcial. Percebe-se, por exemplo, que os domicílios com quatro moradores adquirem em geral quantidades de alimentos menores ou iguais que aquelas adquiridas pelos domicílios com três moradores. Essa mesma relação também se observa entre os domicílios com dois moradores e os domicílios unipessoais.

Na área urbana, a quantidade *per capita* de alimentos é semelhante para os domicílios que possuem  $\ln(x/n) < 5$  aproximadamente. Acima desse nível de despesa, no entanto, percebe-se claramente que a quantidade de alimentos por pessoa diminui à medida que aumenta o número de membros do domicílio. Isso constitui exatamente o paradoxo de Deaton e Paxson: se a alimentação é um bem normal e se as economias de escala geram um efeito-renda sobre a demanda por alimentos, por que o consumo *per capita* de alimentos diminui à medida que se aumenta o número de moradores do domicílio? O modelo de Barten não fornece as respostas para esta questão, e o fato de não fazê-lo é uma indicação de que o modelo está errado.

Gráfico 5.5 - Estimação não-paramétrica da quantidade de alimentos adquiridos para o domicílio



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Para verificar os resultados apresentados acima, a Tabela 5.6 mostra os parâmetros estimados dos preços unitários e das quantidades adquiridas de alimentos obtidos por regressão mediana, também conhecida como LAD – *Least Absolut Deviations* (cf. Wooldridge, 2002) – apenas naqueles domicílios compostos por adultos. A regressão mediana foi utilizada neste caso para minimizar os efeitos de *outliers* e erros de medida presentes tanto na variável de preço unitário quanto na quantidade adquirida.

Tabela 5.6 - Parâmetros estimados por LAD do preço e da quantidade adquirida de alimentos

Variável	Preço por Kg,L			Quantidade (Kg,L) per capita		
	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor
<i>Área Urbana</i>						
Intercept	5,047	0,414	< 0,01	-18,395	0,596	< 0,01
logxn	0,871	0,060	< 0,01	4,335	0,093	< 0,01
logn	0,159	0,086	0,06	-0,522	0,109	< 0,01
+ variáveis de controle						
<i>Área Rural</i>						
Intercept	4,499	0,709	< 0,01	-28,682	1,271	< 0,01
logxn	0,755	0,114	< 0,01	6,751	0,232	< 0,01
logn	0,215	0,171	0,21	-0,749	0,271	< 0,01
+ variáveis de controle						

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Os dados da Tabela 5.6 mostram efetivamente que a quantidade *per capita* de alimentos adquiridos pelo domicílio está inversamente relacionada com o número de moradores. O preço unitário dos alimentos, por outro lado, está positivamente relacionado com o número de membros do domicílio, embora o coeficiente de *logn* na área rural não seja estatisticamente significativa.

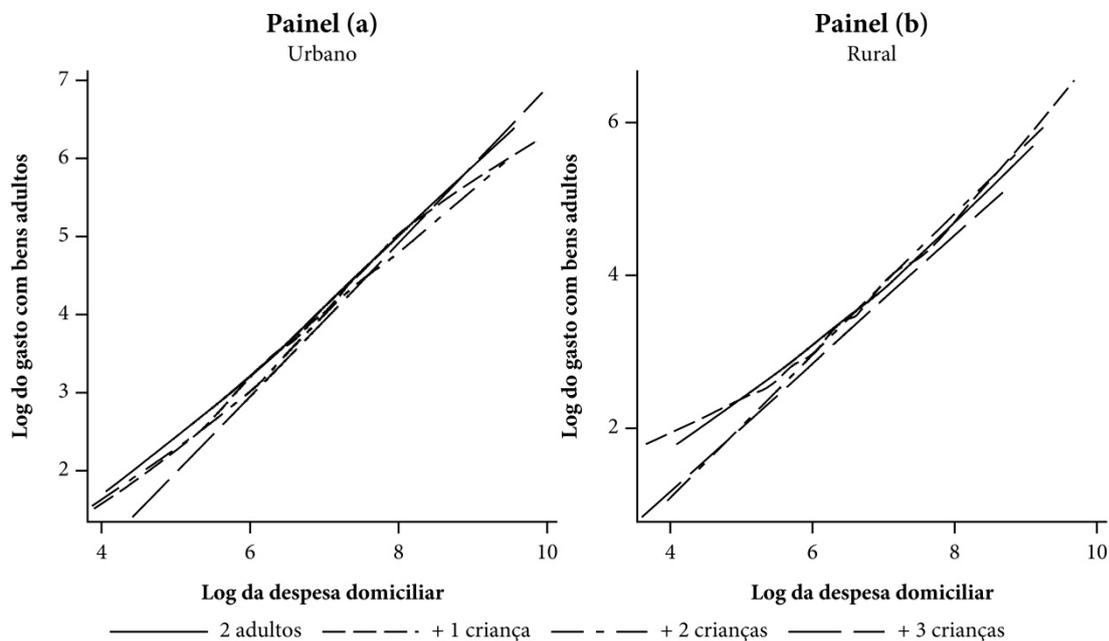
Assim, a análise da POF 2002-2003 mostrou que a despesa *per capita* de alimentos diminui com o número de membros do domicílio, mantendo-se constante a despesa domiciliar *per capita*. Tal resultado decorre de uma relação inversa entre o número de moradores e a quantidade adquirida de alimentos e de uma correlação positiva entre o preço unitário dos alimentos e o número de moradores, tudo o mais constante. Todos estes resultados vão de encontro ao preconizado pelo modelo de Barten modificado por Deaton e Paxson (1998). Embora os autores admitam as contradições impostas pelos dados, a fé de Deaton de que o modelo “faz sentido” (Deaton, 1997, p. 267) o impede de concluir o óbvio: o modelo está simplesmente errado. Toda a discussão da Seção 5.3.3.1 mostrou que o modelo de Barten original está sujeito a uma série de problemas. Não é difícil imaginar que o modelo desenvolvido por Deaton e Paxson (1998), na medida em que se originou do primeiro modelo, herdou dele parte desses problemas, o suficiente para torná-lo inadequado.

### 5.5.3 Modelo de Rothbarth

Nesta seção o modelo de Rothbarth será utilizado para estimar o custo relativo das crianças. Assim como foi feito com o modelo de Engel, primeiramente serão analisadas as despesas com bens de adultos por meio de regressões não-paramétricas. O objetivo é investigar se as condições para a aplicação do modelo de Rothbarth estão presentes, isto é: *a)* se os gastos com bens de adultos crescem monotonicamente com o dispêndio domiciliar; e *b)* se o acréscimo de crianças no domicílio proporciona uma diminuição nos gastos com bens de adultos, tudo o mais permanecendo constante. A análise será feita utilizando-se tanto um conceito mais amplo de bens de adultos (soma das despesas com bebidas alcoólicas, vestuário de adulto, fumo, jogos e apostas e diversão e esportes) quanto um conceito menos amplo (vestuário de adulto).

O Gráfico 5.6 mostra a relação entre as despesas com bens de adultos e o dispêndio domiciliar. A relação é clara: quanto maior o dispêndio domiciliar, maior o montante destinado aos bens de adultos (ou seja, os bens de adultos são bens normais). Além disso, esta relação é sempre monotônica; não se observam pontos de inflexão, ao contrário do que ocorre com a fração da despesa com alimentação (Seção 5.5.1.1).

Gráfico 5.6 - Estimação não-paramétrica do gasto com bens de adultos

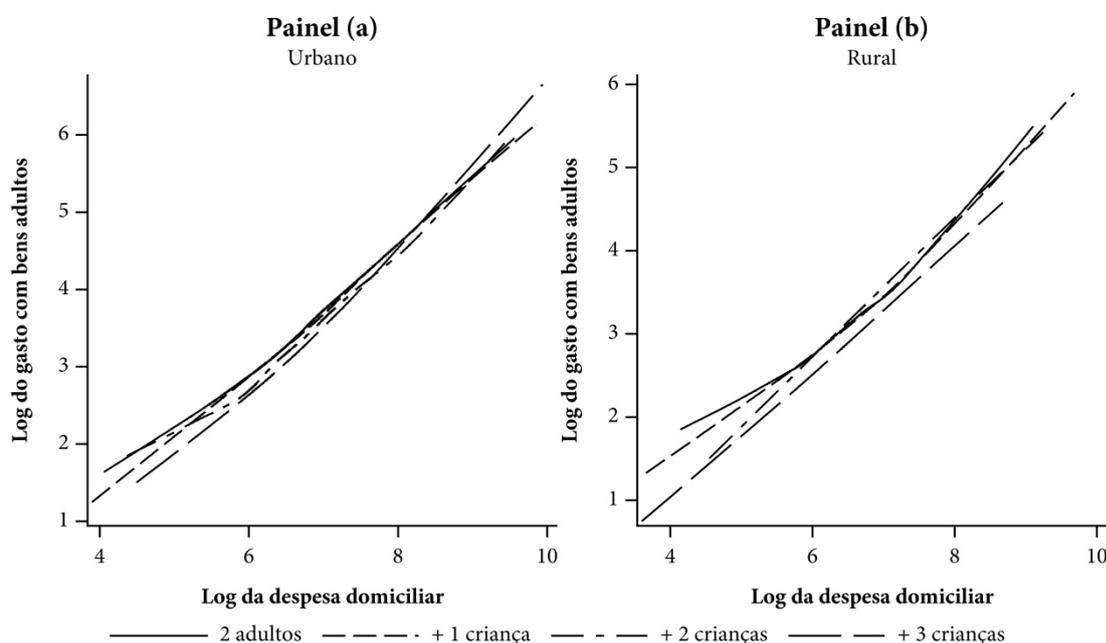


Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

No que se refere à relação entre a despesa com bens de adultos e o número de crianças no domicílio, os dados são apenas parcialmente conclusivos. Na área urbana o domicílio de referência (dois adultos) possui um nível de despesa com bens de adultos maior do que o domicílio que possui duas crianças entre seus moradores. Na área rural, a despesa com bens de adultos do domicílio de referência e daquele que possui uma criança é superior à despesa dos domicílios compostos por dois adultos e três crianças. Para os demais grupos de domicílios, nada pode ser dito, pois as curvas se cruzam em algum ponto. Isto é apenas um indicativo de que a análise não-paramétrica deve ser complementada com a análise paramétrica dos dados.

O Gráfico 5.7 mostra a mesma relação entre as despesas com bens de adultos e o dispêndio domiciliar, mas agora focando apenas os itens de vestuário de adulto. O padrão observado é semelhante àquele visto no Gráfico 5.6, a saber: *a*) o vestuário de adulto é um bem normal, isto é, seu consumo aumenta com o dispêndio domiciliar; *b*) para uma grande faixa do dispêndio domiciliar, as despesas com bens de adultos do domicílio de referência são superiores às despesas de um domicílio composto por dois adultos e três crianças.

Gráfico 5.7 - Estimação não-paramétrica do gasto com vestuário de adulto



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Assim, as estimativas não-paramétricas mostram que as despesas com bens de adultos a princípio satisfazem as condições de aplicação do modelo de Rothbarth. No entanto, como não foi possível realizar uma comparação completa da relação entre a despesa com bens de adultos e o número de crianças do domicílio, a análise deve ser completada com estimativas paramétricas. Isto será feito a seguir.

### 5.5.3.1 Estimativas paramétricas

A Tabela 5.7 mostra as escalas de equivalências estimadas pelo modelo de Rothbarth. Analisando inicialmente apenas os dados relativos a vestuário de adulto, verifica-se que, exceto para as crianças de 10 a 14 anos, as escalas de equivalência da área urbana são maiores do que aquelas da área rural. Um domicílio com criança equivale entre 1,157 e 1,248 de um domicílio sem criança na área urbana e entre 1,115 e 1,159 na área rural. Tais valores são bem inferiores àqueles estimados pelo modelo de Engel na Seção 5.5.1.1, confirmando a expectativa de que a compensação paga pelo modelo de Engel é maior do que aquela paga pelo modelo de Rothbarth (cf. Seção 5.3.4.6).

Tabela 5.7 - Escalas de equivalência estimadas pelo modelo de Rothbarth

Tipo de família	Despesas de adultos (total)		Fumo		Jogos e apostas		Vestuário de adulto		Bebidas alcoólicas		Diversões e esportes	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
2 adultos morando...												
Sozinhos	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Com criança de 0 a 4 anos	1,259* (0,054)	1,131* (0,066)	1,093 (0,183)	2,153 (∞)	1,565 (∞)	1,179 (∞)	1,248* (0,057)	1,115 (0,065)	1,023 (0,208)	0,998 (0,26)	1,596* (0,261)	0,776 (∞)
Com criança de 5 a 9 anos	1,197* (0,049)	1,107 (0,062)	0,887 (0,166)	1,435 (∞)	1,392 (∞)	1,859 (∞)	1,198* (0,053)	1,116 (0,077)	1,015 (0,192)	1,196 (0,399)	1,309 (0,187)	0,612 (∞)
Com criança de 10 a 14 anos	1,142* (0,045)	1,212* (0,061)	0,968 (0,155)	1,939 (∞)	1,656 (∞)	0,983 (∞)	1,157* (0,053)	1,159* (0,072)	0,997 (0,203)	1,274 (0,423)	1,298 (0,173)	0,672 (∞)

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Indica valores diferentes de 1 (um) a 5% de significância; (∞) indica a existência de valores muito altos para o erro-padrão. Erro-padrão das estimativas entre parênteses obtido por bootstrap com 1000 repetições.

Se as escalas de equivalência forem estimadas utilizando outros grupos de despesas como indicadores de bem-estar, observa-se o surgimento de algumas anomalias. Quase todas as escalas estimadas para fumo, jogos e apostas, bebidas alcoólicas e diversões e esporte não são significativamente distintas de 1. Nas equações relativas a fumo (área rural), jogos e apostas e diversões e esportes (área rural), o erro-padrão foi tão grande que foi considerado indeterminado (símbolo '(∞)'). Por fim, pelo fato de as despesas com vestuário de adulto representarem cerca de  $\frac{2}{3}$  do grupo geral de despesas exclusivas de adultos (fumo, jogos e apostas, vestuário, bebidas alcoólicas e alguns itens de diversões e esportes), as escalas de equivalência estimadas a partir desse grupo agregado de despesas de adultos apresentaram magnitudes semelhantes àquelas estimadas para vestuário de adulto isoladamente.

Tabela 5.8 - Teste de Hausman das estimativas obtidas por VI no modelo de Rothbarth

Equação	Urbano		Rural	
	$\chi^2$	p-valor	$\chi^2$	p-valor
Despesas de adultos (total)	-19,29	ND	-85,24	ND
Fumo	0,03	1,00	0,31	1,00
Jogos e apostas	-0,02	ND	-0,06	ND
Vestuário de adulto	25,77	0,59	-28,57	ND
Bebidas alcoólicas	-0,39	ND	-0,38	ND
Diversões e esportes	23,51	0,71	0,06	1,00

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: ND significa 'não definido'.

A Tabela 5.8 mostra o resultado da comparação das estimativas por variáveis instrumentais em relação ao método de mínimos quadrados ordinários. Nas equações de fumo, diversões e esportes e vestuário de adulto (área urbana) o teste de Hausman não rejeita a hipótese nula, ou seja, nestas equações a variável do logaritmo da despesa domiciliar *per capita* não foi considerada endógena. Nas demais equações, nada pode ser dito, pois a estatística do teste foi negativa, e a distribuição qui-quadrado não é definida para valores negativos.

### 5.5.3.2 Teste do modelo

Foi visto na Seção 5.3.4.1 que, sob certos pressupostos, uma condição necessária para a validade do modelo de Rothbarth é que o consumo das pessoas adultas do domicílio seja afetado pela presença de uma criança somente através do efeito-renda negativo proporcionado por ela. Essa condição – denominada de hipótese da separabilidade demográfica – pode ser testada empiricamente de diversas formas. A forma escolhida neste trabalho foi seguir o caminho trilhado por Nelson (1992) (cf. Seção 5.3.4.3).

O teste consiste no seguinte. No modelo de Rothbarth, o consumo dos adultos tanto nos domicílios com crianças quanto nos domicílios sem crianças depende de uma mesma função de demanda  $q_k^A = g_k^A(\mathbf{p}, x^A)$ . Se o pressuposto de separabilidade for válido, não apenas o valor total do consumo dos adultos deve ser igual na presença e na ausência da criança, mas também o consumo desagregado dos bens, item por item ( $k = 1, \dots, K$ ). Assim, se uma criança for introduzida no domicílio e o orçamento dos adultos ( $x^A$ ) for recompensado até o ponto em que a quantidade consumida pelos adultos ( $q_k^A$ ) se mantiver constante após a inclusão da criança, então a despesa de consumo da criança com o bem  $k$  pode ser inferida pela diferença entre o dispêndio total do domicílio com o bem  $k$  e os gastos dos adultos com este bem,  $p_k q_k^C = p_k q_k - p_k q_k^A$ . Conforme coloca Nelson (1992, p. 298), essa abordagem não fornece um teste formal da hipótese de separabilidade demográfica, mas mostra o que esse pressuposto implica sobre a alocação de bens específicos do domicílio entre adultos e crianças.

Tais resultados podem ser avaliados sob determinados padrões de julgamentos de modo a determinar o quanto o resultado é satisfatório<sup>56</sup>.

A Tabela 5.9 mostra os resultados obtidos quando o pressuposto de separabilidade demográfica é aplicado ao modelo de Rothbarth. Os dados da tabela foram obtidos equalizando-se o nível de bem-estar de um domicílio médio composto por dois adultos por um domicílio composto por dois adultos e uma criança na faixa etária indicada. O bem de adulto utilizado para a identificação do bem-estar dos domicílios foi “vestuário de adulto”. Para se fazer uma comparação com definições mais amplas de “bens de adultos”, no entanto, os grupos de despesas foram desagregados em subgrupos exclusivos de consumo de adultos. Os grupos alimentação, vestuário, cultura e despesas diversas tiveram as despesas com bebidas alcoólicas, vestuário de adulto, jogos e apostas e diversões e esportes subtraídas de seu valor respectivamente. A estas despesas de adultos, somamos aquelas feitas com fumo, que já constituía um grupo à parte.

Ainda na Tabela 5.9, a coluna “fração da despesa” mostra a participação de cada grupo de bens na despesa de consumo total, após a inclusão da criança no domicílio. As colunas “adultos” e “criança” mostram a proporção da despesa total de cada grupo de despesa alocada entre adultos e crianças; ou seja, estas colunas mostram a alocação intradomiciliar dos recursos domésticos de cada grupo de despesa.

A primeira informação a observar está na linha “total das despesas”. Essa linha mostra a alocação total da despesa domiciliar entre os dois adultos e a criança da faixa etária indicada. Observa-se por exemplo que de 11,2% a 20,5% dos recursos do domicílio são alocados para as crianças nas áreas urbanas, e de 7,1% a 8,5% dos recursos são alocadas para as crianças nas áreas rurais. Estes dados apontam uma razão do consumo da criança com o de cada adulto do

---

<sup>56</sup> Conforme se mostrou na Seção 5.3.4.3, Deaton *et. al.* (1989) desenvolveram um teste formal para a hipótese de separabilidade demográfica. Para que esse teste seja possível, no entanto, é preciso que haja diversos grupos distintos de bens de adultos. Na discussão feita na Seção 5.3.4.5, no entanto, mostrou-se que existe apenas um bem de adulto que atende a todos os requisitos para a aplicação do modelo de Rothbarth: o vestuário de adultos. Qualquer aplicação que utilize outro tipo de bem de adulto não está correta, a nosso ver. Por isso, optou-se aqui apenas pela análise subjetiva proposta por Nelson (1992).

domicílio entre 0,15 e 0,51, dentro da faixa de valores obtidos por Gronau (1991), Deaton e Muellbauer (1986) e Nelson (1992) (cerca de  $\frac{1}{4}$ ).

Tabela 5.9 - Frações implícitas das despesas de consumo entre adultos e crianças – vestuário de adulto

Grupo demográfico	Grupo de despesa	Urbano			Rural		
		Fração da despesa	Adultos	Criança	Fração da despesa	Adultos	Criança
Crianças de 0 a 4 anos	Alimentação	0,204	0,780	0,220	0,320	0,924	0,076
	Habituação	0,404	0,845	0,155	0,360	0,918	0,082
	Vestuário (exclusive adulto)	0,030	0,256	0,744	0,027	0,390	0,610
	Transporte	0,122	0,775	0,225	0,113	0,964	0,036
	Higiene	0,023	0,925	0,075	0,021	1,050	-0,050
	Saúde	0,065	0,734	0,266	0,058	0,867	0,133
	Educação	0,025	0,501	0,499	0,004	1,660	-0,660
	Cultura	0,023	0,647	0,353	0,009	0,614	0,386
	Serviços pessoais	0,011	0,845	0,155	0,006	1,004	-0,004
	Despesas de adultos	0,065	1,010	-0,010	0,064	1,092	-0,092
	Fumo	0,008	0,901	0,099	0,009	1,362	-0,362
	Jogos e apostas	0,003	1,116	-0,116	0,002	2,082	-1,082
	Vestuário de adulto	0,042	1,000	0,000	0,042	1,000	0,000
	Bebidas alcoólicas	0,011	1,068	-0,068	0,010	1,099	-0,099
	Diversões e esportes	0,002	1,284	-0,284	0,001	0,631	0,369
	Despesas diversas	0,027	0,744	0,256	0,017	1,069	-0,069
	Total das despesas	1,000	0,795	0,205	1,000	0,925	0,075
Crianças de 5 a 9 anos	Alimentação	0,202	0,788	0,212	0,317	0,924	0,076
	Habituação	0,402	0,849	0,151	0,360	0,911	0,089
	Vestuário (exclusive adulto)	0,023	0,334	0,666	0,025	0,421	0,579
	Transporte	0,125	0,758	0,242	0,116	0,924	0,076
	Higiene	0,025	0,852	0,148	0,021	1,038	-0,038
	Saúde	0,059	0,811	0,189	0,051	0,976	0,024
	Educação	0,037	0,337	0,663	0,012	0,506	0,494
	Cultura	0,022	0,679	0,321	0,009	0,612	0,388
	Serviços pessoais	0,012	0,823	0,177	0,006	0,978	0,022
	Despesas de adultos	0,066	0,999	0,001	0,065	1,070	-0,070
	Fumo	0,008	0,902	0,098	0,009	1,324	-0,324
	Jogos e apostas	0,002	1,158	-0,158	0,002	1,829	-0,829
	Vestuário de adulto	0,042	1,000	0,000	0,042	1,000	0,000
	Bebidas alcoólicas	0,011	1,019	-0,019	0,010	1,048	-0,048
	Diversões e esportes	0,002	1,087	-0,087	0,001	0,510	0,490
	Despesas diversas	0,026	0,781	0,219	0,019	0,972	0,028
	Total das despesas	1,000	0,796	0,204	1,000	0,915	0,085
Crianças de 10 a 14 anos	Alimentação	0,206	0,840	0,160	0,333	0,891	0,109
	Habituação	0,399	0,933	0,067	0,347	0,957	0,043
	Vestuário (exclusive adulto)	0,025	0,337	0,663	0,026	0,410	0,590
	Transporte	0,120	0,938	0,062	0,109	1,010	-0,010
	Higiene	0,027	0,872	0,128	0,024	0,892	0,108
	Saúde	0,059	0,951	0,049	0,050	1,018	-0,018
	Educação	0,035	0,426	0,574	0,017	0,359	0,641
	Cultura	0,021	0,838	0,162	0,006	0,893	0,107
	Serviços pessoais	0,012	0,960	0,040	0,007	0,963	0,037
	Despesas de adultos	0,072	1,034	-0,034	0,063	1,110	-0,110
	Fumo	0,008	0,966	0,034	0,009	1,346	-0,346
	Jogos e apostas	0,003	1,223	-0,223	0,001	2,846	-1,846
	Vestuário de adulto	0,047	1,000	0,000	0,043	1,000	0,000
	Bebidas alcoólicas	0,011	1,163	-0,163	0,009	1,205	-0,205
	Diversões e esportes	0,002	1,144	-0,144	0,001	0,529	0,471
	Despesas diversas	0,024	0,992	0,008	0,017	1,105	-0,105
	Total das despesas	1,000	0,888	0,112	1,000	0,929	0,071

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Essa medida geral da repartição de recursos, no entanto, esconde uma grande variação interna. O percentual alocado aos indivíduos adultos varia de 25,6% das despesas de vestuário não exclusivas dos adultos nas áreas urbanas até a mais de 90% das despesas com habitação nas áreas rurais. Para alguns grupos de bens observa-se inclusive uma alocação de mais de 100% dos recursos para os adultos, o que significa que a criança está usufruindo um “consumo negativo”.

Na área urbana, tais “consumos negativos” ocorrem somente nos subgrupos do conceito mais amplo de “despesas de adultos”. Na área rural observam-se alocações negativas de recursos para higiene, transporte, saúde, serviços pessoais, despesas de adultos, despesas diversas e até nas despesas com educação. Estes valores negativos ocorrem quando o domicílio passa a adquirir *menos* quantidade do produto na presença da criança do que um domicílio de dois adultos que usufrui o mesmo nível de bem-estar, e pode ser explicado pelo efeito-substituição causado pela presença de bens públicos no domicílio (Seção 5.3.4.4). Dado que o domicílio com a criança foi perfeitamente compensado pela presença dela, então, considerando-se os pressupostos do modelo de Rothbarth, os valores negativos constituem uma violação à lógica do modelo.

É possível que as alocações negativas de recursos mostradas na Tabela 5.9 sejam causadas por variações amostrais ou por problemas de especificação do modelo empírico, de modo que, ao invés de negativas, elas são de fato nulas. Considerando as alocações preditas para alguns subgrupos de despesas (por exemplo, jogos e apostas), as diferenças são bastante significativas para que isso seja verdade. Entretanto, como tais grupos de despesa representam uma fração inexpressiva do orçamento total do domicílio, pode-se argumentar que os danos causados por uma violação do pressuposto de separabilidade demográfica não são tão severos. O problema é que as alocações negativas ocorrem também em alguns grupos de despesas mais significativos, como educação, saúde e transporte. Dessa forma, os resultados apontam para uma violação do pressuposto de separabilidade demográfica.

É importante salientar que se o grupo mais amplo de “despesas de adultos” tivesse sido tomado como o indicador de bem-estar (ao invés do vestuário de adulto, como foi feito aqui), então as variações nas alocações de recursos observadas dentro desse grupo implicariam uma rejeição do modelo de Rothbarth. Isso porque, conforme mostra a equação (5.78) (cf. Seção 5.3.4.1), apenas um bem de adulto é suficiente para identificar a regra de alocação de recursos dentro do domicílio. Logo, se este bem é utilizado para alocar os recursos dentro do domicílio, a alocação predita para todos os demais bens de adultos teria que ser idêntica. Os dados da Tabela 5.9 mostram claramente que este não é o caso<sup>57</sup>.

Por fim, Nelson (1992) argumenta que o que é mais implausível para a validade da hipótese de separabilidade demográfica não é a previsão de despesas negativas para as crianças em determinados itens do orçamento familiar, mas sim a forma como a técnica empregada na Tabela 5.9 permite a “alocação” de todos os itens de despesas, independentemente da existência de economias de escala. Os dados da Tabela 5.9 mostram, por exemplo, que as despesas com habitação são alocadas entre adultos e crianças. Mas se pais e crianças compartilham do mesmo espaço físico, da mesma iluminação, da mesma limpeza ambiente, etc, como explicar a alocação do consumo deste item? Isso nos remete à discussão feita na Seção 5.3.4.4, onde se mostra que, na presença de economias de escala, a hipótese de separabilidade demográfica deixa de ser válida. O problema é que a discussão feita nesta seção é inconclusiva sobre se a presença de economias de escala é suficiente para rejeitar o modelo de Rothbarth. Assim, embora os resultados indiquem uma violação da hipótese de separabilidade demográfica, eles não são suficientes para indicar uma rejeição do modelo de Rothbarth.

### **5.5.4 Modelo de Prais-Houthakker**

A Tabela 5.10 mostra a escala de equivalência geral  $m_0^h$  e as escalas específicas  $m_k^h$  dos domicílios compostos por dois adultos e uma criança na faixa etária indicada. O domicílio de referência é aquele composto por dois adultos. Para a identificação das escalas de equivalência

---

<sup>57</sup> Informalmente, essa análise é equivalente ao teste desenvolvido por Deaton *et. al.* (1989) para determinar a validade da hipótese de separabilidade demográfica (cf. Nota de rodapé n. 56 na página 328).

específicas, assumiu-se que a escala para “vestuário de adulto” tem valor 1. Isso significa que apenas os adultos do domicílio consomem este item de despesa.

Tabela 5.10 - Escalas de equivalência do modelo de Prais-Houthakker

Escala de equivalência	Criança de 0 a 4 anos		Criança de 5 a 9 anos		Criança de 10 a 14 anos	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
Escala geral	1,209	1,158	1,207	1,186	1,068	1,094
Alimentação	1,367	1,291	1,360	1,380	1,174	1,204
Habitação	1,148	1,121	1,116	1,049	1,017	1,020
Vestuário (exclusive adulto)	2,307	1,715	1,664	1,438	1,741	1,649
Transporte	1,186	0,970	1,289	1,218	1,009	1,005
Higiene	1,098	1,068	1,160	1,106	1,091	1,158
Saúde	1,130	1,163	1,051	0,991	0,952	1,000
Educação	1,312	0,724	2,308	2,565	1,849	3,643
Cultura	1,358	1,500	1,363	1,418	1,138	1,014
Vestuário de adulto	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Fumo	1,223	0,967	1,114	0,936	1,077	0,923
Serviços Pessoais	1,034	0,984	1,098	1,009	1,000	1,030
Despesas Diversas	1,177	0,844	1,151	1,094	0,905	0,872

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Percebe-se que as escalas de equivalência específicas apresentam uma grande variabilidade. Os maiores valores são observados nas despesas com alimentação, vestuário (exclusive adulto), educação e cultura. Exceto para as crianças de 0 a 4 anos, as escalas de equivalência estimadas para a educação são superiores àquelas que seriam observadas para um adulto ( $m^h = 1,5$ ). Por outro lado, as despesas com serviços pessoais são aquelas que possuem as menores escalas de equivalência específicas.

Computando-se a escala de equivalência geral a partir das escalas específicas, observa-se que para todas as faixas etárias uma criança possui necessidades de recursos menores que as de um adulto. Um domicílio composto por dois adultos e uma criança de 0 a 4 anos na área urbana, por exemplo, necessita de um acréscimo de 20,9% de recursos para usufruir o mesmo bem-estar de um domicílio composto por apenas dois adultos.

A Tabela 5.11 mostra os parâmetros estimados das equações referentes às escalas de equivalências específicas. A maior parte dos parâmetros é significativa a 5%. As exceções são alguns dos parâmetros que tiveram  $p$ -valor maior que 0,05 das despesas com transporte, fumo

e serviços pessoais (áreas urbanas e rurais), e das despesas com habitação, saúde, cultura e despesas diversas na área rural.

Tabela 5.11 - Parâmetros estimados das equações referentes às escalas de equivalência específicas do modelo de Prais-Houthakker

Grupo de despesa	Faixa etária da criança	Urbano			Rural		
		Estimativa	Erro-padrão	p-valor	Estimativa	Erro-padrão	p-valor
Alimentação	De 0 a 4 anos	0,367	0,014	< 0,01	0,291	0,022	< 0,01
	De 5 a 9 anos	0,360	0,014	< 0,01	0,380	0,023	< 0,01
	De 10 a 14 anos	0,174	0,011	< 0,01	0,204	0,022	< 0,01
Habitação	De 0 a 4 anos	0,148	0,006	< 0,01	0,121	0,015	< 0,01
	De 5 a 9 anos	0,116	0,006	< 0,01	0,049	0,014	< 0,01
	De 10 a 14 anos	0,017	0,005	< 0,01	0,020	0,015	0,188
Vestuário	De 0 a 4 anos	1,307	0,069	< 0,01	0,715	0,114	< 0,01
	De 5 a 9 anos	0,664	0,051	< 0,01	0,438	0,091	< 0,01
	De 10 a 14 anos	0,741	0,056	< 0,01	0,649	0,112	< 0,01
Transporte	De 0 a 4 anos	0,186	0,020	< 0,01	-0,030	0,041	0,463
	De 5 a 9 anos	0,289	0,021	< 0,01	0,218	0,049	< 0,01
	De 10 a 14 anos	0,009	0,015	0,569	0,005	0,038	0,900
Higiene	De 0 a 4 anos	0,098	0,023	< 0,01	0,068	0,047	0,154
	De 5 a 9 anos	0,160	0,021	< 0,01	0,106	0,044	0,017
	De 10 a 14 anos	0,091	0,021	< 0,01	0,158	0,051	< 0,01
Saúde	De 0 a 4 anos	0,130	0,020	< 0,01	0,163	0,059	< 0,01
	De 5 a 9 anos	0,051	0,019	< 0,01	-0,009	0,044	0,837
	De 10 a 14 anos	-0,048	0,016	< 0,01	0,000	0,069	0,995
Educação	De 0 a 4 anos	0,312	0,065	< 0,01	-0,276	0,126	0,028
	De 5 a 9 anos	1,308	0,096	< 0,01	1,565	0,376	< 0,01
	De 10 a 14 anos	0,849	0,074	< 0,01	2,643	0,588	< 0,01
Cultura	De 0 a 4 anos	0,358	0,034	< 0,01	0,500	0,135	< 0,01
	De 5 a 9 anos	0,363	0,033	< 0,01	0,418	0,144	< 0,01
	De 10 a 14 anos	0,138	0,030	< 0,01	0,014	0,102	0,888
Fumo	De 0 a 4 anos	0,223	0,051	< 0,01	-0,033	0,081	0,687
	De 5 a 9 anos	0,114	0,043	< 0,01	-0,064	0,047	0,176
	De 10 a 14 anos	0,077	0,044	0,082	-0,077	0,054	0,154
Serviços Pessoais	De 0 a 4 anos	0,034	0,017	0,053	-0,016	0,039	0,679
	De 5 a 9 anos	0,098	0,018	< 0,01	0,009	0,044	0,846
	De 10 a 14 anos	0,000	0,016	0,996	0,030	0,049	0,542
Despesas Diversas	De 0 a 4 anos	0,177	0,039	< 0,01	-0,156	0,060	< 0,01
	De 5 a 9 anos	0,151	0,036	< 0,01	0,094	0,081	0,247
	De 10 a 14 anos	-0,095	0,028	< 0,01	-0,128	0,062	0,039

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

#### 5.5.4.1 Teste do modelo

O modelo de Prais-Houthakker, ao contrário dos modelos de Engel, Barten e Rothbarth, não foi construído a partir de um pressuposto explícito de identificação que possa ser utilizado como teste. O modelo consiste apenas em definir uma forma funcional para a função custo do domicílio e estimar os parâmetros. A identificação é obtida fixando exogenamente o valor de uma das escalas de equivalências específicas. Como o valor dessa

escala de equivalência é determinado exogenamente, não é possível aplicar um teste para verificar se ela foi determinada corretamente.

Entretanto, conforme visto na Seção 5.3.2, o modelo de Prais-Houthakker baseia-se em uma função de utilidade muito específica, cujas características impedem que existam bens inferiores na composição da demanda do domicílio. Assim, uma forma de verificar a validade teórica do modelo de Prais-Houthakker é testar se a despesa equivalente  $p_k q_k^h / m_k^h = g_k(x^h / m_0^h)$  de todos os grupos de bens utilizados pelo modelo se relaciona positivamente com a renda, isto é, se todos os bens são normais. Para tanto, calculam-se as elasticidades

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^h &= \frac{\partial g_k(x^h / m_0^h)}{\partial (x^h / m_0^h)} \frac{(x^h / m_0^h)}{g_k(x^h / m_0^h)} \\ &= \left( \frac{m_k^h}{m_0^h} \right) \beta_k + 1 \quad \text{para } k = 1, \dots, K \end{aligned} \quad (5.108)$$

A Tabela 5.12 mostra as elasticidades-dispêndio da despesa de cada grupo de bens calculada para um domicílio médio composto por dois adultos e um número variável de crianças. Em nenhum dos casos a elasticidade é negativa ou sequer próxima de ser negativa. Assim, não existem indícios suficientes para refutar os pressupostos teóricos do modelo de Prais e Houthakker.

Tabela 5.12 - Elasticidades-dispêndio da despesa com cada grupo de bens, por tipo de domicílio

Grupo de despesa	2 Adultos		+ Criança de 0 a 4 anos		+ Criança de 5 a 9 anos		+ Criança de 10 a 14 anos	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
Alimentação	1,085	1,183	1,096	1,204	1,096	1,213	1,093	1,201
Habitação	0,808	0,713	0,818	0,723	0,823	0,746	0,817	0,733
Vestuário (exclusivo adulto)	0,730	0,546	0,485	0,328	0,628	0,449	0,559	0,315
Transporte	1,428	1,519	1,420	1,435	1,457	1,533	1,405	1,477
Higiene	1,198	1,300	1,179	1,276	1,190	1,279	1,202	1,317
Saúde	1,156	0,943	1,146	0,943	1,136	0,952	1,139	0,948
Educação	1,363	0,809	1,394	0,880	1,694	0,586	1,629	0,363
Cultura	1,350	1,446	1,393	1,578	1,395	1,533	1,373	1,414
Vestuário de adulto	0,986	0,825	0,988	0,849	0,988	0,853	0,987	0,840
Fumo	0,711	0,596	0,708	0,663	0,733	0,681	0,708	0,659
Serviços Pessoais	0,999	0,663	0,999	0,713	0,999	0,713	0,999	0,682
Despesas Diversas	1,481	1,377	1,469	1,275	1,459	1,347	1,408	1,300

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

## 5.6 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou os principais modelos utilizados pela abordagem da preferência revelada para se estimar as escalas de equivalências entre domicílios com composições demográficas distintas. Em seguida, tais modelos foram discutidos, estimados e testados a partir dos dados da Pesquisa de Orçamentos Familiares de 2002-2003.

Foram quatro os modelos estimados: Engel, Barten, Rothbarth e Prais-Houthakker. Tanto o modelo de Engel quanto o de Barten tiveram os seus pressupostos rejeitados. No modelo de Rothbarth, apesar de terem sido encontrados indícios de violação do pressuposto de separabilidade demográfica, as evidências apresentadas não permitem concluir que essa violação seja suficiente para invalidar as estimativas obtidas. Por fim, o modelo de Prais-Houthakker também não apresentou indícios de violação de seus pressupostos, embora inexistam testes estatísticos mais específicos para este modelo.

Considerando apenas os resultados dos modelos que não foram rejeitados pelos dados, a evidência é a mesma: o peso de uma criança em relação a um adulto é inferior a 1. Esse resultado indica que as análises de bem-estar baseadas em medidas *per capita* superestimam o chamado “custo da criança”, o que representa uma justificativa para a utilização das escalas de equivalência em estudos de desigualdade e pobreza. Apesar da discussão feita neste capítulo ter demonstrado a importância das escalas de equivalências nas análises de bem-estar, foi mostrado também que, mesmo dentro da abordagem das preferências reveladas, os valores específicos das escalas de equivalências dependem da noção subjacente de bem-estar embutida em cada modelo.



## 6 ESCALAS DE EQUIVALÊNCIA SUBJETIVAS

### 6.1 INTRODUÇÃO

No Capítulo 5, foram apresentados diversos modelos de escalas de equivalência desenvolvidos dentro da abordagem de preferência revelada. Tais modelos têm em comum o fato de utilizarem dados de despesas para estimar a função custo dos domicílios, a partir da qual o bem-estar relativo do domicílio em relação a um domicílio de referência é obtido e o valor das escalas de equivalência é determinado. Desta forma, procura-se identificar o bem-estar dos domicílios a partir da observação de seu comportamento.

Esta forma de mensuração – que será chamada “indireta” – possui diversos problemas, dentre os quais o problema de identificação discutido no Capítulo 5. Resumidamente, este problema ocorre porque não é possível identificar uma única função de utilidade a partir apenas das informações de despesas. Em outras palavras, *qualquer* escala de equivalência é consistente com a demanda observada das famílias (cf. Blundell; Lewbel, 1991). Isto impõe uma séria limitação na determinação do valor das escalas de equivalências. Para contornar este problema, Kapteyn (1994) elenca três alternativas: 1) tentar conviver com ele e salvar os resultados que não forem contaminados pelo problema de identificação; 2) impor pressupostos que façam com que o problema (aparentemente) desapareça; ou 3) invocar informações adicionais que permitam solucionar o problema. Todos os métodos apresentados no capítulo 5 recorrem à segunda solução para tentar identificar as escalas de equivalências. Para Kapteyn (1994), no entanto, se nenhuma informação extra é invocada, qualquer pressuposto que solucione o problema de identificação é arbitrário por definição.

A solução mais óbvia para o problema da identificação, segundo o autor, é obter alguma informação adicional que contorne o problema. Uma forma de obter informação adicional consiste em estabelecer um padrão mínimo de bem-estar derivado de alguma necessidade fundamental do ser humano e comparar as funções custos dos domicílios a partir

deste nível de bem-estar. Esse é o caminho adotado pela abordagem nutricional para a estimação de escalas de equivalência. Assume-se que existe uma única necessidade humana biológica universal<sup>58</sup> fundamental à vida – a alimentação – e a partir daí estima-se o custo necessário para que os domicílios atendam os seus requerimentos mínimos de calorias e nutrientes, considerando as suas preferências tanto por alimentação quanto pelos demais bens.

Outra abordagem consiste em utilizar questões subjetivas a respeito da condição de vida das famílias para estabelecer linhas de pobreza subjetivas baseadas nas percepções dos próprios indivíduos a respeito daquilo que eles consideram um valor mínimo para o consumo. Para tanto, uma função custo pode ser mensurada com maior facilidade por meio de perguntas subjetivas sobre o montante de renda necessário para se atingir determinados níveis de bem-estar. Esta abordagem foi adotada por um conjunto de autores, incluindo Kapteyn e Van Praag (1978), Kapteyn *et al.* (1988), Hagenaars (1986), Van Praag e Van der Sar (1988), Dubnoff (1979), Danziger *et al.* (1984), Colasanto *et al.* (1984) e De Vos e Garner (1991). Utiliza-se assim uma forma “direta” para estimar as escalas de equivalências.

Para Soares (2009), vários problemas permeiam a abordagem nutricional de linhas de pobreza. Seus defensores ambicionam estabelecer linhas de pobreza que sejam “objetivas”. No entanto, para se estimar os seus valores, diversos passos arbitrários têm que ser adotados pelo pesquisador (Rocha, 2000). Para Soares (2009), no entanto, do ponto de vista conceitual, o argumento mais forte a favor das linhas de pobreza subjetivas é que a pobreza deve ser definida de acordo com os padrões vigentes em uma dada sociedade em uma dada época. Este argumento é antigo e já se encontrava em Adam Smith (1776, v. 4, cap. 2).

By necessities I understand not only the commodities which are indispensably necessary for the support of life, but whatever the custom of the country renders it indecent for creditable people, even of the lowest order, to be without. A linen shirt, for example, is, strictly speaking, not a necessary of life. [...] But in the present times, through the greater part of Europe, a creditable day-labourer would be ashamed to appear in public without a linen shirt.

---

<sup>58</sup> Claro que isso é uma simplificação, dado que a única necessidade biológica fundamental da vida é a *saúde* do organismo, e esta é obtida por meio de insumos como a alimentação, o ar puro, a higiene, etc.

Em sociedades mais ricas, por exemplo, o consumo alimentar não é uma grande preocupação e o debate sobre a pobreza é feito em outras dimensões do consumo, como acesso à saúde, educação, etc. Para Vaz e Soares (2008, p. 3), portanto,

[...] a despeito do conceito e sua operacionalização teórica serem ambos claros e precisos, quando se parte para o cálculo das linhas de pobreza e extrema pobreza, há tantas decisões arbitrárias a serem tomadas que coloca em dúvida o grau de objetividade das linhas de pobreza assim obtidas [...] Já que o método calórico não é, de fato, absoluto, por que não ir direto a uma definição de pobreza ancorada nas próprias normas culturais?

A abordagem subjetiva baseia-se na teoria desenvolvida por Van Praag (1968) e Kapteyn (1977), cujo resultado mais proeminente é o trabalho de Hagenars (1986), *The Perception of Poverty*. O seu objetivo consiste em definir uma linha de pobreza que não é *a priori* nem absoluta nem relativa. O ponto de partida consiste na percepção da pobreza tal como é vista pelos membros de uma sociedade. Mais especificamente, assume-se que os *indivíduos* – e não um pesquisador – são as pessoas mais capacitadas para julgar a sua situação.

Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar os principais modelos desenvolvidos dentro da abordagem subjetiva da pobreza e estimar escalas de equivalências a partir dessas metodologias.

## 6.2 MODELOS

### 6.2.1 Método de Leyden

O método de Leyden<sup>59</sup> consistiu em uma das primeiras abordagens desenvolvidas para a mensuração de uma linha de pobreza subjetiva e foi apresentado originalmente por Goedhart *et al.* (1977). Este método utiliza uma questão específica de avaliação da renda para derivar funções de bem-estar da renda individuais (Flik; Van Praag, 1991). O principal pressuposto da abordagem de Leyden é que cada pessoa possui uma função de bem-estar da

---

<sup>59</sup> Van Praag, Spit e Van de Stadt (1982) foram os primeiros a usar esta denominação, referindo-se ao fato de que, na época em que foi escrito, todos os autores do artigo de Goedhart *et al.* (1977) estavam trabalhando em Leyden, Holanda.

renda individual que resume as suas avaliações de diferentes níveis de renda em uma escala numérica limitada. A abordagem assume um conceito de utilidade cardinal, onde cada resposta da pergunta de avaliação da renda representa um nível específico na função de bem-estar da renda individual.

### 6.2.1.1 Questão de avaliação da renda e a função de bem-estar individual da renda

O ponto de partida do método consiste na chamada *questão de avaliação da renda*, elaborada por Van Praag (1971). Ela consiste em perguntar ao entrevistado aquilo que ele consideraria uma renda “boa”, “muito boa”, “suficiente”, “ruim”, etc para uma família que fosse igual à do entrevistado. A questão é formulada aproximadamente da seguinte forma:

Quadro 6.1 - Questão de Avaliação da Renda

<p>Indique aquilo que você considera ser uma renda apropriada para o seu domicílio em cada um dos seguintes casos. Levando em conta a situação de minha família, eu consideraria uma renda de</p> <p>R\$ _____ muito boa</p> <p>R\$ _____ boa</p> <p>R\$ _____ suficiente</p> <p>R\$ _____ insuficiente</p> <p>R\$ _____ ruim</p> <p>R\$ _____ muito ruim</p>
---

Cada resposta desta questão para a família  $i$  é denominada por  $z_{ik}$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Assim, no exemplo do Quadro 6.1 acima,  $z_{i1}$  é a renda que a família  $i$  consideraria muito boa,  $z_{i2}$  boa,  $z_{i3}$  suficiente e assim por diante, até  $K = 6$ . Naturalmente, o número de questões não precisa ser seis como no exemplo, podendo ser maior ou menor. Na análise que segue, vamos assumir que existem  $K$  categorias.

O passo seguinte é transformar as descrições verbais como “bom”, “suficiente” e “ruim” em uma escala numérica entre zero e um que reflita o bem-estar que o indivíduo

atribui a estas descrições. A função resultante é chamada na literatura *de função de bem-estar da renda* (Praag, Van, 1971).

Para se estimar esta função, assume-se que uma família avalia a sua despesa de consumo ou a sua renda disponível  $y_i$  por uma função de utilidade cardinal indireta  $U(y_i)$  que pode ser normalizada de forma a satisfazer  $U(0) = 0$  e  $U(\infty) = 1$  (Praag, Van, 1968, cf. 1971; Praag, Van; Kapteyn, 1973). Em seguida, assume-se que as descrições verbais “boa renda”, “renda suficiente”, etc correspondem a valores fixos  $U_{i1} > U_{i2} > \dots > U_{iK}$  e equidistantes no intervalo  $[0,1]$ . A justificativa para este pressuposto é que, ao responder a questão de avaliação da renda, os entrevistados procuram maximizar o conteúdo informacional dado por suas respostas (Kapteyn, 1977). Um pressuposto mais forte adotado é que os indivíduos atribuem os *mesmos* valores de bem-estar  $U_{i1}, \dots, U_{iK}$  às respostas verbais  $1, \dots, K$  da pesquisa. Goedhart *et al.* (1977) sugerem a identificação da descrição  $k$  com os pontos  $U(z_{ik}) = (K + 1 - k)/(K + 1)$  da função de utilidade, com  $k = 1, \dots, K$ .<sup>60</sup> Como existem  $K$  respostas, pode-se ajustar uma curva contínua através dos pontos  $[z_{ik}, U(z_{ik})]_{k=1}^K$ . Dessa forma, obtemos os parâmetros da função de bem-estar da renda.

Van Praag (1991), Antonides *et al.* (1980) e Buyze (1982) fizeram experimentos para verificar se as descrições verbais estão associadas a intervalos iguais em uma escala numérica. Em um dos experimentos de Van Praag (1991), por exemplo, o autor apresentava cinco descrições verbais de bem-estar e pedia aos respondentes que traduzissem estas descrições em uma escala entre zero e 100 (cem). Em outro experimento, pedia para os entrevistados associarem as descrições verbais a segmentos de linhas com tamanhos variáveis. As respostas foram então reescaladas para o intervalo  $[0,1]$ . Os resultados encontrados pelo autor mostram que as escalas numéricas reportadas não são exatamente equidistantes, porém também não são dramaticamente diferentes. A maior parte dos intervalos obtidos por esses

---

<sup>60</sup> A identificação dos níveis de respostas com os pontos da função de utilidade da renda varia um pouco entre os autores pesquisados, mas todos assumem que as respostas são equidistantes na função de utilidade (Kapteyn, 1977; Praag, Van, 1971).

autores manteve-se dentro do nível de significância esperado. Conclusões similares foram obtidas também por Antonides *et al.* (1980) e Buyze (1982). Os resultados apresentados sugerem que as descrições verbais dos níveis de bem-estar são entendidas da mesma forma por diferentes entrevistados.

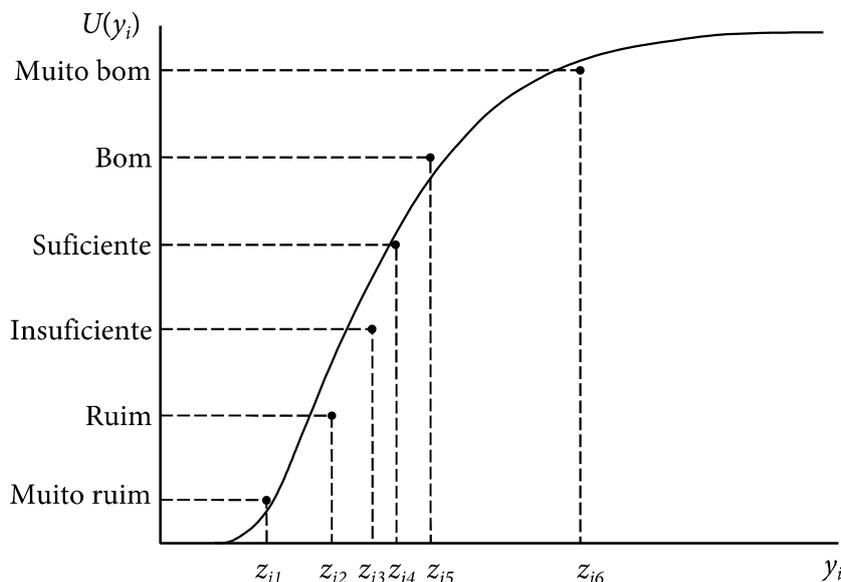
Van Praag (1968) argumenta que a função de bem-estar individual da renda pode ser representada por uma função de distribuição acumulada lognormal, com parâmetros individuais  $\mu_i$  e  $\sigma_i$ . A função lognormal foi escolhida por se ajustar bem às respostas dos entrevistados, por possuir domínio positivo nos números reais (tal como se espera das informações de rendas ou despesas) e por ser limitada no intervalo  $[0,1]$ . Na prática, pode-se utilizar qualquer outra função que possua as mesmas propriedades como, por exemplo, a função Weibull. Testes empíricos realizados por Van Herwaarden e Kapteyn (1979) mostram que a função lognormal foi uma das que melhor se ajustou aos dados em comparação a um conjunto vasto de alternativas. O ajuste da função lognormal só não foi melhor que aquele obtido pela função logarítmica, que não é limitada.

A Figura 6.1 mostra uma função de bem-estar individual da renda com seis níveis de respostas. Pode-se observar que a função é crescente com a renda, porém ela não é côncava em todo o domínio. Para níveis de renda mais baixos, a função é convexa, o que significa que um indivíduo possui propensão ao risco quando a sua renda é baixa, mas age de forma avessa ao risco quando a sua renda atinge determinado patamar<sup>61</sup>.

---

<sup>61</sup> Friedman e Savage (1948) advogam a favor do uso dessa função no contexto da escolha sob risco.

Figura 6.1 - Respostas da questão de avaliação da renda e a função de utilidade da renda individual



Fonte: Kapteyn, Geer e Stadt (1985).

As descrições verbais “muito bom”, “bom”, etc estão associadas com o ponto médio de seis intervalos iguais que particionam o intervalo  $[0,1]$ . Assim, a escala verbal “muito ruim”, “ruim”, etc são transformadas em uma escala numérica  $1/7$ ,  $2/7$ , ...,  $6/7$ . Dado este procedimento, pode-se ajustar uma curva contínua através dos seis pontos. A função lognormal, denominada função de bem-estar individual da renda, descreve a relação entre os níveis de renda (no eixo horizontal) e os níveis de bem-estar (no eixo vertical).

Mantendo-se o pressuposto de que  $U(y_i)$  é representada pela função lognormal, a função de bem-estar individual da renda de cada indivíduo  $i$  é dada por

$$U(y_i) = \Lambda(y_i, \mu_i, \sigma_i) = \Phi\left(\frac{\ln y_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad (6.1)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  corresponde à função de distribuição acumulada normal padrão. Os parâmetros  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  podem ser estimados da forma usual (por máxima verossimilhança) a partir das respostas da questão de avaliação da renda

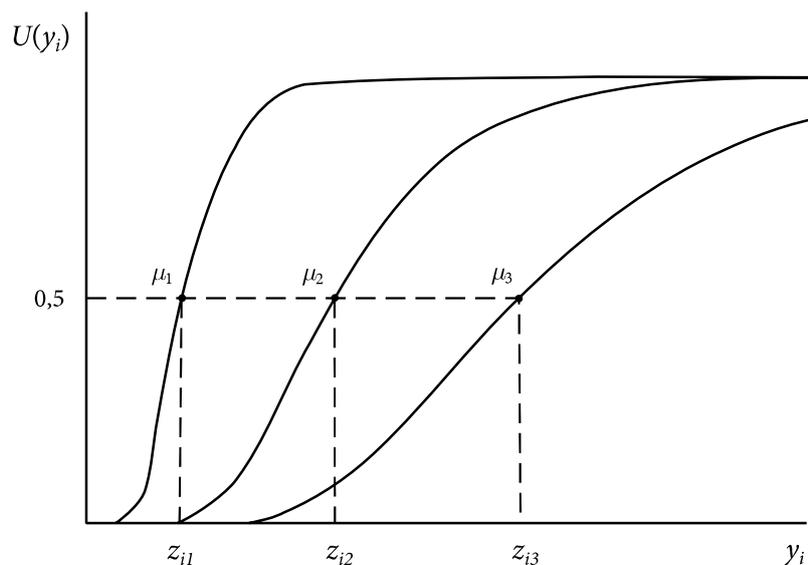
$$\mu_i = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \ln z_{ik} \quad (6.2)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\ln z_{ik} - \mu_i)^2 \quad (6.3)$$

Note que apesar de  $\mu_i$  ser calculado a partir dos valores de renda de cada um dos níveis de satisfação da questão de avaliação da renda, ele não corresponde a uma medida monetária; sua função é apenas servir como parâmetro da função de utilidade. Para se obter uma medida monetária, é necessário antes fixar um nível de utilidade ou de bem-estar para em seguida inverter a função (6.1). O valor  $e^{\mu_i}$ , por exemplo, consiste no nível de renda associado à utilidade 0,5.<sup>62</sup> Esse ponto será retomado adiante.

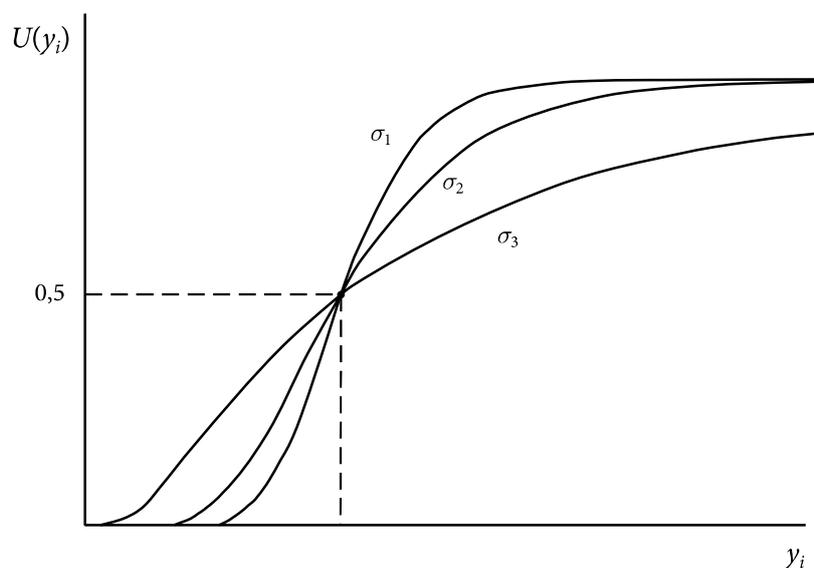
Goedhart *et al.* (1977) elaboram interpretações psicológicas para os parâmetros (6.2) e (6.3). Segundo estes autores,  $\mu$  pode ser considerado como um parâmetro de necessidade. Se o indivíduo *A* possui  $\mu$  maior (e conseqüentemente  $e^{\mu}$  maior) que o indivíduo *B*, então *A* necessita de mais renda para alcançar certo nível de avaliação da renda do que *B* (Figura 6.2). O parâmetro  $\sigma$ , por outro lado, pode ser interpretado como uma medida de sensibilidade psicológica das necessidades das famílias a mudanças no bem-estar. Ele determina a inclinação da função lognormal em torno da mediana (Figura 6.3).

Figura 6.2 - Função de utilidade da renda para vários valores de  $\mu$



Fonte: Goedhart *et al.* (1977).

<sup>62</sup> Isto decorre do fato de que a mediana da distribuição lognormal é dada por  $e^{\mu}$ .

Figura 6.3 - Função de utilidade da renda para vários valores de  $\sigma$ 

Fonte: Goedhart *et al.* (1977).

Se  $\mu_i$  pode ser interpretado como um parâmetro de necessidade, é de se esperar que ele dependa de algumas características do domicílio. Afinal, famílias maiores possuem em geral necessidades maiores do que famílias menores. Pode-se estabelecer esta relação através de uma equação do tipo

$$\mu_i = \alpha + \beta \ln y_i + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig}/n_i) + \varepsilon_i \quad (6.4)$$

onde  $\varepsilon_i$  é um erro aleatório,  $y_i$  é a despesa de consumo ou a renda disponível do domicílio,  $n_i$  é o número total de membros do domicílio e  $n_{ig}$  é o número de membros em cada categoria demográfica  $g = 1, \dots, G$ . Os coeficientes  $\gamma_g$  representam o efeito de uma mudança na composição demográfica (por exemplo, substituindo uma criança por um idoso), mantendo-se constante a renda domiciliar e o tamanho do domicílio. Pode-se incluir na equação (6.4) termos adicionais para se incorporar um conjunto remanescente de características do domicílio (por exemplo, características da pessoa de referência e localização geográfica do domicílio). Dadas as informações de cada domicílio, os parâmetros da equação (6.4) podem ser obtidos por Mínimos Quadrados Ordinários (cf. Seção 6.4.3)

### 6.2.1.2 Determinação da linha de pobreza

De posse da função de utilidade da renda de cada família, o próximo passo consiste em definir quais famílias devem ser consideradas pobres.

Em qualquer definição absoluta de pobreza, uma família é considerada pobre se o nível de bem-estar obtido com a sua renda (ou com o seu consumo) é menor do que um patamar  $\bar{u}$  considerado um “mínimo social”. A definição é vaga por natureza, e a determinação daquilo que se considera “mínimo social” varia com os métodos que buscam estabelecer uma linha de pobreza absoluta. O valor de  $\bar{u}$  pode ser definido a partir do ponto no qual as necessidades nutricionais dos indivíduos são satisfeitas, como é o caso das linhas de pobreza nutricionais normalmente utilizadas, ou pode ser definido arbitrariamente por um indivíduo ou por uma escolha social. Em qualquer um dos casos, no entanto, a escolha deste mínimo social está sujeita aos julgamentos normativos dos indivíduos que definem o seu valor, e não pode ser afirmada com base em critérios positivos.

Assim, no método de Leyden, deve-se estabelecer um nível de *bem-estar*, e não de renda, abaixo do qual um indivíduo pode ser considerado pobre. Estabelecer uma linha de pobreza equivale a escolher um ponto na escala de bem-estar tal que todo mundo com um nível de bem-estar abaixo daquele ponto é considerado pobre e todo mundo com um nível de bem-estar acima daquele ponto é considerado não-pobre. Qual nível de bem-estar que irá estabelecer a linha entre pobres e não-pobres é quase sempre uma decisão política.

Suponha que se decida que o nível de bem-estar que delimita a pobreza seja dado por  $\bar{u}$ . Então um indivíduo será considerado pobre se a condição abaixo for verdadeira

$$U(y_i) \leq \bar{u} \quad (6.5)$$

Dada a especificação lognormal, temos

$$\Phi \left( \frac{\ln y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \leq \bar{u} \quad (6.6)$$

Invertendo esta função, obtemos o valor da renda que equivale ao nível de bem-estar  $\bar{u}$ , ao qual denominaremos de  $z_i$

$$\frac{\ln z_i - \mu_i}{\sigma_i} = \Phi^{-1}(\bar{u}) \quad (6.7)$$

A linha de pobreza individual é obtida isolando  $z_i$  em (6.7)

$$\ln z_i(\bar{u}) = \mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(\bar{u}) \quad (6.8)$$

Como a definição de pobreza depende do valor de  $\bar{u}$ , as famílias consideradas pobres são denominadas de  $\bar{u}$ -pobres e a linha de pobreza correspondente é representada por  $z_i(\bar{u})$ .

Ocorre que a linha de pobreza definida por (6.8) possui dois problemas principais. O primeiro é que utiliza os parâmetros individuais  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  que podem variar substancialmente entre famílias com características semelhantes. Em outras palavras,  $z_i(\bar{u})$  é calculado considerando apenas a opinião da família sobre os níveis de renda que ela julga serem “suficientes”, “insuficientes”, etc. Para o seu cálculo, portanto, não se incorporam a opinião de outras famílias, o que pode gerar situações nas quais duas famílias semelhantes são classificadas de forma diferente em relação à sua situação social. Portanto, deve-se eliminar a heterogeneidade presente na percepção das famílias.

Para resolver este problema, Goedhart *et al.* (1977) utilizam dois procedimentos:

1. Assumem que  $\sigma_i$  é exógeno e utilizam um valor  $\bar{\sigma}$  obtido a partir do valor médio da amostra.
2. Utilizam o valor esperado de  $\mu_i$ , ao invés do valor individual (6.4).

Com isso, a equação (6.8) se torna

$$\ln z_i(\bar{u}) = \alpha + \beta \ln y_i + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig}/n_i) + \bar{\sigma} \Phi^{-1}(\bar{u}) \quad (6.9)$$

O outro problema da linha de pobreza (6.8) é que tanto  $\mu_i$  quanto  $\sigma_i$  dependem da renda domiciliar; ou seja, a percepção das famílias daquilo que elas consideram “bom”, “ruim”, “suficiente”, etc varia com a posição ocupada por elas na distribuição de renda. Espera-se que quanto maior a renda domiciliar, maior tenderá a ser os níveis mínimos de renda que as famílias irão julgar satisfazer cada uma das classificações verbais da questão de avaliação da renda.

Aparentemente isto ocorre porque a percepção da linha de pobreza de um respondente é distorcida pelo fato de que a renda atual de sua família não é igual ao nível mínimo que delimita a situação de pobreza. Para uma família rica, a linha de pobreza estimada será relativamente alta, mas *abaixo* da sua própria renda domiciliar. Para uma família miserável, por outro lado, a linha de pobreza estimada será relativamente baixa, mas *acima* da sua própria renda domiciliar.

Esse efeito, que Van Praag (1971) chama de “flutuação das preferências” (tradução livre do inglês *preference drift*), é um fenômeno estudado na teoria da adaptação psicológica-psicofísica (cf., por exemplo, Helson, 1964) no qual as pessoas relacionam o seu julgamento a respeito do brilho de uma luz ou do volume de um som a partir de um “ponto de ancoragem”, que representa um nível ao qual elas estão acostumadas<sup>63</sup>. Se assumirmos que a questão de avaliação da renda faz parte de um experimento similar, onde o objeto que está sendo julgado pelos indivíduos são os níveis de *renda* que proporcionam determinados níveis de bem-estar, então é natural assumir que as respostas dos indivíduos são fortemente influenciadas pela sua *renda corrente*, que constitui o seu “ponto de ancoragem”. Isto significa que a avaliação do bem-estar proporcionado por um montante de renda é *relativa*, e não absoluta.

Sendo assim, existirá apenas um nível de renda  $\ln z_i^*(\bar{u})$  onde este viés de percepção não ocorre. Esse nível é representado pelos domicílios cujas linhas de pobreza estimadas são exatamente iguais à sua renda domiciliar. É este nível de renda que Goedhart *et al.* (1977) utilizam como o candidato natural para a definição da linha de pobreza subjetiva. Seu valor é encontrado através do ponto fixo da equação (6.9),

$$\ln z_i^* = \alpha + \beta \ln z_i^* + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig} / n_i) + \bar{\sigma} \Phi^{-1}(\bar{u}) \quad (6.10)$$

De onde se obtém a linha de pobreza de Leyden:

---

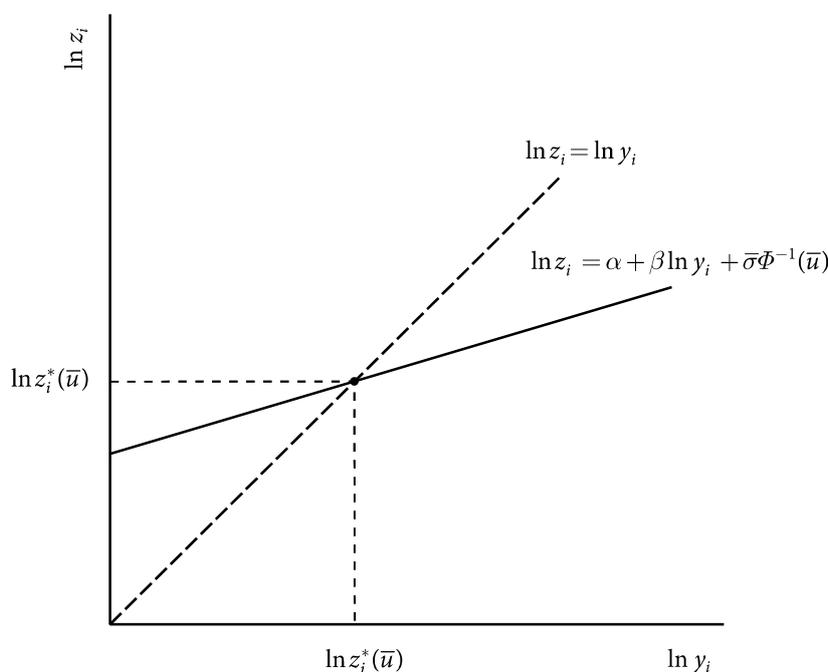
<sup>63</sup> Existe toda uma literatura desenvolvida em torno da ideia de ancoragem na área de Economia Comportamental (*Behavioral Economics*) (cf. Camerer; Loewenstein; Rabin, 2003; Kahneman; Slovic; Tversky, 1982; Rabin, 1998). Um dos pontos centrais dessa literatura é que os indivíduos avaliam uma cesta de consumo em relação a um ponto de referência ao qual eles estão acostumados (o seu *status quo*), e não em termos absolutos. Em particular, relativo ao seu ponto de referência, as pessoas têm uma aversão a perdas significativamente maior do que o benefício usufruído por um ganho de igual magnitude (Rabin, 1998).

$$\ln z_i^*(\bar{u}) = \frac{\alpha + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig}/n_i) + \bar{\sigma} \Phi^{-1}(\bar{u})}{1 - \beta} \quad (6.11)$$

Pode-se assim derivar uma linha de pobreza para cada tipo de domicílio, diferenciados por tamanho, composição geográfica, características da pessoa de referência, localização geográfica, etc.

A Figura 6.4 ilustra esta situação. Considerando-se que  $\bar{u}$  representa o valor de utilidade que delimita a pobreza, observa-se que, em média, os domicílios com  $\ln y_i$  abaixo de  $\ln z_i^*(\bar{u})$  se auto-classificarão como pobres, enquanto os domicílios com  $\ln y_i$  acima de  $\ln z_i^*(\bar{u})$  se auto-classificarão como não-pobres. Consequentemente,  $\ln z_i^*(\bar{u})$  pode ser considerado o nível de renda que delimita a pobreza e o seu valor é obtido no ponto no qual a equação (6.9) cruza a linha de 45° no gráfico. Este nível de renda corresponde à linha de pobreza do método de Leyden.

Figura 6.4 Determinação da linha de pobreza do método de Leyden



Fonte: Elaboração própria.

Pela discussão acima, fica fácil entender que não se sabe *a priori* quais pessoas possuem renda igual a  $\ln z_i^*(\bar{u})$ . Todas as pessoas são necessárias para se estimar a equação (6.9) e assim encontrar o valor de  $\ln z_i^*(\bar{u})$ .

De posse das linhas de pobreza estimadas, as escalas de equivalências subjetivas podem ser encontradas definindo-se um domicílio de referência (por exemplo, dois adultos sem crianças) e calculando-se as escalas através da razão entre a linha de pobreza de um domicílio  $i$  e a linha de pobreza do domicílio de referência  $r$ , isto é,

$$\ln z_i^*(\bar{u}) - \ln z_r^*(\bar{u}) = \frac{\eta \ln(n_i/n_r) + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{ig} \left[ (n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r) \right]}{1 - \beta} \quad (6.12)$$

De onde se obtém

$$m_i = \frac{z_i^*(\bar{u})}{z_r^*(\bar{u})} = \exp \left( \frac{\eta \ln(n_i/n_r) + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{ig} \left[ (n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r) \right]}{1 - \beta} \right) \quad (6.13)$$

$$= \left( \frac{n_i}{n_r} \right)^{\frac{\eta}{1-\beta}} \prod_{g=1}^{G-1} \exp \left( \frac{\gamma_{ig} \left[ (n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r) \right]}{1 - \beta} \right)$$

Note que a escala de equivalência definida por (6.13) não depende do nível de utilidade  $\bar{u}$  escolhido. Isso é uma consequência de se utilizar a função lognormal para representar o bem-estar individual da renda  $U(y_i)$  e do pressuposto de que  $\sigma_i$  é exógeno e igual para todos os domicílios.

Portanto, se o domicílio de referência for aquele composto por dois adultos, a linha de pobreza de referência será:

$$\ln z_r^*(\bar{u}) = \frac{\alpha + \eta \ln 2 + \bar{\sigma} \Phi^{-1}(\bar{u})}{1 - \beta} \quad (6.14)$$

E dada a linha de pobreza de um domicílio composto por dois adultos e mais um membro na categoria  $g$ ,

$$\ln z_i^*(\bar{u}) = \frac{\alpha + \eta \ln 3 + \gamma_g (1/3) + \bar{\sigma} \Phi^{-1}(\bar{u})}{1 - \beta} \quad (6.15)$$

A escala de equivalência é obtida dividindo-se (6.15) por (6.14):

$$m_i = \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{\eta}{1-\beta}} \exp \left( \frac{\gamma_g(1/3)}{1-\beta} \right) \quad (6.16)$$

A escala de equivalência assim obtida representa a razão das rendas necessárias para que a família de comparação  $i$  usufrua o mesmo nível de bem-estar que a família de referência  $r$ .

Comparando esse método direto de determinação das escalas de equivalência com o método indireto baseado em preferência revelada, fica evidente a menor necessidade de dados do primeiro. Ao invés de uma extensa lista com o valor das despesas e os tipos de bens adquiridos pelo domicílio, são necessárias apenas as funções de bem-estar da renda dos indivíduos obtidas a partir da questão da avaliação da renda.

### 6.2.1.3 Trabalhos empíricos

Diversos estudos mostram que as escalas de equivalência estimadas pelo método de Leyden são excessivamente “planas”, isto é, o aumento nas escalas de equivalência quando se acrescenta um membro no domicílio é muito pequeno quando comparado com outras metodologias (cf. Goedhart *et al.* (1977), Kapteyn, Van de Geer e Van de Stadt (1985), Colasanto, Kapteyn e Van der Gaag (1984)). Isto significa que as economias de escala estimadas pelo método de Leyden são praticamente absolutas.

Goedhart *et al.* (1977) elaboram uma explicação para este fato. Os autores argumentam, dentre outras coisas, que este resultado pode ocorrer porque as preferências dentro do domicílio se modificam de tal forma com o aumento no número de membros que as necessidades materiais não crescem na mesma proporção. Por exemplo, um casal sem filhos pode estar acostumado com um estilo de vida que inclui altos gastos com viagens de lazer. No entanto, com a presença de uma criança, suas preferências podem se modificar, fazendo com que o casal prefira passar os momentos de lazer em casa, proporcionando uma diminuição nas suas necessidades de recursos. Os gastos economizados com lazer seriam então utilizados para compensar os gastos adicionais associados com a criança, de forma que a família daria a sua

renda a mesma avaliação que tinha antes<sup>64</sup>. Na opinião dos autores, efeitos substituição deste tipo não são capturados adequadamente nos métodos alternativos de estimação das escalas de equivalência. O problema é que é questionável o quão importante pode ser este efeito compensação, já que as escalas de equivalências subjetivas estimadas na literatura são bastante insensíveis ao tamanho do domicílio.

#### 6.2.1.4 Discussão

O método de Leyden está sujeito a uma série de críticas (cf. Bradbury, 1989; Hartog, 1988; Pradhan; Ravallion, 2000; Ravallion; Lokshin, 2001; Seidl, 1994; Watts, 1985). A principal crítica recai sobre a utilização de uma função de utilidade cardinal indireta limitada entre zero e um para se mensurar o bem-estar dos domicílios. Outras críticas questionam se os entrevistados associam o mesmo nível de bem-estar aos enunciados verbais feitos pela questão de avaliação da renda, se os entrevistados utilizam o mesmo conceito de renda para responder a questão, se a função de utilidade pode ser representada por uma função de distribuição acumulada lognormal e se as regressões utilizadas para estimar os parâmetros proporcionam de fato estimativas não-viesadas. A primeira crítica é dirigida à *formulação teórica* da abordagem proposta por Goedhart *et al.* (1977). As demais críticas referem-se à forma de *mensuração* do método de Leyden.

A crítica à utilização de uma função de utilidade cardinal advém do fato de que, na teoria econômica tradicional, assume-se uma função de utilidade ordinal para modelar o comportamento do consumidor. Ou seja, não é possível saber se a utilidade  $U_2$  é  *muito* maior que  $U_1$ ; podemos saber apenas que  $U_2 > U_1$ . Harsanyi (1977) define uma função de utilidade cardinal como funções de utilidade que são únicas até uma transformação afim positiva.

---

<sup>64</sup> Observe que, para que a família mantenha constante a sua avaliação do bem-estar proporcionado pela renda corrente, a opção do casal de passar os momentos de lazer em casa deve ocorrer por mudanças nas preferências, e não por um efeito substituição ocasionado por um aumento no valor do tempo decorrente da presença da criança. Caso contrário, a avaliação de bem-estar do casal teria que ser afetada negativamente, dado que parte dos recursos dispendidos no consumo de lazer estariam sendo direcionados para o consumo da criança.

Mesmo que se aceite que as preferências dos indivíduos são representadas por uma função de utilidade cardinal, resta a questão de por que ela deveria ser limitada.

Na literatura econômica, existe uma discussão antiga a respeito da possibilidade de mensuração da utilidade dos indivíduos. Segundo Von Neumann e Morgenstern (1953), Pareto não considerava a utilidade imensurável. Ele apenas apontou para o fato de que o comportamento do consumidor fornece informação insuficiente para mensurar a utilidade no sentido cardinal, e, portanto, a ideia de uma função de utilidade cardinal era dispensável para a formação da teoria do consumidor. De acordo com esta visão, o conhecimento da função de utilidade ordinal e suas respectivas curvas de nível (isto é, as curvas de indiferença) é tudo o que se precisa para explicar o comportamento do consumidor. Foi a partir de Robbins (1937) que se difundiu com mais intensidade no meio acadêmico a ideia de que a utilidade não era mensurável. Para Kapteyn e Wansbeek (1982), como não existe nenhuma evidência empírica convincente contra o conceito de utilidade cardinal e como os economistas são frequentemente confrontados com situações onde apenas um conceito de utilidade cardinal pode descrever as escolhas dos indivíduos, a adoção do pressuposto de cardinalidade das preferências não constitui um problema apenas do método de Leyden.

Van Praag e Frijters (2003) apresentam alguns exemplos de situações onde a utilidade ordinal não é suficiente para descrever as escolhas dos indivíduos. Segundo os autores, decisões feitas sob *incerteza* ou que precisam ser feitas em diferentes *períodos* de tempo (tais como decisões de investimento e poupança) necessitam de algo mais do que a simples ordinalidade das preferências. Em tais modelos, as funções de utilidade são normalmente simplificadas em uma forma aditiva e, como tal, não são ordinais, pois as preferências representadas por elas não são invariantes a qualquer transformação monotônica afim positiva.

Assumindo que a utilidade pode ser mensurada em uma escala cardinal, a questão que surge é *como* ela pode ser mensurada. Van Praag e Van der Sar (1988) argumentam que, na abordagem tradicional, assume-se que as despesas capturam o conceito de utilidade não-observado; a abordagem de Leyden, por outro lado, assume que as descrições verbais

apresentadas ao entrevistado capturam os níveis de bem-estar. Na conclusão dos autores, portanto, ambas as abordagens assumem pressupostos não testáveis, de forma que a escolha entre uma e outra abordagem é uma decisão subjetiva.

Quanto à questão de se os entrevistados atribuem os mesmos níveis de utilidade ao enunciado da questão de avaliação da renda, Van Praag e Frijters (2003) argumentam que esta é uma questão linguística. Segundo os autores, a ideia básica da linguagem é que palavras usadas frequentemente possuem o mesmo significado e conotação emocional para os membros de uma comunidade. Ela é a principal ferramenta de comunicação entre as pessoas. Assim, devemos assumir que descrições verbais como “boa”, “ruim”, etc significam aproximadamente a mesma coisa para todos os respondentes. Conforme citado na Seção 6.2.1.1, trabalhos empíricos realizados por alguns autores sugerem que este pressuposto é verdadeiro.

Kapteyn e Wansbeek (1985) defendem o uso de uma função de utilidade limitada argumentando que se a utilidade não for limitada, poderia existir algo como um “êxtase infinito”. Para os autores, é difícil imaginar o que um êxtase infinito significa, ou como uma pessoa poderia expressar sentimentos de “êxtase infinito”. Para eles, palavras como “magnífico” ou “esplêndido” expressam que um indivíduo não pode imaginar o que poderia ser mais prazeroso a respeito de certo aspecto da vida, indicando que os sentimentos dos indivíduos são limitados em certo sentido.

Apesar da defesa enfática que fazem da abordagem subjetiva em geral e do método de Leyden em particular, algumas críticas do método de Leyden não obtiveram respostas de seus defensores. Estas críticas são apresentadas a seguir.

Pradhan e Ravallion (2000) criticam a forma de mensurar a linha de pobreza na abordagem subjetiva tradicional (método de Leyden e método de Renda Mínima, apresentado na Seção 6.2.3), argumentando que a linha de pobreza destes métodos tem sido estimada assumindo-se que a renda calculada pela pesquisa domiciliar é o conceito de “renda” que os entrevistados têm em mente ao responder a questão da renda mínima. Segundo os autores, as rendas estimadas nas pesquisas são tipicamente baseadas no conceito econômico do consumo

máximo possível de ser obtido sem que a riqueza corrente do domicílio comece a se exaurir. No entanto, diferentes domicílios podem possuir diferentes conceitos de renda, os quais não necessariamente correspondem ao conceito utilizado na questão subjetiva (Pradhan; Ravallion, 2000). Alguns entrevistados podem incluir apenas as rendas monetárias recebidas, excluindo o aluguel imputado advindo da habitação própria ou o consumo não monetário. Outros podem excluir alguns custos de produção, o que levaria a uma superestimação da renda disponível do domicílio<sup>65</sup>. Some-se a isto o fato de que renda não é um conceito bem definido na maioria dos países em desenvolvimento, principalmente nas áreas rurais, onde uma parcela importante da população sobrevive da produção não-monetária obtida para o próprio consumo.

Uma última crítica ao método é feita por Watts (1985) e por Hartog (1988). Segundo estes autores, a questão de avaliação da renda é respondida apenas por uma pessoa do domicílio – geralmente a pessoa de referência – e permanece a questão de se esta pessoa pode representar as preferências de todos os membros do domicílio. Toda a análise é baseada na renda domiciliar da forma como ela é percebida por membros individuais do domicílio. Mas nada garante que dois membros do domicílio irão dar as mesmas respostas para a questão. Para Hartog (1988), portanto, existe uma falta de tratamento sistemático do domicílio como uma composição particular de indivíduos.

### **6.2.2 Versão ordinal do método de Leyden**

Conforme visto acima, uma das principais críticas ao método de Leyden está na utilização de uma função de utilidade cardinal da renda. Em parte como resposta a estas críticas, Van Praag e Van der Sar (1988) desenvolveram uma modificação no método de Leyden com o intuito de abdicar do pressuposto de que as respostas da questão de avaliação da renda representam pontos em uma escala cardinal de bem-estar. A modificação proposta

---

<sup>65</sup> Caso, por exemplo, dos gastos com fertilizantes para famílias de pequenos produtores rurais.

pelos autores consiste em reinterpretar as respostas da questão de avaliação da renda como dados oriundos de uma função custo domiciliar ordinal

$$z_{ik} = c_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i, y_i) \quad k = 1, \dots, K \quad (6.17)$$

Esta função custo, denominada pelos autores de “virtual”, possui um papel similar à função custo  $c(u, \mathbf{p}, \mathbf{z}_i)$  utilizada na abordagem das escalas de equivalências derivadas da teoria do consumidor, onde  $u$  representa o nível de utilidade ordinal,  $\mathbf{p}$  representa o vetor de preços e  $\mathbf{z}_i$  representa o vetor de características demográficas do domicílio. A diferença entre estas duas funções é que: *a)*  $c_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i, y_i)$  depende do nível de renda  $y_i$  do domicílio que está sendo entrevistado por causa do “viés de percepção” do domicílio discutido anteriormente; e *b)* o nível de utilidade  $u$  não entra como uma variável da função, mas está representado na própria função  $c_k(\cdot)$ , dado que agora a percepção de que uma renda é “boa”, “muito boa”, etc representa um nível ordinal de utilidade  $k = 1, \dots, K$ .

O verdadeiro custo domiciliar  $z_{ik}^*$  necessário para que um domicílio de características demográficas  $\mathbf{z}_i$  atinja um nível de utilidade  $k$  é encontrado através do ponto fixo

$$z_{ik}^* = c_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i, z_{ik}^*) \quad k = 1, \dots, K \quad (6.18)$$

A solução de (6.18),  $z_{ik}^* = \hat{c}_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i)$ , representa a “verdadeira” função de custo domiciliar. Determinada esta função, a escala de equivalência de um domicílio  $i$  em relação a um domicílio de comparação  $r$  no nível de utilidade  $k$  pode ser calculada da forma tradicional

$$m_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i) = \frac{\hat{c}_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i)}{\hat{c}_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_r)} \quad (6.19)$$

Observe que para se estimar a função (6.17) de maneira a posteriormente determinar  $z_{ik}^* = \hat{c}_k(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i)$ , o método ainda precisa do pressuposto de que os enunciados verbais da questão de avaliação de renda possuem o mesmo significado em termos de bem-estar para todos os domicílios. No entanto, o cálculo da escala de equivalência (6.19) é feito sem recorrer a uma função de utilidade cardinal da renda e sem a adoção do pressuposto de que os enunciados verbais “boa renda”, “renda suficiente”, etc representam valores equidistantes em uma escala de bem-estar.

Suponha que a função custo (6.17) de um domicílio  $i$  seja dada por:

$$\ln z_{ik} = \alpha_k + \beta_k \ln y_i + \eta_k \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{kg} (n_{ig}/n_i) + \varepsilon_{ik} \quad (6.20)$$

onde os preços foram omitidos por serem fixos em pesquisas *cross section*. Observe que para cada descrição verbal  $k$  temos uma função diferente, com parâmetros que dependem de  $k$ .

A partir de (6.20), a função custo é

$$\ln z_{ik}^* = \frac{\alpha_k + \eta_k \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{kg} (n_{ig}/n_i)}{1 - \beta_k} \quad (6.21)$$

Dessa forma, a escala de equivalência é

$$\begin{aligned} m_k(z_i) &= \frac{z_i^*}{z_r^*} = \exp \left( \frac{\eta_k \ln(n_i/n_r) + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{kg} [(n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r)]}{1 - \beta_k} \right) \\ &= \left( \frac{n_i}{n_r} \right)^{\frac{\eta_k}{1 - \beta_k}} \prod_{g=1}^{G-1} \exp \left( \frac{\gamma_{kg} [(n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r)]}{1 - \beta_k} \right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Estas escalas de equivalência são similares às escalas subjetivas discutidas anteriormente, exceto que não são mais independentes do nível de bem-estar de referência. Isto pode ser observado pela dependência de  $m_k(\cdot)$  ao índice  $k$ . Nota-se assim que sem o pressuposto de cardinalidade, a maior parte dos resultados obtidos com o método de Leyden tradicional permanece válida, exceto que agora não é possível fazer comparações que envolvam *diferentes* níveis de bem-estar.

### 6.2.3 Método da Renda Mínima

Além de apresentar o método de Leyden, Goedhart *et al.* (1977) apresentaram outra forma para se calcular a linha de pobreza subjetiva. Este método alternativo ficou conhecido na literatura como “método da linha de pobreza subjetiva” (Kapteyn; van de Geer; van de Stadt, 1985). Esta denominação é um pouco infeliz, pois todos os métodos apresentados neste capítulo procuram estimar uma linha de pobreza a partir de questões subjetivas. Logo, para

não haver confusão, adotaremos a denominação *Método da Renda Mínima*, numa alusão à fonte de informação necessária para se obter as estimativas.

O ponto de partida é a chamada *questão da renda mínima*. Esta questão pode ser vista como uma versão simplificada da questão de avaliação da renda utilizada pelo método de Leyden. Ao invés de perguntar ao entrevistado sobre a renda que ele atribui a cada um dos níveis de bem-estar elencados, a questão da renda mínima pergunta *apenas um* valor de renda que corresponde a um nível específico de bem-estar no qual se assume delimitar a fronteira entre pobres e não-pobres. Esta questão é feita aproximadamente da seguinte forma:

Quadro 6.2 - Exemplo da Questão da Renda Mínima

Levando em conta a situação de minha família, eu considero uma renda de R\$ \_\_\_\_\_ o mínimo necessário para cobrir as despesas com manutenção.

Um pressuposto básico para o cálculo da linha de pobreza é que cada respondente atribui um mesmo significado ao que considera “o mínimo necessário” para a manutenção da família e também ao que está embutido em “manutenção”.

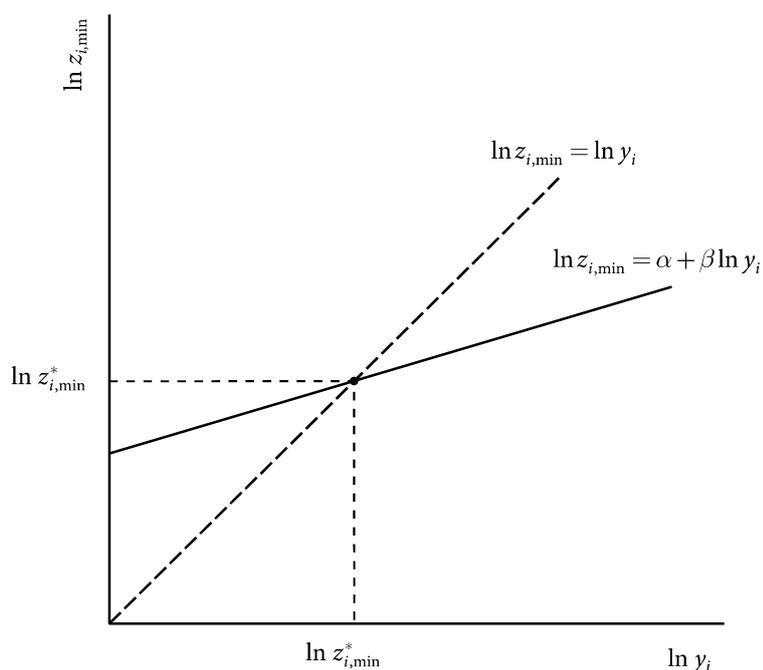
Denote a resposta do indivíduo  $i$  por  $z_{i,\min}$ . Uma família poderia ser considerada pobre se a sua renda domiciliar fosse menor que o valor mínimo de renda atribuído por ela. No entanto, isto geraria situações nas quais famílias semelhantes seriam classificadas de forma diferente em relação à sua situação de pobreza. Assim como no método de Leyden, portanto, deve-se estabelecer uma linha de pobreza que dependa das características das famílias, mas que abstraia as diferenças idiossincráticas de percepção destas famílias. Isto pode ser feito estimando-se o modelo

$$\ln z_{i,\min} = \alpha + \beta \ln y_i + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig}/n_i) + \varepsilon_i \quad (6.23)$$

e calculando-se o valor da linha de pobreza através do valor esperado de  $\ln z_{i,\min}$  obtido em (6.23).

O problema é que (6.23) também depende da renda domiciliar  $y_i$ , em geral positivamente. Ou seja, quanto maior a renda de um domicílio, maior tende a ser a linha de pobreza que ele julga ser o valor mínimo necessário para o seu domicílio. Isto se deve ao viés de percepção da pobreza presente nas famílias que não se situam exatamente na fronteira entre pobreza e não-pobreza. Em geral, famílias muito pobres irão responder valores  $z_{i,\min}$  baixos, porém acima de sua renda domiciliar. Por outro lado, famílias muito ricas irão responder valores  $z_{i,\min}$  altos, porém abaixo de sua renda domiciliar. Existirá portanto apenas um nível  $z_{i,\min}$  de renda domiciliar no qual o viés de percepção não estará presente. Ele corresponde ao nível de renda das famílias que se situam exatamente na fronteira entre a pobreza e a não-pobreza. Este nível de renda, denotado por  $z_{i,\min}^*$ , equivale à linha de pobreza do Método da Renda Mínima. A Figura 6.5 ilustra esta situação.

Figura 6.5 - Método da Renda Mínima



Fonte: Kapteyn, Geer e Stadt (1985).

A linha de pobreza subjetiva é simplesmente a interseção das curvas definidas pelas equações:

$$\ln z_{i,\min} = \ln y_i \quad (6.24)$$

$$\ln z_{i,\min} = \alpha + \beta \ln y_i + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig}/n_i) \quad (6.25)$$

De onde se obtém

$$\ln z_{i,\min}^* = \frac{\alpha + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig}/n_i)}{1-\beta} \quad (6.26)$$

Assim, o Método da Renda Mínima define como pobreza a situação na qual a renda de uma família não é suficiente para atender as suas necessidades.

A semelhança do método da Renda Mínima com o de Leyden é evidente. No método de Leyden, escolhe-se um nível de bem-estar que delimita a pobreza e a partir daí deriva-se as linhas de pobreza. No método da Renda Mínima, este nível mínimo de bem-estar é determinado pela percepção dos entrevistados a respeito daquilo que eles consideram o “absolutamente mínimo”. O método de Leyden, no entanto, exige um parâmetro a mais, o que implica também um julgamento de valor a mais (Vaz e Soares, 2008). Por outro lado, o método de Leyden utiliza mais informação que o método da Renda Mínima, o que lhe permite obter maior robustez nos resultados.

A partir da equação (6.26), uma linha de pobreza pode ser estabelecida para cada tipo de domicílio. Elegendo um determinado tipo de domicílio de referência  $r$ , a escala de equivalência de um domicílio  $i$  é obtida pela razão das linhas de pobreza

$$\ln z_{i,\min}^* - \ln z_{r,\min}^* = \frac{\eta \ln(n_i/n_r) + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{ig} [(n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r)]}{1-\beta} \quad (6.27)$$

De onde se obtém

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{z_{i,\min}^*}{z_{r,\min}^*} = \exp \left( \frac{\eta \ln(n_i/n_r) + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_{ig} [(n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r)]}{1-\beta} \right) \\ &= \left( \frac{n_i}{n_r} \right)^{\frac{\eta}{1-\beta}} \prod_{g=1}^{G-1} \exp \left( \frac{\gamma_{ij} [(n_{ig}/n_i) - (n_{rg}/n_r)]}{1-\beta} \right) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Note que as equações (6.28) e (6.13) são idênticas. Em particular, elas mostram que as escalas de equivalência não dependem do nível de utilidade do domicílio de referência. Ou

seja, apesar de o método de Leyden e da Renda Mínima obterem estimativas diferentes para as linhas de pobreza, do ponto de vista teórico as estimativas obtidas para as escalas de equivalência devem ser semelhantes.

Ao comparar ambos os métodos, Flick e Van Praag (1991) argumentam que a linha de pobreza de Leyden é teoricamente superior à linha de pobreza da Renda Mínima, pois esta última, além de estar mais exposta a flutuações aleatórias nas respostas dos entrevistados, é mais sensível às diferentes interpretações a respeito do que se constitui o mínimo absoluto. Para os autores, é de se esperar que, ao responder a questão de avaliação da renda, o entrevistado calibre melhor suas respostas, já que elas devem ser consistentes com o ordenamento das descrições de bem-estar estabelecido na questão. Além disso, Flick e Van Praag argumentam que a linha de pobreza de Leyden é preferível do ponto de vista político, uma vez que ela torna explícitos os julgamentos de valor feitos para se determinar a pobreza, materializados a partir da escolha de um nível específico de utilidade  $\bar{u}$  a partir do qual um indivíduo é considerado pobre.

#### 6.2.4 Método de Antuérpia

Um desenvolvimento paralelo para se estimar linhas de pobreza subjetivas foi realizado por Deleeck (1985) e Deleeck e Van den Bosh (1990) no Centre for Social Policy da Universidade de Antuérpia, Bélgica.

A ideia subjacente é identificar quem vive próximo da linha da pobreza e perguntar apenas para estas pessoas qual é a linha de pobreza que elas consideram adequada. A linha de pobreza resultante seria dada pela média simples das respostas dadas pelos entrevistados. O pressuposto utilizado é que aqueles que vivem à margem da pobreza sabem identificar melhor onde fica a fronteira entre a pobreza e a não-pobreza. Para Soares (2009, p. 39), tentar identificar uma linha de pobreza desconhecida a partir de indivíduos selecionados pela condição de estarem próximos da linha de pobreza é um procedimento notadamente circular. Deleeck procura resolver este problema de circularidade utilizando como filtro a percepção dos entrevistados a respeito do grau de dificuldade que eles julgam viver com a sua renda

domiciliar disponível. Para tanto, os autores combinam a questão da renda mínima apresentada anteriormente com outra questão bastante similar à questão de avaliação da renda, que denominaremos de *questão de satisfação da renda*. Ela é feita aproximadamente assim:

Quadro 6.3 - Exemplo da Questão de Satisfação da Renda

<p>Em sua opinião, a renda de sua família permite que vocês levem a vida até o fim do mês com:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Muita dificuldade</li> <li>2. Dificuldade</li> <li>3. Alguma dificuldade</li> <li>4. Alguma facilidade</li> <li>5. Facilidade</li> <li>6. Muita facilidade</li> </ol>
--

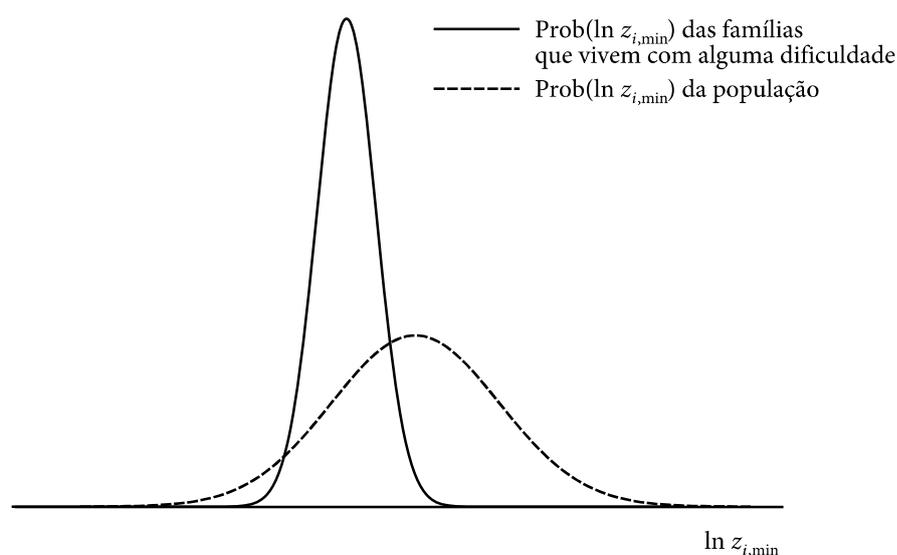
O respondente tem que marcar apenas uma categoria, aquela que ele julga ser a mais correta. Deleek então elimina da amostra todos os entrevistados que não responderam a categoria “alguma dificuldade”. Em outras palavras, selecionam-se apenas as famílias que se auto-identificam como próximas da linha da pobreza. Para cada uma das famílias desta subamostra, ele calcula o menor valor entre a renda do domicílio e a renda mínima respondida pelo domicílio na questão da renda mínima. A linha de pobreza consiste simplesmente em calcular a média dos valores obtidos para cada tipo de domicílio. Isto pode ser feito por meio de estatísticas descritivas ou por meio do valor esperado de uma regressão estimada apenas na subamostra que respondeu levar a vida com “alguma dificuldade”

$$\ln z_{i,\min} = \alpha + \eta \ln n_i + \sum_{g=1}^{G-1} \gamma_g (n_{ig}/n_i) + \varepsilon_i \quad (6.29)$$

Como as pessoas próximas à linha de pobreza já foram selecionadas de antemão, assume-se que não há “viés de percepção” na resposta dos entrevistados, isto é, assume-se que os valores reportados não dependem da renda domiciliar de quem responde a entrevista. Assim, não é necessário aplicar nenhum procedimento posterior como ocorre no método de Leyden e no método da Renda Mínima.

A lógica deste método encontra-se na Figura 6.6 abaixo (cf. Soares, 2009). A curva representada pela linha pontilhada representa a densidade de probabilidade das rendas mínimas  $z_{i,\min}$  reportadas por todas as famílias. A curva sólida, por outro lado, representa a densidade de probabilidade de  $z_{i,\min}$  apenas das famílias que julgam levar a vida com “alguma dificuldade”. De acordo com os pressupostos do método, o estimador da linha de pobreza das pessoas que julgam levar a vida com “alguma dificuldade” deve possuir variância significativamente menor e uma média diferente daquelas obtidas por todas as famílias. Espera-se que isso ocorra porque como estas famílias possuem maior conhecimento sobre a fronteira que delimita a pobreza, as suas estimativas devem ser convergentes, diferentemente daquelas obtidas por todas as famílias da população.

Figura 6.6 - Método de Antuérpia



Fonte: Adaptado de Soares (2009).

O método de Antuérpia não encontrou muito respaldo na literatura, e são poucos os trabalhos empíricos que procuram estimá-lo. Talvez isto decorra do fato de que o método utiliza basicamente a mesma fonte de informação do método da Renda Mínima, mas a partir de uma abordagem menos sofisticada. Flick e Van Praag (1991) são dos poucos autores que discutem esta abordagem criticamente. Segundo os autores, mesmo que se admita que um domicílio com renda significativamente superior à da linha de pobreza tenha em geral uma

noção distorcida a respeito do que constitui viver com “alguma dificuldade”, não é um procedimento democrático descartar a opinião das pessoas mais ricas (e tampouco a opinião das pessoas mais pobres) do conjunto de informação. Afinal, segundo os autores, a norma social do que constitui um padrão mínimo de bem-estar é determinada por toda a população, e não apenas pelas pessoas que vivem à margem da pobreza.

### 6.2.5 Método de Pradhan e Ravallion

Pradhan e Ravallion (2000) desenvolveram uma metodologia para estimar uma linha de pobreza subjetiva baseada apenas em uma questão qualitativa, denominada de *questão de adequação do consumo*. O principal objetivo dos autores foi desenvolver e implementar um modelo de percepção nas necessidades de consumo que permita identificar uma linha de pobreza subjetiva sem utilizar a questão da renda mínima. O argumento utilizado é que questões qualitativas são mais promissoras do que a questão da renda mínima para mensurar o bem-estar do domicílio, em função do menor erro de medida associado à primeira. Um dos problemas presente na questão da renda mínima, por exemplo, é que cada entrevistado possui um conceito de renda diferente, e este não corresponde necessariamente à definição de renda utilizada na pesquisa de orçamento familiar (cf. Seção 6.2.1.4).

A questão de adequação do consumo consiste em uma pergunta do tipo:

#### Quadro 6.4 - Exemplo da Questão de Adequação do Consumo

Considerando o consumo de alimentos de sua família no mês anterior, qual alternativa a seguir é verdadeira?

1. Ele foi menos que adequado para as necessidades de minha família
2. Ele foi exatamente adequado para as necessidades da minha família
3. Ele foi mais do que adequado para as necessidades da minha família

Questões similares podem ser feitas para vestuário, habitação, saúde, educação das crianças, etc. Para cada um destes itens, atribuímos um índice  $k = 1, \dots, K$ .

Observe que a questão de adequação do consumo inverte a lógica utilizada pelo método de Leyden. Ao invés de tentar atribuir um valor de utilidade para cada nível de renda respondido pelo entrevistado, procura-se capturar um nível de utilidade que corresponda à situação de pobreza e então estimar a renda que represente este nível. A vantagem da questão utilizada por Pradhan e Ravallion é que os entrevistados têm que responder somente sobre a sua própria situação, e não sobre uma situação hipotética como ocorre no método de Leyden.

Seja  $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{iK})$  o vetor do consumo efetivo do domicílio para cada um dos  $K$  bens captados pela pergunta de adequação do consumo e  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iG})$  um vetor de características do domicílio. Podemos expressar a percepção do domicílio  $i$  sobre o consumo mínimo do bem  $k$  necessário para se atingir uma situação de adequação por

$$z_{ik} = g_k(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i) + \eta_{ik} \quad k = 1, \dots, K \quad (6.30)$$

onde  $\eta_{ik}$  é um termo de erro aleatório independente e identicamente distribuído entre os  $k$  bens. Note que  $z_{ik}$  não é observado; o que observamos é apenas se o consumo do domicílio com o bem  $k$  é superior ou inferior a este valor, conforme as respostas dadas pelo domicílio à questão de avaliação da renda. Em outras palavras,  $z_{ik}$  corresponde a uma variável latente.

Assuma que  $g_k(\cdot)$  é uma função contínua, definida em um conjunto convexo e fechado, e limitada superior e inferiormente, sendo que o limite inferior é positivo quando o consumo efetivo do bem tende a zero. Então as equações

$$z_{ik} = g_k(z_{i1}, \dots, z_{iK}, \mathbf{x}_i) \quad k = 1, \dots, K \quad (6.31)$$

possuem uma solução<sup>66</sup>, não necessariamente única,

$$z_k^*(\mathbf{x}_i) = (z_1^*(\mathbf{x}_i), \dots, z_K^*(\mathbf{x}_i)) \quad k = 1, \dots, K \quad (6.32)$$

Esta solução corresponde ao gasto no bem  $k$  para o qual, condicional em  $\mathbf{x}_i$ , os valores mínimos adequados para o bem  $k$  são atendidos na média.

Pradhan e Ravallion (2000) definem a linha de pobreza como o nível de gasto no qual os valores mínimos subjetivos de cada um dos  $k$  bens são atingidos na média. Um domicílio é

---

<sup>66</sup> Teorema do ponto fixo de Brouwer.

considerado pobre se, e somente, se o seu gasto total é menor do que a linha de pobreza subjetiva definida para um domicílio com as suas características.

Assim, a linha de pobreza satisfaz

$$z(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^K z_k^*(\mathbf{x}_i) \quad (6.33)$$

A ideia da linha de pobreza (6.33) definida pelos autores é similar àquela adotada pelas outras metodologias subjetivas discutidas anteriormente. Ou seja, assume-se que os domicílios possuem um “viés” de percepção a respeito dos valores mínimos necessários para a adequação do consumo, mas que este viés é corrigido se tomarmos como grupo de referência o domicílio cuja despesa com os bens analisados seja exatamente igual aos valores que ele julga serem os mínimos adequados. Este passo é feito com a escolha do ponto fixo (6.32). A inovação da metodologia de Pradhan e Ravallion (2000) é que agora o grupo de referência não é escolhido apenas por uma única medida (a renda ou a despesa domiciliar), mas por um conjunto  $K$  de medidas independentes (o gasto com cada um dos bens) que são agrupadas para definir uma linha de pobreza única. Esta característica faz com que a linha de pobreza obtida por este método seja mais robusta a erros de medida e a diferenças de percepção dos entrevistados.

Para se calcular a linha de pobreza, é preciso assumir uma forma funcional para  $g_k(\cdot)$ . Assuma que  $z_{ik}$  possua uma distribuição lognormal e que  $g_k(\cdot)$  seja linear nos parâmetros. Então (6.30) pode ser reescrita como

$$\ln z_{ik} = \beta'_k [\ln \mathbf{y}_i] + \alpha'_k \mathbf{x}_i + \varepsilon_{ik} \quad k = 1, \dots, K \quad (6.34)$$

onde  $\varepsilon_{ik} \sim N(0, \sigma_k^2)$  e  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  são vetores de parâmetros. Transformando (6.34) em notação matricial, temos

$$\ln \mathbf{z}_i = \mathbf{B}[\ln \mathbf{y}_i] + \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (6.35)$$

$$\text{onde } \ln \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \ln z_{i1} \\ \vdots \\ \ln z_{iK} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{K1} & \cdots & \beta_{KK} \end{bmatrix}, \quad \text{e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{K1} & \cdots & \alpha_{KG} \end{bmatrix}$$

Se os valores  $z_{ik}$  fossem observados, as equações (6.34) poderiam ser estimadas diretamente e a solução (6.32) obtida a partir de

$$\ln z_i^* = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}_i) \quad (6.36)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. De posse desta solução, bastaria utilizar (6.33) para se calcular a linha de pobreza subjetiva através da soma de todos os valores mínimos necessários para se atingir a adequação do consumo ( $\ln z_{ik}^*$ ). No entanto, como os valores  $z_{ik}$  não são observados diretamente, o valor da linha de pobreza tem que ser obtido por outro meio.

Neste ponto Pradhan e Ravallion (2000) mostram que, apesar de não observarmos  $z_{ik}$  diretamente, é possível observar as respostas da questão de adequação do consumo. Se o domicílio responde que o consumo do bem  $k$  foi menos que adequado para as necessidades da família, então  $y_{ik} < z_{ik}$ . Da mesma forma, se o domicílio responde que o consumo do bem  $k$  foi mais do que adequado para as necessidades da família, então  $y_{ik} > z_{ik}$ . Utilizando a especificação (6.34), isto significa que a probabilidade do domicílio responder que o consumo efetivo do bem  $k$  foi adequado para as suas necessidades, é dada por

$$\begin{aligned} \text{Prob}[y_{ik} \geq z_{ik}] &= \text{Prob}\left[\frac{\varepsilon_{ik}}{\sigma_k} \leq \frac{\ln y_{ik} - \beta'_k[\ln \mathbf{y}_i] - \alpha'_k \mathbf{x}_i}{\sigma_k}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\ln y_{ik} - \beta'_k[\ln \mathbf{y}_i] - \alpha'_k \mathbf{x}_i}{\sigma_k}\right) \end{aligned} \quad (6.37)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  equivale à função de distribuição acumulada normal padrão.

A equação (6.37) representa um modelo Probit e sua estimação poderia ser feita por máxima verossimilhança utilizando como variável dependente apenas as respostas da questão de avaliação do consumo. Assim como em qualquer modelo Probit, no entanto, os parâmetros das variáveis latentes (6.34) não são identificados separadamente; o que identificamos são apenas os parâmetros normalizados pelo desvio padrão dos erros  $\sigma_k$ . No modelo Probit tradicional, costuma-se adotar a hipótese de identificação  $\sigma_k = 1$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Neste caso, no entanto, isto não é possível, pois o termo  $\ln y_{ik}$  não aparece na equação (6.37) associado a nenhum coeficiente, mas está sendo dividido por  $\sigma_k$ . Isto significa que utilizando apenas as

respostas da questão de adequação do consumo não é possível identificar os parâmetros que determinam os julgamentos de bem-estar dos indivíduos sobre as necessidades mínimas de cada bem.

Pradhan e Ravallion (2000) mostram, no entanto, que apesar de não podermos identificar os parâmetros de (6.37) separadamente, ainda assim podemos identificar os parâmetros da linha de pobreza subjetiva. Para entender o motivo, considere o caso especial em que temos apenas um bem, com  $\ln z_i = \alpha + \beta \ln y_i + \varepsilon_i$ . O valor da linha de pobreza é encontrado resolvendo  $\ln z_i = \alpha + \beta \ln z_i$ , ou seja,  $\ln z_i^* = \alpha/(1-\beta)$ . A probabilidade de o entrevistado responder que o seu consumo atual deste bem é adequado é dada por  $\Phi([(1-\beta)/\sigma] \ln y_i - \alpha/\sigma)$ , o que nos permite identificar apenas  $(1-\beta)/\sigma$  e  $\alpha/\sigma$ , mas não cada um dos parâmetros separadamente. Entretanto, isto não nos impede de estimar  $\alpha/(1-\beta)$ , que corresponde justamente à linha de pobreza.

Pradhan e Ravallion (2000) mostram que este raciocínio se estende para o caso geral com mais de um bem (equação (6.34)). Para tanto, defina a matriz  $\mathbf{C}_\sigma$  obtida a partir da multiplicação da matriz  $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$  pela matriz cujas colunas são formadas por  $(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_K^{-1})$ . Defina também a matriz  $\mathbf{A}_\sigma$  dessa mesma forma. Fazendo isto, podemos rescrever a equação (6.36) em termos dos parâmetros identificados pelo modelo Probit

$$\ln z_i^* = \mathbf{C}_\sigma^{-1}(\mathbf{A}_\sigma \mathbf{x}_i) \quad (6.38)$$

A equação (6.38) mostra que é possível encontrar uma linha de pobreza subjetiva sem que se utilize a questão da renda mínima, contanto que existam dados qualitativos a respeito da percepção das famílias sobre se o seu consumo corrente é adequado para as suas necessidades. Para tanto, basta estimar um modelo Probit para cada bem  $k$ , empregar a equação (6.38) sobre os parâmetros observados para se encontrar os valores mínimos necessários para se atingir a adequação do consumo  $\ln z_{ik}^*$  e estimar o valor da linha de pobreza através de (6.33).

## **6.3 BASE DE DADOS E VARIÁVEIS**

Para se estimar as escalas de equivalência subjetivas, é necessário que existam dados oriundos de perguntas subjetivas sobre pobreza. Tais perguntas existem em pelo menos duas pesquisas domiciliares feitas no Brasil nos últimos anos: a Pesquisa sobre Padrões de Vida (PPV) de 1996-1997 e a Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) de 2002-2003. Uma descrição destas pesquisas encontra-se no Apêndice A.

### **6.3.1 As perguntas subjetivas na Pesquisa sobre Padrões de Vida**

A Pesquisa sobre Padrões de Vida contou com um bloco de perguntas subjetivas bastante extenso. Estas perguntas são reproduzidas a seguir.

## Quadro 6.5 - Perguntas subjetivas na PPV

15.1. Na sua opinião, qual seria a menor renda mensal que uma família de 4 pessoas (casal e dois filhos) precisaria para sobreviver? R\$ \_\_\_\_\_

15.2. Considerando a sua família, qual seria a menor renda mensal necessária para cobrir gastos com alimentação? R\$ \_\_\_\_\_

15.3. Em relação a sua família, qual seria a menor renda mensal suficiente para cobrir todas as despesas com a sua manutenção? R\$ \_\_\_\_\_

15.4. Na sua opinião, a renda total de sua família permite que vocês levem a vida com:

1. Dificuldade
2. Um pouco de dificuldade
3. Facilidade.

Levando em conta a situação atual de sua família, qual a renda mensal que você consideraria:

15.5. Boa R\$ \_\_\_\_\_

15.6. Suficiente R\$ \_\_\_\_\_

15.7. Insuficiente R\$ \_\_\_\_\_

15.8. Ruim R\$ \_\_\_\_\_

15.9 Como avalia as condições de vida dos moradores deste domicílio em relação à alimentação

1. Muito boa
2. Boa
3. Regular
4. Ruim
5. Muito ruim

Fonte: Questionário da Pesquisa sobre Padrões de Vida.

A questão 15.9 mostrada acima é feita não só para alimentação, mas também para educação/escolaridade, saúde/assistência médica, habitação/saneamento, segurança pública, lazer/diversão, vestuário/roupa, emprego/trabalho e transporte. Além destas questões, a PPV perguntou também aos moradores o grau de importância que eles atribuiriam a estes itens se eles pudessem melhorar suas condições de vida.

Note que as perguntas da PPV são quase as mesmas necessárias para aplicar os métodos descritos na seção anterior. As questões 15.2 e 15.3 permitem aplicar o método da Renda Mínima para a alimentação e para a renda total do domicílio. Aliadas a elas, a questão

15.4 permite a aplicação do método de Antuérpia. As questões 15.5 a 15.8 permitem a aplicação do método de Leyden com quatro categorias. Fica faltando apenas o método de Pradhan e Ravallion, que não tem um correspondente similar na PPV.

Um problema das questões subjetivas da PPV é que não fica claro qual o conceito de renda a que ela se refere. A julgar pela falta de referências no enunciado da questão e pela tradição brasileira em pesquisas domiciliares, a renda que a pesquisa se refere é a *renda bruta* do domicílio, isto é, a renda sem a dedução de impostos ou de contribuições previdenciárias. Fica em aberto, no entanto, se esta renda é apenas monetária ou se deveriam estar incluídos também rendimentos não-monetários provenientes de doações de produtos, de trocas diretas, do aluguel imputado da habitação própria, da produção para o próprio consumo e das retiradas de produtos do próprio negócio dos pequenos comerciantes e conta-próprias. Se considerarmos apenas a compreensão que o entrevistado tem sobre o enunciado das questões, é de se esperar que esta seja uma renda monetária, já que a maioria das pessoas não considera como renda tais despesas não monetárias.

Infelizmente, as informações da PPV têm como limitação a própria pesquisa na qual estavam inseridas. A PPV é uma pesquisa com amostragem pequena (4.940 domicílios) e com dados mais defasados que os da POF 2002-2003.

### **6.3.2 As perguntas subjetivas na Pesquisa de Orçamentos Familiares**

As perguntas subjetivas da POF 2002-2003 que são do interesse do objeto de estudo deste capítulo são as seguintes:

Quadro 6.6 - Perguntas subjetivas na POF 2002-2003

<p>61.01. Na sua opinião a renda total de sua família permite que você(s) leve(m) a vida até o fim do mês com:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Muita dificuldade</li> <li>2. Dificuldade</li> <li>3. Alguma dificuldade</li> <li>4. Alguma facilidade</li> <li>5. Facilidade</li> <li>6. Muita facilidade</li> </ol> <p>61.02. Levando em conta a situação atual de sua família, qual seria a renda mensal mínima necessária para chegar até o final do mês? R\$ _____</p> <p>61.03. Levando em conta a situação atual de sua família, qual seria o valor mínimo mensal de recursos para cobrir os gastos com alimentação? R\$ _____</p> <p>61.04. Das afirmativas a seguir, qual a melhor que descreve a quantidade de alimento consumido por sua família?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Normalmente não é suficiente</li> <li>2. Às vezes não é suficiente</li> <li>3. É sempre suficiente</li> </ol> <p>61.05. Das afirmativas a seguir, qual a melhor que descreve o tipo de alimento consumido por sua família?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Sempre do tipo que quer</li> <li>2. Nem sempre do tipo que quer</li> <li>3. Raramente do tipo que quer</li> </ol>
--

Fonte: Questionário da Pesquisa de Orçamentos Familiares, 2002-2003.

Note que as questões utilizadas na POF não são exatamente as mesmas exigidas pelos métodos de pobreza subjetiva. As questões 61.02 e 61.03 permitem utilizar o método da Renda Mínima para a renda domiciliar e para os gastos com alimentação respectivamente. A expressão “renda mensal mínima necessária para chegar até o final do mês” que consta na questão 61.02 provavelmente origina-se de uma tradução ruim da expressão inglesa *make both ends meet*, presente em alguns questionários subjetivos aplicados em outros países. Contra a pergunta 61.02, é possível argumentar que esta remete demasiadamente à renda da família em questão e pode ser interpretada como incluindo bens supérfluos e não apenas um mínimo necessário.

A questão 61.01 pode ser utilizada em conjunto com as questões 61.02 e 61.03 para se estimar o método de Antuérpia. As questões 61.04 e 61.05, além de não corresponderem exatamente às questões requeridas pelo método de Pradhan e Ravallion, apresentam dois critérios diferentes para classificar a adequação do consumo de alimentos, baseados respectivamente na quantidade e na qualidade do consumo de alimentos. Por fim, a POF não permite a utilização do método de Leyden.

O método de Pradhan e Ravallion poderia ser estimado a partir da questão 61.05. Isto, no entanto, não será feito neste capítulo, pois estimativas preliminares mostraram que os dados obtidos por esta questão são inverossímeis tanto para o valor absoluto da linha de pobreza quanto para as estimativas das escalas de equivalência. Problema parecido também foi reportado por The World Bank (2007) para a POF 2002-2003.

### **6.3.3 Variáveis**

Para se estimar os valores das linhas de pobreza subjetivas, utilizou-se um conjunto de variáveis de controle referentes às características demográficas e econômicas do domicílio, características da pessoa de referência e características da região e do trimestre em que o domicílio foi entrevistado na pesquisa (Tabela 6.1).

Tabela 6.1 - Descrição das variáveis utilizadas nos modelos

Variável	Descrição	Tipo
<i>Características demográficas e econômicas</i>		
logx	Log da renda (PPV) ou da despesa (POF) domiciliar	Contínua
logn	Log do número de moradores	Contínua
peessoas_0_4	Prop. de pessoas de 0 a 4 anos	Contínua
peessoas_5_9	Prop. de pessoas de 5 a 9 anos	Contínua
peessoas_10_14	Prop. de pessoas de 10 a 14 anos	Contínua
peessoas_15_64	Prop. de pessoas de 15 a 64 anos	Contínua
peessoas_65_mais	Prop. de pessoas de 65 anos ou mais	Contínua
cartao	Posse de cartão de crédito	Dummy
dom_proprio	Domicílio próprio	Dummy
<i>Características da pessoa de referência</i>		
sexochefe	Sexo (1=Feminino)	Dummy
cor_pele	Cor/Raça (1=Branco/Amarelo)	Dummy
conjugue	Presença de cônjuge	Dummy
idade_25_menos	Menos de 25 anos	Dummy
idade_25_34	De 25 a 34 anos	Dummy
idade_35_44	De 35 a 44 anos	Dummy
idade_45_54	De 45 a 54 anos	Dummy
idade_55_64	De 55 a 64 anos	Dummy
idade_65_mais	65 anos ou mais	Dummy
educachefe_1	Menos de 1 ano de estudo	Dummy
educachefe_2	1 a 3 anos de estudo	Dummy
educachefe_3	4 a 7 anos de estudo	Dummy
educachefe_4	8 a 10 anos de estudo	Dummy
educachefe_5	11 anos de estudo	Dummy
educachefe_6	12 anos ou mais de estudo	Dummy
<i>Características regionais e temporais</i>		
norte	Norte	Dummy
nordeste	Nordeste	Dummy
sudeste	Sudeste	Dummy
sul	Sul	Dummy
centrooeste	Centro-Oeste	Dummy
trimestre_1	1º trimestre	Dummy
trimestre_2	2º trimestre	Dummy
trimestre_3	3º trimestre	Dummy
trimestre_4	4º trimestre	Dummy

Fonte: Elaboração própria.

A Tabela 6.2 abaixo mostra o valor médio das variáveis utilizadas nos modelos, de acordo com a dificuldade de viver com a renda atual. Para efeito de comparação com os dados da PPV, as categorias da POF “muita dificuldade” e “dificuldade” foram agrupadas sob a denominação “dificuldade ou pior”. Da mesma forma, as categorias “alguma facilidade”,

“facilidade” e “muita facilidade” foram agrupadas sob a denominação “alguma facilidade ou melhor”.

Tabela 6.2 - Valor médio das variáveis utilizadas segundo a dificuldade de viver com a renda atual

Variável	Dificuldade ou pior		Alguma Dificuldade		Alguma facilidade ou melhor		Todos	
	POF	PPV	POF	PPV	POF	PPV	POF	PPV
<i>Características demográficas e econômicas</i>								
logx	6,54	6,631	6,971	7,369	7,317	8,16	6,802	7,06
logn	1,185	1,219	1,128	1,151	0,988	0,972	1,137	1,171
peessoas_0_4	0,078	0,096	0,072	0,084	0,057	0,051	0,073	0,088
peessoas_5_9	0,083	0,084	0,072	0,068	0,052	0,05	0,074	0,075
peessoas_10_14	0,088	0,097	0,071	0,077	0,057	0,046	0,078	0,084
peessoas_15_64	0,66	0,619	0,7	0,674	0,706	0,693	0,68	0,647
peessoas_65_mais	0,092	0,104	0,086	0,098	0,128	0,159	0,095	0,106
cartao	0,215		0,35		0,481		0,3	
dom_proprio	0,708	0,693	0,716	0,703	0,738	0,769	0,715	0,703
<i>Características da pessoa de referência</i>								
sexochefe	0,3	0,26	0,229	0,195	0,204	0,212	0,261	0,229
cor_pele	0,46	0,492	0,591	0,653	0,703	0,842	0,54	0,587
conjuge	0,67	0,667	0,732	0,734	0,706	0,705	0,697	0,698
idade_25_menos	0,049	0,056	0,059	0,054	0,056	0,082	0,053	0,057
idade_25_34	0,196	0,208	0,242	0,218	0,22	0,175	0,215	0,21
idade_35_44	0,254	0,236	0,271	0,255	0,246	0,18	0,259	0,239
idade_45_54	0,214	0,182	0,185	0,186	0,173	0,236	0,198	0,188
idade_55_64	0,142	0,154	0,12	0,137	0,142	0,117	0,135	0,144
idade_65_mais	0,144	0,163	0,124	0,149	0,164	0,21	0,14	0,161
educachefe_1	0,19	0,333	0,095	0,141	0,067	0,068	0,139	0,232
educachefe_2	0,24	0,186	0,163	0,156	0,129	0,106	0,197	0,167
educachefe_3	0,313	0,293	0,301	0,337	0,253	0,242	0,3	0,307
educachefe_4	0,118	0,092	0,157	0,115	0,137	0,095	0,134	0,102
educachefe_5	0,093	0,066	0,176	0,155	0,196	0,198	0,137	0,113
educachefe_6	0,045	0,03	0,109	0,095	0,218	0,291	0,092	0,078
<i>Características regionais e temporais</i>								
norte	0,067		0,063		0,048		0,063	
nordeste	0,323	0,467	0,177	0,251	0,146	0,134	0,247	0,351
sudeste	0,419	0,533	0,489	0,749	0,506	0,866	0,456	0,649
sul	0,122		0,195		0,225		0,162	
centrooeste	0,069		0,076		0,075		0,073	
trimestre_1	0,255	0,217	0,242	0,21	0,243	0,216	0,249	0,214
trimestre_2	0,252	0,251	0,225	0,242	0,222	0,272	0,238	0,249
trimestre_3	0,248	0,263	0,28	0,248	0,288	0,327	0,265	0,262
trimestre_4	0,245	0,269	0,253	0,3	0,247	0,185	0,248	0,275
Número de observações	24531	2322	14635	1766	5972	321	45138	4409

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV e da POF 2002-2003.

Os modelos foram estimados separadamente para as áreas urbanas e rurais, uma vez que os padrões de consumo destes domicílios são muito diferentes, dado o estilo de vida que levam. Todas as rendas foram trazidas para valores reais de 15 de janeiro de 2003, data de referência da POF 2002-2003. Os erros padrões das estimativas para as linhas de pobreza e para as escalas de equivalências foram obtidos por *bootstrap* com 1000 repetições (Rao; Wu; Yue, 1992 e Rao; Wu, 1988), onde em cada replicação os fatores de expansão amostrais foram recalculados para incorporar o desenho amostral da POF e da PPV (cf. Apêndice A). Para a estimação dos modelos, considerou-se apenas dos domicílios com rendas e despesas positivas, sem pensionistas, empregados domésticos ou parentes de empregados domésticos entre os moradores e que contavam com oito moradores ou menos.

Por fim, ao fazer a retransformação do valor das linhas de pobreza de  $\ln z_i^*$  para  $z_i^*$  na Seção 6.3 abaixo, utilizou-se a regra de transformação de variáveis aleatórias para se calcular

$$\hat{z}_i^* = \exp(\ln \hat{z}_i^* + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 / 2) \quad (6.39)$$

onde  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  é a variância estimada dos erros  $\varepsilon_i = y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$  estimado a partir das equações de cada modelo, e  $\ln \hat{z}_i^*$  e  $\hat{z}_i^*$  são os valores das linhas de pobreza estimadas no ponto médio da amostra. Essa transformação é aplicada assumindo-se que os erros possuem distribuição  $N(0, \sigma_\varepsilon)$ , o que não é requerido pelo método de mínimos quadrados ordinários, mas é assintoticamente satisfeito por ele.

## 6.4 RESULTADOS

### 6.4.1 Método de Antuérpia

#### 6.4.1.1 Pesquisa sobre Padrões de Vida

Nesta seção, serão apresentados primeiro os resultados obtidos a partir da Pesquisa sobre Padrões de Vida. Em seguida serão apresentados os resultados obtidos a partir da Pesquisa de Orçamentos Familiares.

Conforme mostra a Tabela 6.3, mais da metade (50,5%) dos domicílios declararam que tinham dificuldade de viver com a renda atual, enquanto apenas 8% declararam viver com facilidade. Além disso, observa-se que quanto maior a facilidade de viver com a renda atual, maior também é o valor que as famílias consideram ser o mínimo para o total das despesas ou para as despesas com alimentação. Isto mostra, portanto, que a avaliação das famílias daquilo que constitui o valor mínimo para a renda domiciliar ou para os gastos com alimentação varia com o grupo de referência selecionado. Para contornar este resultado, a metodologia de Antuérpia seleciona na amostra apenas os domicílios que responderam viver com “alguma dificuldade” na esperança de este grupo possuir um conhecimento melhor sobre a localização da fronteira da pobreza.

Tabela 6.3 - Linhas de pobreza segundo o método de Antuérpia - PPV

<i>Dificuldade de viver com a renda atual</i>	<i>Renda mínima per capita</i>	<i>Valor mínimo per capita com alimentação</i>	<i>Gasto per capita com alimentação</i>	<i>Renda per capita</i>	<i>Percentual de famílias</i>
Dificuldade	367,33	139,69	62,99	381,99	50,5%
Alguma Dificuldade	495,91	167,23	84,53	823,12	41,5%
Facilidade	953,51	242,69	122,63	2.431,23	8,0%

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Nota: Reais em valores de janeiro de 2003.

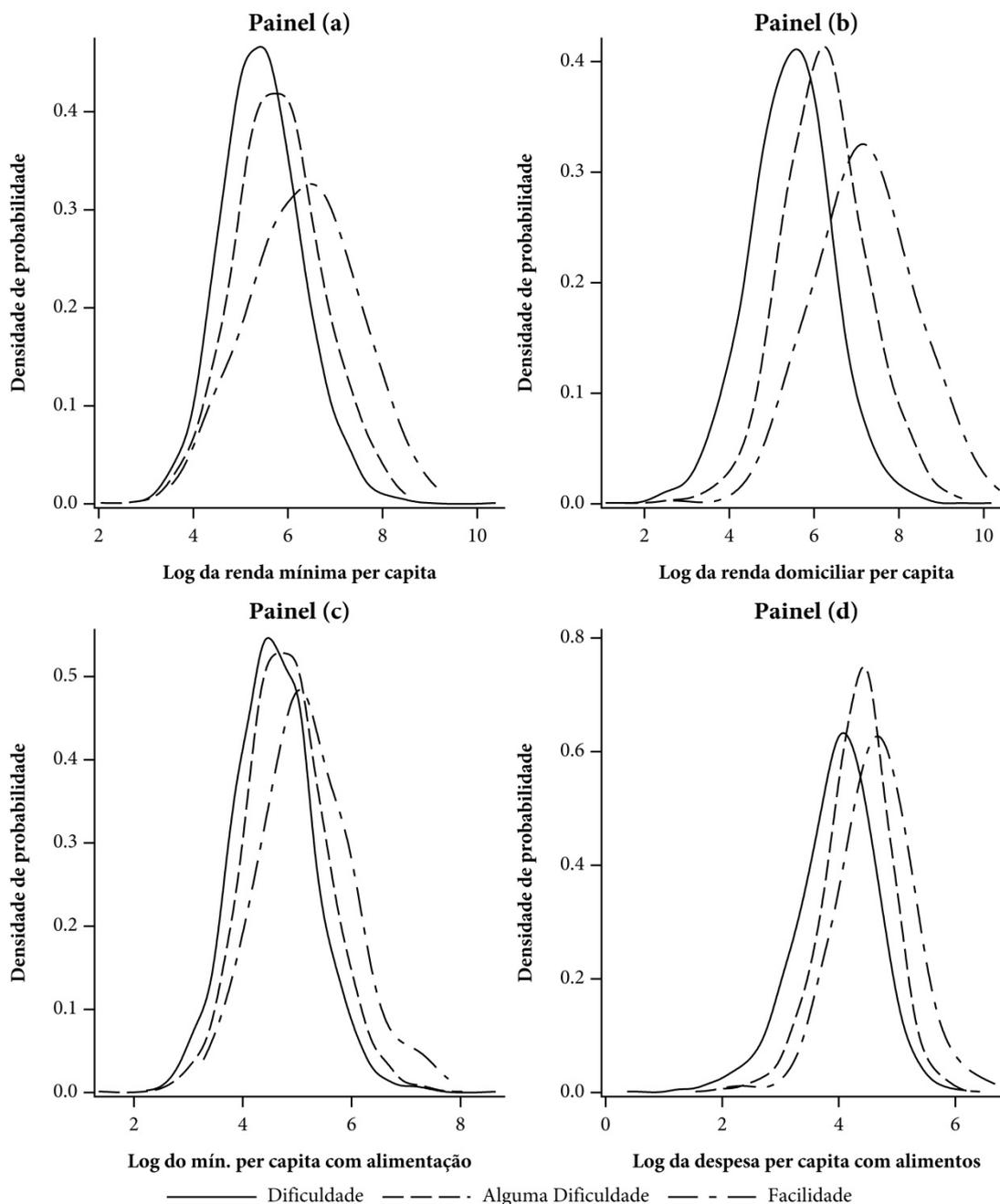
Pela Tabela 6.3, portanto, as linhas de pobreza médias *per capita* definidas a partir da renda e da alimentação seriam de R\$ 495,91 e R\$ 167,23 respectivamente. A primeira coisa a se perguntar é: o grupo de famílias que julga viver com “alguma dificuldade” corresponde de fato às famílias que estão à margem da pobreza?

Uma investigação preliminar desta resposta pode ser feita por meio da observação do Gráfico 6.1 abaixo. Este gráfico mostra as estimativas de densidade de probabilidade<sup>67</sup> do logaritmo da renda mínima e da alimentação mínima reportado pelas famílias para cada uma das categorias da questão de satisfação da renda (painéis (a) e (c) respectivamente). Além disso, para efeito de comparação, o gráfico mostra também as estimativas de densidade do

<sup>67</sup> Densidades de probabilidade estimadas pelo método de Kernel. Para maiores detalhes, cf. Härdle (1992).

logaritmo da renda domiciliar *per capita* e da despesa *per capita* com alimentação das famílias, segundo a categoria respondida na questão de satisfação da renda (painéis (b) e (d) respectivamente).

Gráfico 6.1 - Densidades de probabilidade das rendas e despesas - PPV



Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

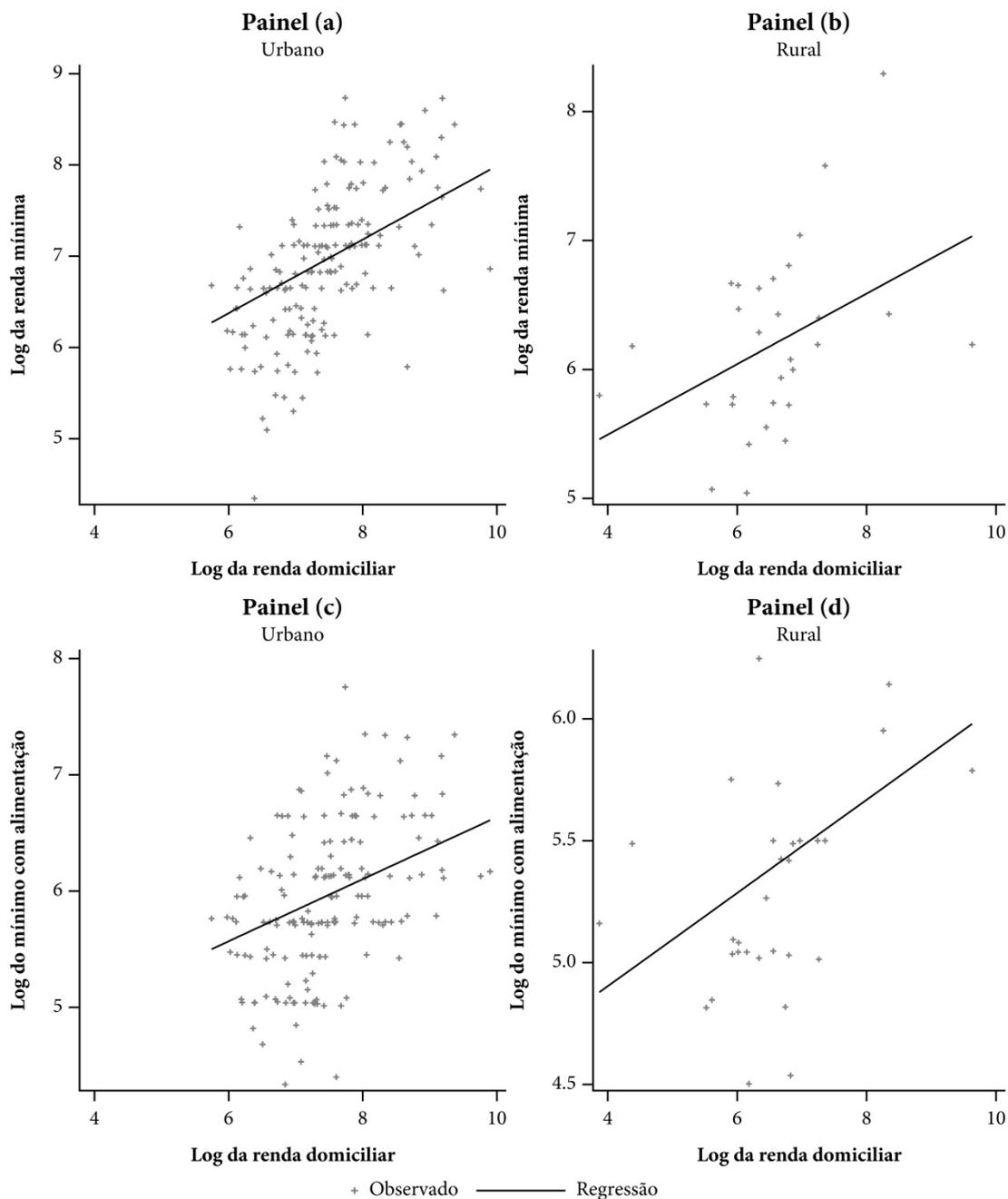
Comparando os painéis (a) e (b), observa-se que o padrão da distribuição do logaritmo da renda mínima *per capita* e do logaritmo da renda domiciliar *per capita* é muito semelhante entre os grupos: tanto a média quanto a dispersão das distribuições vão diminuindo à medida que passamos do grupo que vive com “facilidade” para o grupo que vive com “dificuldade”. O fato de que o grupo que declara viver com “dificuldade” possui uma estimativa para o valor mínimo da renda mais concentrada em torno da média significa, a princípio, que este grupo tem uma certeza maior do valor da renda domiciliar que delimita a pobreza. Este resultado vai contra as expectativas do método de Antuérpia.

Observando o painel (c) sobre os valores mínimos *per capita* com alimentação, o resultado é inconclusivo: a dispersão da distribuição é semelhante para quem vive com “dificuldade” e “alguma dificuldade”, mas as médias são menores para quem vive com “dificuldade”, o que torna o grupo de domicílios que vivem com “alguma dificuldade” um grupo de referência inadequado para delimitar a pobreza.

Outra forma de investigar se o grupo que considera viver com “alguma dificuldade” é realmente o grupo de domicílios que possui o melhor julgamento sobre a verdadeira linha de pobreza pode ser feita pela estimação da equação (6.29) para este grupo, mas incluindo como regressor adicional o logaritmo da renda domiciliar. Se o coeficiente do logaritmo da renda domiciliar for estatisticamente significativo, então os domicílios selecionados não possuem as mesmas expectativas a respeito do valor da linha de pobreza, o que os torna inadequados para a constituição do grupo de referência que irá definir a linha de pobreza.

O Gráfico 6.2 mostra o valor predito desta regressão em relação ao logaritmo da despesa domiciliar, mantendo-se as demais variáveis fixas na média de cada área (urbana ou rural). Os dados plotados são apenas os daqueles domicílios compostos por dois adultos. Os coeficientes estimados destas regressões constam no Apêndice C.

Gráfico 6.2 - Valores esperados do método de Antuérpia em relação ao log da renda domiciliar – PPV



Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Nota: Valores plotados referem-se apenas aos domicílios compostos por dois adultos.

Se o método de Antuérpia estivesse correto, seria de se esperar que o logaritmo da renda domiciliar dos domicílios que vivem com “alguma dificuldade” não influenciasse as estimativas da linha de pobreza. No entanto, os resultados não deixam dúvidas em mostrar

que, utilizando o valor mínimo da renda ou o valor mínimo com alimentação, as estimativas obtidas são positivamente relacionadas com o logaritmo da renda domiciliar<sup>68</sup>.

Isto mostra que os domicílios que declararam viver com “alguma dificuldade” não representam adequadamente as pessoas que vivem próximas da linha de pobreza, dado que a percepção sobre a linha de pobreza não é uniforme dentro deste grupo de domicílios. Em outras palavras, as estimativas obtidas por este grupo não são confiáveis para o estabelecimento de uma linha de pobreza subjetiva.

Apesar deste resultado negativo, decidiu-se prosseguir com a estimação e calcular as linhas de pobreza estimadas para esse grupo de domicílios, bem como as suas escalas de equivalências implícitas. Estes dados são mostrados na Tabela 6.4. A tabela mostra a linha de pobreza *domiciliar* (e não a linha de pobreza domiciliar *per capita*) para as áreas urbanas e rurais, considerando como medida os valores mínimos para a renda e para a alimentação. Escolheu-se o domicílio composto por dois adultos e sem crianças para servir de referência para o cálculo das escalas de equivalências.

A primeira observação a ser feita é que os valores das linhas de pobreza praticamente não variam com a composição demográfica dos domicílios. Como consequência, as escalas de equivalências estimadas são bastante “planas”, isto é, seus valores aumentam pouco com o acréscimo no número de pessoas do domicílio. Considerando os valores estimados a partir da renda mínima, por exemplo, um domicílio composto por três adultos na área urbana necessita apenas de 12,7% mais recursos para alcançar o mesmo nível de bem-estar de um domicílio composto por dois adultos. Esse valor é um pouco maior para os domicílios situados na área rural e quando a linha de pobreza é calculada em relação ao valor mínimo com alimentação, mas ainda assim é muito baixo quando comparado com outras metodologias.

---

<sup>68</sup> Todos os coeficientes do logaritmo da renda domiciliar são significantes a 1% (cf. Apêndice).

Tabela 6.4 - Linhas de pobreza e escala de equivalência pelo método de Antuérpia - PPV

Tipo de domicílio	Valor mínimo da renda				Valor mínimo com alimentação			
	Linha de pobreza		Escala de equivalência		Linha de pobreza		Escala de equivalência	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
<i>1 adulto morando...</i>								
Sozinho	1.198,35 (99,59)	507,00 (97,1)	0,816* (0,04)	0,786* (0,07)	423,26 (37,42)	221,99 (34,84)	0,861* (0,04)	0,825* (0,06)
Com criança de 0 a 4 anos	1.277,92 (138,97)	499,38 (111,1)	0,870 (0,08)	0,774 (0,19)	423,33 (41,05)	240,39 (46,23)	0,861* (0,07)	0,894 (0,16)
Com criança de 5 a 9 anos	1.271,25 (137,01)	947,92 (287,66)	0,865 (0,08)	1,469 (0,35)	468,59 (43,88)	357,95 (86,52)	0,953 (0,08)	1,331 (0,24)
Com criança de 10 a 14 anos	1.305,11 (135,08)	629,60 (135,18)	0,888 (0,08)	0,976 (0,15)	459,80 (44,86)	246,13 (37,26)	0,935 (0,08)	0,915 (0,11)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.480,16 (169,63)	721,24 (122,12)	1,007 (0,09)	1,118 (0,16)	465,43 (42,06)	297,06 (43,23)	0,946 (0,07)	1,104 (0,14)
<i>2 adultos morando...</i>								
Sozinhos	1.469,22 (75,52)	645,31 (83,87)	1	1	491,81 (25,27)	268,97 (26,13)	1	1
Com criança de 0 a 4 anos	1.508,23 (103,59)	626,36 (76,09)	1,027 (0,06)	0,971 (0,14)	485,87 (27,83)	279,22 (30,57)	0,988 (0,05)	1,038 (0,11)
Com criança de 5 a 9 anos	1.502,98 (108,12)	960,24 (192,32)	1,023 (0,06)	1,488* (0,21)	519,91 (29,42)	364,09 (55,23)	1,057 (0,06)	1,354* (0,14)
Com criança de 10 a 14 anos	1.529,55 (99,93)	730,99 (106,68)	1,041 (0,06)	1,133 (0,1)	513,39 (31,99)	283,65 (28,34)	1,044 (0,06)	1,055 (0,09)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.663,43 (149,8)	800,30 (117,61)	1,132 (0,08)	1,240 (0,15)	517,57 (37,23)	321,54 (38,71)	1,052 (0,07)	1,195 (0,13)
<i>3 adultos morando...</i>								
Sozinhos	1.655,23 (82,45)	743,10 (92,03)	1,127* (0,03)	1,152* (0,06)	536,94 (23,85)	300,93 (25,71)	1,092* (0,03)	1,119* (0,05)
Com criança de 0 a 4 anos	1.679,96 (98,23)	722,53 (69,57)	1,143* (0,06)	1,120 (0,14)	530,18 (24,49)	308,09 (25,17)	1,078 (0,05)	1,145 (0,1)
Com criança de 5 a 9 anos	1.675,57 (106,24)	995,46 (160,41)	1,14* (0,06)	1,543* (0,17)	557,80 (26,43)	375,95 (43,03)	1,134* (0,06)	1,398* (0,11)
Com criança de 10 a 14 anos	1.697,73 (96,83)	811,28 (106,94)	1,156* (0,06)	1,257* (0,11)	552,55 (29,5)	311,75 (27,87)	1,124* (0,06)	1,159 (0,1)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.808,00 (154,54)	868,32 (132,14)	1,231* (0,09)	1,346 (0,18)	555,92 (39,11)	342,48 (40,83)	1,130 (0,08)	1,273 (0,15)

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Nota: (\*) Indica valores diferentes de 1 (um) a 5% de significância. Erro-padrão das estimativas entre parênteses obtido por bootstrap com 1000 repetições. Reais em valores de janeiro de 2003.

Visto de outra forma, os valores da Tabela 6.4 mostram que uma família de dois adultos na área urbana necessita de R\$ 1.469,22, ou R\$ 734,61 *per capita*, para não ser considerada pobre, enquanto que uma família de três adultos necessita de R\$ 1.655,23 para tal. Em outras palavras, isto significa que a família com três adultos necessita de apenas R\$ 186,01 adicionais para ficar ao menos tão bem quanto a família composta por dois adultos, um valor demasiadamente baixo se considerarmos que cada adulto anteriormente necessitava de R\$ 734,61 em média. Tais valores só seriam verossímeis se os custos dos bens públicos de um domicílio (habitação, etc) correspondessem praticamente à totalidade das necessidades de recursos dos indivíduos, e que os custos dos bens privados tais como alimentação, vestuário e

higiene pessoal fossem irrisórios. Se este fosse o caso, então a diminuição da pobreza poderia ser estimulada por uma política de incentivo a habitações coletivas. Na verdade, se assumirmos que os indivíduos são racionais, tais habitações coletivas já teriam que existir como resultado do interesse dos agentes econômicos. Como elas não são observadas na prática, conclui-se então que os valores das escalas de equivalência estimadas pelo método de Antuérpia estão em conflito com a evidência empírica observada.

Uma parte da explicação para as elevadas estimativas de economias de escala poderia ser atribuída à base de dados utilizada. Não bastasse a PPV ter uma amostra pequena, o fato de o método de Antuérpia utilizar apenas as famílias que declararam viver com “alguma dificuldade” diminui bastante o tamanho amostral. De fato, as estimativas foram obtidas a partir de 1.433 famílias na área urbana e 333 famílias na área rural (Apêndice C). Como consequência, quase todos os coeficientes correspondentes à composição demográfica do domicílio são insignificantes a 5%. Isto afeta os resultados da Tabela 6.4, onde a maioria das escalas de equivalências estimadas não é significativamente diferente de 1.

Conforme apresentado na Seção 6.2.1.3, no entanto, o fato de as escalas de equivalências estimadas apresentarem uma economia de escala praticamente absoluta está em linha com os resultados empíricos obtidos pela literatura sobre pobreza subjetiva. Além disso, conforme será visto adiante, este resultado também ocorre nas estimativas obtidas a partir da Pesquisa de Orçamentos Familiares, cuja amostra é bastante significativa.

Os dados da Tabela 6.4 merecem algumas outras considerações. Observa-se que enquanto na área urbana as escalas de equivalências são semelhantes para as crianças até os 14 anos de idade, na área rural as crianças de 5 a 9 anos de idade possuem escalas de equivalências maiores que as de outras crianças. Além do mais, as escalas das crianças de 5 a 9 anos de idade na área rural são maiores também que a de um adulto adicional.

Por fim, a Tabela 6.4 mostra que enquanto nas áreas urbanas as escalas de equivalências dos idosos são menores (porém bem próximas) que as de um adulto adicional, nas áreas rurais ocorre o inverso: os idosos representam um acréscimo de necessidades maior que aquela de um adulto adicional.

### 6.4.1.2 Pesquisa de Orçamentos Familiares

Feita a análise dos dados da PPV, segue-se agora com os dados obtidos a partir da Pesquisa de Orçamentos Familiares.

A Tabela 6.5 mostra algumas estatísticas descritivas em relação a cada um dos grupos de domicílios definidos a partir da questão de satisfação da renda. A POF, ao invés de ter três categorias de respostas como se tinha na PPV, tem o dobro. Isso permite refinar melhor o grupo de domicílios que julgam viver no limiar da pobreza.

Conforme mostra a Tabela 6.5, tanto a renda mínima para se viver quanto o valor mínimo com alimentação aumentam à medida que mudamos das famílias que vivem com “muita dificuldade” para aquelas que vivem com “muita facilidade”. No caso do valor mínimo com alimentação, é interessante observar que os valores reportados são sistematicamente maiores que os próprios gastos com alimentação dos domicílios, mesmo para os domicílios que vivem com “muita facilidade” (cf. Tabela 6.3 para resultado semelhante na PPV). Os motivos para esta “superestimação” da percepção dos domicílios a respeito do valor mínimo a ser gasto com alimentação não são claros, mas é evidente que, por esta métrica, as famílias que vivem com “alguma dificuldade” *não* são as famílias que estão no limiar da pobreza.

Tabela 6.5 - Estatísticas descritivas na POF 2002-2003

<i>Dificuldade de viver com a renda atual</i>	<i>Renda mínima per capita</i>	<i>Valor mínimo per capita com alimentação</i>	<i>Gasto per capita com alimentação</i>	<i>Renda per capita</i>	<i>Despesa per capita</i>	<i>Percentual de famílias</i>
Muita Dificuldade	331,61	111,51	72,23	237,33	264,73	27,0%
Dificuldade	431,56	128,79	88,98	369,59	364,01	23,8%
Alguma Dificuldade	596,90	147,89	108,42	564,22	491,52	34,8%
Alguma Facilidade	838,49	181,14	149,05	1.049,33	768,62	8,9%
Facilidade	1.074,25	217,61	180,90	1.474,63	1.015,18	4,8%
Muita Facilidade	1.258,09	217,77	175,91	2.121,00	1.247,20	0,7%

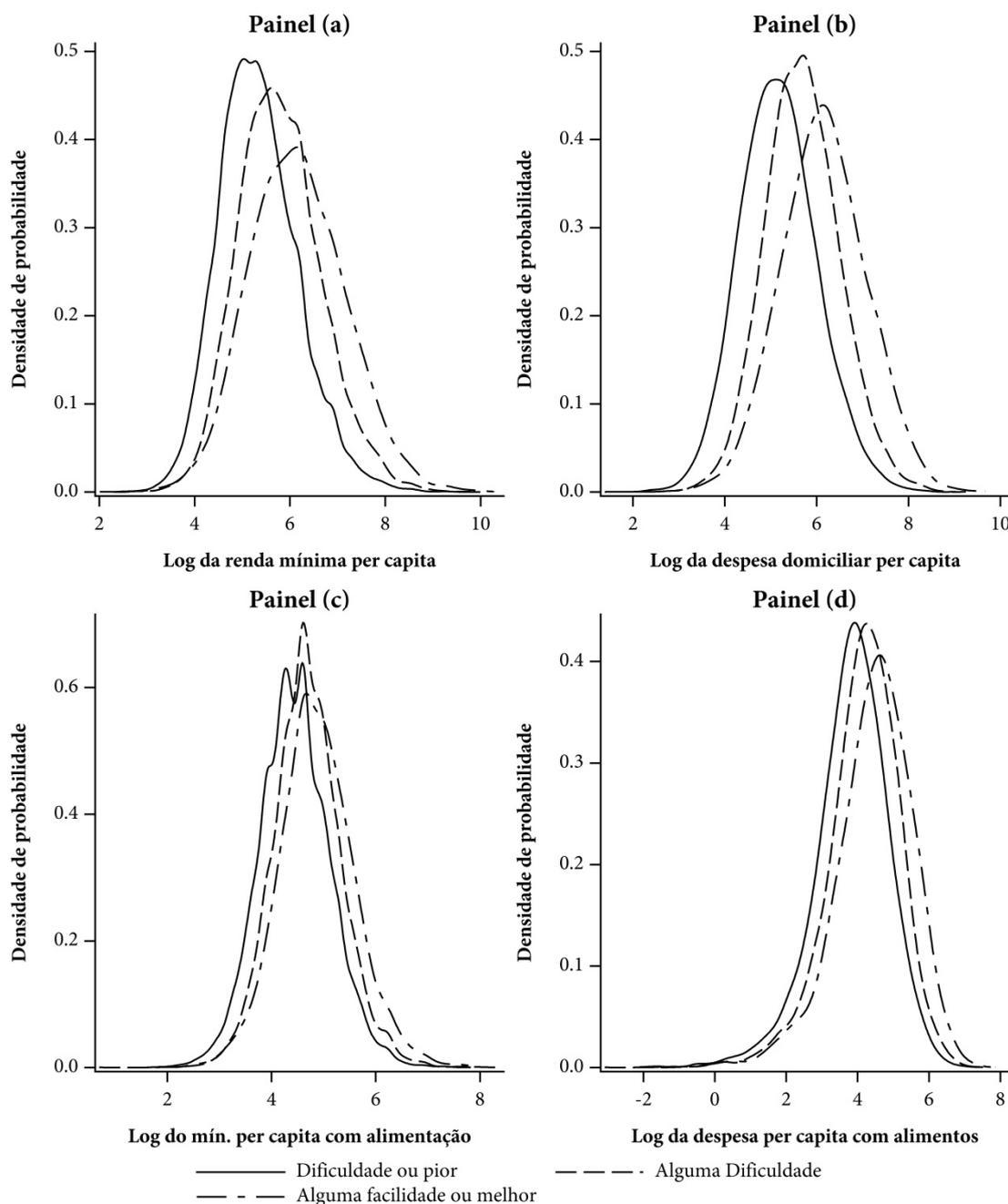
Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: Reais em valores de janeiro de 2003.

O Gráfico 6.3 mostra a densidade de probabilidade da renda mínima e do valor mínimo com alimentação das famílias segundo a sua dificuldade de viver com a renda atual. Por questões amostrais, as categorias “muita dificuldade” e “dificuldade” na POF foram

agrupadas sob a denominação “dificuldade ou pior”. Da mesma forma, as categorias “alguma facilidade”, “facilidade” e “muita facilidade” foram agrupadas sob a denominação “alguma facilidade ou melhor”. Assim, reduzimos as seis categorias da POF para três categorias aproximadamente equivalentes àquelas da PPV.

Gráfico 6.3 - Densidades de probabilidade das rendas e despesas - POF



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Observa-se que quanto maior a dificuldade para se chegar ao fim do mês com a renda atual do domicílio, maior é a concentração da distribuição da renda mínima em torno da média (painel (a)). Esta concentração é representada visualmente por picos mais altos e por caudas mais curtas na densidade de probabilidade quando passamos da categoria “alguma facilidade ou melhor” para a categoria “dificuldade ou pior”<sup>69</sup>. Logo, não parece haver evidências de que os domicílios que vivem com “alguma dificuldade” possuam melhor percepção sobre o valor da linha de pobreza quando medida pelo critério da renda mínima.

Para o valor mínimo com alimentação (painel (c)), os resultados são diferentes, porém as conclusões são semelhantes. Neste caso, observa-se que a dispersão das distribuições é aproximadamente igual, independentemente do grupo analisado, sugerindo que os domicílios que vivem com “alguma dificuldade” não representam adequadamente aqueles que estão no limiar da linha de pobreza.

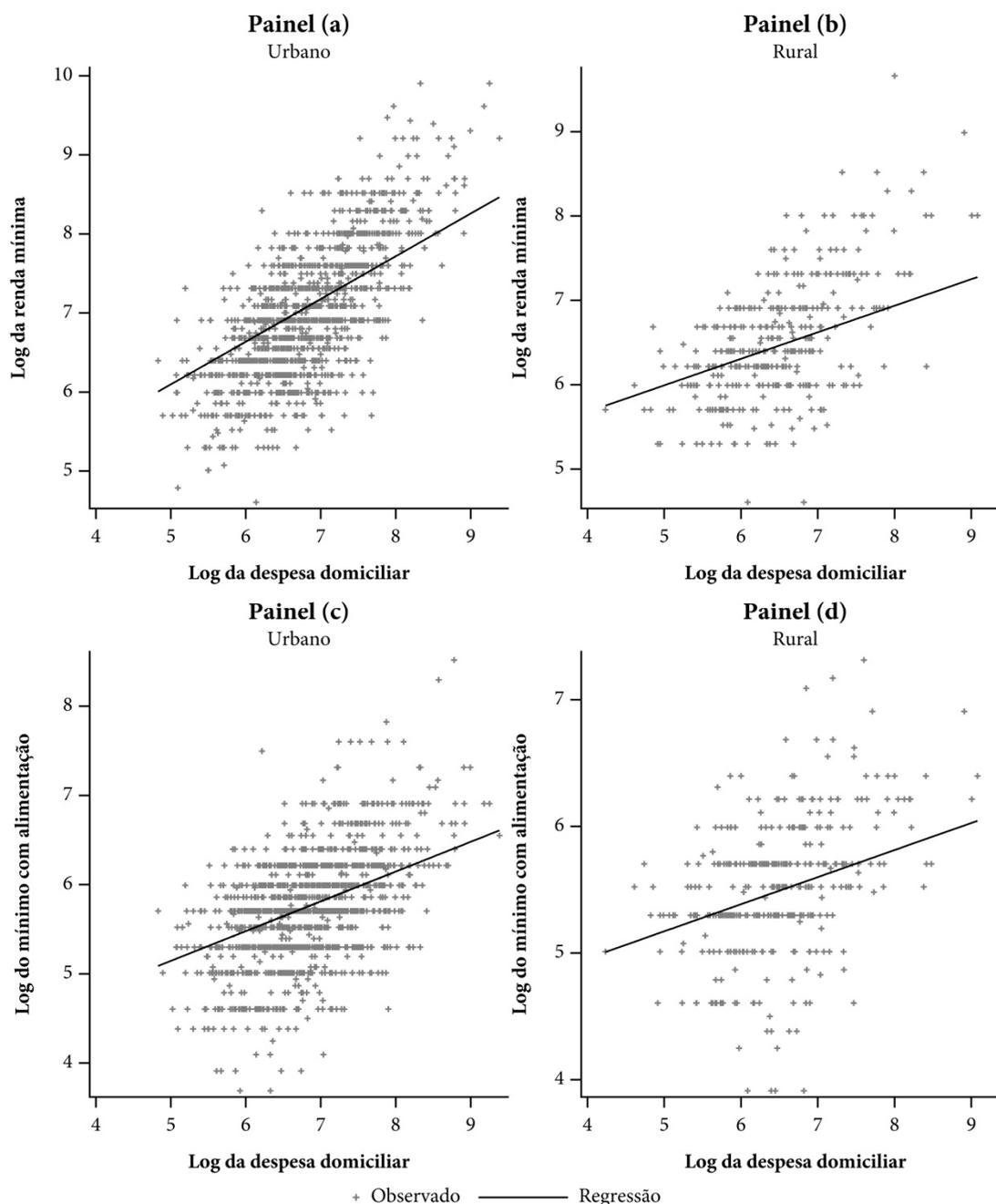
O Gráfico 6.4 também confirma essa conclusão. Para construir este gráfico, estimou-se o modelo (6.29) para os domicílios que vivem com “alguma dificuldade”, com o logaritmo da despesa domiciliar incluído como variável independente adicional. Em seguida, com todas as demais variáveis independentes fixas nos valores médios da amostra, plotaram-se os valores preditos da regressão. Se o método de Antuérpia estivesse correto, seria de se esperar que o logaritmo da despesa domiciliar não influenciasse as estimativas da linha de pobreza. No entanto, os resultados mostram que, utilizando o valor mínimo da renda ou o valor mínimo com alimentação, as estimativas obtidas são positivamente relacionadas com o logaritmo da despesa domiciliar<sup>70</sup>.

---

<sup>69</sup> Estes dados são confirmados pela análise das médias dos desvios-padrão das distribuições, mas que não foram apresentados neste trabalho.

<sup>70</sup> Todos os coeficientes do logaritmo da despesa domiciliar são significantes a 1% (cf. Apêndice C).

Gráfico 6.4 - Valores esperados do método de Antuérpia em relação ao log da despesa domiciliar - POF



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: Valores plotados referem-se apenas aos domicílios compostos por dois adultos.

Apesar deste resultado negativo, decidiu-se prosseguir e calcular as linhas de pobreza estimadas por este grupo de famílias, bem como as suas respectivas escalas de equivalências implícitas. Os dados são apresentados na Tabela 6.6. A tabela mostra a linha de pobreza

*domiciliar* (e não a linha de pobreza domiciliar *per capita*) para as áreas urbanas e rurais dos valores mínimos para a renda e para a alimentação. Escolheu-se o domicílio composto por dois adultos sem crianças para servir de referência para o cálculo das escalas de equivalências.

Se as escalas de equivalências estimadas a partir da PPV já mostravam uma economia de escala extremamente alta, no caso da POF, utilizando-se a questão da renda mínima, as economias de escala obtidas são ainda maiores. Domicílios compostos por um, dois ou três adultos na área urbana necessitam acréscimos mínimos no valor do consumo. Para as crianças, as escalas de equivalências estimadas indicam um custo negativo, ou seja, os domicílios recebem um *benefício* por ter uma criança.

Tabela 6.6 - Escalas de equivalência pelo método de Antuérpia - POF

Tipo de família	Valor mínimo da renda				Valor mínimo com alimentação			
	Linha de pobreza		Escala de equivalência		Linha de pobreza		Escala de equivalência	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
<i>1 adulto morando...</i>								
Sozinho	1.619,29 (49,25)	624,14 (31,72)	0,961* (0,02)	0,853* (0,02)	334,89 (8,75)	211,38 (8,93)	0,834* (0,01)	0,787* (0,02)
Com criança de 0 a 4 anos	1.517,70 (55,6)	559,76 (31,94)	0,901* (0,03)	0,765* (0,04)	369,71 (11,93)	212,31 (11,03)	0,921* (0,03)	0,79* (0,04)
Com criança de 5 a 9 anos	1.520,13 (51,42)	616,39 (35,97)	0,902* (0,03)	0,842* (0,04)	379,64 (11,58)	240,36 (12,31)	0,946 (0,03)	0,895* (0,04)
Com criança de 10 a 14 anos	1.542,35 (61,6)	619,03 (37,38)	0,915* (0,03)	0,846* (0,04)	394,57 (11,83)	246,87 (11,86)	0,983 (0,03)	0,919* (0,04)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.685,62 (58,99)	791,64 (35,1)	1,000 (0,03)	1,082 (0,05)	406,50 (15,52)	278,11 (11,24)	1,013 (0,03)	1,035 (0,04)
<i>2 adultos morando...</i>								
Sozinhos	1.685,38 (32,66)	731,96 (22,19)	1	1	401,43 (6,34)	268,64 (6,51)	1	1
Com criança de 0 a 4 anos	1.608,86 (33,76)	671,92 (22,55)	0,955* (0,02)	0,918* (0,03)	422,49 (7,86)	264,20 (7,79)	1,052* (0,02)	0,983 (0,03)
Com criança de 5 a 9 anos	1.610,58 (34,6)	716,51 (24,37)	0,956* (0,02)	0,979 (0,03)	430,03 (8,13)	286,98 (9)	1,071* (0,02)	1,068* (0,03)
Com criança de 10 a 14 anos	1.626,24 (42,07)	718,55 (26,37)	0,965 (0,02)	0,982 (0,03)	441,23 (8,65)	292,14 (8,61)	1,099* (0,02)	1,087* (0,03)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.725,45 (49,67)	846,58 (32,41)	1,024 (0,03)	1,157* (0,05)	450,08 (12,91)	316,30 (10,27)	1,121* (0,03)	1,177* (0,04)
<i>3 adultos morando...</i>								
Sozinhos	1.725,28 (33,92)	803,48 (22,35)	1,024* (0,01)	1,098* (0,02)	446,33 (6,97)	309,08 (7,27)	1,112* (0,01)	1,151* (0,02)
Com criança de 0 a 4 anos	1.664,62 (29,8)	750,68 (20,72)	0,988 (0,02)	1,026 (0,03)	461,80 (7,12)	303,51 (7,27)	1,15* (0,02)	1,13* (0,03)
Com criança de 5 a 9 anos	1.665,95 (33,6)	787,74 (21,73)	0,988 (0,02)	1,076* (0,03)	467,96 (7,9)	322,94 (8,75)	1,166* (0,02)	1,202* (0,03)
Com criança de 10 a 14 anos	1.678,08 (38,51)	789,42 (23,91)	0,996 (0,02)	1,078* (0,03)	477,07 (8,69)	327,28 (8,63)	1,188* (0,02)	1,218* (0,03)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.754,29 (51,06)	892,72 (35,98)	1,041 (0,03)	1,22* (0,05)	484,23 (12,89)	347,37 (11,82)	1,206* (0,03)	1,293* (0,05)

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Indica valores diferentes de 1 (um) a 5% de significância. Erro-padrão das estimativas entre parênteses obtido por bootstrap com 1000 repetições. Reais em valores de janeiro de 2003.

Quando os cálculos são feitos a partir do valor mínimo com alimentação, por outro lado, os resultados são um pouco menos extremos. Aqui, a economia de escala do consumo também é alta, mas não é absoluta. Um domicílio composto por três adultos necessita de 11,2% a 15,1% mais recursos que um domicílio composto por dois adultos, dependendo da área geográfica em que se situa. No caso das crianças, observam-se escalas de equivalência que crescem com a faixa etária. Por fim, por essa variável, um idoso representa um acréscimo de necessidades um pouco superior ao de um adulto.

Em suma, esta seção mostrou que o método de Antuérpia baseia-se em pressupostos a respeito do grupo de referência utilizado para delimitar a pobreza que não são validados pelos dados empíricos brasileiros. O grupo de domicílios ou famílias que vive com “alguma dificuldade” com a renda atual é muito diverso, e as estimativas obtidas para esse grupo não são homogêneas. Apesar disto, prosseguiu-se na análise e calcularam-se os valores das escalas de equivalências. Com isto, obtiveram-se alguns resultados interessantes, mas a confiabilidade destes resultados deve ser posta em dúvida.

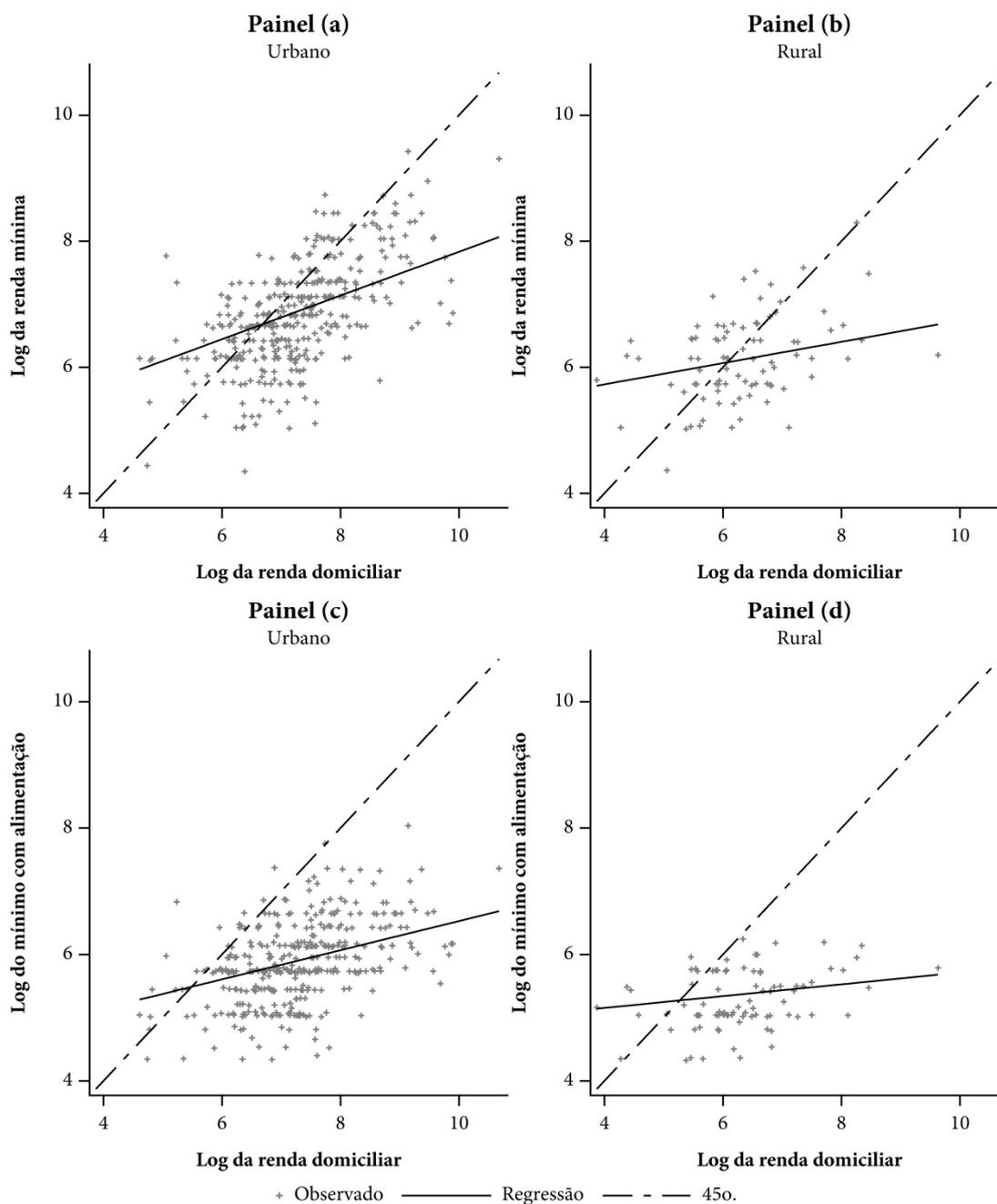
## **6.4.2 Método da Renda Mínima**

### **6.4.2.1 Pesquisa sobre Padrões de Vida**

No Gráfico 6.5 estão plotados os valores observados e preditos dos montantes mínimos necessários para a renda e para a alimentação em relação ao logaritmo da renda domiciliar total. Para construir o gráfico, mantiveram-se as demais variáveis fixas nos valores médios observados no domicílio de referência. O gráfico mostra também a reta de 45° que passa sob a origem e que representa a reta de interseção na qual as linhas de pobreza são determinadas.

A relação mostrada no gráfico é nítida: quanto maior a renda domiciliar, maior é o valor que os indivíduos atribuem ao mínimo necessário para a renda e para a alimentação. Observa-se também que a inclinação da reta de regressão é menor que um, isto é, a percepção das famílias sobre os valores mínimos aumentam menos que proporcionalmente em relação à renda. Com isto, temos garantida a existência de um ponto fixo dos valores esperados em relação ao logaritmo da despesa domiciliar. Em outras palavras, as condições necessárias para a aplicação do método da Renda Mínima estão presentes nos dados.

Gráfico 6.5 - Valores esperados do método da Renda Mínima em relação ao log da renda domiciliar - PPV



Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Nota: Valores plotados referem-se apenas aos domicílios compostos por dois adultos.

Dado que as condições para a aplicação do método estão satisfeitas, prosseguiu-se com o cálculo do valor das linhas de pobreza e das escalas de equivalências entre domicílios com diferentes composições demográficas. Estes dados encontram-se na Tabela 6.7 abaixo.

Tabela 6.7 - Linhas de pobreza e escalas de equivalência estimadas pelo método da Renda Mínima - PPV

Tipo de domicílio	Valor mínimo da renda				Valor mínimo com alimentação			
	Linha de pobreza		Escala de equivalência		Linha de pobreza		Escala de equivalência	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
<i>1 adulto morando...</i>								
Sozinho	849,55 (83,77)	374,45 (54,69)	0,769* (0,03)	0,692* (0,05)	238,20 (21,9)	160,71 (12,83)	0,79* (0,03)	0,723* (0,03)
Com criança de 0 a 4 anos	1.030,37 (124,92)	434,72 (69,51)	0,933 (0,09)	0,803* (0,09)	250,63 (23,01)	176,08 (17,46)	0,831* (0,07)	0,792* (0,07)
Com criança de 5 a 9 anos	1.172,25 (156,05)	443,11 (78,93)	1,061 (0,1)	0,819 (0,12)	309,25 (30,32)	188,95 (17,73)	1,026 (0,08)	0,850 (0,09)
Com criança de 10 a 14 anos	1.169,11 (134,72)	508,68 (94,29)	1,058 (0,09)	0,940 (0,13)	321,07 (29,8)	204,59 (21,78)	1,065 (0,07)	0,921 (0,09)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.066,70 (137,45)	553,49 (72,53)	0,966 (0,09)	1,023 (0,1)	298,20 (28,32)	240,52 (23,75)	0,989 (0,07)	1,082 (0,08)
<i>2 adultos morando...</i>								
Sozinhos	1.104,56 (78,9)	541,14 (60,34)	1	1	301,46 (22,02)	222,25 (16,8)	1	1
Com criança de 0 a 4 anos	1.229,54 (101,02)	580,04 (67,66)	1,113 (0,07)	1,072 (0,06)	305,92 (20,06)	230,02 (17,75)	1,015 (0,05)	1,035 (0,05)
Com criança de 5 a 9 anos	1.339,97 (119,96)	587,47 (71,2)	1,213* (0,07)	1,086 (0,1)	351,93 (25,97)	241,10 (15,67)	1,167* (0,05)	1,085 (0,07)
Com criança de 10 a 14 anos	1.337,58 (106,72)	644,09 (90,94)	1,211* (0,07)	1,190 (0,11)	360,84 (26,06)	254,23 (21,22)	1,197* (0,05)	1,144* (0,06)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.258,28 (137,19)	681,38 (83,64)	1,139 (0,09)	1,259* (0,11)	343,49 (28,77)	283,19 (26,65)	1,139* (0,07)	1,274* (0,07)
<i>3 adultos morando...</i>								
Sozinhos	1.287,88 (92,31)	671,21 (75,08)	1,166* (0,03)	1,24* (0,05)	346,00 (24,75)	268,66 (23,13)	1,148* (0,02)	1,209* (0,03)
Com criança de 0 a 4 anos	1.387,05 (103,5)	700,94 (77,6)	1,256* (0,07)	1,295* (0,07)	347,88 (21,56)	273,57 (22,21)	1,154* (0,05)	1,231* (0,05)
Com criança de 5 a 9 anos	1.479,47 (115,55)	707,66 (78,33)	1,339* (0,06)	1,308* (0,1)	386,42 (26,84)	283,39 (19,81)	1,282* (0,05)	1,275* (0,06)
Com criança de 10 a 14 anos	1.477,48 (109,28)	758,22 (100,82)	1,338* (0,07)	1,401* (0,12)	393,74 (27,42)	294,88 (25,27)	1,306* (0,05)	1,327* (0,06)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.411,29 (150,66)	790,91 (103,03)	1,278* (0,1)	1,462* (0,14)	379,46 (31,82)	319,74 (32,28)	1,259* (0,07)	1,439* (0,09)

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Nota: (\*) Indica valores diferentes de 1 (um) a 5% de significância. Erro-padrão das estimativas entre parênteses obtido por bootstrap com 1000 repetições. Reais em valores de janeiro de 2003.

Os valores da Tabela 6.7 mostram uma presença substancial de economias de escala no consumo, porém não tão acentuadas quando comparadas com as estimativas obtidas pelo método de Antuérpia na Seção 6.4.1. Considerando o valor mínimo da renda como medida para a linha de pobreza, um domicílio composto por três adultos necessita 16,6% mais recursos que um domicílio composto por dois adultos na área urbana e 24% mais recursos na área rural. Se a medida utilizada for o gasto mínimo com alimentação, estes valores são 14,8% para a área urbana e 20,9% para a área rural.

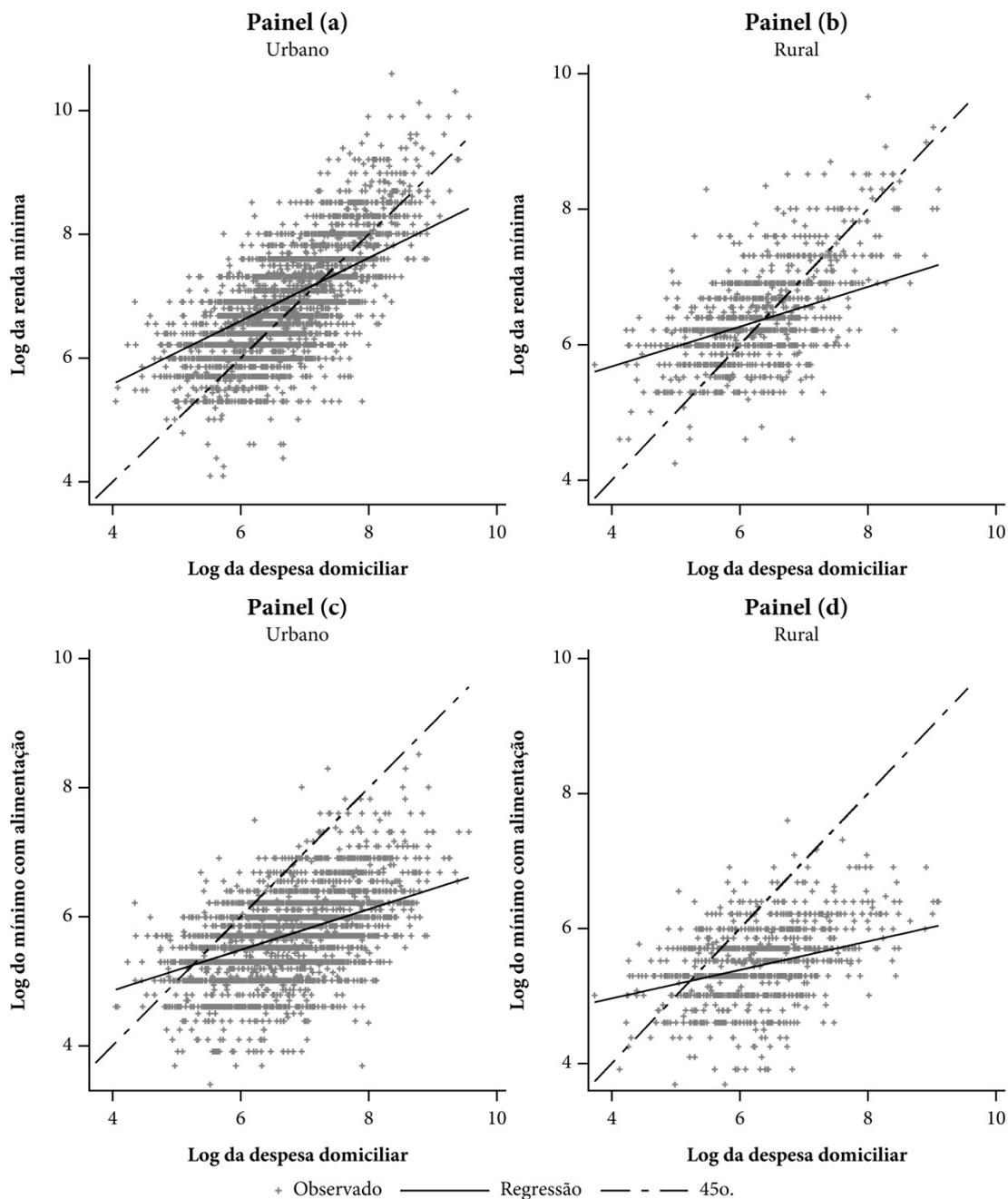
Nas áreas rurais, as escalas de equivalências das crianças são inferiores às de um adulto adicional. Nas áreas urbanas, a faixa etária que apresenta os menores valores para as escalas de equivalências corresponde às crianças de 0 a 4 anos de idade. Por fim, observa-se que uma pessoa com 65 anos ou mais possui uma escala de equivalência um pouco maior que a de um adulto na área rural, e uma escala um pouco inferior à de um adulto na área urbana.

Quanto aos valores das linhas de pobreza subjetiva, a Tabela 6.7 mostra que eles são maiores nas áreas urbanas do que nas áreas rurais para o mesmo tipo de domicílio. Além disso, os valores relativos das linhas de pobreza urbanas em comparação às linhas de pobreza rurais são muito maiores quando se utiliza o valor mínimo da renda do que quando se utiliza o valor mínimo da alimentação. Ou seja, quando uma variável que captura um espectro mais amplo da cesta de consumo é incorporada na análise, as diferenças relativas entre as linhas de pobreza da área urbana e da área rural se amplificam.

#### **6.4.2.2 Pesquisa de Orçamentos Familiares**

Utilizando-se os dados da POF (Gráfico 6.6), observa-se novamente uma relação positiva entre o valor das medidas de pobreza e a despesa domiciliar, e que esta relação possui elasticidade menor que um. Isto significa que os valores mínimos da renda e do gasto com alimentação na POF satisfazem as condições estabelecidas pelo método da Renda Mínima para a existência de uma linha de pobreza. A linha de pobreza é determinada no ponto onde a reta de regressão estimada cruza com a linha de 45° que sai da origem. Neste ponto, a percepção dos valores que a família considera mínimos para a renda ou para a alimentação coincide exatamente com a renda total do domicílio.

Gráfico 6.6 - Valores esperados do método da Renda Mínima em relação ao log da despesa domiciliar - POF



Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: Valores plotados referem-se apenas aos domicílios compostos por dois adultos.

A Tabela 6.8 mostra as estimativas das linhas de pobreza e escalas de equivalências obtidas a partir da POF. Assim como pôde ser observado com os dados da PPV, as linhas de pobreza estimadas na POF são em geral maiores nas áreas urbanas do que nas áreas rurais.

Utilizando o valor mínimo de despesa com alimentação como medida de pobreza, um adulto adicional representa um acréscimo de necessidades de 18,2% nas áreas urbanas e 17,3% nas áreas rurais. Além disso, a inclusão de uma criança no domicílio implica um aumento de custo significativamente menor do que aquele trazido por um adulto. Por fim, uma pessoa com 65 anos ou mais de idade possui uma escala de equivalência bastante semelhante à de um adulto tanto na área urbana quanto na área rural.

Tabela 6.8 - Linhas de pobreza e escalas de equivalência estimadas pelo método da Renda Mínima - POF

Tipo de família	Valor mínimo da renda				Valor mínimo com alimentação			
	Linha de pobreza		Escala de equivalência		Linha de pobreza		Escala de equivalência	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural	Urbano	Rural
<i>1 adulto morando...</i>								
Sozinho	1.623,95 (80,89)	525,72 (21,15)	0,872* (0,02)	0,791* (0,02)	170,58 (5,76)	154,93 (5,19)	0,751* (0,01)	0,761* (0,01)
Com criança de 0 a 4 anos	1.501,09 (81,18)	468,78 (22,06)	0,806* (0,04)	0,706* (0,03)	200,21 (7,29)	157,56 (6,39)	0,882* (0,03)	0,774* (0,03)
Com criança de 5 a 9 anos	1.587,73 (86,56)	492,37 (21,14)	0,852* (0,03)	0,741* (0,03)	209,66 (7,09)	168,16 (6,5)	0,923* (0,02)	0,826* (0,03)
Com criança de 10 a 14 anos	1.454,28 (79,66)	508,63 (22,41)	0,781* (0,03)	0,766* (0,03)	212,45 (7,32)	174,35 (6,61)	0,936* (0,02)	0,856* (0,02)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.765,42 (109,32)	715,05 (30,39)	0,948 (0,04)	1,076 (0,04)	228,92 (8,42)	207,23 (7,67)	1,008 (0,03)	1,018 (0,03)
<i>2 adultos morando...</i>								
Sozinhos	1.863,09 (67,4)	664,43 (19,59)	1	1	227,09 (5,8)	203,58 (5,21)	1	1
Com criança de 0 a 4 anos	1.748,17 (61,92)	603,88 (19,06)	0,938* (0,03)	0,909* (0,02)	246,83 (6,44)	201,33 (5,78)	1,087* (0,02)	0,989 (0,02)
Com criança de 5 a 9 anos	1.814,80 (71,05)	623,97 (18,54)	0,974 (0,02)	0,939* (0,02)	254,54 (6,46)	210,26 (6)	1,121* (0,02)	1,033 (0,02)
Com criança de 10 a 14 anos	1.711,63 (68,07)	637,64 (20,06)	0,919* (0,02)	0,96* (0,02)	256,79 (6,79)	215,39 (6,15)	1,131* (0,02)	1,058* (0,02)
Com pessoa de 65 anos ou mais	1.947,80 (100,92)	800,20 (30,57)	1,045 (0,04)	1,204* (0,04)	269,89 (8,31)	241,68 (8,12)	1,189* (0,03)	1,187* (0,03)
<i>3 adultos morando...</i>								
Sozinhos	2.018,99 (72,99)	761,97 (22,97)	1,084* (0,01)	1,147* (0,01)	268,45 (6,63)	238,84 (6,43)	1,182* (0,01)	1,173* (0,01)
Com criança de 0 a 4 anos	1.918,59 (62,77)	705,35 (20,58)	1,030 (0,02)	1,062* (0,02)	283,85 (6,82)	235,33 (6,45)	1,25* (0,02)	1,156* (0,02)
Com criança de 5 a 9 anos	1.973,18 (73,6)	722,88 (20,85)	1,059* (0,03)	1,088* (0,02)	290,47 (7,03)	243,11 (6,79)	1,279* (0,02)	1,194* (0,02)
Com criança de 10 a 14 anos	1.888,44 (71,8)	734,72 (22,41)	1,014 (0,03)	1,106* (0,02)	292,40 (7,4)	247,55 (7,01)	1,288* (0,02)	1,216* (0,02)
Com pessoa de 65 anos ou mais	2.080,67 (105,68)	871,14 (34,52)	1,117* (0,04)	1,311* (0,04)	303,52 (9,18)	269,88 (9,46)	1,337* (0,03)	1,326* (0,04)

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Indica valores diferentes de 1 (um) a 5% de significância. Erro-padrão das estimativas entre parênteses obtido por bootstrap com 1000 repetições. Reais em valores de janeiro de 2003.

Utilizando o valor mínimo da renda como medida de pobreza, no entanto, os resultados obtidos se mostraram pouco críveis. Fora o fato de as estimativas embutirem uma

economia de escala praticamente absoluta, os valores obtidos para as crianças indicam que não há um custo, mas sim um *benefício* de se ter uma criança no domicílio. Note que este resultado também foi obtido com o método de Antuérpia para esta mesma variável da POF (cf. Seção 6.4.1), sugerindo que o enunciado da questão da renda mínima da POF pode não estar capturando a ideia original proposta por Goedhart *et al.* (1977) entre outros. Se este for o caso, então as estimativas obtidas na POF para o valor da renda mínima não são confiáveis.

### 6.4.3 Método de Leyden

Conforme visto na Seção 6.3, apenas a Pesquisa sobre Padrões de Vida possui as questões adequadas para se calcular as linhas de pobreza (e conseqüentemente as escalas de equivalência) pelo método de Leyden. Este método consiste em definir inicialmente um nível de bem-estar  $\bar{u} \in [0,1]$  abaixo do qual as famílias são consideradas pobres, e derivar as linhas de pobreza para este nível de utilidade utilizando-se a equação (6.11). Como as escalas de equivalência em si independem do valor de  $\bar{u}$  escolhido (cf. equação (6.13)), na análise que se segue o seu valor foi definido arbitrariamente em  $\bar{u} = 0,5$ .

A Tabela 6.9 mostra alguns dados extraídos da questão de avaliação da renda da PPV. As colunas “Ruim”, “Insuficiente”, “Suficiente” e “Boa” mostram os valores médios *per capita* das respostas dadas pelos domicílios na questão de avaliação da renda para cada um destes níveis de bem-estar. A coluna  $\mu$  mostra o valor médio *per capita* do parâmetro de necessidade  $\mu$  estimado para cada domicílio e a coluna “Utilidade” mostra o bem-estar médio usufruído pelos domicílios, calculado a partir dos seus parâmetros individuais  $\mu$  e  $\sigma$  e da renda total recebida pelo domicílio (equações (6.1) a (6.3)).

Tabela 6.9 - Respostas da questão de avaliação da renda da PPV

<i>Dificuldade de viver com a renda atual</i>	<i>Ruim</i>	<i>Insuficiente</i>	<i>Suficiente</i>	<i>Boa</i>	<i><math>\mu</math> per capita</i>	<i>Utilidade</i>
Dificuldade	96,94	201,37	424,56	668,45	257,39	0,59
Alguma Dificuldade	139,58	286,82	632,91	1.015,82	372,36	0,72
Facilidade	339,29	628,50	1.307,20	2.346,76	839,20	0,83

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

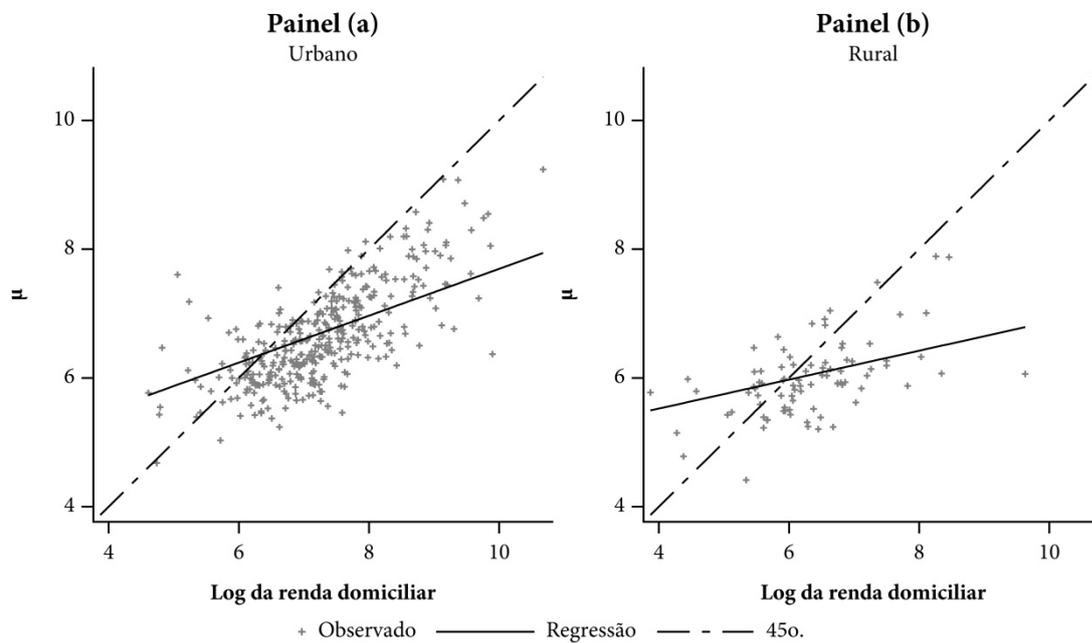
Nota: Reais em valores de janeiro de 2003.

Assim como ocorre na questão da renda mínima, é possível observar o efeito do grupo de referência sobre a percepção da pobreza. Este efeito transparece na forma de rendas mais altas para cada nível pré-estabelecido de bem-estar conforme vamos mudando do grupo de domicílios que vive com “dificuldade” para aquele que vive com “facilidade”. Domicílios que julgam viver com “dificuldade” reportaram valores de rendas inferiores à metade dos valores reportados pelos domicílios que vivem com “facilidade”. O parâmetro de necessidade médio estimado pelos primeiros ( $\mu = 257,39$ ) também foi bem inferior àquele estimado pelos segundos ( $\mu = 839,20$ ). Por fim, é interessante notar que o valor médio da utilidade cardinal usufruído pelos domicílios cresce de acordo com a facilidade de se viver com a renda atual.

O Gráfico 6.7 mostra os valores observados e preditos do parâmetro de necessidade  $\mu$  de cada domicílio em relação ao logaritmo da renda domiciliar. Os valores preditos foram calculados através da equação (6.9), mantendo-se todas as demais variáveis fixas no valor médio amostral do domicílio de referência.

Neste gráfico, observa-se que a curva com os valores preditos é crescente. Isto significa que a percepção das necessidades de recursos do domicílio é positivamente correlacionada com a renda do domicílio, mantendo-se fixas todas as demais características domiciliares. A linha de pobreza do método de Leyden é determinada no ponto onde a reta de regressão estimada cruza com a linha de 45° que sai da origem. Neste ponto encontram-se os domicílios cuja renda domiciliar equivale a uma avaliação de bem-estar igual 0,5. Como tais domicílios são aqueles que estão no limiar entre a pobreza e a não-pobreza, são eles que representam o grupo de referência para a determinação da linha de pobreza.

Gráfico 6.7 - Regressão de Leyden para a suficiência de renda - PPV



Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Nota: Valores plotados referem-se apenas aos domicílios compostos por dois adultos.

A Tabela 6.10 mostra as linhas de pobreza e as escalas de equivalências estimadas pelo método de Leyden. Os valores obtidos apresentam as mesmas características das escalas de equivalência estimadas nas seções anteriores quando se utiliza a questão da renda mínima da POF, a saber: economias de escalas do consumo praticamente absolutas e custos das crianças muito baixos ou até negativos. Considerando-se apenas as estimativas obtidas a partir da PPV, as diferenças obtidas pelo método de Leyden em comparação com o método de Antuérpia e o da Renda Mínima são consideráveis, uma vez que tanto as economias de escala quanto os custos de se criar uma criança estimados por estes outros métodos foram em geral maiores do que os estimados pelo método de Leyden.

Tabela 6.10 - Linhas de pobreza e escalas de equivalência estimadas pelo método de Leyden - PPV

Tipo de domicílio	Linha de pobreza		Escala de equivalência	
	Urbano	Rural	Urbano	Rural
<i>1 adulto morando...</i>				
Sozinho	598,97 (31,29)	346,74 (23,98)	0,826* (0,02)	0,772* (0,03)
Com criança de 0 a 4 anos	603,51 (34,71)	345,40 (31,91)	0,832* (0,05)	0,769* (0,07)
Com criança de 5 a 9 anos	699,37 (42,05)	346,03 (32,74)	0,965 (0,06)	0,77* (0,07)
Com criança de 10 a 14 anos	682,48 (41,22)	381,16 (37,45)	0,941 (0,06)	0,849 (0,08)
Com pessoa de 65 anos ou mais	610,87 (38,83)	411,51 (37,06)	0,843* (0,05)	0,916 (0,07)
<i>2 adultos morando...</i>				
Sozinhos	725,03 (30,11)	449,13 (23,15)	1	1
Com criança de 0 a 4 anos	717,41 (29,56)	438,60 (26,72)	0,989 (0,04)	0,977 (0,05)
Com criança de 5 a 9 anos	791,50 (34,98)	439,13 (27,76)	1,092* (0,04)	0,978 (0,05)
Com criança de 10 a 14 anos	778,71 (34,09)	468,37 (30,58)	1,074 (0,04)	1,043 (0,06)
Com pessoa de 65 anos ou mais	723,24 (38,51)	492,91 (38,48)	0,998 (0,04)	1,097 (0,07)
<i>3 adultos morando...</i>				
Sozinhos	810,74 (34,35)	522,51 (28,79)	1,118* (0,02)	1,163* (0,03)
Com criança de 0 a 4 anos	800,71 (32,04)	510,16 (28,37)	1,104* (0,04)	1,136* (0,05)
Com criança de 5 a 9 anos	861,96 (36,24)	510,62 (29,21)	1,189* (0,04)	1,137* (0,05)
Com criança de 10 a 14 anos	851,49 (35,68)	535,92 (31,84)	1,174* (0,04)	1,193* (0,06)
Com pessoa de 65 anos ou mais	805,58 (42,19)	556,85 (44,23)	1,111* (0,05)	1,24* (0,08)

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Nota: (\*) Indica valores diferentes de 1 (um) a 5% de significância. Erro-padrão das estimativas entre parênteses obtido por bootstrap com 1000 repetições. Reais em valores de janeiro de 2003.

Tendo em vista este resultado, cabe questionar qual a vantagem de se utilizar um método que necessita de mais respostas do entrevistado (e, portanto, possui um custo maior de captação dos dados), mas que produz resultados menos críveis que aqueles obtidos com o método mais simples da Renda Mínima. Infelizmente o tamanho amostral e a cobertura geográfica da PPV não ajudam esta resposta, e uma avaliação efetiva do método de Leyden no Brasil depende de uma base de dados maior e mais representativa da população.

## 6.5 CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentaram-se os principais modelos baseados na abordagem subjetiva de pobreza para se estimar escalas de equivalências. Estes modelos tem em comum o fato de que procuram determinar o bem-estar dos domicílios de forma direta, a partir de questões subjetivas a respeito da adequação da renda recebida pelos domicílios ou da percepção dos domicílios sobre a renda mínima necessária para sobreviver. O objetivo desta abordagem, portanto, é contrapor-se à forma indireta de mensuração do bem-estar utilizada pela abordagem de preferência revelada. Ao fazer isto, soluciona-se o problema de identificação que permeia a abordagem de preferência revelada, com a vantagem de se utilizar um volume muito menor de informação.

Apesar dessas vantagens, a abordagem subjetiva não encontrou muito respaldo dentro da ciência econômica. Observando-se a literatura relevante produzida desde os trabalhos pioneiros de Van Praag (1968) e Kapteyn (1977), nota-se que poucos pesquisadores fora do círculo inicial de Leyden e Antuérpia levaram adiante este projeto, com a maior parte dos trabalhos concentrada nas décadas 70 e 80. Segundo Kapteyn (1994), isto reflete em parte a tradicional descrença dos economistas com dados provenientes do que as pessoas *falam*, e não do que as pessoas *fazem*. Sen (1982) comenta sobre esta atitude, dizendo que ela é particularmente limitada, uma vez que o comportamento verbal, incluindo respostas a questionários, não deveria listar fora do domínio da abordagem comportamental.

Por outro lado, mesmo com uma difusão restrita entre os pesquisadores, a abordagem subjetiva teve algum sucesso em incorporar novas questões nas tradicionais pesquisas de orçamentos familiares. Uma prova disso foi a elaboração de questionários com questões subjetivas de pobreza em alguns países em desenvolvimento no âmbito do projeto das *Living Standard Measurement Surveys* levadas a cabo pelo Banco Mundial a partir do final dos anos 1980s, e que resultaram na implementação da PPV 1996-1997 no Brasil em parceria com o IBGE (United Nations, 2005). Outra prova é a incorporação de questões de pobreza subjetivas nas Pesquisa de Orçamentos Familiares de 2002-2003 e 2008-2009. Sem estas informações,

não teria sido possível testar os principais modelos da abordagem subjetiva das escalas de equivalência.

Ao estimar os modelos da abordagem subjetiva, obtivemos resultados para o Brasil que não diferem muito daqueles encontrados na literatura internacional. Em particular, as economias de escala de todos os modelos foram significativamente superiores àquelas normalmente encontradas em outras abordagens (cf. Capítulo 5). No caso das escalas de equivalências das crianças, os resultados foram muito variáveis e não foi possível identificar nenhum padrão comum.

Por fim, cabe notar que as estimativas obtidas a partir da renda mínima que as famílias consideravam suficiente para “chegar até o fim do mês” na POF (questão 61.02 da pesquisa) apresentaram resultados pouco críveis, com economias de escala praticamente absolutas e custos de crianças negativos. As estimativas obtidas na questão da renda mínima na PPV não tiveram os mesmos problemas da POF. Tais resultados põem em dúvida a qualidade da informação captada por esta questão na POF. Conforme visto na Seção 6.3, o enunciado da questão utilizado na POF é muito diferente daquele utilizado na PPV, e isso pode ter gerado diferenças na interpretação da questão entre as duas pesquisas.

Para as linhas de pobreza calculadas a partir do valor mínimo com alimentação, as escalas de equivalências ficaram mais próximas daquilo que normalmente se espera de seus valores, isto é, economias de escalas positivas, porém não absolutas. Este resultado não surpreende, já que o valor mínimo com alimentação ancora-se em um conceito de pobreza alimentar, e não há motivos para se esperar que seus valores sejam muito diferentes daqueles estimados a partir das necessidades nutricionais dos indivíduos.



## 7 CONCLUSÃO

Nesta tese analisaram-se dois problemas distintos, porém relacionados, cada um em uma parte específica. Na parte I analisaram-se os efeitos dos gastos nulos observados em pesquisas de orçamentos familiares sobre as estimativas de demanda dos produtos e os modelos desenvolvidos para contornar essa característica comum das pesquisas amostrais de orçamentos familiares. Em seguida estes modelos foram utilizados para estimar a despesa com alimentação fora do domicílio. Sem entrar nos pormenores das estimativas obtidas, a conclusão mais geral deste capítulo foi que os diferentes pressupostos adotados pelos modelos econométricos apresentados nesta parte da tese implicam esperanças condicionais e probabilidade de consumo muito diferentes, apesar de nem sempre os testes de comparação dos modelos detectarem diferenças significativas entre eles. Dessa forma, a realização de testes de hipótese para comparar qual modelo é mais provável é um exercício que não deve ser tomado como ponto de partida para a escolha do modelo econométrico; a escolha do modelo deve ser feita antes, a partir das características do produto cuja demanda se deseja estimar e dos pressupostos sobre a natureza dos valores nulos embutidos em cada modelo econométrico.

Na parte II analisou-se o problema de como comparar o bem-estar de domicílios com diferentes composições demográficas. Primeiramente se mostrou que os parâmetros relativos à economia de escala do consumo e ao peso de uma criança em relação a um adulto influenciam substancialmente o cálculo das medidas de desigualdade e pobreza. Em seguida foram analisados diferentes modelos de escalas de equivalência desenvolvidos dentro da abordagem das preferências reveladas e da abordagem subjetiva. Estes modelos foram estimados e testados à luz de seus pressupostos. Dos modelos que não foram rejeitados pela informação empírica, merecem destaque os modelos de Rothbarth e o modelo de Prais e Houthakker na abordagem das preferências reveladas, e os modelos da Renda Mínima e de Leyden na abordagem subjetiva. As escalas de equivalência estimadas pela abordagem subjetiva apresentaram estimativas de economias de escala bastante expressivas, quase

absolutas. Do lado da abordagem das preferências reveladas, os métodos de Rothbarth e de Prais-Houthakker apresentaram resultados antagônicos: o método de Rothbarth obteve estimativas para o custo relativo das crianças menores do que o de um adulto, e o contrário foi obtido pelo método de Prais-Houthakker.

De tudo isso, ficou a lição que mais importante do que o valor das estimativas obtidas para as escalas de equivalência é o conceito de bem-estar do domicílio nos quais estas estimativas se apoiam. Esse conceito de bem-estar é o responsável para que diferentes modelos obtenham valores distintos para as escalas de equivalência, apesar de utilizarem a mesma evidência empírica. Nessa linha de conclusão, portanto, modelos teóricos sofisticados baseados nas preferências reveladas, mas cujos parâmetros se baseiam em uma evidência empírica fraca ou duvidosa, poderiam ser substituídos por abordagens mais simples, nos quais os parâmetros são definidos de forma direta a partir de algum tipo de escolha social.

## REFERÊNCIAS

- AABERGE, R.; MELBY, I. The Sensitivity of Income Inequality to Choice of Equivalence Scales. **Review of Income and Wealth**, v. 44, n. 4, p. 565-569, 1998.
- AGÜERO, J. M.; GOULD, B. W. Household composition and Brazilian food purchases: an expenditure system approach. **Canadian Journal of Agricultural Economics**, v. 51, n. 3, p. 323-345, 2003.
- AMEMIYA, T. **Advanced econometrics**. Cambridge: Harvard University Press, 1985.
- AMEMIYA, T. Tobit models: A survey. **Journal of Econometrics**, v. 24, n. 1-2, p. 3-61, 1984.
- ANTONIDES, G.; KAPTEYN, A.; WANSBEEK, T. J. **Reliability and validity assessment of ten methods for the measurement of individual welfare functions of income**: Modelling Research Group. Los Angeles: University of Southern California, 1980.
- ATKINSON, A. B. On the measurement of inequality. **Journal of Economic Theory**, v. 2, n. 3, p. 244-263, 1970.
- BAI, J. *et al.* Food away from home in Beijing: Effects of wealth, time and “free” meals. **China Economic Review**, v. 21, n. 3, p. 432-441, 2010.
- BANKS, J.; BLUNDELL, R.; LEWBEL, A. Quadratic Engel Curves and Consumer Demand. **Review of Economics and Statistics**, v. 79, n. 4, p. 527-539, 1997.
- BANKS, J.; JOHNSON, P. Equivalence scale relativities revisited. **The Economic Journal**, p. 883-890, 1994.
- BARGAIN, O.; DONNI, O. Expenditure on children: A Rothbarth-type method consistent with scale economies and parents’ bargaining. **European Economic Review**, v. 56, n. 4, p. 792-813, 2012.
- BARTEN, A. P. Family composition, prices and expenditure patterns. *In*: HART, P. .; MILLS, L.; WHITAKER, J. K. (Eds.). **Econometric Analysis for National Economic Planning**. London: Butterworth, 1964. p. 277-291.
- BECKER, G. S. A Theory of the Allocation of Time. **The Economic Journal**, v. 75, n. 299, p. 493-517, 1965.
- BECKER, G. S. **A Treatise on the Family**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1991.
- BETTIN, G.; LUCCHETTI, R.; ZAZZARO, A. **Income, consumption and remittances: evidence from immigrants to Australia**: HWWI Migration Research Group. Hamburg: Hamburg Institute of International Economics, 2009.
- BICKEL, P. J.; DOKSUM, K. A. An Analysis of Transformations Revisited. **Journal of the American Statistical Association**, v. 76, n. 374, p. 296-311, 1981.

BLACKORBY, C.; DONALDSON, D. Adult-equivalence scales, interpersonal comparisons of well-being, and applied welfare economics. *In*: ELSTER, J.; ROEMER, J. E. (Eds.).

**Interpersonal comparisons of well-being**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. p. 164-199.

BLACKORBY, C.; DONALDSON, D. Measuring the cost of children: a theoretical framework. *In*: BLUNDELL, R.; PRESTON, I.; WALKER, I. (Eds.). **The Measurement of household welfare**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

BLACKORBY, C.; DONALDSON, D.; WEYMARK, J. A. Social Choice with Interpersonal Utility Comparisons: A Diagrammatic Introduction. **International Economic Review**, v. 25, n. 2, p. 327-356, 1984.

BLUNDELL, R.; LEWBEL, A. The information content of equivalence scales. **Journal of Econometrics**, v. 50, n. 1-2, p. 49-68, 1991.

BLUNDELL, R.; MEGHIR, C. Bivariate alternatives to the Tobit model. **Journal of Econometrics**, v. 34, n. 1-2, p. 179-200, 1987.

BLUNDELL, R.; ROBIN, J. M. Latent separability: grouping goods without weak separability. **Econometrica**, v. 68, n. 1, p. 53-84, 2000.

BOJER, H.; NELSON, J. A. Equivalence scales and the welfare of children: A comment on “Is there bias in the economic literature on equivalence scales?” **Review of Income and Wealth**, v. 45, n. 4, p. 531-534, 1999.

BOURGUIGNON, F. The cost of children: may the collective approach to household behavior help? **Journal of Population Economics**, v. 12, n. 4, p. 503-521, 1999.

BOX, G. E. P.; COX, D. R. An Analysis of Transformations. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 26, n. 2, p. 211-252, 1964.

BRADBURY, B. Family Size Equivalence Scales and Survey Evaluations of Income and Well-Being. **Journal of Social Policy**, v. 18, n. 3, p. 383-408, 1989.

BROWNING, M. *et al.* Income and Outcomes: A Structural Model of Intrahousehold Allocation. **Journal of Political Economy**, v. 102, n. 6, p. 1067-1096, 1994.

BROWNING, M. Children and household economic behavior. **Journal of Economic Literature**, v. 30, n. 3, p. 1434-1475, 1992.

BROWNING, M.; CHIAPPORI, P.; LEWBEL, A. **Estimating Consumption Economies of Scale, Adult Equivalence Scales, and Household Bargaining Power**. Boston: Boston College Department of Economics, 2010.

BUHMANN, B. *et al.* Equivalence Scales, Well-Being, Inequality, and Poverty: Sensitivity Estimates across Ten Countries Using the Luxembourg Income Study (LIS) Database. **Review of Income and Wealth**, v. 34, n. 2, p. 115-142, 1988.

- BURBIDGE, J. B.; MAGEE, L.; ROBB, A. L. Alternative Transformations to Handle Extreme Values of the Dependent Variable. **Journal of the American Statistical Association**, v. 83, n. 401, p. 123-127, 1988.
- BURKHAUSER, R. V.; SMEEDING, T. M.; MERZ, J. Relative Inequality and Poverty in Germany and the United States Using Alternative Equivalence Scales. **Review of Income and Wealth**, v. 42, n. 4, p. 381-400, 1996.
- BURTON, M.; DORSETT, R.; YOUNG, T. Changing preferences for meat: Evidence from UK household data, 1973–93. **European Review of Agricultural Economics**, v. 23, n. 3, p. 357, 1996.
- BUYZE, J. The estimation of welfare levels of a cardinal utility function. **European Economic Review**, v. 17, n. 3, p. 325-332, 1982.
- BYRNE, P. J.; CAPPIS, O.; SAHA, A. Analysis of Food-Away-from-Home Expenditure Patterns for U.S. Households, 1982–89. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 78, n. 3, p. 614-627, 1996.
- CAMERER, C. F.; LOEWENSTEIN, G.; RABIN, M. **Advances in Behavioral Economics**. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- CAMERON, A. C.; TRIVEDI, P. K. **Microeconometrics: methods and applications**. New York: Cambridge University Press, 2005.
- CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Statistical Inference**. Pacific Grove (California): Duxbury Press, 2002.
- CASTRO, F.; BELLUZZO, W. **Alocação Intrafamiliar do Consumo e Custo Criança: Um Estudo Aplicado Ao Brasil**. In: XXXIV Encontro Nacional de Economia. Salvador, 2006.
- CASTRO, J. A.; VAZ, F. M. Gastos das Famílias com Educação. In: SILVEIRA, F. G. *et al.* (Eds.). **Gasto e consumo das famílias brasileiras contemporânea**. Brasília: Ipea, 2007. v. 2p. 77-104.
- CHIAPPORI, P.-A. Collective Labor Supply and Welfare. **Journal of Political Economy**, v. 100, n. 3, p. 437-67, 1992.
- CITRO, C. F.; MICHAEL, R. T. **Measuring poverty: A new approach**. Washington: National Academy Press, 1995.
- CLARKE, K. A. A Simple Distribution-Free Test for Nonnested Model Selection. **Political Analysis**, v. 15, n. 3, p. 347 -363, 2007.
- CLARO, R. M.; LEVY, R. B.; BANDONI, D. H. Influência da renda sobre as despesas com alimentação fora do domicílio, no Brasil, 2002-2003. **Caderno de Saúde Pública**, v. 25, n. 11, p. 2489–2496, 2009.
- CLARO, R. M. *et al.* Per capita versus adult-equivalent estimates of calorie availability in household budget surveys. **Cadernos de Saúde Pública**, v. 26, n. 11, p. 2188-2195, 2010.

- COLASANTO, D.; KAPTEYN, A.; GAAG, J. VAN DER. Two Subjective Definitions of Poverty: Results from the Wisconsin Basic Needs Study. **The Journal of Human Resources**, v. 19, n. 1, p. 127-138, 1984.
- CONNIFFE, D. The Non-Constancy of Equivalence Scales. **Review of Income and Wealth**, v. 38, n. 4, p. 429-443, 1992.
- CORSEUIL, C. H. *et al.* Mercado de Trabalho. *In*: CASTRO, J. A.; VAZ, F. M. (Eds.). **Situação social brasileira**. Brasília: Ipea, 2011.
- COULTER, F. A. E.; COWELL, F. A.; JENKINS, S. P. Equivalence scale relativities and the extent of inequality and poverty. **The Economic Journal**, v. 102, p. 1067-1082, 1992.
- COWELL, F. A. **Measuring inequality**. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- COWELL, F. A. Measurement of inequality. *In*: ATKINSON, A. B.; BOURGUIGNON, F. (Eds.). **Handbook of Income Distribution**. Amsterdam: Elsevier, 2000. v. 1, p. 87-166.
- CRAGG, J. G. Some Statistical Models for Limited Dependent Variables with Application to the Demand for Durable Goods. **Econometrica**, v. 39, n. 5, p. 829-844, 1971.
- CRAMER, J. S. **Econometric applications of maximum likelihood methods**. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1986.
- CRAMER, J. S. **Empirical Econometrics**. Amsterdam: North-Holland, 1969.
- CREEDY, J.; SLEEMAN, C. **Adult equivalence scales, inequality and poverty in New Zealand**: Treasury Working Paper Series. New Zealand: New Zealand Treasury, 2004.
- DALTON, H. The Measurement of the Inequality of Incomes. **The Economic Journal**, v. 30, n. 119, p. 348-361, 1920.
- DANZIGER, S. *et al.* The Direct Measurement of Welfare Levels: How Much Does it Cost to Make Ends Meet? **The Review of Economics and Statistics**, v. 66, n. 3, p. 500-505, 1984.
- DAVIDSON, R.; MACKINNON, J. G. **Estimation and inference in econometrics**. New York: Oxford University Press, 1993.
- DEATON, A. **The analysis of household surveys: a microeconomic approach to development policy**. Washington: World Bank Publications, 1997.
- DEATON, A.; IRISH, M. Statistical models for zero expenditures in household budgets. **Journal of Public Economics**, *Journal of Public Economics*. v. 23, n. 1-2, p. 59-80, 1984.
- DEATON, A.; MUELLBAUER, J. **Economics and consumer behavior**. Cambridge: Cambridge University Press, 1980a.
- DEATON, A.; MUELLBAUER, J. An almost ideal demand system. **The American Economic Review**, v. 70, n. 3, p. 312-326, 1980b.
- DEATON, A.; MUELLBAUER, J. On measuring child costs: With applications to poor countries. **The Journal of Political Economy**, v. 94, n. 4, p. 720-744, 1986.

- DEATON, A.; PAXSON, C. Economies of scale, household size, and the demand for food. **Journal of Political Economy**, v. 106, n. 5, p. 897-930, 1998.
- DEATON, A.; PAXSON, C. **Poverty among children and the elderly in developing countries**: Working Papers. New Jersey: Princeton University, Woodrow Wilson School of Public and International Affairs, Research Program in Development Studies., 1997.
- DEATON, A.; RUIZ-CASTILLO, J.; THOMAS, D. The influence of household composition on household expenditure patterns: theory and Spanish evidence. **The Journal of Political Economy**, v. 97, p. 179-200, 1989.
- DEATON, A.; ZAIDI, S. **Guidelines for Constructing Consumption Aggregates For Welfare Analysis**: LSMS Working Paper. Washington: The World Bank, 2002.
- DELEECK, H. La distribution inégale des dépenses sociales en Belgique. **Revue Politiques et Management Public**, v. 3, n. 3, p. 97-130, 1985.
- DELEECK, H.; BOSH, K. VAN DEN. The measurement of poverty in a comparative context: empirical evidence and methodological evaluation of four poverty lines in seven EC countries. *In*: Teekens, R. and van Praag, B.M.S. (eds). **Analysing Poverty in the European Community**: Policy Issues, Research Options and Data Sources. Office for Official Publications of the European Communities: Luxembourg, 1990.
- DINIZ, B. P. C. *et al.* As Pesquisas de Orçamentos Familiares no Brasil. *In*: SILVEIRA, F. G. *et al.* (Eds.). **Gasto e consumo das famílias brasileiras contemporânea**. Brasília: Ipea, 2007. v. 2.
- DOW, W.; NORTON, E. Choosing Between and Interpreting the Heckit and Two-Part Models for Corner Solutions. **Health Services and Outcomes Research Methodology**, v. 4, n. 1, p. 5-18, 2003.
- DRAPER, N. R.; COX, D. R. On Distributions and Their Transformation to Normality. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 31, n. 3, p. 472-476, 1969.
- DUAN, N. *et al.* A Comparison of Alternative Models for the Demand for Medical Care. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 1, n. 2, p. 115-126, 1983.
- DUBNOFF, S. **Experiments in the use of survey data for the measurement of income minima**. Boston: Center for Survey Research. University of Massachusetts, 1979.
- ENGEL, E. Die Lebenskosten belgischer Arbeiter-Familien früher und jetzt. **International Statistics Institute Bulletin**, v. 9, p. 1-74, 1895.
- FIELDS, G. S. **Distribution and Development: A New Look at the Developing World**. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2002.
- FISHER, G. M. The Development and History of the Poverty Thresholds. **Social Security Bulletin**, v. 55, n. 4, p. 3-14, 1992.
- FLIK, R. J.; PRAAG, B. M. S. Subjective poverty line definitions. **De Economist**, v. 139, n. 3, p. 311-330, 1991.

- FLOOD, L.; GRÅSJÖ, U. A Monte Carlo simulation study of Tobit models. **Applied Economics Letters**, v. 8, n. 9, p. 581-584, 2001.
- FOSTER, J.; GREER, J.; THORBECKE, E. A class of decomposable poverty measures. **Econometrica**, v. 52, n. 3, p. 761-766, 1984.
- FRIEDMAN, M.; SAVAGE, L. J. The utility analysis of choices involving risk. **The Journal of Political Economy**, v. 56, n. 4, p. 279-304, 1948.
- GAN, L.; VERNON, V. Testing the Barten model of economies of scale in household consumption: toward resolving a paradox of Deaton and Paxson. **Journal of Political Economy**, v. 111, n. 6, p. 1361-1377, 2003.
- GIBSON, J. Why Does the Engel Method Work? Food Demand, Economies of Size and Household Survey Methods. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, v. 64, n. 4, p. 341-359, 2002.
- GLEWWE, P. Household equivalence scales and the measurement of inequality : Transfers from the poor to the rich could decrease inequality. **Journal of Public Economics**, v. 44, n. 2, p. 211-216, 1991.
- GOEDHART, T. *et al.* The Poverty Line: Concept and Measurement. **The Journal of Human Resources**, v. 12, n. 4, p. 503-520, 1977.
- GORMAN, W. M. Separable utility and aggregation. **Econometrica**, v. 27, n. 3, p. 469-481, 1959.
- GORMAN, W. M. Tricks with utility functions. *In*: ARTIS, M.; NOBAY, R. (Eds.). **Essays in Economic Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. .
- GOULD, B. W. At-Home Consumption of Cheese: A Purchase-Infrequency Model. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 74, n. 2, p. 453-459, 1992.
- GOULD, W.; PITBLADO, J.; SRIBNEY, W. **Maximum likelihood estimation with Stata**. College Station: Stata Press, 2006.
- GOZALO, P. L. Nonparametric bootstrap analysis with applications to demographic effects in demand functions. **Journal of Econometrics**, v. 81, n. 2, p. 357-393, 1997.
- GREENE, W. H. **Econometric analysis**. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- GRONAU, R. Consumption technology and the intrafamily distribution of resources: adult equivalence scales reexamined. **The Journal of Political Economy**, v. 96, p. 1183-1205, 1988.
- GRONAU, R. The intrafamily allocation of goods-how to separate the adult from the child. **Journal of Labor Economics**, v. 9, p. 207-235, 1991.
- GUIMARÃES, T. P.; BELLUZZO, W. **Estimação de economias de escala no consumo familiar para o caso brasileiro**. *In*: XXXIV Encontro Nacional de Economia. Salvador, 2006.
- HAGENAARS, A. **The Perception of Poverty**. Amsterdam: North-Holland, 1986.

- HAGENAARS, A.; VOS, K. DE; ZAIDI, M. A. **Poverty statistics in the late 1980s : research based on micro-data**. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 1994.
- HÄRDLE, W. **Applied Nonparametric Regression**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- HARSANYI, J. C. **Rational Behaviour and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.
- HARTOG, J. Review: Poverty and the Measurement of Individual Welfare. **The Journal of Human Resources**, v. 23, n. 2, p. 243-266, 1988.
- HAUSMAN, J. A. Specification tests in econometrics. **Econometrica**, v. 46, p. 1251-1271, 1978.
- HECKMAN, J. J. Sample Selection Bias as a Specification Error. **Econometrica**, v. 47, n. 1, p. 153-161, 1979.
- HECKMAN, J. J. The common structure of statistical models of truncation, sample selection and limited dependent variables and a simple estimator for such models. **Annals of Economic and Social Measurement**, v. 5, n. 4, p. 475-492, 1976.
- HELSON, H. **Adaptation level theory**. New York: Harper & Row, 1964.
- HERWAARDEN, F. G. VAN; KAPTEYN, A. Empirical comparison of the shape of welfare functions. **Economics Letters**, v. 3, n. 1, p. 71-76, 1979.
- HOFFMANN, R. Elasticidades-renda das despesas e do consumo de alimentos no Brasil em 2002-2003. *In*: SILVEIRA, F. G. et al. (Eds.). **Gasto e consumo das famílias brasileiras contemporânea**. Brasília: Ipea, 2007. v. 2.
- HOFFMANN, R. **Distribuição de renda: medidas de desigualdade e pobreza**. São Paulo: Edusp, 1998.
- HOFFMANN, R. Mensuração da desigualdade e da pobreza no Brasil. *In*: HENRIQUES, R. (Ed.). **Desigualdade e pobreza no Brasil**. Rio de Janeiro: Ipea, 2000.
- HOROWITZ, J. L.; NEUMANN, G. R. Specification testing in censored regression models: Parametric and semiparametric methods. **Journal of Applied Econometrics**, v. 4, n. S1, p. S61-S86, 1989.
- IBGE. **Pesquisa de Orçamentos Familiares 2002-2003: primeiros resultados**. Rio de Janeiro: IBGE, 2004.
- IBGE. **Pesquisa Sobre Padrões de Vida 1996-1997: Microdados**. Rio de Janeiro: IBGE, 1997.
- IBGE. **Tabelas de Composição de Alimentos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1999.
- ISLAM, G. N. *et al.* Household Expenditure on Food Away from Home by Type of Meal in Malaysia. **Editorial Board**, p. 285, 2010.

- JENKINS, S. P.; COWELL, F. A. Parametric Equivalence Scales and Scale Relativities. **The Economic Journal**, v. 104, n. 425, p. 891-900, 1994.
- JENSEN, H. H.; YEN, S. T. Food Expenditures Away From Home by Type of Meal. **Canadian Journal of Agricultural Economics**, v. 44, n. 1, p. 67-80, 1996.
- JOHN, J. A.; DRAPER, N. R. An Alternative Family of Transformations. **Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)**, v. 29, n. 2, p. 190-197, 1980.
- JOHNSON, N. L. Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. **Biometrika**, v. 36, n. 1-2, p. 149-176, 1949.
- JONES, A. M. A note on computation of the double-hurdle model with dependence with an application to tobacco expenditure. **Bulletin of Economic Research**, v. 44, n. 1, p. 67-74, 1992.
- KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. **Judgment under uncertainty : heuristics and biases**. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 1982.
- KAPTEYN, A. **A theory of preference formation**. Leyden: Leyden University, 1977.
- KAPTEYN, A. The measurement of household cost functions. **Journal of Population Economics**, v. 7, n. 4, p. 333-350, 1994.
- KAPTEYN, A.; GEER, S. VAN DE; STADT, H. VAN DE. The impact of changes in income and family composition on subjective measures of well-being. *In*: DAVID, M.; SMEEDING, T. (Eds.). **Horizontal equity, uncertainty, and economic well-being**. Chicago: University of Chicago Press, 1985.
- KAPTEYN, A.; KOOREMAN, P.; WILLEMSE, R. Some Methodological Issues in the Implementation of Subjective Poverty Definitions. **The Journal of Human Resources**, v. 23, n. 2, p. 222-242, 1988.
- KAPTEYN, A.; PRAAG, B. VAN. A new approach to the construction of family equivalence scales. **European Economic Review**, v. 7, n. 4, p. 313-335, 1978.
- KAPTEYN, A.; WANSBEEK, T. Empirical evidence on preference formation. **Journal of Economic Psychology**, v. 2, p. 137-154, 1982.
- KAPTEYN, A.; WANSBEEK, T. The individual welfare function : A rejoinder. **Journal of Economic Psychology**, v. 6, n. 4, p. 375-381, 1985.
- KIMHI, A. Double-hurdle and purchase-infrequency demand analysis: a feasible integrated approach. **European Review of Agricultural Economics**, v. 26, n. 4, p. 425-442, 1999.
- KULLBACK, S.; LEIBLER, R. A. On Information and Sufficiency. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 22, n. 1, p. 79-86, 1951.
- LAMBERT, P. **The distribution and redistribution of income : a mathematical analysis**. 2a. ed. Manchester: Manchester University Press, 1993.

- LANCASTER, G.; RAY, R. Comparison of Alternative Models of Household Equivalence Scales: The Australian Evidence on Unit Record Data. **Economic Record**, v. 74, n. 224, p. 1–14, 1998.
- LANJOUW, P. **Constructing a Consumption Aggregate for the Purpose of Welfare Analysis: Principles, Issues and Recommendations Arising from the Case of Brazil**. Washington: The World Bank, 2009.
- LANJOUW, P.; RAVALLION, M. Poverty and household size. **The Economic Journal**, v. 105, n. 433, p. 1415–1434, 1995.
- LANKFORD, H. R.; WYCKOFF, J. H. Modeling Charitable Giving Using a Box-Cox Standard Tobit Model. **The Review of Economics and Statistics**, v. 73, n. 3, p. 460-470, 1991.
- LESER, C. E. V. Forms of Engel functions. **Econometrica**, v. 31, p. 694–703, 1963.
- LEWBEL, A. Consumer demand systems and household equivalence scales. *In*: PESARAN, M. H.; SCHMIDT, P. (Eds.). **Handbook of applied econometrics: Microeconomics**. Oxford: Blackwell, 1997. v. II. p. 167-201.
- LEWBEL, A. Household equivalence scales and welfare comparisons. **Journal of Public Economics**, v. 39, n. 3, p. 377–391, 1989.
- LEWBEL, A.; PENDAKUR, K. Equivalence Scales. *In*: DURLAUF, S.; BLUME, L. (Eds.). **The New Palgrave Dictionary of Economics**. 2a. ed. New York: Palgrave Macmillan, 2008.
- LEWBEL, A.; PENDAKUR, K. Estimation of collective household models with Engel curves. **Journal of Econometrics**, v. 147, n. 2, p. 350-358, dez. 2008.
- LIND, J. T. The Use of Household Welfare Functions to Estimate Equivalence Scales. **Statistisk Sentralbyrå**, v. 16/2000, 2000.
- LIVADA, A.; KANDILOROU, H.; TZORTZOPOULOS, P. Equivalence Scales and Heteroscedasticity. **The Indian Journal of Statistics, Sankhyā**. v. 58b, p. 288–301, 1996.
- LORENZ, M. O. Methods of Measuring the Concentration of Wealth. **Publications of the American Statistical Association**, v. 9, n. 70, p. 209-219, 1905.
- MANCERO, X. **Escalas de equivalencia: reseña de conceptos y métodos**. Santiago: CEPAL, 2001.
- MCCRACKEN, V. A.; BRANDT, J. A. Household Consumption of Food-Away-From-Home: Total Expenditure and by Type of Food Facility. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 69, n. 2, p. 274-284, 1987.
- MACKINNON, J. G.; MAGEE, L. Transforming the Dependent Variable in Regression Models. **International Economic Review**, v. 31, n. 2, p. 315-339, 1990.
- MADDALA, G. S. **Limited-dependent and qualitative variables in econometrics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

- MANLY, B. F. J. Exponential Data Transformations. **Journal of the Royal Statistical Society, Series D (The Statistician)**, v. 25, n. 1, p. 37-42, 1976.
- MARIANO, J. L.; FIGUEIREDO, E. A. **Efeitos da composição domiciliar e da escala equivalente sobre as medidas de desigualdade de renda e pobreza no Brasil**. In: XXXVI Encontro Nacional de Economia. Salvador, 2008.
- MEGHIR, C.; ROBIN, J.-M. Frequency of purchase and the estimation of demand systems. **Journal of Econometrics**, v. 53, n. 1-3, p. 53-85, 1992.
- MIHALOPOULOS, V.; DEMOUSSIS, M. An Infrequency of Purchase Model of Greek Household Clothing and Footwear Consumption with Error Dependence. **Spudai**, v. 52, n. 3, p. 85-99, 2002.
- MIHALOPOULOS, V. G.; DEMOUSSIS, M. P. Greek household consumption of food away from home: a microeconomic approach. **European Review of Agricultural Economics**, v. 28, n. 4, p. 421-432, 2001.
- MOFFATT, P. G. Hurdle models of loan default. **Journal of the Operational Research Society**, v. 56, n. 9, p. 1063-1071, 2005.
- MUELLBAUER, J. Testing the Barten model of household composition effects and the cost of children. **The Economic Journal**, v. 87, n. 347, p. 460-487, 1977.
- MUELLBAUER, J. The Estimation of the Prais-Houthakker Model of Equivalence Scales. **Econometrica**, v. 48, n. 1, p. 153-176, 1980.
- MURTHI, M. Engel Equivalence Scales in Sri Lanka: exactness, specification, measurement error. In: BLUNDELL, R.; PRESTON, I.; WALKER, I. (Eds.). **The Measurement of Household Welfare**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- MUTHÉN, B. Moments of the censored and truncated bivariate normal distribution. **British Journal of Mathematical and Statistical Psychology**, v. 43, n. 1, p. 131-143, 1990.
- MUTLU, S.; GRACIA, A. Spanish food expenditure away from home (FAFH): by type of meal. **Applied Economics**, v. 38, n. 9, p. 1037-1047, 2006.
- NELSON, J. A. Household equivalence scales: theory versus policy? **Journal of Labor Economics**, v. 11, n. 3, p. 471-493, 1993a.
- NELSON, J. A. Independent of a Base Equivalence Scales Estimation Using United States Micro-Level Data. **Annals of Economics and Statistics**, n. 29, p. 43-63, 1993b.
- NELSON, J. A. Methods of estimating household equivalence scales: an empirical investigation. **Review of Income and Wealth**, v. 38, n. 3, p. 295-310, 1992.
- NELSON, J. A. Household economies of scale in consumption: theory and evidence. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, v. 56, n. 6, p. 1301-1314, 1988.
- NEWMAN, C.; HENCHION, M.; MATTHEWS, A. Infrequency of purchase and double-hurdle models of Irish households' meat expenditure. **European Review of Agricultural Economics**, v. 28, n. 4, p. 393-419, 2001.

- NICHOLSON, J. L. Appraisal of different methods of estimating equivalence scales and their results. **The Review of Income and Wealth**, v. 22, n. 1, p. 1-11, 1976.
- OECD. **The OECD list of social indicators**. Paris: OECD, 1982.
- OLSEN, R. J. Distributional Tests for Selectivity Bias and a More Robust Likelihood Estimator. **International Economic Review**, v. 23, n. 1, p. 223-240, 1982.
- OLSEN, R. J. Note on the Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimator for the Tobit Model. **Econometrica**, v. 46, n. 5, p. 1211-1215, 1978.
- OLSEN, R. J. **The Analysis of Two Variable Models When One of the Variables Is Dichotomous**. New Haven: Yale University, 1975.
- PAES DE BARROS, R. *et al.* Sobre a Evolução Recente da Pobreza e da Desigualdade no Brasil. In: CASTRO, J. A.; VAZ, F. M. (Eds.). **Situação social brasileira**. Brasília: Ipea, 2011.
- PAGAN, A.; ULLAH, A. **Nonparametric econometrics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- PIGOU, A. C. **Wealth and welfare**. London: Macmillan & Cia, 1912.
- POIRIER, D. J. The Use of the Box-Cox Transformation in Limited Dependent Variable Models. **Journal of the American Statistical Association**, v. 73, n. 362, p. 284-287, 1978.
- POLLAK, R. A. Welfare comparisons and situation comparisons. **Journal of Econometrics**, v. 50, n. 1-2, p. 31-48, 1991.
- POLLAK, R. A.; WALES, T. J. Welfare comparisons and equivalence scales. **The American Economic Review**, v. 69, n. 2, p. 216-221, 1979.
- PRAAG, B. M. S. VAN. **Individual welfare functions and consumer behavior: A theory of rational irrationality**. Amsterdam: North-Holland, 1968.
- PRAAG, B. M. S. VAN; FRIJTERS, P. The measurement of welfare and well-being: The Leyden approach. In: KAHNEMAN, D.; DIENER, E.; SCHWARZ, N. (Eds.). **Well-being: The foundations of hedonic psychology**. New York: Russell Sage Foundation, 2003. p. 413-433.
- PRAAG, B. M. S. VAN. Ordinal and cardinal utility : An integration of the two dimensions of the welfare concept. **Journal of Econometrics**, v. 50, n. 1-2, p. 69-89, 1991.
- PRAAG, B. M. S. VAN. The welfare function of income in Belgium: an empirical investigation. **European Economic Review**, v. 2, p. 337-369, 1971.
- PRAAG, B. M. S. VAN; KAPTEYN, A. Further evidence on the individual welfare function of income: An empirical investigation in The Netherlands. **European Economic Review**, v. 4, n. 1, p. 33-62, 1973.
- PRAAG, B. M. S. VAN; SPIT, J. S.; STADT, H. VAN DE. A Comparison Between the Food Ratio Poverty Line and the Leyden Poverty Line. **The Review of Economics and Statistics**, v. 64, n. 4, p. 691-694, 1982.

- PRAAG, B. VAN; SAR, N. L. VAN DER. Household Cost Functions and Equivalence Scales. **The Journal of Human Resources**, v. 23, n. 2, p. 193-210, 1988.
- PRADHAN, M.; RAVALLION, M. Measuring Poverty Using Qualitative Perceptions of Consumption Adequacy. **Review of Economics and Statistics**, v. 82, n. 3, p. 462-471, 2000.
- PRAIS, S. J.; HOUTHAKKER, H. S. **The analysis of family budgets**. 2a. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1955.
- PRESS, W. H. *et al.* **Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- PUDNEY, S. **Modelling Individual Choice: the econometrics of corners, kinks, and holes**. Cambridge: Blackwell, 1989.
- RABIN, M. Psychology and economics. **Journal of economic literature**, v. 36, n. 1, p. 11-46, 1998.
- NEUMANN, J. VON; MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. Princeton: Princeton University Press, 1953.
- RAO, J. N. K.; WU, C. F. J. Resampling Inference with Complex Survey Data. **Journal of the American Statistical Association**, v. 83, n. 401, p. 231-241, 1988.
- RAO, J.; WU, C.; YUE, K. Some recent work on resampling methods for complex surveys. **Survey Methodology**, v. 18, n. 2, p. 209-217, 1992.
- RAVALLION, M.; LOKSHIN, M. Identifying Welfare Effects from Subjective Questions. **Economica**, v. 68, n. 271, p. 335-357, 2001.
- REYNOLDS, A.; SHONKWILER, J. S. Testing and correcting for distributional misspecifications in the Tobit model: An application of the Information Matrix test. **Empirical Economics**, v. 16, n. 3, p. 313-323, 1991.
- ROBBINS, L. **An essay on the nature and significance of economic science**. Londres: Ludwig von Mises Institute, 1937.
- ROBERTS, K. W. S. Interpersonal Comparability and Social Choice Theory. **The Review of Economic Studies**, v. 47, n. 2, p. 421-439, 1980.
- ROCHA, S. Medindo a pobreza no Brasil: evolução metodológica e requisitos de informação básica. In: LISBOA, M. DE B.; MENEZES-FILHO, N. A.; KASSOUF, A. L. (Eds.). **Microeconomia e sociedade no Brasil**. Rio de Janeiro: Contra Capa, 2001.
- ROCHA, S. **Opções metodológicas para a estimação de linhas de indigência e pobreza no Brasil**. Rio de Janeiro: Ipea, 2000. (Texto para discussão, n. 720).
- ROCHA, S. **Renda e Pobreza: Medidas per capita versus adulto-equivalente**. Rio de Janeiro: Ipea, 1998. (Texto para discussão, n. 609).

- ROTHBARTH, E. Note on a method of determining equivalent income for families of different composition. *In*: MADGE, C. (Ed.). **War-Time Pattern of Saving and Expenditure**. Cambridge: Cambridge University Press, 1943.
- SAMUELSON, P. A. Complementarity: An Essay on The 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory. **Journal of Economic Literature**, v. 12, n. 4, p. 1255-1289, 1974.
- SCHLESSELMAN, J. Power Families: A Note on the Box and Cox Transformation. **Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)**. v. 33, n. 2, p. 307-311, 1971.
- SCHULTE, J. **Equivalence Scales: Identification and Estimation**. Berlin: Universidade de Berlin, 2007.
- SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **The Annals of Statistics**, v. 6, n. 2, p. 461-464, 1978.
- SEIDL, C. How sensible is the Leyden individual welfare function of income? **European Economic Review**, v. 38, n. 8, p. 1633-1659, 1994.
- SEN, A. **Choice, welfare and measurement**. Cambridge: MIT Press, 1982.
- SEN, A. Issues in the Measurement of Poverty. **The Scandinavian Journal of Economics**, v. 81, n. 2, p. 285-307, 1979.
- SEN, A. On Weights and Measures: Informational Constraints in Social Welfare Analysis. **Econometrica**, v. 45, n. 7, p. 1539-1572, 1977.
- SEN, A. Poverty: An Ordinal Approach to Measurement. **Econometrica**, v. 44, n. 2, p. 219-231, 1976.
- SEN, A. **The standard of living**. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- SMITH, A. **An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations**. Londres: Methuen & Co., 1776.
- SMITH, M. D. On dependency in double-hurdle models. **Statistical Papers**, v. 44, n. 4, p. 581-595, 2003.
- SOARES, S. S. D. **Metodologias para Estabelecer a Linha de Pobreza: Objetivas, Subjetivas, Relativas, Multidimensionais**. Ipea: 2009. (Texto para discussão, n. 1381).
- SU, S.-J. B.; YEN, S. T. Microeconomic models of infrequently purchased goods: An application to household pork consumption. **Empirical Economics**, v. 21, n. 4, p. 513-533, 1996.
- SYDENSTRICKER, E.; KING, W. I. The measurement of the relative economic status of families. **Quarterly Publications of the American Statistical Association**, v. 17, n. 135, p. 842-857, 1921.
- THE WORLD BANK. **Brazil: Measuring Poverty Using Household Consumption**. Washington DC: The World Bank, 2007.

- TOBIN, J. Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables. **Econometrica**, v. 26, n. 1, p. 24-36, 1958.
- TSAKLOGLOU, P. Estimation and comparison of two simple models of equivalence scales for the cost of children. **The Economic Journal**, v. 101, n. 405, p. 343-357, 1991.
- UNITED NATIONS. **Household sample surveys in developing and transition countries**. New York: United Nations Publications, 2005.
- VARIAN, H. R. **Intermediate microeconomics: a modern approach**. New York: WW Norton, 1993.
- VASCONCELOS, M. Caracterização geral e principais aspectos metodológicos do ENDEF - Estudo Nacional de Despesas Familiares. *In: Consumo alimentar: grandes bases de informação*. São Paulo: Instituto Danone, 2000.
- VAZ, F. M.; SOARES, S. S. D. **Linhas de pobreza subjetivas para o Brasil**. *In: XXXVI Encontro Nacional de Economia*. Salvador, 2008.
- VAZ, F. M.; VAZ, K. C. **Estimação de Escalas de Equivalência para o Brasil**. *In: XXXV Encontro Nacional de Economia*. Recife, 2007
- VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. Princeton: Princeton University Press, 1953.
- VOS, K. DE; GARNER, T. I. An Evaluation of Subjective Poverty Definitions: Comparing Results from the U.S. and the Netherlands. **Review of Income and Wealth**, v. 37, n. 3, p. 267-285, 1991.
- VREDIN-JOHANSSON, M. **Determinants of charitable giving: evidence from hypothetical data on willingness to pay**. Umeå Economic Studies. Umeå: Umeå University, Department of Economics, 1999.
- VUONG, Q. H. Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses. **Econometrica**, v. 57, n. 2, p. 307-333, 1989.
- WANSBEEK, T.; KAPTEYN, A. Tackling Hard Questions by Means of Soft Methods: The Use of Individual Welfare Functions in Socio-Economic Policy. **Kyklos**, v. 36, n. 2, p. 249-269, 1983.
- WATTS, H. W. Comment on the Impact of Changes in Income and Family Composition on Subjective Measures of Well-Being. *In: SMEEDING, T.; DAVID, M. (Eds.). Horizontal Equity, Uncertainty, and Economic Well-Being*. Chicago: University of Chicago Press, 1985. p. 64-67.
- WEISBERG, S. **Yeo-Johnson power transformations**. Saint Paul (Minnesota), 2001.
- WHITE, H. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity. **Econometrica**, v. 48, n. 4, p. 817-838, 1980.
- WINKELMANN, R.; BOES, S. **Analysis of microdata**. 2nd ed. ed. Berlin: Springer, 2009.

WOOLDRIDGE, J. M. **Econometric analysis of cross section and panel data**. Massachusetts: MIT Press, 2002.

WORKING, H. Statistical laws of family expenditure. **Journal of the American Statistical Association**, v. 38, n. 221, p. 43–56, 1943.

YEN, S. T. Zero observations and gender differences in cigarette consumption. **Applied Economics**, v. 37, n. 16, p. 1839-1849, 2005.

YEN, S. T. Working Wives and Food away from Home: The Box-Cox Double Hurdle Model. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 75, n. 4, p. 884-895, 1993.

YEN, S. T.; HUANG, C. L. Household demand for finfish: A generalized double-hurdle model. **Journal of Agricultural and Resource Economics**, v. 21, n. 2, p. 220–234, 1996.

YEN, S. T.; JENSEN, H. H. Determinants of Household Expenditures on Alcohol. **Journal of Consumer Affairs**, v. 30, n. 1, p. 48-67, 1996.

YEN, S. T.; JONES, A. M. Household Consumption of Cheese: An Inverse Hyperbolic Sine Double-Hurdle Model with Dependent Errors. **American Journal of Agricultural Economics**, v. 79, n. 1, p. 246-251, 1997.

YEN, S. T.; KASTERIDIS, P. P.; RILEY, J. B. **Food Expenditures away from Home by Elderly Households**. Seattle, Washington: Agricultural and Applied Economics Association, 2012.

YEO, I.; JOHNSON, R. A. A new family of power transformations to improve normality or symmetry. **Biometrika**, v. 87, n. 4, p. 954 -959, 2000.

ZUEHLKE, T. W.; KASSEKERT, A. **Algorithmic errors in the estimation of Tobit II models and the corresponding failure to recognize selection bias**. 2008 Joint Statistical Meetings Program Committee. Anais... Denver: Working Paper, 2008

ZUEHLKE, T. W.; ZEMAN, A. R. A Comparison of Two-Stage Estimators of Censored Regression Models. **The Review of Economics and Statistics**, v. 73, n. 1, p. 185, fev. 1991.



## **APÊNDICE A - BASES DE DADOS**

### **A.1 PESQUISA DE ORÇAMENTOS FAMILIARES**

#### **A.1.1 Introdução**

A Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF), realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), é uma pesquisa domiciliar cujo objetivo principal é obter informações sobre a estrutura de despesas e rendimento das famílias. As informações captadas pela pesquisa servem para uma variedade de propósitos, dentre eles o de servir como base para a estrutura de ponderação dos Índices de Preços ao Consumidor do IBGE, tais como o IPCA e o INPC e compor as estimativas do consumo das famílias no Sistema de Contas Nacionais. Além das informações de despesas e rendimentos, a POF captura também aspectos demográficos e socioeconômicos das famílias brasileiras e informações adicionais que variam conforme a edição da pesquisa.

A unidade básica de investigação da pesquisa é denominada de “unidade de consumo” que, segundo a definição da pesquisa,

[...] compreende um único morador ou conjunto de moradores que compartilham a mesma fonte de alimentação, isto é, utilizam um mesmo estoque de alimentos e/ou realizam um conjunto de despesas alimentares comuns. Nos casos onde não existia estoque de alimentos nem despesas alimentares comuns, a identificação ocorreu através das despesas com moradia” (IBGE, 2004).

Esta definição difere tanto do conceito de “domicílio” quanto de “família” adotado pelo IBGE em outras pesquisas domiciliares. Tradicionalmente, atendendo às recomendações internacionais, o conceito “família” do IBGE refere-se às pessoas ligadas por laços de parentesco, dependência doméstica ou normas de convivência, sem referência explícita ao consumo ou a despesas. Segundo IBGE (2004), entretanto, na maior parte das

situações, a unidade de consumo da POF coincide com a “família” definida tradicionalmente, daí a sua utilização no nome da pesquisa.

A POF é realizada ao longo de um período de doze meses. Desta forma, além das despesas normais realizadas continuamente ao longo do ano, é possível observar as flutuações de despesas e rendimentos derivadas de fatores sazonais como as estações do ano (agasalho no inverno, refrigerantes, cervejas, água mineral no verão, etc.), variações nos preços em decorrência da safra ou da entressafra, ou ainda em períodos especiais, como: início do ano letivo, férias, Natal, etc.

Cada despesa tem um período de referência, que varia de um mínimo de 7 dias para despesas mais frequentes até um máximo de 12 meses para despesas de base anual. Como a POF combina um período de coleta de doze meses com períodos de referência de até 12 meses, para alguns itens de despesas ou rendimentos as informações estão distribuídas em um período de 24 meses, durante o qual se observam mudanças absolutas e relativas de preços. Para facilitar a análise destas informações, o IBGE extrapola anualmente todas as despesas captadas e deflaciona-as para uma determinada data, denominada de *data de referência*.

Nas pesquisas atuais, cada domicílio é investigado durante nove dias seguidos. No primeiro dia, o entrevistador se apresenta e coleta dados do domicílio e de seus moradores. Nos sete dias seguintes são coletadas as informações sobre aquisições, rendimentos, quantidades de alimentos e posse de bens duráveis. No nono dia ocorre o fechamento dos dados de despesas e rendimentos e o preenchimento de questionários suplementares, como o questionário de avaliação subjetiva das condições de vida da POF 2002-2003.

### **A.1.2 Edições da pesquisa**

Até hoje foram realizadas apenas cinco edições da pesquisa no Brasil.

A primeira edição foi realizada no biênio de 1974-1975 sob o nome de Estudo Nacional de Despesa Familiar – ENDEF. Esta pesquisa teve âmbito nacional, com exceção da área rural da Região Norte e de parte do Centro-Oeste e contou com objetivos múltiplos,

dentre os quais analisar a situação nutricional das famílias brasileiras. A pesquisa entrevistou 53.311 famílias e coletou não só dados de despesas, como também medidas antropométricas (peso e altura) de todos os indivíduos que estavam presentes em pelo menos uma refeição durante o período de captação da pesquisa. Além dessas informações, a ENDEF foi pioneira na apuração do consumo efetivo de alimentos, o que possibilitou a elaboração de uma tabela de conversão de conteúdo nutricional<sup>71</sup> (composição química, parte comestível e perdas no preparo) aplicada ao caso brasileiro (cf. IBGE, 1999).

Segundo Vasconcelos (2000), as visitas do entrevistador eram realizadas antes da preparação e ingestão das principais refeições do domicílio. Nestas visitas, os alimentos eram pesados ainda sem quaisquer transformações e sacos plásticos eram deixados para que fossem guardados os resíduos, as sobras e os desperdícios do alimento destinado à refeição, para posterior pesagem. Além disso, todos os alimentos comprados no dia eram pesados, exceto os alimentos industrializados que já continham a informação do peso líquido na embalagem. A partir destas informações, do número de pessoas presentes em cada refeição e da tabela de composição química dos alimentos, a pesquisa calculou a ingestão de nutrientes e energia de cada família.

A despesa com alimentos foi estimada a partir da valoração das quantidades efetivamente consumidas pelas famílias, e não do valor da despesa realizada para a compra de alimentos e bebidas durante o período de referência da pesquisa. Como a ENDEF também captou o valor das despesas efetuadas para a compra de alimentos e bebidas, a combinação destas duas estimativas de despesa permitiu separar as despesas monetárias (derivadas dos alimentos obtidos por compra) das despesas não-monetárias com alimentos. Estes dados foram tão importantes que por quase trinta anos foram utilizados como referência nos estudos sobre pobreza e nutrição no Brasil.

---

<sup>71</sup> Por meio dessas tabelas são determinadas as quantidades de gordura, proteínas, vitaminas, micronutrientes, bem como a quantidade de calorias e a parcela não-comestível (resíduos) de cada alimento.

Segundo IBGE (2004), despesas não monetárias correspondem a tudo que é produzido, pescado, caçado, coletado ou recebido em bens (troca, doação, retirada do negócio e salário em bens) que tenham sido utilizados ou consumidos pela família e que não tenham passado pelo mercado. Está incluído nesta categoria o aluguel imputado para moradores de domicílios próprios ou cedidos, produtos recebidos como doações, trocas diretas de mercadoria, caça, pesca, produção própria, retiradas de mercadorias de negócio gerido pela família, etc. Para efeito contábil, estes valores são computados tanto do lado da despesa quanto do lado dos rendimentos das famílias, exceto o aluguel imputado, cujo valor é computado integralmente no lado da despesa, mas tem seu valor deduzido pelas despesas com manutenção e reparos, impostos, taxas de serviços e seguros com o domicílio no lado do rendimento.

As duas edições seguintes da pesquisa, já sob o nome de Pesquisa de Orçamentos Familiares (POFs de 1987-1988 e 1995-1996), tiveram objetivos mais restritos, sendo concebidas principalmente para permitir a atualização das estruturas de ponderação dos índices de preços ao consumidor produzidos pelo IBGE. Por causa disso, estas pesquisas tiveram uma abrangência geográfica menor, sendo realizadas somente nas nove principais regiões metropolitanas do país (Belém, Fortaleza, Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo, Curitiba e Porto Alegre), além do município de Goiânia e do Distrito Federal, o que acabou se refletindo no número de famílias pesquisadas<sup>72</sup>. Outra consequência da mudança de objetivos é que as POFs de 1987-1988 e 1995-1996 não coletaram informações antropométricas das famílias e nem dados sobre rendimentos/despesas não monetárias<sup>73</sup>.

A POF 1987-1988 teve seu trabalho de campo iniciado em setembro de 1986, mas por causa do Plano Cruzado e da forte expansão do consumo que se verificou posteriormente, o objetivo principal da pesquisa foi afetado. Por conta disso, resolveu-se descartar os seis meses

---

<sup>72</sup> Foram investigadas 13.307 e 16.060 unidades de consumo nas pesquisas de 1987-1988 e 1995-1996 respectivamente.

<sup>73</sup> A única despesa/rendimento não monetária captado pela POF 1987-1988 foi o aluguel estimado para quem morava em domicílios próprios ou cedidos, mas este não foi incorporado no cálculo oficial dos rendimentos e das despesas das famílias pelo IBGE. A POF 1995-1996 não captou esta informação.

iniciais e estender a pesquisa por mais seis meses de modo a completar os doze meses contínuos de entrevistas necessários (Diniz *et al.*, 2007). Assim, o período considerado deve ser de março de 1987 a fevereiro de 1988, e a data de referência para valores monetários é 15 de outubro de 1987. A POF de 1995-1996 foi realizada no período entre outubro de 1995 e setembro de 1996 e adotou-se o dia 15 de setembro de 1996 como data de referência.

A quarta edição da pesquisa (POF 2002-2003) apresentou algumas diferenças importantes em relação às edições anteriores. Foram entrevistadas 48.568 unidades de consumo no período de julho de 2002 a junho de 2003, com data de referência dos valores fixada em 15 de janeiro de 2003<sup>74</sup>. Além da realização da pesquisa em todo o território brasileiro (inclusive áreas rurais) e do novo desenho amostral, a pesquisa investigou também as despesas não monetárias das famílias, bem como as informações antropométricas de seus moradores. Outra diferença significativa diz respeito à quantidade de produtos pesquisados, que passou de 3.300 nos anos de 1987-1988 e 1995-1996 para mais de dez mil produtos na POF 2002-2003 (Diniz *et al.*, 2007). Por fim, a POF 2002-2003 contou também com um questionário de avaliação subjetiva das condições de vida da população, no qual foram investigados diversos temas, dentre eles: a avaliação do responsável sobre a quantidade e a qualidade dos alimentos consumidos pela família, as condições de moradia do domicílio e o quanto o rendimento recebido era suficiente para cobrir as despesas da família.

A quinta e última edição da pesquisa até o momento (POF 2008-2009) assemelha-se em diversos aspectos com a edição anterior (POF 2002-2003), pois também contou com uma amostra nacional, investigou despesas monetárias e não-monetárias, investigou características antropométricas da população e contou com um questionário de avaliação subjetiva das condições de vida das famílias. Além desses aspectos comuns, a POF 2008-2009 realizou um estudo exploratório do consumo efetivo de alimentos para pessoas de 10 anos ou mais e alimentação infantil (alimentação na escola e aleitamento materno). Assim como ocorreu com a POF 2002-2003, o IBGE optou por divulgar os microdados da pesquisa

---

<sup>74</sup> Vale lembrar que o salário mínimo vigente nesta era de R\$ 200,00 (duzentos reais).

aos poucos, conforme as informações dos questionários fossem sendo apuradas por críticas internas. Até o momento da elaboração deste trabalho o IBGE não havia divulgado completamente os dados da POF 2008-2009, motivo pelo qual se optou utilizar a edição de 2002-2003 nesta tese.

### **A.1.3 A Pesquisa de Orçamentos Familiares 2002-2003**

#### **A.1.3.1 Questionários**

A POF 2002-2003 possui cinco questionários principais. O primeiro questionário (POF-1) investiga as condições do domicílio (abastecimento de água, infraestrutura sanitária, número de cômodos, etc) e as características dos moradores (sexo, nível de instrução, idade, frequência à escola, peso e altura). O segundo questionário (POF-2) investiga as despesas coletivas, como os gastos com serviços públicos, aluguéis, taxas, decoração, reformas no domicílio, gastos com bens de consumo duráveis e gastos com serviços domésticos. O terceiro questionário (POF-3) investiga os gastos diários com alimentação e higiene e limpeza da unidade de consumo como um todo. O quarto questionário (POF-4) investiga as despesas individuais com vestuário, saúde, educação, higiene pessoal, transporte, etc. Por fim, o quinto questionário (POF-5) investiga todos os rendimentos, incluindo aqueles provenientes do trabalho, de transferências, das vendas e aluguéis de bens móveis e imóveis e das aplicações financeiras<sup>75</sup>, assim como todas as deduções destes rendimentos (impostos, taxas e outras deduções). Além desses cinco questionários, foi acrescentado na POF 2002-2003 um sexto questionário para a avaliação subjetiva das condições de vida da população.

Cada item de despesa possui um período de apuração. O período de referência para a coleta das despesas com alimentação na POF 2002-2003, por exemplo, é de apenas 7 dias, e os valores das despesas capturadas neste período são multiplicados por 52 para representar a despesa alimentar da família de todo o ano. Outros itens de despesas possuem períodos de

---

<sup>75</sup> O rendimento de aplicações financeiras utilizado pelo IBGE, além de juros, ganhos com operações financeiras de títulos de renda, lucros e dividendos em dinheiro atribuídos a ações e correções de poupança, inclui também saques de poupança e resgate de cotas de fundos de investimento (IBGE, 2004, p. 34).

referência diferentes, podendo ser de 30 dias, 90 dias ou 12 meses. A Tabela A.1 mostra o período de apuração de cada grupo de despesas da POF 2002-2003.

Tabela A.1 - Períodos de referência das informações de despesas da POF 2002-2003

Questionário - POF	Despesas coletadas	Período	
De despesa coletiva	Despesas com serviços e taxas do domicílio	90 dias	
	Manutenção e pequenos reparos com habitação, jazigo e jardinagem	90 dias	
	Conserto e manutenção de utensílios domésticos	90 dias	
	Despesas com habitação	12 meses	
	Despesas com construção e reforma de habitação e de jazigo	12 meses	
	Outros serviços e taxas de habitação	12 meses	
	Aluguel de aparelhos de uso doméstico	12 meses	
	Aquisição de aparelhos e máquinas de uso doméstico	12 meses	
	Aquisição de instrumentos musicais e fotográficos e de utilidades de uso doméstico	12 meses	
	Aquisição de móveis	12 meses	
	Artigos de decoração e forração	12 meses	
	Despesas com serviços domésticos	12 meses	
	Caderneta de despesa coletiva	Alimentação dentro do domicílio e artigos de higiene e limpeza	7 dias
De despesa individual	Despesas com comunicações	7 dias	
	Despesas com transportes	7 dias	
	Despesas com alimentação fora	7 dias	
	Despesas com fumo	7 dias	
	Despesas com jogos e apostas	7 dias	
	Despesas com leitura	7 dias	
	Despesas com diversões, esportes e apostas	30 dias	
	Despesas com produtos farmacêuticos	30 dias	
	Despesas com artigos de higiene e beleza	30 dias	
	Despesas com serviços pessoais	90 dias	
	Despesas com artigos de papelaria	90 dias	
	Despesas com brinquedos e recreação	90 dias	
	Despesas com roupas de homem	90 dias	
	Despesas com roupas de mulher	90 dias	
	Despesas com roupas de criança	90 dias	
	Despesas com artigos de armário	90 dias	
	Despesas com bolsas, calçados e cintos	90 dias	
	Despesas com artigos de banheiro, copa e cozinha	90 dias	
	Outras despesas	90 dias	
	Despesas com viagens	90 dias	
	Despesas com assistência à saúde	90 dias	
	Despesas com acessórios e manutenção de veículos	90 dias	
	Despesas com serviços bancários e profissionais	90 dias	
	Despesas com cerimônias familiares e religiosas	12 meses	
	Despesas com jóias, relógios e aparelhos celulares	12 meses	
	Despesas com outros imóveis	12 meses	
	Despesas com contribuições e transferência financeiras	12 meses	
	Despesas com educação	12 meses	
	Despesas com documentação, seguro com veículos	12 meses	
	Despesas com aquisição de veículos	12 meses	
	De rendimento individual	Rendimentos recebidos e deduções	12 meses
		Outros rendimentos, receitas, empréstimos e deduções	12 meses
		Movimentação do ativo financeiro	12 meses

Fonte: Adaptado de Diniz et al. (2007, p. 34-38, Quadro 1)

Para coletar os gastos com alimentação e alguns itens de higiene pessoal, o IBGE disponibiliza para o entrevistado uma caderneta de anotações para ele registrar todas as suas despesas com alimentação ao longo de uma semana. No caso dos itens de aquisição menos frequente, a coleta dos dados se dá por meio recordatório, baseando-se nos registros existentes: recibos, contracheques, boletos, etc. Uma vez coletadas as informações de despesas, os valores apurados no período de referência são expandidos e deflacionados de maneira a representar a despesa anual da família com aquele item.

#### **A.1.3.2 Amostra**

A POF 2002-2003 adotou um plano amostral com dois estágios de seleção, com estratificação geográfica e estatística (diga-se, socioeconômica) das unidades primárias de amostragem, sendo os setores censitários do Censo Demográfico de 2000 as unidades primárias e os domicílios as unidades secundárias. Os setores censitários foram selecionados por amostragem sistemática com probabilidade proporcional ao número de domicílios no setor, enquanto os domicílios foram selecionados por amostragem aleatória simples dentro dos setores selecionados (IBGE, 2004). Em seguida, os setores selecionados foram distribuídos ao longo dos doze meses de duração da pesquisa, garantindo “em todos os trimestres a coleta em todos os estratos geográficos e socioeconômicos” (IBGE, 2004, p. 37).

A estratificação geográfica teve como objetivo espalhar a amostra ao longo do território brasileiro, enquanto a estratificação estatística teve por objetivo garantir a representatividade dos domicílios de todos os níveis de renda. Nas POFs anteriores, os estratos estatísticos foram definidos com base nas informações de rendimentos investigadas nos Censos Demográficos. Como na época em que se deu o planejamento amostral da POF 2002-2003 os dados do Censo Demográfico de 2000 ainda não estavam liberados, o IBGE utilizou como variável de estratificação os anos de estudo do responsável pelo domicílio obtidos pela Contagem da População de 1996, dado que esta pesquisa não investigou a variável rendimento (IBGE, 2004). Segundo Diniz *et al.* (2007), este desenho amostral permite a análise dos dados da pesquisa para 70 domínios geográficos, a saber: as populações totais e

urbanas das 27 unidades da federação, as áreas rurais das cinco grandes regiões, as nove regiões metropolitanas, além de Goiânia e Distrito Federal.

Como cada domicílio pertencente à amostra da pesquisa representa um determinado número de domicílios da população de onde a amostra foi selecionada, o IBGE incorporou junto aos microdados da POF um fator de expansão que, “atribuído às características investigadas pela POF, permite a obtenção de estimativas das quantidades de interesse para o universo da pesquisa” (IBGE, 2004, p. 40). Estes fatores de expansão foram calculados inicialmente a partir do plano amostral e posteriormente ajustados para que o número de pessoas batesse com as projeções de população do IBGE obtidas para 15 de janeiro de 2003.

### **A.1.3.3 Organização dos dados**

Para publicação dos dados, as informações de despesas e rendimentos da POF são organizadas em diversos grupos, conforme uma classificação definida pelo IBGE. Itens desagregados de despesas como compra de lápis ou tinta de parede são organizados em subgrupos como “artigos escolares” ou “manutenção do lar” respectivamente. Estes subgrupos por sua vez vão compor as “despesas com educação” e as “despesas com habitação” respectivamente. Os grupos de despesas mais agregados são as despesas de consumo, as despesas correntes e a despesa total. A Tabela A.2 mostra os grupos e subgrupos de acordo com o recuo dos rótulos. Por questões de espaço, não aparecem na tabela os subgrupos das despesas com alimentação, cujos principais componentes são a “alimentação no domicílio” e a “alimentação fora do domicílio”.

As despesas de consumo correspondem às despesas com alimentação, habitação, vestuário, transporte, higiene e cuidados pessoais, assistência à saúde, educação, recreação e cultura, fumo, serviços pessoais e despesas diversas. As despesas correntes são calculadas a partir da soma das despesas de consumo com as “outras despesas correntes”, compostas por impostos, contribuições trabalhistas, serviços bancários, pensões, mesadas, doações e outras. Por fim, a despesa total consiste na soma das despesas correntes com as despesas com

aumento de ativo (aquisição de imóvel, a reforma de imóvel e outros investimentos) e diminuição de passivo (pagamentos de empréstimos, carnês e prestações de imóvel).

Tabela A.2 - Despesa média mensal familiar por tipo - POF 2002-2003

<b>Tipos de despesa</b>	<b>Despesa média mensal familiar</b>
Despesa total	1.778,03
Despesas correntes	1.658,27
Despesas de consumo	1.465,31
Alimentação	304,12
Habitação	520,22
Aluguel	240,83
Serviços e taxas	135,18
Energia elétrica	39,27
Telefone fixo	31,86
Telefone Celular	11,29
Gás doméstico	20,03
Água e esgoto	13,85
Outros	18,88
Manutenção do lar	60,69
Artigos de limpeza	11,75
Mobiliários e artigos do lar	32,98
Eletrodomésticos	33,34
Consertos artigos do lar	5,45
Vestuário	83,21
Roupa de homem	21,12
Roupa de mulher	23,18
Roupa de criança	12,16
Calçados e apetrechos	20,93
Jóias e bijuterias	4,43
Tecidos e armarinhos	1,39
Transporte	270,16
Urbano	42,31
Gasolina - veículo próprio	52,52
Álcool - veículo próprio	5,55
Manutenção - veículo próprio	24,90
Aquisição de veículos	105,39
Viagens	22,96
Outras	16,52
Higiene e Cuidados Pessoais	31,80
Perfume	11,54
Produtos para cabelo	3,33
Sabonete	2,20
Instrumentos e produtos de uso pessoal	14,73
Assistência a saúde	95,14
Remédios	38,60
Plano/Seguro saúde	26,84
Consulta e tratamento dentário	9,59
Consulta médica	5,10
Tratamento ambulatorial	1,05
Serviços de cirurgia	4,22
Hospitalização	1,05
Exames diversos	2,88
Material de tratamento	4,94
Outras	0,86

(...continua na próxima página)

(...continuação)

Tipos de despesa	Despesa média mensal familiar
Educação	59,86
Cursos regulares	17,78
Curso superior	19,97
Outros cursos	11,27
Livros didáticos e revistas técnicas	2,70
Artigos escolares	4,15
Outras	3,98
Recreação e cultura	34,95
Brinquedos e jogos	4,67
Celular e acessórios	3,85
Periódicos, livros e revistas	5,81
Diversões e esportes	18,75
Outras	1,87
Fumo	10,20
Serviços pessoais	14,85
Cabeleireiro	9,21
Manicuro e pedicuro	2,82
Consertos de artigos pessoais	0,50
Outras	2,32
Despesas diversas	40,81
Jogos e apostas	4,33
Comunicação	3,99
Cerimônias e festas	8,42
Serviços profissionais	11,11
Imóveis de uso ocasional	5,87
Outras	7,09
Outras despesas correntes	192,97
Impostos	79,31
Contribuições trabalhistas	49,16
Serviços bancários	12,10
Pensões, mesadas e doações	27,36
Previdência privada	5,23
Outras	19,82
Aumento do ativo	84,59
Imóvel (aquisição)	49,33
Imóvel (reforma)	34,82
Outros investimentos	0,44
Diminuição do passivo	35,17
Empréstimo e carnê	18,84
Prestação de imóvel	16,33

Fonte: IBGE (2004).

No caso dos rendimentos, temos dois grupos principais: o rendimento monetário e o rendimento não monetário. Conforme foi dito na Seção A.1.2, os rendimentos não monetários correspondem ao valor das despesas não monetárias subtraindo-se o valor das despesas com manutenção e reparos, impostos, taxas de serviços e seguros que são deduzidas do aluguel imputado. Os rendimentos monetários consistem em todo o resto: rendimentos do trabalho, transferências, rendimentos de aluguel e outros rendimentos. A soma do rendimento monetário com o não-monetário constitui o rendimento total.

Tabela A.3 - Rendimento médio mensal familiar por tipo - POF 2002-2003

Tipos de rendimento	Rendimento médio mensal familiar
Rendimento total	1.789,66
Rendimento do trabalho	1.109,39
Empregado	759,65
Empregador	129,41
Conta própria	220,33
Transferência	268,78
Aposentadoria previdência pública	201,43
Aposentadoria previdência privada	14,41
Bolsa de estudo	6,20
Pensão alimentícia, mesada ou doação	27,31
Transferência transitória	19,43
Rendimento de aluguel	32,80
Aluguel de bens imóveis	29,82
Aluguel de bens móveis	2,98
Outros rendimentos	117,73
Vendas esporádicas	67,79
Empréstimos	13,65
Aplicações de capital	24,89
Outros	11,40
Rendimento não monetário	260,96

Fonte: IBGE (2004).

Para infelicidade do pesquisador, o IBGE não disponibilizou junto com a documentação dos microdados das POFs de 1987-1988, 1995-1995 e 2002-2003<sup>76</sup> o plano tabular que permite transformar os itens de despesas e rendimentos da pesquisa nos grandes grupos e subgrupos de despesas e rendimentos apresentados pelo IBGE em suas publicações. Para estas edições da pesquisa, o plano tabular tem que ser conseguido junto com técnicos do IBGE. A posse do plano tabular, no entanto, não garante que será possível replicar os dados publicados pelo IBGE a partir da manipulação dos microdados da POF. Isto porque em alguns casos o plano tabular apresenta códigos de despesas que não existem nos microdados. Em outros casos, alguns itens de despesas e rendimentos recebem tratamento especial não documentado, tornando impossível a replicação dos dados<sup>77</sup>.

<sup>76</sup> Os microdados da ENDEF nunca foram divulgados pelo IBGE. Somente a edição da POF de 2008-2009 incluiu o plano tabular na documentação da pesquisa.

<sup>77</sup> Cf. Diniz et al. (2007) para estas e outras dificuldades com o manuseio dos microdados da POF.

O caso mais notório ocorre com os dados de rendimento da POF 2002-2003. Pequenas críticas realizadas pelo IBGE no momento da publicação dos dados (e, portanto, não incorporadas aos microdados) fazem com que não seja possível replicar de forma exata os rendimentos do trabalho e os rendimentos de aposentadorias, embora seja possível replicar o rendimento total das unidades de consumo. Dada a tradicional recusa do IBGE em fornecer programações e algoritmos para pesquisadores de fora do instituto, as tentativas de replicação dos dados tiveram que ser feitas por meio de tentativa e erro, com algumas dúvidas sanadas verbalmente com técnicos do IBGE. No entanto, citando Diniz *et al.* (2007), “apesar das indicações fornecidas [pelos técnicos do IBGE] e das diversas tentativas feitas, chegamos a um ponto em que o trabalho de reprodução se mostrou infundável”. No geral, portanto, chegou-se a uma boa replicação dos dados de despesas e dos valores totais dos dados de rendimentos. Para as rubricas específicas dos rendimentos citadas acima, no entanto, não foi possível replicar fielmente os dados divulgados do IBGE.

#### **A.1.3.4 Tratamentos específicos das informações**

Ao longo do tempo ocorreram diversas mudanças na forma de classificação dos itens de despesas nos grupos de despesas publicados pelo IBGE, bem como a discriminação das principais rubricas de despesa em subgrupos. Por causa disto, os dados publicados pelas diferentes edições da pesquisa para as mesmas unidades geográficas não são diretamente comparáveis. Um dos principais exemplos é o item “aquisição de veículos”, que nas POFs de 1987-1988 e 1995-1996 pertencia ao grupo de despesas “aumento de ativos”, mas a partir da POF 2002-2003 passou a figurar no grupo de “despesas com transportes”, dentro, portanto, do grupo geral de despesas de consumo. Outras mudanças importantes que ocorreram ao longo do tempo foram as despesas referentes às contribuições previdenciárias dos trabalhadores domésticos e despesas com reforma do imóvel e manutenção do lar, além de diversas mudanças específicas não documentadas por nenhum pesquisador<sup>78</sup>. Isto faz com que o

---

<sup>78</sup> Cf. Castro e Vaz (2007) e Diniz *et al.* (2007) para algumas mudanças conhecidas

pesquisador tenha que trabalhar os dados da POF à sua maneira, mudando ou criando grupos de despesas e rendimentos conforme o objetivo desejado.

Um dos tratamentos específicos adotados nesta tese consistiu em adaptar a despesa de consumo da POF de maneira a torná-la mais próxima do conceito de “métrica monetária da utilidade”. Este conceito, definido primeiramente por Samuelson (1974), consiste em uma medida simples de bem-estar social: ele equivale ao montante de dinheiro necessário para trazer um indivíduo a um determinado nível de bem-estar. Em outras palavras, a métrica monetária da utilidade mede o nível de vida das famílias pelo montante de dinheiro necessário para sustentá-lo. Deaton e Zaidi (2002) mostram que este conceito pode ser aproximado empiricamente adicionando-se todas as despesas de consumo do domicílio e dividindo-as por um índice de Paasche de preços. O agregado de consumo assim construído pode ser utilizado como uma medida de bem-estar econômico do domicílio, de modo que o bem-estar dos domicílios pode ser ordenado com base nesta medida.

Para tornar a despesa de consumo mais próxima do conceito de “métrica monetária da utilidade”, adotaram-se algumas das recomendações dadas por Deaton e Zaidi (2002) e Lanjouw (2009), a saber: 1) excluíram-se as despesas com aquisição de veículos do grupo de despesas com transporte, realocando este item para fora das despesas de consumo, dentro do aumento de ativo; 2) excluíram-se das despesas de consumo e de seus subgrupos aqueles itens adquiridos para outras unidades de consumo. Quanto aos preços, não foi adotado um deflacionamento por um índice de Paasche conforme sugerido por Deaton e Zaidi (2002), pois a base de dados utilizada refere-se a uma única *cross section*. Dessa forma, a variável denominada *despesa domiciliar* ou *despesa de consumo domiciliar* e suas respectivas funções utilizadas em vários capítulos consistem nesta variável transformada.

## **A.2 PESQUISA SOBRE PADRÕES DE VIDA**

A Pesquisa Sobre Padrões de Vida (PPV) originou-se de um convênio entre o IBGE e o Banco Mundial para integrar o núcleo de pesquisas denominado de *Living Standards Measurement Study* (LSMS) realizado em diversos países em desenvolvimento. Ela foi

realizada no período de março de 1996 a fevereiro de 1997 e entrevistou 4.940 domicílios na forma de uma pesquisa piloto. A abrangência geográfica limita-se às áreas urbanas e rurais das regiões Nordeste e Sudeste, divididas em 10 estratos: Regiões Metropolitanas de Fortaleza, Recife e Salvador, restante da área urbana do Nordeste, restante da área rural do Nordeste, Regiões Metropolitanas de Belo Horizonte, Rio de Janeiro e São Paulo, restante da área urbana do Sudeste e restante da área rural do Sudeste.

O objetivo da pesquisa foi realizar um levantamento sobre diversos temas para representar o Brasil no conjunto de pesquisas denominado de LSMS do Banco Mundial. Dentre estes objetivos, merecem destaque: *a)* mostrar um panorama do bem-estar dos domicílios e analisar os seus determinantes; *b)* identificar os efeitos das políticas governamentais nas condições de vida dos domicílios (IBGE, 1997).

O desenho amostral é semelhante àquele utilizado na Pesquisa de Orçamentos Familiares: optou-se por um desenho com dois estágios de seleção, com estratificação das unidades primárias (setores do Censo Demográfico de 1991) e seleção aleatória das unidades do segundo estágio (domicílios). A estratificação das unidades primárias foi feita com base em critérios geográficos (10 estratos geográficos, conforme citado acima) e estatísticos (leia-se, socioeconômicos), utilizando-se três estratos baseados na renda média mensal da pessoa de referência do domicílio captada pelo questionário do universo do Censo Demográfico de 1991. Os setores da amostra foram distribuídos proporcionalmente pelos quatro trimestres do ano, de forma que, em cada trimestre, houvesse a representatividade dos dez estratos geográficos.

O questionário da pesquisa é bem vasto, até demais para uma pesquisa com amostra tão pequena, e contempla uma diversidade de temas investigados. Além das características gerais dos moradores e dos domicílios presentes em todas as pesquisas domiciliares, a PPV investigou também:

- a)* O gasto monetário com moradia, educação, saúde, consumo alimentar, despesas com bens e serviços, assim como o custo da produção para moradores envolvidos em atividades de indústria, comércio, serviços, agropecuária e pesca.

- b)* Os bens e serviços doados ou trocados pelos moradores do domicílio (despesas não-monetárias) através da valoração de seus custos a partir do valor de mercado, coletados através de um questionário de preços.
- c)* Questões detalhadas sobre o rendimento do trabalho (salário, bônus, compensações e benefícios) e, no âmbito do domicílio, rendimentos líquidos provenientes de empreendimentos exercidos por moradores, de investimentos financeiros e de outras fontes variadas de renda, como transferências, pensões, ganhos em loterias, etc.
- d)* Questões diversas sobre as condições de moradia, as tendências demográficas (migração, fecundidade, história dos nascimentos), acesso aos serviços de educação e saúde, nutrição, antropometria e avaliação das condições de vida.

## APÊNDICE B - COMPLEMENTO DO CAPÍTULO 3

### B.1 DERIVADAS DA FUNÇÃO DE VEROSSIMILHANÇA EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS

#### B.1.1 Modelo de Barreira Dupla com transformação IHS e erros correlacionados

Considere a seguinte notação

$$\begin{aligned}
 C_z &= z_i' \alpha & C_{zx} &= \frac{z_i' \alpha - \frac{\rho}{\sigma_i} x_i' \beta}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\
 C_x &= \frac{x_i' \beta}{\sigma_i} & C_{xz} &= \frac{x_i' \beta / \sigma_i - \rho z_i' \alpha}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\
 C_\varepsilon &= \frac{T(\lambda, y_i) - x_i' \beta}{\sigma_i} & C_{z\varepsilon} &= \frac{z_i' \alpha + \frac{\rho}{\sigma_i} (T(\lambda, y_i) - x_i' \beta)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\
 \\ 
 \phi_z &= \phi(C_z) & \Phi_z &= \Phi(C_z) \\
 \phi_x &= \phi(C_x) & \Phi_x &= \Phi(C_x) \\
 \phi_\varepsilon &= \phi(C_\varepsilon) & \\
 \phi_{zx} &= \phi(C_{zx}) & \Phi_{zx} &= \Phi(C_{zx}) \\
 \phi_{xz} &= \phi(C_{xz}) & \Phi_{xz} &= \Phi(C_{xz}) \\
 \phi_{z\varepsilon} &= \phi(C_{z\varepsilon}) & \Phi_{z\varepsilon} &= \Phi(C_{z\varepsilon}) \\
 \psi &= \psi(C_z, C_x, \rho) & \Psi &= \Psi(C_z, C_x, \rho) \\
 \sigma_i &= \exp(h_i' \gamma) & &
 \end{aligned}$$

A função de log-verossimilhança do modelo de barreira dupla com erros correlacionados é dada por

$$\begin{aligned}
 l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}, \rho, \lambda) = & \sum_{\{i: y_i=0\}} \left\{ \ln \left[ 1 - \Psi \left( \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}, \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma_i}, \rho \right) \right] \right\} \\
 & + \sum_{\{i: y_i>0\}} \left\{ \ln \Phi \left( \frac{\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} + \frac{\rho}{\sigma_i} (T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) - \ln \sigma_i + \ln \phi \left( \frac{T(\lambda, y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma_i} \right) \right\} \quad (\text{B.1}) \\
 & - \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{2} \ln(1 + \lambda^2 y_i^2)
 \end{aligned}$$

Derivando-se esta função em relação aos parâmetros do modelo, obtém-se

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = - \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{\phi_z \Phi_{zx}}{1 - \Psi} \mathbf{z}_i + \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\phi_{z\epsilon}}{\Phi_{z\epsilon}} \mathbf{z}_i \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} = - \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{1}{\sigma_i} \frac{\phi_x \Phi_{zx}}{1 - \Psi} \mathbf{x}_i + \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma_i} \left[ \frac{-\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\phi_{z\epsilon}}{\Phi_{z\epsilon}} + C_\epsilon \right] \mathbf{x}_i \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{y}} = \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{1}{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\boldsymbol{y}} \frac{\phi_x \Phi_{zx}}{1 - \Psi} C_x + \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\boldsymbol{y}} \left[ - \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\phi_{z\epsilon}}{\Phi_{z\epsilon}} C_\epsilon + (C_\epsilon)^2 - 1 \right] \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{\{i: y_i>0\}} \left\{ \frac{1}{\lambda \sigma_i} \left( \frac{y_i}{\sqrt{1 + \lambda^2 y_i^2}} - T(\lambda, y_i) \right) \left[ \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\phi_{z\epsilon}}{\Phi_{z\epsilon}} - C_\epsilon \right] - \frac{\lambda y_i^2}{1 + \lambda^2 y_i^2} \right\} \quad (\text{B.5})$$

O modelo de barreira dupla IHS com erros independentes é obtido com  $\rho = 0$  e o modelo Tobit IHS é obtido com  $\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha} \rightarrow \infty$  e  $\rho = 0$ . As variações destes modelos sem a transformação IHS são obtidas fazendo  $\lambda = 0$ .

### B.1.2 Modelo de Infrequência de Aquisição com transformação IHS

Considere a mesma notação da Seção B.1.1 anterior, mas com  $T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i)$  no lugar de  $T(\lambda, y_i)$ . A função de log-verossimilhança do modelo de infrequência de aquisição é dada pela fórmula abaixo

$$\begin{aligned}
 l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}, \lambda) = & \sum_{\{i: y_i=0\}} \ln \left[ 1 - \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) \Phi \left( \frac{\mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma_i} \right) \right] \\
 & + \sum_{\{i: y_i>0\}} \left\{ 2 \ln \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) - \ln \sigma_i + \ln \phi \left( \frac{T(\lambda, \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha}) y_i) - \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta}}{\sigma_i} \right) \right\} \\
 & - \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{2} \ln (1 + \lambda^2 \Phi(\mathbf{z}'_i \boldsymbol{\alpha})^2 y_i^2)
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Derivando-se esta função em relação aos parâmetros do modelo, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = & - \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{\phi_z \Phi_x}{1 - \Phi_z \Phi_x} \mathbf{z}_i \\
 & + \sum_{\{i: y_i>0\}} \left\{ 2 \frac{\phi_z}{\Phi_z} - \frac{\phi_z y_i}{\sqrt{1 + (\lambda \Phi_z y_i)^2}} \left[ \frac{\lambda^2 y_i \Phi_z}{\sqrt{1 + (\lambda \Phi_z y_i)^2}} + \frac{1}{\sigma} C_\varepsilon \right] \right\} \mathbf{z}_i
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} = - \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{1}{\sigma} \frac{\phi_x \Phi_z}{1 - \Phi_z \Phi_x} \mathbf{x}_i + \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma} C_\varepsilon \mathbf{x}_i \tag{B.8}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{y}} = \sum_{\{i: y_i=0\}} \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\boldsymbol{y}} \frac{\phi_x \Phi_z}{1 - \Phi_z \Phi_x} C_x + \sum_{\{i: y_i>0\}} \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\boldsymbol{y}} \left[ (C_\varepsilon)^2 - 1 \right] \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = \sum_{\{i: y_i>0\}} \left\{ - \frac{1}{\lambda \sigma} \left( y_i \frac{\Phi_z}{\sqrt{1 + (\lambda \Phi_z y_i)^2}} - T(\lambda, \Phi_z y_i) \right) C_\varepsilon - \lambda \left[ y_i \frac{\Phi_z}{\sqrt{1 + (\lambda \Phi_z y_i)^2}} \right]^2 \right\} \tag{B.10}$$

## B.2 PARÂMETROS ESTIMADOS

Tabela B.1 - Parâmetros estimados do do modelo de Barreira Dupla IHS com erros independentes

Variável	Equação de participação		Equação de consumo		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	0,0411*	0,0040	-5,7449*	0,2923	-3,4924*	0,1157
logxn	0,0009	0,0006	1,0123*	0,0492		
logn	0,0014	0,0010	1,2940*	0,0671		
peessoas_0_4	-0,0199*	0,0033	-0,4860*	0,1761		
peessoas_5_9	-0,0119*	0,0028	-0,1020	0,1677		
peessoas_10_14	-0,0069*	0,0024	0,0767	0,1547		
peessoas_65_mais	-0,0161*	0,0047	-0,7448*	0,1826		
cartao	0,0008	0,0007	0,1705*	0,0520		
dom_proprio	-0,0032*	0,0008	-0,1074**	0,0429		
sexochefe	-0,0051*	0,0012	-0,1281**	0,0626	-0,0663	0,0349
cor_pele	0,0011	0,0008	-0,1769*	0,0466	-0,0678*	0,0184
conjuge	-0,0072*	0,0015	-0,3929*	0,0805	-0,0843**	0,0396
ocupado_ref	0,0032*	0,0011	0,2294*	0,0622	0,0127	0,0289
ocupado_conj	0,0009	0,0009	0,2252*	0,0547	0,0091	0,0226
idade_25_34	-0,0028	0,0018	0,0232	0,0835	-0,0099	0,0463
idade_35_44	-0,0059*	0,0018	-0,0459	0,0869	-0,0617	0,0447
idade_45_54	-0,0081*	0,0019	-0,0530	0,0916	-0,0433	0,0465
idade_55_64	-0,0104*	0,0021	-0,1981	0,1013	-0,0466	0,0516
idade_65_mais	-0,0092*	0,0030	0,2227	0,1719	0,0671	0,0607
educachefe_2	-0,0032	0,0018	-0,0060	0,0794	0,0206	0,0406
educachefe_3	-0,0022	0,0016	-0,0772	0,0790	-0,0799**	0,0387
educachefe_4	-0,0025	0,0017	-0,0649	0,0921	-0,1396*	0,0429
educachefe_5	-0,0035**	0,0017	-0,0821	0,1001	-0,1545*	0,0426
educachefe_6	-0,0003	0,0019	-0,2965**	0,1212	-0,3063*	0,0441
metropolitano	0,0017**	0,0007	-0,1472*	0,0485		
norte	0,0008	0,0009	-0,0591	0,0566		
nordeste	0,0009	0,0007	0,1382*	0,0476		
sul	-0,0003	0,0008	-0,0391	0,0484		
centrooeste	-0,0014	0,0009	-0,1715*	0,0504		
trimestre_2	0,0011	0,0009	-0,0531	0,0518		
trimestre_3	-0,0006	0,0008	0,0634	0,0531		
trimestre_4	-0,0015	0,0009	-0,0274	0,0536		
automovel			-0,1686*	0,0428		
geladeirafreezer			-0,1449*	0,0363		
microondas			-0,2515*	0,0663		
lambda	39,5045*	3,1522				
Log Likelihood	21.291,31					
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	167,10					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela B.2 - Parâmetros estimados do Tobit IHS

Variável	Equação de consumo		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-0,0834*	0,0058	-2,5771*	0,0553
logxn	0,0171*	0,0008		
logn	0,0237*	0,0013		
peessoas_0_4	-0,0349*	0,0040		
peessoas_5_9	-0,0168*	0,0035		
peessoas_10_14	-0,0077**	0,0033		
peessoas_65_mais	-0,0379*	0,0043		
cartao	0,0025**	0,0010		
dom_proprio	-0,0066*	0,0010		
sexochefe	-0,0053*	0,0014	-0,1498*	0,0233
cor_pele	-0,0017	0,0010	-0,0447*	0,0160
conjuge	-0,0134*	0,0017	-0,1887*	0,0256
ocupado_ref	0,0089*	0,0013	0,0081	0,0260
ocupado_conj	0,0055*	0,0011	-0,0534*	0,0195
idade_25_34	-0,0012	0,0025	-0,1004*	0,0354
idade_35_44	-0,0067*	0,0025	-0,1947*	0,0344
idade_45_54	-0,0106*	0,0026	-0,2112*	0,0355
idade_55_64	-0,0152*	0,0028	-0,2328*	0,0411
idade_65_mais	-0,0055	0,0037	-0,1500*	0,0447
educachefe_2	-0,0014	0,0019	-0,0413	0,0326
educachefe_3	-0,0005	0,0018	-0,1342*	0,0301
educachefe_4	0,0004	0,0020	-0,2285*	0,0331
educachefe_5	-0,0017	0,0020	-0,2744*	0,0328
educachefe_6	-0,0041	0,0023	-0,3914*	0,0356
metropolitano	0,0003	0,0010		
norte	0,0013	0,0013		
nordeste	0,0043*	0,0010		
sul	-0,0009	0,0011		
centrooeste	-0,0047*	0,0012		
trimestre_2	0,0006	0,0012		
trimestre_3	0,0004	0,0012		
trimestre_4	-0,0021	0,0012		
lambda	20,8338*	0,7225		
Log Likelihood	20.297,19			
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	433,09			

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela B.3 - Parâmetros estimados do modelo de Duas Partes IHS

Variável	Equação de participação		Equação de consumo		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-0,4964	0,4917	-4,0047*	0,1579	-1,2738*	0,3966
logxn	-0,0034	0,0040	0,7002*	0,0240		
logn	-0,0173**	0,0086	0,9613*	0,0401		
peessoas_0_4	-0,1049*	0,0272	-0,7027*	0,1195		
peessoas_5_9	-0,0641*	0,0211	-0,3194*	0,1097		
peessoas_10_14	-0,0395**	0,0188	-0,0826	0,1049		
peessoas_65_mais	-0,0347	0,0345	-0,8049*	0,1069		
cartao	0,0081	0,0056	0,1046*	0,0337		
dom_proprio	-0,0232*	0,0069	-0,1446*	0,0313		
sexochefe	-0,0102	0,0156	-0,1084*	0,0400	-0,1267**	0,0534
cor_pele	0,0215**	0,0100	-0,0943*	0,0298	-0,0769*	0,0276
conjuge	0,0102	0,0203	-0,3849*	0,0479	-0,2188*	0,0562
ocupado_ref	0,0129	0,0114	0,2197*	0,0376	0,0384	0,0322
ocupado_conj	0,0002	0,0094	0,1837*	0,0337	0,0313	0,0292
idade_25_34	-0,0090	0,0192	-0,0313	0,0600	-0,0328	0,0572
idade_35_44	-0,0165	0,0186	-0,1283**	0,0621	-0,0899	0,0551
idade_45_54	-0,0366	0,0196	-0,1892*	0,0656	-0,0512	0,0540
idade_55_64	-0,0196	0,0182	-0,3480*	0,0700	-0,1544*	0,0552
idade_65_mais	-0,0251	0,0317	-0,0876	0,0965	-0,1487**	0,0615
educachefe_2	0,1801	0,3440	-0,0803	0,0457	-0,1887	0,2290
educachefe_3	0,4383	0,4371	-0,0983**	0,0447	-0,6048**	0,2363
educachefe_4	0,5013	0,4689	-0,0762	0,0548	-0,8186*	0,2744
educachefe_5	0,4918	0,4680	-0,1207**	0,0571	-0,8192*	0,2789
educachefe_6	0,5708	0,4888	-0,1949*	0,0756	-1,2148*	0,2983
metropolitano	0,0085	0,0050	-0,0465	0,0329		
norte	0,0102	0,0071	0,0061	0,0397		
nordeste	0,0097	0,0056	0,1490*	0,0325		
sul	0,0022	0,0053	-0,0449	0,0345		
centrooeste	-0,0025	0,0059	-0,1456*	0,0358		
trimestre_2	0,0057	0,0065	-0,0367	0,0371		
trimestre_3	-0,0069	0,0064	0,0271	0,0368		
trimestre_4	-0,0142	0,0080	-0,0399	0,0370		
lambda	7,4246*	1,3796				
Log Likelihood	21.481,20					
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	123,45					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela B.4 - Parâmetros estimados do modelo de Infrequência de Aquisição

Variável	Equação de consumo		Equação de participação		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-0,0912*	0,0109	-4,6714*	0,6074	-1,8350*	0,0971
logxn	0,0227*	0,0016	0,8619*	0,1152		
logn	0,0287*	0,0024	1,6763*	0,1275		
peessoas_0_4	-0,0603*	0,0072	-0,2287	0,4136		
peessoas_5_9	-0,0323*	0,0063	0,4736	0,4023		
peessoas_10_14	-0,0141**	0,0060	-0,1109	0,3302		
peessoas_65_mais	-0,0528*	0,0083	-0,2630	0,4830		
cartao	0,0038**	0,0018	0,1865	0,2272		
dom_proprio	-0,0133*	0,0019	-0,0166	0,0966		
sexochefe	-0,0074**	0,0029	-0,1880	0,2674	-0,2677*	0,0697
cor_pele	-0,0014	0,0016	-0,4288*	0,1078	-0,1174*	0,0272
conjuge	-0,0189*	0,0034	-0,5721**	0,2719	-0,3245*	0,0741
ocupado_ref	0,0109*	0,0020	0,4229*	0,1164	0,1211*	0,0420
ocupado_conj	0,0090*	0,0018	-0,0318	0,1678	-0,0103	0,0354
idade_25_34	-0,0042	0,0049	-0,2623	0,2443	-0,1051	0,0664
idade_35_44	-0,0131*	0,0049	-0,3891	0,2440	-0,2473*	0,0634
idade_45_54	-0,0196*	0,0050	-0,3264	0,2369	-0,2197*	0,0650
idade_55_64	-0,0271*	0,0049	-0,2901	0,2307	-0,3008*	0,0708
idade_65_mais	-0,0150**	0,0067	0,0859	0,4726	-0,2846*	0,0721
educachefe_2	-0,0048	0,0037	-0,0041	0,1765	-0,0203	0,0558
educachefe_3	-0,0019	0,0033	-0,3946*	0,1470	-0,2434*	0,0493
educachefe_4	-0,0027	0,0036	-0,1556	0,2171	-0,3105*	0,0574
educachefe_5	-0,0066	0,0038	-0,3033	0,3536	-0,3535*	0,0596
educachefe_6	-0,0096**	0,0042	-0,4650	0,3079	-0,4502*	0,0615
metropolitano	-0,0000	0,0018	0,1661	0,1786		
norte	0,0036	0,0024	-0,1341	0,1741		
nordeste	0,0093*	0,0020	0,0024	0,1391		
sul	-0,0005	0,0020	-0,1332	0,1542		
centrooeste	-0,0073*	0,0021	-0,1140	0,1422		
trimestre_2	0,0002	0,0023	0,0592	0,1108		
trimestre_3	-0,0010	0,0021	0,3618*	0,1239		
trimestre_4	-0,0044**	0,0022	0,0396	0,1376		
automovel			0,3728	0,2536		
geladeirafreezer			0,4474*	0,1193		
microondas			-0,3556**	0,1687		
Log Likelihood	17.329,98		.		.	
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	201,57					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela B.5 - Parâmetros estimados do modelo de Barreira Dupla com erros correlacionados

Variável	Equação de consumo		Equação de participação		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-0,0629*	0,0127	-8,1009*	0,7825	-1,4840*	0,0811
logxn	0,0180*	0,0018	1,5912*	0,1373		
logn	0,0208*	0,0029	2,3511*	0,2243		
peessoas_0_4	-0,0648*	0,0080	-0,1091	0,5704		
peessoas_5_9	-0,0390*	0,0070	1,4270	0,8252		
peessoas_10_14	-0,0156**	0,0066	0,2169	0,4882		
peessoas_65_mais	-0,0583*	0,0112	-0,2498	0,7359		
cartao	0,0042**	0,0020	0,3803	0,2311		
dom_proprio	-0,0136*	0,0022	-0,0153	0,1294		
sexochefe	-0,0024	0,0025	-0,7386*	0,1473	-0,3216*	0,0357
cor_pele	-0,0011	0,0018	-0,2794**	0,1372	-0,0711*	0,0264
conjuge	-0,0102*	0,0034	-1,1847*	0,2871	-0,4495*	0,0403
ocupado_ref	0,0123*	0,0024	0,3111	0,1677	0,0289	0,0419
ocupado_conj	0,0076*	0,0020	0,3124	0,1699	0,0146	0,0324
idade_25_34	-0,0062	0,0058	0,1071	0,2665	-0,1266**	0,0545
idade_35_44	-0,0141**	0,0056	0,0303	0,2643	-0,2807*	0,0528
idade_45_54	-0,0192*	0,0058	-0,1087	0,2616	-0,2978*	0,0549
idade_55_64	-0,0249*	0,0060	-0,1862	0,2874	-0,3645*	0,0659
idade_65_mais	-0,0158	0,0081	0,4529	0,5950	-0,3744*	0,0660
educachefe_2	-0,0018	0,0044	-0,0797	0,2310	-0,0904	0,0552
educachefe_3	0,0005	0,0040	-0,2009	0,2187	-0,2618*	0,0492
educachefe_4	0,0015	0,0042	-0,1632	0,2652	-0,4012*	0,0547
educachefe_5	-0,0029	0,0043	0,1559	0,3323	-0,4560*	0,0522
educachefe_6	-0,0026	0,0048	-0,4596	0,3861	-0,6038*	0,0588
metropolitano	0,0015	0,0020	-0,2969	0,1645		
norte	0,0025	0,0027	-0,1016	0,2184		
nordeste	0,0066*	0,0022	0,2871	0,1690		
sul	-0,0008	0,0023	-0,0030	0,1714		
centrooeste	-0,0078*	0,0024	-0,0805	0,1669		
trimestre_2	-0,0002	0,0027	0,1341	0,1798		
trimestre_3	-0,0017	0,0024	0,1275	0,1576		
trimestre_4	-0,0060**	0,0026	0,0734	0,1942		
automovel			-0,5164*	0,1209		
geladeirafreezer			-0,2868*	0,0999		
microondas			-0,5699*	0,1744		
rho	0,0200	0,0506				
Log Likelihood	16.736,27					
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	389,06					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela B.6 - Parâmetros estimados do modelo de Barreira Dupla com erros independentes

Variável	Equação de consumo		Equação de participação		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-0,1321*	0,0112	-65,0032*	12,1492	-1,4625*	0,0797
logxn	0,0260*	0,0016	16,2382*	3,0760		
logn	0,0340*	0,0025	25,7949*	4,9338		
peessoas_0_4	-0,0651*	0,0074	3,2910	2,4461		
peessoas_5_9	-0,0336*	0,0066	65,2098*	19,3971		
peessoas_10_14	-0,0154**	0,0062	52,8070*	10,3546		
peessoas_65_mais	-0,0628*	0,0086	135,3426*	23,7745		
cartao	0,0040**	0,0018	7,4544*	1,6326		
dom_proprio	-0,0136*	0,0020	-0,0542	0,6229		
sexochefe	-0,0039	0,0024	-12,9775*	2,5243	-0,3162*	0,0346
cor_pele	-0,0036**	0,0017	3,0297*	0,7487	-0,0655**	0,0260
conjuge	-0,0137*	0,0030	-16,9374*	3,4791	-0,4441*	0,0391
ocupado_ref	0,0159*	0,0022	-9,6123*	2,2256	0,0227	0,0415
ocupado_conj	0,0083*	0,0018	7,6942*	1,3921	0,0074	0,0318
idade_25_34	-0,0037	0,0048	-1,4809	0,8786	-0,1368**	0,0535
idade_35_44	-0,0137*	0,0048	8,6911*	2,0618	-0,2857*	0,0519
idade_45_54	-0,0188*	0,0050	-5,6857*	1,3037	-0,3089*	0,0539
idade_55_64	-0,0263*	0,0051	4,4179*	1,4248	-0,3756*	0,0653
idade_65_mais	-0,0104	0,0071	-50,0425*	9,3709	-0,3845*	0,0651
educachefe_2	0,0003	0,0037	-0,4120	0,8571	-0,0902	0,0549
educachefe_3	0,0017	0,0035	6,2245*	1,7680	-0,2536*	0,0490
educachefe_4	0,0051	0,0037	-5,0368*	1,1882	-0,4032*	0,0538
educachefe_5	-0,0002	0,0039	7,0662*	1,4823	-0,4531*	0,0518
educachefe_6	-0,0049	0,0044	24,0673*	4,0960	-0,5863*	0,0581
metropolitano	0,0010	0,0018	-10,0419*	2,2153		
norte	0,0013	0,0025	17,4246*	3,6453		
nordeste	0,0072*	0,0021	20,6399*	4,1792		
sul	-0,0017	0,0021	29,2080*	4,4695		
centrooeste	-0,0094*	0,0022	20,3640*	3,5427		
trimestre_2	0,0010	0,0024	-1,1692	0,7245		
trimestre_3	-0,0006	0,0022	-2,4419*	0,8038		
trimestre_4	-0,0053**	0,0023	7,5111*	2,6147		
automovel			-11,1708*	2,3131		
geladeirafreezer			-2,1199*	0,4792		
microondas			-13,4534*	2,4591		
Log Likelihood	16.714,28		.	.	.	.
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	395,82					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela B.7 - Parâmetros estimados do modelo Tobit

Variável	Equação de consumo		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-0,1435*	0,0113	-1,4602*	0,0800
logxn	0,0271*	0,0016		
logn	0,0365*	0,0025		
peessoas_0_4	-0,0637*	0,0074		
peessoas_5_9	-0,0309*	0,0066		
peessoas_10_14	-0,0136**	0,0062		
peessoas_65_mais	-0,0599*	0,0086		
cartao	0,0043**	0,0019		
dom_proprio	-0,0135*	0,0020		
sexochefe	-0,0051**	0,0024	-0,3144*	0,0347
cor_pele	-0,0028	0,0017	-0,0664**	0,0261
conjuge	-0,0158*	0,0030	-0,4401*	0,0391
ocupado_ref	0,0150*	0,0022	0,0268	0,0417
ocupado_conj	0,0094*	0,0018	0,0039	0,0319
idade_25_34	-0,0024	0,0049	-0,1406*	0,0538
idade_35_44	-0,0120**	0,0049	-0,2914*	0,0522
idade_45_54	-0,0185*	0,0051	-0,3085*	0,0541
idade_55_64	-0,0249*	0,0052	-0,3814*	0,0655
idade_65_mais	-0,0098	0,0072	-0,3872*	0,0654
educachefe_2	0,0000	0,0038	-0,0894	0,0550
educachefe_3	0,0025	0,0035	-0,2546*	0,0492
educachefe_4	0,0047	0,0038	-0,3979*	0,0540
educachefe_5	0,0007	0,0039	-0,4547*	0,0520
educachefe_6	-0,0041	0,0045	-0,5861*	0,0583
metropolitano	0,0003	0,0018		
norte	0,0030	0,0025		
nordeste	0,0092*	0,0021		
sul	-0,0004	0,0021		
centrooeste	-0,0079*	0,0022		
trimestre_2	0,0006	0,0024		
trimestre_3	-0,0007	0,0022		
trimestre_4	-0,0049**	0,0023		
Log Likelihood	16.473,37			
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	393,83			

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.

Tabela B.8 - Parâmetros estimados do modelo de Duas Partes

Variável	Equação de consumo		Equação de participação		Equação de heteroscedasticidade	
	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão	Parâmetro estimado	Erro padrão
intercepto	-19,7741	21,8976	-4,0047*	0,1579	0,6864	0,5474
logxn	-0,2741	0,3746	0,7002*	0,0240		
logn	-0,2126	0,4309	0,9613*	0,0401		
peessoas_0_4	-3,8364	4,2642	-0,7027*	0,1195		
peessoas_5_9	-2,2519	2,5811	-0,3194*	0,1097		
peessoas_10_14	-0,4853	0,8372	-0,0826	0,1049		
peessoas_65_mais	-2,4439	3,0583	-0,8049*	0,1069		
cartao	0,2446	0,3355	0,1046*	0,0337		
dom_proprio	-0,8714	0,9535	-0,1446*	0,0313		
sexochefe	3,7461	4,2589	-0,1084*	0,0400	-0,3717*	0,0451
cor_pele	0,1143	0,4138	-0,0943*	0,0298	-0,0172	0,0260
conjuje	13,4515	15,4871	-0,3849*	0,0479	-0,8056*	0,1960
ocupado_ref	-0,0289	0,4781	0,2197*	0,0376	0,0552	0,0317
ocupado_conj	0,2755	0,6123	0,1837*	0,0337	0,0011	0,0422
idade_25_34	-1,1463	1,3048	-0,0313	0,0600	0,0316	0,0488
idade_35_44	-0,8652	1,0096	-0,1283**	0,0621	-0,0558	0,0460
idade_45_54	-0,7383	0,8606	-0,1892*	0,0656	-0,0776	0,0487
idade_55_64	0,4028	0,8623	-0,3480*	0,0700	-0,1958*	0,0506
idade_65_mais	0,3363	1,3223	-0,0876	0,0965	-0,1575*	0,0611
educachefe_2	1,4528	2,1675	-0,0803	0,0457	-0,1112	0,0744
educachefe_3	2,2021	2,6416	-0,0983**	0,0447	-0,1943*	0,0618
educachefe_4	2,4963	2,9133	-0,0762	0,0548	-0,2435*	0,0643
educachefe_5	2,5990	3,0040	-0,1207**	0,0571	-0,2671*	0,0677
educachefe_6	2,8062	3,1733	-0,1949*	0,0756	-0,2590*	0,0648
metropolitano	0,0953	0,2003	-0,0465	0,0329		
norte	0,0484	0,2976	0,0061	0,0397		
nordeste	0,4582	0,5649	0,1490*	0,0325		
sul	-0,0225	0,2138	-0,0449	0,0345		
centrooeste	-0,3822	0,4719	-0,1456*	0,0358		
trimestre_2	0,4115	0,5286	-0,0367	0,0371		
trimestre_3	-0,2314	0,3574	0,0271	0,0368		
trimestre_4	-0,3053	0,4186	-0,0399	0,0370		
Log Likelihood	21.363,52					
Wald $H_0: \gamma_{k \neq 1} = 0$	425,63					

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Nota: (\*) Significância a 1%. (\*\*) Significância a 5%.



## **APÊNDICE C - COMPLEMENTO DO CAPÍTULO 6**

### **C.1 PARÂMETROS ESTIMADOS**

As tabelas a seguir apresentam os parâmetros dos modelos estimados no Capítulo 6.

Tabela C.1 - Parâmetros estimados pelo método de Antuérpia - PPV

Variável	Renda mínima			Valor mínimo com alimentos		
	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor
<i>Área Urbana</i>						
Intercept	3,2809	0,185	<0,01	3,1895	0,162	<0,01
logx	0,4037	0,024	<0,01	0,2669	0,021	<0,01
logn	0,294	0,053	<0,01	0,2165	0,047	<0,01
peessoas_0_4	-0,279	0,154	0,07	-0,2999	0,135	0,03
peessoas_5_9	-0,2895	0,147	0,05	-0,0967	0,129	0,45
peessoas_10_14	-0,2369	0,162	0,14	-0,1346	0,142	0,34
peessoas_65_mais	0,0148	0,136	0,91	-0,1102	0,12	0,36
dom_proprio	-0,0593	0,038	0,11	0,0235	0,033	0,48
sexochefe	0,1788	0,073	0,01	0,1451	0,064	0,02
cor_pele	0,1072	0,039	<0,01	0,0688	0,035	0,05
conjuje	0,1065	0,075	0,16	0,2245	0,066	<0,01
idade_25_34	0,0263	0,082	0,75	0,0746	0,072	0,30
idade_35_44	0,1842	0,085	0,03	0,1886	0,075	0,01
idade_45_54	0,1692	0,089	0,06	0,1751	0,078	0,03
idade_55_64	0,0772	0,093	0,41	0,1659	0,081	0,04
idade_65_mais	0,0917	0,124	0,46	0,2278	0,109	0,04
educache_2	0,1906	0,071	<0,01	0,1836	0,062	<0,01
educache_3	0,1591	0,067	0,02	0,2297	0,059	<0,01
educache_4	0,2766	0,079	<0,01	0,3041	0,069	<0,01
educache_5	0,4731	0,077	<0,01	0,3579	0,068	<0,01
educache_6	0,5803	0,088	<0,01	0,4393	0,077	<0,01
nordeste	-0,0711	0,045	0,11	0,0324	0,039	0,41
trimestre_2	-0,0026	0,05	0,96	0,1384	0,044	<0,01
trimestre_3	0,0251	0,049	0,61	-0,029	0,043	0,50
trimestre_4	-0,1527	0,047	<0,01	-0,1417	0,042	<0,01
$\sigma$	0,6422			0,5639		
R <sup>2</sup>	0,4543			0,3721		
Número de observações	1433			1433		
<i>Área Rural</i>						
Intercept	3,9482	0,35	<0,01	3,6561	0,305	<0,01
logx	0,2734	0,05	<0,01	0,1913	0,043	<0,01
logn	0,348	0,12	<0,01	0,2769	0,105	<0,01
peessoas_0_4	-0,5127	0,324	0,12	-0,2247	0,283	0,43
peessoas_5_9	0,7691	0,331	0,02	0,5716	0,288	0,05
peessoas_10_14	-0,0493	0,343	0,89	-0,1774	0,299	0,55
peessoas_65_mais	0,2225	0,288	0,44	0,1987	0,252	0,43
dom_proprio	0,1784	0,084	0,04	0,0804	0,074	0,28
sexochefe	-0,3476	0,163	0,03	-0,1242	0,142	0,38
cor_pele	0,2007	0,081	0,01	0,1326	0,07	0,06
conjuje	-0,1979	0,144	0,17	-0,1091	0,126	0,39
idade_25_34	0,1195	0,162	0,46	0,0653	0,141	0,64
idade_35_44	0,0332	0,187	0,86	0,3202	0,163	0,05
idade_45_54	0,1949	0,188	0,30	0,1301	0,164	0,43
idade_55_64	0,3068	0,195	0,12	0,3396	0,17	0,05
idade_65_mais	-0,0119	0,26	0,96	0,0257	0,226	0,91
educache_2	0,0325	0,103	0,75	0,12	0,09	0,18
educache_3	0,3055	0,107	<0,01	0,1695	0,093	0,07
educache_4	0,4564	0,202	0,02	0,2625	0,176	0,14
educache_5	0,356	0,22	0,11	0,2928	0,192	0,13
educache_6	0,8997	0,411	0,03	0,6351	0,358	0,08
nordeste	-0,0705	0,089	0,43	0,0574	0,078	0,46
trimestre_2	-0,009	0,116	0,94	0,0241	0,101	0,81
trimestre_3	-0,4573	0,122	<0,01	-0,1285	0,106	0,23
trimestre_4	-0,2343	0,111	0,04	-0,1936	0,097	0,05
$\sigma$	0,5556			0,4844		
R <sup>2</sup>	0,4315			0,3096		
Número de observações	333			333		

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Tabela C.2 - Parâmetros estimados pelo método de Antuérpia - POF

Variável	Renda mínima			Valor mínimo com alimentos		
	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor
<i>Área Urbana</i>						
Intercept	2,8451	0,059	<0,01	2,9328	0,053	<0,01
logx	0,5403	0,009	<0,01	0,3336	0,008	<0,01
logn	0,0577	0,015	<0,01	0,2615	0,013	<0,01
peessoas_0_4	-0,2096	0,043	<0,01	-0,1647	0,039	<0,01
peessoas_5_9	-0,2064	0,041	<0,01	-0,1116	0,037	<0,01
peessoas_10_14	-0,1774	0,042	<0,01	-0,0345	0,038	0,36
peessoas_65_mais	0,0003	0,042	0,99	0,0251	0,037	0,50
cartao	0,1672	0,011	<0,01	0,0264	0,01	<0,01
dom_proprio	-0,0639	0,011	<0,01	-0,0029	0,01	0,77
sexochefe	-0,0525	0,015	<0,01	-0,0534	0,014	<0,01
cor_pele	0,0723	0,011	<0,01	0,0557	0,009	<0,01
conjuge	0,057	0,016	<0,01	0,0516	0,015	<0,01
idade_25_34	0,1636	0,022	<0,01	0,1192	0,02	<0,01
idade_35_44	0,2807	0,023	<0,01	0,2379	0,021	<0,01
idade_45_54	0,2945	0,025	<0,01	0,2913	0,022	<0,01
idade_55_64	0,2921	0,026	<0,01	0,334	0,024	<0,01
idade_65_mais	0,3089	0,037	<0,01	0,3255	0,033	<0,01
educachefe_2	0,0799	0,022	<0,01	0,0527	0,02	<0,01
educachefe_3	0,1424	0,021	<0,01	0,074	0,019	<0,01
educachefe_4	0,2206	0,023	<0,01	0,1003	0,021	<0,01
educachefe_5	0,3283	0,023	<0,01	0,1397	0,021	<0,01
educachefe_6	0,6082	0,027	<0,01	0,2728	0,024	<0,01
norte	-0,0734	0,021	<0,01	0,0581	0,019	<0,01
nordeste	-0,1406	0,014	<0,01	0,017	0,013	0,18
sul	-0,0701	0,013	<0,01	-0,0002	0,012	0,99
centrooeste	-0,0155	0,018	0,40	-0,048	0,017	<0,01
trimestre_2	0,0572	0,014	<0,01	0,056	0,013	<0,01
trimestre_3	-0,0812	0,013	<0,01	-0,0905	0,012	<0,01
trimestre_4	-0,064	0,013	<0,01	-0,0383	0,012	<0,01
$\sigma$	0,5292			0,4759		
R <sup>2</sup>	0,5952			0,4273		
Número de observações	11551			11546		
<i>Área Rural</i>						
Intercept	4,0199	0,101	<0,01	3,6932	0,092	<0,01
logx	0,3146	0,015	<0,01	0,2138	0,014	<0,01
logn	0,2299	0,03	<0,01	0,3458	0,027	<0,01
peessoas_0_4	-0,5364	0,084	<0,01	-0,4707	0,076	<0,01
peessoas_5_9	-0,3437	0,082	<0,01	-0,2225	0,074	<0,01
peessoas_10_14	-0,3351	0,083	<0,01	-0,1691	0,075	0,03
peessoas_65_mais	0,1568	0,068	0,02	0,0693	0,061	0,26
cartao	0,2769	0,031	<0,01	0,1438	0,028	<0,01
dom_proprio	-0,0169	0,022	0,44	-0,0848	0,02	<0,01
sexochefe	0,0244	0,037	0,51	-0,0205	0,033	0,54
cor_pele	0,0048	0,021	0,82	0,0129	0,019	0,51
conjuge	0,0755	0,036	0,03	0,0301	0,032	0,35
idade_25_34	0,1316	0,043	<0,01	0,1327	0,039	<0,01
idade_35_44	0,1452	0,045	<0,01	0,1722	0,041	<0,01
idade_45_54	0,1733	0,047	<0,01	0,185	0,043	<0,01
idade_55_64	0,2397	0,048	<0,01	0,2992	0,044	<0,01
idade_65_mais	0,2035	0,063	<0,01	0,2953	0,057	<0,01
educachefe_2	-0,0193	0,027	0,47	-0,0028	0,024	0,91
educachefe_3	0,074	0,029	0,01	0,0238	0,026	0,37
educachefe_4	0,3186	0,044	<0,01	0,1366	0,04	<0,01
educachefe_5	0,4067	0,053	<0,01	0,1536	0,048	<0,01
educachefe_6	0,6758	0,115	<0,01	0,341	0,104	<0,01
norte	0,0627	0,036	0,08	0,0888	0,032	<0,01
nordeste	-0,1102	0,027	<0,01	0,0426	0,024	0,08
sul	-0,1069	0,025	<0,01	-0,1222	0,023	<0,01
centrooeste	0,1078	0,04	<0,01	0,0212	0,036	0,55
trimestre_2	0,1064	0,026	<0,01	0,1131	0,024	<0,01
trimestre_3	-0,1858	0,025	<0,01	-0,1518	0,023	<0,01
trimestre_4	-0,0437	0,026	0,09	-0,0292	0,023	0,21
$\sigma$	0,4057			0,3676		
R <sup>2</sup>	0,3824			0,3094		
Número de observações	3003			3003		

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Tabela C.3 - Parâmetros estimados pelo método da Renda Mínima - PPV

Variável	Renda mínima			Valor mínimo com alimentos		
	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor
<i>Área Urbana</i>						
Intercept	3,6627	0,113	<0,01	3,4733	0,101	<0,01
logx	0,3465	0,015	<0,01	0,2305	0,013	<0,01
logn	0,2475	0,033	<0,01	0,2615	0,03	<0,01
peessoas_0_4	-0,0909	0,098	0,35	-0,2842	0,087	<0,01
peessoas_5_9	0,0777	0,095	0,41	0,0392	0,085	0,64
peessoas_10_14	0,0742	0,098	0,45	0,097	0,087	0,27
peessoas_65_mais	-0,0456	0,085	0,59	-0,0168	0,076	0,82
dom_proprio	-0,0954	0,025	<0,01	-0,003	0,022	0,89
sexochefe	0,0251	0,044	0,57	0,0281	0,039	0,47
cor_pele	0,1386	0,026	<0,01	0,1296	0,023	<0,01
conjuje	0,0496	0,045	0,28	0,1044	0,04	<0,01
idade_25_34	0,0809	0,053	0,13	0,1042	0,047	0,03
idade_35_44	0,2359	0,055	<0,01	0,1914	0,049	<0,01
idade_45_54	0,2583	0,057	<0,01	0,1808	0,051	<0,01
idade_55_64	0,2378	0,06	<0,01	0,2499	0,053	<0,01
idade_65_mais	0,227	0,079	<0,01	0,2254	0,07	<0,01
educacheфе_2	0,1043	0,04	<0,01	0,1002	0,035	<0,01
educacheфе_3	0,1472	0,037	<0,01	0,1726	0,033	<0,01
educacheфе_4	0,2615	0,046	<0,01	0,2551	0,041	<0,01
educacheфе_5	0,4751	0,048	<0,01	0,3156	0,043	<0,01
educacheфе_6	0,6859	0,057	<0,01	0,4102	0,051	<0,01
nordeste	0,085	0,028	<0,01	0,1243	0,025	<0,01
trimestre_2	0,0148	0,033	0,65	0,1437	0,029	<0,01
trimestre_3	0,0536	0,032	0,09	0,0128	0,028	0,65
trimestre_4	-0,0092	0,032	0,77	-0,0604	0,028	0,03
$\sigma$	0,6535			0,582		
$R^2$	0,4443			0,3459		
Número de observações	3401			3401		
<i>Área Rural</i>						
Intercept	4,2951	0,211	<0,01	4,1662	0,172	<0,01
logx	0,1688	0,029	<0,01	0,0933	0,024	<0,01
logn	0,4415	0,068	<0,01	0,4241	0,056	<0,01
peessoas_0_4	-0,364	0,187	0,05	-0,4223	0,152	<0,01
peessoas_5_9	-0,3323	0,188	0,08	-0,2944	0,153	0,05
peessoas_10_14	-0,1028	0,179	0,56	-0,1502	0,146	0,30
peessoas_65_mais	0,0375	0,17	0,83	0,1433	0,139	0,30
dom_proprio	0,185	0,051	<0,01	0,0629	0,041	0,13
sexochefe	-0,157	0,095	0,10	-0,0702	0,077	0,36
cor_pele	0,1163	0,046	0,01	0,1347	0,037	<0,01
conjuje	-0,0075	0,091	0,93	-0,0442	0,074	0,55
idade_25_34	0,136	0,1	0,17	0,0396	0,081	0,63
idade_35_44	0,2988	0,11	<0,01	0,2319	0,09	<0,01
idade_45_54	0,2248	0,112	0,04	0,092	0,091	0,31
idade_55_64	0,2848	0,114	0,01	0,1997	0,093	0,03
idade_65_mais	0,1269	0,15	0,40	-0,0109	0,122	0,93
educacheфе_2	0,0625	0,056	0,26	0,0699	0,045	0,12
educacheфе_3	0,2372	0,065	<0,01	0,1053	0,053	0,05
educacheфе_4	0,4408	0,128	<0,01	0,2787	0,105	<0,01
educacheфе_5	0,4527	0,131	<0,01	0,3407	0,107	<0,01
educacheфе_6	1,3989	0,227	<0,01	0,9931	0,185	<0,01
nordeste	0,0872	0,05	0,08	0,1076	0,041	<0,01
trimestre_2	0,014	0,061	0,82	0,0953	0,05	0,06
trimestre_3	-0,094	0,068	0,17	0,0103	0,056	0,85
trimestre_4	-0,1758	0,063	<0,01	-0,0986	0,051	0,05
$\sigma$	0,5976			0,4868		
$R^2$	0,2982			0,2573		
Número de observações	1008			1008		

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.

Tabela C.4 - Parâmetros estimados pelo método da Renda Mínima - POF

Variável	Renda mínima			Valor mínimo com alimentos		
	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor
<i>Área Urbana</i>						
Intercept	3,0093	0,033	<0,01	3,047	0,029	<0,01
logx	0,51	0,005	<0,01	0,3152	0,004	<0,01
logn	0,0971	0,008	<0,01	0,2826	0,008	<0,01
peessoas_0_4	-0,2117	0,026	<0,01	-0,1725	0,023	<0,01
peessoas_5_9	-0,1567	0,024	<0,01	-0,1093	0,022	<0,01
peessoas_10_14	-0,2428	0,024	<0,01	-0,0912	0,021	<0,01
peessoas_65_mais	-0,0528	0,023	0,02	0,011	0,021	0,60
cartao	0,163	0,007	<0,01	0,0525	0,006	<0,01
dom_proprio	-0,0312	0,007	<0,01	0,0177	0,006	<0,01
sexochefe	-0,0424	0,009	<0,01	-0,0324	0,008	<0,01
cor_pele	0,0601	0,006	<0,01	0,0263	0,006	<0,01
conjuge	0,0608	0,009	<0,01	0,0475	0,008	<0,01
idade_25_34	0,1076	0,014	<0,01	0,1003	0,012	<0,01
idade_35_44	0,202	0,014	<0,01	0,2118	0,013	<0,01
idade_45_54	0,2274	0,015	<0,01	0,2627	0,013	<0,01
idade_55_64	0,2406	0,016	<0,01	0,3036	0,014	<0,01
idade_65_mais	0,2781	0,021	<0,01	0,3087	0,019	<0,01
educachefe_2	0,0336	0,011	<0,01	0,0144	0,01	0,15
educachefe_3	0,1199	0,011	<0,01	0,0737	0,01	<0,01
educachefe_4	0,2029	0,012	<0,01	0,1086	0,011	<0,01
educachefe_5	0,3501	0,013	<0,01	0,1611	0,012	<0,01
educachefe_6	0,6586	0,015	<0,01	0,2967	0,014	<0,01
norte	-0,0585	0,013	<0,01	0,006	0,011	0,60
nordeste	-0,1351	0,008	<0,01	-0,0169	0,007	0,02
sul	-0,0427	0,008	<0,01	0	0,007	0,99
centrooeste	0,0069	0,011	0,53	-0,0513	0,01	<0,01
trimestre_2	0,071	0,008	<0,01	0,0631	0,007	<0,01
trimestre_3	-0,1044	0,008	<0,01	-0,0929	0,007	<0,01
trimestre_4	-0,0485	0,008	<0,01	-0,0275	0,007	<0,01
$\sigma$	0,5485			0,491		
R <sup>2</sup>	0,6033			0,4331		
Número de observações	34951			34956		
<i>Área Rural</i>						
Intercept	4,0876	0,055	<0,01	3,6962	0,051	<0,01
logx	0,2939	0,008	<0,01	0,2112	0,007	<0,01
logn	0,2385	0,016	<0,01	0,3107	0,015	<0,01
peessoas_0_4	-0,4925	0,046	<0,01	-0,4042	0,043	<0,01
peessoas_5_9	-0,4232	0,043	<0,01	-0,3015	0,04	<0,01
peessoas_10_14	-0,3773	0,044	<0,01	-0,2445	0,041	<0,01
peessoas_65_mais	0,1037	0,039	<0,01	0,0281	0,036	0,44
cartao	0,2714	0,019	<0,01	0,149	0,018	<0,01
dom_proprio	0,013	0,012	0,28	-0,0441	0,011	<0,01
sexochefe	0,0206	0,019	0,27	0,002	0,017	0,91
cor_pele	0,0263	0,011	0,02	0,012	0,011	0,26
conjuge	0,0456	0,019	0,01	0,0497	0,017	<0,01
idade_25_34	0,1155	0,025	<0,01	0,1142	0,024	<0,01
idade_35_44	0,1374	0,026	<0,01	0,1715	0,025	<0,01
idade_45_54	0,1504	0,028	<0,01	0,175	0,026	<0,01
idade_55_64	0,2096	0,028	<0,01	0,2766	0,026	<0,01
idade_65_mais	0,2421	0,036	<0,01	0,3151	0,034	<0,01
educachefe_2	0,0163	0,013	0,22	0,0068	0,012	0,58
educachefe_3	0,1045	0,015	<0,01	0,0619	0,014	<0,01
educachefe_4	0,3264	0,026	<0,01	0,142	0,024	<0,01
educachefe_5	0,5148	0,033	<0,01	0,2532	0,03	<0,01
educachefe_6	0,7802	0,067	<0,01	0,3822	0,062	<0,01
norte	0,0453	0,02	0,02	0,0533	0,019	<0,01
nordeste	-0,1223	0,014	<0,01	0,0109	0,013	0,41
sul	-0,0729	0,016	<0,01	-0,1194	0,015	<0,01
centrooeste	0,1179	0,024	<0,01	0,048	0,022	0,03
trimestre_2	0,1084	0,014	<0,01	0,074	0,013	<0,01
trimestre_3	-0,153	0,014	<0,01	-0,152	0,013	<0,01
trimestre_4	-0,0299	0,014	0,03	-0,0339	0,013	<0,01
$\sigma$	0,4166			0,3869		
R <sup>2</sup>	0,3877			0,2874		
Número de observações	9893			9901		

Fonte: Estimativas obtidas a partir da POF 2002-2003.

Tabela C.5 - Parâmetros estimados pelo método de Leyden - PPV

Variável	Estimativa	Erro-padrão	p-Valor
<i>Área Urbana</i>			
Intercept	3,3775	0,09	<0,01
logx	0,3644	0,012	<0,01
logn	0,1752	0,027	<0,01
peessoas_0_4	-0,2332	0,077	<0,01
peessoas_5_9	-0,0458	0,076	0,54
peessoas_10_14	-0,0769	0,078	0,32
peessoas_65_mais	-0,2178	0,068	<0,01
dom_proprio	-0,0719	0,02	<0,01
sexochefe	0,0072	0,035	0,84
cor_pele	0,1273	0,02	<0,01
conjuge	0,0439	0,036	0,22
idade_25_34	0,2297	0,042	<0,01
idade_35_44	0,2343	0,043	<0,01
idade_45_54	0,3115	0,046	<0,01
idade_55_64	0,2586	0,048	<0,01
idade_65_mais	0,3802	0,063	<0,01
educacheefe_2	0,0505	0,032	0,11
educacheefe_3	0,1657	0,029	<0,01
educacheefe_4	0,2802	0,037	<0,01
educacheefe_5	0,3822	0,038	<0,01
educacheefe_6	0,651	0,045	<0,01
nordeste	0,0391	0,022	0,08
trimestre_2	0,0232	0,026	0,37
trimestre_3	0,0329	0,025	0,19
trimestre_4	0,0127	0,025	0,61
$\sigma$	0,5193		
$R^2$	0,5541		
Número de observações	3400		
<i>Área Rural</i>			
Intercept	4,0518	0,166	<0,01
logx	0,2248	0,023	<0,01
logn	0,2893	0,054	<0,01
peessoas_0_4	-0,4071	0,147	<0,01
peessoas_5_9	-0,4043	0,148	<0,01
peessoas_10_14	-0,2544	0,14	0,07
peessoas_65_mais	-0,1356	0,134	0,31
dom_proprio	0,2041	0,04	<0,01
sexochefe	-0,0725	0,074	0,33
cor_pele	0,0792	0,036	0,03
conjuge	-0,0064	0,072	0,93
idade_25_34	0,1325	0,078	0,09
idade_35_44	0,1923	0,086	0,03
idade_45_54	0,1948	0,088	0,03
idade_55_64	0,2357	0,09	<0,01
idade_65_mais	0,0914	0,118	0,44
educacheefe_2	0,062	0,044	0,16
educacheefe_3	0,2339	0,051	<0,01
educacheefe_4	0,4232	0,101	<0,01
educacheefe_5	0,4339	0,103	<0,01
educacheefe_6	1,2381	0,179	<0,01
nordeste	0,0215	0,039	0,59
trimestre_2	-0,1188	0,048	0,01
trimestre_3	-0,0021	0,054	0,97
trimestre_4	-0,2097	0,049	<0,01
$\sigma$	0,4692		
$R^2$	0,3799		
Número de observações	1008		

Fonte: Estimativas obtidas a partir da PPV.