

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TERMODINÂMICA DE BURACO NEGRO EXTREMAL VIA  
TESTES QUÂNTICOS NA GEOMETRIA PRÓXIMA AO  
HORIZONTE**

SAULO DE MESQUITA DILES

ORIENTADOR:

AMÍLCAR RABELO DE QUEIROZ

Brasília, 5 de Julho de 2012

## **Agradecimentos**

Agradeço e dedico este trabalho à Maria Rita Gomes de Mattos de Mesquita, minha avó e madrinha. À minha mãe por todo o apoio e atenção. A meu tio Rui, minha tia Telma e minha tia Noemia pelo grande apoio e incentivo para que eu pudesse vir a Brasília desenvolver este projeto. Aos meus amigos por todos os bons momentos, especialmente a Raul Mesquita, Rodrigo Mendonça, Cainã Mascaro, Bárbara Barbosa, Priscila Beckman, Luiz Manoel e Milene Migliano. Aos meus colegas de estudo pelas discussões inspiradoras e esclarecedoras. Ao professor Jorge Zanelli pela atenção e suporte durante minha estadia em Valdivia. Ao meu orientador Amílcar Queiroz por ter confiado no meu potencial e me orientado com dedicação. Ao projeto CAPES/Reuni pelo financiamento. E a todas as pessoas que acreditam na ciência e trabalham para o seu desenvolvimento.

# Resumo

As propriedades termodinâmicas de um buraco negro são determinadas pelas propriedades geométricas de seu horizonte de eventos. Um buraco negro extremal possui temperatura zero e a geometria próxima ao seu horizonte se comporta localmente como  $AdS_2 \times S^2$ . Com esta motivação serão discutidos os espaços de  $AdS$  em detalhes, diferenciando o  $AdS_2$  dos espaços  $AdS_n, n \geq 3$ . O objetivo deste trabalho é estudar esta geometria próxima ao horizonte fazendo experimentos onde observamos o comportamento de uma partícula teste nesta geometria. Serão abordados aqui o caso de uma partícula pontual clássica e de um campo escalar quântico sem massa. Uma atenção especial é dada para a construção de operadores autoadjuntos através do teorema de von Neumann, que desempenha um papel importante para a descrição de um espaço-tempo quando testado por um campo quântico. Além disso será discutida uma formulação alternativa da gravitação que se baseia no cálculo exterior, generaliza a ação de Einstein-Hilbert para uma dimensão arbitrária e gera equações de campo de primeira ordem.

# Abstract

The thermodynamics properties of a black hole are completely determined by geometrics properties of its event horizon. An extremal black hole has zero temperature and its near horizon geometry behaves locally as  $AdS_2 \times S^2$ . With this motivation will be discussed the  $AdS$  spaces in details, differentiating the  $AdS_2$  from the spaces  $AdS_n, n \geq 3$ . The goal of this work is to study such near horizon geometry by making experiments where we observe the behavior of a test particle on this geometry. In particular we analyse the case of a classical punctual particle and of a massless quantum scalar field. Furthermore, it will be discussed an alternative formulation of gravitation based on the exterior calculus, that generalize the Einstein-Hilbert action for an arbitrary dimension and gives first order field equations.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Termodinâmica de buracos negros</b>	<b>9</b>
2.1	Mecânica quântica em um espaço curvo . . . . .	9
2.1.1	O efeito Unruh . . . . .	13
2.1.2	O efeito Hawking . . . . .	18
2.2	A termodinâmica de um buraco negro . . . . .	20
2.2.1	As leis da termodinâmica . . . . .	21
2.2.2	A entropia de Bekenstein-Hawking . . . . .	22
2.2.3	Parâmetros . . . . .	23
2.3	O horizonte de eventos . . . . .	23
2.3.1	Schwarzschild . . . . .	24
2.3.2	Reissner-Nordström . . . . .	26
2.3.3	Kerr . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Gravitação de Lovelock</b>	<b>34</b>
3.1	Simetrias de calibre . . . . .	35
3.2	Geometria . . . . .	36
3.3	O formalismo de primeira ordem da gravitação . . . . .	39
3.3.1	Candidatos à Langrangeana . . . . .	42
3.3.2	O teorema de Lovelock . . . . .	43
3.4	O caso particular $n = 2 + 1$ . . . . .	44

3.4.1	Equações de primeira ordem . . . . .	44
3.4.2	Equações de segunda ordem . . . . .	47
3.4.3	Análise das soluções . . . . .	48
3.5	Gravitação de Chern-Simons . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Espaços de Anti-de Sitter</b>	<b>53</b>
4.1	O caso bidimensional . . . . .	53
4.1.1	Extensão global . . . . .	54
4.1.2	O disco de Poincaré . . . . .	55
4.1.3	O semiplano de Poincaré . . . . .	56
4.1.4	A faixa . . . . .	56
4.1.5	Mapa conforme . . . . .	57
4.1.6	Geodésicas . . . . .	58
4.1.7	As isometrias do $AdS_2$ . . . . .	61
4.2	$AdS_n$ , $n \geq 3$ . . . . .	66
4.2.1	Construindo o espaço . . . . .	66
4.2.2	Parametrização . . . . .	66
4.2.3	Geodésicas . . . . .	68
4.3	Conclusões . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Extensões autoadjuntas</b>	<b>72</b>
5.1	Exemplo motivacional: o poço infinito . . . . .	72
5.2	O teorema de von Neumann . . . . .	76
5.2.1	O teorema de Von Neumann . . . . .	77
5.3	Aplicações . . . . .	81
5.3.1	Testando singularidades tipo-tempo . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Dois meses após Einstein apresentar a forma final das equações de campo que descrevem a dinâmica de um campo gravitacional em 3+1 dimensões, surgiu a primeira solução não trivial dessas equações, encontrada por Schwarzschild. Entre as propriedades desta solução destacou-se o fato dela apresentar uma estrutura que, por conter uma região que confina sinais luminosos, ficou conhecida pelo nome de buraco negro. Inicialmente houve grande resistência para aceitar a existência destes objetos [12], porém com o passar das décadas, observações astronômicas passaram a apontar indícios de sua existência. Paralelamente novas soluções das equações de Einstein tipo buraco negro foram surgindo e junto com elas a necessidade de compreender tanto as propriedades físicas destes objetos como as matemáticas que os descrevem.

Nos anos 70 chegou-se a conclusão de que os buracos negros possuem uma termodinâmica associada. Primeiro Bekenstein constatou que um buraco negro deve possuir uma entropia e pouco tempo depois Hawking provou que um buraco negro emite uma radiação térmica. Essas grandezas termodinâmicas são bem definidas classicamente, porém sua explicação exige um tratamento via mecânica quântica. O que é natural pois classicamente um buraco negro é proibido de emitir radiação. Existe uma classe de buracos negros que possuem temperatura zero. Estes buracos negros são ditos extremais e é esta classe particular que será estudada aqui.

Quando estamos próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro extremal podemos mostrar que sua geometria se comporta localmente como o produto  $AdS_2 \times S^2$ . O espaço  $AdS_2$  possui propriedades interessantes e ele está presente em outras áreas da física teórica como as

dualidades  $AdS/CFT$  por exemplo. Porém esta geometria próxima ao horizonte pode também ser vista como  $AdS_3 \times S^1$ . Todos os espaços  $AdS$  com dimensão 3 ou maior possuem propriedades que independem de sua dimensão e isso nos permite classificar todos os espaços  $AdS$  [9], [10].

Neste trabalho não será discutido a quantização do campo gravitacional. Vamos descrever aqui a dinâmica de campos quânticos definidos sobre um espaço cuja geometria está previamente fixada. Como a dinâmica desses campos será determinada pela equação de Schrödinger, ou Heisenberg, precisamos definir neste contexto uma Hamiltoniana autoadjunta que irá determinar esta dinâmica. Em geral definimos este operador como o Laplaciano da variedade que atua nas funções de quadrado integrável definidas sobre a variedade [20], [6]. Este operador será hermitiano, porém não necessariamente autoadjunto. Discutiremos aqui como construir um operador autoadjunto a partir de um operador hermitiano e as consequências associadas a este processo.

As equações de Einstein são soluções da extremização de uma única ação, a menos de termos de fronteira, em 3+1 dimensões: a ação de Einstein-Hilbert [2]. Existe uma construção alternativa que generaliza esta ação para qualquer dimensão que chamarei aqui de gravitação de Lovelock [25]. Esta teoria é construída no fibrado tangente da variedade e se utiliza do cálculo exterior para descrever a geometria do espaço. O uso do cálculo exterior traz algumas vantagens por exemplo as equações de campo serão equações diferenciais de primeira ordem. Quando resolvemos estas equações em 2+1 dimensões descobrimos que as únicas soluções possíveis das equações de campo geram um espaço de curvatura constante que será Minkowski,  $dS_3$  ou  $AdS_3$ . Neste contexto será discutida a relação que existe entre gravitação e uma teoria de calibre.

A organização do trabalho é a seguinte. No Capítulo 2 será discutida a formulação de uma teoria quântica em uma variedade dotada de uma métrica com assinatura Lorentziana. Será suficiente discutirmos apenas o campo escalar sem massa. Neste contexto iremos deduzir o efeito Hawking e motivado por ele será introduzida a termodinâmica de um buraco negro. Veremos como as propriedades do horizonte determinam as grandezas termodinâmicas de um buraco negro e abordaremos três exemplos: Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr. O Capítulo 3 é dedicado a formulação da gravitação de Lovelock. Sua construção será feita com detalhes. Neste contexto serão discutidos o buraco negro  $BTZ$  e as teorias de Chern-Simons. No Capítulo 4 dis-



cutiremos o espaço  $AdS_2$  em detalhes. Serão apresentadas suas parametrizações, representação do seu grupo de isometrias  $SO(2, 1)$  e curvas geodésicas. Veremos que o  $AdS_2$  se destaca dos outros espaços  $AdS$  de dimensões maiores por apresentar a simetria local de Weyl como uma simetria adicional. O Capítulo 5 é dedicado a discutir as extensões autoadjuntas de um operador hermitiano. Serão definidos os índices de deficiência, que irão classificar os operadores hermitianos via um procedimento dado pelo teorema de von Neumann. Por fim serão discutidas algumas aplicações deste procedimento para a descrição e classificação de um espaço-tempo.

## Capítulo 2

# Termodinâmica de buracos negros

O principal objetivo deste capítulo é discutir a formulação da termodinâmica dos buracos negros. Discutiremos a construção de uma teoria de campos quânticos definidos sobre um espaço-tempo curvo, como feito em [1], e veremos que devido a efeitos quânticos um buraco negro irradia um espectro com temperatura bem definida, esse fenômeno é conhecido como efeito Hawking. Motivado por este fato serão apresentadas e analisadas as leis da termodinâmica de um buraco negro. Por fim serão calculadas as grandezas termodinâmicas para os buracos negros de Schwarzschild, Reissner-Nördstrom e Kerr.

### 2.1 Mecânica quântica em um espaço curvo

Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional dotada de uma métrica com assinatura  $(-, +, \dots, +)$  e derivada covariante  $\nabla_\mu$ . Seja  $\phi$  um campo escalar definido sobre esta variedade. Considere a Lagrangeana dada por

$$L = \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (2.1)$$

onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . O procedimento para obter esta Lagrangeana é chamado acoplamento mínimo e equivale a simplesmente substituímos a métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, \dots, +1)$  por  $g_{\mu\nu}(x)$  e a derivada parcial  $\partial_\mu$  por uma derivada covariante  $\nabla_\mu$  na Lagrangeana de Klein-Gordon. O fator  $\sqrt{-g}$  aparece devido ao fato de que a Lagrangeana é uma densidade. A equação

de movimento que surge da extremização da ação é

$$(\square - m^2)\phi = 0, \quad (2.2)$$

onde  $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ . O momento conjugado ao campo  $\phi$  é definido por

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial(\nabla_0\phi)} = \sqrt{-g}\nabla_0\phi. \quad (2.3)$$

Para quantizar a teoria precisamos promover os campos a operadores que atuam no espaço de Fock. O espaço de Fock é o espaço de todos os estados possíveis do sistema. Em nosso contexto esses estados estarão associados a partículas. Para construir esses estados impomos as relações de comutação canônicas a tempos iguais:

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}')] = 0 \quad (2.4)$$

$$[\Pi(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')] = 0 \quad (2.5)$$

$$[\phi(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')] = \frac{i}{\sqrt{-g}}\delta^{(n-1)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.6)$$

Precisamos também definir um produto interno no espaço dos campos. Para isso considere  $\Sigma \in \mathcal{M}$  uma superfície (n-1)-dimensional tipo-espaço dotada de uma métrica induzida  $\gamma_{ij}$  em  $\Sigma$  e  $n^\mu$  campo vetorial unitário normal à  $\Sigma$ . Sejam  $\phi_1, \phi_2$  dois campos definidos sobre  $\mathcal{M}$ , o produto interno entre eles será dado por

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} (\phi_1 \nabla_\mu \phi_2^* - \phi_2^* \nabla_\mu \phi_1) n^\mu \sqrt{\gamma} d^{n-1}x. \quad (2.7)$$

Suponha que possamos encontrar um conjunto completo de soluções da equação de movimento que seja ortonormal pelo produto interno definido acima, ou seja,  $\{f_i(x); i \in I, (\square - m^2)f_i = 0\}$ , onde  $I$  é um conjunto indexador e as funções  $f$  satisfazem

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad (f_i^*, f_j^*) = -\delta_{ij}. \quad (2.8)$$

Essas funções são análogas aos modos de vibração de um oscilador harmônico e podemos escrever

os campos como superposição desses modos na forma

$$\phi = \sum_i (a_i f_i + a_i^\dagger f_i^*), \quad (2.9)$$

onde os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  satisfazem

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (2.10)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (2.11)$$

Note que eles satisfazem relações de comutação iguais às dos operadores de criação e destruição de um oscilador harmônico. Portanto deve existir um estado de vácuo  $|0_f\rangle$  tal que  $a_i|0_f\rangle = 0$ ,  $\forall i \in I$ . Todo o espaço de estados é gerado aplicando sucessivamente operadores tipo  $a^\dagger$  neste estado de vácuo. Dessa forma construímos o espaço de Fock, que é composto por todos os estados gerados por aplicações dos  $a_i^\dagger$  em  $|0_f\rangle$ . Aqui o que está sendo criado não são modos de vibração de um oscilador, mas sim estados onde existem um certo número de partículas no espaço. O número de partículas associadas ao modo  $f_i$  é dado pelo valor esperado do operador  $n_{f,i} = a_i^\dagger a_i$ , que chamamos de operador número. O estado de vácuo  $|0_f\rangle$  não possui nenhuma partícula associada aos modos do conjunto  $\{f_i\}$ , pois

$$\langle n_{f,i} \rangle_{|0_f\rangle} = \langle 0_f | n_{f,i} | 0_f \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Suponha agora que sejamos capazes de encontrar um outro conjunto completo de soluções  $\{g_i(x); i \in I, (\square - m^2)g_i = 0\}$ . Procedendo da mesma forma definimos os operadores de criação e destruição correspondentes  $b^\dagger$  e  $b$ , de modo que

$$\phi = \sum_i (b_i g_i + b_i^\dagger g_i^*) \quad (2.13)$$

$$[b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0 \quad (2.14)$$

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (2.15)$$

Teremos então um estado de vácuo  $|0_g\rangle$  tal que  $b_i|0_g\rangle = 0$ ,  $\forall i \in I$  e um operador número  $n_{g,i} = b_i^\dagger b_i$  que conta o número de partículas associadas ao modo  $g_i$ . É de se esperar que os dois conjuntos completos de soluções se relacionem entre si de alguma forma, pois a equação de Klein-Gordon é uma equação linear. Portanto o conjunto de todas as suas soluções forma um espaço vetorial e os conjuntos  $\{f_i\}$  e  $\{g_i\}$  definem duas bases possíveis deste espaço. Isso de fato acontece. Bogoliubov mostrou que podemos escrever uma solução de um conjunto como combinação linear de soluções do outro conjunto e vice-versa, na seguinte forma

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*), \quad (2.16)$$

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^*), \quad (2.17)$$

onde  $\alpha_{ij} = (g_i, f_j)$  e  $\beta_{ij} = -(g_i, f_j^*)$  são os coeficientes de Bogoliubov que satisfazem as relações

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij}, \quad (2.18)$$

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0. \quad (2.19)$$

Note que

$$a_i = (\phi, f_i) = \left( \sum_j (b_j g_j + b_j^\dagger g_j^*), f_i \right) \quad (2.20)$$

$$= \sum_j [b_j (g_j, f_i) + b_j^\dagger (g_j^*, f_i)] \quad (2.21)$$

$$\equiv \sum_j (\alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger), \quad (2.22)$$

e analogamente

$$b_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* a_j - \beta_{ij}^* a_j^\dagger). \quad (2.23)$$

Uma vez que sabemos como os operadores de criação e destruição dos conjuntos  $\{f_i\}$  e  $\{g_i\}$  se relacionam podemos avaliar o valor esperado do operador número referente ao conjunto  $\{g_i\}$ ,

$n_{g,i}$ , sobre o estado de vácuo do conjunto  $\{f_i\}$ ,  $|0_f\rangle$ :

$$\begin{aligned}
\langle 0_f | n_{g,i} | 0_f \rangle &= \langle 0_f | b_i^\dagger b_i | 0_f \rangle \\
&= \langle 0_f | \left[ \sum_{jk} (\alpha_{ij} a_j^\dagger - \beta_{ij} a_j) (\alpha_{ik}^* a_k - \beta_{ik}^* a_k^\dagger) \right] | 0_f \rangle \\
&= \langle 0_f | \left[ \sum_{jk} (\alpha_{ij} \alpha_{ik}^* a_j^\dagger a_k - \alpha_{ij} \beta_{ik}^* a_j^\dagger a_k^\dagger \right. \\
&\quad \left. - \beta_{ij} \alpha_{ik}^* a_j a_k + \beta_{ij} \beta_{ik}^* a_j a_k^\dagger) \right] | 0_f \rangle \\
&= \sum_{jk} \beta_{ij} \beta_{ik}^* \langle 0_f | a_j a_k^\dagger | 0_f \rangle = \sum_j \beta_{ij} \beta_{ij}^* \langle 0_f | 0_f \rangle. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Obtemos que, em geral, esse valor esperado será diferente de zero. O que é um fato um tanto quanto surpreendente já que estamos acostumados ao fato de que o número de partículas que compõe o espaço é fixo. Neste caso observadores que contam modos de excitação de formas diferentes vão discordar quanto ao conteúdo de partículas do espaço.

### 2.1.1 O efeito Unruh

O efeito Unruh aparece como uma consequência da equação (2.24), e é o fato de um observador acelerado em um espaço de Minkowski observar um espectro térmico relacionado ao estado de vácuo deste espaço. Mesmo considerando um caso muito particular, a dedução que apresentaremos aqui irá apresentar as ideias principais para a compreensão do fenômeno. Considere o espaço-tempo de Minkowski em duas dimensões nas coordenadas cartesianas  $(t, x)$ , cuja métrica é dada por  $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ . Seja  $\phi(t, x)$  um campo escalar sem massa definido neste espaço-tempo. A equação de movimento para  $\phi$  é dada pela equação de d'Alambert

$$(-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi = 0. \tag{2.25}$$

Suas soluções são ondas planas dadas, a menos de normalização, por

$$f_{\pm k} \propto e^{-i(-\omega t \pm kx)}, \tag{2.26}$$

que satisfazem a relação de dispersão  $k = |\omega|$ . Em termos dos modos  $f_k$  e seus respectivos operadores de criação e destruição  $a_k, a_k^\dagger$  podemos escrever uma solução geral de (2.25) na forma

$$\phi = \int dk (f_k a_k + f_k^* a_k^\dagger). \quad (2.27)$$

Considere um observador acelerado com aceleração constante  $\alpha$  que se move ao longo da curva  $\gamma$  definida por

$$\gamma^\mu(\tau) = (t(\tau), x(\tau)) = \left(\frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau), \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau)\right), \quad (2.28)$$

onde  $\tau \in \mathbb{R}$  é um parâmetro afim. Note que

$$a^\mu = \frac{D^2 \gamma^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2 \gamma^\mu}{d\tau^2} \quad (2.29)$$

$$= (\alpha \sinh(\alpha\tau), \alpha \cosh(\alpha\tau)), \quad (2.30)$$

$$a^\mu a_\mu = \alpha^2. \quad (2.31)$$

De fato  $\gamma$  descreve a trajetória de um observador que se move com aceleração contante. Além disso  $x^2(\tau) - t^2(\tau) = \alpha^{-2}$ . Portanto a curva  $\gamma$  é uma hipérbole. Considere a seguinte mudança de coordenadas

$$(t, x) \rightarrow (\eta, \xi), \quad (2.32)$$

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta), \quad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \quad (2.33)$$

$$\eta(\tau) = \frac{\alpha}{a} \tau, \quad \xi(\tau) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{a}{\alpha}\right), \quad (2.34)$$

$$\eta, \xi \in (-\infty, \infty). \quad (2.35)$$

A coordenada temporal  $\eta$  é proporcional ao tempo próprio e a coordenada espacial  $\xi$  é constante. Em particular se  $a = \alpha$ , teremos  $\eta = \tau$  e  $\xi = 0$ . As coordenadas  $(\eta, \xi)$  cobrem apenas a região (I):  $x > |t|$  do espaço. Essas coordenadas descrevem um observador de Rindler e nelas a métrica fica dada por

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (2.36)$$

Note que  $\partial_\eta$  é um vetor de Killing tipo-tempo. Em termos de  $(t, x)$ ,  $\partial_\eta = a(x\partial_t + t\partial_x)$ . Vemos então que se trata do campo vetorial de Killing associado ao boost na direção  $x$ . A norma do vetor de Killing determina o fator de redshift, que nesse caso vale  $V = e^{a\xi}$ . Assim a aceleração sentida por esse observador será dada por

$$k = \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} = a. \quad (2.37)$$

As coordenadas  $(\eta, \xi)$  também podem ser definidas na região (II):  $x < -|t|$ . O que muda em relação às coordenadas (2.33) que definimos anteriormente é que os sinais são invertidos, ou seja,

$$t = -\frac{1}{a}e^{a\xi} \sinh(a\eta); \quad x = -\frac{1}{a}e^{a\xi} \cosh(a\eta). \quad (2.38)$$

Nas coordenadas  $(\eta, \xi)$ , a equação de Klein-Gordon para  $\phi$  fica na forma

$$\square\phi = e^{-2a\xi}(-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2)\phi = 0 \quad (2.39)$$

e admite soluções tipo onda plana

$$g_k(\eta, \xi) = \sigma e^{-i\omega\eta + ik\xi}, \quad (2.40)$$

onde  $\sigma = 1/\sqrt{4\pi\omega}$  é uma constante de normalização, que satisfaz a relação de dispersão  $\omega = |k|$ . Essa solução tem frequência positiva, pois  $\partial_\eta g_k = -i\omega g_k$ , e se refere à região (I). Para cobrir as regiões (I) e (II) simultaneamente definimos

$$g_k^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta + ik\xi}, & \text{em (I)} \\ 0, & \text{em (II)} \end{cases}$$

$$g_k^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{em (I)} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega\eta + ik\xi}, & \text{em (II)}. \end{cases}$$

Note que quando passamos da região (I) para a (II), o campo vetorial  $\partial_\eta$  muda de sentido, ou seja  $(\text{I}) \rightarrow (\text{II}) \Rightarrow \partial_\eta \rightarrow \partial_{-\eta} = -\partial_\eta$ . Por isso as funções  $\{g^{(1,2)}\}$  são soluções de frequência positivas



nas suas respectivas regiões. Ainda  $\{g_k^{(1,2)}\}, k \in \mathbb{R}$ , são conjuntos completos de soluções da equação de Klein-Gordon. Assim, podemos definir operadores  $b_k^{(1,2)}$  e  $b_k^{(1,2)\dagger}$  que nos permitem escrever uma solução geral na forma

$$\phi = \int dk [b_k^{(1)} g_k^{(1)} + b_k^{(1)\dagger} g_k^{(1)*} + b_k^{(2)} g_k^{(2)} + b_k^{(2)\dagger} g_k^{(2)*}]. \quad (2.41)$$

Considere o vetor unitário normal à superfície  $\eta$  constante,  $n^\mu = (e^{-a\xi}, 0)$ . Note que  $n^\mu$  é tipo-tempo e que  $n^0 \sqrt{\gamma} = 1$ . O produto interno dos modos  $g_k^{(i)}$  satisfazem

$$(g_k^{(i)}, g_{k'}^{(j)}) = \delta^{ij} \delta(k - k'); \quad i, j = 1, 2. \quad (2.42)$$

Das definições de  $\eta$  e  $\xi$ , temos que

$$e^{-a(\eta-\xi)} = \begin{cases} a(-t+x), & \text{em (I)} \\ a(t-x), & \text{em (II)}, \end{cases}$$

$$e^{a(\eta+\xi)} = \begin{cases} a(t+x), & \text{em (I)} \\ -a(t+x), & \text{em (II)} \end{cases}$$

tal que

$$\sqrt{4\pi\omega} g_k^{(1)} = e^{-i\omega(\eta-\xi)} = a^{i\omega/a} (-t+x)^{i\omega/a}, \quad (2.43)$$

$$\sqrt{4\pi\omega} g_k^{(2)} = e^{-i\omega(\eta+\xi)} = a^{-i\omega/a} (-t-x)^{-i\omega/a}, \quad (2.44)$$

$$\sqrt{4\pi\omega} g_{-k}^{(2)*} = e^{-i\omega(\eta-\xi)} = a^{i\omega/a} (t-x)^{i\omega/a} = e^{\pi\omega/a} e^{i\omega/a} (-t+x)^{i\omega/a}. \quad (2.45)$$

Portanto podemos construir a função

$$\sqrt{4\pi\omega} (g_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/a} g_{-k}^{(2)*}) = a^{i\omega/a} (-t+x)^{i\omega/a} \quad (2.46)$$

que é bem definida ao longo de  $t = 0$ . Definimos então

$$h_k^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega/a)}} [e^{\pi\omega/2a} g_k^{(1,2)} + e^{-\pi\omega/2a} g_{-k}^{(2,1)*}], \quad (2.47)$$

que são extensões analíticas das funções  $g_k^{(1,2)}$ , que diferentes destas podem ser expressas puramente em termos de modos de frequência positiva de Minkowski. As funções  $h_k^{(1,2)}$  estão normalizadas. Ainda  $h_k^{(1)}$ ,  $h_k^{(2)}$  estão relacionadas com  $k > 0$ ,  $k < 0$  respectivamente e satisfazem

$$(h_k^{(i)}, h_{k'}^{(j)}) = \delta^{ij} \delta(k - k'). \quad (2.48)$$

Podemos então escrever o campo  $\phi$  em termos dos modos  $h_k^{(1,2)}$  e dos seus respectivos operadores de criação e destruição  $c, c^\dagger$

$$\phi = \int dk [c_k^{(1)} h_k^{(1)} + c_k^{(1)\dagger} h_k^{(1)*} + c_k^{(2)} h_k^{(2)} + c_k^{(2)\dagger} h_k^{(2)*}]. \quad (2.49)$$

Calculando os coeficientes de Bogoliubov, teremos que

$$b_k^{(1,2)} = \frac{1}{2\sqrt{\sinh(\pi\omega/a)}} [e^{\pi\omega/2a} c_k^{(1,2)} + e^{-\pi\omega/2a} c_{-k}^{(2,1)\dagger}]. \quad (2.50)$$

Portanto podemos escrever o operador número de Rindler  $n_R^{(1)}(k) = b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)}$  na região (I) em termos de  $c_k^{(1,2)}$ . Como os modos  $h^{(1,2)}$  são expressos apenas em termos de modos com frequência positiva em Minkowski, eles devem compartilhar do mesmo vácuo, ou seja  $c_k^{(1,2)}|0_M\rangle = 0$ . Onde  $|0_M\rangle$  é o vácuo de Minkowski que satisfaz  $a_i|0_M\rangle = 0$ . Com isso podemos calcular o valor esperado do número de partículas com frequência  $\omega$  observadas por um observador de Rindler

no vácuo de Minkowski:

$$\begin{aligned}
\langle 0_M | n_R^{(1)}(k) | 0_M \rangle &= \langle 0_M | b_k^{(1)\dagger} b_k^{(1)} | 0_M \rangle \\
&= \frac{1}{2 \sinh(\pi\omega/a)} \langle 0_M | [e^{\pi\omega/2a} c_k^{(1)\dagger} + e^{-\pi\omega/2a} c_{-k}^{(2)}] \\
&\quad [e^{\pi\omega/2a} c_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} c_{-k}^{(2)\dagger}] | 0_M \rangle \\
&= \frac{e^{-\pi\omega/a}}{2 \sinh(\pi\omega/a)} \langle 0_M | c_{-k}^{(2)} c_{-k}^{(2)\dagger} | 0_M \rangle \\
&= \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \langle 0_M | 0_M \rangle. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Onde utilizamos (2.50) para escrever  $b_k^{(1)\dagger}, b_k^{(1)}$  explicitamente em termos de  $c_k^{(1)\dagger}, c_k^{(1)}$ , usamos o fato de que estes operadores destroem o vácuo de Minkowski à esquerda e à direita respectivamente e por fim usamos a relação de comutação entre eles. Considerando o estado  $|0_M\rangle$  normalizado, ou seja  $\langle 0_M | 0_M \rangle = 1$ , temos que

$$\langle n_R^{(1)}(k) \rangle_{|0_M\rangle} = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}. \tag{2.52}$$

Portanto o que um observador de Rindler com aceleração  $a$  observa é um espectro igual ao da radiação de um corpo negro com temperatura

$$T = \frac{a}{2\pi}. \tag{2.53}$$

O fato de que um observador acelerado no vácuo de Minkowski observa um espectro térmico de partículas é chamado efeito Unruh. Isto ocorre porque um observador acelerado tem uma noção diferente dos modos de frequência positiva e negativa comparado a um observador inercial.

### 2.1.2 O efeito Hawking

Considere o espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild nas coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , com horizonte de eventos em  $r = 2GM$ . Consideraremos dois observadores estáticos,  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$ , onde  $\mathcal{O}_1$  está muito próximo ao horizonte enquanto que  $\mathcal{O}_2$  está suficientemente afastado

do mesmo. Seja  $r_{1,2}$  a coordenada radial de  $\mathcal{O}_{1,2}$ , tal que

$$0 < r_1 - 2GM \ll 2GM \quad (2.54)$$

$$r_2 \gg 2GM. \quad (2.55)$$

O fator de redshift para um observador estático em Schwarzschild é dado por

$$V(r) = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \quad (2.56)$$

e a aceleração correspondente sentida por este observador é

$$a(r) = \frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}}. \quad (2.57)$$

Vamos assumir que o estado quântico de algum campo escalar  $\phi$  se parece com o vácuo de Minkowski quando observado por um observador em queda livre perto do horizonte de eventos. O que é uma consideração razoável, pois para um observador em queda livre o espaço-tempo se parece exatamente com o espaço de Minkowski. Em contrapartida o observador estático em Schwarzschild desempenha um papel análogo ao de um observador acelerado em Minkowski. Esse argumento se baseia no princípio da equivalência, onde um observador estático em um espaço curvo equivale a um observador acelerado em um espaço plano, enquanto que um observador estático em um espaço plano equivale a um observador em queda livre num espaço curvo. Dessa forma  $\mathcal{O}_1$  deve observar, devido ao efeito Unruh, um espectro térmico com temperatura  $T_1 = a_1/2\pi$ . Como  $\mathcal{O}_2$  se encontra suficientemente afastado do horizonte de eventos, nesta região assintótica o espaço se comporta como Minkowski e portanto não esperamos que ele seja capaz de observar qualquer radiação devido ao efeito Unruh. Porém a radiação observada por  $\mathcal{O}_1$  deverá se propagar até  $\mathcal{O}_2$  ajustada por um fator de redshift, de modo que  $\mathcal{O}_2$  observa um espectro com

$$T_2 = \frac{V_1 T_1}{V_2} = \frac{V_1 a_1}{V_2 2\pi}. \quad (2.58)$$

No infinito espacial um observador estático irá observar um fluxo de radiação térmica proveniente

do buraco negro com temperatura

$$T = \lim_{r_1 \rightarrow 2GM} \left( \lim_{r_2 \rightarrow \infty} T_2 \right) = \frac{k}{2\pi}, \quad (2.59)$$

onde  $k = \lim_{r \rightarrow 2GM} a(r)V(r)$  é a aceleração da gravidade no horizonte de eventos. Um buraco negro emite radiação como um corpo negro a uma temperatura proporcional à aceleração da gravidade na superfície do seu horizonte de eventos. Este fenômeno é conhecido como efeito Hawking. A existência dessa radiação parece um pouco contraditória, pois a região interna ao horizonte não tem conexão causal com a região externa e não deveria ser capaz de emitir nada para seu exterior. Mas se nada escapa de um buraco negro, a pergunta que surge naturalmente é: de onde vem essa radiação? Uma explicação plausível é o fato de que nas proximidades do horizonte de eventos pode existir processos de criação de pares que resultem na emissão de partículas que podem alcançar o infinito espacial, gerando um fluxo de radiação. Resumindo, construímos uma teoria quântica em um espaço-tempo curvo estático e descobrimos que nesta teoria o número de partículas que compõe o espaço-tempo depende do observador. Estudamos o caso particular de um observador uniformemente acelerado em um espaço-tempo plano e vimos que ele observa um espectro de radiação tipo corpo negro com temperatura bem definida e proporcional à sua aceleração, fenômeno conhecido como efeito Unruh. Finalmente usamos o resultado do efeito Unruh junto com o princípio da equivalência da Relatividade Geral no contexto do buraco negro de Schwarzschild e vimos que ele emite radiação com temperatura proporcional à aceleração da gravidade no seu horizonte de eventos - o efeito Hawking.

Uma vez que chegamos a conclusão de que um buraco negro tem uma temperatura bem definida podemos nos perguntar se podemos associar à um buraco negro outras grandezas termodinâmicas, como entropia por exemplo. A resposta desta pergunta é positiva. Faz sentido falarmos em termodinâmica de buracos negros e a próxima seção é dedicada a isso.

## 2.2 A termodinâmica de um buraco negro

Devido ao “*no-hair theorem*” [12] toda a geometria clássica de um buraco negro é determinada por exatamente três parâmetros: massa, carga e spin. Este teorema faz com que de certa forma

um buraco negro possa ser visto como um objeto simples. À primeira vista poderíamos interpretar este fato pela observação de um buraco negro como um análogo em larga escala de uma partícula elementar, como um elétron, que também tem todas as suas propriedades determinadas por sua massa, carga e spin. Porém essa analogia não se sustenta. A estrutura simples de um buraco negro está associada não a uma partícula elementar, mas a um ensemble termodinâmico. Esta analogia parece fazer mais sentido se pensarmos um buraco negro como uma estrela composta por um número muito grande de partículas, após um colapso gravitacional<sup>1</sup>. Toda a informação contida inicialmente na estrela deverá estar contida de alguma forma no buraco negro resultante. De fato isso acontece. Mostramos anteriormente que um buraco negro emite radiação com uma temperatura bem definida. Vamos mostrar também como podemos definir uma entropia para ele. A interpretação dessa entropia como uma contagem de microestados deve ser discutida no contexto de gravitação quântica, que não será apresentada neste trabalho. Trataremos o campo gravitacional sempre como um campo clássico cujas equações de movimento determinam a geometria do espaço onde definimos os campos quânticos.

### 2.2.1 As leis da termodinâmica

As leis da termodinâmica de um corpo em equilíbrio são resultados de uma série de observações experimentais e são enunciadas como postulados. Elas não podem ser deduzidas a partir de primeiros princípios. Em contrapartida, as leis da termodinâmica de um buraco negro não tiveram até esse momento observações experimentais. Elas surgem como teoremas acerca da geometria de um buraco negro e que possuem esta interpretação similar às leis da termodinâmica. As leis da termodinâmica de um buraco negro são [2]:

- Lei zero: Em um buraco negro estacionário, a gravidade superficial  $k$  é constante em todo o horizonte de eventos, mesmo quando este não possui simetria esférica.
- Primeira lei: Um buraco negro satisfaz  $dM = (k/8\pi G)dA + \mu dQ + \Omega dJ$ , onde  $Q$  é a carga com potencial químico correspondente  $\mu$ , e  $J$  é o spin com potencial químico correspondente  $\Omega$ .

---

<sup>1</sup>Sabemos que um buraco negro é um objeto complexo, porém nesta discussão não está sendo levado em conta coisas como, por exemplo, as singularidades que eles possuem e que o tornam de fato um objeto complexo.

- Segunda lei: A área do horizonte de eventos nunca decresce em qualquer processo dinâmico, isto é,  $\Delta A_H \geq 0^2$ .
- Terceira lei: O limite  $k \rightarrow 0$  não pode ser obtido através de nenhum processo contínuo.

A associação com a termodinâmica que já conhecemos surge naturalmente. Já tínhamos mostrado anteriormente que um buraco negro tem uma temperatura proporcional à aceleração da gravidade no horizonte  $k$ . Dessa forma a lei zero aponta um buraco negro como um corpo em equilíbrio térmico. A primeira lei trata-se da conservação da energia e como estamos discutindo uma teoria física é fundamental que ela esteja presente. Aqui a energia é dada por  $M$ , que é a massa de Komar [2]. A segunda lei indica que de alguma forma a área do horizonte deve estar associada com uma entropia para que a analogia com a termodinâmica seja estabelecida de forma completa.

### 2.2.2 A entropia de Bekenstein-Hawking

A necessidade de atribuir uma entropia a um buraco negro vai além da analogia formal apresentada pela segunda lei da termodinâmica. Suponha que, por exemplo, um sistema com uma entropia  $S_0$  caia dentro de um buraco negro. A entropia do universo exterior seria portanto subtraída de  $S_0$ . Como nada pode escapar de um buraco negro, essa entropia não poderia ser recuperada. Portanto a entropia total do universo iria diminuir. Isso entraria em contradição com a segunda lei da termodinâmica, a menos que o buraco negro possua uma entropia. Este raciocínio simples foi apresentado primordialmente por Bekenstein, como resposta à pergunta de Wheeler <sup>3</sup> e nos permite concluir que definitivamente um buraco negro deve ter uma entropia. A segunda lei apresentada acima sugere que esta entropia seja proporcional à área do horizonte de eventos. Utilizando a conservação da energia, temos que

$$dM = \frac{k}{8\pi G} dA = dE = TdS. \quad (2.60)$$

---

<sup>2</sup>Esta lei se trata do teorema das áreas de Hawking, que é apresentado em [3], cap.9.

<sup>3</sup>O que acontece com a entropia do universo quando uma xícara de chá quente cai dentro de um buraco negro?

Como já determinamos a temperatura de um buraco negro devido ao efeito Hawking, teremos que

$$\frac{k}{2\pi} d\left(\frac{A}{4G}\right) = TdS \Rightarrow S = \frac{A}{4G}. \quad (2.61)$$

A entropia de um buraco negro é portanto proporcional à área de seu horizonte de eventos. Restaurando as constantes  $c, \hbar, k_B$ , obtemos uma expressão para a entropia onde aparecem todas as constantes fundamentais da física:

$$S = A \frac{k_B c^3}{4G\hbar}. \quad (2.62)$$

### 2.2.3 Parâmetros

Existem apenas três parâmetros que irão determinar toda a termodinâmica de um buraco negro. São eles:

1. A massa do buraco negro<sup>4</sup>,  $M$ .
2. A área do horizonte  $A_H = \int_{\Sigma} \sqrt{-g} d^2x = 4\pi r_H^2$ .
3. A aceleração da gravidade na superfície do horizonte  $k$ .

Note que todos esses parâmetros estão associados diretamente ao horizonte de eventos. Vamos discutir em seguida a geometria nas proximidades do horizonte e calcular explicitamente a temperatura e a entropia para alguns buracos negros conhecidos.

## 2.3 O horizonte de eventos

O horizonte de eventos funciona como uma membrana de uma via apenas, que separa o interior de um buraco negro do seu exterior. Pelo horizonte, partículas massivas e luminosas podem apenas passar de fora pra dentro, mas nunca de dentro pra fora. O nome buraco negro se deve ao fato de que partículas tipo luz não podem ser enviadas de seu interior para o mundo exterior, de modo que esperamos que a região interior ao horizonte seja negra. Esta superfície desempenha um

---

<sup>4</sup>Em geral definida pela massa de Komar ou ADM [2], [3], [1].



papel fundamental na descrição desses objetos. Para exemplificar isso considerarei a definição de um buraco negro apresentada em [12].

**Definição:** um buraco negro é um espaço-tempo assintoticamente plano que contém uma região que não pertence ao cone de luz passado de nenhum ponto do futuro infinito tipo-tempo<sup>5</sup>. A fronteira desta região é uma superfície nula e estacionária chamada horizonte de eventos. A fatia à tempo fixo do horizonte de eventos é uma esfera  $S^2$ .

Dessa forma é a existência de um horizonte que define um buraco negro. Em geral o horizonte ‘cobre’ alguma singularidade real do espaço-tempo, como é o caso de Schwarzschild que veremos adiante. Além disso observamos anteriormente que todos os três parâmetros que definem a termodinâmica de um buraco negro estão associados diretamente à geometria do horizonte. Vamos agora estudar como se comporta a geometria dos buracos negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr nas proximidades de seus respectivos horizontes de eventos e determinar suas respectivas temperaturas e entropias.

### 2.3.1 Schwarzschild

A geometria de Schwarzschild é a única solução das equações de Einstein no vácuo que descreve um buraco negro estático, esfericamente simétrico e sem cargas elétricas. Em coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , seu elemento de linha é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.63)$$

onde  $M$  é a massa do buraco negro e  $d\Omega^2$  é o elemento de ângulo sólido de uma esfera  $S^2$ . Estamos considerando aqui  $k_B = \hbar = c = G = 1$ . Neste sistema de coordenadas, a métrica apresenta duas singularidades. Uma em  $r = 0$ . Essa é uma singularidade real do espaço-tempo, fato que pode ser verificado com um cálculo direto de algum invariante. Por exemplo  $R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} \propto 1/r^6$  é singular em  $r = 0$ . Já  $r = 2M$  é uma singularidade coordenada que pode ser removida com uma escolha adequada de coordenadas. A superfície  $r = 2M$  corresponde ao horizonte de eventos de Schwarzschild. Para verificar que  $r = 2M$  trata-se de fato do horizonte

---

<sup>5</sup>A pesar desta definição citar apenas o futuro infinito tipo-tempo, uma definição mais precisa inclui também o futuro infinito tipo-luz.

de eventos, pode-se analisar os diagramas de Kruskal ou de Penrose ([2],[3]) que exibem bem esse fato.

Vamos analisar agora como se comporta a métrica de Schwarzschild nas proximidades do horizonte de eventos, visto pelo seu lado exterior. Para isso definimos a coordenada  $\xi = r - 2M$  e analisamos o que acontece no caso em que  $0 < r - 2M \ll 2M$ . Assim temos que  $dr = d\xi$  e  $1 - \frac{2M}{r} = \frac{\xi}{2M}$ . Assim a métrica fica escrita na forma

$$ds^2 = -\frac{\xi}{2M}dt^2 + \frac{2M}{\xi}d\xi^2 + 4M^2d\Omega^2. \quad (2.64)$$

Definimos então  $\rho^2 = 8M\xi$  e reescrevemos a métrica na forma

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{16M^2}dt^2 + d\rho^2 + 4M^2d\Omega^2. \quad (2.65)$$

A parte  $(t, \rho)$  da métrica é idêntica à que descreve um observador uniformemente acelerado em Minkowski com aceleração  $k = 1/4M$  (veja a seção sobre efeito Unruh). Podemos então identificar  $k$  diretamente com a aceleração da gravidade na superfície do horizonte de eventos. Portanto, de acordo com o efeito Hawking, um buraco negro de Schwarzschild com massa  $M$  terá uma temperatura de

$$T = \frac{1}{8\pi M}. \quad (2.66)$$

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução não trivial das equações de Einstein no vácuo a aparecer na literatura e consequentemente a primeira a apresentar um buraco negro. O raio do horizonte de eventos também recebe o nome de raio de Schwarzschild, que nesse caso vale  $r_H = 2M$ . Como neste caso o horizonte de eventos é uma esfera, sua área vale

$$A = 4\pi r_H^2 = \frac{M^2\pi}{4} \quad (2.67)$$

e portanto a entropia de um buraco negro de Schwarzschild vale

$$S = \frac{M^2\pi}{16}. \quad (2.68)$$

Note que as expressões para temperatura e entropia, como esperado, obedecem a relação

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad (2.69)$$

que poderíamos ter usado para calcular a temperatura do buraco negro e conseqüentemente a aceleração gravitacional na superfície do horizonte de forma mais direta, conhecendo apenas  $r_H$ .

### 2.3.2 Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström também descreve um buraco negro estático com simetria esférica, porém com carga elétrica diferente de zero. Neste caso não temos uma solução das equações de Einstein no vácuo, mas sim uma solução das equações de Einstein acopladas com as equações de Maxwell, que resulta da extremização da ação

$$I = \int d^4x \sqrt{|g|} \left( R + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2.70)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor de Maxwell. Em coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$ , a solução é descrita pela métrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.71)$$

A componente  $g_{tt}$  da métrica se anula para  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ . O horizonte de eventos corresponde portanto a  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ . A solução de buraco negro só é admissível quando  $M^2 \geq Q^2$ . Utilizando as raízes  $r_{\pm}$  reescrevemos a métrica no seguinte formato

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.72)$$

Além disso podemos escrever  $M$  e  $Q^2$  em termos de  $r_{\pm}$  na forma

$$M = \frac{r_+ + r_-}{2}, \quad Q^2 = r_+ r_-. \quad (2.73)$$

Uma vez que sabemos o raio do horizonte de eventos, podemos calcular a entropia do buraco

negro, que será dada por

$$S = \pi r_+^2 = \pi(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2. \quad (2.74)$$

Sua temperatura é

$$T = \left( \frac{\partial S}{\partial M} \right)^{-1} \quad (2.75)$$

$$= \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi(2M(M + \sqrt{M^2 - Q^2}) - Q^2)}. \quad (2.76)$$

Dessa vez utilizamos a relação já conhecida da termodinâmica, a primeira lei, para calcular a temperatura sem fazer qualquer análise sobre geometria nas proximidades do horizonte. Vale ressaltar que isso só é possível porque a massa  $M$  do buraco negro, e portanto sua energia, está fixada. Note que no limite  $Q = 0$  restauramos completamente a solução de Schwarzschild. Existe um outro limite interessante quando  $M^2 = Q^2$ . Este limite é conhecido como limite extremal. Neste caso as duas raízes de  $g_{tt} = 0$  coincidem,  $r_+ = r_-$ . Além disso, neste limite temos que  $T = 0$ . Em geral um buraco negro é dito extremal quando ele possui temperatura, ou equivalentemente gravidade superficial no horizonte, igual a zero. Apesar do caso extremal apresentar  $T = 0$ , teremos ainda assim uma entropia não nula<sup>6</sup> dada por

$$S = \pi M^2. \quad (2.77)$$

Para estudarmos a geometria nas proximidades do horizonte definimos

$$\sigma = \frac{2r - r_+ - r_-}{r_+ - r_-}, \quad \tau = \frac{t(r_+ - r_-)}{2r_+^2}, \quad (2.78)$$

tal que

$$dr = \frac{r_+ - r_-}{2} d\sigma \quad (2.79)$$

$$dt = \frac{2r_+^2}{r_+ - r_-} d\tau \quad (2.80)$$

$$(r - r_+)(r - r_-) = \frac{(r_+ - r_-)^2}{4} (\sigma^2 - 1). \quad (2.81)$$

---

<sup>6</sup>Isto é uma consequência de que  $T = (\partial S / \partial M)^{-1}|_{Q^2=M^2}$ , e não  $\partial / \partial M(S|_{Q^2=M^2})$

Usando essas equações, tomando-se o caso extremal  $r_+ = r_-$  e depois o limite  $r \rightarrow r_+$  com  $\tau, \sigma$  fixos, obtemos a métrica na forma

$$ds^2 = r_+^2 \left[ -(\sigma^2 - 1)d\tau^2 + \frac{d\sigma^2}{\sigma^2 - 1} + d\Omega^2 \right]. \quad (2.82)$$

O setor  $(\tau, \sigma)$  da métrica (2.82) é uma parametrização do  $AdS_2$ , como aparece em [22], e o  $d\Omega^2$  é o elemento de ângulo sólido de uma 2-esfera. Portanto, no limite próximo ao horizonte de eventos, a geometria do buraco negro R-N extremal se comporta, localmente, como um produto  $AdS_2 \times S^2$ . Buracos negro extremais sempre irão apresentar uma geometria tipo  $AdS_2 \times S^2$  nas proximidades do seu horizonte. A compreensão deste tipo de buraco negro está associada diretamente à estrutura do  $AdS_2$ , que será discutido em detalhes adiante.

### 2.3.3 Kerr

Historicamente, a métrica de Schwarzschild foi a primeira solução não trivial das equações de Einstein no vácuo. A segunda solução não trivial no vácuo só foi aparecer décadas depois e foi a solução de Kerr[1]. A solução de Reissner-Nordström apareceu antes da de Kerr, porém ela leva em conta a interação do campo gravitacional com o eletromagnético. A métrica de Kerr descreve um espaço-tempo estacionário com simetria axial. Nas coordenadas de Boyer-Linquist,  $(\tilde{t}, \tilde{r}, \theta, \tilde{\phi})$ , ela é dada por

$$ds^2 = -e^{2\nu} d\tilde{t}^2 + e^{2\psi} (d\tilde{\phi} - \omega d\tilde{t})^2 + \rho^2 \left( \frac{d\tilde{r}^2}{\Delta} + d\theta^2 \right), \quad (2.83)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = \tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + a^2, \\ e^{2\nu} &= \frac{\Delta \rho^2}{(\tilde{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}, \\ e^{2\psi} &= \frac{\Delta \sin^2 \theta}{e^{2\nu}}, \quad \omega = \frac{2M\tilde{r}a}{\Delta \rho^2} e^{2\nu}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

A métrica de Kerr se reduz a de Schwarzschild no limite  $a = 0$ , onde temos  $\Delta = \tilde{r}^2(1 -$

$2M/\tilde{r}$ ,  $\rho^2 = \tilde{r}^2$ ,  $e^{2\nu} = 1 - 2M/\tilde{r}$ ,  $e^{2\psi} = r^2 \sin^2 \theta$ . Que quando substituimos na métrica acima obtemos o elemento de linha (2.63).

Esta métrica apresenta singularidade real em  $\rho = 0$  onde  $R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda}$  diverge [2]. Além disso temos mais duas singularidades dadas pelas soluções de  $\Delta = 0$ , que ocorrem em  $\tilde{r} = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ . Portanto a métrica de Kerr é um buraco negro com horizonte de eventos em  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ . Os parâmetros  $M$  e  $J = Ma$  são respectivamente a massa e o momento angular do buraco negro. Note que a expressão do raio de Schwarzschild do buraco negro de Kerr é análoga a de Reissner-Nordström, o que muda de uma para a outra é que substituimos  $Q$  por  $a$ . Conseqüentemente o buraco negro de Kerr terá suas grandezas termodinâmicas, temperatura e entropia, iguais as de Reissner-Nordström a menos da substituição  $Q \rightarrow a$ . Podemos concluir também que a métrica de Kerr possui um limite extremal dado por  $a^2 = M^2$ . Vamos analisar agora a geometria nas proximidades do horizonte de eventos do buraco negro de Kerr extremal. Para isso definimos a seguinte transformação de coordenadas

$$(\tilde{t}, \tilde{r}, \theta, \tilde{\phi}) \rightarrow (t, r, \theta, \phi) \quad (2.85)$$

$$\tilde{r} = M + \lambda r, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\lambda}, \quad \tilde{\phi} = \phi + \frac{t}{2M\lambda}. \quad (2.86)$$

Note que no caso extremal o horizonte de eventos se encontra em  $r = M$ . Tomaremos este limite fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  com  $t, r, \phi$  fixos. Nas novas coordenadas a métrica fica escrita na forma

$$ds^2 = -\frac{e^{2\nu}}{\lambda^2} dt^2 + \frac{\rho^2 \lambda^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + e^{2\psi} \left[ d\phi + \frac{dt}{\lambda} \left( \frac{1}{2M} - \omega \right) \right]^2, \quad (2.87)$$

onde  $e^{2\nu}, e^{2\psi}, \rho, \Delta, \omega$  são funções de  $(t, r; \lambda)$  como definimos em (2.84). Os limites relevantes são

dados por:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho^2 = r_0^2 \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right), \quad (2.88)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\lambda^2} = r^2, \quad (2.89)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{2\nu}}{\lambda^2} = \frac{r^2}{r_0^2} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right), \quad (2.90)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{2M} - \omega \right) = \frac{r}{r_0^2}, \quad (2.91)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{2\psi} = \frac{2r_0^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (2.92)$$

onde definimos  $r_0^2 = 2M^2$ . Usando as equações (2.88)-(2.92) na métrica (2.87) obtemos

$$ds^2 = \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \left[ -\frac{r^2}{r_0^2} dt^2 + \frac{r_0^2}{r^2} dr^2 + r_0^2 d\theta^2 \right] + \frac{2r_0^2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \left( d\phi + \frac{r}{r_0^2} dt \right)^2. \quad (2.93)$$

A métrica (2.93) descreve o limite próximo ao horizonte do buraco negro de Kerr extremal.

Vamos agora estudar o problema de Kepler num espaço tempo de Kerr, ou seja, uma partícula clássica que vive no plano equatorial  $\theta = \pi/2$ . Vamos fixar  $r_0 = 1$ , por conveniência e sem perda de generalidade, e fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$(r, t, \theta, \phi) \rightarrow (y, \tau, \theta, \varphi), \quad (2.94)$$

$$r = \sqrt{1 + y^2} \cos \tau + y, \quad (2.95)$$

$$t = \frac{\sqrt{1 + y^2} \sin \tau}{r}, \quad (2.96)$$

$$\phi = \varphi + \ln \left| \frac{\cos \tau + y \sin \tau}{1 + \sqrt{1 + y^2} \sin \tau} \right|, \quad (2.97)$$

obtendo assim

$$ds^2 = \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \left[ -(1 + y^2) d\tau^2 + \frac{dy^2}{1 + y^2} + d\theta^2 \right] + \frac{2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} (d\varphi + y d\tau)^2. \quad (2.98)$$

Note que  $\tau = 0 \Rightarrow t = 0, r = y, \phi = \varphi$ . Além disso, se  $d\tau = 0$ , então

$$ds^2 = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}\right) \left[\frac{dy^2}{1 + y^2} + d\theta^2\right] + \frac{2 \sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} d\varphi^2 > 0. \quad (2.99)$$

A equação acima mostra que as hiper-superfícies com  $\tau$  constante são, de fato, hiper-superfícies tipo espaço. Porém o campo vetorial de Killing  $\partial_\tau$  não é tipo tempo em todo o espaço. Como  $\partial_\tau$  não é vetor de Killing tipo tempo em toda a variedade definimos um novo vetor

$$\chi = \partial_\tau - y\partial_\varphi, \quad (2.100)$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} \chi \cdot \chi &= g_{\mu\nu} \chi^\mu \chi^\nu \\ &= g_{\tau\tau} (\chi^\tau)^2 + g_{\varphi\varphi} (\chi^\varphi)^2 + g_{\tau\varphi} (\chi^\tau \chi^\varphi + \chi^\varphi \chi^\tau) \\ &= -(1 + y^2) \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}\right) + 2y^2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} - 4y^2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \\ &= - \left[ (1 + y^2) \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2}\right) + 2y^2 \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \right] < 0. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Portanto  $\chi$  é um campo vetorial tipo-tempo que aponta para o futuro em todo o espaço.

Fixando  $\theta = 0$  na métrica (2.98) obtemos

$$ds^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2\right) d\tau^2 + \frac{dy^2}{2(1 + y^2)} + d\varphi^2 + 2y(d\varphi d\tau + d\tau d\varphi). \quad (2.102)$$

Seja  $\gamma$  uma geodésica parametrizada pelo parâmetro afim  $\lambda$  em uma vizinhança com coordenadas  $\gamma(\lambda) = (\tau(\lambda), y(\lambda), \varphi(\lambda))$ . Seja  $P$  o campo vetorial tangente de  $\gamma$ ,  $P = \dot{\tau}\partial_\tau + \dot{y}\partial_y + \dot{\varphi}\partial_\varphi$ , onde definimos  $\dot{x}^i \equiv dx^i/d\lambda$ .

Como  $\varphi$  e  $\tau$  não aparecem explicitamente em (2.98),  $\partial_\varphi$  e  $\partial_\tau$  são campos vetoriais de Killing



e geram, respectivamente, ao longo de  $\gamma$  as seguintes quantidades conservadas:

$$\begin{aligned}
L &\equiv P \cdot \partial_\varphi \\
&= g_{\tau\varphi} P^\tau (\partial_\varphi)^\varphi + g_{\varphi\varphi} P^\varphi (\partial_\varphi)^\varphi \\
&= 2(\dot{\varphi} + y\dot{\tau}),
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
E &\equiv -P \cdot \partial_\tau \\
&= -g_{\tau\tau} P^\tau (\partial_\tau)^\tau - g_{\varphi\tau} P^\varphi (\partial_\tau)^\tau \\
&= \frac{1+y^2}{2} \dot{\tau} - 2y(y\dot{\tau} + \dot{\varphi}) \\
&= \frac{1+y^2}{2} \dot{\tau} - 2yL.
\end{aligned} \tag{2.104}$$

As quantidades  $E$  e  $L$  são identificados respectivamente como a energia e o momento angular da partícula que descreve a trajetória  $\gamma$ . Uma vez que  $\lambda$  é um parâmetro afim, a norma de  $P$  ao longo de  $\gamma$  será constante. Vamos agora considerar aqui uma geodésica tipo-tempo, de modo que  $P \cdot P = -\mu^2$ , onde  $\mu$  é constante. Assim

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = g_{\tau\tau} (P^\tau)^2 + g_{\varphi\varphi} (P^\varphi)^2 + g_{yy} (P^y)^2 + 2g_{\tau\varphi} (P^\tau)(P^\varphi) \tag{2.105}$$

$$= \left( \frac{1+y^2}{2} - 2y^2 \right) \dot{\tau}^2 + 2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{y}^2}{2(1+y^2)} + 4y\dot{\tau}\dot{\varphi} = -\mu^2. \tag{2.106}$$

Usamos então as quantidades conservadas  $L$  e  $E$  definidas pelas equações (2.103) e (2.104) respectivamente para reescrever a equação acima na forma

$$\dot{y}^2 - 4(E + yL)^2 + (1 + y^2)(2\mu^2 + L^2) = 0. \tag{2.107}$$

Como  $\chi$  é tipo tempo e aponta para o futuro em toda a variedade, temos que

$$-P \cdot \chi > 0 \Rightarrow E + Ly > 0. \tag{2.108}$$

Portanto o comportamento assintótico da geodésica fica determinado pela sua energia e momento angular de acordo com a equação (2.108). A equação (2.107) é semelhante à equação

de órbita elíptica obtida no problema de Kepler [4]. Este é mais um motivo para dizermos que temos, neste contexto um problema de Kepler. Lembrando que o problema de Kepler trata uma partícula no  $\mathbb{R}^3$  confinada no plano equatorial de um centro de atração gravitacional sujeita a um potencial efetivo na forma

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}, \quad (2.109)$$

onde  $k$  é uma constante de acoplamento,  $l^2$  o quadrado do momento angular,  $m$  a massa da partícula e  $r$  a coordenada radial usual. Uma consequência dessa equação é o surgimento de uma simetria escondida análoga à simetria gerada pelo vetor de Laplace-Runge-Lenz[4] no caso de Kepler.

Esta simetria merece ser bem estudada neste contexto, em particular as suas consequências para o entendimento da entropia do buraco negro de Kerr. Isto não é feito neste trabalho, porém a intenção é que este tópico seja abordado num futuro.

## Capítulo 3

# Gravitação de Lovelock

Relatividade Geral pode ser escrita a partir de um princípio variacional onde se constrói uma ação invariante por difeomorfismos definida numa variedade diferenciável quadridimensional com assinatura Lorentziana. As equações de campo são obtidas a partir de um princípio de extremo. Esta ação é um funcional do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , seu inverso  $g^{\mu\nu}$  e suas derivadas primeiras  $\partial_\sigma g_{\mu\nu}$  e recebe o nome de ação de Einstein-Hilbert (E-H). Aqui será discutido uma construção alternativa que generaliza a ação de E-H para uma variedade de dimensão arbitrária e que gera equações diferenciais de primeira ordem nos campos [25]. O caso em que  $D = 2 + 1$  será discutido em detalhes. Será discutido também a construção de teorias de Chern-Simons a partir desta formulação da gravitação. A ideia principal é construir uma formulação Lagrangeana da gravitação assumindo apenas que o espaço-tempo é uma variedade diferenciável cujo espaço tangente em cada ponto é isomorfo à Minkowski.

Relatividade Geral tem sido, sem dúvidas, a teoria mais consistente que descreve gravitação. Ela se baseia no princípio de covariância geral, que expressa, no contexto da geometria Riemanniana, a ideia de que à priori a física deve ser independente do estado de movimento do observador, ou seja, que as equações de movimento não devem mudar de forma quando fazemos uma mudança no sistema de coordenadas em que as escrevemos. A generalização que vamos apresentar aqui recebe o nome de gravitação de Lovelock e apresenta algumas vantagens em comparação com a Relatividade Geral.

### 3.1 Simetrias de calibre

Covariância geral é uma simetria local, em muitos aspectos parecida com uma simetria de calibre, como a do electromagnetismo por exemplo. Numa teoria de calibre a interação dos campos com a matéria se dá através de uma conexão  $A$  que define uma derivada covariante que substitui a derivada parcial  $\partial \rightarrow \partial + A$ . Este procedimento também é conhecido como acoplamento mínimo. Em teorias de calibre tipo electromagnetismo a conexão é um potencial vetor 1-forma que sofre a ação de um grupo de calibre  $G$  definida por

$$U \in G, A(x) \rightarrow A'(x) = U(x)A(x)U^{-1}(x) + U(x)dU^{-1}(x), \quad (3.1)$$

onde  $x$  é um ponto da variedade sobre a qual os campos estão definidos, ou seja, um ponto do espaço base e  $d$  é o operador derivada exterior. A derivada covariante induzida por  $A$  é o operador diferencial 1-forma dado por

$$\begin{aligned} \nabla &= d + A \\ &= dx^\mu(\partial_\mu + A_\mu) \\ &= dx^\mu \nabla_\mu. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Este operador é bem definido e se transforma de forma homogênea sob a ação do grupo de calibre  $G$ , ou seja,

$$\nabla \rightarrow U\nabla U^{-1}. \quad (3.3)$$

O operador D'Alambertiano obtido a partir dessa derivada covariante define um campo tensorial 2-forma  $F$  que fixa a interação dos campos com a matéria. Seja  $\phi$  um campo escalar, então

$$\nabla\nabla\phi = F\phi, \text{ e} \quad (3.4)$$

$$F = dA + A \wedge A \quad (3.5)$$

que tem interpretação geométrica de curvatura. Paralelamente na Relatividade Geral define-se

a conexão de Christoffel que desempenha um papel análogo ao potencial vetor  $A$ . A grande diferença é que numa teoria de calibre as transformações afetam apenas os campos  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x)$ , enquanto que em Relatividade Geral as transformações também alteram as coordenadas (parâmetros) dos campos  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$ .

## 3.2 Geometria

A formulação padrão da Relatividade Geral assume que o espaço-tempo é uma variedade quadridimensional com assinatura Lorenziana, com uma conexão que satisfaz a condição de metricidade

$$\nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$

Uma conexão que satisfaz esta propriedade é chamada conexão de Christoffel e dizemos que ela é compatível com a métrica. As equações de campo são dadas pelas equações de Einstein e podem ser obtidas a partir de uma única ação, a menos de termos de superfície, que é a famosa ação de Einstein-Hilbert

$$S_{\text{E-H}} = \int d^4x \sqrt{-g} (\alpha_1 R + \alpha_2), \quad (3.7)$$

onde as constantes  $\alpha_{1,2}$  se relacionam com a constante de Newton em quatro dimensões e a constante cosmológica, respectivamente, da seguinte forma

$$G = \frac{1}{16\pi\alpha_1}, \quad \Lambda = -\frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \quad (3.8)$$

e  $R = R[g]$  é o escalar de curvatura. Variando a ação de E-H com relação à métrica, obtemos

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} (R - 2\Lambda) = 0, \quad (3.9)$$

que são as equações de Einstein com constante cosmológica. Essas equações são as únicas que satisfazem as três propriedades abaixo:

- são equações tensoriais;
- são equações diferenciais de no máximo segunda ordem na métrica ;

- no limite não relativístico de campo fraco, elas reproduzem a Gravitação Newtoniana.

Essas propriedades são de fundamental importância para teoria. A primeira garante que o princípio de covariância geral é obedecido. A segunda nos permite determinar a métrica através de um problema de valor inicial. Já a terceira garante que a teoria é consistente com resultados comprovados experimentalmente, o que mostra que estas equações descrevem corretamente o campo gravitacional. O objetivo deste capítulo é encontrar a Lagrangeana mais geral que, em uma variedade diferenciável de dimensão arbitrária  $n$ , gere equações de campo a partir de um princípio variacional que satisfaça as três propriedades descritas acima.

Uma geometria é construída com base em dois conceitos, à priori independentes, que podemos associar intuitivamente com as ferramentas básicas da geometria Euclidiana, a régua e o compasso. O compasso representa a noção de distância. Com um compasso pode-se desenhar círculos diferentes com centro no mesmo ponto onde os pontos de cada círculo estão à uma mesma distância de seu centro. O objeto matemático que será responsável por nos dar uma noção de distância chamaremos de métrica. A régua está associada à noção de paralelismo, se você traça uma reta com uma régua, e depois traça várias retas perpendiculares a ela, essas retas serão paralelas entre si. O objeto que iremos definir para nos dar esta noção de paralelismo é chamado conexão. Apesar de serem conceitos independentes à priori em alguns casos será fundamental impor condições à conexão para que ela seja completamente definida pela métrica. Em geometria diferencial a conexão  $\Gamma$  define univocamente um operador diferencial que transporta paralelamente um campo vetorial da seguinte forma

$$\begin{aligned}
u^\alpha(x) \rightarrow u_{||}^\alpha(x) &= u^\alpha(x + dx) + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha u^\beta(x) dx^\mu \\
&= u^\alpha(x) + dx^\mu (\partial_\mu u^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha u^\beta) \\
\Rightarrow Du^\alpha(x) &\equiv u_{||}^\alpha(x) - u^\alpha(x) = dx^\mu (\partial_\mu u^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha u^\beta),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde da primeira para a segunda linha expandimos o campo até primeira ordem em Taylor e em seguida definimos o operador derivada covariante, que atua em um campo vetorial como

$$\nabla_\mu u^\alpha \equiv \partial_\mu u^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha u^\beta. \tag{3.11}$$

A atuação da derivada covariante em um tensor tipo (r,s) é definida de forma análoga onde temos um termo de conexão com sinal positivo para cada índice contravariante e um com sinal negativo para cada índice covariante [1], [2], [3]. Além da conexão definir um único operador diferencial que faz esse papel, existe uma única conexão que satisfaz a condição de metricidade

$$\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.12)$$

A conexão que satisfaz essa condição é a conexão, ou símbolo, de Christoffel e é dada por

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}[g] = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\partial_{\nu}g_{\sigma\alpha} + \partial_{\sigma}g_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}g_{\nu\sigma}). \quad (3.13)$$

A Conexão de Christoffel é um caso particular em que a conexão é totalmente definida pela métrica e é ela que é utilizada na Relatividade Geral. Esta discussão pode ser resumida grosseiramente aos seguintes fatos:

1. Métrica e conexão são em princípio independentes.
2. A noção de curvatura é definida unicamente pela conexão.
3. Métrica e conexão são os campos fundamentais para a construção de uma teoria geométrica.
4. Nos casos em que a métrica fixa a conexão, ela conseqüentemente também fixa a curvatura e se torna o único campo fundamental da teoria.

Em Relatividade Geral é assumida a condição de metricidade e portando a conexão desta teoria é dada pelo símbolo de Christoffel. Ao assumir isso reduz-se a quantidade de campos independentes presentes na teoria, o que a torna mais simples. Em compensação estamos restringindo as possibilidades via uma imposição a priori e portanto perdemos generalidade. Einstein acreditava que esse era um principio que precisava ser assumido para se construir uma teoria geométrica de gravitação e assim o fez. Aqui isso não será assumido e trataremos métrica e conexão como campos independentes.

### 3.3 O formalismo de primeira ordem da gravitação

Depois dessa breve discussão, já temos os elementos necessários para construir a formulação da gravitação proposta inicialmente. Para isso vamos assumir algumas coisas que serão fundamentais. Considere o espaço-tempo como uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}$ , tal que em cada ponto  $x \in \mathcal{M}$  existe um espaço vetorial tangente  $T_x$  com assinatura  $(-, +, \dots, +)$ , ou seja,  $T_x \sim \mathbb{R}^{1, n-1}$ . Em numa vizinhança de  $x$  podemos aproximar a variedade por  $T_x$ . Existe um mapa que nos permite representar em  $T_x$  tensores definidos em  $\mathcal{M}$ . Esta relação é um isomorfismo entre  $\mathcal{M}$  e a coleção de todos os  $\{T_x\}$ , ou seja, da variedade com seu fibrado tangente em  $x$ , representada pelo campo 1-forma  $e^a$  que chamaremos de vielbeine<sup>1</sup>. Suas componentes são dadas pela matriz Jacobiana

$$e_\mu^a(x) = \frac{\partial z^a}{\partial x^\mu}, \quad (3.14)$$

onde os  $z^a$  são coordenadas de  $T_x$  e  $x^\mu$  são coordenadas locais do ponto  $x \in \mathcal{M}$ . Essa definição nos dá diretamente a relação entre os espaçamentos em  $T_x$  e  $\mathcal{M}$ :

$$dz^a = e_\mu^a(x) dx^\mu. \quad (3.15)$$

A família  $e_\mu^a$  define uma base ortonormal de  $T_x$ , que interpretamos fisicamente como um referencial local em  $\mathcal{M}$ . Usaremos índices latinos para representar componentes do espaço tangente e por isso esses índices se transformam sob a ação do grupo de Lorentz  $SO(1, n-1)$ , enquanto que os índices gregos indicam componentes da variedade e se transformam sob ação do grupo de difeomorfismos de  $\mathcal{M}$ . Tensores contravariantes em  $\mathcal{M}$ ,  $\Pi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ , se relacionam com tensores contravariantes em  $T_x$ ,  $P^{a_1 a_2 \dots a_n}$ , por

$$P^{a_1 a_2 \dots a_n}(x) = e_{\mu_1}^{a_1}(x) e_{\mu_2}^{a_2}(x) \dots e_{\mu_n}^{a_n}(x) \Pi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}(x). \quad (3.16)$$

Os índices covariantes se relacionam de forma completamente análoga através do campo inverso

---

<sup>1</sup>Em uma variedade quadridimensional o vielbeine recebe o nome de tetrada.



$e_a^\mu$ , definido por  $e_a^\mu e_\mu^b = \delta_b^a$ . Note que o elemento de linha em  $T_x$  é dado por

$$ds^2 = \eta_{ab} dz^a dz^b, \quad (3.17)$$

que por sua vez pode ser expresso na forma

$$ds^2 = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b dx^\mu dx^\nu, \quad (3.18)$$

que localmente deve ser igual ao comprimento de arco em  $\mathcal{M}$ . Portanto o vielbeine induz uma métrica em  $\mathcal{M}$  dada por

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e_\mu^a(x) e_\nu^b(x). \quad (3.19)$$

Por isso dizemos que o vielbeine introduz a noção de distância, ou seja, ele funciona como um compasso nesse tipo de construção geométrica. Além disso, como a métrica é quadrática no vielbeine costumamos dizer que este funciona como a raiz quadrada da métrica, o que não é bem verdade. Porém se tomarmos o determinante, obtemos que  $|g| = e^2$ , onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  e  $e = \det(e_\mu^a)$ . Se por um lado o vielbeine determina univocamente a métrica, por outro lado, dada uma métrica existem infinitos vielbeine correspondentes. Porém dois vielbeine de  $T_x$  sempre se relacionam por uma transformação de Lorentz. Como uma transformação de Lorentz nada mais é que uma ação de grupo, as órbitas desta ação são classes de equivalência. Portanto uma métrica  $g$  determina, não um, mas uma classe de equivalência de vielbeine. Este fato se reflete diretamente no numero de componentes independentes dos dois objetos. Enquanto que o tensor métrico possui  $\frac{n(n+1)}{2}$  componentes independentes, o vielbeine possui  $n^2$ . A diferença é igual, não por coincidência, ao número de geradores do grupo de Lorentz em  $n$  dimensões  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Finalmente podemos dizer que a métrica determina univocamente o vielbeine módulo transformações de Lorentz.

Uma vez que introduzimos a noção de distâncias, falta introduzir a noção de paralelismo. Para isso precisamos definir um objeto que seja responsável por transportar paralelamente campos tensoriais em  $\mathcal{M}$ . Para definir um operador diferencial na variedade precisamos de uma conexão que faça com que a estrutura diferencial permaneça invariante por transformações de

Lorentz locais. Esse ponto é essencial, pois as transformações de Lorentz agem de forma independente em quaisquer dois espaços tangentes de pontos vizinhos de  $\mathcal{M}$ ,  $T_x$  e  $T_{x+dx}$  por exemplo. Devido a esse fato, esta conexão recebe o nome de conexão de Lorentz, mas também é conhecida como conexão de spin. Além disso gostaríamos de definir um operador derivada covariante que preserve o posto e a natureza dos tensores que sofreram sua atuação. Seja  $\phi^a(x)$  um vetor de Lorentz, sua derivada covariante é definida por

$$D_\mu \phi^a(x) = \partial_\mu \phi^a(x) + \omega^a_{b\mu} \phi^b(x), \quad (3.20)$$

onde  $\omega^a_{b\mu}$  é a conexão de Lorentz. Para que  $D_\mu \phi^a$  se transforme como um vetor é necessário que, sob uma transformação de Lorentz  $\Lambda$ , a conexão se transforme por

$$\omega^a_{b\mu} \rightarrow \omega'^a_{b\mu} = \Lambda^a_c \Lambda^d_b \omega^c_{d\mu} + \Lambda^a_c \partial_\mu \Lambda^c_b. \quad (3.21)$$

O transporte paralelo de um campo vetorial é definido por

$$\phi^a_{||}(x) - \phi^a(x) \equiv dx^\mu D_\mu \phi^a(x). \quad (3.22)$$

A derivada covariante é um operador 1-forma e a equação (3.20) é expressa intrinsecamente na forma

$$D\phi^a = d\phi^a + \omega^a_b \phi^b. \quad (3.23)$$

A generalização para tensores de postos maiores segue de forma completamente análoga à geometria Riemmaniana, ou seja, uma conexão para cada índice do tensor com sinais positivos para índices superescritos e negativo para subscritos. O grupo de Lorentz admite dois tensores invariantes, que são a métrica e o símbolo completamente antissimétrico de Levi-Civita. Da invariância do tensor métrico segue que

$$D\eta = 0 \Rightarrow \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0 \quad (3.24)$$

e portanto a conexão de Lorentz deve ser antissimétrica. A invariância do simbolo de Levi-Civita

não nos dá nenhuma informação adicional.

### 3.3.1 Candidatos à Langrangeana

Estamos construindo uma teoria geométrica de gravitação e os únicos candidatos a serem os campos dinâmicos fundamentais da teoria são o vielbeine  $e^a$  e a conexão de Lorentz  $\omega^a_b$ , ambos campos 1-forma. Num formalismo Lagrangeano a ação deve depender apenas dos campos fundamentais e suas derivadas. Como já sabemos quem são os campos fundamentais, nos resta agora descobrir que outros elementos podemos adicionar na ação a partir de derivadas desses campos. Uma das vantagens de trabalhar com formas diferenciais é que o operador derivada exterior é nilpotente, ou seja,  $d^2 = 0$ . Vamos testar o que acontece quando atuamos sucessivamente com o operador derivada covariante em um campo vetorial:

$$\begin{aligned}
D^2\phi^a &= D(d\phi^a + \omega^a_b\phi^b) \\
&= d(d\phi^a + \omega^a_b\phi^b) + \omega^a_c(d\phi^c + \omega^c_b\phi^b) \\
&= (d\omega^a_b)\phi^b - \omega^a_b d\phi^b + \omega^a_c d\phi^c + \omega^a_c \omega^c_b \phi^b \\
&= (d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b)\phi^b \equiv R^a_b \phi^b,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

nas duas primeiras linhas usamos a definição da derivada covariante, enquanto que na terceira os termos do meio se cancelaram. Descobrimos então que quadrado do operador derivada covariante atua, não como um operador diferencial, mas como um operador multiplicativo. O tensor

$$R^a_b \equiv d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b \tag{3.26}$$

é a curvatura 2-forma. Esta se relaciona com o tensor de Riemman definido em  $\mathcal{M}$  por

$$R^a_b = R^a_{b\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = R^\sigma_{\rho\mu\nu} e^a_\sigma e^b_\rho dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{3.27}$$

Como a composição de operadores diferenciais é associativa temos diretamente que

$$DR^a_b = 0. \tag{3.28}$$

O único tensor que podemos obter diferenciando o vielbeine é a torção, definida por

$$T^a \equiv de^a + \omega^a_b e^b = De^a. \quad (3.29)$$

Chamamos  $T^a$  de torção porque ele se relaciona com o tensor de torção da geometria Riemanniana de forma direta. Mais tarde mostraremos que podemos escrever suas componentes na forma

$$T^a_{\mu\nu} = (\Gamma^a_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\nu\mu})e^a_\alpha. \quad (3.30)$$

Com isso esgotamos todas as possibilidades de construir objetos independentes que poderão ser adicionado na ação a partir dos campos fundamentais e suas derivadas. Qualquer outro objeto poderá ser escrito como combinação desses que foram apresentados até aqui (esse fato não será demonstrado, mais detalhe em [25]).

Temos então todos os ingredientes necessários para construir uma ação. São eles:

1.  $e^a, \omega^a_b$  os campos dinâmicos fundamentais,
2.  $T^a, R^a_b$  tensores 2-forma construídos a partir dos campos fundamentais e suas derivadas,
3.  $\eta_{ab}, \epsilon$  tensores invariantes de Lorentz.

### 3.3.2 O teorema de Lovelock

Uma outra vantagem de utilizar formas diferenciais é que elas são, por construção, invariantes sob transformações de coordenadas (difeomorfismos). Isso se traduz no fato de não termos índices (gregos) de coordenadas explícitos na sua representação. Os únicos índices livres são índices de Lorentz e é com eles que temos que nos preocupar. A ação que queremos deve ser um escalar de Lorentz, pois a teoria não deve depender de uma escolha específica de base dos espaços tangentes. Vale lembrar que queremos que a ação seja invariante, portanto a Lagrangeana não precisará ser necessariamente invariante, ela pode mudar por uma derivada total (termos de fronteira) sob uma mudança de coordenadas no espaço tangente. Além disso serão excluídos da Lagrangeana termos como a métrica, pois não é produto exterior dos campos fundamentais ou suas derivadas, assim como campos inversos e o dual de Hodge, pois queremos equações de

primeira ordem nos campos. Esta ação geral que queremos obter foi encontrada por Lovelock e é descrita no teorema abaixo.

**Teorema de Lovelock:** A ação mais geral da gravitação em  $n$ -dimensões que não inclui termos de torção<sup>2</sup> e gera equações de no máximo segunda ordem<sup>3</sup> é escrita na forma

$$I_n = k \int_{\mathcal{M}} \sum_{p=0}^{[n/2]} a_p L^{(n,p)} \quad (3.31)$$

onde  $[n/2]$  é a parte inteira de  $n/2$ , os  $a_p$ 's são constantes a serem fixadas e

$$L^{(n,p)} = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2p-1} a_{2p}} e^{a_{2p+1}} \dots e^{a_n}. \quad (3.32)$$

Note que cada termo da Lagrangeana de Lovelock é uma  $n$ -forma em um espaço  $n$ -dimensional, este tipo de objeto é também chamado top-forma.

### 3.4 O caso particular $n = 2 + 1$

Para exemplificar a utilidade desta construção discutiremos o caso mais simples, porém de grande utilidade, em três dimensões. Pelo teorema de Lovelock, a ação mais geral em três dimensões é dada por

$$I_3 = \int \epsilon_{abc} (R^{ab} + a_1 e^a e^b) e^c. \quad (3.33)$$

Discutiremos explicitamente as equações de movimento geradas pela ação (3.33).

#### 3.4.1 Equações de primeira ordem

Para obter as equações de movimento, extremizamos a ação com relação aos campos fundamentais.

i)  $\delta_e I_3 = 0$  nos dá

$$\int \epsilon_{abc} (R^{ab} + 3e^a e^b) \delta e^c = 0. \quad (3.34)$$

<sup>2</sup>Uma discussão sobre os termos de torção que podem ser incluídos na Lagrangeana é apresentada em [26]

<sup>3</sup>Estas imposições são postas de modo que as teorias de Lovelock possuam o mesmo número de graus de liberdade que a Lagrangeana de E-H,  $\frac{n(n-3)}{2}$  [25]

como  $\delta e^c$  é arbitrário temos então que

$$R^{ab} = -3a_1 e^a e^b. \quad (3.35)$$

Em termos de coordenadas, temos:

$$R^{ab}{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -3a_1 e_\mu^a e_\nu^b dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

usando (3.27) temos

$$\begin{aligned} e_\alpha^a e_\beta^b R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu &= 3a_1 e_\mu^a e_\nu^b dx^\mu \wedge dx^\nu & (3.36) \\ e_a^\lambda e_b^\gamma e_\alpha^a e_\beta^b R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu &= -3a_1 e_a^\lambda e_b^\gamma e_\mu^a e_\nu^b dx^\mu \wedge dx^\nu \\ R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\gamma dx^\mu \wedge dx^\nu &= -3a_1 e_a^\lambda e_b^\gamma e_\mu^a e_\nu^b dx^\mu \wedge dx^\nu \\ R^{\lambda\gamma}{}_{\mu\nu} &= -3a_1 (\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\lambda \delta_\mu^\gamma) \\ R_{\mu\nu\sigma\rho} &= -3a_1 (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}). & (3.37) \end{aligned}$$

O que obtemos então é um espaço de curvatura constante. Este será Minkowski, de Sitter-3,  $dS_3$ , ou anti-de Sitter-3,  $AdS_3$ , quando a constante  $a_1$  for zero, negativa ou positiva, respectivamente.

O caso de curvatura negativa será analisado em detalhes posteriormente.

ii) Fazendo a variação em  $\omega$ ,  $\delta_\omega I_3 = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \int \epsilon_{abc} (\delta R^{ab}) e^c &= 0 \\ \int \epsilon_{abc} [\delta(d\omega^{ab}) + \omega^a{}_f \delta\omega^{fb} + \omega^{fb} \delta\omega^a{}_f] e^c &= 0 \\ \int \epsilon_{abc} [D(\delta\omega^{ab})] e^c &= 0 \\ \int \epsilon_{abc} (\delta\omega^{ab}) D e^c &= 0 \\ T^c = D e^c &= 0. & (3.38) \end{aligned}$$

Na terceira linha foi feita uma integração por partes e usamos o fato de que  $\delta\omega^{ab}$  é arbitrário. Obtemos que a torção é identicamente nula. Note que aqui a condição de torção nula vem das

equações de movimento e não de uma imposição.

Como qualquer tensor pode ser separado em sua parte simétrica e antissimétrica, podemos escrever

$$\partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b = \frac{1}{2}(S_{\mu\nu}^a + T_{\mu\nu}^a), \quad (3.39)$$

onde  $S_{\mu\nu}^a$  é simétrico nos índices  $\mu, \nu$  e  $T_{\mu\nu}^a$  são as componentes da torção, cujas componentes são antissimétricas em  $\mu, \nu$ . Temos então que

$$\omega_{b\mu}^a = -e_b^\nu [\partial_\mu e_\nu^a - \frac{1}{2}(S_{\mu\nu}^a + T_{\mu\nu}^a)] \quad (3.40)$$

$$= -e_b^\nu [\partial_\mu e_\nu^a - \frac{1}{2}(S_{\mu\nu}^\alpha + T_{\mu\nu}^\alpha)e_\alpha^a], \quad (3.41)$$

como sabemos que  $\omega_{b\mu}^a$  é uma 1-forma, para que ela se transforme corretamente o lado direito da equação acima deve ser uma derivada covariante e portanto

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}(S_{\mu\nu}^\alpha + T_{\mu\nu}^\alpha), \quad (3.42)$$

a parte antissimétrica desta equação nos mostra que, de fato

$$T_{\mu\nu}^a = (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha)e_\alpha^a. \quad (3.43)$$

Neste caso podemos escrever  $\omega_{b\mu}^a$  em termos do vielbeine e seu inverso

$$\omega_{b\mu}^a = -e_c^\nu \nabla_\mu e_\nu^c. \quad (3.44)$$

Como no nosso caso uma das equações de movimento nos deu que  $T^a = 0$ , temos que

$$\omega_{b\mu}^a = -e_b^\nu (\partial_\mu e_\nu^a - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_\sigma^a), \quad (3.45)$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$  é a conexão de Christoffel, que satisfaz a condição de metricidade  $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ .

### 3.4.2 Equações de segunda ordem

Vamos reescrever a ação  $I_3$  em termos da métrica e do escalar de curvatura para obtermos as equações de segunda ordem na métrica, equações de Einstein, e analisarmos suas soluções. Note que o primeiro termo em (3.33) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{abc}R^{ab}e^c &= \epsilon_{abc}e_\mu^ae_\nu^be_\sigma^cR^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\sigma \\
&= \sqrt{|g|}\epsilon_{\lambda\gamma\delta}e_a^\lambda e_b^\gamma e_c^\delta e_\mu^ae_\nu^be_\sigma^cR^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\sigma \\
&= \sqrt{|g|}\epsilon_{\lambda\gamma\delta}\epsilon^{\alpha\beta\sigma}\delta_\mu^\lambda\delta_\nu^\gamma\delta_\sigma^\delta R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}d^3x \\
&= 2\sqrt{|g|}Rd^3x,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde usamos o fato de que  $\epsilon$  se transforma, não como um tensor, mas como uma densidade, o que dá origem ao termo  $\sqrt{|g|}$ . Já do segundo termo de (3.33), temos que

$$\epsilon_{abc}e^ae^be^c = 6 \det(e)d^3x = 6\sqrt{|g|}d^3x. \tag{3.47}$$

Introduzindo esses resultados em  $I_3$  obtemos

$$I_3 = 2 \int (R + 3a_1)\sqrt{|g|}d^3x, \tag{3.48}$$

que é a ação de Einstein-Hilbert em sua forma usual, ou seja, escrita em termos de uma densidade e não de uma top-forma.

As equações de movimento que surgem de extremizar a ação acima com respeito a  $g_{\mu\nu}$  são as equações de Einstein com constante cosmológica, onde fixamos  $a_1 = 2/3l^2$ ,

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(R + \frac{1}{l^2}\right) = 0. \tag{3.49}$$



### 3.4.3 Análise das soluções

A solução mais geral das equações (3.48) com simetria axial, nas coordenadas cilíndricas convencionais  $(t, r, \phi)$ , é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{dr^2}{N^2} + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (3.50)$$

$$t \in (-\infty, \infty), \quad r \in (0, \infty), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad (3.51)$$

onde o quadrado da função lapso  $N^2$  e a função shift  $N^\phi$  são dadas respectivamente por

$$N^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2}, \quad (3.52)$$

$$N^\phi = -\frac{J}{2r}. \quad (3.53)$$

Os parâmetros  $M$  e  $J$  são constantes de integração identificados com a massa e o momento angular, respectivamente. Esta solução admite uma geometria tipo buraco negro. Note que a função lapso  $N$  se anula para

$$r_{\pm} = l \sqrt{\frac{M}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml}\right)^2} \right]}, \quad (3.54)$$

onde identificamos  $r_+$  como o raio do horizonte de eventos. A existência de um buraco negro requer  $M > 0$  e  $|J| \leq Ml$ . O caso extremal  $r_+ = r_-$  ocorre quando a segunda desigualdade é saturada, ou seja,  $|J| = Ml$ . Esta solução é análoga à solução de Kerr em  $n = 3 + 1$ . O estado de vácuo corresponde ao caso  $M = J = 0$ , tal que o elemento de linha fica dado por

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{l}{r}\right)^2 dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (3.55)$$

Neste caso o horizonte de eventos colapsa na origem e temos então uma singularidade nua. Chamamos de singularidade nua, uma singularidade que não está protegida por um horizonte de eventos, como é o caso acima. Sabemos que o espectro de buraco negro da solução ocorre para  $M > 0$ , porém vamos analisar um pouco o que acontece quando  $M \leq 0$ . Consideremos o

caso em que  $M \in (0, -1)$ . Seja  $\alpha^2 = -M$ ,  $0 < \alpha^2 < 1$  e fixe  $l = 1$ , a métrica fica dada por

$$ds^2 = -(\alpha^2 + r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{\alpha^2 + r^2} + r^2d\phi^2. \quad (3.56)$$

Aparentemente a métrica (3.55) não tem nenhuma singularidade, mas vejamos o que acontece quando estamos próximos da origem. Para  $r \ll \alpha$ , temos

$$ds^2 = -\alpha^2dt^2 + \frac{dr^2}{\alpha^2} + r^2d\phi^2. \quad (3.57)$$

Reescalamos então as coordenadas

$$(t, r, \phi) \rightarrow (\tau, \rho, \varphi) = (\alpha t, r/\alpha, \alpha\phi), \quad (3.58)$$

note que  $\tau \in (-\infty, \infty)$  e  $\rho \in (0, \infty)$  mantém os mesmos domínios de  $r$  e  $t$ , porém a nova coordenada angular está definida para  $\varphi \in [0, 2\pi\alpha)$ . Assim a métrica fica na forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 + \rho^2d\varphi^2. \quad (3.59)$$

O que obtemos é uma métrica Euclidiana com um déficit angular de  $2\pi(1 - \alpha)$ , ou seja, quando estamos perto da origem o espaço tem a geometria de um cone. Neste caso o que temos é uma singularidade cônica na origem. Como esta singularidade não está protegida por um horizonte, ela é um singularidade nua. Portanto  $M \in (0, -1)$  apresenta um contínuo de singularidades nuas, cujo déficit angular vai diminuindo à medida que  $M$  toma valores mais negativos. Quando atingimos  $M = -1$  a singularidade desaparece completamente. A geometria se torna  $AdS_3$  e o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -(1 + r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2d\phi^2. \quad (3.60)$$

De forma análoga ao  $M \in (0, -1)$ , podemos analisar o caso  $M < -1$ . Facilmente vemos que a métrica fica escrita da mesma forma, porém nesse caso não temos mais um déficit angular e sim um excesso. A nova coordenada angular depois de devidamente reescalada tem o domínio

dado por  $\varphi \in [0, 2\pi\sqrt{-M})$ , tal que  $\sqrt{-M} > 1$ . À medida que  $M$  toma valores mais negativos o excesso angular cresce, mas a solução não muda de comportamento.

O espectro de soluções com  $M > -1$  é descrito na imagem abaixo.

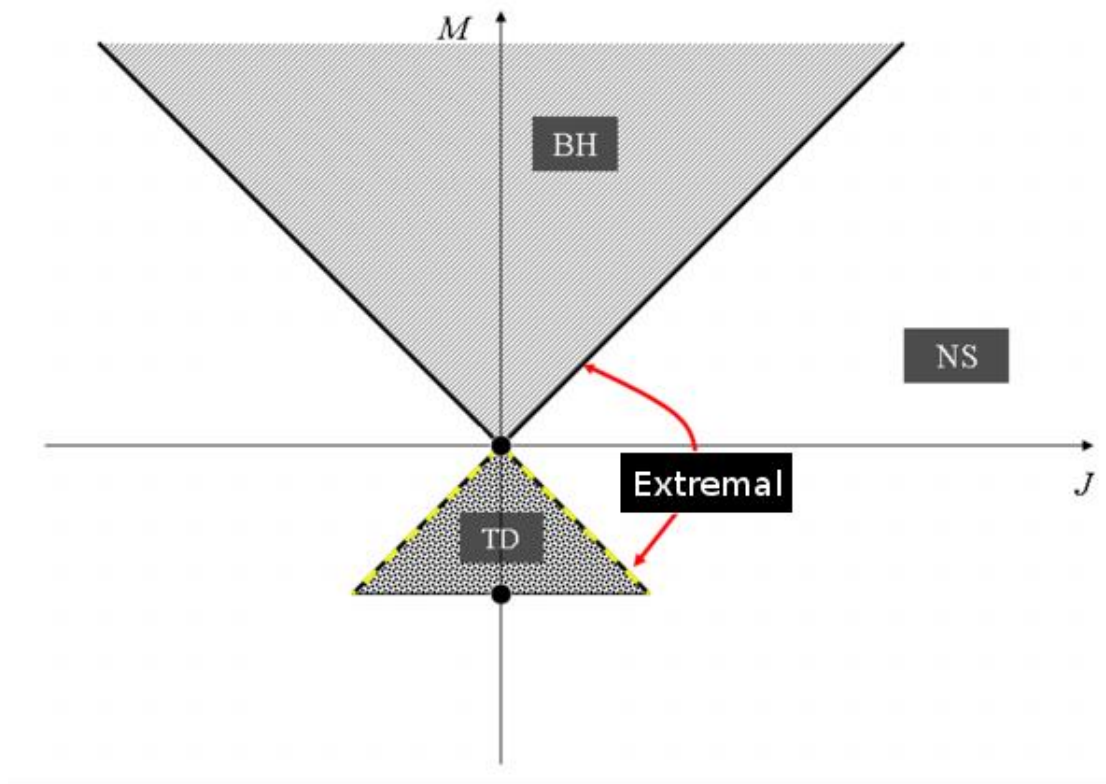


Figura 3.1: Espectro de soluções das equações de Einstein com constante cosmológica  $\Lambda = -2/3$  em dimensão  $(2 + 1)$ . Fonte: J. Zanelli and O. Miskovic, [15]. Pequenas modificações de A. Queiroz.

Na região  $J > Ml$  temos singularidades nuas, o estado de vácuo está em  $M = J = 0$ . A região  $M \in (0, -1)$  com  $J < -Ml$  apresenta singularidade cônica na origem. O ponto  $J = 0, M = -1$  é o  $AdS_3$ . Na região onde  $M > 0$  e  $Ml > J$  temos as soluções tipo buraco negro com horizonte de eventos em  $r = r_+$ , equação (3.52), onde o limite extremal está em  $J = Ml$ . Na imagem, os termos TD, NS e BH se referem a defeitos topológicos (*topological defects*), singularidades nuas (*naked singularities*) e buracos negros (*black holes*), respectivamente. Esta imagem foi extraída de [15].

O buraco negro que descrito por esta solução é o BTZ, que surgiu em [16] e é discutido em detalhes em [14] e [5]. Suas temperatura e entropia são dados respectivamente por

$$T = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi r_+ l^2}, \quad (3.61)$$

$$S = \frac{\pi r_+}{2}. \quad (3.62)$$

Note que no caso extremal  $J = Ml$  temos  $r_+ = r_-$ . Temos então um estado com temperatura  $T = 0$  e uma entropia não nula  $S = \pi l \sqrt{M/8}$ .

### 3.5 Gravitação de Chern-Simons

Considere novamente a Lagrangeana em três dimensões

$$L_3 = \epsilon_{abc}(R^{ab} \pm \frac{1}{3}e^a e^b)e^c, \quad (3.63)$$

tal que  $I_3 = \int L_3$ . Fixamos aqui  $l = 1$ , portanto  $a_1 = \pm 1/3$ , excluindo assim o espaço de Minkowski das possíveis soluções das equações de movimento. Note que

$$\begin{aligned} dL_3 &= \epsilon_{abc}\{(R^{ab} \pm e^a e^b)de^c + [dR^{ab} \pm \frac{1}{3}(de^a)e^b \mp \frac{1}{3}e^a de^b]e^c\} \\ &= \epsilon_{abc}(R^{ab} \pm e^a e^b)[de^c + (dR^{ab})e^c] \\ &= \epsilon_{abc}(R^{ab} \pm e^a e^b)(de^c + \omega^c_f e^f) \\ &= \epsilon_{abc}(R^{ab} \pm e^a e^b)T^c, \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde usamos o fato de que a Lagrangeana é algo que faz sentido apenas dentro de uma integral para podermos integrar por partes na segunda linha. O que obtemos é que a derivada exterior da Lagrangeana em três dimensões é igual à densidade de Euler em quatro dimensões [25], que é um invariante topológico. Portanto

$$\delta(dL_3) = 0. \quad (3.65)$$

Como  $\delta$  e  $d$  atuam em espaços diferentes, eles comutam. Assim

$$d(\delta L_3) = 0, \tag{3.66}$$

ou seja, a Lagrangeana varia por um forma fechada. Se o espaço no qual a Lagrangeana está definida for simplesmente conexo, pelo lema de Poincaré <sup>4</sup> a Lagrangeana irá variar por uma forma exata, ou seja, por uma derivada exterior. Portanto a ação varia por um termo de superfície. Além disso, pode-se mostrar que  $L_3$  é uma Lagrangeana de Chern-Simons para a conexão do grupo de calibre,  $ISO(2, 1)$ ,  $SO(2, 2)$  ou  $SO(3, 1)$ . Este fato não acontece somente para três dimensões, porém para qualquer espaço de dimensão ímpar.

**Lema:** Seja  $P(F)$  uma  $2n$ -forma invariante construída com um tensor intensidade  $F = dA + AA$ , onde  $A$  é a conexão para algum grupo de calibre  $G$ . Se existir uma  $(2n-1)$ -forma,  $C$ , que depende apenas de  $A$  e  $dA$ , tal que  $P = dC$ , então sob uma transformação de calibre,  $C$  muda por uma forma exata:  $\delta C = d\Sigma$ , onde  $\Sigma$  é uma  $2(n-1)$ -forma.

A  $(2n-1)$ -forma  $C$  é conhecida como a forma de Chern-Simons e pode ser utilizada como uma Lagrangeana para uma teoria de calibre com conexão  $A$ . Vale ressaltar que  $C$  não define uma Lagrangeana invariante, mas sim que varia por um termo de fronteira. Como  $C$  varia por uma derivada total dizemos que  $C$  é quase-invariante. Uma vez que usamos  $C$  como Lagrangeana, podemos fixar as condições de contorno adequadas de modo que a ação resultante seja invariante por transformações de calibre. Como, com os ingredientes que dispomos, só temos invariantes topológicos em espaços de dimensão par, teremos Lagrangeanas de Chern-Simons apenas em espaços de dimensão ímpar. Apesar deste não ser o foco aqui, a construção de teorias de Chern-Simons aparece como uma das principais motivações de se estudar o formalismo discutido neste capítulo.

---

<sup>4</sup>O lema de Poincaré diz que uma forma fechada é exata se e somente se a variedade é simplesmente conexa.

## Capítulo 4

# Espaços de Anti-de Sitter

Espaços de Anti-de Sitter ( $AdS$ ) aparecem em algumas áreas da física teórica como cosmologia, buracos negros extremais e dualidades AdS/CFT. Vamos estudar aqui as propriedades destes espaços, em particular para o caso (1+1)-dimensional [23]. Em geral um espaço  $AdS_n$ , onde  $n$  é a dimensão, terá  $SO(2, n - 1)$  como grupo de simetria, porém no caso  $n = 2$  teremos a simetria conforme, simetria local de Weyl, como uma simetria adicional. A existência dessas simetrias irão nos ajudar a distinguir o caso  $n = 2$  de todos os outros espaços com  $n \geq 3$ . O espaço  $AdS_2$  será discutido em detalhes, os casos com dimensões maiores também serão abordados. O tratamento que daremos aqui será puramente clássico, no sentido de que analisaremos apenas o comportamento de uma partícula clássica neste espaço.

### 4.1 O caso bidimensional

Considere a seguinte superfície bidimensional imersa no espaço-tempo plano  $\mathbb{R}^{2,1}$ :

$$-u^2 - v^2 + x^2 = -l^2, \tag{4.1}$$

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2. \tag{4.2}$$

A superfície descrita pelo vínculo acima é o espaço  $AdS_2$ , também chamado de pseudoesfera, plano hiperbólico ou plano de Bolyai-Lobachevsky. Esta superfície tem curvatura Gaussiana

negativa constante  $R = -1/l^2$ . Superfícies com curvatura negativa constante não podem ser obtidas fixando vínculos em um espaço de assinatura Euclidiana, portanto temos que usar um espaço de imersão com uma assinatura Lorenziana [23], como foi feito aqui. O próximo passo para descrever este espaço é definir conjuntos de coordenadas, cartas, que parametrizem o  $AdS_2$ . Aqui serão discutidas as coordenadas que descrevem a extensão global, o disco de Poincaré, o semiplano de Poincaré e a faixa. Será mostrado que temos um mapa conforme entre a faixa e o disco de Poincaré.

#### 4.1.1 Extensão global

Defina as coordenadas  $\alpha, \beta$  na forma

$$u = l \cosh \alpha \sin \beta, \quad (4.3)$$

$$v = l \cosh \alpha \cos \beta, \quad (4.4)$$

$$x = l \sinh \alpha, \quad (4.5)$$

$$\alpha \in (-\infty, \infty); \quad \beta \in [0, 2\pi) \quad (4.6)$$

que satisfazem o vínculo (4.1). Usando essas coordenadas em (4.2) obtemos o elemento de linha

$$ds^2 = l^2(d\alpha^2 - \cosh^2 \alpha d\beta^2). \quad (4.7)$$

Por conveniência, fixamos  $l = 1$ , sem perda de generalidade. Agora nós estendemos o domínio de  $\beta$  para  $\beta \in (-\infty, \infty)$  e definimos as coordenadas  $r, t$ :

$$t \equiv \beta, \quad (4.8)$$

$$r = \sinh \alpha. \quad (4.9)$$

Introduzimos na métrica (4.7) e obtemos

$$ds^2 = -(r^2 + 1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1}, \quad (4.10)$$

$$r \in (-\infty, \infty); \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (4.11)$$

As equações (4.10) e (4.11) definem a extensão global do  $AdS_2$ . O elemento de volume invariante é dado simplesmente por  $drdt$ . Estas coordenadas cobrem todo o espaço. É importante lembrar que poderíamos ter definido  $AdS_2$  pelas equações (4.10) e (4.11), pensando ele intrinsecamente como um espaço-tempo curvo bidimensional ao invés de um espaço-tempo bidimensional imerso em um espaço-tempo plano tridimensional como fizemos. As duas construções do  $AdS_2$  são equivalentes.

#### 4.1.2 O disco de Poincaré

O disco de Poincaré é um modelo do  $AdS_2$ , ou seja, um conjunto de coordenadas que descreve algum subconjunto aberto do espaço. O disco de Poincaré é análogo à projeção estereográfica de uma esfera  $S^2$  no espaço Euclidiano bidimensional. Partindo-se da extensão global (4.10) e (4.11), definimos o mapa  $(r, t) \rightarrow (\rho, t)$ , dado por:

$$\rho = \sqrt{\frac{r-1}{r+1}}, \quad (4.12)$$

$$\rho \in [0, 1). \quad (4.13)$$

Assim a métrica fica na forma

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 - \rho^2 dt^2}{(1 - \rho^2)^2}, \quad (4.14)$$

que é conforme a um disco unitário com assinatura Lorentziana. Estas coordenadas cobrem a região  $r \geq 1$  da superfície e é portanto um conjunto de coordenadas local. Os limites  $r = 1$  e  $r \rightarrow \infty$  são identificados com  $\rho \rightarrow 0$  e  $\rho \rightarrow 1$  respectivamente e definem as fronteiras desta carta. Se fizermos a rotação de Wick  $t \rightarrow i\tau$  obtemos uma métrica conforme a um disco em  $\mathbb{R}^2$ .



### 4.1.3 O semiplano de Poincaré

Vamos agora considerar outra parametrização da superfície definida pelas equações (4.1) e (4.2).

Considere as coordenadas

$$z = \frac{l}{u+x} \quad (4.15)$$

$$\gamma = \frac{-v}{u+x}. \quad (4.16)$$

Essa nova parametrização cobre apenas a região  $u+x > 0$  ou  $u+x < 0$ , que correspondem a  $z > 0$  e  $z < 0$ , respectivamente. Aqui consideraremos apenas a região  $z > 0$ . Como não há nenhuma restrição em  $\gamma$  o espaço que estamos descrevendo é a parte superior do plano  $(\gamma, z)$ . Esta parametrização do  $AdS_2$  é conhecida como o semiplano de Poincaré. O elemento de linha nas coordenadas  $(\gamma, z)$  fica dado por:

$$ds^2 = \frac{-d\gamma^2 + dz^2}{z^2} \quad (4.17)$$

$$\gamma \in (-\infty, \infty) \quad (4.18)$$

$$z \in (0, \infty). \quad (4.19)$$

### 4.1.4 A faixa

Utilizando a extensão global do  $AdS_2$  definida pelas equações (4.10) e (4.11), definimos a seguinte transformação de coordenadas  $(r, t) \rightarrow (\sigma, t)$ :

$$\sigma = \arctan(r) \quad (4.20)$$

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + d\sigma^2}{\cos^2(\sigma)} \quad (4.21)$$

$$\sigma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (4.22)$$

Nestas coordenadas o espaço-tempo tem a forma de uma faixa infinita com largura  $\pi$ . Estas coordenadas cobrem todo o  $AdS_2$  e claramente a métrica é conforme ao espaço de Minkowski 1 + 1 dimensional. Os limites  $r \rightarrow \pm\infty$  são identificados com  $\sigma \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ .

### 4.1.5 Mapa conforme

Como foi dito anteriormente, o espaço  $AdS_2$  admite simetria conforme. Vamos agora construir explicitamente o mapa conforme entre a faixa e o disco de Poincaré. Para isso considere a transformação [22]:

$$\Lambda : (t, \sigma) \rightarrow (\tau, \rho), \quad (4.23)$$

$$\sigma \pm t = 2 \arctan \left( \tanh \frac{1}{2} (\ln \rho \pm \tau) \right), \quad (4.24)$$

$$\rho \in (0, 1); \quad \tau \in [0, 2\pi). \quad (4.25)$$

Tomando um diferencial em ambos os lados de (4.24) obtemos

$$d\sigma \pm dt = \lambda_{\pm} (d\rho \pm \rho dt), \quad (4.26)$$

$$\lambda_{\pm} \equiv \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1 - \tanh^2 \frac{1}{2} (\ln \rho \pm \tau)}{1 + \tanh^2 \frac{1}{2} (\ln \rho \pm \tau)} \right], \quad (4.27)$$

$$-dt^2 + d\sigma^2 = \lambda_+ \lambda_- (d\rho^2 - \rho^2 d\tau^2). \quad (4.28)$$

As equações (4.14) e (4.21) descrevem as métricas do disco de Poincaré e da faixa, respectivamente, que iremos denotar por  $ds_{\text{faixa}}^2$  e  $ds_{\text{disco}}^2$ . Usando essas equações em (4.28) obtemos a relação

$$ds_{\text{faixa}}^2 = \Lambda(\rho, \tau) ds_{\text{disco}}^2 \quad (4.29)$$

$$\Lambda(\rho, \tau) \equiv \frac{(1 - \rho^2)^2}{\cos^2 \sigma} \lambda_+ \lambda_-, \quad (4.30)$$

lembrando que  $\sigma = \sigma(\rho, \tau)$  é definido pelas equações (4.24). As equações (4.29) e (4.30) mostram explicitamente que o mapa  $\Lambda$  é de fato conforme.

### 4.1.6 Geodésicas

Nesta seção serão discutidas as trajetórias de partículas que vivem no espaço  $AdS_2$ . Será conveniente trabalhar com o modelo do semiplano de Poincaré, que é descrito por

$$ds^2 = \frac{-dt^2 + dx^2}{x^2}, \quad (4.31)$$

$$t \in (-\infty, \infty), \quad (4.32)$$

$$x \in (0, \infty). \quad (4.33)$$

Considere o mapa  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ , onde  $\Sigma$  é um subconjunto aberto do semiplano de Poincaré, que não inclui a região  $x < 0$ . Considere a parametrização  $\gamma(\lambda) = (t(\lambda), x(\lambda))$  onde  $\lambda$  é um parâmetro afim, que identificamos como o parâmetro de tempo próprio de uma partícula que descreve a trajetória  $\gamma(\lambda)$ . O vetor tangente a esta trajetória é dado por  $P = \dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x$ , onde o ponto corresponde a uma derivada com respeito ao parâmetro afim  $\lambda$ . Como a métrica não tem uma dependência explícita em  $t$ , então  $\partial_t$  é um campo vetorial de Killing. Portanto a quantidade  $E = -P \cdot \partial_t$  é conservada ao longo de  $\gamma$ , ou seja,  $E = \dot{t}/x^2$  é uma constante do movimento. Esta quantidade é interpretada fisicamente como a energia de uma partícula que descreve a trajetória  $\gamma$ . Este fato será de grande utilidade para encontrarmos as curvas geodésicas. Note que poderíamos tentar achar as geodésicas resolvendo na força bruta a equação da geodésica

$$\ddot{\gamma}^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\sigma = 0, \quad (4.34)$$

onde  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  são os símbolos de Christoffel e  $\mu, \nu, \sigma = t, x$ . Porém proceder por este caminho é muito mais trabalhoso, pois o que temos são equações não lineares de segunda ordem que em geral são difíceis de resolver. Como estamos trabalhando com um espaço que tem simetrias suficientes, vamos usá-las para determinar as trajetórias geodésicas do espaço de uma forma muito mais simples.

## Geodésicas tipo-tempo

Uma geodésica é dita tipo-tempo se seu vetor tangente obedece a equação

$$P \cdot P = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -\frac{\dot{t}^2}{x^2} + \frac{\dot{x}^2}{x^2} = -1. \quad (4.35)$$

Geodésicas tipo-tempo descrevem as trajetórias de partículas massivas, como um elétron ou um nêutron quando tratados classicamente. Esta condição nos dá uma equação diferencial ordinária de primeira ordem a duas variáveis. Lembrando que a conservação da energia nos deu a equação  $E = \dot{t}/x^2$ , vamos usá-la para remover uma das variáveis na equação acima. Escrevendo  $\dot{t} = Ex^2$ , obtemos

$$-E^2 x^2 + \frac{\dot{x}^2}{x^2} = -1, \quad (4.36)$$

$$\dot{x} = \pm x \sqrt{E^2 x^2 - 1}. \quad (4.37)$$

Para que  $\dot{x}$  seja real, a trajetória deve ser restrita a região  $x \geq 1/E$ . As condições iniciais fixam  $x(0)$  e o sinal na equação (4.37), o valor absoluto de  $\dot{x}(0)$  é determinado por  $x(0)$ . Vamos considerar aqui o caso de uma partícula que se move em direção a  $x = +\infty$ . Portanto vamos fixar o sinal positivo em (4.37). Fixando a condição inicial  $x(0) \rightarrow 1/E$ , por valores maiores que  $1/E$ , vamos calcular o intervalo de tempo próprio que uma partícula leva até atingir  $x = +\infty$ . O intervalo de tempo próprio pode ser calculado integrando diretamente a equação diferencial (4.37) em  $x$ , tal que

$$\lambda(x) - \lambda(x_0) = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{x \sqrt{E^2 x^2 - 1}}. \quad (4.38)$$

Fixando  $\lambda(x_0) = 0$  junto com as condições definidas acima obtemos a expressão

$$\lambda(x \rightarrow \infty) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{E^2 x^2 - 1}}. \quad (4.39)$$

Definimos  $u = Ex$  e introduzimos na integral acima obtendo

$$\lambda(x \rightarrow \infty) = \int_1^\infty \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} \quad (4.40)$$

$$= \operatorname{arcsec}(x \rightarrow \infty) - \operatorname{arcsec}(1) \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.42)$$

Portanto uma partícula massiva em  $AdS_2$  atinge o infinito em um intervalo finito de tempo próprio. Este resultado ocorre particularmente em  $AdS_2$ , para espaços de  $AdS$  em dimensões maiores não temos esse tipo de fenômeno. Na verdade vamos mostrar que em espaços  $AdS_n$ ,  $n \geq 3$ , partículas massivas vão oscilar em torno da origem.

### Geodésicas tipo-luz

Uma geodésica é dita tipo-luz quando seu vetor tangente satisfaz a equação

$$P \cdot P = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0 \Rightarrow \dot{x} = Ex^2. \quad (4.43)$$

Note que neste caso a equação de movimento não impõem nenhuma restrição no domínio de  $x$ . Seguindo um procedimento completamente análogo ao que usamos no caso das partículas tipo-tempo, obtemos o intervalo de tempo próprio para uma partícula tipo-luz que parte da posição inicial  $x_0 \equiv x(0) = 1/E$  atingir o infinito:

$$\begin{aligned} \lambda(\infty) &\equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \frac{dx}{Ex^2} \\ &= \frac{1}{Ex_0} = 1. \end{aligned} \quad (4.44)$$

O fato de, neste caso, não termos nenhuma restrição adicional no domínio de  $x$  será importante para entendermos a generalização da propriedade de que uma partícula tipo-luz atinge o infinito espacial em um intervalo finito de tempo próprio. Enquanto que o fato de que podemos construir mapas conformes localmente em  $AdS_2$  estará associado ao fato de que partículas tipo-

tempo não poderão atingir o infinito em espaços  $AdS$  de dimensões maiores. Este ponto será discutido em mais detalhes junto com a discussão das geodésicas em espaços  $AdS_n, n \geq 3$ .

#### 4.1.7 As isometrias do $AdS_2$

As transformações de  $SO(2,1)$  sempre vão mapear o  $AdS_2$  nele mesmo, pois elas são simetrias das equações (4.1) e (4.2) que definem o  $AdS_2$ . Portanto o grupo de  $2 + 1$  dimensões  $SO(2,1)$  age no  $AdS_2$  como uma simetria. Aqui será discutida a representação  $SU(1,1)$  do  $SO(2,1)$ , assim como sua respectiva álgebra de Lie, seguindo [21] e [23].

#### Representação do grupo $SO(2,1)$

O grupo  $SO(2,1)$  age no espaço de Minkowski  $2 + 1$  dimensional através das transformações de Lorentz. Seja  $(u, v, x)$  um evento arbitrário. Qualquer transformação do  $SO(2,1)$  pode ser representada por uma matriz  $3 \times 3$  que age no espaço-tempo por multiplicação de matriz e todas as transformações são geradas pelas matrizes:

$$R_{\phi_0} = \begin{pmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ rotações no plano (u,v),} \quad (4.45)$$

$$T_{\tau_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \tau_0 & \sinh \tau_0 \\ 0 & \sinh \tau_0 & \cosh \tau_0 \end{pmatrix}, \text{ boosts na direção u,} \quad (4.46)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ reflexões através do plano (u,v),} \quad (4.47)$$

que recebem o nome de geradores.

Para construir a representação  $SU(1,1)$ , consideraremos o  $AdS_2$  como a faixa, construímos coordenadas do cone de luz e definimos sua representação. Nessas coordenadas, a métrica do  $AdS_2$  é  $ds^2 = \frac{-dt^2 + d\sigma^2}{\cos^2 \sigma}$ . As coordenadas do cone de luz são  $u = e^{i(t+\sigma)}$  e  $v = e^{i(t-\sigma)}$ . De modo

que o elemento de linha nestas coordenadas é dado por

$$ds^2 = \frac{4dudv}{(u+v)^2}. \quad (4.48)$$

Considere o grupo

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}, \quad (4.49)$$

definimos sua ação em  $AdS_2$  pela transformação projetiva

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \circ (u, v) = \left( \frac{\alpha u + \beta}{\bar{\beta} u + \bar{\alpha}}, \frac{\alpha v - \beta}{-\bar{\beta} v + \bar{\alpha}} \right) = (u', v'). \quad (4.50)$$

Pode-se checar através de um cálculo direto que

$$ds'^2 = \frac{4du'dv'}{(u'+v')^2} = \frac{4dudv}{(u+v)^2} = ds^2. \quad (4.51)$$

Portanto esta ação se trata de fato de uma isometria do  $AdS_2$ . Qualquer elemento do grupo  $SU(1,1)$  pode ser escrito como uma combinação linear de

$$k_t = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

$$g_x = \begin{pmatrix} \cosh \frac{x}{2} & i \sinh \frac{x}{2} \\ -i \sinh \frac{x}{2} & \cosh \frac{x}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

$$a_\sigma = \begin{pmatrix} \cosh \frac{\sigma}{2} & \sinh \frac{\sigma}{2} \\ \sinh \frac{\sigma}{2} & \cosh \frac{\sigma}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

onde as matrizes  $k_t$ ,  $g_x$  e  $a_\sigma$  formam então uma base de  $SU(1,1)$ .

Note que

$$k_t \circ (g_x \circ (1, 1)) = \left( e^{it} \left( \frac{\cosh \frac{x}{2} + i \sinh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2} - i \sinh \frac{x}{2}} \right), e^{it} \left( \frac{\cosh \frac{x}{2} - i \sinh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2} + i \sinh \frac{x}{2}} \right) \right). \quad (4.55)$$

Identificando  $x = x(\rho)$  pela relação

$$e^{i\rho} = \frac{\cosh \frac{x}{2} + i \sinh \frac{x}{2}}{\cosh \frac{x}{2} - i \sinh \frac{x}{2}}, \quad (4.56)$$

nós temos que

$$(u, v) = (k_t \circ g_{x(\rho)}) \circ (1, 1). \quad (4.57)$$

Como podemos obter qualquer ponto do espaço agindo com elementos de grupo em um único ponto dizemos que o grupo  $SU(1, 1)$  age transitivamente em  $AdS_2$ .

### A álgebra de Lie de $SU(1, 1)$

Associada à representação que discutimos na seção anterior, existe uma álgebra de Lie com geradores  $(X, Y, Z)$ , dados por

$$k_t = e^{tZ}, \quad g_x = e^{xY}, \quad a_\sigma = e^{\sigma X}, \quad (4.58)$$

onde  $k_t$ ,  $g_x$  e  $a_\sigma$  são as componentes da base do grupo de Lie. Invertendo as equações acima obtemos os geradores:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[Z, X] = Y, \quad [Y, Z] = X, \quad [X, Y] = -Z. \quad (4.60)$$



Estas relações de comutação nos dão a álgebra de Lie do  $SU(1,1)$ . Os geradores podem ser expressos em termos das matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

explicitamente:

$$X = \frac{1}{2}\sigma_x, \quad Y = -\frac{1}{2}\sigma_y, \quad Z = \frac{1}{2}\sigma_z. \quad (4.62)$$

O sinal negativo em  $Y$  é responsável por diferenciar a álgebra de Lie do  $SU(1,1)$  da do  $SU(2)$ , onde a segunda também é gerada por  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Podemos construir uma representação vetorial do  $SU(1,1)$ , que age no espaço de funções definidas sobre o  $AdS_2$ , definindo os geradores:

$$x = \cos t \sin \rho \partial_t + \sin t \cos \rho \partial_\rho \quad (4.63)$$

$$y = \sin t \sin \rho \partial_t - \cos t \cos \rho \partial_\rho \quad (4.64)$$

$$z = -\partial_t. \quad (4.65)$$

Estes geradores satisfazem as mesmas relações de comutação que  $X, Y, Z$ . Este fato pode ser mostrado através de um cálculo direto. Por exemplo

$$\begin{aligned} [z, x]f(t, \rho) &= (zx - xz)f(t, \rho) \\ &= (-\partial_t)[\cos t \sin \rho \partial_t f(t, \rho) + \sin t \cos \rho \partial_\rho f(t, \rho)] \\ &\quad - (\cos t \sin \rho \partial_t + \sin t \cos \rho \partial_\rho)[-\partial_t f(t, \rho)] \\ &= (\sin t \sin \rho \partial_t - \cos t \cos \rho \partial_\rho)f(t, \rho) \\ \Rightarrow [z, x]f(t, \rho) &= yf(t, \rho), \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde  $f(t, \rho)$  é uma função teste diferenciável. Considere

$$C = X^2 + Y^2 - Z^2, \quad (4.67)$$

temos então que:

$$[C, X] = [C, Y] = [C, Z] = 0. \quad (4.68)$$

Como  $C$  comuta com todos os geradores, ele é o Casimir da álgebra de Lie do grupo  $SU(1, 1)$ . Note que ele se parece com o quadrado do momento angular, que por sua vez é o Casimir do  $SO(3)$ . A diferença mais uma vez se deve a um sinal negativo, desta vez em  $Z^2$ . Podemos expressar  $C$  em termos da representação vetorial, simplesmente substituindo  $X, Y, Z$  por  $x, y, z$ . Assim

$$Cf(t, \rho) = (x^2 + y^2 - z^2)f = [\cos^2 \rho (\partial_\rho^2 - \partial_t^2)]f = \square_{AdS_2} f(t, \rho), \quad (4.69)$$

onde  $\square_{AdS_2}$  é o Laplaciano de  $AdS_2$ . Uma outra representação desta mesma álgebra pode ser construída em termos de novos geradores,  $E, F$  e  $H$ , definidos por

$$E = X - iY, \quad F = -X - iY, \quad H = -2iZ. \quad (4.70)$$

As relações de comutação entre eles são

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = -H. \quad (4.71)$$

Note que estas relações de comutação são muito semelhantes às dos operadores  $L_\pm, L_z$  que aparecem na álgebra do  $SO(3)$ . Na representação vetorial,  $E, F, H$  ficam na forma

$$e = x - iy = ie^{-it}(\cos \rho \partial_\rho - i \sin \rho \partial_t), \quad (4.72)$$

$$f = -x - iy = ie^{it}(\cos \rho \partial_\rho + i \sin \rho \partial_t), \quad (4.73)$$

$$h = -2iz = 2i\partial_t. \quad (4.74)$$

A análise da álgebra de Lie do grupo de isometrias do  $AdS_2$  deixa evidente que este espaço é completamente análogo à uma esfera  $S^2$ , cujo grupo de simetria é o  $SO(3)$ .

## 4.2 $AdS_n$ , $n \geq 3$

Na seção anterior discutimos em detalhes o espaço de Anti de-Sitter em duas dimensões, o  $AdS_2$ . Agora vamos estudar um espaço de Anti de-Sitter em uma dimensão arbitrária maior que dois. A princípio tentaremos seguir em analogia com o que foi feito no caso de duas dimensões, porém nem tudo poderá ser generalizado para dimensões maiores. Por exemplo geodésicas tipo-tempo não mais encontrarão o infinito espacial. Neste caso não faremos uma discussão tão detalhada do grupo de isometrias como tivemos para  $AdS_2$ .

### 4.2.1 Construindo o espaço

No caso bidimensional, construímos o espaço  $AdS$  como um hiperboloide imerso em um espaço de Minkowski com uma dimensão espacial a mais. Vamos seguir em analogia e definir o  $AdS_n$  como um hiperboloide imerso em um espaço de Minkowski  $(n+1)$ -dimensional [9], [10]. Considere a superfície em  $\mathbb{R}^{2,n-1}$ ,  $n \geq 3$ , com métrica

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + \sum_{i=1}^{n-1} dx_i^2, \quad (4.75)$$

definida pelo vínculo

$$-u^2 - v^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = -l^2, \quad (4.76)$$

onde  $l$  é uma constante fixa. A assinatura do espaço de imersão será sempre  $(-, -, +, \dots, +)$ , ou seja, os dois primeiros sinais serão negativos enquanto que todos os restantes serão positivos. As equações (4.75) e (4.76) definem o  $AdS_n$  de forma extrínseca, ou seja, como uma superfície imersa num espaço de dimensão maior. Como estas equações são invariantes sob ação do grupo  $O(2, n-1)$ , este é o grupo de simetria do  $AdS_n$ .

### 4.2.2 Parametrização

Uma vez que definimos o  $AdS_n$  como uma superfície imersa em um espaço plano, o próximo passo a seguir é parametrizar esta superfície. As coordenadas que fazem esta função são escolhidas de

forma natural. A ideia é separar a parte de sinal negativo da parte com sinal positivo, definindo

$$u = l \cosh \alpha \sin \beta, \quad (4.77)$$

$$v = l \cosh \alpha \cos \beta, \quad (4.78)$$

$$x_i = \Omega_i l \sinh \alpha, \quad (4.79)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Omega_i^2 = 1, \quad (4.80)$$

$$\alpha \in (-\infty, \infty); \quad \beta \in [0, 2\pi), \quad (4.81)$$

onde os  $\Omega_i$  são ângulos que parametrizam uma esfera  $S^{n-2}$  com raio  $l \sinh \alpha$ . Estas coordenadas satisfazem o vínculo (4.76) e são chamadas coordenadas globais de  $AdS_n$ . Substituindo as equações (4.77)-(4.80) na métrica (4.75), obtemos o elemento de linha

$$ds^2 = l^2(-\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{S^{n-2}}^2), \quad (4.82)$$

onde  $d\Omega_{S^{n-2}}^2$  é o elemento de ângulo sólido de uma  $(n-2)$ -esfera. Por conveniência fixamos  $l = 1$ . Definimos então as coordenadas  $(t, r)$

$$t \equiv \beta, \quad (4.83)$$

$$r = l \sinh \alpha, \quad (4.84)$$

e estendemos o domínio de  $t$  para  $t \in (-\infty, \infty)$ , obtendo

$$ds^2 = -(r^2 + 1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} + r^2 d\Omega_{S^{n-2}}^2, \quad (4.85)$$

$$r \in (-\infty, \infty); \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (4.86)$$

O espaço resultante é a extensão global do  $AdS_n$ . Note que poderíamos ter definido o espaço intrinsicamente pela métrica (4.85), fixando os domínios das coordenadas adequadamente. A métrica (4.85) mostra que podemos ver o  $AdS_n$  como um espaço  $AdS_2$  onde em cada ponto  $(t, r) \in AdS_2$  temos uma esfera  $S^{n-2}$  de raio  $r$ . Ou seja, o  $AdS_n$  é localmente isomorfo a

$AdS_2 \times S^{n-2}$ . A forma desta métrica também nos indica que não poderemos mais construir mapas conformes em  $AdS_n$  quando  $n \geq 3$ . Isso ocorre pois podemos escalar o setor  $AdS_2$  da métrica por uma transformação conforme, porém o raio da esfera  $S^{n-2}$  não irá se transformar da mesma forma. Por exemplo o fator  $(r^2 + 1)$  não irá escalar da mesma forma que  $r^2$ . Porém ainda podemos usar a estrutura conforme do setor  $AdS_2$  para construir diagramas causais, pois neste tipo de construção desconsideramos o espaço  $S^{n-2}$  e analisamos apenas a parte  $(t, r)$  da métrica.

### 4.2.3 Geodésicas

Considere um observador estático  $\mathcal{O}$  localizado em  $\rho = \rho_0$  que emite uma partícula sem momento angular na direção do infinito espacial. O fato da partícula não ter momento angular se traduz na sua equação de movimento em  $\dot{\Omega}_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Vamos considerar geodésicas parametrizadas por um parâmetro afim, por exemplo  $\lambda$ , de modo que se  $\phi(x^\mu(\lambda))$  é uma função escalar definida sobre a geodésica, então

$$\dot{\phi}(x^\mu(\lambda)) \equiv \frac{d}{d\lambda} \phi(x^\mu(\lambda)). \quad (4.87)$$

Esta partícula irá andar pelo espaço seguindo alguma curva geodésica, que iremos descrever aqui. Vamos procurar curvas geodésicas sem momento angular utilizando as coordenadas globais de  $AdS_n$  definidas acima.

### Geodésicas tipo-luz

Uma geodésica tipo-luz obedece a condição

$$ds^2 = 0 \Rightarrow -\cosh^2 \rho dt^2 + d\rho^2 = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\cosh \rho}. \quad (4.88)$$

Este fato nos dá diretamente uma equação diferencial de primeira ordem, que podemos integrar em  $\rho$  para obter  $t = t(\rho)$ . Temos então que

$$t(\rho) - t(\rho_0) = 2 \arctan \left( \tanh \frac{\rho}{2} \right) - 2 \arctan \left( \tanh \frac{\rho_0}{2} \right). \quad (4.89)$$

Note que isto só acontece porque estamos analisando um caso muito específico de uma partícula tipo-luz sem momento angular. Se considerarmos o caso de uma partícula tipo-luz com momento angular arbitrário a condição  $ds^2 = 0$  nos daria a equação diferencial ordinária não linear com  $n$  variáveis

$$-\cosh^2 \rho + \dot{\rho}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \dot{\Omega}_i^2 = 0, \quad (4.90)$$

que não pode ser integrada diretamente. Voltando ao nosso caso particular, o intervalo de tempo próprio medido no referencial do observador estático  $\mathcal{O}$  é dado por

$$\tau(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \sqrt{-ds^2(\rho')} = \cosh \rho_0 [t(\rho) - t(\rho_0)]. \quad (4.91)$$

Podemos fixar, por conveniência,  $t(\rho_0) = 0$ . Vamos considerar condições de contorno no infinito tal que uma partícula tipo-luz seja refletida ao atingi-lo. O infinito espacial funciona como um espelho perfeito neste caso. O tempo próprio medido por  $\mathcal{O}$  para que a partícula atinja o infinito e retorne a posição em que foi emitida  $\rho_0$  será de

$$T = 2 \lim_{\rho \rightarrow \infty} \tau(\rho) = 2 \cosh \rho_0 \left[ \pi - 2 \arctan \left( \tanh \frac{\rho_0}{2} \right) \right]. \quad (4.92)$$

Note que este intervalo é sempre finito e independe da dimensão do espaço  $AdS$  em que estamos trabalhando. Portanto uma partícula tipo luz sem momento angular em um espaço de  $AdS$  de qualquer dimensão atinge o infinito em um intervalo de tempo finito. Este resultado generaliza o resultado que obtivemos para o caso particular do  $AdS_2$ .

### Geodésicas tipo-tempo

Para encontrar as geodésicas tipo-tempo vamos proceder de forma completamente análoga à que seguimos em  $AdS_2$ . Definimos  $P = t\partial_t + \dot{\rho}\partial_\rho$  como sendo o campo vetorial tangente à geodésica, lembrando que estamos considerando  $\dot{\Omega}_i = 0$ . Uma geodésica tipo-tempo parametrizada por um parâmetro afim irá obedecer a equação

$$P \cdot P = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -1, \quad (4.93)$$

que nos dá a equação diferencial não linear com duas variáveis

$$-\cosh^2 \rho \dot{t}^2 + \dot{\rho}^2 = -1. \quad (4.94)$$

Como a métrica não tem nenhuma dependência explícita em  $t$ , então  $\partial_t$  é um campo vetorial de Killing e a quantidade  $E = -P \cdot \partial_t$  é conservada ao longo da geodésica. Portanto

$$E = -P \cdot \partial_t \Rightarrow \dot{t} = \frac{E}{\cosh^2 \rho}. \quad (4.95)$$

Seguindo em analogia ao caso de  $AdS_2$ , vamos usar este fato para simplificar a equação (4.94), obtendo

$$\dot{\rho}^2 - \frac{E^2}{\cosh^2 \rho} = -1. \quad (4.96)$$

A equação (4.96) tem a interpretação física direta de conservação da energia. Esta equação traduz o problema de uma partícula massiva sem momento angular em  $AdS_n$  ao problema de uma partícula em uma dimensão descrita pela Hamiltoniana

$$H = \frac{\dot{\rho}^2}{2} - \frac{E^2}{2 \cosh^2 \rho}. \quad (4.97)$$

Pensando dessa forma, a partícula sente um potencial efetivo dado por

$$V_{\text{eff}} = -\frac{E^2}{2 \cosh^2 \rho}. \quad (4.98)$$

Assim a partícula com energia  $E$  estará confinada na região

$$-\cosh^{-1}(E) \leq \rho \leq \cosh^{-1}(E) \quad (4.99)$$

e não será capaz de alcançar o infinito. Como o  $V_{\text{eff}}$  possui um mínimo global em  $\rho = 0$ , a partícula irá oscilar em torno da origem. Este resultado surge naturalmente quando interpretamos a equação (4.96) como conservação da energia. Uma vez que temos  $H < 0$ , esperamos que sejam permitidos apenas estados de confinamento para o sistema.

### 4.3 Conclusões

Ao analisarmos um espaço  $AdS$  de dimensão arbitrária  $n$ , vimos que localmente ele se comporta como um produto  $AdS_2 \times S^{n-2}$ . Isto justifica o fato de termos dado uma atenção especial para o caso bidimensional, pois de certa forma ele estará presente sempre que estudarmos qualquer espaço  $AdS$ . Vimos que particularmente em duas dimensões nós podemos construir mapas conformes entre diferentes modelos que descrevem o  $AdS_2$  e foram dados argumentos que nos levam a concluir que este fato não pode ser generalizado para dimensões maiores. Além disso também é uma propriedade particular do caso bidimensional o fato de uma partícula massiva poder alcançar o infinito espacial em um intervalo de tempo finito.

Vale lembrar que usamos sistemas de coordenadas diferentes quando estudamos as geodésicas para  $n = 2$  e  $n \geq 3$ . A restrição que encontramos para  $n \geq 3$ , responsável pelo confinamento das partículas se traduz no caso bidimensional em  $r \geq 1/E$ , porém como em duas dimensões temos mapas conformes podemos reescalar o espaço de modo que a restrição se torna  $x \geq \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é tão pequeno quanto quisermos. Assim eliminamos completamente a restrição original, lembrando que ao fazer isso ficamos com o problema de definir condições de contorno em  $x = 0$  ou equivalentemente  $\rho \rightarrow \infty$ . A existência dos mapas conformes em  $AdS_2$  desempenham um papel fundamental na compreensão deste tipo de espaço e fazem com que ele ganhe uma importância particular em comparação aos espaços  $AdS$  de dimensões maiores.

A propriedade que é comum a qualquer espaço de  $AdS$  é que uma partícula tipo-luz sempre atinge o infinito em um intervalo de tempo finito.



## Capítulo 5

# Extensões autoadjuntas de operadores hermitianos

Operadores autoadjuntos tem uma propriedade de grande utilidade para a física, seus autovalores são reais e por isso eles são usados em mecânica quântica representando as grandezas mensuráveis como o momento de uma partícula por exemplo. Uma vez que um dado operador é autoadjunto ele será conseqüentemente hermitiano, porém a reciproca não é necessariamente verdadeira. Iremos discutir aqui quando um operador hermitiano é autoadjunto, seguindo [17]. Quando o operador hermitiano não for autoadjunto, iremos analisar quando podemos usá-lo para construir uma extensão autoadjunta.

### 5.1 Exemplo motivacional: o poço infinito

Vamos considerar um problema clássico da mecânica quântica: uma partícula livre de massa  $m$  num poço de potencial infinito de largura  $L$  descrito por

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-L/2, L/2) \\ \infty, & |x| \geq \frac{L}{2}. \end{cases}$$

Para encontrar os estados estacionários resolvemos a equação de auto-valor

$$H\phi(x) = E\phi(x), \quad (5.1)$$

onde  $E$  é o auto-valor de energia, e usualmente exige-se que as funções de onda  $\phi(x)$  se anulam em  $L/2$  e  $-L/2$ . Portanto o operador Hamiltoniano  $H$  é definido por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (5.2)$$

$$\mathcal{D}(H) = \left\{ \phi, H\phi \in \mathcal{L}^2\left(\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]; dx\right), \phi\left(\pm \frac{L}{2}\right) = 0 \right\}, \quad (5.3)$$

onde  $dx$  é a medida do espaço das funções no intervalo  $[-L/2, L/2]$ , e o produto interno entre  $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(H)$  é definido por

$$(\phi_1, \phi_2) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \bar{\phi}_1 \phi_2. \quad (5.4)$$

A equação (5.1) tem soluções com paridade bem definida. Sendo as auto-funções no intervalo  $x \in (-L/2, L/2)$ , com seus auto-valores de energia correspondentes, ímpares dadas por

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \quad (5.5)$$

enquanto as pares são dadas por

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right], \quad E'_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{(2n-1)\pi}{L}\right]^2, \quad (5.6)$$

onde  $n$  é um inteiro positivo e ambas as soluções se anulam na região  $|x| \geq L/2$ . Os conjuntos  $\{\Phi_n(x)\}$  e  $\{\Psi_n(x)\}$  formam uma base completa das soluções com paridade ímpar e par, respectivamente. Queremos saber se  $H$  é de fato um operador autoadjunto. Para isso vamos considerar a função pertencente a  $\mathcal{D}(H)$ :

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{30}{L^5}} \left(x^2 - \frac{L}{4}\right), & |x| \leq \frac{L}{2} \\ 0, & |x| \geq \frac{L}{2}. \end{cases}$$

Como  $\psi(x)$  é uma função par, ela pode ser expandida na forma

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x), \quad (5.7)$$

onde os coeficientes  $b_n$  são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= (\Psi_n, \psi) \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} dx \sqrt{\frac{60}{L^6}} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right] \left( \frac{L}{4} - x^2 \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 8\sqrt{15}}{(2n-1)^3 \pi^3}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Vamos agora calcular os valores esperados  $\langle E \rangle$  e  $\langle E^2 \rangle$  sob o estado  $\psi$ . A probabilidade do sistema estar no auto-estado  $\phi_n$  com energia  $E'_n$  é dada por  $|(\phi_n, \psi)|^2 = b_n^2$  e portanto o valor esperado da energia será dado por

$$\langle E \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 E'_n = \frac{480\hbar^2}{m\pi^4 L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{5\hbar^2}{mL^2}. \quad (5.9)$$

Por outro lado o valor esperado da energia pode ser obtido diretamente por

$$\langle E \rangle = (\psi, H\psi) = -\frac{30\hbar^2}{mL^3} \int_{-L/2}^{L/2} dx \left( x^2 - \frac{L^2}{4} \right) = \frac{5\hbar^2}{mL^2}. \quad (5.10)$$

Analogamente para  $\langle E^2 \rangle$  temos, por um lado,

$$\langle E^2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 E_n'^2 = \frac{240\hbar^4}{m^2\pi^2 L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{30\hbar^2}{m^2 L^4}. \quad (5.11)$$

Enquanto que avaliando diretamente o valor esperado de  $H^2$  sobre o estado  $\psi$  temos

$$\langle E^2 \rangle = (\psi, H^2\psi) = 0! \quad (5.12)$$

Mas note que

$$(H\psi, H\psi) = \frac{30\hbar^4}{m^2 L^4} \quad (5.13)$$

e portanto

$$(H\psi, H\psi) \neq (\psi, H^2\psi)! \quad (5.14)$$

Ou seja,  $(H, \mathcal{D}(H))$  não é um operador autoadjunto. O fato de  $H$  não ser autoadjunto está associado com as condições de contorno impostas sobre  $\phi(x)$  e  $\bar{\phi}(x)$ . Gostaríamos de encontrar um meio de definirmos condições de contorno em  $\bar{\phi}$  de modo que o operador  $H$  seja autoadjunto. Veremos mais adiante que podemos construir extensões deste operador de modo que estas sejam auto-adjuntas. Mas antes vamos analisar um outro exemplo que nos indica um caminho para encontrarmos tais extensões. Desta vez vamos discutir uma partícula livre num intervalo fechado de comprimento  $L$ ,  $x \in [0, L]$ , e analisar o operador momento definido por

$$P = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{D}(P) = \{\phi, \phi' \in \mathcal{L}^2([0, L]; dx), \phi(0) = \phi(L) = 0\}, \quad (5.16)$$

onde  $\phi'(x) \equiv \frac{d\phi}{dx}$ . Sejam  $\psi(x), \phi(x) \in \mathcal{D}(P)$ , temos que

$$\begin{aligned} (\psi, P\phi) - (P\psi, \phi) &= \int_0^L dx \left[ \bar{\psi} \left( -i\hbar \frac{d\phi}{dx} \right) - \left( i\hbar \frac{d\bar{\psi}}{dx} \right) \phi \right] \\ &= -i\hbar \int_0^L dx \frac{d}{dx} (\bar{\psi}\phi) \\ &= -i\hbar [\bar{\psi}(L)\phi(L) - \bar{\psi}(0)\phi(0)] = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Na ultima linha usamos o fato de que  $\phi(L) = \phi(0) = 0$ , pois  $\phi(x) \in \mathcal{D}(P)$ . Portanto  $P$  é um operador simétrico (hermitiano). Porém nenhuma condição é imposta para  $\bar{\psi}(0)$  ou  $\bar{\psi}(L)$ . Assim,  $P$  não é um operador autoadjunto pois  $P^\dagger = -i\hbar(d/dx)$ , apesar de ter a mesma expressão formal, não atua no mesmo espaço que  $P$ , ou seja,

$$\mathcal{D}(P^\dagger) = \{\phi, \phi' \in \mathcal{L}^2([0, L]; dx)\} \neq \mathcal{D}(P). \quad (5.18)$$

Note que o adjunto do operador  $P_\lambda$  que atua nas funções  $\phi, \phi' \in \mathcal{L}^2([0, L])$  tal que  $\phi(L) = \lambda\phi(0)$  é o operador  $P_\lambda^\dagger = P_{1/\lambda}$ . Um candidato à família de extensões auto-adjuntas de  $P$  é o operador

$P_\theta$  definido por

$$P_\theta = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (5.19)$$

$$\mathcal{D}(P_\theta) = \{\phi, \phi' \in \mathcal{L}^2([0, L]; dx), \phi(L) = e^{i\theta} \phi(0)\}. \quad (5.20)$$

Podemos concluir que dado um operador simétrico, ele não necessariamente será autoadjunto. Note que antes de possuir qualquer propriedade um operador é um mapa entre dois conjuntos, que no nosso contexto serão iguais, e estes conjuntos fazem parte de sua definição. Por exemplo o operador momento não é definido apenas por  $P = -i\hbar(d/dx)$ , mas sim por  $(P, \mathcal{D}(P))$  como nas equações (18) e (19). Dois operadores são iguais se agirem da mesma forma e no mesmo espaço. Um operador é simétrico quando ele e seu adjunto possuem a mesma regra, ou seja, agem da mesma forma. Isso não implica que eles vão agir no mesmo espaço de funções, o que é uma condição necessária para que ele seja autoadjunto.

Em álgebra linear de dimensão finita, o fato do operador ser hermitiano implica que ele é autoadjunto. Isso decorre do fato de que o espaço dual de um espaço vetorial de dimensão finita é isomorfo ao espaço original. Estamos interessados em descobrir o que pode ser dito dos operadores simétricos que atuam em um espaço vetorial de dimensão infinita, que em geral será  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{L}^2(I \subset \mathbb{R})$ . O ultimo exemplo nos dá uma intuição deste problema. A resposta dessa pergunta está diretamente relacionada com as condições de contorno que podemos ou não impor nas funções que sofrem a atuação dos operadores hermitianos. Na seção seguinte vamos definir rigorosamente os conceitos que estamos discutindo aqui, como o adjunto de um operador por exemplo, e enunciar o teorema que nos dá uma resposta completa para a pergunta que foi posta aqui.

## 5.2 Índices de deficiência e o teorema de Von Neumann

Vamos agora definir alguns conceitos que terão grande importância para este trabalho.

- Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert, um operador  $(A, \mathcal{D}(A))$  em  $\mathcal{H}$  é dito densamente definido se o subconjunto  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$  é denso em  $\mathcal{H}$ , ou seja, para cada  $\psi \in \mathcal{H}$  existe uma sequência

$\phi_n \in \mathcal{D}(A), \forall n$  que converge em norma para  $\psi$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n - \psi|^2 = 0$ .<sup>1</sup>

- Um operador  $(A, \mathcal{D}(A))$  é dito fechado se  $\{\phi_n\}$  é uma sequência em  $\mathcal{D}(A)$  tal que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} A\phi_n = \psi$  então  $\phi \in \mathcal{D}(A)$  e  $A\phi = \psi$ .
- Seja  $H$  um operador com domínio denso  $\mathcal{D}(H)$  em  $\mathcal{H}$ . O domínio  $\mathcal{D}(H^\dagger)$  é o espaço de funções  $\psi$  tal que a forma linear  $\phi \rightarrow (\psi, H\phi)$  é contínua para a norma em  $\mathcal{H}$ . Portanto deve existir  $\psi^\dagger \in \mathcal{H}, \psi^\dagger \equiv H^\dagger\psi$  tal que  $(\psi, H\phi) = (\psi^\dagger, \phi)$ .
- Um operador  $(H, \mathcal{D}(H))$  é dito simétrico, ou hermitiano, se  $\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(H)$  nos temos  $(H\phi, \psi) = (\phi, H\psi)$ . Se  $\mathcal{D}(H)$  é denso isso significa que  $(H^\dagger, \mathcal{D}(H))$  é uma extensão de  $(H, \mathcal{D}(H))$ .
- O operador  $H$  com domínio denso  $\mathcal{D}(H)$  é auto adjunto quando  $H = H^\dagger$  e  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H^\dagger)$ .

De agora em diante sempre assumiremos que um operador qualquer  $(A, \mathcal{D}(A))$  é densamente definido, simétrico e fechado e que  $(A^\dagger, \mathcal{D}(A^\dagger))$  será seu adjunto. Definimos então os conjuntos

$$\mathcal{N}_+ = \{\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger), A^\dagger\psi = z_+\psi, \text{Im}z_+ > 0\} \quad (5.21)$$

$$\mathcal{N}_- = \{\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger), A^\dagger\psi = z_-\psi, \text{Im}z_- < 0\}. \quad (5.22)$$

Os conjuntos  $\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_-$  são chamados subespaços de deficiência, eles são os subespaços de  $\mathcal{D}(A^\dagger)$  das auto-funções de  $A^\dagger$  cujos auto-valores tem parte imaginária positiva e negativa, respectivamente. Os índices de deficiência são definidos por  $n_\pm = \dim(\mathcal{N}_\pm)$  e serão sempre expressos como o par ordenado  $(n_+, n_-)$ . Na verdade os índices de deficiência não dependem da escolha de  $z_+$  e  $z_-$  e podemos fixar  $z_\pm = \pm i\lambda$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$  é uma constante utilizada por razões dimensionais. Por exemplo, no caso do operador momento  $P = -i\hbar(d/dx)$ ,  $\lambda$  terá dimensão de momento.

### 5.2.1 O teorema de Von Neumann

**Teorema:** Seja  $(A, \mathcal{D}(A))$  um operador com índices de deficiência  $(n_+, n_-)$ . Há três possibilidades:

---

<sup>1</sup>Esta definição é equivalente a dizermos que o fecho de  $\mathcal{D}(A)$  é  $\mathcal{H}$ , denotamos isso por  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ .

1. Se  $n_+ = n_- = 0$ , então  $A$  é essencialmente autoadjunto. Esta condição é uma consequência direta do fato de que um operador autoadjunto admite apenas auto-valores reais.
2. Se  $n_+ = n_- = n \geq 1$ , então  $A$  não é autoadjunto, mas admite uma família de extensões autoadjuntas parametrizadas por uma matriz unitária  $n \times n$ , ou seja,  $n^2$  parâmetros reais.
3. Se  $n_+ \neq n_-$ , então além de  $A$  não ser autoadjunto ele não possui nenhuma extensão autoadjunta.

Este teorema nos dá um procedimento natural para tratarmos um dado operador  $P$ . Primeiro precisamos encontrar um domínio  $\mathcal{D}(P)$  onde  $P$  é simétrico e fechado. Depois determinamos seu adjunto  $(P^\dagger, \mathcal{D}(P^\dagger))$  e computamos seus índices de deficiência  $(n_+, n_-)$ . Se cairmos no caso 1 ou no caso 3 não há nada a ser feito. Se cairmos no caso 2 precisamos encontrar os domínios adequados para determinar a família de extensões autoadjuntas de  $P$ . Para exemplificar as três possibilidades do teorema de von Neumann, analisaremos o operador momento  $P = -i\hbar(d/dx)$  definido no espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(I \subset \mathbb{R})$  em três intervalos distintos. Para usarmos o teorema, primeiro resolvemos a equação

$$P^\dagger \psi_\pm(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi_\pm(x) = \pm \frac{i\hbar}{l} \psi_\pm(x), \quad (5.23)$$

onde  $l > 0$  é uma constante com unidade de distância e  $\psi_\pm(x) \in \mathcal{D}(P)$ . A solução geral da equação acima é dada por

$$\psi_\pm(x) = C_\pm e^{\mp \frac{x}{l}}, \quad (5.24)$$

onde os  $C_\pm$  são constantes, em geral fixadas quando exigimos que as funções  $\psi_\pm$  sejam normalizadas.

- Caso 1:  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Como  $\psi_+(x) \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  e  $\psi_-(x) \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , os índices de deficiência são  $(0, 0)$  e portanto, pelo teorema de von Neumann,  $(P, \mathcal{D}(P))$  é autoadjunto.
- Caso 2:  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+)$ . Neste caso temos que  $\psi_+(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+)$  e  $\psi_-(x) \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+)$  e então os índices de deficiência são  $(1, 0)$ . Estamos portanto no caso em que  $n_+ \neq n_-$  e pelo teorema de von Neumann não existem extensões auto-adjuntas de  $(P, \mathcal{D}(P))$ . O que é um

resultado um tanto quanto curioso, pois isso significa que num sistema definido sobre o eixo real positivo o operador momento definido da forma convencional por  $P = -i\hbar(d/dx)$  não é um observável. Podemos estender esses resultados para  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{L}^2([\lambda, \infty])$  e  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{L}^2([-\infty, \alpha])$ , onde  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$  são constantes fixadas.

- Caso 3:  $\mathcal{D}(P) = \mathcal{L}^2([0, L])$ . Como estamos em um intervalo finito teremos que  $\psi_{\pm}(x) \in \mathcal{L}^2([0, L])$  e neste caso os índices de deficiência serão  $(1, 1)$ . Portanto  $(P, \mathcal{D}(P))$  admite uma família de extensões autoadjuntas parametrizada por uma fase, que denotaremos por  $e^{i\theta}$ . As extensões auto-adjuntas são dadas por  $(P_{\theta}, \mathcal{D}(P_{\theta}))$ , onde

$$P_{\theta} = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (5.25)$$

$$\mathcal{D}(P_{\theta}) = \{\psi \in \mathcal{L}^2([0, L]; dx), \psi(L) = e^{i\theta}\psi(0)\}. \quad (5.26)$$

Em particular a extensão com  $\theta = 0$  corresponde à condição de contorno periódica enquanto que a extensão com  $\theta = \pi$  corresponde a condições de contorno antiperiódicas, ou seja,  $\psi(L) = -\psi(0)$ .

O caso 3 discutido acima pode ser identificado com o problema de uma partícula livre no círculo  $S^1$ , para isso identificamos a variável  $x$  com a coordenada angular  $\varphi$  e fixamos  $L = 2\pi$ . Dessa forma o operador momento faz o papel do momento angular da partícula com relação à origem, ficamos então com o operador momento  $(P_{\theta}, \mathcal{D}(P_{\theta}))$  definido por

$$P_{\theta} = -i\hbar \frac{d}{d\varphi} \quad (5.27)$$

$$\mathcal{D}(P_{\theta}) = \{\psi \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]; d\varphi), \psi(2\pi) = e^{i\theta}\psi(0)\}. \quad (5.28)$$

Uma Hamiltoniana geral autoadjunta para este problema será parametrizada por uma matriz  $U(1)$ , ou seja, uma fase  $\eta = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  e definida por

$$H_0 = -\sigma \frac{d^2}{d\varphi^2} \quad (5.29)$$

$$\mathcal{D}(H_0) = \{\psi \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]; d\varphi), \psi(2\pi) = \eta\psi(0)\} \quad (5.30)$$



onde  $\sigma$  é uma constante com dimensão de energia. Considere então a transformação unitária

$$\psi(\varphi) \rightarrow (U_{\bar{\eta}}\psi)(\varphi) = e^{-\frac{i\theta\varphi}{2\pi}}\psi(\varphi). \quad (5.31)$$

Note que se  $\psi \in \mathcal{D}(H_0) \equiv \mathcal{D}_\eta$ , então

$$(U_{\bar{\eta}}\psi)(2\pi) = e^{-i\theta}\psi(2\pi) = e^{-i\theta}e^{i\theta}\psi(0) = \psi(0) = (U_{\bar{\eta}}\psi)(0), \quad (5.32)$$

portanto se  $\psi \in \mathcal{D}_\eta$  então  $(U_{\bar{\eta}}\psi) \in \mathcal{D}_1$ , ou seja, a transformação unitária  $U_{\bar{\eta}}$  mapeia o domínio da extensão autoadjunta  $H_0$ ,  $\mathcal{D}_\eta$ , em  $U_{\bar{\eta}}\mathcal{D}_\eta = \mathcal{D}_1$ . Basicamente  $U_{\bar{\eta}}$  substitui o domínio de  $H_0$  para um onde valem condições de contorno periódicas sobre as funções de onda. Como consequência a Hamiltoniana  $H_0$  também se altera, por conjugação, devido à ação de  $U_{\bar{\eta}}$  na seguinte forma

$$H_0 \rightarrow U_{\bar{\eta}}H_\eta U_{\bar{\eta}}^{-1} \equiv H_\eta = \sigma \left( -i \frac{d}{d\varphi} + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2. \quad (5.33)$$

Portanto a transformação  $U_{\bar{\eta}}$  mapeia

$$(H_0, \mathcal{D}_\eta) \rightarrow (H_\eta, \mathcal{D}_1), \quad (5.34)$$

note que  $U_{\bar{\eta}}$  mapeia um operador autoadjunto em outro operador autoadjunto.

O termo  $\theta/2\pi$  presente na nova Hamiltoniana  $H_\eta$  representa um termo topológico. Se pensarmos nas funções de onda de  $\mathcal{D}_1$  como as que descrevem um elétron que orbita em um plano por onde passa um campo magnético  $B$  podemos associar  $\theta$  com o fluxo de campo magnético que passa através do círculo  $S^1$ . Este termo pode ser visto como associado a uma conexão em uma teoria de calibre, onde o grupo de calibre é o  $U(1)$ , se pensarmos em uma formulação Lagrangeana para este problema [24]. Outros exemplos são abordados em [18].

A próxima seção fecha este capítulo discutindo aplicações do teorema de von Neumann, em particular como ele surge na descrição de singularidades que aparecem em relatividade geral.

## 5.3 Aplicações

Vimos no final da seção passada que uma determinada extensão autoadjunta do operador Hamiltoniano pode gerar uma teoria de gauge que, no caso que discutimos, está relacionada com o efeito Aharonov-Bohm. Esta é uma das aplicações do formalismo que discutimos nesta seção. Eu acredito que esta discussão deveria estar presente nos cursos de mecânica quântica por não exigir uma bagagem matemática muito extensa e ser crucial para a construção dos observáveis da mecânica quântica, afinal de contas são eles que os experimentos medem. Porém em geral isto não acontece. Apesar deste tópico aparecer um pouco fora do foco principal deste trabalho, que é a descrição de buracos negros, ele tem uma importância fundamental nesta discussão e é com esta aplicação do teorema de von Neumann que irei encerrar esta dissertação.

### 5.3.1 Testando singularidades tipo-tempo

Quando discutimos a solução de Schwarzschild vimos que ela é singular em  $r = 0$  e concluímos que esta singularidade não é um defeito no sistema de coordenadas utilizado através do cálculo de um invariante. O que vamos discutir agora é como um observador detecta uma singularidade em um dado espaço-tempo. Para testar uma propriedade do espaço-tempo precisamos analisar o comportamento de uma partícula teste. Precisamos primeiro definir com que tipo de partícula ou campo vamos utilizar, aqui discutiremos o caso da partícula clássica tipo-tempo e do campo escalar quântico.

Classicamente dizemos que o espaço é singular se ele não for geodesicamente completo. Um espaço que não é geodesicamente completo admite geodésicas que terminam em um intervalo finito de tempo próprio. O ponto em que as geodésicas terminam é o ponto singular do espaço-tempo. Esta definição é bem razoável uma vez que as geodésicas descrevem as trajetórias das partículas.

Suponha agora que queremos testar o espaço-tempo usando um campo escalar quântico ao invés de uma partícula clássica. Precisamos então de algum critério que nos diga quando o espaço-tempo será ou não singular neste novo caso. Uma possibilidade é calcular o valor esperado de algum observável e ver se ele diverge em algum ponto do espaço-tempo. Aqui vamos seguir

um caminho diferente, veremos como a classificação de um espaço-tempo como singular ou não está relacionada com o teorema de von Neumann. Vamos definir um espaço-tempo como sendo não singular quando testado por uma partícula(campo) quântica se a evolução temporal de um estado qualquer do espaço de Fock for definida univocamente. Essa definição é análoga a que demos no caso clássico, nas duas situações a presença de uma singularidade implica em uma parde de previsibilidade do sistema [20]. Lembrado que em um sistema quântico a dinâmica de um estado é determinada pela equação de Schrödinger

$$-i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (5.35)$$

onde  $H$  é a Hamiltoniana do sistema e a solução formal desta equação é

$$|\psi(t)\rangle = [e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(s) ds}] |\psi(0)\rangle. \quad (5.36)$$

O sistema terá uma evolução temporal univocamente definida se o mesmo ocorrer com a Hamiltoniana. Em geral definimos a Hamiltoniana como sendo proporcional ao Laplaciano do espaço-tempo  $H \propto \square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  que atua nas funções suaves com suporte compacto. Este operador será simétrico, porém não necessariamente autoadjunto. Devido ao teorema de von Neumann a Hamiltoniana irá admitir extensões autoadjuntas quando seus índices de deficiência satisfizerem  $n_+ = n_- = n$ , neste caso teremos  $n^2$  famílias de extensões auto-adjuntas. A evolução do sistema será univocamente definida portanto se  $H$  admitir uma única extensão autoadjunta. Neste caso dizemos que a Hamiltoniana é essencialmente autoadjunta.

Se um espaço-tempo com uma métrica  $g$  for geodesicamente completo, seu Laplaciano automaticamente será essencialmente autoadjunto. Portanto, de acordo com as definições que estamos usando, se um espaço-tempo é não singular quando testado por uma partícula clássica ele será também não singular quando testado por um campo escalar quântico.

Podemos nos perguntar então se um espaço que é singular classicamente poderá ser não singular quanticamente. Para isso precisamos considerar um espaço-tempo que é singular classicamente, definir uma Hamiltoniana neste espaço e inferirmos se esta Hamiltoniana será essencialmente autoadjunta. Se sim o espaço-tempo será quanticamente não singular. Caso contrário

precisaremos impor condições adicionais para determinar a dinâmica de um estado qualquer e portanto o espaço-tempo será singular quanticamente.

Por exemplo, um espaço-tempo  $(n+1)$ -dimensional com métrica esféricamente simétrica, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = dr^2 + R^2(r)d\Omega_{S^n}^2, \quad (5.37)$$

onde  $R(r) \propto r^p$  próximo da origem será geodesicamente incompleto se  $p \neq 1$ . Porém para  $p \geq 3/n$  teremos uma Hamiltoniana que será essencialmente autoadjunta [20]. Portanto todos os espaços deste tipo com  $p \geq 3/n$  são exemplos de espaço-tempo classicamente singular porém quanticamente não singular.

## Capítulo 6

# Conclusões e perspectivas

Neste trabalho discutimos a termodinâmica de buracos negros, definimos um buraco negro como extremal quando este possui temperatura zero e estudamos detalhadamente a geometria próxima ao seu horizonte de eventos.

No Capítulo 2 foi construída, usando o método do acoplamento mínimo, uma mecânica quântica em um espaço curvo. Neste contexto, estudamos o campo de Klein-Gordon e mostramos que observadores diferentes podem discordar quanto ao conteúdo de partículas do espaço. Baseando-se neste fato deduzimos o efeito Unruh e em seguida o efeito Hawking, mostrando assim que um buraco negro emite uma radiação térmica com temperatura proporcional à aceleração da gravidade no seu horizonte de eventos. Analisamos três exemplos: Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr. Os dois últimos são casos particulares de uma classe de buracos negros que compartilham a propriedade de terem temperatura zero, ou seja, extremais. Vimos então que a geometria próxima ao horizonte de eventos destes buracos negros se comportam localmente como o produto  $AdS_2 \times S^2$ . Esta abordagem introdutória nos leva a algumas discussões atuais da física teórica de altas energias, como por exemplo construir uma mecânica estatística associada à termodinâmica de buracos negros ou construir teorias de campo em espaços curvos com outros tipos de acoplamento e considerando outros tipos de campos.

No Capítulo 3 construímos uma formulação alternativa da gravitação, que chamei de gravitação de Lovelock. Nesta formulação consideramos a noção de metricidade e de transporte paralelo como conceitos independentes e usamos as formas diferenciais e o cálculo exterior como

ferramentas básicas da geometria. Isto nos trouxe algumas vantagens pois, por exemplo, as formas diferenciais são intrinsecamente invariantes sob mudanças de coordenadas e a derivada exterior é nilpotente, o que resultou em equações de movimento de primeira ordem. Neste contexto generalizamos a ação de Einstein-Hilbert para um espaço-tempo de dimensão arbitrária através do teorema de Lovelock. Analisamos o caso particular em três dimensões. Vimos que, neste caso, a condição de torção nula decorre das equações de movimento para a conexão, enquanto que equação para o vielbeine nos garante que o espaço é de curvatura constante. Restauramos então a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica em três dimensões na sua forma usual e estudamos as soluções das equações de movimento provenientes de sua extremização. Apesar de não ter sido discutido em detalhes este formalismo é de grande utilidade para as teorias de Chern-Simons e é apontado como um possível caminho para se construir uma teoria quântica de gravitação.

No Capítulo 4 estudamos detalhadamente os espaços de Anti- de Sitter. O espaço  $AdS_2$  foi estudado com mais detalhes, discutimos sua construção de forma extrínseca e intrínseca, algumas de suas parametrizações, seu grupo de simetria, o  $SO(2,1)$ , e o comportamento de geodésicas tipo-tempo e tipo-luz neste espaço. Vimos também que o  $AdS_2$  possui uma simetria adicional, a simetria local de Weyl. Construímos então os espaços  $AdS_n$  com  $n \geq 3$  de forma extrínseca e intrínseca, discutimos sua extensão global e o comportamento de geodésicas tipo-luz e tipo-tempo sem momento angular nestes espaços. Vimos que estas geodésicas possuem propriedades que não dependem da dimensão e que estes espaços não admitem simetria local de Weyl. Com isso diferenciamos o espaço  $AdS_2$  dos espaços  $AdS_n$  com  $n \geq 3$ . Neste trabalho foi feita apenas uma abordagem clássica, ou seja, usamos curvas geodésicas para testar estas geometrias. Um próximo passo é estudar uma mecânica quântica em um espaço de  $AdS$ . Um dos objetivos futuros é mostrar que em  $AdS_2$  temos uma mecânica quântica conforme.

No Capítulo 5 vimos que um dado operador hermitiano que atua em algum espaço de Hilbert não é necessariamente autoadjunto. Definimos os índices de deficiência de um operador  $(n_+, n_-)$  e, através do teorema de von Neumann, vimos como podemos usá-los para classificá-lo como autoadjunto ou não e, quando não, quantas extensões autoadjuntas este operador admite. Mostramos então que para construir extensões autoadjuntas de um operador precisamos especificar

condições de contorno apropriadas para as funções de onda  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ . Trabalhamos o exemplo de uma partícula livre em um intervalo unidimensional fechado e vimos como as extensões auto-adjuntas introduzem, neste caso, uma simetria de calibre. Discutimos também como podemos usar o teorema de von Neumann para classificar um espaço-tempo como singular ou não quando testado por uma partícula quântica.

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Carrol, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (Addison Wesley, San Francisco, 2004).
- [2] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago, Chicago, 1984).
- [3] S. W. Halking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (The University of Chicago, Chicago, 1984).
- [4] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko *Classical Mechanics* (3rd Edition) [Hardcover].
- [5] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions*, Cap. 2 (Cambridge University Press, 2003).
- [6] R. M. Wald, J. Math. Phys. **21**, 2802 (1980).
- [7] R. D. Sorkin, Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. **36**, 291 (2005) [hep-th/0504037].
- [8] R. D. Sorkin, gr-qc/9705006.
- [9] McGreevy, *Lecture 11: CFT continued; geometry of AdS*, (8.821 F2008),
- [10] McGreevy, *Lecture 12: Boundary of AdS; Poincaré oatch; wave equations in AdS*, (8.821 F2008),
- [11] J. M. Bardeen and G. T. Horowitz, Phys. Rev. D **60**, 104030 (1999) [hep-th/9905099].
- [12] A. Dabholkar and S. Nampuri, Lect. Notes Phys. **851**, 165 (2012).
- [13] M. Guica, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, Phys. Rev. D **80**, 124008 (2009) [arXiv:0809.4266 [hep-th]].



- [14] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. D **48**, 1506 (1993) [gr-qc/9302012].
- [15] O. Miskovic and J. Zanelli, Phys. Rev. D **79**, 105011 (2009) [arXiv:0904.0475 [hep-th]].
- [16] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992) [hep-th/9204099].
- [17] G. Bonneau, J. Faraut and G. Valent, Am. J. Phys. **69**, 322 (2001) [quant-ph/0103153].
- [18] V. S. Araujo, F. A. B. Coutinho, J. F. Peres, American Journal of Physics, Volume 72, Issue 2, pp. 203-213 (2004).
- [19] V. de Alfaro, S. Fubini and G. Furlan, Nuovo Cim. A **34**, 569 (1976).
- [20] G. T. Horowitz and D. Marolf, Phys. Rev. D **52**, 5670 (1995) [gr-qc/9504028].
- [21] T. Nakatsu and N. Yokoi, Mod. Phys. Lett. A **14**, 147 (1999) [hep-th/9812047].
- [22] A. Sen, Entropy **13**, 1305 (2011) [arXiv:1101.4254 [hep-th]].
- [23] N. L. Balazs and A. Voros, Phys. Rept. **143**, 109 (1986).
- [24] A. P. Balachandran and A. R. de Queiroz, Phys. Rev. D **85**, 025017 (2012) [arXiv:1108.3898 [hep-th]].
- [25] J. Zanelli, hep-th/0502193.
- [26] A. Mardones and J. Zanelli, Class. Quant. Grav. **8**, 1545 (1991).