

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Física

Pós-Graduação

**TEOREMA DE NASH APLICADO AO ESTUDO DO  
WORMHOLE ATRAVESSÁVEL**

Suzana de Souza e Almeida Silva

Brasília-DF, 2012

Suzana de Souza e Almeida Silva

**TEOREMA DE NASH APLICADO AO ESTUDO DO  
WORMHOLE ATRAVESSÁVEL**

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade de Brasília como parte dos requisi-  
tos necessários para obtenção do título de Mestre  
em Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Duarte Maia

Brasília-DF

# Resumo

O principal objetivo dessa dissertação é apresentar um estudo sobre as características geométricas de um buraco de minhoca atravessável além de uma nova abordagem para o estudo do problema de violação da condição de energia nula (CEN). Tradicionalmente, a análise da solução do buraco de minhoca é feita apenas com base na Geometria Riemanniana, isto é, usando-se apenas as propriedades intrínsecas do espaço-tempo. Contudo, o buraco de minhoca é uma alteração topológica do espaço-tempo e como consequência um estudo puramente intrínseco é incapaz de descrever plenamente as qualidades que caracterizam um buraco de minhoca atravessável.

Esse problema pode ser contornado ao se considerar a imersão do espaço-tempo em um espaço maior de forma a permitir a análise dos elementos extrínsecos da geometria de um buraco de minhoca atravessável. Na física gravitacional, existem programas de pesquisa que descrevem espaços-tempo imersos. Contudo, tais programas usualmente falham em dar um tratamento matemático adequado ao problema da imersão. Como consequência, eles precisam recorrer a um número significativo de postulados para conseguirem descrever a dinâmica do espaço-tempo imerso.

A imersão é um teorema matemático cuja prova mais geral foi dada por John Nash usando a deformação de variedades. Usamos o teorema de imersão de Nash para analisar uma classe geral de soluções de buracos de minhoca. O teorema de Nash se fundamenta na deformação de uma variedade imersa, definida pela curvatura extrínseca. Isto é, ele descreve como a geometria se propaga nas dimensões extras do espaço de imersão, sem apelar para flutuações quânticas para explicar a alteração topológica responsável pelo buraco de minhoca. No teorema de Nash, as alterações topológicas surgem naturalmente e classicamente.

A imersão do espaço-tempo é feita em uma variedade plana de 5 dimensões e como resultado obtém-se equações de campo que descrevem a dinâmica gravitacional do espaço-tempo imerso. Essas equações são as mesmas equações de campo da R.G com um termo adicional, o tensor deformação que incorpora as informações extrínsecas da geometria.

Finalmente, analisamos o caso do buraco de minhoca atravessável como proposto por Morris e Thorne. Para tal consideramos a região do espaço-tempo com potencial constante. Nesse cenário, a dinâmica dos elementos extrínsecos permite gerar um buraco de minhoca atravessável sem a necessidade de uma matéria exótica. Contudo, o buraco de minhoca é destruído por qualquer matéria que tente atravessá-lo.

Palavras-chave: Buraco de minhoca, dimensões extras, imersão de variedades diferenciáveis.

# Abstract

The main goal of this dissertation is to present a study on the geometric characteristics of a traversable wormhole and a new approach to studying the problem of violation of the null energy condition (NEC). Traditionally, the analysis of the wormhole solution is based only on Riemannian geometry, ie, using just the intrinsic properties of spacetime. However, a wormhole is a topological change of spacetime and therefore a purely intrinsic study is unable to fully describe the qualities that characterize a traversable wormhole.

This problem can be approached in a different way by considering the embedding of spacetime in a higher dimensional space to allow the analysis of extrinsic elements in a wormhole's geometry. In gravitational physics, there are researches describing embedded spacetime. However, these researches usually fail to give an appropriate mathematical treatment of the embedding problem. Consequently, they have to rely on a significant number of assumptions to get to describe the dynamics of an embedding spacetime.

An embedding is a mathematical theorem whose proof was given more generally by John Nash using the deformation of manifolds. We use the Nash's embedding theorem to analyze a general class of solutions wormholes. Nash's theorem is based on a deformation of the embedded manifold, defined by the extrinsic curvature. That is, it describes how the geometry propagates in extra dimensions without appealing to quantum fluctuations to explain the change topological responsible for the wormhole.

Spacetime is embedded in a flat 5-dimensional space and as a result one obtains field equations describing the gravitational dynamics of that spacetime. These equations are the same field equations of GR with an additional term, the deformation tensor which incorporates the information of the extrinsic geometry.

Finally, we analyze the case of traversable wormhole as proposed by Morris and Thorne. For this purpose we consider a region of spacetime described by a constant potential. In this scenario, the dynamics of extrinsic factors allow us to generate a wormhole traversable without the need for exotic matter but it is destroyed by any matter that attempts to cross the neck.

keywords: Wormholes, extra dimensions, embedding of differential manifolds

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Relatividade Geral</b>	<b>9</b>
2.1	Os princípios da Relatividade Geral . . . . .	9
2.2	Geometria e gravitação . . . . .	10
2.3	Princípios de mínima ação . . . . .	17
2.3.1	Princípio de Einstein-Hilbert . . . . .	18
2.4	Soluções estáticas das Equações de Einstein . . . . .	19
2.4.1	Solução de Schwarzschild . . . . .	19
2.4.2	Solução Schwarzschild-de Sitter . . . . .	21
2.5	Solução buraco de minhoca . . . . .	21
2.5.1	O buraco de minhoca atravessável . . . . .	21
2.5.2	As condições clássicas de energia . . . . .	24
2.5.3	As condições clássicas de Energia . . . . .	29
2.6	Resumo . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Física extradimensional - Cenários em Branas-Mundo</b>	<b>33</b>
3.1	O problema de hierarquia . . . . .	33
3.2	Cenários em Brana-mundo . . . . .	37
3.2.1	Cenário ADD . . . . .	38
3.2.2	Cenário Randall-Sundrum . . . . .	43
3.3	Resumo . . . . .	46
<b>4</b>	<b>O problema da forma do espaço-tempo</b>	<b>48</b>
4.1	Imersão isométrica de variedades . . . . .	50
4.2	Teorema de imersão de Nash . . . . .	52
4.3	Resumo . . . . .	54

<b>5</b>	<b>A gravitação em espaços-tempo imersos</b>	<b>56</b>
5.1	Deformando o espaço-tempo . . . . .	56
5.1.1	Imersão em cinco dimensões . . . . .	60
5.2	Imersão de espaços-tempo esfericamente simétricos . . . . .	62
5.2.1	Caso geral ( $A' \neq 0$ ) . . . . .	64
5.2.2	Caso $A' = 0$ . . . . .	75
5.3	Resumo . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusão e perspectivas</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A Relatividade Geral (RG) é uma teoria que descreve a geometria do espaço-tempo como uma teoria de gravitação. Mais especificamente, a RG não define a gravitação por forças como fez Newton, ela diz que a gravitação nada mais é do que uma consequência do fato dos campos de matéria deformarem o espaço-tempo gerando curvaturas. Logo, a gravitação é descrita pela curvatura do espaço-tempo.

O modelo padrão de cosmologia é baseado na relatividade geral (juntamente com os postulados de isotropia e homogeneidade). Contudo, em 1998 [1] surgiram dados referentes a observações de supernovas tipo *Ia* que a Relatividade Geral têm tido alguma dificuldade em explicar. Essas observações mostraram que a expansão do Universo é acelerada. Esse foi um resultado não esperado já que, de acordo com a teoria da Relatividade Geral usada até então, os campos de matéria que constituem o Universo levariam a uma desaceleração da expansão causada pela gravitação. Assim, os dados de observações cosmológicas sugerem duas alternativas:

- A proposta de uma nova teoria de gravitação: a Relatividade Geral só funciona localmente e tem que ser substituída em escalas cosmológicas
- A proposta de existência de uma Energia Escura que seria responsável pela expansão acelerada.

A constante cosmológica repulsiva  $\Lambda > 0$  foi proposta por Einstein para justificar seu universo estacionário antes da constatação de que o universo esta em expansão. Hoje a constante cosmologica é apresentada de modo a explicar a aceleração do Universo de forma consistente com a Relatividade Geral e é constantemente apresentada como uma candidata mais plausível à energia escura dentro do programa  $\Lambda$ CDM <sup>1</sup>. Matematicamente, a constante cosmológica surge como consequência da

---

<sup>1</sup>CDM é a sigla em inglês para matéria escura fria

identidade de Bianchi e, portanto, aparece como uma componente geométrica no lado esquerdo das equações de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Por outro lado, Zel'dovich [2] mostrou que a constante cosmológica pode ser interpretada como a energia do vácuo dos campos quânticos cumulativo no universo. Contudo, dados relativos à radiação cósmica de fundo (CMB) mostram que a densidade de energia da constante cosmológica necessária à aceleração observada é dada por  $\rho_\Lambda \propto 10^{-47} GeV$  enquanto que de acordo com as estimativas da teoria quântica de campos a densidade da energia do vácuo quântico é  $\rho_V \propto 10^{76} GeV$ . Então há uma diferença de 123 ordens de grandeza entre o que é previsto pela teoria e o valor obtido dos dados [1]. Isso leva a perguntar se a energia escura seria mesmo a energia do vácuo e também traz o questionamento se a Relatividade Geral com  $\Lambda$  seria consistente para descrever uma aceleração cósmica.

A expansão acelerada do Universo não é a única questão deixada em aberto pela Relatividade Geral. Além do problema da Energia Escura, o problema de formação de estrutura no Universo juntamente com as inúmeras tentativas de se quantizar a gravitação tem sido uma forte motivação para procurar teorias de gravitação alternativas.

Em 1920, Theodore Kaluza apresentou um trabalho para um programa de gravitação em cinco dimensões baseando-se nos mesmos princípios da Relatividade Geral exceto pela existência de uma quinta dimensão que iria se comportar de maneira diferente [3]. Pouco depois, Oskar Klein reinterpretou o programa, afirmando que esse somente poderia ser válido em nível quântico. Esse programa é conhecido hoje como teoria de Kaluza-Klein e se baseia no mesmo princípio de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral.

Outro programa de dimensões extras é o programa de Cordas que nasceu sob uma motivação diferente, como um mecanismo para explicar o confinamento dos quarks. O programa se baseou no princípio que o menor objeto em uma variedade física não seria partículas pontuais, mas sim cordas unidimensionais cujos movimentos gerariam uma superfície bidimensional em um espaço-tempo de Minkowski com  $D$  dimensões. Dessas  $D$  dimensões, uma seria de natureza temporal e as outras  $D - 1$  seriam espaciais. O princípio variacional é diferente do de Einstein-Hilbert e diz que a superfície gerada pelo movimento das cordas é mínima [4], isso é:

$$\delta \int \sqrt{h} dv = 0 \quad (1.2)$$

onde  $h$  é o determinante da métrica  $h_{ij}$  da superfície bidimensional.

A quantização do programa de cordas e a imposição de invariância com o grupo de Lorentz impõe que o número de dimensões  $D$  seja igual a 26. Por outro lado, assumindo-se a supersimetria<sup>2</sup> o número de dimensões cai para  $D = 10$ .

O processo de quantização de campos prevê a existência de diferentes spins, incluindo o spin-2 (o graviton) e o spin  $3/2$ . A supersimetria prevê que para cada modo de spin semi-inteiro deve existir um modo de spin inteiro e vice-versa. Não há até o presente nenhuma comprovação da supersimetria ou do programa de cordas.

Uma estratégia alternativa é o programa de Branas-mundo que surgiu como solução do problema da Hierarquia das interações fundamentais. Ao escrever a relatividade Geral, Einstein assumiu que o limite de campo fraco da R.G seria a gravitação Newtoniana. Isso fez com que a constante gravitacional de Newton,  $G = 6,6730010^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ , também aparecesse nas equações de Einstein. O valor de  $G$  motivou a conjectura de que a gravitação quântica somente poderia ser percebida em escala de energia Planck,  $E = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19}$  GeV enquanto que as outras interações são quantizadas em escala TeV ( $10^2$  GeV). Tal diferença nas escalas de energia é chamada de problema da hierarquia das interações fundamentais.

Com base no trabalho de Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali, (ADD) [5], e também usando ideias tanto da teoria de Kaluza-Klein quanto princípios do programa de cordas, nasceu em 1998 uma proposta de gravitação em mais dimensões chamada Branas-Mundo. A brana, ou espaço-tempo quadridimensional, é imersa em um espaço de  $D$  dimensões chamado espaço de imersão ou espaço ambiente (ou bulk) [3]. Baseado em estimativas apresentadas em [5], o número de dimensões sugeridas pelo cenário ADD é  $D \geq 6$ , pois caso contrário, o tamanho das dimensões extras poderia ser muito grande.

Há outro cenário descrito pelo programa de Branas-mundo e desenvolvido por L. Randall e R. Sundrum que obteve êxito ao mostrar que era possível realizar a imersão do espaço-tempo em cinco dimensões desde que a imersão fosse fixa<sup>3</sup>. Assim, o espaço-tempo age como um contorno separando duas regiões do bulk onde um lado do espaço-tempo é como um reflexo do outro lado, a chamada simetria de espelho ou simetria  $Z_2$ . Nessa formulação, o espaço ambiente é pentadimensional do qual o espaço-tempo quadridimensional é apenas um contorno [5].

Outras teorias alternativas de gravitação são baseadas em um princípio de Einstein-Hilbert modificado. Um exemplo são as teorias  $f(r)$  [37] que ao generalizar o lagrangeano da ação de Einstein-Hilbert para uma função arbitrária de  $R$  tentam explicar a expansão acelerada do Universo sem ter que recorrer à Energia Escura.

<sup>2</sup>Supersimetria é uma suposição teórica e designa a simetria que relaciona férmions e bósons

<sup>3</sup>A expressão "fixa" refere-se ao fato da brana ter uma posição fixa no espaço ambiente. Essa condição vai ser esclarecida no capítulo 3

Em resumo, essas teorias tem em comum o fato de se basearem em modificações expressivas dos postulados da RG que se fundamentam no princípio de Einstein-Hilbert em 4 dimensões, geometria Riemanniana e nos princípios de covariância generalizada e de equivalência. Como qualquer geometria métrica pode ser gerada a partir de uma sequência contínua de perturbações infinitesimais de uma dada geometria [36], há uma falta de precisão por parte da Geometria de Riemann em determinar a forma local de uma superfície. Mesmo assim, Einstein preferiu trabalhar com base na Geometria Riemanniana que é puramente intrínseca acreditando que ela seria suficiente para descrever os campos gravitacionais resultantes de todos os tipos de matéria conhecidos.

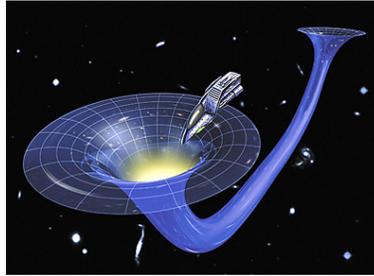
Por outro lado, as informações extrínsecas (como a forma local de um espaço-tempo) podem ser recuperadas perante o processo de imersão no qual uma variedade  $V_N$  de  $n$  dimensões é imersa em uma variedade maior  $V_D$  com  $D$  dimensões onde  $D > N$ . Por um longo período de tempo, a única forma de realizar uma imersão era através dos teoremas de Cartan e Janet em que se recorria à suposição de que as funções de imersão são analíticas reais definidas por uma convergência de série de potências positivas [36]. Apenas em 1954 apareceu um teorema de imersão desenvolvido por Nash que não utilizava as soluções analíticas, mas sim funções diferenciáveis. Dentro do contexto físico há uma diferença conceitual importante, pois os espaços-tempo são variedades diferenciáveis com geometria definida por equações diferenciais o que leva a questionar a validade de uma imersão analítica para a física [26].

A importância do teorema de Nash para a física gravitacional e conseqüentemente para o nosso estudo é que como nas hipóteses ADD, ele usa propagação de gravitação (da métrica) nas dimensões extras só que sem prejudicar as propriedades do espaço-tempo descritas pela RG com a vantagem de recuperar as propriedades extrínsecas do espaço-tempo conservando a diferenciabilidade característica do mesmo. Com isso, o teorema de Nash se torna a ferramenta ideal para o estudo de estruturas como o buraco de minhoca que é uma alteração topológica do espaço-tempo previsto pela Relatividade Geral.

Basicamente, o buraco de minhoca é uma solução das equações de Einstein descrevendo um túnel com uma largura mínima (garganta) que conecta duas regiões remotas do espaço-tempo. O buraco de minhoca poderia, em princípio, servir de atalho para viagens interestelares ao encurtar distâncias e reduzir significativamente o tempo de viagem.

Isto é, buraco de minhoca é uma alteração topológica no espaço-tempo conectando duas regiões distintas através da garganta. O estudo desse tipo de solução é quase tão antigo quanto a própria relatividade geral. Em 1917, apenas um ano após A. Einstein publicar seu trabalho sobre Relatividade Geral, se reconheceu que as soluções de Schwarzschild das equações de campo de Einstein

Figura 1.1: Visão artística de um buraco de minhoca



Fonte: BAMAH 2011

(ECE) representavam túneis entre seções de espaço-tempo [7]. Posteriormente, uma nova menção foi feita a esses "túneis". Einstein em trabalho com Rosen buscou alternativas à representação de partículas que eram tratadas como singularidades nas teorias de campo. No artigo de 1935, "O problema da partícula na Relatividade Geral"<sup>4</sup> aparecem os "túneis" que por um período passaram a ser conhecidos como "pontes de Einstein-Rosen" [32]. Nas palavras dos autores:

Estas soluções envolvem a representação matemática de um espaço físico por duas folhas idênticas, a partícula sendo representada por uma "ponte" de ligação destas folhas (Visser, 1996, p. 45 tradução nossa). <sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>These solutions involve the mathematical representation of a physical space by two identical sheets, a particle being represented by a "bridge" connecting these sheets.

Mais tarde foi mostrado que partículas não podem ser representadas por "pontes de Einstein-Rosen" [32]. Contudo, esse foi o primeiro cálculo e estudo sério sobre o que posteriormente seria chamado de buraco de minhoca de Schwarzschild.

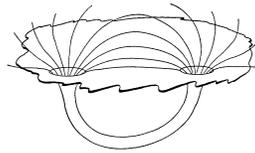
O termo "buraco de minhoca" foi cunhado por Jonh Archibald Wheeler em 1957 [32]. Interessado em estudar melhor as questões topológicas da relatividade geral, fez o que pode ser considerado a primeira descrição da geometria de um buraco de minhoca e que se tornou referência para vários trabalhos posteriores na área. Wheeler propôs uma métrica que descrevesse um espaço plano com exceção de duas regiões distantes em um espaço-tempo duplamente conexo tal qual ilustrado na figura 1.2.

Ao estudar o processo gravitacional quântico do buraco de minhoca, Wheeler imaginou o vácuo como sendo um perpétuo estado de "borbulhaço" com flutuações da métrica que permitiriam

---

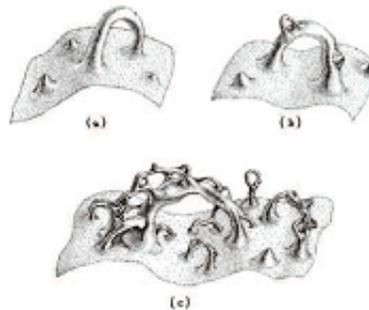
<sup>4</sup>"The particle problem in general relativity"

Figura 1.2: Buraco de minhoca segundo Wheeler



Fonte: VISSER, 1996

o aparecimento de variações topológicas como o buraco de minhoca na escala planckiana. A formação desse buraco de minhoca seria decorrente de uma flutuação quântica de gravitação que em princípio poderia ocorrer aleatoriamente formando uma espécie de "espuma quântica"<sup>5</sup>, com múltiplas regiões conectadas pelo buraco de minhoca como ilustrado pela figura abaixo:



Fonte: CLODIMEDIUS 2008

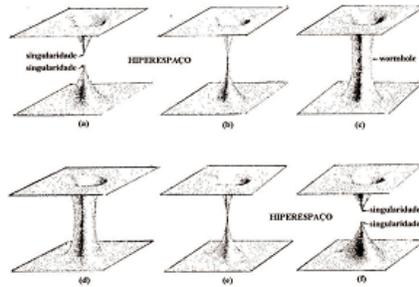
Wheeler também investigou a dinâmica clássica do buraco de minhoca de Schwarzschild (onde o buraco de minhoca tem uma abertura instável) e descobriu que tal buraco de minhoca não poderia ser atravessado por uma partícula teste já que o processo de contração e expansão da garganta é tão rápido que mesmo uma partícula viajando a velocidade da luz não conseguiria atravessá-lo antes da garganta contrair novamente [9], [10] e [11].

O estudo de buracos de minhoca acabou sendo abandonado nas décadas seguintes. Os trabalhos nessa área foram retomados em 1988 com o clássico artigo de K.Thorne e M.Morris [7], no qual eles mostraram quais seriam as condições e as propriedades de um buraco de minhoca atravessável. Apesar de resolverem o problema da contração-expansão do buraco de minhoca, o que o tornaria uma estrutura possível de ser estudada por meio de experimentos, esses autores acabaram descobrindo que para ser atravessável o buraco de minhoca tem que ser gerado por matéria denominada matéria exótica que viola todas as condições de energia clássicas conhecidas.

---

<sup>5</sup>"spacetime foams"

Figura 1.4: Criação e contração da garganta de um buraco de minhoca



Fonte: ZAMANDAYOULCULUK 2005

Como as características do espaço-tempo que descreve um buraco de minhoca não somente envolvem a geometria como também a topologia (isto é, a forma extrínseca) desse espaço, deve-se considerar a imersão desse espaço-tempo em um espaço maior no sentido proposto por ADD. Como resultado da imersão, é possível obter um espaço-tempo que é solução de uma equação de Einstein modificada pelas propriedades extrínsecas da geometria do espaço-tempo. No caso do teorema de Nash, esses termos adicionais resultantes do processo de imersão são conservados no sentido de Noether, o que permitem considerar soluções onde não haveria violação das condições clássicas de energia.

O objetivo principal desse trabalho é o estudo de tais soluções. No próximo capítulo é apresentado os princípios da Relatividade Geral e algumas soluções exatas das equações de campo de Einstein (ECE). No terceiro capítulo é apresentada a necessidade de imersão do ponto de vista da física e alguns modelos existentes nesse contexto. O teorema de imersão de Nash e a sua aplicação no contexto da gravitação são abordados e discutidos no quarto e quinto capítulo respectivamente. As considerações finais são apresentadas no Capítulo final, *Conclusão e Perspectivas*.

# Capítulo 2

## Relatividade Geral

No presente capítulo, serão apresentadas as principais ideias da Relatividade Geral que serão usadas posteriormente ao se formular uma teoria de gravitação de espaços-tempo imersos. A exposição dos princípios em que a relatividade geral foi baseada não busca demonstrar a teoria, mas sim discutir as características requeridas para se formular uma teoria alternativa.

### 2.1 Os princípios da Relatividade Geral

Descrever a gravitação como um efeito da geometria do espaço-tempo não era o objetivo inicial de Einstein. Na verdade, ele procurava descrever a interação da gravitação de forma que a teoria geral de gravitação fosse válida não apenas localmente. A formulação original da relatividade geral foi feita com base na validade dos seguintes princípios:

- **Princípio da Equivalência**

Em 1890, Eötvös mostrou, com incrível acurácia, a equivalência da massa gravitacional e da massa inercial [25]. O experimento executado por Eötvös fornece a seguinte relação para essas massas:

$$\frac{|m_g - m_i|}{m_i} = 10^{-12} \quad (2.1)$$

onde  $m_g$  e  $m_i$  são as massas gravitacional e inercial respectivamente.

A expressão (2.1) leva ao Princípio da equivalência que pode ser colocado da seguinte forma:

*Princípio da equivalência fraco:* Localmente, o movimento de uma partícula isolada em queda livre, devido a aceleração gravitacional, é o mesmo de partículas em um referencial uniformemente acelerado

A relatividade Geral se baseia numa generalização do princípio acima,

*Princípio da equivalência forte ou princípio de equivalência de Einstein (PEE):* localmente, o movimento de uma partícula isolada em queda livre é equivalente ao movimento de uma partícula na relatividade especial. Ou seja, localmente fica impossível detectar experimentalmente a existência de um campo gravitacional.

- **Princípio da covariância generalizada**

As equações que descrevem as leis da física devem possuir forma tensorial e devem ser descritas em um espaço-tempo quadridimensional riemanniano. Isso permite que todos os sistemas de coordenadas possam ser usados para descrever as leis da física. Portanto Einstein adota as transformações gerais de coordenadas como a simetria da sua teoria gravitacional.

## 2.2 Geometria e gravitação

A geometria passou a ter um papel crucial para descrever o espaço-tempo quando Einstein usou os princípios citados anteriormente para formular uma teoria de gravitação relativística, usando a geometria Riemanniana ao invés da geometria Euclidiana. Um dos principais motivos de tal escolha foi a possibilidade de se estudar as características do espaço-tempo usando apenas qualidades intrínsecas sem ter a necessidade de se recorrer à um espaço externo. Uma escolha justificável, considerando que todas as interações são bem descritas em quatro dimensões. A geometria Riemanniana é construída com base no conceito da variedade diferenciável. Uma variedade  $\mathcal{M}$  pode ser definida como um conjunto cujos pontos  $p$  podem ser associados a  $n$  coordenadas por meio de um mapeamento  $\sigma$ :

$$\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

onde  $\sigma$  possui uma inversa  $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$

Ou seja, a variedade é um espaço que localmente aparenta ser como  $\mathbb{R}^n$ . Podemos associar outras coordenadas ao ponto  $p$  por meio de um outro mapeamento  $\tau$  definido de forma análoga  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para todos os pontos da variedade pode-se definir mapeamentos como  $\tau$  e  $\sigma$ . Os mapeamentos são chamados *cartas* e o conjunto de todos os mapeamentos é denotado *atlas* de  $\mathcal{M}$ . Uma variedade é diferenciável se a composição:

$$\sigma \circ \tau^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

for diferenciável.

Outro conceito importante é o dos espaços tangentes. Dizemos que um vetor é tangente em um ponto  $p$  se esse tangencia uma curva pertencente a  $\mathcal{M}$  no ponto  $p$ . O conjunto desses vetores que são tangentes a variedade  $\mathcal{M}$  no ponto  $p$  geram o espaço tangente denotado por  $T_p\mathcal{M}$ . Uma variedade é chamada variedade riemanniana se essa possui uma métrica. Na variedade, a métrica é definida localmente em cada espaço tangente:

$$\langle , \rangle : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ou seja, em uma base  $e_\alpha$  os componentes da métrica são obtidos de:

$$g_{\alpha\beta} = \langle e_\alpha, e_\beta \rangle$$

onde usamos a definição  $e^\alpha = dx^\alpha$ .

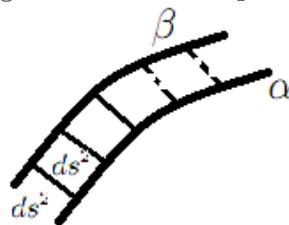
Uma das coisas percebidas por Einstein durante a formulação da RG foi que as equações descrevendo o campo gravitacional deveriam ser não lineares e covariantes com relação a um grupo de transformações mais geral que o de Lorentz. Ou seja, as coordenadas já não poderiam mais ser a peça fundamental para se medir distâncias. Dessa forma, Einstein passou a basear seu trabalho no elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

que denota a distância entre os pontos  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  e onde  $g_{\mu\nu}$  são os elementos da métrica.

A métrica ou primeira forma fundamental é muito importante na geometria dos espaços curvos, pois permite traçar curvas paralelas e dessa forma recuperar postulados e conceitos da geometria Euclidiana. Para que se possa traçar paralelas com a métrica é necessário que o elemento de linha (2.2) seja invariante de um ponto a outro (figura 2.1). Então a variação de  $g_{\mu\nu}$  ao longo da curva  $\alpha$  ou de  $\beta$  deve ser zero. A variação nesse caso é descrita pela *derivada covariante*.

Figura 2.1: Curvas paralelas



Fonte: Elaborada pela autora

O conceito de derivada covariante pode ser entendido simplesmente como uma extensão do conceito de derivada direcional de uma função

$$V[f] = \frac{df(\alpha)}{dt} \quad (2.3)$$

onde  $V = \alpha'$  é o campo vetor tangente a curva  $\alpha(t)$ .

Essa expressão é um tanto geral e pode ser aplicada a qualquer variedade com um número arbitrário de dimensões. A derivada covariante de um campo vetorial  $W$  é então definida como a extensão de (2.3):

$$V[W] = \frac{dW(\alpha)}{dt} \quad (2.4)$$

A notação usada para derivada covariante é  $\nabla_V W$  onde  $\nabla$  é chamado operador conexão afim.

No caso da variação de um campo base  $\{e_\mu\}$  com relação a um outro campo base  $\{e_\nu\}$  o resultado é um novo campo vetorial e portanto pode ser expresso em termos da mesma base:

$$\nabla_{e_\nu} e_\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma e_\sigma \quad (2.5)$$

onde  $\Gamma_{\nu\mu}^\sigma$  são coeficientes de conexão também chamados de símbolos de Christoffel. No caso da geometria Riemanniana, esses coeficientes são simétricos,

$$\Gamma_{\nu\mu}^\sigma = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \quad (2.6)$$

Podemos escrever os campos vetoriais  $V$  e  $W$  em uma base arbitrária  $\{e_\mu\}$ . Assim temos  $V = V^\mu e_\mu$  e  $W = W^\nu e_\nu$  e a derivada covariante pode ser escrita em termos dessas componentes:

$$\nabla_V W = \nabla_V(W^\nu e_\nu) = V[W^\mu]e_\mu + W^\nu \nabla_V e_\nu = \left( V^\mu \frac{\partial W^\sigma}{\partial x_\mu} + W^\nu V^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \right) e_\sigma \quad (2.7)$$

A forma conhecida da derivada covariante é obtida ao considerar a variação do campo vetorial  $W$  com relação a um campo base,  $V = e_\alpha$ :

$$\nabla_{e_\alpha} W = W_{;\alpha}^\mu e_\mu \quad (2.8)$$

onde ponto-vírgula denota as componentes da derivada covariante dadas por:

$$W_{;\alpha}^\mu = \left( \frac{\partial W^\mu}{\partial x^\alpha} + W^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \right) \quad (2.9)$$

A expressão (2.9) para o caso de um tensor mais geral ( $K_{\beta\dots}^{\alpha\dots}$ ):

$$\nabla_{\mu} K_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = \partial_{\mu} K_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} K_{\beta\dots}^{\sigma\dots} + \dots - \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} K_{\sigma\dots}^{\alpha\dots} - \dots \quad (2.10)$$

Retomando a ideia da construção de curvas paralelas, temos que duas curvas  $\alpha$  e  $\beta$  são ditas paralelas caso tenhamos  $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ . Portanto, um conceito importante na geometria Riemanniana é que a derivada covariante trata a métrica como se essa fosse constante. A condição

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \quad (2.11)$$

é chamada *condição de metricidade* e permite definir a conexão métrica. De (2.11) e de (2.10) obtemos:

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\rho} = \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} g_{\nu\lambda} = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla_{\nu} g_{\rho\mu} = \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} g_{\rho\lambda} = 0 \quad (2.14)$$

Subtraindo (2.14) e (2.13) de (2.12) e usando (2.6) obtemos:

$$\partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\nu} g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0 \quad (2.15)$$

A expressão abaixo fornece a relação para os símbolos de Christoffel na geometria riemanniana:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2.16)$$

## Tensor de Curvatura

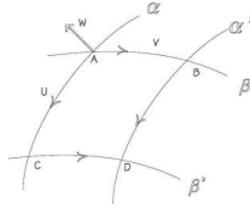
O conceito básico da curvatura Riemanniana está intimamente associado à derivada covariante. Suponha que temos duas curvas  $\alpha$  e  $\beta$  com um vetor tangente unitário  $U$  e  $V$  respectivamente. Depois construindo duas outras curvas  $\alpha'$  e  $\beta'$  com vetores tangentes  $U' = \nabla_V U$  e  $V' = \nabla_U V$  respectivamente

$$[U, V]W = \nabla_U(\nabla_V W) - \nabla_V(\nabla_U W) \quad (2.17)$$

A figura 2.2 ajuda a entender melhor o significado da expressão (2.17).

As duas últimas curvas são obtidas por arrasto dos vetores  $V$  e  $U$  ao longo das curvas  $\alpha$  e  $\beta$ . Toma-se então o campo vetorial  $W$  no ponto  $A$  e o arraste ao longo de  $\beta$  até  $B$ . Depois, arrasta-se

Figura 2.2: Curvatura de Riemann



Fonte: Elaborada pelo Prof. Dr. Marcos Maia

o campo resultante em  $B$ , ao longo de  $\alpha'$  até o ponto  $D$ . O resultado desta operação é

$$W' = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_{\nabla_V U} W$$

(O último termo refere-se ao fato que a derivada covariante ao longo de  $\alpha'$  é feita com o vetor  $U'$  e não com  $U$ ). Analogamente, podemos arrastar o vetor  $W$  inicialmente ao longo de  $\alpha$  até o ponto  $B$  e em seguida ao longo de  $\beta'$  obtendo o vetor:

$$W'' = \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{\nabla_U V} W$$

A diferença entre esses vetores é a definição da curvatura de Riemann da superfície relativa à conexão  $\nabla$  e denotada por:

$$R(U, V)W = W'' - W' = (\nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U)W + (\nabla_{\nabla_V U} - \nabla_{\nabla_U V})W$$

Usando a expressão do parêntesis de Lie  $[U, V]W$

$$[U, V] \equiv \nabla_U V - \nabla_V U$$

e as propriedades de  $\nabla$ , a curvatura de Riemann se escreve de modo mais compacto como:

$$R(U, V)W = [\nabla_U, \nabla_V]W + \nabla_{[U, V]}W$$

Em particular, se  $U$  e  $V$  são vetores linearmente independentes, obtemos simplesmente:

$$R(U, V) = [\nabla_U, \nabla_V]$$

Escrevendo as componentes do tensor de Riemann em uma base de coordenadas  $\{e_\mu\}$ :

$$R(e_\alpha, e_\beta)W = \nabla_{e_\alpha} \nabla_{e_\beta} W - \nabla_{e_\beta} \nabla_{e_\alpha} W + \nabla_{[e_\alpha, e_\beta]} W$$

onde o último termo se anula e tomando  $W = e^\gamma$ , denotando  $R(e_\alpha, e_\beta)e_\gamma = R^\epsilon_{\alpha\beta\gamma}e_\epsilon$  obtemos as componentes do tensor de Riemann em um sistema de coordenadas arbitrário:

$$R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} = \Gamma_{\beta\epsilon\alpha;\gamma} - \Gamma_{\beta\epsilon\gamma;\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\alpha\epsilon\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu \Gamma_{\gamma\epsilon\mu} \quad (2.18)$$

onde  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ .

Desta expressão extraímos algumas propriedades de simetria nos índices do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} &= -R_{\beta\alpha\gamma\epsilon} \\ R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} &= -R_{\alpha\beta\epsilon\gamma} \\ R_{(\alpha\beta\gamma\epsilon)} &= R_{\gamma\epsilon\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta\gamma\epsilon} + R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\epsilon\beta} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, calculando a derivada covariante do tensor de Riemann obtém-se a identidade de Bianchi:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\epsilon;\mu} + R^\alpha_{\beta\epsilon\mu;\gamma} + R^\alpha_{\beta\mu\gamma;\epsilon} = 0 \quad (2.19)$$

O tensor de curvatura de Ricci é definido pela contração:

$$R_{\alpha\epsilon} = g^{\beta\gamma} R_{\gamma\alpha\beta\epsilon}$$

A contração do tensor de Ricci nos dá a curvatura escalar (o escalar de Ricci)

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

### A geometria e as equações de campo de Einstein

As equações de campo de Einstein (ECE) relacionam a fonte de matéria e a geometria do espaço-tempo. A fonte é descrita por um tensor de energia-momentum  $T_{\mu\nu}$ . A conservação da energia em um espaço plano é descrita por:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Para o caso de um espaço curvo, a expressão acima é generalizada por:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.20)$$

Portanto, para associar uma geometria à fonte descrita por  $T_{\mu\nu}$  é necessário que haja uma conservação da geometria no sentido <sup>1</sup> descrito em (2.20) e isso pode ser feito contraindo-se duas vezes as identidades de Bianchi (2.19):

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu}) \\ &= \nabla^{\mu} R_{\rho\mu} - \nabla_{\rho} R - \nabla^{\nu} R_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (2.21)$$

A expressão (2.21) pode escrita como

$$\nabla^{\nu} G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.22)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o chamado tensor de Einstein e é definido por :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

Dessa forma, a Relatividade Geral descreve a curvatura do espaço-tempo a partir do tensor de Einstein (2.23). A curvatura é causada pela presença de campos de matéria no espaço-tempo de acordo com:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional de Newton<sup>2</sup> e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momentum que representa os campos de matéria.

As equações descritas em (2.24) são chamadas equações de campo de Einstein e são elas que nos relatam a dinâmica do espaço-tempo. De (2.23), percebe-se que o lado esquerdo de (2.24) é construído basicamente da métrica e suas derivadas até segunda ordem, o que dá à dinâmica gravitacional um caráter puramente intrínseco.

<sup>1</sup>Na verdade essa requisição é justificada pelo Teorema de Noether abordado na próxima seção

<sup>2</sup>A RG usa a mesma constante Newtoniana já que se supõe que a topologia do espaço-tempo é  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ . Tal suposição é possível devido ao fato da topologia de um espaço-tempo lorentziano poder ser sempre alterada localmente para  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  [12].

É possível adicionar um termo à  $G_{\mu\nu}$ ,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

pois nesse caso a identidade contraída de Bianchi (2.22) continua válida.

A constante  $\Lambda$  é denominada constante cosmológica e foi introduzida em 1917 por Einstein que logo em seguida a retirou, afirmando ter sido um grande erro introduzir tal constante. As equações de Einstein com  $\Lambda$  ficam:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

Contudo, a existência de  $\Lambda$  traz problemas à relatividade restrita já que não se tem mais a solução de Minkowski e nem o grupo de Lorentz. Como foi dito na introdução, dados recentes da cosmologia apontam para um Universo em expansão acelerada o que faz com que várias pesquisas abordem a proposta de se retomar o uso da constante cosmológica<sup>3</sup>.

## 2.3 Princípios de mínima ação

As leis de conservação são fundamentais na física porque elas permitem associar observáveis à teoria. Como resultado do teorema de Noether para simetrias de coordenada [13]:

*Dado o Lagrangiano para um campo  $\psi$  definido em uma região fechada  $\omega$  do espaço-tempo com contorno  $\partial\Omega$  tal que seja invariante sob uma transformação infinitesimal de coordenada de  $N$  parâmetros, então existem  $N$  quantidades conservadas no sentido que  $N_{,\nu}^{\mu} = 0$*

Mudanças nas coordenadas que deixam a ação invariante são simetrias da ação. Então, do teorema de Noether segue que leis de conservação podem ser obtidas a partir do princípio de mínima ação<sup>4</sup>. Além de obter leis de conservação a partir de simetrias do Lagrangiano, o princípio de ação também permite encontrar identidades e prevê a existência de observáveis.

<sup>3</sup>Em 1920, foi mostrado de forma independente por Lemaître e Friedmann que soluções cosmológicas com matéria e  $\Lambda$  em geral envolvem contração ou expansão [1].

<sup>4</sup>Os princípios de mínima ação foram primeiramente descritos por Maupertuis e posteriormente os fundamentos matemáticos foram desenvolvidos por Euler e Lagrange que estabeleceram o princípio de mínima ação como fundamental para toda a física. Não se sabe o motivo exato, mas toda teoria Física parece resultar de um princípio de mínima ação. Um exemplo é a própria a Relatividade Geral.

### 2.3.1 Princípio de Einstein-Hilbert

O princípio de Einstein-Hilbert, descrito a partir de uma ação para métrica, fornece as equações de campo de Einstein (2.24). Historicamente, essas equações foram obtidas de forma diferente; contudo, uma formulação em termos de ação permite uma interpretação fisicamente plausível para o lado esquerdo das ECE que originalmente são quantidades geométricas independentes de interpretação física. Isso permite então acoplar a métrica à fonte da gravitação (matéria-energia) a partir do estudo de simetrias (Teorema de Noether). Outra vantagem de se formular as ECE a partir desse princípio é que ele pode permitir uma futura unificação da Relatividade Geral com as outras teorias de campo clássicas.

A geometria do espaço-tempo (ou seja, a propriedade gravitacional do espaço-tempo) é caracterizada essencialmente pela métrica. Isso torna a métrica o campo fundamental e então se tem que a ação deve ser um funcional da métrica. A ação de Einstein-Hilbert para a métrica é dada por:

$$S_G[g_{\mu\nu}(x)] = \int \frac{1}{16\pi G} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (2.27)$$

onde  $g$  é o determinante da métrica e  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci.

A expressão (2.27) diz que a gravitação corresponde a uma geometria cuja curvatura é a mais suave possível. Como o fator  $\sqrt{-g}$  mantém o elemento de volume invariante, a ação é um escalar. A mudança na ação sob uma variação da métrica é dada por:

$$\delta S_G \equiv S_G[g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}] - S_G[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G} \int (G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu v^\mu) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.28)$$

onde denotamos  $v^\mu \equiv \nabla_\nu (-\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta})$  e  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$

O termo de divergência  $\nabla_\mu v^\mu$  pode ser eliminado por aplicação do teorema da divergência e condições de contorno [14] e então temos de (2.28):

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G} \int (G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.29)$$

Para obter as equações de Einstein, é necessário adicionar à (2.29) uma ação ou lagrangiano para a matéria,  $L_M$ . Obtemos assim,

$$\delta S_M = \delta \int \sqrt{-g} L_M d^4x = \int \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^a} \left[ \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} L_M)}{\partial g^{\mu\nu}_{,a}} \right) \delta g^{\mu\nu}_{,a} \right] \right] d^4x \quad (2.30)$$

Definindo o tensor energia-momentum da fonte material pela expressão:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^a} \left( \frac{\partial \sqrt{-g} L_M}{\partial g_{,a}^{\mu\nu}} \right) \right] \quad (2.31)$$

obtém-se então:

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.32)$$

Tomando-se a ação como sendo a soma de  $S_G$  e  $S_M$  e considerando que a ação seja válida para qualquer variação de  $\delta g_{\mu\nu}$ , tem-se:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

A expressão (2.33) nos dá equações de campo de Einstein. Como foi obtida a partir de um princípio variacional, têm-se quantidades conservadas como é previsto no teorema de Noether. E também se consegue vincular a métrica à fonte de gravitação descrita por  $T_{\mu\nu}$ . O lado esquerdo da equação (2.33) contém toda informação referente a como o espaço é curvado enquanto que o lado direito traz informações referentes à matéria que produz a curvatura. Assim, a geometria do espaço-tempo depende da matéria que permeia esse espaço e que por sua vez é descrita pelo tensor energia-momentum. Portanto, as ECE possuem diferentes soluções dependendo da escolha para o tensor energia-momentum. Ao tratarmos soluções de buraco de minhoca atravessável, veremos que o contrário também pode ser feito. Isto é, o lado esquerdo das ECE é fixado e então se averigua qual tensor de energia-momentum poderia ser responsável por tal geometria.

## 2.4 Soluções estáticas das Equações de Einstein

Essa seção é devotada ao estudo de duas soluções exatas das equações de campo de Einstein, a solução de Schwarzschild e a solução de Schwarzschild-de Sitter. A primeira é importante por conta dos testes da teoria da Relatividade no âmbito do sistema Solar. A segunda é importante para a nossa futura análise de buracos de minhoca.

### 2.4.1 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata das equações de campo de Einstein. Essa solução descreve a região exterior de um corpo esfericamente simétrico, permitindo assim o estudo da gravitação no sistema solar. A importância da solução de Schwarzschild é que ela testa

localmente a Relatividade Geral, além de descrever novos fenômenos tal como os buracos negros que não eram previstos pela teoria newtoniana.

Para obter a solução de Schwarzschild, supõe-se que a solução possui simetria esférica. Um espaço-tempo estático esfericamente simétrico em coordenadas polares ( $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ ) tem a forma geral descrito pela métrica [15]:

$$ds^2 = -e^{A(r)} dt^2 + e^{B(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.34)$$

onde  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$

A solução de Schwarzschild exterior é obtida das equações de Einstein (2.24) no vácuo,  $G_{\mu\nu} = 0$ , que se reduz a equação:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.35)$$

Substituindo (2.34) em (2.35) obtém-se após algum cálculo [14]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.36)$$

onde  $R_s$  é uma constante de integração.

No limite Newtoniano ( $r \gg R_s$ ) obtém-se o efeito equivalente à gravitação Newtoniana produzida por uma massa  $M$ . Assim, obtém-se:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Portanto, a métrica de Schwarzschild descreve o espaço-tempo na região exterior a uma esfera de massa <sup>5</sup>  $M$ :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.37)$$

A métrica descrita em (2.37) é conhecida como solução exterior ou de vácuo. No limite  $r \rightarrow \infty$  a métrica 2.37 se torna Minkowski escrita em coordenadas esféricas espaciais. Ou seja, a solução de Schwarzschild descreve um espaço-tempo assintoticamente plano.

O teorema de Birkhoff diz que a métrica de Schwarzschild 2.37 é a única solução de vácuo estática com simetria esférica. Equivalentemente, se existe uma solução esférica e estática então ela deve ser a solução de Schwarzschild.

---

<sup>5</sup>Em vários textos considera-se o sistema de unidades naturais defendido por Planck,  $G = \hbar = c = 1$  e então, apesar de se ter  $R_s = 2GM$ , na métrica aparece apenas  $2M$

## 2.4.2 Solução Schwarzschild-de Sitter

As soluções de Schwarzschild-de Sitter são soluções que descrevem um espaço-tempo esfericamente simétrico com uma constante cosmológica  $\Lambda$ .

As equações de campo de Einstein com constante cosmológica são dadas por (2.25). A solução de Schwarzschild-de Sitter exterior é obtida substituindo a métrica (2.34) nas ECE descritas em (2.26) com  $T_{\mu\nu} = 0$  e é dada por:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.38)$$

onde, novamente,  $M$  é o parâmetro de massa desse espaço-tempo.

No caso  $\Lambda = 0$  a métrica (2.38) se reduz a métrica de Schwarzschild (2.37). Como os dados da radiação cósmica de fundo indicam um  $\Lambda$  muito pequeno (da ordem de  $10^{-47} \text{ GeV}^4$ ) os espaços-tempo de Schwarzschild e Schwarzschild-de Sitter mantém a mesma propriedade para valores pequenos de  $r$ . Contudo, à medida que  $r$  cresce as diferenças se tornam mais evidentes. A influência de uma constante cosmológica não nula aparece nos cones de escape dos fótons e nos diagramas de imersão [16].

## 2.5 Solução buraco de minhoca

### 2.5.1 O buraco de minhoca atravessável

Um buraco de minhoca é dito atravessável se for possível para uma partícula teste seguir uma geodésica causal ou nula através da garganta. As motivações para esse estudo foram colocadas na introdução e, como já foi mencionado, a RG impõe algumas restrições a construção dessas soluções. As discussões atuais sobre esse tipo de buracos de minhoca têm como base o trabalho de Thorne e Morris [7], onde os autores adotaram a conhecida forma reversa de se resolver as equações de Einstein clássicas; *i.e.*, assume-se a forma de uma métrica e depois obtém-se as propriedades do tensor de energia-momentum que seria responsável por tal geometria.

A métrica é escolhida de modo que satisfaça condições fisicamente aceitáveis e também que simplifique os cálculos. Assim, Thorne e Morris escolheram uma métrica esfericamente simétrica

e estática (independente do tempo) que tem a forma geral<sup>6</sup> [15]:

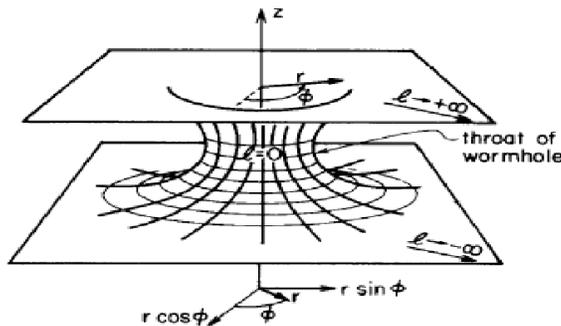
$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (2.39)$$

Onde  $\Phi(r)$  e  $b(r)$  são funções arbitrárias de  $r$ .

Como o objetivo é obter uma solução de buraco de minhoca atravessável, deve-se impor algumas restrições básicas a solução descrita por (2.39). Assim, as condições básicas que devem ser obedecidas são:

1. A métrica (2.39) do espaço-tempo deve satisfazer as equações de campo de Einstein;
2. Para ser considerada um buraco de minhoca, a solução (2.39) deve possuir uma garganta, ou seja, uma região de raio mínimo  $r_0$  que conecta duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo. Ou seja, o diagrama de imersão equatorial deve ser qualitativamente da forma indicada pela figura<sup>7</sup> 2.3

Figura 2.3: Diagrama de imersão equatorial do buraco de minhoca



Fonte MORRIS; THORNE, 1988

3. Não deve haver horizonte de eventos, de modo a garantir viagens de ida e vinda dentro do buraco de minhoca.

A condição de não haver horizontes implica que  $g_{tt} = -e^{2\Phi(r)} \neq 0$ <sup>8</sup>. Portanto, a função  $\Phi(r)$  deve ser finita para todo valor de  $r$ . Por outro lado, da restrição 2, tem-se primeiramente que a

<sup>6</sup>Na verdade, uma breve comparação com (2.34) nos permite perceber que a solução (2.39) é basicamente uma nova notação para (2.34) com  $A(r) = 2\Phi(r)$  e  $e^{B(r)} = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}$ .

<sup>7</sup>A figura retrata a imersão de um elemento de linha bidimensional em um espaço tridimensional euclidiano descrito em coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ , isto é, a coordenada  $z$  pertencer ao nosso espaço-tempo, ela age como dimensão extra no diagrama de imersão

<sup>8</sup>O horizonte de eventos é uma membrana localizada em  $r = r_s$  tal que para esse valor de  $r$  tem-se  $g_{tt} = 0$ .

coordenada  $r$  é não monotônica. Ou seja, ela diminui de  $+\infty$  para um valor mínimo denotado por  $r_0$  e então vai de  $r_0$  para  $-\infty$  (figura 2.3).

Outro fato decorrente da restrição número dois pode ser percebido a partir de um processo de imersão de variedades simplificado, chamado diagrama de imersão. Devido à natureza esféricamente simétrica de (2.39), pode-se obter uma variedade bidimensional ao se considerar uma fatia equatorial ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) e tomar  $t = cte$ . Assim, de (2.39) temos que o elemento de linha para esse caso é:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\phi^2 \quad (2.40)$$

A figura 2.3 apresenta simetria cilíndrica, então para efeitos de visualização a imersão do elemento de linha acima pode ser feita em um espaço tridimensional euclidiano com elemento de linha escrito em coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$  :

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.41)$$

Nesse espaço, a equação da superfície imersa pode ser escrita como  $z = z(r)$  com  $dz = \frac{dz}{dr} dr$ . Pode-se então escrever (2.41) colocando  $dr^2$  em evidência,

$$ds^2 = \left[ \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.42)$$

Comparando (2.42) com (2.40) temos:

$$\frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}} = \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \Rightarrow \frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b} - 1 \right)^{-1/2} \quad (2.43)$$

Essa equação define uma curva que é a geratriz do buraco de minhoca,  $z = z(r)$ . Note que  $b(r)$  é a função que dá forma de garganta a solução (2.39), sendo portanto denominada de função forma<sup>9</sup> do buraco de minhoca.

Retornando a condição dois e a figura 2.3, a geometria do buraco de minhoca possui um raio mínimo  $r_0$  no qual o vetor tangente à geratriz é vertical, i.e  $dz/dr \rightarrow \infty$ . Ou seja, temos que:

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{dz}{dr} = \pm \lim_{r \rightarrow r_0} \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-1/2} = \left( \frac{r_0}{b(r_0)} - 1 \right)^{-1/2} = \infty \rightarrow b(r_0) = r_0 \quad (2.44)$$

---

<sup>9</sup>shape function

Novamente da figura 2.3 temos que o espaço é assintoticamente plano longe da garganta. Isto é,  $dz/dr \rightarrow 0$  à medida que  $r \rightarrow \pm\infty$ . Ou seja, a grandes distâncias da região da garganta o espaço-tempo é do tipo Minkowski.

A última característica que a geometria do buraco de minhoca deve ter é o alargamento da garganta para  $r > r_0$ . Isso corresponde a uma imposição que  $r(z)$  tenha curvatura mínima ou na garganta ou para valores de  $r$  próximos a  $r_0$ . A condição de mínimo implica que:

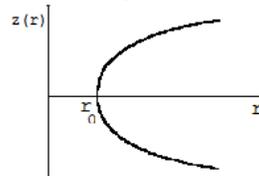
$$\frac{d^2r}{dz^2} > 0 \quad (2.45)$$

Assim, de (2.43) obtemos:

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \quad (2.46)$$

Portanto, o diagrama de imersão é dado por:

Figura 2.4: Diagrama de imersão de uma seção bidimensional ao longo do plano equatorial



Fonte: LOBO, 2008

A figura 2.4 ao ser girada de  $2\pi$  ao redor do eixo  $z$  gera a estrutura ilustrada na figura 2.3.

## 2.5.2 As condições clássicas de energia

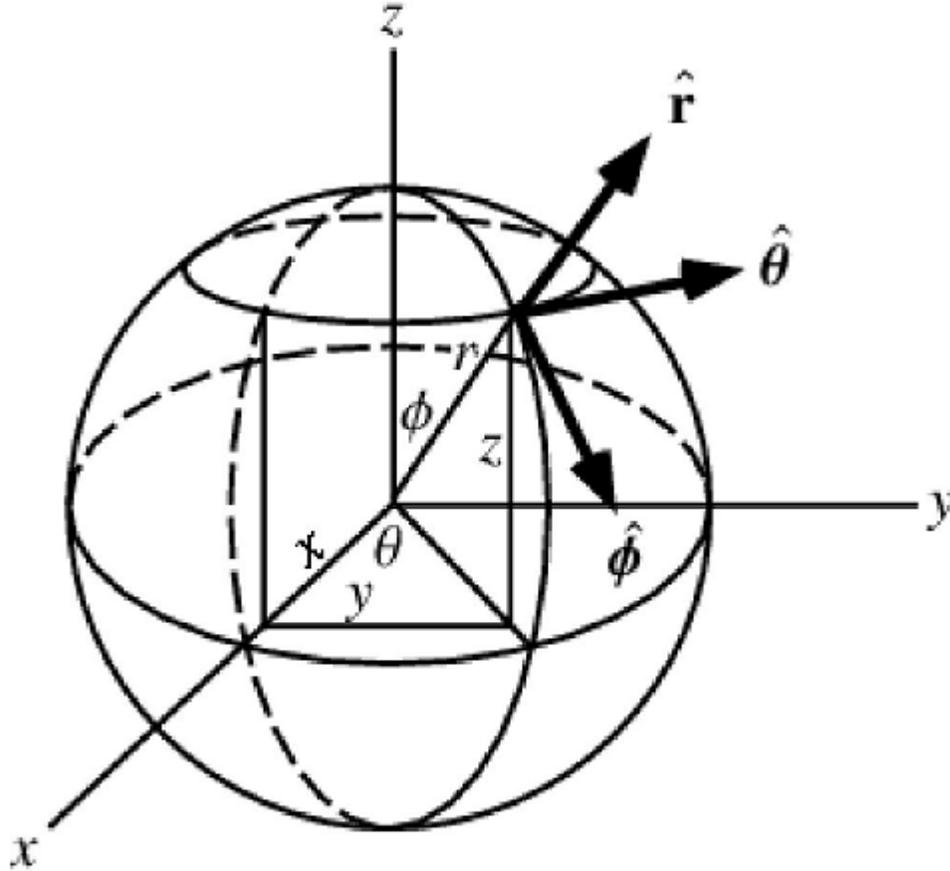
Com base na restrição descrita em (2.39) juntamente com a condição de contorno obtida em (2.46), pode-se obter a relação entre a fonte capaz de gerar o buraco de minhoca e as funções  $b(r)$  e  $\Phi(r)$ . Com a métrica dada em (2.39), pode-se calcular o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (2.47)$$

Contudo, o tratamento dado ao problema fica consideravelmente simplificado com o uso de uma base ortonormal no qual os observadores permanecem em repouso ( $r, \theta, \phi$  constante). Em coordenadas esféricas esta base é:

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\phi}\mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = (1 - b/r)^{1/2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = r^{-1}\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = (r\sin\theta)^{-1}\mathbf{e}_\phi \quad (2.48)$$

Figura 2.5: Base esférica ortonormal das seções espaciais



Fonte: MATHWORLD WOLFRAM 2010

Nessa base, os coeficientes da métrica se escrevem como os elementos da matriz diagonal de Minkowski,

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathbf{e}_{\hat{\mu}} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (2.49)$$

Calculando o tensor de Einstein nessa base, obtemos as seguintes componentes:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'}{r^2} \quad (2.50)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\Phi'}{r} \quad (2.51)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ \Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\Phi' - \frac{b'r - b}{2r^2(1-b)} + \frac{\Phi'}{r} \right] \quad (2.52)$$

Onde  $b \equiv b(r)$  e a  $b'$  e  $\Phi'$  são as derivadas de  $b$  e  $\Phi$  com relação a  $r$ .

Como o objetivo é obter uma estrutura atravessável, o tensor de energia - momentum deve possuir componentes não nulos<sup>10</sup>. As ECE na base esférica ortonormal são dadas por:

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 8\pi T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (2.53)$$

Como resultado dessas equações temos que as únicas componentes não nulas do tensor de energia-momentum são os termos da diagonal:  $T_{\hat{t}\hat{t}}, T_{\hat{r}\hat{r}}, T_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$  e  $T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ .

Usando o fato de se estar em uma base ortonormal usada por observadores estáticos, cada componente do tensor passa a possuir uma simples interpretação física [17]:

- $T_{\hat{t}\hat{t}}$  é a densidade de energia, que no caso do buraco de minhoca vai estar em função de  $r$ ;
- $T_{\hat{z}\hat{z}}$  é a pressão sentida na direção  $\hat{i}$ . Como a pressão depende do número de partículas por área e a densidade varia com  $r$ , a pressão para cada direção vai variar também com  $r$ . Devido a distribuição esfericamente simétrica de matéria, tem-se  $T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ .

Então as componentes do tensor energia-momentum são dadas por

$$T_{\hat{t}\hat{t}} = \rho(r) \quad (2.54)$$

$$T_{\hat{r}\hat{r}} = -\tau(r) \quad (2.55)$$

$$T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = p(r) \quad (2.56)$$

Onde

- $\rho(r)$  é a densidade de energia;
- $\tau(r)$  é a tensão radial e atua como uma pressão negativa, ou seja,  $\tau(r) = -p_r(r)$ , uma força por unidade de área que tende a abrir a garganta
- $p(r)$  é a pressão medida nas direções tangentes a garganta

Substituindo (2.50) a (2.52) e (2.54) a (2.56) em (2.53), obtém-se:

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi} \frac{b'}{r^2} \quad (2.57)$$

---

<sup>10</sup>Do teorema de Birkhoff [15] temos que se o tensor de energia-momentum for nulo, ou seja, vácuo, o único buraco de minhoca permitido é o do tipo de Schwarzschild, que como já comentado na introdução não é atravessável

$$\tau(r) = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{b}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \right] \quad (2.58)$$

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \left[ \Phi'' + (\Phi')^2 - \frac{b'r - b}{2r^2(1 - b/r)} \Phi' - \frac{b'r - b}{2r^3(1 - b/r)} + \frac{\Phi'}{r} \right] \quad (2.59)$$

que descrevem as características da matéria necessária para gerar uma geometria de buraco de minhoca. Com o objetivo de estudar as propriedades dessa matéria, Thorne e Morris [7] definiram uma função adimensional chamada função de exotividade<sup>11</sup> definida por:

$$\xi = \frac{\tau - \rho}{|\rho|} \quad (2.60)$$

Substituindo (2.57) e (2.58) em (2.60) :

$$\xi = \frac{\frac{1}{8\pi} \left[ \frac{b}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \right] - \frac{1}{8\pi r^2}}{\left| \frac{1}{8\pi r^2} \right|}$$

Temos que  $|r^2| = r^2$ . Assim, a expressão acima fica:

$$\xi = \frac{\frac{b-b'r}{r} - 2r \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \Phi'}{|b'|}$$

Pode-se reescrever essa expressão da seguinte forma:

$$\xi = \frac{\frac{2b^2}{r} \left( \frac{b-b'r}{2b^2} \right) - 2r \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \Phi'}{|b'|}$$

Portanto, de (2.46) obtemos:

$$\xi = \frac{2b^2}{r |b'|} \frac{d^2 r}{dz^2} - 2r \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{|b'|} \quad (2.61)$$

Analisando (2.61):

- Na garganta,  $r = r_0$ :

Voltando a atenção para o segundo termo a direita em (2.61), da relação descrita em (2.44) obtemos:

$$\left( 1 - \frac{b(r_0)}{r_0} \right) = 0 \quad (2.62)$$

---

<sup>11</sup>O nome exotividade é explicado mais adiante

mas de (2.57) temos que para  $r = r_0$ :

$$b'(r_0) = \rho(r_0)8\pi r_0^2$$

Como  $\rho$  é a densidade de energia, considerada finita em toda região da solução (2.39), segue que  $b'(r_0)$  deve ser finito. Assim na garganta a função exotividade nos dá o valor:

$$\xi(r_0) = \frac{2b^2}{r_0} \frac{d^2r}{|b'| dz^2} \quad (2.63)$$

Da condição de alargamento tem-se que  $d^2r/dz^2 > 0$ . Como  $2b^2/r_0 |b'| > 0$ , segue que :

$$\xi(r_0) = \frac{\tau(r_0) - \rho(r_0)}{|\rho(r_0)|} > 0 \quad (2.64)$$

Essa condição implica que  $\tau(r_0) > \rho(r_0)$ . Significando que na garganta a tensão deve exceder a densidade de energia. As implicações de uma tensão com tal característica vão ser abordadas adiante.

- Fora da garganta:

Essa análise pode ser simplificada escolhendo  $\Phi(r) = 0$ <sup>12</sup>. Nesse caso, segue de (2.57), (2.58) e (2.59) que o fluido de matéria que gera o buraco de minhoca é caracterizado por:

$$\rho(r) = \frac{b'(r)}{8\pi r^2} \quad (2.65)$$

$$\tau(r) = \frac{b(r)}{8\pi r^3} \quad (2.66)$$

$$p(r) = \frac{b(r) - b'r}{16\pi r^3} \quad (2.67)$$

Note que o sinal de densidade de energia nesse caso vai depender do sinal de  $b'$ . Também, é possível observar que  $\rho(r), \tau(r)$  e  $p(r)$  tendem à zero a medida que  $r \rightarrow \infty$ .

Portanto nesse caso a função de exotividade fica dada então por:

$$\xi(r) = \frac{b(r)/8\pi r^3 - b'(r)/8\pi r^2}{\left| \frac{b'}{8\pi r^2} \right|} = \frac{2b^2}{r} \frac{d^2r}{|b'| dz^2} \quad (2.68)$$

---

<sup>12</sup>No limite campo fraco, obtemos que a função  $\Phi$  corresponde ao potencial newtoniano. Assim, escolher  $\Phi = 0$  implica em ter um potencial nulo e portanto constante. Como o potencial é nulo, uma partícula que atravesse esse buraco de minhoca não sente forças acelerando o seu movimento, isto é, a partícula possui velocidade constante

Para  $r > 0$ , temos que  $2b^2/|b'| > 0$ . Da condição (2.46) tem-se que  $\xi > 0$ . Portanto, obtém-se a condição de alargamento da garganta escrita em termos da fonte material,

$$\xi(r) = \frac{\tau(r) - \rho(r)}{|\rho(r)|} > 0 \quad (2.69)$$

que é válida em toda a região descrita por (2.39) para  $r > r_0$ . Portanto o fluido material que geraria o buraco de minhoca atravessável é composto de uma matéria cuja tensão excede a densidade de energia em toda a extensão do buraco de minhoca.

### 2.5.3 As condições clássicas de Energia

O tensor de energia-momentum que aparece no lado direito das equações de Einstein abrange diferentes formas de fontes materiais como fluido, radiação, poeira e várias outras compostas por átomos e moléculas. As propriedades dessas fontes clássicas são descritas pelas *condições clássicas de energia*.

Nessa seção iremos analisar as condições de energia aplicadas ao caso de uma fonte descrita por um tensor energia-momentum tipo fluido clássico:

$$T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3) \quad (2.70)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa e  $p_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) são as pressões principais.

#### Condição de energia nula

A condição de energia nula (*CEN*) implica que a projeção do tensor  $T_{\mu\nu}$  em uma direção nula  $k^\mu$  é sempre positiva:

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0 \quad (2.71)$$

Assim, no caso de (2.70) obtemos:

$$\forall i, \quad \rho + p_i \geq 0 \quad (2.72)$$

Ou seja, a densidade de energia pode ser negativa contanto que seja compensada por uma pressão positiva.

**Condição de energia fraca**

Essa condição diz que qualquer observador tipo tempo vai medir a densidade local de energia como sendo positiva. Assim, para qualquer vetor tipo tempo  $U^\mu$ , tem-se que

$$T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0 \quad (2.73)$$

Novamente, no caso de um tensor energia momentum descrito por (2.70) essa condição pode ser escrita como  $\rho \geq 0$  e

$$\forall_j, \quad \rho + p_j \geq 0 \quad (2.74)$$

Como a condição de energia fraca é válida para qualquer vetor tipo tempo, essa condição também implica a condição de energia nula.

**Condição de energia forte**

De acordo com a condição de energia forte, para qualquer vetor tipo tempo  $U^\mu$ , a seguinte desigualdade é válida:

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} g_{\mu\nu} \right) U^\mu U^\nu \geq 0 \quad (2.75)$$

onde  $T$  é o traço do tensor de energia.

Em termos das pressões principais (2.70) a condição de energia forte pode ser escrita como:

$$\rho + p_i \geq 0 \text{ e } \rho + \sum_i p_i \geq 0 \quad (2.76)$$

De (2.76) percebe-se então que a condição de energia forte também implica a condição de energia nula.

**Condição de energia dominante**

A condição de energia dominante diz que localmente a densidade de energia é sempre positiva e que o fluxo de energia é do tipo tempo ou tipo luz. Tem-se que para qualquer vetor do tipo tempo  $U^\mu$  a seguinte condição é obedecida:

$$T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0 \quad (2.77)$$

onde  $T_{\mu\nu}U^\mu$  não é do tipo espaço.

Para um fluido essa condição é escrita como:

$$\rho \geq 0 \quad (2.78)$$

Com as pressões principais dadas pelo intervalo:

$$\forall j, \quad p_j \in [-\rho, +\rho] \quad (2.79)$$

Tem-se de (2.78) que a condição de energia dominante também implica a condição nula de energia dada por (2.72).

### Buraco de minhoca atravessável e as condições de energia

O tensor de energia-momentum responsável pela geração de um buraco de minhoca atravessável apresenta como principal característica uma relação peculiar entre a tensão e a densidade de energia dada por (2.69). Essa relação diz que para um buraco de minhoca ser atravessável é necessário que:

$$\tau(r) - \rho(r) > 0 \quad (2.80)$$

Onde  $\tau$  é a pressão negativa radial, *i.e*  $\tau(r) = -p_1$ . Portanto, a expressão (2.80) pode ser escrita como:

$$-p_1 - \rho(r) > 0 \rightarrow p_1 + \rho < 0 \quad (2.81)$$

Ou seja, a condição para que o buraco de minhoca seja atravessável implica que a matéria responsável pela geometria do buraco de minhoca viole a condição de energia nula descrita em (2.72) e conseqüentemente todas as outras condições de energia descritas acima<sup>13</sup>. Classicamente, não há evidência observacional de uma fonte material com tal propriedade e, portanto, esse tipo de matéria é denominada *matéria exótica* no sentido de que não corresponde a matéria formada por átomos e moléculas. Logo, a condição de que  $\tau(r) - \rho(r) > 0$  implica que os buracos de minhoca seriam formados por essa matéria exótica e assim a geração de um buraco de minhoca esfericamente simétrico usando fontes de matéria comum não é possível.

Portanto, apesar da existência de buracos de minhoca não ser proibida pela teoria da RG, os buraco de minhocas só poderiam ser atravessados com auxílio da matéria exótica que agiria como uma repulsão gravitacional permitindo assim uma mudança topológica.

## 2.6 Resumo

Neste capítulo foram abordadas as principais bases da teoria da Relatividade Geral e o papel de cada ferramenta na construção dessa teoria de gravitação. Apontamos os pontos que fizeram da

---

<sup>13</sup>Também é demonstrado que a matéria-energia do buraco de minhoca viola as condições de energia média [18].

RG uma teoria de sucesso, como por exemplo, a escolha de um princípio de mínima ação para escrever as equações que descrevem a dinâmica do espaço-tempo.

Para escrever suas equações, Einstein se utilizou da geometria de Riemann que apresenta limitações quando comparada a geometria de Euclides já que não permite uma visão externa da análise da forma ou topologia de um espaço-tempo. Contudo, graças à métrica a geometria riemanniana consegue caracterizar propriedades topológicas tais como a conectividade (simples ou não) e completicidade. Também é possível explorar a existência de estruturas como o buraco negro ou mesmo estudar a existência de singularidades por meio de convergência das geodésicas [19].

Entretanto, como foi descrito nesse capítulo, o estudo de fenômenos mais complexos como a geração de um buraco de minhoca requer uma análise da alteração topológica do espaço-tempo e isso não pode ser plenamente descrito por um observador intrínseco. Assim, as limitações que o cenário da RG impõe à existência dos buracos de minhoca atravessáveis podem ser consequência de usar uma geometria inadequada para se descrever processos de alteração topológica como é o caso do buraco de minhoca. Por outro lado, alguns autores como Don Page, Klebanov e Fay Ducker especulam que uma alteração topológica do espaço-tempo apenas é possível em níveis quânticos onde a relatividade geral é substituída por uma gravitação quântica.

Dentro da geometria riemanniana, os chamados "diagramas de imersão" permitem ao observador quadridimensional uma ideia sobre o processo da mudança topológica em um espaço-tempo através da eliminação de duas coordenadas desse espaço. Na verdade, os diagramas de imersão são seções obtidas de um problema matematicamente bem mais geral que é a imersão de uma variedade em espaços de dimensões maiores, processo abordado nos capítulos que se seguem.

# Capítulo 3

## Física extradimensional - Cenários em Branas-Mundo

### 3.1 O problema de hierarquia

A teoria da relatividade descreve bem os processos gravitacionais dentro do nosso sistema solar e, no limite de campo fraco, a RG recupera a teoria newtoniana de gravitação. Esses fatores fazem com que a RG seja considerada atualmente a melhor teoria para descrever processos gravitacionais locais. Contudo, a gravitação como descrita pela RG não permite a unificação das interações fundamentais e essa dificuldade levou a postulação de dimensões extras, abordagem seguida pelo programa de Kaluza-Klein (KK) poucos anos após a criação da própria relatividade. Além do programa KK, pode-se citar outros programas como a supergravidade e supercordas que se utilizavam de dimensões extras.

A dimensão extra no programa de KK era compacta e seu tamanho era da ordem do comprimento de Planck, sendo assim menor do que as partículas descritas pelo modelo padrão. Dessa forma as dimensões extras não seriam percebidas por meios convencionais pelos observadores quadridimensionais.

Um pensamento comum entre esses cenários extradimensionais citados é tratar a escala Planck como fundamental e indivisível. Como consequência dessa imposição tem-se que todas as outras escalas em teorias de baixa energia seriam derivadas a partir da escala Planck.

O modelo padrão das interações fundamentais é descrito em termos de duas escalas de energia fundamentais: a escala Planck ( $M_{pl} \propto G^{-1/2} \propto 10^{19} GeV$ )<sup>1</sup> e a escala Eletrofraca ( $m_{ew} \propto$

---

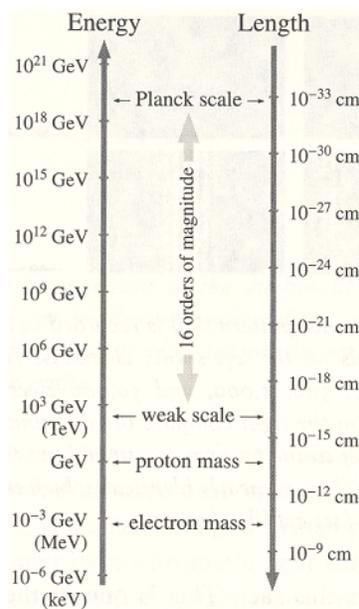
<sup>1</sup> $M_{pl}$  é a massa de Planck

$100\text{GeV})^2$ . Na física de partículas, o problema de hierarquia mais importante é a diferença de energia entre essas escalas,

$$\frac{m_{ew}}{M_{Pl}} \propto 10^{-17}$$

Tal diferença é responsável pelo fato da força nuclear ser  $10^{32}$  vezes mais intensa que a gravitação. Isso porque a força nuclear é descrita em termos da constante Fermi que aparece na escala eletrofraca enquanto que a gravitação é proporcional à constante de Newton que por sua vez pode ser escrita em termos da massa de Planck.

Figura 3.1: Escalas de energia



Fonte: STAFF SCIENCE 2011

Conjectura-se que somente na escala Planck teríamos a descrição da gravitação quântica e também é esperado que nessa escala de energia a gravitação se torne tão forte quanto as outras interações de calibre. Já a escala eletrofraca nos traz informações referentes à quebra de simetria e estabilização da hierarquia. Assim, o estudo da dinâmica topológica na gravitação quântica também envolve o problema da hierarquia.

### A escala Planck

Devido à importância do papel exercido pela escala Planck no problema da Hierarquia, vamos abordar agora os aspectos por trás da construção dessa escala. A escala Planck foi estabelecida

<sup>2</sup> $m_{ew}$  é a massa da escala eletrofraca

por Max Planck que, ao procurar unidades de medida mais universais do que as do sistema CGS, criou o que chamou de unidades naturais [20]. Elas eram unidades de medida, de massa, de segundo e de temperatura. Ele as chamou naturais porque elas eram descritas em termos de constantes universais como a velocidade da luz no vácuo  $c$ , a constante gravitacional newtoniana  $G$ , e as constantes  $k$  e  $\hbar$ , que aparecem na lei universal da radiação. No sistema CGS, essas constantes apresentam os seguintes valores:

$$c = 3 \times 10^{10} \frac{cm}{s}$$

$$G = 6,685 \times 10^{-8} \frac{cm^2}{gs^2}$$

$$k = 1,34 \times 10^{-16} \frac{gcm^2}{s^2C}$$

$$\hbar = 6,415 \times 10^{-27} \frac{gcm^2}{s}$$

Para estabelecer sua escala, ele considerou que a lei de gravitação de Newton, a propagação da luz no vácuo e os dois princípios da termodinâmica continuariam válidos. Assim, supondo que a gravitação newtoniana vale no regime quântico, temos que a energia gravitacional necessária para aproximar duas massas pontuais  $m$  separadas por uma distância  $r$  é

$$E = \langle F, r \rangle = G \frac{m^2}{r} \quad (3.1)$$

Por estarmos no regime quântico, essa energia também é dada pelo quantum de energia, ou seja:

$$E = \hbar\nu = \frac{\hbar c}{\lambda} \quad (3.2)$$

Então para  $r = \lambda$ , obtém-se:

$$G \frac{m^2}{r} = \frac{\hbar c}{r} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (3.3)$$

$m$  é denominada massa Planck e é denotada por  $M_{pl}$ .

A expressão (3.3) fornece então a relação entre a massa Planck e a constante gravitacional de Newton:

$$M_{pl} \propto G^{-1/2} \quad (3.4)$$

Substituindo  $\hbar$ ,  $c$  e  $G$  por seus valores, tem-se:

$$M_{Pl} = 5,37 \times 10^{-5}g \quad (3.5)$$

Em termos de energia temos:

$$M_{Pl} = 10^{19}GeV \quad (3.6)$$

Por outro lado, igualando a relação quântica (3.2) à energia relativística ( $E = mc^2$ ):

$$E = \frac{\hbar c}{\lambda} = mc^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\hbar c}{E} = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} \quad (3.7)$$

ou

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{\frac{\hbar c}{G}c}} = \sqrt{\frac{G\hbar^2}{\hbar c^3}} \Rightarrow \lambda = 3,99 \times 10^{-33}cm \quad (3.8)$$

que é conhecido como comprimento de Planck.

Finalmente, da relação entre período e frequência:

$$\nu = \frac{1}{t} = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow t = \frac{\lambda}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \frac{1}{c} \quad (3.9)$$

$$t = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 1,33 \times 10^{-43}s \quad (3.10)$$

que é conhecido como tempo de Planck.

Tais valores de  $t$ ,  $m$ , e  $r$  dão o que se conhece por escala Planck. Temos, dentro dessa escala, que a unidade de comprimento é  $3,99 \times 10^{-33}cm$ . A ideia apresentada por Planck é de fato muito sedutora, pois surgiu por meio de um raciocínio que a princípio seria lógico. O problema (que aparentemente não impediu de se tomar a escala Planck como sendo fundamental) é que toda argumentação para construção dessa escala partiu da hipótese que a gravitação newtoniana seria válida até o limite dado pela escala, o que não se comprova experimentalmente [5]. O uso do efeito Casimir mostra que a validade da lei de Newton de gravitação se estende até  $10^{-3}cm$  com fortes indícios de que não vale a  $10^{-4}cm$ . Assim, assumir a escala Planck como escala fundamental em baixas energias é um fator que pode ser questionado.

## 3.2 Cenários em Brana-mundo

Devido às incertezas sobre a validade da escala Planck em baixas energias, uma abordagem interessante ao problema da hierarquia é assumir a escala eletrofraca como única escala fundamental. Assim, teria-se que as interações de calibre e a gravitação seriam unificadas na escala eletrofraca. Essa abordagem foi primeiramente apresentada no trabalho de Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali (ADD)[5] onde se apresentou a ideia básica que posteriormente deu origem ao programa de Branas-mundo.

Basicamente, o programa de Branas-Mundo descreve o universo como uma  $3 + 1$ -superfície (a brana-mundo) imersa em um espaço-tempo com  $D$  dimensões denominado o espaço total (ou bulk) com partículas e campos restritos à brana enquanto que a gravidade 'escapa' para as dimensões extras. Esse programa é baseado em três postulados básicos:

1. Há uma variedade  $V_D$  com dimensão  $D > 4$  denominado espaço total (ou bulk) que é solução das equações de Einstein em  $D$  dimensões;
2. O espaço-tempo quadridimensional é resultado do movimento de uma 3-brana (imersa no bulk) gerando um volume  $(3+1)$ -dimensional e é chamado então de "brana-mundo";
3. A gravitação pode se propagar pelo bulk. Contudo, os outros campos juntamente com partículas são restritos à brana-mundo .

Os dois primeiros postulados são uma descrição superficial da variedade imersa e do espaço onde é realizada a imersão. Apesar da teoria de Branas-Mundo se basear no fato do espaço-tempo ser imerso em um bulk, o trabalho ADD não apresenta nenhuma definição matemática rigorosa do que seria o processo de imersão de variedades. Assim, embora a teoria de branas-mundo ofereça um cenário para física em mais dimensões, não há um cuidado em justificar matematicamente as características de uma variedade imersa e qual o tipo de imersão seria realizado dentre os vários tipos previstos.

O último postulado tem como objetivo justificar a quebra da hierarquia da força gravitacional na brana e assim resolver o problema da hierarquia<sup>3</sup>, sendo então um postulado extremamente importante do ponto de vista físico. Na verdade, como a gravitação é identificada como a geometria da brana que por sua vez é descrita pela métrica, esse postulado diz que  $g_{\mu\nu}$  varia com a coordenada da dimensão extra:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a} \neq 0$$

---

<sup>3</sup>A forma como a propagação da gravitação nas dimensões extras resolve o problema da hierarquia é explicada na próxima seção

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo (brana-mundo) e  $y^a$  são as dimensões extras. Entretanto, o projeto ADD não especifica como é essa variação da geometria com  $y$ .

### 3.2.1 Cenário ADD

O programa ADD descreve o nosso mundo de quatro dimensões ( $M_4$ ) imerso em um espaço ambiente de  $4 + n$  dimensões de raio  $l$  e com  $n \geq 1$ . Essas dimensões extras são variedades compactas mas, diferentemente do programa de Kaluza-Klein, possuem tamanhos que não são limitados ao comprimento Planck. Outra característica das dimensões extras no cenário ADD é que são espaços torodais planos.

O ADD deu origem ao cenário de Branas-mundo e, portanto, ele segue todos os postulados do programa que foram citados anteriormente. Assim o nosso espaço-tempo é descrito por uma  $3 + 1$  brana ( $M_4$ ). Para localizar a gravitação na brana, o modelo ADD recorre a uma geometria factorizada:

$$M_{world} = M_4 \times L_n$$

onde  $L_n$  representa uma variedade compacta de  $n$  dimensões.

Ao se postular a propagação da gravitação nas dimensões extras há várias implicações na dinâmica gravitacional. No caso newtoniano, essa dinâmica pode ser descrita pela Lei de Gauss:

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{S} \propto M \quad (3.11)$$

onde

- $M$  é a massa da fonte gravitacional
- $\vec{g}$  é a aceleração gravitacional
- $d\vec{S}$  é o vetor unitário normal apontando para fora da superfície gaussiana<sup>4</sup>

- Em três dimensões:

A segunda Lei de Newton fornece a relação entre a aceleração  $\vec{a}$  e a força  $\vec{F}$ :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (3.12)$$

Usando-se o princípio de equivalência temos  $\vec{a} = \vec{g}$ . Dessa forma tem-se de (3.12) e de (3.11) a expressão para a força gravitacional exercida em uma massa teste  $m_1$  devido a presença de

---

<sup>4</sup>Como de praxe no caso clássico newtoniano (3 dimensões), escolhe-se a superfície gaussiana como uma esfera bidimensional

$M$ :

$$F \propto \frac{Mm}{r^2} \quad (3.13)$$

A constante de proporcionalidade nas expressões (3.13) e (3.14) é então dada por  $4\pi G$ . A constante gravitacional ( $G$ ) foi adotada de modo a obter dimensão de força ( $[M][L]/[T]^2$ ) na expressão (3.13) a partir das dimensões ( $[M]^2/[L]^2$ ) da fração no lado esquerdo. Já o fator  $4\pi$  é resultante da integração sobre a superfície de uma esfera bidimensional.

- Em um espaço com  $d$ -dimensões espaciais:  
Supondo que a expressão (3.11) ainda é válida para um número de dimensões maior que três e assim obtém-se a força gravitacional em mais dimensões.

Para um espaço com  $d$  dimensões, a superfície gaussiana escolhida é uma esfera  $(d - 1)$ -dimensional. Portanto, a integral do lado esquerdo de (3.11) fornece a área superficial  $S_{(d-1)}$  de uma  $(d - 1)$ -esfera e tem-se então que a aceleração gravitacional é dada por:

$$g \propto \frac{M}{S_{(d-1)}} \quad (3.14)$$

Segue da segunda lei de Newton que a força gravitacional em  $d$  dimensões é descrita por

$$F \propto \frac{Mm}{S_{d-1}(r)} \quad (3.15)$$

Para calcular a área superficial, é necessário uma relação entre as coordenadas toroidais compactas  $y$  das  $n$  dimensões extras e as coordenadas  $\xi$  da 3-brana. Vamos considerar duas situações:

- (a) Distâncias muito menores que o raio de compactificação ( $x \ll l$ ):

Nesse caso o espaço  $d$ -dimensional aparenta ser plano e, portanto, as coordenadas podem ser tratadas da mesma forma. Assim, nessa escala a área superficial de uma  $(d - 1)$ -esfera é descrita por [21]:

$$S_{d-1}(r) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} r^{d-1} \quad (3.16)$$

com  $\Gamma(t) = (t - 1)!$  e  $r \propto \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y}}$

Portanto, segue de (3.16) e (3.15) que a intensidade da força gravitacional para distâncias do

tipo  $x \ll l$  é então proporcional a:

$$F \propto \frac{Mm}{\omega_d r^{d-1}} \quad (3.17)$$

onde definiu-se  $\omega_d \equiv \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$

Na expressão (3.17) o lado direito tem dimensionalidade  $\frac{[M]}{[L^{d-1}]}$  e portanto em espaços  $d$ -dimensionais é necessário uma constante de proporcionalidade diferente de  $G$  para se obter a dimensionalidade de força. Essa nova constante é denotada  $G_*$ . A constante  $G$  foi determinada experimentalmente pelo movimento balístico e movimento dos astros. Da mesma forma  $G_*$  deve ser determinada experimentalmente. Como o propósito é o de resolver o problema da hierarquia, faz-se a hipótese que  $G_*$  seja compatível com a escala eletrofraca.

Como  $d$  é o número de dimensões espaciais e no programa ADD considera-se as dimensões extras como sendo espaciais também, resulta que  $d = 3 + n$ . Assim pode-se reescrever (3.17) como:

$$F = G_* \frac{Mm}{\omega_d r^{n+2}} \quad (3.18)$$

(b) Distâncias muito maiores do que o raio de compactificação ( $x \gg l$ ):

Nesse caso, a contribuição de  $y$  para integral de superfície pode ser desconsiderada e a área superficial é então dada por:

$$S_{d-1} \propto r^2 \quad (3.19)$$

com  $r \propto \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ .

Substituindo esse resultado em (3.14) obtemos novamente (3.13). Ou seja, quando consideramos distâncias muito maiores que o raio da dimensão extra,  $r \gg l$ , recuperamos a expressão usual para força gravitacional.

No caso relativístico, as equações de campo que descrevem a dinâmica gravitacional são obtidas do princípio de ação de Einstein em  $4 + n$  dimensões:

$$S = -\frac{1}{16\pi G_*} \int d^4 x d^n y \sqrt{g_{4+n}} R_{4+n} \quad (3.20)$$

onde:

- $g_{4+n}$  e  $R_{4+n}$  são respectivamente o traço da métrica e o escalar de curvatura da  $M_{world}$  de

(4+n) dimensões

- a constante gravitacional newtoniana  $G$  foi substituída por uma constante gravitacional relativística  $G_*$ , que é compatível com a física de altas energias na escala TeV.

Como o espaço extra dimensional é compacto de raio  $l$ , pode-se fazer uma integração no volume  $dy$  obtendo dessa forma uma redução dimensional da expressão (3.20) e assim escrevendo a ação de Einstein-Hilbert quadridimensional:

$$S_{eff} = -\frac{v_n}{16\pi G_*} \int d^4x \sqrt{g_{(4)}} R_{(4)} \quad (3.21)$$

onde  $v_n$  é o volume das dimensões extras:

$$v_n = (2\pi l)^n$$

Comparando a ação (3.21) com a ação descrita em (2.27) obtemos uma relação para  $G_*$  em termos do raio da dimensão extra e da constante gravitacional de Newton:

$$G = \frac{G_*}{v_n} \rightarrow G_* = G l^n \quad (3.22)$$

Portanto, no caso tridimensional ( $n=0$ ) recupera-se a constante gravitacional de Newton. Outra consequência importante da relação (3.22) é que pode-se obter uma intensidade maior para força gravitacional assumindo-se valores maiores que o comprimento de Planck para  $l^n$ . Isso nos permite então resolver o problema da hierarquia.

### A escala Planck em $4 + n$ dimensões

Na seção anterior, ao demonstrar a origem da escala Planck vimos que a massa Planck foi obtida ao se igualar a energia potencial a um quantum de energia. Em um espaço D-dimensional, podem-se considerar duas possíveis energias potenciais. No caso de distâncias muito menores do que o tamanho da dimensão extra,  $r \ll l$ , a energia potencial derivada a partir de (3.18) é:

$$V(r) = G_* \frac{Mm}{w_d r^{n+1}} \quad (3.23)$$

Já quando se considera  $r \gg l$ , obtém-se de (3.13):

$$V(r) \propto G_* \frac{Mm}{l^n r} \quad (3.24)$$

onde usamos a relação (3.22).

De acordo com a proposta do ADD, tem-se que a escala Planck em  $4+n$  dimensões ( $M_{Pl(4+n)}$ ) é equivalente a escala eletrofraca,  $M_{Pl(4+n)} \approx m_{ew}$ . A escala Planck ( $M_{pl(4+n)}$ ) para  $r$  pequenos é então obtida a partir de (3.2) e (3.23) com  $M = m$ :

$$G_* \frac{m^2}{w_d r^{n+1}} = \frac{hc}{r} \quad (3.25)$$

que nos dá então:

$$M_{Pl(4+n)}^2 \propto \frac{r^n}{G_*} \quad (3.26)$$

Para  $r$  grandes usa-se (3.24) e assim recupera-se a escala de Planck usual. A relação entre essa escala e a escala Planck efetiva em  $4+n$  dimensões é obtida substituindo-se (3.22) em (3.26):

$$M_{Pl(4+n)}^2 \propto \frac{r^n}{G l^n} \rightarrow M_{Pl(4+n)}^2 \propto \frac{M_{Pl} r^n}{l^n} \quad (3.27)$$

onde usamos também a relação (3.4).

Assim, para um valor fixo de  $r$  temos que

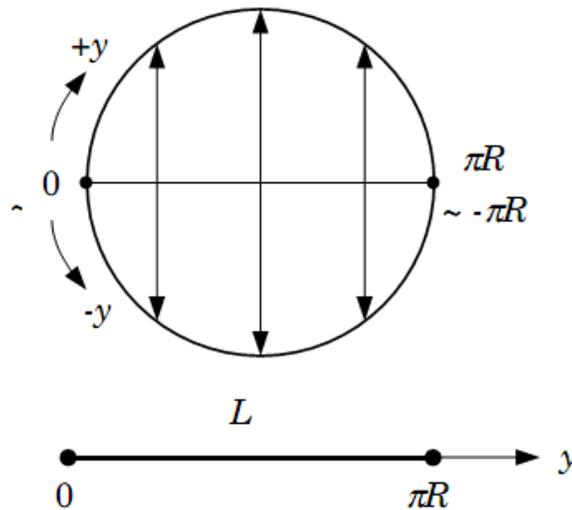
$$M_{Pl} \propto M_{Pl(4+n)}^2 l^n$$

Portanto, basta ajustar o valor de  $l$  para recuperar a intensidade observada da gravitação no espaço-tempo (a brana-mundo). Com essa demanda e exigindo a equivalência entre a escala Planck em  $4+n$  dimensões e a escala eletrofraca obtém-se o valor de  $l$  dependendo do valor de  $n$ . No caso de  $n = 1$  teria-se uma dimensão extra com raio de  $R \approx 10^{13} cm$  e portanto seriam observados potenciais descritos por (3.23) o que leva a uma exclusão empírica do cenário ADD com apenas uma dimensão extra. Já se houver duas dimensões extras,  $n = 2$ , o valor de  $R$  passa a ser da ordem de  $1mm$  e então a validade da expressão (3.23) e por consequência a existência de dimensões extras compactas poderiam ser verificadas por meio de um experimento adequado.

### 3.2.2 Cenário Randall-Sundrum

O modelo Randall-Sundrum (RS) foi formulado em 1999 por L.Randall e R. Sundrum [22] com o objetivo de se oferecer uma nova abordagem ao problema de hierarquia na física de partículas.

Ainda dentro do contexto proposto por branas-mundo, o modelo RS assume a existência de uma dimensão extra compactada em uma esfera 1-dimensional  $S^1$  (um círculo) cujas metades opostas são identificadas por meio da simetria de espelho  $Z_2$  tal como mostrado na figura 3.2.



Fonte: THPHY PHYSICS 2011

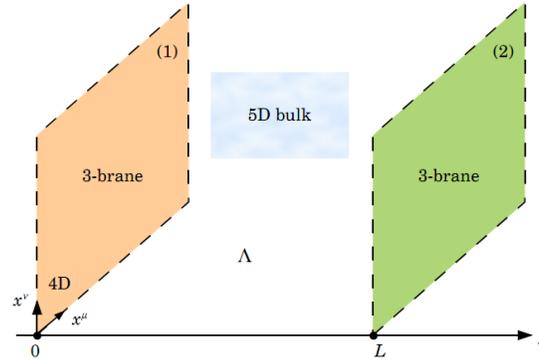
Assim, temos as simetrias:

$$y \leftrightarrow -y \quad (3.28)$$

$$L + y \leftrightarrow L - y \quad (3.29)$$

Assumir uma dimensão extra dessa natureza permite então fixar dois pontos ao longo do círculo  $S^1$ , um localizado na origem e outro na outra extremidade do círculo em  $y = \pi \equiv L$ . Postula-se então que em cada um desses contornos existe uma 3 + 1-brana encerrando um espaço ambiente 5-dimensional com uma constante cosmológica  $\Lambda_5$  (figura 3.2.2).

Figura 3.3: Modelo RS



Fonte: THPHY PHYSICS 2011

### O empenamento da métrica e o problema da hierarquia

O cenário proposto por RS apresentou uma nova abordagem para a gravitação na brana. Ao invés de fazer uso de uma topologia produto como foi feito pelo ADD, assume-se que a métrica induzida na brana é proporcional à métrica de Minkowski ( $\eta_{\mu\nu}$ ).

$$ds^2 = e^{-2A(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.30)$$

onde  $y$  é a coordenada da dimensão extra.

O termo  $e^{-2A(y)}$  faz com que a métrica (3.30) descreva uma deformação ou empenamento da geometria de Minkowski e portanto esse termo é chamado função<sup>5</sup> empenamento<sup>6</sup>. A função  $A(y)$  é determinada a partir das equações de Einstein escritas em cinco dimensões:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = \frac{1}{2M_{Pl5}^3}T_{MN} \quad (3.31)$$

onde

- $M, N = (1, \dots, 5)$
- $M_{Pl5}$  é a massa de Planck em cinco dimensões.
- a constante cosmológica em cinco dimensões,  $\Lambda_5$ , foi incorporada ao tensor energia-momentum  $T_{MN}$ .

<sup>5</sup>Na verdade essa função representa uma transformação conforme da métrica de Minkowski

<sup>6</sup>Ou, em inglês, "warp"

Como as demais fontes de matéria são descritas por campos de calibre do modelo padrão que por sua vez ficam restritas ao espaço-tempo, temos:

$$T_{55} = \frac{-\Lambda_5}{2M_{Pl5}^3} \quad (3.32)$$

Pode-se então, a partir de (3.32) e (3.31) obter a componente do tensor de Einstein para  $M = N = 5$ :

$$G_{55} = 6A'^2 = \frac{-\Lambda_5}{2M_{Pl5}^3} \quad (3.33)$$

onde a linha denota derivada com relação a  $y$ .

Temos então:

$$A' = \sqrt{\frac{-\Lambda_5}{12M_{Pl5}^3}} \quad (3.34)$$

A expressão acima implica que só existe solução real para  $A$  caso a constante  $\Lambda_5$  seja negativa. Isso implica que o bulk é na verdade um espaço anti-de Sitter pentadimensional denotado por  $AdS_5$ .

Integrando (3.34) em  $y$  e usando a simetria de espelho (3.28) obtemos:

$$A(y) = \sqrt{\frac{-\Lambda_5}{12M_{Pl5}^3}}|y| = \kappa|y| \quad (3.35)$$

onde  $\kappa \equiv \sqrt{\frac{-\Lambda_5}{12M_{Pl5}^3}}$

Portanto, o cenário RS é caracterizado por uma métrica dada por:

$$ds^2 = e^{\kappa|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (3.36)$$

com  $-L \leq y \leq L$

Portanto, o programa RS resolve o problema da hierarquia através de uma contração exponencial da métrica ao longo do  $AdS_5$ . Assim, a gravitação é mais forte em algumas regiões do bulk, mas sua intensidade decai exponencialmente ao interagir com o nosso espaço-tempo quadridimensional. Ao postular que a região do bulk está localizada entre dois contornos  $y = 0$  e  $y = L$  tem-se que a função  $A$  apresenta um salto em  $A = 0$  e em  $A = L$ . Esses saltos levam a termos extras nas equações de Einstein que são cancelados postulando-se a existência de densidades de energia das próprias branas, chamadas tensões das branas. Assim, a brana localizada em  $y = 0$  teria uma tensão  $\lambda_1$  e a brana em  $y = L$  teria uma tensão  $\lambda_2$  tal que [23]:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 12\sqrt{\frac{-\Lambda_5}{12M_{Pl5}^3}} \quad (3.37)$$

A exigência de uma tensão na brana juntamente com a simetria de espelho e com a expressão (3.31) levam a uma expressão para curvatura extrínseca na brana [24]:

$$k_{\mu\nu} = 8\pi\kappa^2 \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(\lambda - T)g_{\mu\nu} \right] \quad (3.38)$$

Portanto, no modelo RS a geometria extrínseca da brana é descrita em termos da matéria confinada a brana.

Basicamente, o modelo RS descreve uma gravitação que decai exponencialmente ao longo do bulk partindo de postulados como simetria de espelho, existência de uma constante cosmológica no bulk e branas fixas<sup>7</sup> com tensão  $\lambda_i$ . Assim, comparando com o programa ADD, a construção do cenário RS requer um grande número de postulados e, como o ADD, também falha ao explicar o processo de imersão tendo que se utilizar de novos postulados de simetria para não ter que recorrer de fato à geometria extrínseca da brana.

### 3.3 Resumo

Neste capítulo justificamos a necessidade de teorias extras dimensionais como as Branas-Mundo para explicar o problema da hierarquia. Uma das grandes revoluções trazidas pelas branas-mundo foi considerar dimensões extras com tamanhos bem superiores ao da escala Planck. Para explicar o problema da hierarquia, a teoria de branas-mundo propõe que o nosso espaço-tempo é imerso em um espaço ambiente de  $4 + n$  dimensões com a gravitação se propagando ao longo das dimensões extras. Contudo, a teoria de branas-mundo não é matematicamente completa já que a teoria não utiliza quase nenhum formalismo matemático adequado para descrever ou justificar o processo de imersão.

Dentro da teoria de branas-mundo abordamos o ADD e os cenários de Randall-Sundrum. A principal diferença entre esses e o ADD é como a força gravitacional decai ao longo do bulk. Enquanto que no ADD o bulk é plano e a gravitação decai proporcionalmente até chegar ao valor medido por nós na brana, no modelo RS2 a força gravitacional decai exponencialmente ao longo do bulk  $AdS_5$ .

Em princípio, um grande problema dos modelos propostos por Randall-Sundrum é o número de postulados e hipóteses necessários para se construir cada modelo. Além dos três postulados da

---

<sup>7</sup>As branas fixas são chamadas  $D$ -branas com condição de contorno de Dirichlet

brana-mundo, Randall-Sundrum ainda tiveram que apelar para condição de simetria e obrigatoriamente restringir o bulk à um  $AdS_5$ . Tantas restrições deixam o programa de Randall-Sundrum um tanto quanto particular.

Os modelos extradimensionais que foram apresentados nesse capítulo apontam para a necessidade de se formular um modelo de espaço-tempo imerso que seja mais geral sem tantas imposições ao bulk ou a própria brana. Essa questão será abordada nos próximos capítulos onde serão apresentados o teorema de imersão de Nash e as características gerais de um espaço-tempo imerso.

# Capítulo 4

## O problema da forma do espaço-tempo

Uma das grandes revoluções apresentadas pela Relatividade Geral foi identificar o espaço-tempo como uma variedade diferenciável de natureza quadridimensional e detentora de uma métrica pseudo-riemanniana. Assim, as propriedades do espaço-tempo e sua estrutura são estudadas com base na Geometria Riemanniana. Tal geometria busca descrever as variedades usando apenas as suas propriedades intrínsecas e não há assim necessidade de se recorrer a um espaço de dimensão maior como ocorre na geometria das superfícies na geometria Euclidiana. A geometria intrínseca de Riemann considera uma variedade diferenciável na qual existe uma métrica (a primeira forma fundamental) definida pelo produto escalar local. Já a geometria extrínseca própria da geometria Euclidiana se refere propriedades topológicas expressas em termos da curvatura extrínseca (segunda forma fundamental).

A ideia da geometria Riemanniana surgiu na verdade de uma proposta de Gauss a Riemann para definir uma geometria com base apenas na métrica. Podemos medir distância, traçar paralelas e até superfícies apenas usando a métrica e vetores tangentes. Para reforçar essa ideia, Gauss apresentou o seu teorema mais formalmente conhecido como o teorema Egregium de Gauss.

Esse teorema diz que a curvatura gaussiana de uma superfície bidimensional pode ser determinada apenas através de medidas intrínsecas como ângulos e distâncias, sem ter necessidade de se fazer referência a um espaço Euclidiano tridimensional. Com a finalidade de generalizar o teorema Egregium de Gauss para o caso de  $n$  dimensões, Riemann definiu o tensor de curvatura (ou curvatura de Riemann). Os passos da construção desse tensor foram explicados na seção 2.2 onde se obteve a expressão do tensor de Riemann (2.18) na base  $\{e_\mu\}$ .

A expressão (2.18) mostra que o tensor de Riemann depende então apenas da métrica, que é uma característica intrínseca a variedade. Contudo, a curvatura Riemanniana não determina univocamente o formato local da geometria. Um exemplo clássico é o do hiperbolóide regrado e

do plano, que possuem tensores de curvatura nulos, sendo então semelhantes na geometria riemanniana apesar de claramente possuírem formas diferentes. Portanto, ao se considerar apenas as propriedades intrínsecas de uma superfície não é possível estudar ou definir de modo completo a forma dessa superfície.

A forma local na superfície Euclidiana bidimensional é determinada pela variação da normal  $\eta$  em diversas direções na superfície. Para isso é suficiente tomar dois vetores de base  $\{e_\mu\}$  no plano tangente. Podemos expressar a derivada da normal em termos dessa base,

$$\eta_{,\mu} = a_\mu^\rho e_\rho + b_\mu \eta$$

$$\langle \eta_{,\mu}, e_\nu \rangle = k_{\mu\nu} = a_\mu^\rho g_{\rho\nu}$$

As variações máxima e mínima do vetor normal com relação a superfície bidimensional são dadas respectivamente por  $k_1$  e  $k_2$ . Esses extremos nos permitem definir duas quantidades que nos fornecem a forma local das superfícies:

- Curvatura média (H)

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (4.1)$$

- Curvatura Gaussiana (K)

$$K = k_1 k_2 \quad (4.2)$$

Logo,  $K$  e  $H$  são necessários para distinguir localmente o formato de diferentes superfícies. Sucede que na geometria Riemanniana temos apenas o valor  $K$  e, portanto, há dificuldade em se determinar a forma local devido a inabilidade da quantidade  $K$  sozinha para descrever completamente a forma da superfície.

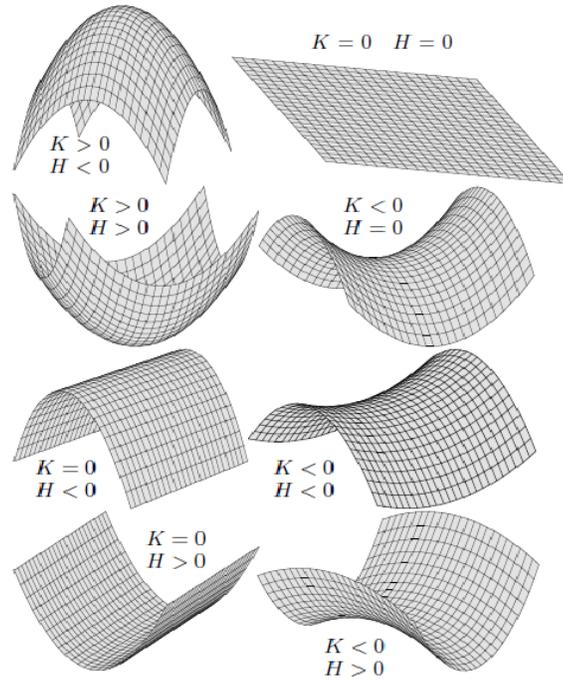
De posse das quantidades descritas por Riemann, no início do século XX Einstein escreveu as equações gravitacionais (2.24) que descrevem apenas a dinâmica da métrica. Com base no que foi mencionado anteriormente, tem-se então que essas equações não são suficientes para distinguir espaços-tempo que pertencem a classe de curvaturas equivalentes.

A proposta da imersão surgiu em 1873 com Schläefli [25] para resolver essa ambiguidade do Tensor de Riemann usando ideia análoga a da geometria Euclidiana:

$$\mathcal{X} : V_N \rightarrow V_D$$

Para não alterar as características de  $V_N$  como variedade diferenciável, a imersão deve ser diferencial e regular. Para garantir que se tenha apenas uma geometria toma-se uma imersão que seja

Figura 4.1: Diferentes superfícies e seus valores de K e H



Fonte: MPI-INF 2011

isométrica como veremos mais claramente a seguir.

## 4.1 Imersão isométrica de variedades

Considere uma variedade  $V_N$  que está localmente imersa em outra variedade  $V_D$  (o bulk),  $D > N$  dada pelo mapeamento:

$$\mathcal{X} : V_N \rightarrow V_D \tag{4.3}$$

que possui  $D$  componentes  $\mathcal{X}^A$  que são funções de  $N$  coordenadas  $x^\nu$

$$\mathcal{X}^A(x^1 \dots x^\nu \dots x^N) \tag{4.4}$$

onde  $A = 1 \dots D$  e  $\mu, \nu = 1 \dots N$

A derivada desse mapeamento é, portanto, dada pela matriz jacobiana:

$$(\mathcal{X}^A_{,\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{X}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathcal{X}^2}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{X}^D}{\partial x^1} \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial \mathcal{X}^1}{\partial x^N} & \frac{\partial \mathcal{X}^2}{\partial x^N} & \dots & \frac{\partial \mathcal{X}^D}{\partial x^N} \end{pmatrix}$$

Para se recuperar a variedade original  $V_N$  é requerido que  $\mathcal{X}$  seja inversível, o que será garantido localmente se  $\mathcal{X}$  for regular. Então pode-se aplicar o teorema da função inversa para se obter  $\mathcal{X}^{-1}$  localmente. A condição de isometria diz que a geometria imersa é induzida pela geometria do bulk e é dada pela derivada do mapeamento de  $\mathcal{X}$  que relaciona os dois tensores métricos:

$$g_{\mu\nu} = \mathcal{X}_{,\mu}^A \mathcal{X}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} \quad (4.5)$$

onde  $\mathcal{G}$  denota a métrica com componentes  $\mathcal{G}_{AB}$  em uma base arbitrária da variedade  $V_D$ .

Já que  $D > N$  nós precisamos de  $D - N$  coordenadas extras  $y^a$  ( $a = N + 1 \cdots D$ ) definidas ao longo de  $D - N$  direções independentes que denotamos por  $\eta_a$ . Essa é uma escolha de base gaussiana, isto é,  $\eta_a$  são ortogonais a  $V_N$  e eles também tem um produto escalar induzido pela métrica de  $V_D$ . Portanto, temos também a equação:

$$\mathcal{X}_{,\mu}^A \eta_a^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu a} = 0 \quad (4.6)$$

que é a relação de ortogonalidade.

Finalmente tem-se o tensor  $g_{ab}$  que é a métrica do espaço complementar de  $n$  dimensões

$$\eta_a^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ab} \quad (4.7)$$

Os tensores métricos  $\mathcal{G}_{AB}$ ,  $g_{\mu\nu}$  e  $g_{ab}$  são dados por uma escolha específica de  $\eta_a$ . As equações (4.5), (4.6) e (4.7) são equações básicas de imersão que devem ser satisfeitas de modo a garantir a isometricidade da imersão. Ao se resolver essas equações, obtém-se a função de imersão  $\mathcal{X}^A(x^\mu)$ . Mais especificamente, (4.6) significa que os vetores  $\eta_a$  são ortogonais à variedade e (4.7) descreve a métrica da dimensão extra.

A descrição da forma (que é o objetivo original da imersão) é dada pela variação dos vetores  $\eta_a^A(x)$ , quando esse é deslocado em  $V_N$ . Isso é, quando se calcula a derivada  $\frac{\partial \eta_a^A}{\partial x^\nu}$  o resultado dessa derivada é um campo vetorial de  $V_D$  o qual é naturalmente escrito na base gaussiana  $\{\mathcal{X}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$  do espaço de imersão:

$$\eta_{a,\mu}^A = \alpha_{\mu a}^\rho \mathcal{X}_{,\rho}^A + \beta_{\mu a}^b \eta_b^A \quad (4.8)$$

Multiplicando por  $\mathcal{X}_{,\nu}^C \mathcal{G}_{CA}$  e usando as equações básicas de imersão ((4.5), (4.6) e (4.7)) obtemos da expressão acima os coeficientes

$$g_{\rho\nu} \alpha_{\mu a}^\rho = \eta_{a,\mu}^A \mathcal{X}_{,\nu}^C \mathcal{G}_{CA} \equiv -k_{\mu\nu a} \quad (4.9)$$

onde o sinal  $(-)$  é uma escolha e  $k_{\mu\nu a}$  é a curvatura extrínseca ou segunda forma fundamental relativa à direção de  $\eta_a$ . Por outro lado, multiplicando (4.8) por  $\eta_c^C \mathcal{G}_{CA}$  obtemos :

$$\eta_{a,\mu}^A \eta_c^C \mathcal{G}_{CA} = \beta_{\mu a}^b \eta_b^A \eta_c^C \mathcal{G}_{AC} = A_{\mu a c} \quad (4.10)$$

e  $A_{\mu a c}$  é chamado vetor de torção<sup>1</sup> ou terceira forma fundamental.

Dessa forma, a geometria métrica  $g_{\mu\nu}$  de  $V_N$  é complementada por  $k_{\mu\nu a}$  e  $A_{\mu a}^b$  que descrevem a forma local da geometria.

Portanto, para determinar a imersão e as formas fundamentais, é necessário determinar  $g_{\mu\nu}$ ,  $k_{\mu\nu a}$  e  $A_{\mu a}^b$ . Essas variáveis são obtidas pelas equações de Gauss-Codazzi-Ricci que são simplesmente as expressões de  $R_{ABCD}$  no referencial Gaussiano  $V_N$  e  $\{\mathcal{X}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$ . Devido às simetrias do tensor de curvatura, a maioria das equações resultantes é redundante ou nula. No final, restam então apenas três equações:

$${}^{(D)}R_{ABCD} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \mathcal{X}_{,\gamma}^C \mathcal{X}_{,\sigma}^D = R_{\alpha\beta\gamma\sigma} - 2g^{ab} k_{a\alpha[\gamma a} k_{b\sigma]\beta} \quad (Gauss) \quad (4.11)$$

$${}^{(D)}R_{ABCD} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_a^B \mathcal{X}_{,\beta}^C \mathcal{X}_{,\gamma}^D = 2k_{a[\alpha\beta;\gamma]} - 2g^{cd} A_{[ad\gamma} k_{c\alpha]\beta} \quad (Codazzi) \quad (4.12)$$

$${}^{(D)}R_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{X}_{,\gamma}^C \mathcal{X}_{,\delta}^D = -2A_{[ba\gamma;\delta]} - 2g^{cd} A_{[\gamma ca} A_{\delta]db} - 2g^{cd} k_{[\gamma ca} k_{\delta]db} \quad (Ricci) \quad (4.13)$$

A partir da equação de Gauss (4.11) pode-se comparar  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  com  $R_{ABCD}$ . Assim, dessa equação tem-se que a ambiguidade do tensor de curvatura de  $V_N$  desaparece quando ele é comparado com o tensor de curvatura de  $V_D$ . A forma local de duas superfícies com o mesmo tensor de Riemann é dada então pela curvatura extrínseca  $k_{\mu\nu a}$  e não depende de  $A_{\mu\nu b}$ . As outras duas equações ((4.12) e (4.13)) são necessárias para que possamos resolver o sistema de equações e assim encontrar  $k_{\mu\nu a}$  e  $A_{\mu\nu b}$ . Finalmente, das equações básica de imersão determina-se  $\mathcal{X}^A$  e  $\eta_a^B$ .

## 4.2 Teorema de imersão de Nash

As equações de Gauss, Codazzi e Ricci (4.11), (4.12) e (4.13) são fortemente não lineares nas três variáveis  $g_{\mu\nu}$ ,  $k_{\mu\nu}$  e  $A_{\mu\nu a}$ , o que dificulta consideravelmente a sua resolução e portanto apresentam um problema à questão da imersão. Em decorrência disso, a única solução conhecida usava expansões analíticas o que é razoável do ponto de vista de grupos de Lie, mas não no caso de variedades diferenciáveis.

Partindo de argumentos sobre diferenciabilidade e regularidade das funções, John Nash mostrou em seu trabalho de 1956 [26] que a imersão local de uma variedade diferenciável pode ser feita

---

<sup>1</sup>Essa designação vem das equações de Frenet-Serret da teoria de curvas e tem o mesmo sentido de torção de uma curva. Não se deve confundir com a torção de Cartan pois a nossa conexão de Levi-Civita é simétrica

mantendo sua diferenciabilidade. Mais tarde, R. Greene estendeu a ideia à variedades pseudo-riemannianas [25].

O teorema de Nash pode ser enunciado como:

*Dada uma função de imersão  $\bar{\mathcal{X}}$  tal que a aplicação  $\bar{\mathcal{X}} : \bar{V}_N \rightarrow V_D$  seja regular e diferenciável, então por meio de uma deformação contínua em uma direção normal em um ponto da variedade  $\bar{V}_N$  pode-se obter uma outra variedade diferenciável Riemanniana imersa em  $V_D$  para  $D$  suficientemente grande.*

onde a barra denota uma grandeza ou variedade ( $\bar{V}_N$ ) não perturbada.

A perturbação de  $\bar{V}_N$  é obtida pelo deslocamento das coordenadas  $\bar{\mathcal{X}}^A$  ao longo da curva tangente ao vetor  $\eta_a$ . Denotando por  $\delta y^a$  uma pequena variação de  $dy^a$  obtemos novas coordenadas:

$$\mathcal{Z}^A = \bar{\mathcal{X}}^A + \delta y^a (\mathcal{L}_{\eta_a} \bar{\mathcal{X}})^A = \bar{\mathcal{X}}^A + \delta y^a [\eta_a, \bar{\mathcal{X}}]^A \quad (4.14)$$

Calculando os parênteses de Lie e lembrando que o vetor normal não depende das coordenadas  $\mathcal{X}^A$  a expressão fica:

$$\mathcal{Z}^A = \bar{\mathcal{X}}^A + \delta y^a (\bar{\eta})_a^A \quad (4.15)$$

Analogamente,

$$\eta_a = \bar{\eta}_a + \delta y^a [\bar{\eta}_a, \bar{\eta}_a] = \bar{\eta}_a \quad (4.16)$$

A imersão da variedade perturbada é definida por  $\mathcal{Z}^A$  desde que essas coordenadas satisfaçam as mesmas equações básicas de imersão:

$$\mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu\nu} \quad (4.17)$$

$$\mathcal{Z}_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{\mu b} \quad (4.18)$$

$$\eta_a^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = g_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab} \quad (4.19)$$

Onde  $g_{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu b}$  e  $g_{ab}$  são as perturbações das métricas que aparecem nas equações de imersão originais (4.5), (4.6) e (4.7).

O vetor torção da geometria perturbada é (lembrando a relação (4.16) para o vetor normal perturbado):

$$A_{\mu ba} = \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{\eta}_{a,\mu}^A \bar{\eta}_b^B = \bar{A}_{\mu ba} \quad (4.20)$$

Portanto, o vetor torção não se altera sob o processo perturbativo.

Em analogia com o caso não perturbado (4.9), a curvatura extrínseca é dada por:

$$k_{\mu\nu a} = -\eta_{a,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\mu}^B \mathcal{G}_{AB} \quad (4.21)$$

Partindo de (4.17), (4.18) e (4.19) [25], obtemos uma relação importante:

$$k_{\mu\nu a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y^a} \quad (4.22)$$

A expressão (4.22) diz que a perturbação da geometria da variedade imersa tem influência de elementos extrínsecos a ela que por sua vez vão definir a forma da variedade. Nash, em seu teorema, usou essa relação para mostrar que toda geometria pode ser imersa diferencialmente. A expressão (4.22) diz que a evolução da métrica deformada da variedade imersa sob o parâmetro perturbativo  $y^a$  fornece a curvatura extrínseca, revelando assim a geometria extrínseca da variedade. Ou seja, há algo como uma dinâmica de natureza geométrica, que pode ser pensada como um fluxo ou foliação de geometria. No caso do espaço-tempo imerso, a expressão (4.22) também mostra que a gravitação se propaga nas dimensões extras. Assim, o postulado da teoria de Brana-mundo sobre a propagação da gravitação no bulk aparece aqui como uma consequência natural do processo perturbativo de Nash.

Para determinar a existência da imersão da perturbação é necessário considerar as equações de Gauss, Codazzi e Ricci que no caso da variedade perturbada são essencialmente as mesmas descritas em (4.11), (4.12) e (4.13).

Entretanto, as equações de Gauss-Codazzi-Ricci não são equações dinâmicas, representam apenas uma condição para que a imersão possa existir. Isto é, elas não são suficientes para determinar as primeiras, segundas e terceiras formas fundamentais. Para resolver o sistema, necessitamos escolher o espaço de imersão.

### 4.3 Resumo

Na parte inicial do capítulo apresentamos a necessidade do processo de imersão para o estudo da forma local de uma superfície. Apesar de existirem diferentes tipos de imersão, restringimos o nosso estudo à imersão isométrica de modo a garantir que o espaço ambiente e a variedade imersa sejam descritos pela mesma geometria.

Contudo, para que uma imersão isométrica seja matematicamente consistente é necessário que as equações de Gauss-Codazzi e Ricci sejam obedecidas. Para que o processo de imersão seja interessante do ponto de vista físico, usamos o Teorema de Nash de imersão que nos permite não

apenas realizar uma imersão isométrica como também conserva a diferenciabilidade da variedade.

Outro ponto a se destacado nesse capítulo foi a relação (4.22) que é uma consequência do processo de imersão de Nash e que diz que a gravitação se propaga nas dimensões extras. No capítulo anterior vimos que para resolver o problema da hierarquia, a teoria de branas-mundo postula que a gravitação não fica confinada a brana. Assim, obter a relação (4.22) de forma natural é um ponto a favor do uso do teorema de imersão de Nash em cenários de gravitação. Essa abordagem será feita no próximo capítulo.

# Capítulo 5

## A gravitação em espaços-tempo imersos

### 5.1 Deformando o espaço-tempo

Enquanto que os programas de imersão de variedades no contexto físico abordados no capítulo 3 requerem alguns postulados (e no caso do RS várias imposições adicionais ao espaço-tempo), o teorema de Nash permite fazer uma imersão assumindo uma única condição: A imersão deve ser isométrica.

O trabalho original de Nash [26] se restringiu a descrever o processo de imersão de variedades dentro do contexto matemático. O teorema de Nash aplicado a gravitação é uma abordagem posterior ao trabalho de Nash e foi desenvolvida por M.D. Maia e E. M. Monte nos últimos dez anos [13],[27], [31], [34],[38],[43] e [44].

As equações de campo de Einstein são obtidas do princípio de Einstein-Hilbert:

$$\int R\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{5.1}$$

Como a geometria métrica do espaço-tempo é o campo gravitacional e a imersão isométrica diz que a geometria do espaço-tempo é induzida do espaço-imerso, tem-se que a geometria do espaço imerso deve ser definida pelo princípio de Einstein-Hilbert no bulk. Partimos de um espaço de imersão genérico cuja métrica é definida pela ação de Einstein-Hilbert:

$$\frac{\delta}{\delta\mathcal{G}_{AB}} \int {}^{(D)}R\sqrt{-\mathcal{G}}d^Dx = 0 \tag{5.2}$$

Como campos de gauge e matéria são bem descritos em teorias quadridimensionais e são observáveis, vamos supor na nossa análise a ausência de matéria ou fontes de energia na variedade

onde o espaço-tempo é imerso. Isto é,  $T_{\mu b} = T_{ab} = 0$  com  $a, b = D - N, \dots, D$ .

Tem-se assim a equação de Einstein em  $D$ -dimensões:

$${}^D R_{AB} - \frac{1}{2} {}^D R \mathcal{G}_{AB} = G_* T_{AB} \quad (5.3)$$

Para obter as equações de Einstein efetivas em quatro dimensões a partir de (5.2) é necessário antes obter algumas relações a partir das equações de imersão ((4.17) a (4.19)) obtidas e discutidas no capítulo anterior. De (4.17) obtemos o traço:

$$g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = N \quad (5.4)$$

De modo a simplificar os cálculos, vamos definir  $\xi^{AB} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B$ . Assim, temos que:

$$\xi^{AB} \mathcal{G}_{AB} = \xi_A^A = N \quad (5.5)$$

Por outro lado, temos que:

$$\mathcal{G}^{AB} \mathcal{G}_{AB} = D \quad (5.6)$$

De (5.6) e (5.5) segue que:

$$(\mathcal{G}^{AB} - \xi^{AB}) \mathcal{G}_{AB} = D - N = n \quad (5.7)$$

onde  $n$  é o número de dimensões extras.

Denotando  $\psi^{AB} \equiv \mathcal{G}^{AB} - \xi^{AB}$ , obtemos uma equação para determinar  $\psi^{AB}$ :

$$\psi^{AB} \mathcal{G}_{AB} = n \quad (5.8)$$

Para obter uma segunda equação, usamos (4.19) de modo a obter a seguinte igualdade:

$$\eta_a^A \eta_b^B \eta_c^C \eta_d^D \mathcal{G}_{AC} \mathcal{G}_{BD} = (\eta_a^A \eta_c^C \mathcal{G}_{AC}) (\eta_b^B \eta_d^D \mathcal{G}_{BD}) = g_{ac} g_{bd} \quad (5.9)$$

Por outro lado, da definição de  $\xi^{AB}$  e de sua ortogonalidade, obtemos:

$$(\mathcal{G}^{AB} - \psi^{AB}) \eta_c^C \mathcal{G}_{CA} = 0 \quad (5.10)$$

Assim,

$$\mathcal{G}^{AB} \eta_c^C \mathcal{G}_{CA} - \psi^{AB} \eta_c^C \mathcal{G}_{CA} = 0 \quad (5.11)$$

Logo,

$$\psi^{AB}\eta_c^C\mathcal{G}_{CA} = \eta_c^C\delta_C^B = \eta_C^B \quad (5.12)$$

Multiplicando a expressão acima por  $\eta_d^D\mathcal{G}_{DB}$ :

$$\psi^{AB}\eta_c^C\eta_d^D\mathcal{G}_{DB}\mathcal{G}_{CA} = \eta_c^B\eta_d^D\mathcal{G}_{DB} = g_{cd} \quad (5.13)$$

e usando (4.19) juntamente com a definição

$$\psi_{CD} = \mathcal{G}_{CA}\mathcal{G}_{DB}\psi^{AB} \quad (5.14)$$

obtemos:

$$\psi_{CD}\eta_c^C\eta_d^D = g_{cd} \quad (5.15)$$

Logo podemos escrever:

$$(\psi_{AC}\eta_a^A\eta_c^C)(\psi_{BD}\eta_b^B\eta_d^D) = g_{ac}g_{bd} \quad (5.16)$$

Uma comparação entre os lados direitos das equações (5.9) e (5.16) sugere que os parênteses devem ser proporcionais. Ou seja,

$$\psi^{AB} = \phi^{ab}\eta_a^A\eta_b^B \quad (5.17)$$

onde  $\phi^{ab}$  é uma matriz a ser determinada

Substituindo (5.17) em (5.8) e em (5.15) obtemos:

$$\phi^{ab}\eta_a^A\eta_b^B\mathcal{G}_{AB} = n$$

Ou seja,

$$\phi^{ab}g_{ab} = n$$

Se  $g_{\mu\alpha} = 0$  temos  $\phi_{ab} = g^{mn}g_{ma}g_{nb}$ . Assim, obtemos:

$$\phi_{ab} = g_{ab} \quad e \quad \phi^{ab} = g^{ab} \quad (5.18)$$

Finalmente, de (5.18), (5.17) e da definição  $\psi^{AB} \equiv \mathcal{G}^{AB} - \xi^{AB}$ , obtemos uma relação para  $\xi$ :

$$\xi^{AB} = \mathcal{G}^{AB} - g^{ab}\eta_a^A\eta_b^B. \quad (5.19)$$

Contraindo (5.3) with  $g^{\rho\sigma}$  e usando (5.19) obtém-se:

$$R_{\mu\nu} = g^{cd}(g^{\rho\sigma}k_{\mu\rho c}k_{\nu\sigma d} - k_{\mu\nu d}h_c) + {}^{(D)}R_{AB}\mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B - g^{ab}{}^{(D)}R_{ABABCD}\eta_a^A\mathcal{Z}_{,\nu}^C\mathcal{Z}_{,\mu}^B\eta_b^D \quad (5.20)$$

onde

$$H_a = g^{\mu\nu}k_{\mu\nu a}. \quad (5.21)$$

Denotando a curvatura gaussiana ao quadrado por

$$K^2 = g^{ab}k_a^{\mu\nu}k_{\mu\nu b} \quad (5.22)$$

e a curvatura média ao quadrado por

$$H^2 = g^{ab}H_a H_b \quad (5.23)$$

obtém-se a partir da contração de (5.20) com  $g^{\mu\nu}$  (e também usando (5.19) novamente) o escalar de curvatura dado por:

$${}^{(D)}R = R - (K^2 - H^2) - 2g^{ab}{}^{(D)}R_{AB}\eta_a^A\eta_b^B + g^{ad}g^{bc}{}^{(D)}R_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D \quad (5.24)$$

Então, usando (5.24) , tem-se que a ação em  $D$  dimensões para o bulk pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int {}^{(D)}R\sqrt{\mathcal{G}}d^Dx &= \int (R - K^2 + H^2)\sqrt{-\mathcal{G}}d^Dx \\ + \int [2g^{ab}{}^{(D)}R_{AB}\eta_a^A\eta_b^B - g^{ad}g^{bc}{}^{(D)}R_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\eta_c^C\eta_d^D] &\sqrt{-\mathcal{G}}d^Dv = G_* \int L^*d^Dv \end{aligned} \quad (5.25)$$

onde  $L^*$  é a lagrangiana dos campos confinados ao espaço-tempo.

No caso em que se escolhe um bulk plano,  $R_{ABCD} = R_{AB} = 0$ , obtemos

$$\int {}^{(D)}R\sqrt{\mathcal{G}}d^Dx = \int (R - K^2 + H^2)\sqrt{-\mathcal{G}}d^Dx.$$

As equações de campo induzidas no espaço-tempo podem ser encontradas ao se tomar a variação de (5.25) com relação a componentes separados da métrica  $g^{\mu\nu}$  ,  $g^{\mu a}$  e  $g^{ab}$  obtendo-se assim:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = G_*T_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} \quad (5.26)$$

onde o termo  $Q_{\mu\nu}$  é chamado de tensor de deformação e é definido por:

$$Q_{\mu\nu} = g^{ab}k_{\mu a}^{\rho}k_{\rho\nu b} - H^a k_{\mu\nu a} - \frac{1}{2}(K^2 - H^2)g_{\mu\nu} \quad (5.27)$$

Calculando a derivada covariante de (5.27) temos:

$$Q_{\mu\nu}^{;\nu} = g^{cd}(k_{\mu\rho c}^{;\nu}k_{\nu d}^{\rho} + k_{\mu\rho c}k_{\nu d}^{\rho ;\nu} - k_{\mu\nu d}^{;\nu}H^d) - \frac{1}{2}(K^{2;\nu} - H^{2;\nu})g_{\mu\nu} \quad (5.28)$$

Assim, da definição de  $H_a$  e  $H^2$ :

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}^{;\nu} &= g^{cd}(k_{\mu\rho c}^{;\nu}k_{\nu d}^{\rho} + k_{\mu\rho c}k_{\nu d}^{\rho ;\nu}) - k_{\mu\nu d}^{;\nu}g^{\lambda\rho}k_{\lambda\rho d} - k_{\mu\nu d}g^{\lambda\rho}k_{\lambda\rho d}^{;\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2}(g^{cd}k_c^{\rho\nu ;\nu}k_{\rho\nu d} + g^{cd}k_d^{\rho\nu}k_{\rho\nu d}^{;\nu} - 2g^{cd}H_cH_d^{;\nu})g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Com alguma manipulação obtemos:

$$Q_{\mu\nu}^{;\nu} = -\frac{1}{2}g^{cd}g_{\mu\nu}(H_cH_d^{;\nu} + H_cH_d^{;\nu} - 2H_cH_d^{;\nu}) \quad (5.30)$$

que nos fornece:

$$Q_{;\mu}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.31)$$

A expressão (5.31) diz que o tensor de energia momento se conserva no sentido Noether<sup>1</sup>

Assim, para uma métrica detentora de um campo vetorial de Killing, temos que  $Q_{\mu\nu}$  pode ser interpretado como um observável. Ou seja, além de recuperar as propriedades relativas a forma local do espaço-tempo, a geometria extrínseca também diz que para várias soluções das ECE com vetores Killing há uma "energia geométrica"além das fontes clássicas de matéria e energia. Esse resultado pode fornecer opções a soluções de problemas como o que seriam a matéria escura e a energia escura [27] e também, como veremos, para buracos de minhoca.

### 5.1.1 Imersão em cinco dimensões

Até o momento, a natureza da dimensão extra foi abordada apenas do ponto de vista matemático. Contudo, quando a variedade imersa é o espaço-tempo, é necessário fazer alguns questionamen-

---

<sup>1</sup>Teorema de Noether na Relatividade Geral: *Dada uma transformação de coordenada infinitesimal em um espaço-tempo e um campo  $\psi$  minimamente acoplado ao campo gravitacional, então o tensor de energia-momentum de  $\psi$  é conservado contanto que exista um campo vetorial de Killing nesse espaço-tempo.*

tos a respeito, por exemplo, da quantidade de dimensão extra necessária. Note que durante a apresentação da teoria de imersões de variedade não foi dita qual é a dimensão  $D$ , o que leva a questionar como determiná-la. Se a imersão tem apenas como objetivo determinar a forma local do espaço-tempo, cinco dimensões poderiam ser suficientes. O teorema a seguir atesta o fato [36]:

Teorema sobre a forma da hipersuperfície do espaço-tempo :

*Todos os espaços-tempos da Relatividade Geral podem ser imersos em uma variedade de cinco dimensões cuja métrica seja uma solução das Equações de Einstein.*

Em cinco dimensões, temos a seguinte relação para o vetor torção,

$$A_{\mu 55} = 0 \quad (5.32)$$

significando que só temos o vetor torção se houver mais que uma dimensão extra. Assim, as equações de Codazzi escritas em (4.12) em cinco dimensões ficam:

$${}^5R_{ABCD} Z_{,\mu}^A \eta_5^B Z_{,\nu}^C Z_{,\rho}^D = k_{\mu[\nu 5; \rho]} \quad (5.33)$$

Então, escolhendo um espaço de imersão plano ( ${}^5R_{ABCD} = 0$ ) as equações de Codazzi (5.33) se reduzem a :

$$k_{\mu[\nu 5; \rho]} = 0 \quad (5.34)$$

Se essa equação tiver solução (e as outras equações, as de Gauss e Ricci também) então será possível imersão no espaço de cinco dimensões. Entretanto, o Teorema de Imersão mínima [36] diz que:

*Nenhuma solução de vácuo das equações de Einstein pode ser imersa em um espaço ambiente com cinco dimensões.*

A demonstração do Teorema de imersão mínima consiste em escolher  $R_{ABCD} = 0$ . Com alguns cálculos, P. Szekeres mostrou em 1966 [28] que o sistema formado por  $R_{munu}=0$  mais a equação de Gauss mais a equação de Codazzi não possui solução para  $k_{\mu\nu}$ . Portanto, um espaço-tempo vazio (Ricci plano) não pode ser imerso em um bulk plano de 5 dimensões.

A condição de isometria tem um papel fundamental para que a imersão tenha um significado físico, pois essa condição diz que a geometria deve ser uma só e que a geometria de  $V_D$  induz a geometria de  $V_N$ . Logo, a escolha do bulk é ditada pelas propriedades geométricas do espaço-tempo imerso e pela condição de isometria de imersão. A condição de geometria única requer que o princípio determinante seja o mesmo para as variedades  $V_D$  e  $V_N$  e (como já foi discutido) é o princípio de Einstein-Hilbert que define a métrica do espaço-tempo. Portanto, o princípio

que determina a geometria do bulk deve ser o mesmo princípio de Einstein-Hilbert escrito em  $D$ -dimensões. Como já foi demonstrado, leva à equação de Einstein em  $D$ -dimensões (5.3) reproduzida abaixo:

$${}^{(D)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(D)}R\mathcal{G}_{AB} = G_*T_{AB}$$

De acordo com esse princípio, a equação acima é que determina a geometria do espaço de imersão. As equações da gravitação no espaço-tempo são induzidas da expressão acima sem se fazer referência a qual seria o valor de  $D$  ou qual seria a natureza do bulk e permitem como solução espaços-tempo sem fonte de matéria. Aliás, é válido notar que no caso do teorema de imersão de Nash tem-se que mesmo na ausência de matéria ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) ainda se tem a quantidade  $Q_{\mu\nu}$  que pode vir a ser interpretada como uma energia de origem geométrica.

Como vimos anteriormente, as equações de Einstein induzidas no espaço-tempo imerso em um espaço ambiente plano são dadas por (5.26). No caso vácuo, percebe-se facilmente que para um bulk plano  $R_{ABCD} = 0$  (uma solução particular da equação (5.3)) as expressões (5.26) ficam dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} = 0 \quad (5.35)$$

De (5.33) temos que,

$$k_{\mu;\rho}^{\rho} - h_{,\mu} = 0. \quad (5.36)$$

A expressão (5.36) diz que no caso de um bulk plano é possível existir uma solução não trivial ( $k_{\mu\nu} \neq 0$ ) que permite construir um tensor de deformação não nulo,  $Q_{\mu\nu} \neq 0$ . A presença de um  $Q_{\mu\nu}$  faz com que mesmo no vácuo o tensor de Ricci não se anule, o que leva a alteração em uma base fundamental da demonstração do resultado de Szekers.

Portanto, um resultado obtido nessa dissertação é que há um equívoco presente no teorema de imersão mínima decorrente do fato de que ele não considera que as geometrias estão relacionadas de modo que o bulk é que induz as equações de campo que descrevem a dinâmica do espaço-tempo. Isto é, as demonstrações do teorema tem como base as equações de campo de Einstein usuais (2.24) e não as obtidas pelo processo de imersão (5.35).

## 5.2 Imersão de espaços-tempo esfericamente simétricos

Para apresentar os resultados obtidos na dissertação, vamos considerar novamente a métrica esfericamente simétrica (2.34) porém agora usando as equações (5.35) e (5.36). Ou seja, o nosso espaço-tempo é imerso em um espaço plano de cinco dimensões. Escrevendo novamente a

métrica (2.34):

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 d\phi^2 \quad (5.37)$$

Os símbolos de Christoffel não nulos para métrica (5.37) são dados por:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{B'}{2} \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{e^B} \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r \operatorname{sen}^2 \theta}{e^B} \quad \Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2} \frac{e^A}{e^B} A'$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = \frac{A'}{2}$$

Temos que as equações de Codazzi em 5 dimensões para uma imersão em um espaço plano é dada por (5.34). Assim, denotando  $k_{\mu\nu 5} = k_{\mu\nu}$  obtém-se as equações:

$$k_{44;l} = k_{4l;4} \quad (5.38)$$

$$k_{ij;4} = k_{i4;j} \quad (5.39)$$

$$k_{ij;l} = k_{il;j} \quad (5.40)$$

$$k_{4j;l} = k_{4l;j} \quad (5.41)$$

onde  $l$  varia de 1...3.

Segue da relação de Nash (4.22) que devido a métrica (5.37) ser diagonal tem-se  $k_{\mu\nu} = 0$  para  $\mu \neq \nu$ . Em particular, de (5.38) temos

$$k_{4l} = 0 \rightarrow k_{4l;4} = 0 \quad (5.42)$$

A expressão da derivada covariante para (5.42) fica:

$$k_{4l;4} = k_{4l,4} - \Gamma_{44}^\mu k_{\mu l} - \Gamma_{l4}^\mu k_{4\mu} = 0 \quad (5.43)$$

Como  $k_{41} = 0$  temos:

$$-\Gamma_{44}^\mu k_{\mu l} = \Gamma_{l4}^\mu k_{4\mu} \quad (5.44)$$

Então, abrindo a soma:

$$-\Gamma_{44}^1 k_{1l} - \Gamma_{44}^2 k_{2l} - \Gamma_{44}^3 k_{3l} - \Gamma_{44}^4 k_{4l} = \Gamma_{l4}^1 k_{1l} + \Gamma_{l4}^2 k_{2l} + \Gamma_{l4}^3 k_{3l} + \Gamma_{l4}^4 k_{4l} \quad (5.45)$$

que finalmente nos dá:

$$-\Gamma_{44}^1 k_{1l} - \Gamma_{44}^2 k_{2l} - \Gamma_{44}^3 k_{3l} = \Gamma_{l4}^4 k_{44} \quad (5.46)$$

As conexões não nulas são aquelas em que  $l = 1$ . Logo, (5.46) fica

$$-\Gamma_{44}^1 k_{11} = \Gamma_{14}^4 k_{44} \quad (5.47)$$

onde  $\Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2} \frac{e^A}{e^B} A'$  e  $\Gamma_{14}^4 = \frac{A'}{2}$ . Substituindo em (5.44):

$$-\frac{1}{2} \frac{e^A}{e^B} A' k_{11} = \frac{A'}{2} k_{44} \quad (5.48)$$

### 5.2.1 Caso geral ( $A' \neq 0$ )

A expressão (5.48) nos dá uma relação entre  $k_{44}$  e  $k_{11}$ :

$$-\frac{e^A}{e^B} k_{11} = k_{44} \quad (5.49)$$

Voltando para expressão (5.38), temos:

$$k_{44;l} = 0 \quad (5.50)$$

Logo,

$$k_{44;l} - \Gamma_{4l}^\mu k_{\mu 4} - \Gamma_{4l}^\mu k_{\mu 4} = 0 \Rightarrow k_{44;l} - 2\Gamma_{4l}^\mu k_{\mu 4} = 0 \quad (5.51)$$

As conexões são não nulas para  $l = 1$ . O que nos dá:

$$k_{44,2} = k_{44,3} = 0 \quad (5.52)$$

$$k_{44,1} = A' k_{44} \Rightarrow k_{44} = c_0 e^A = -c_0 g_{44} \quad (5.53)$$

onde  $c_0 \equiv e^\rho$  e  $\rho$  é uma constante de integração.

Portanto, segue de (5.48) :

$$k_{11} = -c_0 e^B \quad (5.54)$$

Das equações (5.48), obtém-se os seguintes resultados:

$$k_{11,2} = k_{11,3} = k_{11,4} = 0 \quad (5.55)$$

$$k_{22,3} = k_{22,4} = k_{33,4} = 0 \quad (5.56)$$

E as seguintes equações diferenciais:

$$\partial_1 k_{22} - \frac{1}{r} k_{22} = \frac{r}{e^B} k_{11} \quad (5.57)$$

$$\partial_1 k_{33} - \frac{1}{r} k_{33} = \frac{r \operatorname{sen}^2 \theta}{e^B} k_{11} \quad (5.58)$$

$$\partial_2 k_{33} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} k_{33} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta k_{22} \quad (5.59)$$

As equações diferenciais (5.57), (5.58) e (5.59) são do tipo

$$y' + Py = q$$

cujas soluções gerais são [29]:

$$y = e^{-\int p dx} \left( \int q e^{\int p dx} dx + v \right) \quad (5.60)$$

Então, para resolver a equação (5.57), escolhemos  $y = k_{22}$ ,  $p = -\frac{1}{r}$  e  $q = \frac{r}{e^B} k_{11}$ .

Dessa forma:

$$k_{22} = r \left( \int k_{11} \frac{1}{e^B} dr + c_1(\theta) \right) \quad (5.61)$$

Analogamente, temos para (5.58):

$$k_{33} = r \left( \int k_{11} \frac{1}{e^B} dr + c_2(\theta) \right) \quad (5.62)$$

Substituindo  $k_{11}$  obtido em (5.54), resulta:

$$k_{22} = - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{h(\theta)}{r} \right) g_{22} \quad (5.63)$$

$$k_{33} = - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{w(\theta)}{r \operatorname{sen}^2(\theta)} \right) g_{33} \quad (5.64)$$

onde  $\alpha$  é constante de integração e  $w(\theta)$  e  $h(\theta)$  são funções (resultantes da integração) a serem determinadas.

As relações (5.53), (5.54), (5.63) e (5.64) podem ser reescritas como<sup>2</sup>:

$$k_{\mu\nu} = f_{\mu}g_{\mu\nu} \quad (5.65)$$

Onde se denotou:

$$f_1 = f_4 = c_0 \quad f_2 = \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{h(\theta)}{r} \right) \quad f_3 = \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{w(\theta)}{r \operatorname{sen}^2(\theta)} \right) \quad (5.66)$$

De (5.65) e usando a definição de  $Q_{\mu\nu}$  dada em (5.27), obtemos:

$$Q_{11} = \epsilon g_{11}(f_2 f_3 + f_2 f_4 + f_3 f_4) \quad (5.67)$$

$$Q_{22} = \epsilon g_{22}(f_1 f_3 + f_1 f_4 + f_3 f_4) \quad (5.68)$$

$$Q_{33} = \epsilon g_{33}(f_1 f_2 + f_1 f_4 + f_2 f_4) \quad (5.69)$$

$$Q_{44} = \epsilon g_{44}(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3) \quad (5.70)$$

onde  $\epsilon = \pm 1$  dependendo se a dimensão extra é de natureza espacial ou temporal. Na análise que se segue, escolhemos a dimensão extra como espacial, i.e,  $\epsilon = 1$ .

Contudo, as funções  $f_2$  e  $f_3$  permanecem indeterminadas, já que não definimos ainda as funções  $w$  e  $h$ . Na ausência de fonte de matéria, a equação de Einstein do espaço-tempo imerso torna-se

$$G_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}, \quad (5.71)$$

onde, sabendo que  $G_2^2 = G_3^3$ , então temos também que  $Q_2^2 = Q_3^3$ . Como  $f_1 = f_4$ , segue de (5.68) e de (5.69) que:

$$f_1 f_3 + f_3 f_4 = f_1 f_2 + f_2 f_4 \quad (5.72)$$

Rearranjando os termos temos  $f_3(f_1 + f_4) = f_2(f_1 + f_4)$ . Assim,  $f_2 = f_3$ , ou seja,

$$c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{w(\theta)}{r \operatorname{sen}^2(\theta)} = c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{h(\theta)}{r} \quad (5.73)$$

O que nos dá

$$h = \frac{w}{\operatorname{sen}^2 \theta}.$$

---

<sup>2</sup>sem soma em  $\mu$

Substituindo esse resultado em (5.63) e então usando a equação diferencial (5.59):

$$\begin{aligned} \partial_2 \left[ - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{w(\theta)}{r \operatorname{sen}^2 \theta} \right) r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \left[ - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{w(\theta)}{r \operatorname{sen}^2 \theta} \right) r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] \\ = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \left[ - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{w(\theta)}{r \operatorname{sen}^2 \theta} \right) \right] r^2 \end{aligned}$$

Efetuada a derivada e denotando  $\partial_2 w = \dot{w}$  obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \left[ - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} \right) \right] r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \dot{w} r + \left[ - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} \right) \right] r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} w r \\ = \left[ - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} \right) \right] r^2 - w r \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \end{aligned}$$

que nos fornece:

$$-\dot{w} r + 2w r \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = 0 \quad (5.74)$$

Resolvendo (5.74) obtemos:

$$w = \beta \operatorname{sen}^2 \theta \quad (5.75)$$

onde  $\beta$  é uma constante de integração. Então, substituindo (5.75) em (5.66)

$$f_2 = f_3 = - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r} \right) \quad (5.76)$$

Assim, pode-se zerar a constante  $\beta$  sem consequências para análise. Portanto, as funções  $f_\mu$  ficam:

$$f_1 = f_4 = -c_0 \quad (5.77)$$

$$f_2 = f_3 = - \left( c_0 + \frac{\alpha}{r} \right). \quad (5.78)$$

Substituindo (5.77) em (5.67) a (5.70) obtemos as componentes de  $Q_{\mu\nu}$

$$Q_{11} = \left( 3c_0^2 + 4\frac{c_0\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) g_{11}, \quad (5.79)$$

$$Q_{22} = \left( 3c_0^2 + 2\frac{c_0\alpha}{r} \right) g_{22}, \quad (5.80)$$

$$Q_{33} = \left( 3c_0^2 + 2\frac{c_0\alpha}{r} \right) g_{33}, \quad (5.81)$$

$$Q_{44} = \left( 3c_0^2 + 4\frac{c_0\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) g_{44}. \quad (5.82)$$

Temos que  $Q^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}Q_{\rho\sigma}$ . Assim, segue de (5.80) a (5.81) que:

$$Q^{11} = \left(3c_0^2 + 4\frac{c_0\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)g^{11}, \quad (5.83)$$

$$Q^{22} = \left(3c_0^2 + 2\frac{c_0\alpha}{r}\right)g^{22}, \quad (5.84)$$

$$Q^{33} = \left(3c_0^2 + 2\frac{c_0\alpha}{r}\right)g^{33}, \quad (5.85)$$

$$Q^{44} = \left(3c_0^2 + 4\frac{c_0\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)g^{44}. \quad (5.86)$$

Uma vez determinada as componentes de  $Q_{\mu\nu}$ , é necessário que o tensor deformação obedeça a condição de conservação descrita em (5.31). Usando (2.10), obtemos da conservação de  $Q_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} Q_{,1}^{\mu 1} + Q_{,2}^{\mu 2} + Q_{,3}^{\mu 3} + Q_{,4}^{\mu 4} + Q^{11}\Gamma_{11}^{\mu} + Q^{22}\Gamma_{22}^{\mu} + Q^{33}\Gamma_{33}^{\mu} + Q^{44}\Gamma_{44}^{\mu} \\ + Q^{\mu 1}(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4) + Q^{\mu 2}\Gamma_{23}^3 = 0 \end{aligned} \quad (5.87)$$

- $\mu = 1$

A expressão (5.87) nos dá:

$$Q_{,1}^{11} + Q^{11}\Gamma_{11}^1 + Q^{22}\Gamma_{22}^1 + Q^{33}\Gamma_{33}^1 + Q^{44}\Gamma_{44}^1 + Q^{11}(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4) = 0$$

As expressões (5.83) a (5.86) permitem escrever as componentes de  $Q_{\mu\nu}$  da seguinte forma:

$$Q^{\mu\nu} = U^{\mu}g^{\mu\nu} \quad (5.88)$$

(sem soma em  $\mu$ ).

Substituindo as componentes de  $Q_{\mu\nu}$  da forma (5.88) obtemos de (5.2.1):

$$\begin{aligned} \partial_1 g^{11}U_1 + g^{11}U_1B' + g^{22}U_2(-re^{-B}) + g^{33}U_3(-re^{-B}\text{sen}^2\theta) + g^{44}U_4 \\ + \frac{1}{2}e^{-B}e^A A' + 2g^{11}U_1r^{-1} + A'g^{11}U_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Substituindo  $g^{11} = e^{-B}$  e colocando  $e^{-B}$  em evidência, obtêm-se então:

$$\frac{2}{r}(U_1 - U) + \frac{A'}{2}(U_1 - U_4) + U_1' = 0, \quad (5.90)$$

onde  $U \equiv U_2 = U_3$ .

Comparando (5.90) com a equação de conservação do tensor energia-momentum  $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$  para  $\mu = r$ :

$$-p'_r = (\rho + p_r) \frac{A'}{2} - \frac{2}{r} (p - p_r) \quad (5.91)$$

onde consideramos o  $T_{\mu\nu}$  tipo fluido descrito pelas expressões (2.54) a (2.56).

Temos que a expressão (5.90) é similar a (5.91), o que sugere que o tensor de deformação se comporta como fluido com  $-U_4$  no papel de densidade de origem geométrica e  $U_1$  no papel de pressão radial.

Substituindo os  $U_\mu$  descritos em (5.67), (5.68), (5.69) e (5.70) na expressão (5.90) e definindo  $l \equiv f_2 = f_3 = -(c_0 + \alpha/r)$  e  $f_1 = f_4 = -c_0 \equiv f$  obtém-se:

$$\frac{2}{r}(l^2 + 2lf - f^2 - 2lf) + \frac{A'}{2}(l^2 - 2lf - l^2 - 2lf) + \partial_r(l^2 + 2lf) = 0 \quad (5.92)$$

logo,

$$\left[ \frac{2}{r}(l+f)(l-f) \right] + 2l'(l+f) = (l+f) \left[ \frac{1}{r}(l-f) + l' \right] = 0.$$

Como  $l' = \frac{\alpha}{r^2}$ , tem-se então:

$$(-2c_0 + \frac{\alpha}{r}) \left[ \frac{1}{r}(-\frac{\alpha}{r}) + \frac{\alpha}{r^2} \right] = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Ou seja, para  $\mu = 1$  a conservação do tensor deformação apenas nos relata que esse possui comportamento similar a de um fluido com densidade negativa.

- Para  $\mu = 2$ , a expressão (5.87) fornece

$$Q_{,2}^{22} + Q^{33}\Gamma_{33}^2 + Q^{22}\Gamma_{23}^3 = 0. \quad (5.93)$$

De (5.84) segue que  $Q_{,2}^{22} = 0$ , temos então:

$$Q^{33}(-\text{sen}\theta\text{cos}\theta) + Q^{22}\frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta} = 0.$$

Substituindo (5.85) e (5.84) obtemos apenas uma identidade trivial,  $0 = 0$

- $\mu = 3$

$$Q_{,3}^{33} + Q^{11}\Gamma_{11}^3 + Q^{22}\Gamma_{22}^3 + Q^{33}\Gamma_{33}^3 + Q^{44}\Gamma_{44}^3 = 0. \quad (5.94)$$

Como  $\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^3 = 0$  e  $Q_{,3}^{33} = 0$  temos apenas uma identidade para o caso  $\mu = 3$ .

- $\mu = 4$

$$Q_{,4}^{44} + Q^{11}\Gamma_{11}^4 + Q^{22}\Gamma_{22}^4 + Q^{33}\Gamma_{33}^4 + Q^{44}\Gamma_{44}^4 = 0. \quad (5.95)$$

Novamente, como  $\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = \Gamma_{44}^4 = 0$  e  $Q_{,4}^{44} = 0$  o caso  $\mu = 4$  resulta em uma identidade.

### Interpretando as componentes de $Q_{\mu\nu}$

A conservação do  $Q_{\mu\nu}$  no caso  $\mu = 1$  sugere que o  $Q_{\mu\nu}$  no espaço-tempo seria observado como sendo um fluido. Contudo, o tensor de deformação é pela própria definição uma quantidade geométrica. Apenas para efeito de comparação, pode-se pensar em  $Q_{\mu\nu}$  como um fluido perfeito em um referencial comóvel.<sup>3</sup>

No caso particular em que  $\alpha = 0$  as expressões (5.79) a (5.82) fornecem:

$$Q_{\hat{1}\hat{1}} = Q_{\hat{2}\hat{2}} = Q_{\hat{3}\hat{3}} = 3c_0^2 \quad (5.96)$$

$$Q_{\hat{4}\hat{4}} = -3c_0^2 \quad (5.97)$$

A relação (5.90) permite escrever  $Q_{\hat{i}\hat{j}} \equiv p^*$  e  $Q_{\hat{4}\hat{4}} \equiv \rho^*$  onde o asterisco denota que são densidade e pressão de origem geométrica. Assim, o tensor de deformação descreve um fluido isotrópico definido pela seguinte equação de estado:

$$p^* = -\rho^* \quad (5.98)$$

que é a mesma equação de estado da energia do vácuo. Temos então que a relação (5.98) sugere que o tensor de deformação pode ser fisicamente interpretado como energia do vácuo. Ou seja, iríamos observar  $Q_{\mu\nu}$  no espaço-tempo como uma energia de vácuo que não estaria subordinada a nenhuma condição de energia prevista para fontes de matéria.

### Buraco de minhoca

Como foi discutido no capítulo 2, para que ocorra o alargamento da garganta, o fluido responsável pela construção do buraco de minhoca deve violar a CEN. A interpretação do  $Q_{\mu\nu}$  como um fluido em uma base ortonormal sugere que o tensor de deformação poderia ser o responsável por gerar um buraco de minhoca atravessável. Para que isso ocorra, é necessário então que a projeção do tensor

---

<sup>3</sup>Vamos usar a notação adotada no capítulo 2, seção 2.5.2 para base ortonormal

$Q_{\mu\nu}$  em uma direção nula  $w^\mu$  seja menor que zero.

$$Q_{\hat{\mu}\hat{\nu}}w^{\hat{\mu}}w^{\hat{\nu}} < 0 \quad (5.99)$$

De forma análoga a (2.72), a condição (5.99) pode ser escrita como:

$$\forall i, j, \quad Q_{\hat{4}\hat{4}} + Q_{ij} < 0 \quad (5.100)$$

Para  $i = j = 1$  obtemos de (5.79) e (5.82):

$$Q_{\hat{4}\hat{4}} + Q_{\hat{1}\hat{1}} = - \left( 3c_0^2 + 4\frac{c_0\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) + \left( 3c_0^2 + 4\frac{c_0\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} \right) = 0 \quad (5.101)$$

Portanto, a condição (5.100) não poderia ser responsável pela criação de um buraco de minhoca atravessável como descrito por Thorne e Morris [7] e discutido no capítulo 2.

### A métrica espaço-tempo imerso

É interessante analisar qual a ação do tensor deformação na métrica do espaço-tempo. As equações de campo induzidas (5.71) que descrevem a geometria do espaço-tempo são:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{eff} \quad (5.102)$$

onde denotamos  $T_{\mu\nu}^{eff} \equiv T_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}$ .

Por simplicidade, pode-se escrever a métrica esfericamente simétrica (5.37) como:

$$ds^2 = -J(r)dt^2 + D(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (5.103)$$

onde denotou-se  $J \equiv e^A$  e  $D \equiv e^B$ .

Da equação de Einstein para métrica descrita por (5.103) tem-se de (5.102) na base ortonormal (2.48) :

$$T_{\hat{1}\hat{1}}^{eff} = (rJD)^{-1}J' - r^{-2}(1 - D^{-1}) \quad (5.104)$$

$$T_{\hat{2}\hat{2}}^{eff} = T_{\hat{3}\hat{3}}^{eff} = \frac{1}{2} \left[ (JD)^{-1/2} \frac{d}{dr} [(JD)^{-1/2}A'] + (rJD)^{-1}J' - (rD^2)^{-1}D' \right] \quad (5.105)$$

$$T_{\hat{4}\hat{4}}^{eff} = (rD^2)^{-1}D' + r^{-2}(1 - J^{-1}) \quad (5.106)$$

Temos então que as funções  $J$  e  $D$  da métrica não vão mais depender apenas da fonte de matéria ( $T_{\mu\nu}$ ), mas também vão ser influenciadas pela presença do tensor deformação. De forma a

entender melhor o papel do tensor de deformação na gravitação de um espaço-tempo imerso, vamos considerar dois cenários: um espaço-tempo com presença de uma fonte material e o caso vácuo em que se tem um  $T_{\mu\nu}$  nulo.

- Caso vácuo ( $T_{\mu\nu} = 0$ )

As equações (5.104) e (5.106) se tornam:

$$p_r^{eff} = Q_{\hat{i}\hat{i}} = (rD^2)^{-1}D' + r^{-2}(1 - D^{-1}) \quad (5.107)$$

$$\rho^{eff} = Q_{\hat{4}\hat{4}} = (rD^2)^{-1}D' + r^{-2}(1 - D^{-1}) \quad (5.108)$$

Definindo  $u \equiv D^{-1}$  e usando (5.82) temos de (5.108):

$$-\frac{u'}{r} + \frac{1}{r^2}(1 - u) = -(3c_0^2 + 4\frac{c_0\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2}) \quad (5.109)$$

$$u' + \frac{u}{r} - \left( \frac{1}{r} + 3c_0^2r - 4c_0\alpha - \frac{\alpha^2}{r} \right) = 0$$

que é uma equação linear de primeira ordem que se integra facilmente. Obtemos assim

$$u = 1 - \frac{R_S}{r} + (c_0r + \alpha)^2 \quad (5.110)$$

onde  $R_S$  é uma constante de integração que nos cálculos usuais de limite de campo fraco para soluções de Schwarzschild assume o valor  $2GM$ .

Somando (5.107) e (5.108) e lembrando que na base ortonormal temos  $Q_{\hat{4}\hat{4}} = -Q_{\hat{i}\hat{i}}$ , encontramos:

$$(rJD)^{-1}J' + (rD^2)^{-1}D' = 0$$

$$\frac{J'}{J} = -\frac{D'}{D} \quad (5.111)$$

Cuja integração nos dá  $J = lD^{-1}$  onde  $l$  é uma constante. Fazendo uma mudança na escala temporal  $t \rightarrow l^{1/2}t$ , temos  $l = 1$  e assim, obtém-se a seguinte métrica resultante do processo de

imersão:

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{R_S}{r} + (c_0 r + \alpha)^2 \right] dt^2 + \frac{1}{\left[ 1 - \frac{R_S}{r} + (c_0 r + \alpha)^2 \right]} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.112)$$

A métrica (5.112) é similar à encontrada para solução exterior de Schwarzschild com exceção do termo  $(c_0 r + \alpha)^2 = c_0^2 r^2 + 2\alpha c_0 r + \alpha^2$ . Portanto, o tensor de deformação acrescenta à métrica um termo perturbativo que para valores grandes de  $c_0$  e  $\alpha$  poderia levar a uma alteração da topologia (ou forma) local do espaço-tempo [40]. Desse modo, o teorema de imersão de Nash viabiliza alterações topológicas sem ser necessário determinar uma gravitação quântica.

A presença de  $c_0$  produz um efeito semelhante ao de uma constante cosmológica  $\Lambda$  exceto que no caso analisado a solução é local, sem o princípio cosmológico. Observamos que para  $r \rightarrow \infty$  o elemento de linha (5.112) não recupera o espaço-tempo de Minkowski que é uma condição básica da solução estudada. Portanto, para que haja compatibilidade com a RG iremos tomar  $c_0 = 0$ .

Assim, o horizonte de eventos é obtido em:

$$r = \frac{R_s}{1 + \alpha^2}$$

Ou seja, o processo de imersão altera a localização do horizonte de eventos.

### Escalar de Ricci

Tomando o traço de (5.102), obtemos o escalar de Ricci:

$$R = -T^{eff}$$

onde  $T^{eff} = g^{\hat{\mu}\hat{\nu}} T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  Assim,

$$R = -(g^{\hat{1}\hat{1}} Q_{\hat{1}\hat{1}} + g^{\hat{2}\hat{2}} Q_{\hat{2}\hat{2}} + g^{\hat{3}\hat{3}} Q_{\hat{3}\hat{3}} + g^{\hat{4}\hat{4}} Q_{\hat{4}\hat{4}}) \quad (5.113)$$

Substituindo (5.79) a (5.82) em (5.113) obtemos:

$$R = -2 \frac{\alpha^2}{r^2} \quad (5.114)$$

Assim, como resultado do processo de imersão temos um espaço-tempo que mesmo na ausência de uma fonte material apresenta curvatura diferente de zero. Também segue de (5.114) que  $r = 0$

representa uma singularidade nesse espaço-tempo.

- Com Presença de matéria

Vamos considerar agora os efeitos da imersão na presença de uma matéria descrita por um tensor de energia-momentum tipo fluido.

Assim, tem-se

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \text{diag}(\rho, p_r, p, p) \quad (5.115)$$

De (5.104), e seguindo raciocínio análogo ao do caso sem matéria, obtém-se a componente  $rr$  métrica:

$$g_{rr} = \frac{1}{\left[1 - \frac{M(r)}{r} + \alpha^2\right]} \quad (5.116)$$

onde  $\frac{M(r)}{r} \equiv \int_0^r \rho(r')r'^2 dr'$ .

Na presença de matéria, a expressão (5.104) fica:

$$G_*p_r + Q_{\hat{i}\hat{i}} = (rJD)^{-1}J' - r^{-2}(1 - D) \quad (5.117)$$

Lembrando que  $J \equiv e^A$  encontra-se:

$$G_*p_r + Q_{\hat{i}\hat{i}} = (rD)^{-1}A' - r^{-2}(1 - D) \quad (5.118)$$

Que nos dá rearranjando os termos:

$$\frac{B}{r}(G_*p_r r^2 + Q_{\hat{i}\hat{i}} r^2 + 1) - \frac{1}{r} = A' \quad (5.119)$$

Substituindo  $Q_{\hat{i}\hat{i}}$  e  $B$  dados por (5.79) e (5.116) respectivamente, tem-se

$$A' = \frac{(G_*p_r)r^3 + M(r)}{r(r - M(r) + r\alpha^2)} \quad (5.120)$$

Tem-se no limite de campo fraco  $(G_*p_r + 2c_0^2)r^3 + 2c_0\alpha r \ll M(r)$ . No caso  $M(r) + r\alpha^2 \ll r$  a expressão (5.120) se reduz a:

$$A' \approx \frac{M(r)}{r^2} \quad (5.121)$$

A expressão (5.121) é a equação de Poisson. Logo, o limite newtoniano desse espaço-tempo imerso é recuperado para  $r\alpha^2 \ll r$ . Ou seja, é necessário que a perturbação da métrica seja extremamente pequena, não se permitindo assim alterações da topologia do espaço-tempo.

Tem-se que a métrica na presença de matéria é dada por:

$$ds^2 = -e^{A(r)} dt^2 + \frac{1}{\left[1 - \frac{M(r)}{r} + \alpha^2\right]} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.122)$$

onde  $A$  é dado pela expressão (5.119).

### 5.2.2 Caso $A' = 0$

A relação (5.48) forneceu uma relação entre os termos  $k_{tt}$  e  $k_{rr}$  que permitiu definir as funções  $f_\mu$ . Contudo, para  $A' = 0$  essa relação entre as componentes temporal e radial do  $k_{\mu\nu}$  é perdida. Ao fazer uma imersão de espaços com essas características se obtém:

$$\partial_1 k_{44} = 0 \rightarrow k_{44} = \text{constante} \quad (5.123)$$

Lembrando que a solução mais geral das equações de Codazzi descritas em (5.34) é  $k_{\mu\nu} = f_\mu g_{\mu\nu}$ <sup>4</sup> vamos escrever  $k_{44} = \lambda_0 g_{44}$ . Para resolver as equações (5.57) e (5.58), pode-se definir  $f_1 = j'(r)$  onde  $j'$  é uma função a ser determinada. Com isso, temos:

$$k_{22} = rj(r) = \frac{j}{r} g_{22} \quad (5.124)$$

$$k_{33} = r \sin^2 \theta j(r) = \frac{j}{r} g_{33} \quad (5.125)$$

As componentes do tensor deformação ficam dadas então por:

$$Q_{11} = g_{11} \left[ \frac{j}{r} \left( 2\lambda_0 + \frac{j}{r} \right) \right] \quad (5.126)$$

$$Q_{22} = g_{22} \left[ \frac{j}{r} (j'\lambda_0 + j' + \lambda_0) \right] \quad (5.127)$$

$$Q_{33} = g_{33} \left[ \frac{j}{r} (j'\lambda_0 + j' + \lambda_0) \right] \quad (5.128)$$

$$Q_{44} = g_{44} \left[ \frac{j}{r} \left( 2j' + \frac{j}{r} \right) \right] \quad (5.129)$$

---

<sup>4</sup>Temos que  $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$ , assim segue de (5.34) que podemos escrever  $k_{\mu\nu}$  como uma função escalar  $f_\mu$  multiplicando a métrica, mas não há soma em  $\mu$

Para  $A' = 0$ , as componentes das equações de Einstein resultam em:

$$T_{11}^{eff} = -r^{-2}(1 - B^{-1}) \quad (5.130)$$

$$T_{22}^{eff} = T_{33}^{eff} = \frac{1}{2} [-(rB^2)^{-1}B'] \quad (5.131)$$

$$T_{44}^{eff} = (rB^2)^{-1}B' + r^{-2}(1 - B^{-1}) \quad (5.132)$$

Somando (5.130) e (5.132) obtemos:

$$T_{11}^{eff} + T_{44}^{eff} = \frac{B'}{rB^2} \quad (5.133)$$

Usando (5.131), pode-se escrever:

$$T_{11}^{eff} + T_{44}^{eff} = -2T_{22}^{eff} \quad (5.134)$$

Considerando o caso vácuo, ( $T_{\mu\nu} = 0$ ), tem-se a seguinte relação:

$$Q_{11} + Q_{44} = -2Q_{22} \quad (5.135)$$

Logo, na base ortonormal a expressão (5.135):

$$\left[\frac{j}{r}(2\lambda_0 + \frac{j}{r})\right] - \left[\frac{j}{r}(2j' + \frac{j}{r})\right] = -2\left[\frac{j}{r}(j'\lambda_0 + j' + \lambda_0)\right]$$

que resulta após alguma manipulação algébrica:

$$j' \left(2\frac{j}{r} + \lambda_0\right) \quad (5.136)$$

Temos então dois possíveis resultados

$$j' = 0 \Rightarrow j = \text{constante} \equiv \beta_0 \quad (5.137)$$

$$\left(2\frac{j}{r} + \lambda_0\right) = 0 \Rightarrow j = -\frac{\lambda_0 r}{2} \quad (5.138)$$

A equação (5.137) implica que  $k_{rr} = 0$ . Então para manter uma análise mais geral, vamos

desenvolver a partir da (5.138). As componentes do  $Q_{\mu\nu}$  são dadas por:

$$Q_{11} = Q_{44} = Q_{22} = Q_{33} = -\frac{3\lambda_0^2}{4} \quad (5.139)$$

### A métrica

Resolvendo a expressão (5.130) para  $T_{\mu\nu}^{eff} = G^*T_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}$  com  $Q_{\mu\nu}$  dado por (5.139), obtém-se:

$$B^{-1} = u = 1 - \frac{M(r)}{r} + \frac{\lambda_0^2}{4}r^2 \quad (5.140)$$

onde novamente se tem onde  $\frac{M(r)}{r} \equiv \int_0^r G^* \rho(r') r'^2 dr'$

A métrica resultante da imersão é dada por:

$$ds^2 = -Adt^2 + \frac{1}{\left[1 - \frac{M(r)}{r} + \frac{\lambda_0^2}{4}r^2\right]} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.141)$$

Ou seja, a imersão gera uma solução do tipo Schwarzschild-anti de Sitter com  $-\frac{3\lambda_0^2}{4}$  no papel de constante cosmológica negativa. Nesse caso, impor um espaço-tempo Minkowski para  $r \rightarrow \infty$  implica em anular a constante  $\lambda_0$  e portanto perder os efeitos referentes ao processo de imersão. Assim, vamos prosseguir a análise para o caso de um espaço-tempo Schwarzschild-anti de Sitter.

### Buracos de minhoca em regiões de potencial constante

Há vários casos na literatura que tentam minimizar o uso de matéria exótica ao se considerar que a matéria esteja distribuída em finas camadas (cascas esféricas) tal que o potencial seja constante nesse espaço-tempo ( $A' = 0$ ). Um buraco de minhoca nessas condições tem um tensor de deformação descrito por (5.139). Vamos retornar a nossa atenção para o caso de um buraco de minhoca descrito na figura 2.3. Nesse cenário, na presença de uma matéria tipo fluido dada por (5.115), a condição para que o buraco de minhoca seja atravessável (2.69) diz que:

$$\rho^{eff} + p_r^{eff} = G^*(\rho(r) + p_r(r)) - \frac{3\lambda_0^2}{2} < 0 \quad (5.142)$$

Como  $\frac{3\lambda_0^2}{4}$  exerce o papel de constante cosmológica local e também se observa localmente um espaço-tempo de Schwarzschild vamos supor que  $\lambda_0^2 \propto 10^{-47}$  de forma a ser coerente com dados observados no nosso sistema solar. Interessante que abordagens como as propostas por Klebanov [30] já sugeriam que a constante cosmológica poderia ser responsável pela criação de buracos de

minhoca. A diferença é que no trabalho de Klebanov ele considerou buracos de minhoca euclidianos e aqui trabalhamos com buracos de minhoca lorentzianos.

Assim, o tensor de deformação cria nesse espaço-tempo um buraco de minhoca que em princípio seria atravessável. Segue de (5.142) que um fluido para atravessar esse buraco de minhoca teria que ser de natureza quase exótica, mas não há relatos de fluidos clássicos com esse comportamento. No caso de partículas teste atravessando o buraco de minhoca, teríamos  $p(r) = 0$ . Assim, uma partícula para atravessar o buraco de minhoca sem destruí-lo precisaria ter  $\rho(r) < \frac{3\lambda_0^2}{2}$  o que faz com que a densidade de energia da partícula seja desprezível para um observador co-móvel. Dessa forma, apesar do tensor de deformação permitir a existência de buracos de minhoca, não há uma matéria conhecida que consiga atravessá-lo sem destruir o buraco de minhoca.

Em suma, os resultados obtidos até o momento mostram que, pelo menos em princípio, a dinâmica fornecida por  $k_{\mu\nu}$  permite obter um buraco de minhoca com a garganta aberta desde que esse seja restrito a regiões onde  $A' = 0$ . Entretanto, a presença de matéria faz com que o mesmo não seja mais atravessável.

### 5.3 Resumo

O teorema de imersão de Nash permitiu descrever a gravitação de um espaço-tempo imerso em um espaço ambiente postulando-se apenas que esse espaço-tempo seja uma solução das equações de Einstein do espaço maior e que com exceção da gravitação os outros campos ficam restritos à brana. A imersão introduz no cenário da gravitação os elementos extrínsecos da geometria tal como a segunda forma fundamental (que aparece nas equações de Einstein induzidas na brana através do tensor de deformação  $Q_{\mu\nu}$ ). A conservação desse tensor (5.31) diz que os elementos extrínsecos são observáveis e portanto a curvatura extrínseca tem um papel essencial na descrição do espaço-tempo e portanto nos efeitos gravitacionais.

Além de completar a descrição da dinâmica do espaço-tempo, o teorema de Nash permite revisar alguns teoremas de imersão que limitavam a imersão no caso de um espaço ambiente com cinco dimensões. Como os teoremas usavam a equação de Einstein (2.24) sem os elementos extrínsecos, não podia-se fazer imersão de soluções de Schwarzschild em cinco dimensões. Contudo, a presença do  $Q_{\mu\nu}$  faz com que mesmo no vácuo o tensor de Ricci não seja nulo e assim os teoremas não são válidos para o processo de imersão descrito por Nash.

A imersão de uma solução esfericamente simétrica em um espaço ambiente plano mostrou que os elementos extrínsecos da geometria atuam como uma perturbação de soluções conhecidas como a Schwarzschild. Apesar de ter sido demonstrado que o tensor de deformação atua como um fluido

com densidade negativa, o  $Q_{\mu\nu}$  não constrói buracos de minhoca atravessáveis em casos gerais de espaços-tempo. Contudo, para regiões de espaço-tempo anti-de Sitter com potencial constante, o tensor de deformação viola a CEN e, portanto, nesse cenário seria possível a construção de buracos de minhoca atravessáveis com base apenas na dinâmica do  $k_{\mu\nu}$  sem ter que se recorrer a uma matéria exótica para a criação do buraco de minhoca. Mas ainda assim, a própria presença de matéria termina por destruir esse buraco de minhoca justificando assim o fato de não se observar buracos de minhoca no Universo ou mesmo em aceleradores de partículas.

Os resultados podem ser resumidos da seguinte forma:

- $A' \neq 0$

Nesse caso, as componentes  $g_{rr}$  e  $g_{tt}$  do espaço-tempo apresentam um termo perturbativo  $(c_0 + \alpha)^2$ . Para  $c_0 \neq 0$  obtém-se um espaço anti-de Sitter para  $r \rightarrow \infty$  e para  $c_0$  nulo o espaço-tempo de Minkowski é recuperado. Contudo, o tensor de deformação não age de forma a abrir garganta do buraco de minhoca.

- $A'=0$

É um caso mais restrito de espaço-tempo e possui um termo perturbativo  $\frac{\lambda_0^2}{4}r^2$ . Similarmente, para  $r \rightarrow \infty$  tem-se um anti-deSitter para  $\lambda_0 \neq 0$  ou um Minkowski para  $\lambda_0 = 0$ . Para um espaço-tempo anti-deSitter o tensor de deformação alarga a garganta permitindo assim a existência de um buraco de minhoca atravessável que, contudo, é destruído na presença de uma fonte material.

# Capítulo 6

## Conclusão e perspectivas

Várias teorias de gravitação alternativas já foram formuladas desde o nascimento da Relatividade Geral. E a conjectura de campos de matéria desconhecidos como a energia e matéria escura levou a um grande número de teorias que se propõe a modificar a Relatividade. Com exceção de teorias baseadas em modelos Branas-mundo, teorias alternativas buscam em geral modificar ou relaxar princípios da Relatividade Geral e quase nenhuma abordagem geométrica é feita apesar de na RG a geometria exercer um papel crucial.

O teorema de imersão de Nash aplicado à gravitação se destaca nesse cenário das teorias de gravitação alternativas já que pode ser entendido como uma Relatividade Geral usando uma geometria menos restritiva do que a riemanniana. Ou seja, os princípios mais fundamentais no qual se baseiam a RG continuam prevalecendo só que agora a nossa variedade quadridimensional, o espaço-tempo, é imerso em um espaço maior.

Um dos fatos mais interessantes acerca do teorema de Nash é que, além das informações a respeito da forma local da superfície serem recuperadas, mostra-se que a geometria extrínseca afeta as propriedades do espaço-tempo adicionando um tensor de deformação  $Q_{\mu\nu}$  que, por ser conservado no sentido de Noether, pode ser observado. Mais ainda, por ser um tensor conservado, as componentes de  $Q_{\mu\nu}$  podem ser interpretadas como uma energia associada a geometria. Portanto, um dos fatos demonstrados nesse trabalho é que considerar apenas as propriedades intrínsecas do espaço-tempo não fornece uma descrição completa da forma local do espaço-tempo e assim informações sobre processos gravitacionais são perdidas.

Nesse trabalho, procuramos defender a tese de que o teorema de Nash fornece uma base matemática natural para a elaboração de uma teoria gravitacional que descreva a dinâmica e a forma da geometria dos espaços-tempos imersos. Isso fica mais evidente quando se observa que boa parte dos postulados da Teoria de Branas-Mundo aparece naturalmente ao se aplicar o teorema

de imersão de Nash à gravitação.

O processo de imersão de soluções estáticas e esfericamente simétricas resultou em soluções do tipo Schwarzschild acrescidas de uma constante que atua como termo perturbativo. Para casos em que a perturbação da métrica é considerável, temos uma mudança topológica. Contudo, ao se impor a equação de Poisson para o limite de campo fraco temos que nos restringir a perturbações infinitesimais da métrica, inviabilizando assim alterar a topologia do espaço-tempo.

O teorema de Nash aplicado ao estudo do buraco de minhoca atravessável trouxe resultados interessantes. Na RG, a violação da CEN é o ingrediente fundamental de buracos de minhoca já que é essa violação que permite que a garganta do buraco de minhoca permaneça aberta. Por outro lado, o processo de imersão permitiu obter algo como uma energia de origem geométrica que pode vir a violar a CEN e assim descrever um buraco de minhoca que mantém a garganta aberta. Os resultados obtidos mostram que, para imersões em 5 dimensões em espaços planos, o buraco de minhoca atravessável como descrito por Morris e Thorne existe apenas em espaços-tempo com potencial constante. Apesar dessa restrição, não foi requerido o uso de matéria exótica para construir esse buraco de minhoca ao contrário do que é feito na literatura quando se considera buracos de minhoca no formalismo de cascas esféricas para apenas minimizar o uso de matéria exótica [7], [18]. Contudo, a presença de matéria faz com que a condição para a existência do buraco de minhoca atravessável não seja obedecida, isto é, o buraco de minhoca é automaticamente destruído. Como extensão desses resultados a trabalhos futuros, é importante estudar o caso de imersões em espaços não necessariamente planos e comparar com os resultados obtidos nesse trabalho. Dessa forma, poderia-se ter entender melhor a influência da escolha do bulk no tensor de deformação obtido. Também é interessante realizar imersão em seis dimensões de espaços-tempo esfericamente simétricos e analisar até que ponto o número de dimensões interfere no resultado. Esses procedimentos permitirão um melhor entendimento das implicações físicas do processo de imersão.

# Referências Bibliográficas

- [1] FRIEMAN, J. A.; TURNER, M.S; HUTERER, D.; arXiv:0803.0982v1 [astro-ph] (2008)
- [2] ZEL'DOVICH, Y.B; *Cosmological Constant problem and Elementary Particles*, JETP Lett. 6, 316, (1967); *Soviet Physics Uspekhi* 11, 381(1968)
- [3] SHIFMAN,M; Int.J.Mod.Phys.A25:199-225, (2010)
- [4] DAMTP, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string/one.pdf> (último acesso em 29 de agosto de 2011)
- [5] ARKANI-HAMED, N. ; DIMOPOULOS; S.; DVALI, G. Physical letters B429, 263 (1998)
- [6] EISENHART, L. P.;*Riemann Geometry* Princeton University press (1949)
- [7] MORRIS, M.S.; THORNE, K.S. Am. J. Phys. 56, 395 (1988)
- [8] HOCHBERG, D. ; VISSER, M.; Phys.Rev.Lett. 81 746-749 (1998)
- [9] COLLAS, P.; KLEIN, D.; arXiv:1107.4871v2 [gr-qc] (2011)
- [10] KRUSKAL,M. D.; Phys. Rev. 116, 1743 (1960)
- [11] FULLER, R.W. ; WHEELER, J.A; Phys Rev. 128, 919 (1962)
- [12] GIBBONS, G. W.; arXiv:1110.0611v1 [gr-qc] (2011)
- [13] MAIA, M. D.; *Geometry of the fundamental interactions* Springer (2011)
- [14] WALD, R. M.;*General Relativity*The university of Chicago Press (1984)
- [15] MISNER, C.W; THORNE, K.S; WHEELER, J.A; *Gravitation* W. H. Freeman and Company San Francisco (1973)
- [16] STUCHLIK,Z.; HLEDIK, S.; Physical Review D15 (1999)

- [17] SCHULTZ, B.F; *A first course in general relativity* Cambridge University press (1985)
- [18] LOBO, F.S.N Classical and Quantum Gravity Research, 1-78, Nova Sci. Pub. ISBN 978-1-60456-366-5 ((2008))
- [19] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large structure of spacetime* Cambridge University Press (1975)
- [20] PLANCK, M; *The theory of Heat Radiation*, 174-175, (1994)
- [21] STAFF SCIENCE, <http://staff.science.uva.nl/jdeboer/education/projects/projects/Final.pdf> (último acesso em 29 de agosto de 2011)
- [22] RANDALL, L. ; SUNDRUM, R. Phys. Rev. Lett. 83, 3370-3373 (1999)
- [23] THPHY PHYSICS, <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/MaximeGabella/rs.pdf> (último acesso em 12 de outubro de 2011)
- [24] MAARTENS, R.; Living Rev. Rel 7,7 (2004)
- [25] CAPISTRANO, A.; ODON, P. Revista brasileira de ensino de Física, v. 32 n.1,1305 (2010)
- [26] NASH, J.; The annals of Mathematics 63 , 20 (1956)
- [27] MAIA, M.D.; arxiv 08113835 v1 (2008)
- [28] SZEKERES, P.; Embedding properties of General relativistic Manifolds IL NUOVO CIMENTO A (1965-1970) v. 43, Number 4, 1062-1076,(1966)
- [29] BOYCE, W. E.; DIPRIMA R. C.; *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* John Wiley Sons, Inc.(2001)
- [30] KLEBANOV, I.; TASI, (1989)
- [31] MAIA, M.D; MONTE, E.M; MAIA, J.M.F.; Class.Quant.Grav.22:1623-1636, (2005)
- [32] HOCHBERG, D. ; VISSER, M.; Phys.Rev.Lett. 81 746-749 (1998)
- [33] DIMOPOULOS, S; LANDSBERG G.; Phys. Rev. Lett 87 :161602 (2001)
- [34] MAIA, M. D; MONTE, E. M.; arXiv:0808.2631v1[hep-th]
- [35] LOBO, F.S.N.; Phys.Rev.D75:064027,2007

- [36] EISENHART, L. P.; *Riemann Geometry* Princeton University press (1949)
- [37] SOTIRION, P.; FARAONI, V.; arxiv 08051726 v4 (2010)
- [38] MAIA, M. D.; CAPISTRANO, A. J. S.; ALCANIZ, J. S.; f, E. M.; Gen.Rel.Grav.43:2685-2700,201 (2011)
- [39] CARMELI, M.; *Classical fields: General Relativity and Gauge theory* John Wiley Sons, Inc.(1982)
- [40] VISSER, M.; *Lorentzian Wormholes- From Einstein to Hawking* Spriger- Verlag (1996)
- [41] DO CARMO, M.; *Riemannian Geometry* Birkhausser Boston (1992)
- [42] CAPISTRANO, A.; *A matéria escura como efeito não-linear da gravitação* 61p Tese (Mestrado em Física) Universidade de Brasília (2006)
- [43] MAIA, M. D.; MONTE E. M.; arXiv:astro-ph/0404370v2 (2004)
- [44] MAIA, M. D.; MONTE E. M.; Phys.Lett.A297:9-19, (2002)
- [45] SCHLEICH, K.; WITT, D. M. arXiv:gr-qc/9903061v1 (1999)
- [46] BOUSSO, R.; arXiv:hep-th/0205177v1 (2002)
- [47] OLIVEIRA, M.; arXiv:1107.2703v1 (2011)
- [48] VISSER, M.; KAR, S.; DADHICH, N.; Phys.Rev.Lett.90:201102 (2003)
- [49] STAFF SCIENCE, <http://staff.science.uva.nl/jdeboer/education/openprojects/projects/begin.pdf> (último acesso em 22 de julho de 2011)
- [50] ATLAS GOV, <http://www-atlas.lbl.gov/physics/Virzi/GaussLaw.htm> (último acesso em 22 de julho de 2011)
- [51] BRONNIKOV, K.A.; KONONOGOV, S.A.; MELNIKOV, V.N.; Gen.Rel.Grav. 38 1215-1232 (2006)
- [52] LEEPER, E.; *Dynamics of Cosmological Braneworld Models* 94p. Tese (Doutorado em Física) University of Portsmouth (2005)
- [53] BERGER, M; *A panoramic view of Riemannian Geometry* Springer (2002)

- [54] MPI-INF, <http://www.mpi-inf.mpg.de/ag4-gm/handouts/06gmsurf2.pdf> (último acesso em outubro de 2010)
- [55] MIT, <http://web.mit.edu/edbert/GR/gr5.pdf> (acesso em abril de 2011)
- [56] DEBENEDICTIS, A.; DAS, A.; *Class.Quant.Grav.* 18 1187-1204 (2001)
- [57] CAMERA, M. L., *Phys.Lett.* B573 27-32 (2003)
- [58] BRAX, F; VAN DE BRUCK, C.; *Class.Quant.Grav.*20:R201-R232 (2003)
- [59] SCHMALTZ, M.; *David Tucker-Smith Annual Rev. of Nuclear and Particle Science V. 55, Issue: 1, Pages: 229-270* (2005)
- [60] BRONSTEIN, A. M.; BRONSTEIN, M. M.; KIMMEL, R. *Lecture Notes in Computer Science*, v. 3459/2005, 622-631 (2005)
- [61] RUNDER, V.; *A taste of topology* Springer (2005)
- [62] KAR, S.; SAHDEV, D.; *Phys.Rev.* D53 722-730 (1996)
- [63] MORRIS, M. S.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U.; *Phys.Rev.Lett.*13: 1446- 1449 (1988)
- [64] HOCHBERG, D.; VISSER, M. *Phys.Rev.Lett.* 81 746-749 (1998)
- [65] BAMAH, <http://www.bamah.net/2011/06/teori-fisika-hawking-mengungkap-perjalanan-isra-rasulullah-saw/> (último acesso em 22 de agosto de 2011)
- [66] CLOMEDIUS, <http://clodimedi.us.wordpress.com/2008/02/17/topologie-cosmique-iii/> (último acesso em 15 de setembro de 2011)
- [67] ZAMANDAYOULCULUK, <http://www.zamandayolculuk.com/cetinbal/clasmecrelativity.htm> (acesso em 14 de janeiro de 2010)
- [68] MATHWORLD WOLFRAM, <http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html> (acesso em 10 de dezembro de 2010)