

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO CRÍTICO DO MÉTODO DE CONTAGEM DE  
CICLOS DE WANG & BROWN PARA A ESTIMATIVA DE  
VIDA À FADIGA MULTIAXIAL

FREDERICO ARANTES DE PAULA

ORIENTADOR: EDGAR NOBUO MAMIYA  
CO-ORIENTADOR: FÁBIO COMES DE CASTRO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM  
CIÊNCIAS MECÂNICAS

PUBLICAÇÃO: ENM.DM-167A/2012

BRASÍLIA/DF: MARÇO - 2012.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO CRÍTICO DO MÉTODO DE CONTAGEM DE  
CICLOS DE WANG & BROWN PARA A ESTIMATIVA DE  
VIDA À FADIGA MULTIAXIAL

FREDERICO ARANTES DE PAULA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:

---

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, Dr. (ENM-UnB)  
(Orientador)

---

Prof. Fábio Comes de Castro, Dr. (ENM-UnB)  
(Co-orientador)

---

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr. (ENM-UnB)  
(Examinador Interno)

---

Prof. Antônio Carlos de Oliveira Miranda, Dr. (ENC-UnB)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 15 DE MARÇO DE 2012.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO CRÍTICO DO MÉTODO DE CONTAGEM DE  
CICLOS DE WANG & BROWN PARA A ESTIMATIVA DE  
VIDA À FADIGA MULTIAXIAL

FREDERICO ARANTES DE PAULA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS MECÂNICAS.

APROVADA POR:



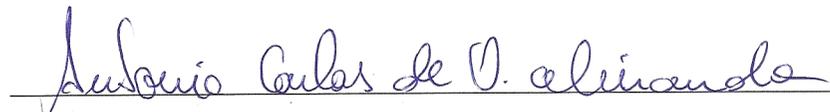
Prof. Edgar Nobuo Mamiya, Dr. (ENM-UnB)  
(Orientador)



Prof. Fábio Comes de Castro, Dr. (ENM-UnB)  
(Co-orientador)



Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, Dr. (ENM-UnB)  
(Examinador Interno)



Prof. Antônio Carlos de Oliveira Miranda, Dr. (ENC-UnB)  
(Examinador Externo)

BRASÍLIA/DF, 15 DE MARÇO DE 2012.

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

DE PAULA, FREDERICO ARANTES

Estudo crítico do método de contagem de ciclos de Wang & Brown para a estimativa de vida à fadiga multiaxial.

[Distrito Federal] 2012.

xviii, 103p., 297 mm (ENM/FT/UnB, Mestre, Ciências Mecânicas, 2012).

Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília.

Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Fadiga Multiaxial

2. Método de contagem de ciclos

I. ENM/FT/UnB

II. Título (série)

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

DE PAULA, F.A. (2012). Estudo crítico do método de contagem de ciclos de Wang & Brown para a estimativa de vida à fadiga multiaxial. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.DM-167A/2012, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 103p.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

NOME DO AUTOR: Frederico Arantes de Paula.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Estudo crítico do método de contagem de ciclos de Wang & Brown para a estimativa de vida à fadiga multiaxial.

GRAU / ANO: Mestre / 2012

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Frederico Arantes de Paula  
SMDB CJ 29 CS 03 LAGO SUL  
71.680-290 Brasília - DF - Brasil.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Edgar Nobuo Mamiya pelo incentivo, simpatia, presteza, generosidade e conhecimento sempre demonstrados no auxílio à realização das atividades e discussões necessárias ao desenvolvimento desta monografia.

Ao Prof. Fábio Comes de Castro, meu co-orientador, que sempre se empenhou para que me fossem fornecidas às condições indispensáveis ao preparo deste trabalho.

À minha família que me apoiou nos momentos difíceis ao longo deste trabalho. Especialmente às minhas tias Emely e Patrícia pela dedicação dada à organização e revisão do texto.

À CAPES pelo apoio financeiro necessário ao desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

O modelo proposto por Mamiya, Araújo e Castro para estimativa de vida à fadiga sob carregamentos multiaxiais apresenta resultados adequados para situações com amplitude de carga constante. Entretanto, a aplicação deste modelo para a previsão de vida sob condições de carregamento com amplitude variável necessita de um método de contagem de ciclos. O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo crítico da utilização do método proposto por Wang & Brown para identificação e contagem de ciclos no contexto da fadiga multiaxial. O trabalho compreendeu (i) a implementação computacional do método em linguagem Matlab, (ii) a implementação computacional, também em linguagem Matlab, de um algoritmo de simulação do comportamento elastoplástico para condições de carregamento multiaxial não proporcional do tipo tração-cisalhamento, (iii) a simulação numérica do comportamento elastoplástico correspondente e (iv) a verificação da possibilidade de associação de pares de semiciclos para a formação de ciclos relacionados aos caminhos de histerese elastoplásticos, da mesma forma que a observada no caso do método *rainflow* no contexto unidimensional. O estudo confirmou que o método de Wang & Brown é consistente com o método *rainflow* nas situações de histórias uniaxiais de carga, mostrou que o conjunto de semiciclos pode variar sob efeito de pequenas perturbações na história de carregamento e, finalmente, concluiu que nem sempre este método é capaz de definir os ciclos necessários ao cálculo das amplitudes de tensão cisalhante demandadas pelo modelo.

## ABSTRACT

The multiaxial model for fatigue life estimation proposed by Mamiya, Araújo and Castro shows suitable results for constant amplitude loading situations. However, the model's application to fatigue life prediction under variable amplitude loading requires a cycle counting method. The aim of this work is to analyze the capability of the method proposed by Wang & Brown for cycle identification and counting in the setting of multiaxial fatigue. The work includes (i) the computational implementation of the method in Matlab, (ii) the computational implementation of the algorithm in Matlab to simulate the elastoplastic behavior for multiaxial non-proportional tensile-shear loading conditions, (iii) the numerical simulation of the elastoplastic behavior and (iv) the assessment of whether each pair of semicycles (obtained by Wang & Brown method) can be related to an elastoplastic hysteresis path, as observed in the case of the *rainflow* method under one-dimensional loading. The study confirmed that the Wang & Brown's method is consistent with the *rainflow* method in uniaxial loading situations, showed that a set of semicycles can vary under the small perturbations' effect in the loading history and finally concluded that this method is not always capable to define the needed cycles for computing the shear stress amplitude demanded by the model.

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	TRABALHOS RELACIONADOS . . . . .	1
1.2	OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	3
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES E CONCEITOS PRELIMINARES</b>	<b>4</b>
2.1	FADIGA UNIAXIAL . . . . .	4
2.1.1	Descrição do processo de fadiga . . . . .	4
2.1.2	Descrição de carregamento cíclico . . . . .	6
2.1.3	Plasticidade cíclica . . . . .	7
2.1.4	Abordagem baseada em medidas de tensão . . . . .	8
2.1.5	Abordagem baseada em medidas de deformação . . . . .	10
2.1.6	Amplitude variável . . . . .	11
2.2	FADIGA MULTIAXIAL . . . . .	15
<b>3</b>	<b>O MÉTODO DE CONTAGEM DE CICLOS DE WANG &amp; BROWN</b>	<b>19</b>
3.1	DESCRIÇÃO GERAL DO MÉTODO . . . . .	19
3.2	EXEMPLO ILUSTRATIVO . . . . .	20
3.3	O ALGORITMO . . . . .	26
<b>4</b>	<b>MODELAGEM E SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELAS- TOPLÁSTICO</b>	<b>31</b>
4.1	MODELO ELASTOPLÁSTICO SOB SOLICITAÇÕES DO TIPO TRAÇÃO-CISALHAMENTO . . . . .	31
4.1.1	O estado de tensão tração-cisalhamento . . . . .	32
4.1.2	Relação tensão-deformação elástica . . . . .	33
4.1.3	O modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear . . . . .	34
4.2	APROXIMAÇÃO NUMÉRICA . . . . .	40
4.2.1	Discretização temporal . . . . .	40
4.2.2	Integração do modelo: mapeamento de retorno . . . . .	41
4.2.3	O Algoritmo . . . . .	43
4.3	EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DE APLICAÇÃO DO ALGORITMO . . . . .	46

4.3.1	Ensaio uniaxial de tração-compressão . . . . .	46
4.3.2	Ensaio uniaxial de torção alternada . . . . .	46
4.3.3	Ensaio biaxial de carregamento não proporcional . . . . .	47
<b>5</b>	<b>ESTUDO DE CASOS</b>	<b>49</b>
5.1	CARREGAMENTOS UNIAXIAIS: COMPARAÇÃO COM O ALGORITMO DE RAINFLOW SIMPLIFICADO . . . . .	49
5.2	HISTÓRIAS DE CARREGAMENTO NÃO PROPORCIONAIS . . . . .	52
5.2.1	Carregamento não proporcional, harmônico e síncrono . . . . .	53
5.2.2	Carregamento trapezoidal I . . . . .	57
5.2.3	Carregamento trapezoidal II . . . . .	59
5.2.4	Carregamento cruciforme . . . . .	61
5.2.5	Carregamento não proporcional, harmônico e assíncrono . . . . .	65
5.2.6	Carregamento retangular por partes . . . . .	68
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>79</b>
6.1	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	80
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>86</b>
<b>A</b>	<b>LISTAGEM DO ALGORITMO DE CONTAGEM DE CICLOS DE WANG &amp; BROWN</b>	<b>87</b>
A.0.1	Rotina WBmain_01_strain.m . . . . .	87
A.0.2	Subrotina equivStrain.m . . . . .	91
A.0.3	Subrotina semicycle.m . . . . .	91
<b>B</b>	<b>RELAÇÃO ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO SOB ESTADO DE TENSÃO DE TRAÇÃO-CISALHAMENTO</b>	<b>95</b>
<b>C</b>		<b>97</b>
<b>D</b>	<b>LISTAGEM DO ALGORITMO DE MAPEAMENTO DE RETORNO</b>	<b>101</b>
D.0.4	Rotina plastic_step.m . . . . .	101

## Lista de Tabelas

3.1	História da deformação não proporcional após translação no tempo. . .	21
5.1	História de deformação contida na norma ASTM E1049. [33]. . . . .	49

## Lista de Figuras

2.1	Processo de fadiga: um componente mecânico sob carregamento cíclico. Adaptada de Lee et al. [24] . . . . .	5
2.2	História de carregamento cíclico com amplitude constante. . . . .	6
2.3	Ciclo estabilizado de histerese. Adaptada de Stephens et al. [25] . . . . .	8
2.4	Diagrama típico de S-N. Adaptada de Stephens et al. [25] . . . . .	9
2.5	Diagrama esquemático de <i>deformação-vida</i> . Adaptada de Stephens et al. [25] . . . . .	11
2.6	História de carregamento com amplitude variável. . . . .	12
2.7	(a) História de carregamento com amplitude variável e (b) curva de amplitude de tensão versus números de ciclos até a falha. . . . .	12
2.8	Condições para identificar o ciclo por meio do método de <i>rainflow</i> simplificado. . . . .	13
2.9	Exemplo da contagem de <i>rainflow</i> simplificado para uma história repetida. (a) a história de carregamento com amplitude variável; (b) a história é reordenada de modo que inicie e termine com o valor máximo; (c) o primeiro ciclo <i>EFE*</i> ; (d) o segundo ciclo <i>ABA*</i> ; (e) o terceiro ciclo <i>HCH*</i> ; e (f) o quarto ciclo <i>DFD</i> . . . . .	15
2.10	Envelope prismático circunscreve uma trajetória de tensão arbitrária no espaço desviador. Adaptado de Mamiya et al. [20] . . . . .	16
2.11	Envelopes prismáticos circunscreve dois tipos de carregamento: (a) proporcional e (b) não proporcional. . . . .	17
3.1	História de carregamento não proporcional. (a) $\varepsilon_x, \gamma_{xy} \times t$ e (b) $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	21
3.2	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do primeiro semiciclo ( <i>ABB*C</i> ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	22
3.3	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do segundo semiciclo ( <i>BDD*E</i> ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	23
3.4	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do terceiro semiciclo ( <i>DF</i> ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	23
3.5	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do quarto semiciclo ( <i>FD*</i> ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	24
3.6	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do quinto semiciclo ( <i>EG</i> ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	24
3.7	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do sexto semiciclo ( <i>GH</i> ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	25

3.8	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do sétimo semiciclo ( $HB^*$ ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .	25
3.9	(a) $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$ e (b) trajetória do oitavo semiciclo ( $CA$ ) no gráfico de $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .	26
3.10	Fluxograma da rotina principal do algoritmo de Wang & Brown. . . . .	28
3.11	Fluxograma da sub-rotina para cálculo preliminar e endereçamento de semiciclos e de nova subtrajetória. . . . .	29
3.12	Fluxograma da sub-rotina para identificação de semiciclos e de nova subtrajetória. . . . .	30
4.1	Estado de tensão tração-cisalhamento. . . . .	31
4.2	Domínio elástico de origem $\beta$ para um estado de tensão tração-cisalhamento.	35
4.3	Curva idealizada descrevendo a tensão $\sigma_x$ em função da deformação plástica $\varepsilon_x^p$ em um ensaio de tração simples. . . . .	38
4.4	Fluxograma do mapeamento de retorno para carregamento do tipo tração-cisalhamento. . . . .	45
4.5	Ensaio uniaxial de tração-compressão. (a) História de carregamento e (b) resposta da simulação. . . . .	46
4.6	Ensaio uniaxial de cisalhamento puro. (a) História de carregamento e (b) resposta da simulação. . . . .	47
4.7	História de deformações: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Respostas da simulação: (b) tensão cisalhante em função da tensão normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão normal em função da deformação normal. . . . .	48
5.1	(a) Ilustração da história da deformação original e (b) laços de histerese obtidos por meio da simulação elastoplástica. . . . .	50
5.2	Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de <i>rainflow</i> simplificado. Representação do primeiro semiciclo ( $ABB^*D$ ); do terceiro semiciclo ( $DEE^*I$ ); e do ciclo ( $ADI$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico. . . . .	51
5.3	Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de <i>rainflow</i> simplificado. Representação do segundo semiciclo ( $BC$ ); do quarto semiciclo ( $CB^*$ ); e do segundo ciclo ( $BCB^*$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico. . . . .	51
5.4	Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de <i>rainflow</i> simplificado. Representação do quinto semiciclo ( $EFF^*H$ ); do sétimo semiciclo ( $HE^*$ ); e do terceiro ciclo ( $EHE^*$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico. . . . .	52

5.5	Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de <i>rainflow</i> simplificado. Representação do sexto semiciclo ( $FG$ ); do oitavo semiciclo ( $GF^*$ ); e do quarto ciclo ( $FGF^*$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico. . . . .	52
5.6	(a) Carregamento não proporcional harmônico e síncrono; (b) carregamento trapezoidal I; (c) carregamento trapezoidal II; (d) carregamento cruciforme; (e) carregamento não proporcional harmônico e assíncrono e (f) carregamento retangular por partes. . . . .	53
5.7	História de deformações $\gamma_{xy}$ e $\varepsilon_x$ descrita pelas Eq. (5.1) e (5.2) . . . .	54
5.8	Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões. . . . .	54
5.9	Amplitude de tensão em função da amplitude da deformação: curva de Ramberg-Osgood (experimental) e curva aproximada. . . . .	55
5.10	Representação do primeiro semiciclo $AB$ e do segundo $BA$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; e (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	56
5.11	Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises $\varepsilon_{eq}^{rel}$ e $\sigma_{eq}^{rel}$ . O primeiro $AB$ e o segundo $BA$ semiciclos fecham em um ciclo. . . . .	56
5.12	História de deformações em: (a) $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$ e (b) $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	57
5.13	Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões. . . . .	57
5.14	Representação do primeiro semiciclo $AB$ e do segundo $BA$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	58
5.15	Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises $\varepsilon_{eq}^{rel}$ e $\sigma_{eq}^{rel}$ . O primeiro semiciclo $AB$ e o segundo $BA$ formam um ciclo. . . . .	59
5.16	História de deformações em: (a) $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$ e (b) $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	59

5.17	Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões. . . . .	60
5.18	Representação do primeiro semiciclo $AB$ e do segundo $BA$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	61
5.19	Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises $\varepsilon_{eq}^{rel}$ e $\sigma_{eq}^{rel}$ . O primeiro semiciclo $AB$ e o segundo $BA$ formam um ciclo. . . . .	61
5.20	História de deformações em: (a) $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$ e (b) $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	62
5.21	Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões. . . . .	62
5.22	Representação do primeiro semiciclo $AB$ e do segundo $BCC^*A$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	63
5.23	Representação do terceiro semiciclo $CD$ e do quarto $DC^*$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	64
5.24	Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises $\varepsilon_{eq}^{rel}$ e $\sigma_{eq}^{rel}$ . (a) o primeiro semiciclo $AB$ e o segundo $BA$ formam-se em um ciclo e (b) o terceiro $CD$ e o quarto $DC^*$ semiciclos não se fecham em um ciclo. . . . .	65
5.25	História de deformações em: (a) $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$ e (b) $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	65
5.26	Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões. . . . .	66

5.27	Representação do terceiro semiciclo $AB$ e do quarto $BCC^*A$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	67
5.28	Representação do terceiro semiciclo $CD$ e do quarto $DC^*$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	68
5.29	Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises $\varepsilon_{eq}^{rel}$ e $\sigma_{eq}^{rel}$ . (a) o primeiro semiciclo $AB$ e o segundo $BA$ formam-se em um ciclo e (b) O terceiro $CD$ e o quarto $DC^*$ semiciclos não se fecham em um ciclo. . . . .	68
5.30	História de deformações em: (a) $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$ e (b) $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	69
5.31	Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões. . . . .	69
5.32	Representação do primeiro semiciclo $ABB^*E$ e do quarto $EFF^*A$ nas curvas (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	70
5.33	Representação do segundo semiciclo $BB^*$ e do sexto $FF^*$ nas curvas (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	71
5.34	Representação do terceiro semiciclo $CD$ , do quinto $DC$ , do sétimo $GH$ e do oitavo $HG$ nas curvas (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	72

5.35	Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises $\varepsilon_{eq}^{rel}$ e $\sigma_{eq}^{rel}$ (a) o primeiro $ABB^*E$ e o quarto $EFF^*A$ semiciclos formam um ciclo; (b) o terceiro $CD$ e o quinto $DC$ semiciclos formam um ciclo; e (c) o sétimo $GH$ e o oitavo $HG$ semiciclos compõem um ciclo. . . . .	73
5.36	História de deformações em: (a) $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$ e (b) $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ . . . . .	73
5.37	Representação do primeiro semiciclo $ABB^*F$ e do quarto $FGG^*A$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	74
5.38	Representação do segundo semiciclo $BB^*$ e do sexto $GG^*$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	75
5.39	Representação do terceiro semiciclo $CD$ , do quinto $DC$ , do sétimo $GH$ e do oitavo $HG$ nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal. . . . .	76
5.40	Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises $\varepsilon_{eq}^{rel}$ e $\sigma_{eq}^{rel}$ : (a) o primeiro $AF$ e o quarto $FA$ semiciclos formam um ciclo; (b) o terceiro $CD$ e o quinto $DE$ semiciclos formam um ciclo; e (c) o sétimo $HI$ e o oitavo $IJ$ semiciclos compõem um ciclo. . . . .	77
5.41	Cada história de carregamento é perturbada no ponto: (a) $(-0,155, -0,245)$ e (c) $(-0,155, 0,245)$ . Os resultados obtidos pelo método de Wang & Brown para cada história: (b) o primeiro caso da perturbação e (d) o segundo. . . . .	78

# LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURA E ABREVIACÕES

## Símbolos Latinos

$A$ : razão de amplitude de tensão nominal.

$\mathbb{A}$ : operador matricial.

$A, B, C, \dots$  : pontos da trajetória de deformação.

$a_{1\theta}, a_{2\theta}$ : amplitudes de tensão desviadora associada à orientação  $\theta$ .

$b$ : expoente da resistência por fadiga.

$\mathbb{C}$ : matriz de elasticidade.

$c$ : expoente da ductilidade por fadiga.

$dev(\cdot)$ : operador que transforma para o espaço desviador.

$E$ : módulo de elasticidade.

$G$ : módulo de elasticidade ao cisalhamento.

$H$ : módulo de encruamento cinemático.

$I$ : tensor identidade.

$K'$ : coeficiente de resistência cíclica.

$n$ : expoente de encruamento cíclico.

$N$ : vida à fadiga.

$N_f$ : número de ciclos até a falha.

$\bar{\mathbb{P}}$ : operador que projeta o estado de tensão no espaço das tensões desviadoras.

$\mathbb{P}$ : operador que projeta o estado de tensão no espaço das tensões desviadoras.

$R$ : razão de tensão nominal.

$s_1, s_2$ : componentes de tensão desviadora.

$S_{eq}$ : amplitude de tensão equivalente.

$S_{max}$ : tensão nominal máxima.

$S_{min}$ : tensão nominal mínima.

$S_a$ : amplitude de tensão nominal.

$S_m$ : tensão nominal média.

$S_f$ : amplitude de tensão nominal no limite de fadiga.

$\mathbf{S}$ : tensor tensão desviadora.

$t$ : instante de tempo.

$tr$ : operador do traço de um tensor.

$u$ : vetor de deslocamento.

$X$ ,  $Y$  e  $Z$ : pontos da história de carga.

## **Símbolos Gregos**

$\alpha$ : parâmetro material.

$\beta$ : parâmetro material.

$\beta$ : representa a translação do centro do domínio elástico (“*back-stress*”).

$\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$ : componentes de deformação-cisalhamento.

$\Delta S$ : faixa de tensão nominal.

$\Delta \varepsilon$ : faixa de deformação.

$\Delta \sigma$ : faixa de tensão.

$\Delta \varepsilon$ : faixa de deformação.

$\Delta \varepsilon^e$ : faixa de deformação elástica.

$\Delta \varepsilon^p$ : faixa de deformação plástica.

$\varepsilon'_f$ : coeficiente de ductilidade por fadiga.

$\varepsilon^e$ : deformação elástica.

$\varepsilon^p$ : deformação plástica.

$\varepsilon$ : deformação total.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ : tensor deformação.

$\varepsilon_{ij}$ : componentes do tensor deformação.

$\varepsilon_{ij}^{rel}$ : componentes do tensor deformação relativas ao maior valor da deformação equivalente na história.

$\varepsilon_{ij}^{max}$ : componentes do tensor deformação associadas ao maior valor da deformação equivalente na história.

$\varepsilon_{eq}$ : deformação equivalente.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ : componentes de deformação normal.

$\theta$ : orientação.

$\kappa$ : parâmetro material.

$\lambda$ : constante de Lamé.

$\mu$ : constante de Lamé.

$\bar{\nu}$ : coeficiente de Poisson efetivo.

$\nu^e$ : coeficiente de Poisson elástico.

$\nu^p$ : coeficiente de Poisson plástico.

$\xi$ : parâmetro de consistência.

$\sigma'_f$ : coeficiente de resistência por fadiga.

$\boldsymbol{\sigma}$ : tensor tensão de Cauchy.

$\sigma_{Hmax}$ : tensão hidrostática máxima.

$\sigma_0$ : tensão de escoamento.

$\tau_a$ : amplitude de tensão cisalhante.

### **Siglas**

ASTM: American Society for Testing and Materials.

PIB: Produto Interno Bruto.

# Capítulo 1 INTRODUÇÃO

No século XIX, a fadiga de estruturas foi entendida como o “efeito colateral” da revolução industrial. Era reconhecida como um fenômeno de falha decorrente de um grande número de ciclos de carga com magnitude tal que, sob condição estática, não causaria dano. Naquela época, a inexistência de sinais visíveis da deformação plástica decorrente da falha por fadiga causou estranheza e foi relacionada a fenômenos misteriosos [1].

August Wöhler introduziu a noção do limite de resistência à fadiga e conduziu estudos para relacionar o efeito dos esforços mecânicos representado pelas tensões e o número de ciclos até a falha. Melhorias substanciais no conhecimento atual sobre fadiga ocorreram na segunda metade do século XX em decorrência do desenvolvimento de laboratórios com novas bancadas experimentais, além de computadores e utilização de análise numérica. Os crescentes esforços dispendidos em pesquisa sobre fadiga estão ilustrados em numerosas publicações [1].

Nos anos 80, custos de aproximadamente 119 bilhões de dólares, equivalentes a 4% do Produto Interno Bruto (PIB) dos Estados Unidos, decorreram de falhas ou rupturas de componentes de máquinas e estruturas mecânicas, de acordo com relatório publicado pelo Departamento de Comércio daquele país [2]. Um estudo do custo associado à fadiga de materiais realizado na Europa em 1991 demonstrou que o custo total de 4% do PIB pode ser aplicado a todas as nações industrializadas [3].

Quaisquer componentes, tais como suspensão de automóveis em movimento, asas de aviões durante o voo, pontes sob tráfego intenso de máquinas e veículos, navios submetidos ao ataque de ondas, turbinas sob condição de temperatura cíclica, entre outros, estão sujeitos a histórias de tensão multiaxiais com amplitude variável durante a sua vida útil.

## 1.1 TRABALHOS RELACIONADOS

Segundo Socie e Marquis [4], para situações de carregamento multiaxial, não proporcional e de amplitude variável, é preciso trabalhar nas seguintes etapas de estimativa de

vida à fadiga: (i) modelo do comportamento cíclico e elastoplástico do material; (ii) método de identificação e contagem de ciclos; (iii) modelo do dano por fadiga; e (iv) regra de acúmulo do dano.

Na primeira etapa de análise de fadiga, todos os métodos de estimativa de vida à fadiga dependem do modelo de plasticidade para obter resposta do material a partir da história de carregamento. No presente trabalho, adotou-se o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear.

Na segunda etapa da análise, os métodos de contagem de ciclos no contexto multiaxial são utilizados para definir e contar ciclos para situações de carregamento de amplitude variável. As técnicas de contagem de ciclos encontrados na literatura são: o método de Wang & Brown [5], o método de Bannantine & Socie [6] e o método de Wang & Brown modificado pelo Meggiolaro et al. [7].

Para a terceira etapa da análise de fadiga, deve-se utilizar um modelo de dano por fadiga. Uma revisão bibliográfica deste modelo é apresentada em inúmeros trabalhos [8, 9, 4]. Os modelos podem ser subdivididos em três categorias: abordagens baseados na tensão, na deformação e na energia. Embora existam diversos modelos apresentados na literatura, aqueles associados ao conceito de planos críticos, como os propostos por Findley [10], Fatemi & Socie [11], McDiamird [12] são os mais utilizados. A principal diferença entre eles diz respeito à amplitude de tensão equivalente ou deformação equivalente que é considerada na busca do plano crítico. Mais recentemente, abordagens alternativas aos modelos de plano crítico foram propostos. Morel [13] apresentou um modelo de estimativa de vida baseado na evolução de uma variável do dano mesoscópico (deformações plásticas acumuladas no nível de grão). O modelo proposto por Papadopoulos [14] considera uma amplitude de tensão cisalhante geral definida como a média volumétrica da amplitude de tensão cisalhante sobre todos planos materiais e direções de deslizamento. Freitas, Li e Santos [15] e também Cristofori, Susmel e Tovo [16] formularam modelos de estimativa de vida baseados na definição de medidas de amplitudes de tensão cisalhante obtidas por meio da projeção da trajetória de tensão no espaço desviador. No presente trabalho, o modelo de Mamiya, Araújo e Castro [17, 18, 19, 20], que procura outra forma de medir a amplitude de tensão cisalhante, é apresentado de forma sumária no Capítulo 2.

O trabalho de estimativa de vida à fadiga sob carregamentos multiaxiais proposto por Mamiya, Araújo e Castro [17, 18, 19, 20] apresenta resultados adequados para situações

com amplitude de carregamento constante. O próximo passo consiste na tentativa de extensão deste modelo para a previsão de vida sob condições de carregamento com amplitude variável. Neste contexto, necessita-se de uma ferramenta de contagem de ciclos. Entre as opções disponíveis na literatura, considerou-se, no presente trabalho, o método proposto por Wang & Brown [5]. Embora este método tenha sido originariamente desenvolvido para a contagem de semiciclos, a presente dissertação visa avaliar a capacidade de utilizar tal ferramenta para contabilizar ciclos. Nos capítulos que se seguem, será visto que nem sempre é possível construir ciclos a partir de uma simples associação de semiciclos, a motivação do método *rainflow* uniaxial. Além disso, os resultados apresentados nesta monografia ilustrarão a interferência de pequenas perturbações na história de deformação nos semiciclos obtidos pelo método.

Na quarta etapa da análise, o dano por fadiga deve ser acumulado para cada ciclo na história de carregamento. Para este fim, foi utilizada a regra de dano proposta por Palmgren e Miner [21, 22], a mais usada devido a sua simplicidade. No final, a vida à fadiga é estimada ao completar todas as etapas da análise.

## 1.2 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo crítico da utilização do método proposto por Wang & Brown para identificação e contagem de ciclos no contexto da fadiga multiaxial. De uma forma geral, desenvolveu-se um algoritmo para aplicação das regras do método de Wang & Brown na tentativa de estabelecer uma associação entre os semiciclos do método e os laços de histerese mediante a modelagem do comportamento elastoplástico.

Para atingir esse objetivo, a presente monografia está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, são apresentados os conceitos preliminares e definições; no capítulo 3, a descrição e o algoritmo do método de contagem de “ciclos” de Wang & Brown; no capítulo 4 são apresentadas a modelagem e a simulação do comportamento elastoplástico; no capítulo 5, as ferramentas desenvolvidas nos capítulos 3 e 4 dão suporte à realização de alguns estudos de aplicação do método de contagem de ciclos de Wang & Brown; e as conclusões resultantes da análise realizada e as recomendações para trabalhos futuros são encontradas no capítulo 6.

## Capítulo 2 DEFINIÇÕES E CONCEITOS PRELIMINARES

Os conceitos de fadiga uniaxial e suas abordagens por medidas de tensão e deformação são, inicialmente, apresentados neste capítulo. Em seguida, discorre-se a respeito de ensaios sob carregamento de amplitude variável e o método *rainflow* simplificado. Por último, apresenta-se o modelo proposto por Mamiya, Araújo e Castro [17, 18, 19, 20] para estimativa de vida à fadiga multiaxial e o conceito de proporcionalidade.

### 2.1 FADIGA UNIAXIAL

O termo *fadiga*, segundo a terminologia ASTM E1823 [23], é definido como um processo em que mudanças progressivas e localizadas de natureza irreversível ocorrem no material sujeito a tensões ou deformações flutuantes. Estes esforços podem resultar em trincas ou na falha completa do componente ou estrutura.

#### 2.1.1 Descrição do processo de fadiga

De maneira geral, observa-se que o processo de fadiga envolve as seguintes fases: (i) nucleação de microtrinca, (ii) crescimento de microtrinca, (iii) crescimento de macrotrinca, e (iv) fratura final. As trincas têm início no plano de cisalhamento local em/próximo a concentrações de tensão de magnitude alta, tais como bandas de escorregamento persistentes, inclusões, porosidade, ou descontinuidades metalúrgicas. O plano de cisalhamento local normalmente ocorre na superfície do componente ou dentro dos contornos de grão. A nucleação de trinca é o primeiro passo no processo da fadiga. Uma vez ocorrida a nucleação e mantido o carregamento cíclico, a trinca tende a crescer ao longo do plano de máxima tensão cisalhante e através do contorno de grão [24].

Uma representação gráfica do processo do dano por fadiga mostra que a nucleação de trincas inicia em uma região de concentração de tensão de nível alto em bandas de escorregamento persistentes (Fig. 2.1). Em seguida, no processo da fadiga, tem-se o estágio de crescimento da trinca dividido em crescimento da trinca no *Estágio I* e crescimento da trinca no *Estágio II*. A nucleação e o estágio I do crescimento da trinca

são geralmente considerados como propagação inicial de microtrincas até o tamanho finito da ordem de dois grãos sobre o plano de máxima tensão cisalhante local. Neste estágio, na ponta da trinca, a plasticidade é enormemente afetada pelas características de escorregamento, pelo tamanho dos grãos, pela orientação dos planos cristalográficos e pelo nível de tensão devido ao tamanho da trinca ser comparável à microestrutura do material. O crescimento da trinca no estágio II refere-se à propagação de macrotrinca normal ao plano de tensão principal globalmente e na direção de máxima tensão cisalhante localmente. Neste estágio, as características da macrotrinca são menos afetadas pelas propriedades da microestrutura em relação a trinca do estágio I uma vez que a zona plástica em torno da ponta da trinca para o estágio II é muito maior que a microestrutura do material [24].

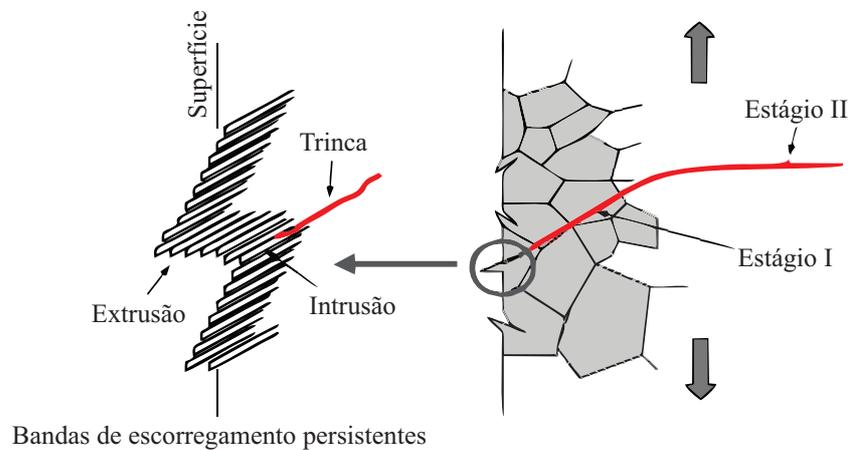


Figura 2.1: Processo de fadiga: um componente mecânico sob carregamento cíclico. Adaptada de Lee et al. [24]

Em aplicações de Engenharia, a quantidade de vida de um componente gasta na nucleação de microtrinca e no crescimento da microtrinca é normalmente denominada de *período de formação da trinca*, enquanto que a vida do componente gasta durante o crescimento de macrotrinca é chamada de *período da propagação da trinca* [25].

### 2.1.2 Descrição de carregamento cíclico

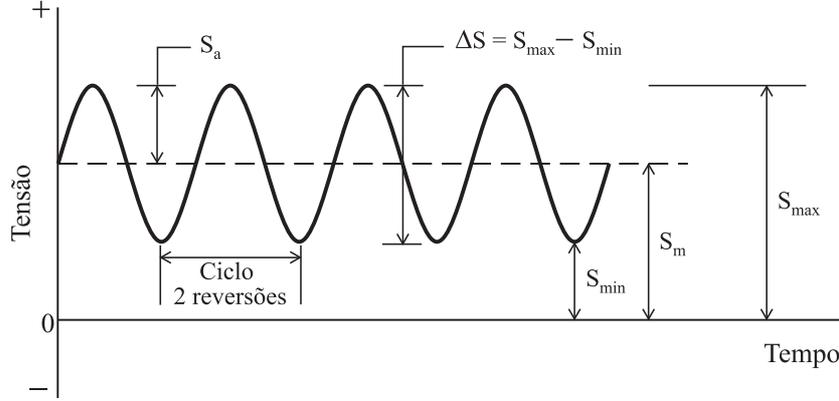


Figura 2.2: História de carregamento cíclico com amplitude constante.

Os ensaios de fadiga sob amplitude constante são usados para a obtenção de propriedades materiais que serão fornecidas como parâmetros de projetos de fadiga. Considera-se a fadiga no contexto de carregamento periódico com amplitude constante, conforme ilustrado na Fig. 2.2. São definidas as seguintes quantidades:

$$\Delta S = S_{max} - S_{min}, \quad (2.1)$$

$$S_a = \frac{\Delta S}{2}, \quad (2.2)$$

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2}, \quad (2.3)$$

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}}, \quad (2.4)$$

$$A = \frac{1 - R}{1 + R}, \quad (2.5)$$

onde a diferença  $\Delta S$  é a *faixa de tensão*,  $S_a$  é a *amplitude de tensão*,  $S_m$  é a *tensão média*,  $R$  é a *razão de tensão* e  $A$ , a *razão de amplitude*. O termo *carregamento cíclico completamente reversível* é usado para descrever uma situação de  $S_m = 0$ , ou  $R = -1$ . Também, o termo *carregamento cíclico do tipo zero-a-tração* refere-se a casos de  $S_{min} = 0$ , ou  $R = 0$ . Como a definição de um ciclo não é clara sob carregamento de amplitude variável, as reversões (ou *semiciclos*) são frequentemente consideradas. Em carregamento de amplitude constante, um ciclo equivale a duas reversões enquanto em carregamento de amplitude variável um ciclo pode ter várias reversões. Definições análogas às grandezas anteriores podem ser adotadas em situações de deformações controladas.

### 2.1.3 Plasticidade cíclica

A resposta dos metais quando sujeitos a carregamentos cíclicos pode ser bastante diferenciada do seu comportamento para ensaios monotônicos uma vez que o efeito de Bauschinger está presente na plasticidade cíclica [25]. Por exemplo, para carregamentos tração-compressão durante o encruamento em tração, o efeito se manifesta amolecendo o material sob compressão — a resistência do escoamento é reduzida na direção do carregamento compressivo. Assim, ao longo dos ciclos, podem ocorrer os comportamentos descritos a seguir:

1. **Amolecimento cíclico:** em tensões controladas, a faixa de deformação  $\Delta\varepsilon$  aumenta e para deformações controladas,  $\Delta\sigma$  diminui.
2. **Encruamento cíclico:** em tensões controladas, a faixa de deformação  $\Delta\varepsilon$  diminui e para deformações controladas,  $\Delta\sigma$  aumenta.
3. **Acomodação:** situação que se manifesta em tensões controladas onde a variação de  $\Delta\varepsilon^p$  é nula. Trata-se da estabilização de um processo de amolecimento ou encruamento cíclico, tal que a deformação plástica permanece constante. Se  $\Delta\varepsilon^p$  estabiliza com valor zero, a acomodação é dita elástica; caso contrário ela é plástica.
4. **Fluência cíclica:** em tensões controladas não-simétricas ( $R \neq -1$ ), a magnitude do escoamento trativo (compressivo) é maior que a do escoamento compressivo (trativo). Desta forma, a variação da faixa  $\Delta\varepsilon^p$  é sempre positiva.

No contexto de corpos metálicos submetidos à plasticidade cíclica, um ciclo estabilizado de tensão-deformação é mostrado na Fig. 2.3. O gráfico evidencia que a faixa de deformação total  $\Delta\varepsilon$  é a soma das deformações plástica  $\Delta\varepsilon_p$  e elástica  $\Delta\varepsilon_e$ . Como a rigidez elástica  $E$  fica preservada, então  $\Delta\varepsilon_e = \Delta\sigma/E$ . Por definição,

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p = \frac{\Delta\sigma}{E} + \Delta\varepsilon^p. \quad (2.6)$$

A relação entre a amplitude de tensão  $\Delta\sigma/2$  e a amplitude de deformação plástica  $\Delta\varepsilon^p/2$  pode ser obtida pela seguinte equação:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = K' \left( \frac{\Delta\varepsilon^p}{2} \right)^n, \quad (2.7)$$

onde  $K'$  e  $n$  são coeficiente de resistência cíclica e expoente de encruamento cíclico respectivamente. Substituindo a amplitude de deformação plástica obtida da Eq. (2.7)

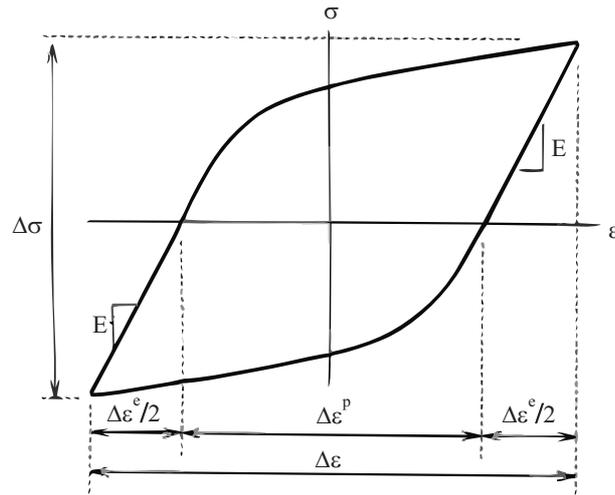


Figura 2.3: Ciclo estabilizado de histerese. Adaptada de Stephens et al. [25]

na Eq. (2.6), resulta-se na equação de tensão-deformação representada pela *relação de Ramberg-Osgood* [26]:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta\sigma}{2K'} \right)^{1/n}. \quad (2.8)$$

A vida de um componente é composta pelo número de ciclos necessários à formação da trinca (estágio I) e àquele necessário à propagação até a ruptura (estágio II), como ilustrado na Fig. 2.1. A previsão do número de ciclos necessários à formação da trinca pode ser modelada por meio das abordagens *tensão-vida* ( $S-N$ ) e *deformação-vida* ( $\varepsilon-N$ ). Já o número de ciclos necessários à propagação da trinca até a ruptura da estrutura pode ser modelado por meio dos princípios da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Considera-se que danos estruturais ocorrem com a nucleação das primeiras macrotrincas. Portanto, foge ao escopo deste trabalho aprofundar assuntos de fadiga via Mecânica da Fratura Linear Elástica.

#### 2.1.4 Abordagem baseada em medidas de tensão

Esta abordagem é uma maneira rápida e prática de serem apresentados resultados de ensaios para fadiga que podem ser observados por meio da curva tensão versus o número de ciclos, também conhecida como curva  $S-N$  ou curva de Wöhler, onde  $S$  representa a amplitude de tensão aplicada e  $N$  indica o número de ciclos para a iniciação de uma macrotrinca por fadiga.

A obtenção da curva  $S-N$  segue as diretrizes da norma ASTM E466 [27]. Aços e alguns

outros materiais podem apresentar um limite de fadiga —  $S_f$  — bem definido tal que, para solicitações  $S_a$  menores que o limite  $S_f$ , os esforços tendem a não causar dano à peça. Deste modo, é possível projetar, então, componentes para a vida infinita. Por exemplo, o limite de fadiga para os aços é definido em torno de  $10^6$  ou  $10^7$  ciclos, como mostra na Fig. 2.4. Mas alguns materiais, como alumínio, podem não apresentar este limite bem definido.

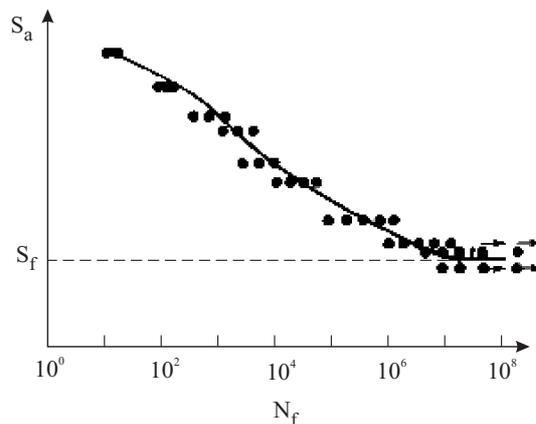


Figura 2.4: Diagrama típico de S-N. Adaptada de Stephens et al. [25]

Em 1910, Basquin [28] estabeleceu que os dados  $(S, N)$  podem ser relacionados linearmente em escala *log-log*. A relação é descrita pela seguinte expressão

$$S_a = \alpha N_f^\beta, \quad (2.9)$$

onde  $S_a$  é amplitude de tensão,  $N_f$  é o *número de ciclos até a falha*,  $\alpha$  e  $\beta$  são os *parâmetros materiais* que podem ser obtidos empiricamente por meio de ajuste dos dados do material utilizado. Dada uma amplitude de tensão, a curva de Basquin pode ser usada para a estimar a vida  $N_f$ .

Explicitamente, nenhum método de fadiga reconhece a presença das trincas. Em princípio, o método *S-N* só deve ser usado para evitar ou prever a formação de trincas por fadiga quando as tensões atuantes no ponto crítico da peça são menores do que a resistência ao escoamento cíclico do material, as quais são associadas a vidas longas. Para vidas curtas, as solicitações envolvidas podem estar acompanhadas de deformações plásticas — responsáveis pela degradação por fadiga — que não são quantificadas por meio dos níveis de tensão observados. Nestas condições, o método *S-N* não descreve corretamente o comportamento à fadiga do material e conseqüentemente uma modelagem baseada na deformação se faz necessária [29].

### 2.1.5 Abordagem baseada em medidas de deformação

No regime de fadiga de baixo número de ciclos com níveis altos de tensão, a resposta cíclica tensão-deformação e o comportamento material são melhores modelados sob condições de deformação controlada. Recentemente, as pesquisas de fadiga mostraram que o dano é dependente da deformação plástica. Na abordagem  $\varepsilon$ - $N$ , a deformação plástica é diretamente medida e quantificada [29]. Como discutido na seção anterior, a abordagem  $S$ - $N$  não considera a deformação plástica. Em vidas longas, onde a deformação plástica é desprezível, a tensão e a deformação são facilmente relacionadas, as abordagens  $S$ - $N$  e  $\varepsilon$ - $N$  são essencialmente equivalentes.

Coffin [30] e Manson [31] descobriram que a amplitude de deformação plástica  $\varepsilon^p$  é proporcional aos números de ciclos até sua falha  $N_f$  na escala *log-log*. Então, a amplitude da deformação plástica é relacionada com o número de ciclos por meio da expressão:

$$\frac{\Delta\varepsilon^p}{2} = \varepsilon'_f(2N_f)^c, \quad (2.10)$$

onde  $\Delta\varepsilon^p/2$  é amplitude da deformação plástica,  $2N_f$  é o número de reversões até a falha,  $\varepsilon'_f$  é o coeficiente da ductilidade por fadiga e  $c$  é o expoente da ductilidade por fadiga.

A expressão que relaciona a faixa de deformação total  $\Delta\varepsilon$  com o número de ciclos até a falha  $N_f$  pode ser desenvolvida. Como mostrado na Seção 2.1.3 com referência à Eq. (2.6), a deformação total é a soma das deformações elástica e plástica. Em termos de amplitude de deformação,

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon^e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon^p}{2}. \quad (2.11)$$

A parte elástica pode ser reescrita como

$$\frac{\Delta\varepsilon^e}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E}. \quad (2.12)$$

Usando a Eq. (2.9) e as constantes de ajuste  $\alpha = (2)^b\sigma'_f$  e  $\beta = b$ ,

$$\frac{\Delta\varepsilon^e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N_f)^b, \quad (2.13)$$

onde  $\sigma'_f$  é o coeficiente de resistência por fadiga e  $b$ , o expoente de resistência por fadiga.

A parte plástica é determinada por meio da Eq. (2.10). Portanto, a deformação total pode ser reescrita em termos da vida até a falha:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E}(2N_f)^b + \varepsilon'_f(2N_f)^c. \quad (2.14)$$

A Equação (2.14), a base do método *deformação-vida*, está ilustrada na Fig. 2.5. Ressalta-se que as relações elástica e plástica são ambas linhas retas na escala *log-log*, e a amplitude de deformação total  $\Delta\varepsilon/2$  é representada pela linha curva. Em níveis altos de amplitude da deformação, a curva deformação-vida aproxima-se da linha plástica, e, em níveis baixos da amplitude, a curva aproxima-se da linha elástica.

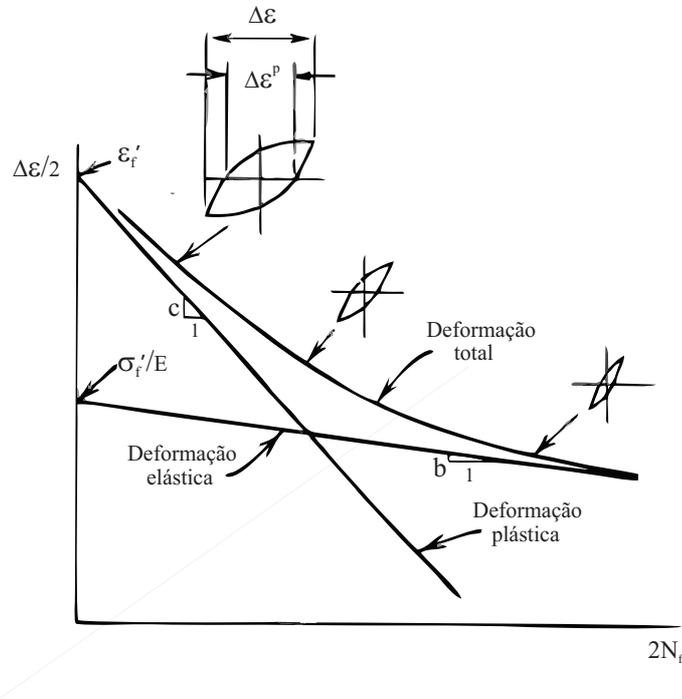


Figura 2.5: Diagrama esquemático de *deformação-vida*. Adaptada de Stephens et al. [25]

### 2.1.6 Amplitude variável

Por meio das abordagens  $S-N$  e  $\varepsilon-N$ , a vida à fadiga  $N_f$  poderia ser obtida com base nos dados de fadiga produzidos pelos ensaios sob carregamento de amplitude constante. Mas, em situações práticas, os componentes de máquinas são submetidos a amplitudes de tensão ou deformação que mudam de forma irregular, como ilustrado na Fig. 2.6.

Considere-se uma situação simples de carregamento de amplitude variável, como a mostrada na Fig. 2.7. Uma determinada amplitude de tensão  $S_{a1}$  é aplicada para um certo número de ciclos  $n_1$  e  $N_{f1}$  sendo o número de ciclos até a falha obtido por meio de análise da curva  $S-N$ . A fração da vida utilizada é, então,  $n_1/N_{f1}$ . É aplicada outra amplitude de tensão  $S_{a2}$ , correspondente a  $N_{f2}$  na curva  $S-N$ , para  $n_2$ . A fração da vida  $n_2/N_{f2}$  adicional é então utilizada. A regra de *Palmgren-Miner* [21, 22] estabelece que falha por fadiga é esperada quando as frações da vida somam-se em uma unidade,

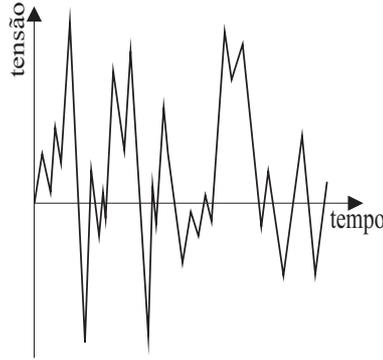


Figura 2.6: História de carregamento com amplitude variável.

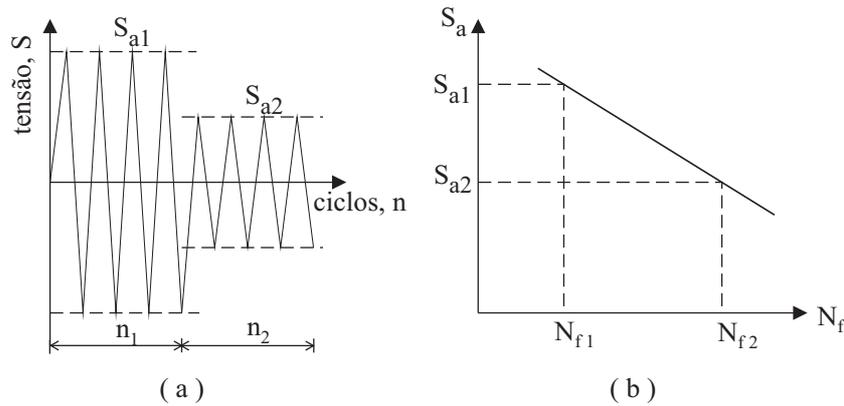


Figura 2.7: (a) História de carregamento com amplitude variável e (b) curva de amplitude de tensão versus números de ciclos até a falha.

ou seja, quando 100% da vida é esgotada [25]:

$$\frac{n_1}{N_{f1}} + \frac{n_2}{N_{f2}} + \frac{n_3}{N_{f3}} + \dots = \sum_i \frac{n_i}{N_{fi}} = 1. \quad (2.15)$$

Tendo em vista que na aplicação desta regra em carregamentos de amplitude variável mais complexos não fica óbvio como os eventos individuais devem ser isolados e definidos como ciclos, foram propostas várias técnicas de contagem de ciclos. Entretanto, um consenso surgiu, considerando como a melhor a técnica denominada *rainflow*, desenvolvida pelos Prof. T. Endo e seus colegas no Japão, 1968 [32].

#### 2.1.6.1 *Rainflow* Simplificado

O *rainflow* simplificado é um método de contagem de ciclos utilizado para solicitações unidimensionais. Segundo Endo [32], um ciclo definido pelo *rainflow* pode ser associado a um ciclo de histerese. O algoritmo de *rainflow* simplificado, descrito na norma

ASTM E1049 [33], utiliza três pontos consecutivos em uma história de carregamento de amplitude variável para determinar se ocorre a formação de um ciclo. O critério de identificação do ciclo é ilustrado na Fig. 2.8. Uma combinação de pontos  $X, Y, Z$  é con-

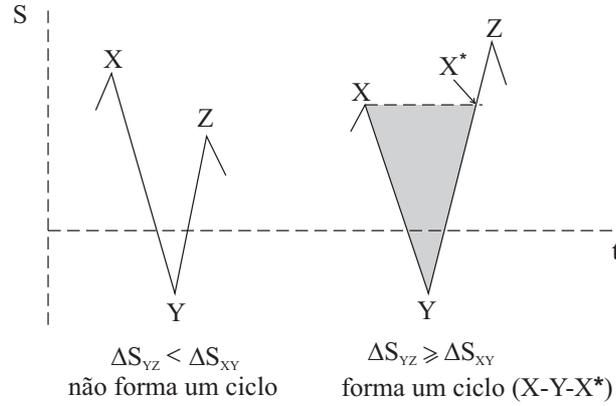


Figura 2.8: Condições para identificar o ciclo por meio do método de *rainflow* simplificado.

siderada para identificar um ciclo nos casos em que a segunda faixa,  $\Delta S_{YZ} = S_Y - S_Z$ , é maior ou igual à primeira faixa,  $\Delta S_{XY} = S_X - S_Y$ . De fato, se a segunda faixa é maior ou igual à primeira, então os pontos  $(X, Y, X^*)$  definem o ciclo ( $\Delta S_{XY}$ ).

O procedimento do método *rainflow* simplificado é descrito a seguir com o uso do exemplo da Fig. 2.9. Assume-se que a história de deformação é aplicada repetidamente. Dessa forma, é conveniente rearranjar a história de modo que sempre inicie no pico máximo  $D$ . Para isso, os pontos  $A, B$  e  $C$  são deslocados para o fim da história. As Figuras 2.9 (a) e (b) ilustram este processo. Detalhes da contagem de ciclos são descritos a seguir:

1.  $D, E$  e  $F$  são os três primeiros pontos em análise. A primeira faixa  $\Delta \varepsilon_{DE}$  e a segunda faixa  $\Delta \varepsilon_{EF}$  são definidas. Tem-se a desigualdade  $|\Delta \varepsilon_{EF}| < |\Delta \varepsilon_{DE}|$ , isso significa que um ciclo não é identificado. Portanto, o algoritmo avança para o próximo ponto consecutivo,  $G$ .
2.  $E, F$  e  $G$  são os pontos em análise. Em módulo, a segunda faixa  $\Delta \varepsilon_{FG}$  é maior que  $\Delta \varepsilon_{EF}$ . Assim, o ciclo é identificado pelos pontos  $(E, F, E^*)$ . O algoritmo armazena esta informação, a descarta da história e avança para o próximo ponto,  $H$ . Fig. 2.9 (c).
3. Na análise dos pontos  $D, G$  e  $H$ , tem-se a desigualdade  $|\Delta \varepsilon_{GH}| < |\Delta \varepsilon_{DG}|$ . Assim não se identifica um ciclo. O algoritmo avança para o próximo ponto,  $A$ .

4. Analisando-se os pontos  $G$ ,  $H$  e  $A$  tem-se também a desigualdade,  $|\Delta\varepsilon_{HA}| < |\Delta\varepsilon_{GH}|$ . Assim não se identifica um ciclo. O algoritmo avança para o próximo ponto,  $B$ .
5. Na análise dos pontos  $H$ ,  $A$  e  $B$ , tem-se a desigualdade  $|\Delta\varepsilon_{AB}| < |\Delta\varepsilon_{HA}|$ . Assim, não se identifica um ciclo. O algoritmo avança para o próximo ponto,  $C$ .
6.  $A$ ,  $B$  e  $C$  são agora os pontos em análise e  $|\Delta\varepsilon_{BC}| > |\Delta\varepsilon_{AB}|$ . Os pontos  $(A, B, A^*)$  definem um ciclo, como ilustra a Fig. 2.9 (d). Assim esses pontos são descartados da história e o algoritmo retorna aos pontos  $G$  e  $H$ .
7. Com os pontos  $G$ ,  $H$  e  $C$  em análise tem-se a desigualdade  $|\Delta\varepsilon_{HC}| < |\Delta\varepsilon_{GH}|$ . Assim não se identifica um ciclo. O algoritmo avança para o próximo ponto,  $D$ .
8.  $H$ ,  $C$  e  $D$  são os pontos em análise. Em módulo, a segunda faixa  $\Delta\varepsilon_{CD}$  é maior que  $\Delta\varepsilon_{HC}$ . Assim, é identificado o ciclo pelos pontos  $(H, C, H^*)$ . O algoritmo armazena essa informação e a descarta da história, restando apenas os pontos  $D$ ,  $G$  a serem contados. Fig. 2.9 (e).
9.  $D$ ,  $C$  e  $D$  são os pontos em análise e  $|\Delta\varepsilon_{CD}| > |\Delta\varepsilon_{DC}|$ . Os pontos  $(D, C, D)$  definem um ciclo, como ilustra a Fig. 2.9 (f). Esses pontos são descartados da história.
10. Como não há pontos a serem processados. Fim da contagem.

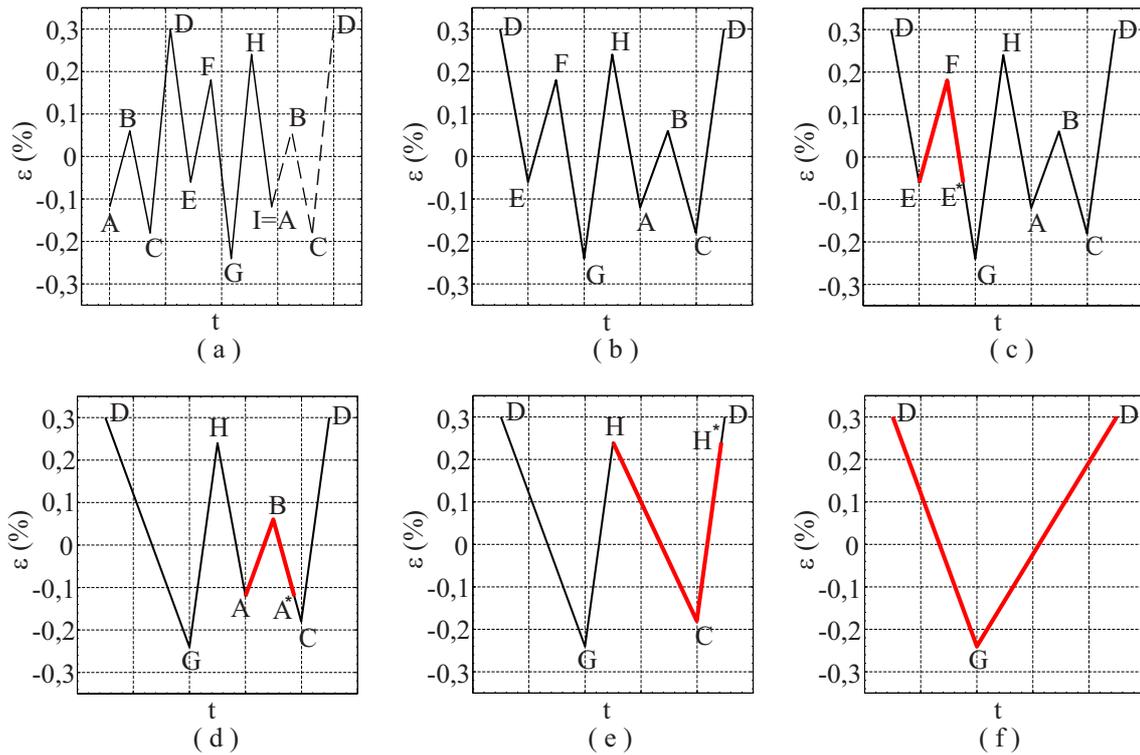


Figura 2.9: Exemplo da contagem de *rainflow* simplificado para uma história repetida. (a) a história de carregamento com amplitude variável; (b) a história é reordenada de modo que inicie e termine com o valor máximo; (c) o primeiro ciclo  $EFE^*$ ; (d) o segundo ciclo  $ABA^*$ ; (e) o terceiro ciclo  $HCH^*$ ; e (f) o quarto ciclo  $DFD$ .

## 2.2 FADIGA MULTIAXIAL

Na seção anterior, foi apresentada a fadiga no contexto de carregamentos uniaxiais. Contudo, em muitas situações, não é possível assumir que o carregamento imposto seja uniaxial e, nestas condições, é necessário o uso de métodos apropriados de caracterização das solicitações e das medidas de dano relativas à fadiga multiaxial.

O conceito de proporcionalidade originado no contexto de fadiga multiaxial tem sido associado ao mecanismo de dano que resulta no encruamento adicional em vários materiais. Este encruamento suplementar em materiais policristalinos consiste na mudança da microestrutura causada pelas deformações plásticas cíclicas ao longo das bandas de escorregamento [4]. Um carregamento é dito proporcional se sua trajetória no espaço de tensões (ou de deformações) define uma linha reta que passa pela origem deste espaço. Neste contexto, toda a história de carregamento que não possa ser classificada como proporcional será denominada, no presente texto, como sendo não proporcional.

Para a compreensão de suas características básicas, uma versão mais simples do modelo de estimativa de vida à fadiga proposto por Mamiya, Araújo e Castro [17, 18, 19, 20] é

apresentado neste trabalho. O modelo considera duas quantidades como controladoras do processo de fadiga: a amplitude de tensão cisalhante e a tensão hidrostática. Assim, reescreve-se, de forma geral, a Eq. (2.9) de Basquin como:

$$S_{eq}(\tau_a, \sigma_{Hmax}) = f(N_f), \quad (2.16)$$

onde  $S_{eq}$  é a amplitude de tensão equivalente para histórias de tensão multiaxial. Neste modelo, considera-se que a sollicitação à fadiga seja uma função de uma medida de amplitude de tensão cisalhante  $\tau_a$  e da tensão hidrostática máxima  $\sigma_{Hmax}$ . O termo  $f(N_f)$  representa uma função de números de ciclos até falha.

A principal característica do modelo de Mamiya, Araújo e Castro é a definição da medida da amplitude de tensão cisalhante  $\tau_a$ , conforme detalhada a seguir: a história de carregamento descrita por meio do mapeamento do tensor de tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  ao longo do tempo  $t$  é inicialmente decomposta aditivamente em uma parcela hidrostática  $\sigma_H(t)$  e outra desviadora  $\mathbf{S}(t)$ .

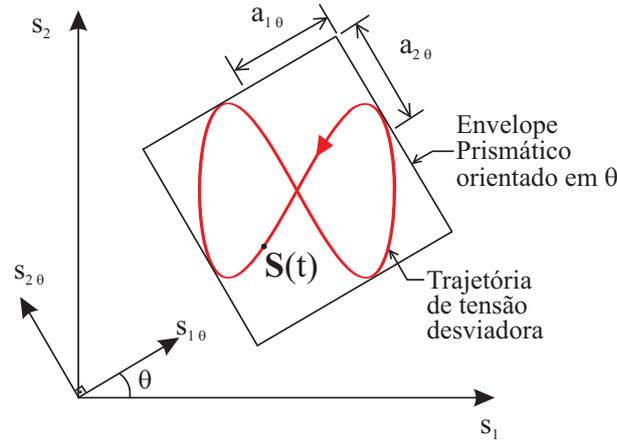


Figura 2.10: Envelope prismático circunscreve uma trajetória de tensão arbitrária no espaço desviador. Adaptado de Mamiya et al. [20]

Para efeito de simplicidade, apresenta-se a definição de  $\tau_a$  no contexto de histórias de carregamentos que podem ser descritas, no espaço das tensões desviadoras, por duas componentes  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$ , conforme é ilustrado na Fig. 2.10.

Como primeiro passo, a trajetória  $\mathbf{S}(t)$  é circunscrita por um envelope retangular com orientação qualquer  $\theta$ . Aos lados do retângulo assim definido associam-se amplitudes  $a_{1\theta}$  e  $a_{2\theta}$  ao longo das suas direções  $s_{1\theta}$  e  $s_{2\theta}$ :

$$a_{1\theta} = \frac{1}{2} \left( \max_t s_{1\theta}(t) - \min_t s_{1\theta}(t) \right), \quad a_{2\theta} = \frac{1}{2} \left( \max_t s_{2\theta}(t) - \min_t s_{2\theta}(t) \right). \quad (2.17)$$

A partir destas quantidades  $a_{1\theta}$  e  $a_{2\theta}$ , define-se a *amplitude de tensão cisalhante*  $\tau_a(\theta)$  associada à orientação  $\theta$ :

$$\tau_a(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_{1\theta}^2 + a_{2\theta}^2}. \quad (2.18)$$

Finalmente, a amplitude de tensão cisalhante  $\tau_a$  é definida como o valor máximo obtido na Eq.(2.17) entre todas orientações  $\theta$ :

$$\tau_a := \max_{0 \leq \theta < 90^\circ} \tau_a(\theta). \quad (2.19)$$

Uma importante característica desta definição é ser capaz de distinguir o efeito sobre a resistência de fadiga entre as histórias proporcionais e não proporcionais. A Fig. 2.11 apresenta, por exemplo, dois tipos de carregamento: proporcional e não proporcional de mesma magnitude. Nestes exemplos, a medida  $\tau_a$  para o caso proporcional — calculada de acordo com a expressão (2.18) — é igual a 1, enquanto que para o não proporcional é igual a 1,41, quantificando-se assim a não proporcionalidade do segundo carregamento. De acordo com os resultados apresentados em [17, 18, 19, 20], o modelo resultante consegue estimar a vida à fadiga de alto ciclo para um espectro bastante amplo de histórias de carregamento multiaxiais periódicas proporcionais e não proporcionais.

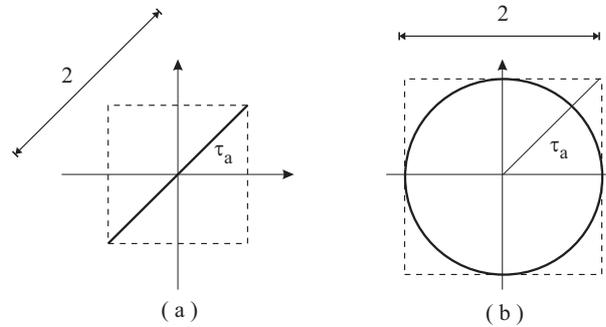


Figura 2.11: Envelopes prismáticos circunscreve dois tipos de carregamento: (a) proporcional e (b) não proporcional.

O próximo passo no desenvolvimento deste modelo é sua extensão para situações envolvendo carregamentos multiaxiais com amplitude variável. Uma abordagem possível seria empregar o método de Wang & Brown para a identificação e a contagem de ciclos, e, em seguida, medir a amplitude destes utilizando a Eq. (2.19).

Entretanto, conforme exposição no próximo capítulo, o método de contagem proposto por Wang & Brown [5] identifica **semiciclos**, que nem sempre podem ser associados

entre si de forma a definir **ciclos**, necessários ao cálculo das amplitudes de tensão. Neste contexto, uma das motivações do presente trabalho consiste no estudo da capacidade de utilizar os semiciclos identificados pelo método de Wang & Brown para formar ciclos.

## Capítulo 3 O MÉTODO DE CONTAGEM DE CICLOS DE WANG & BROWN

Este capítulo apresenta uma descrição do método de contagem de ciclos de Wang & Brown, um exemplo ilustrativo de sua aplicação e, por fim, o seu algoritmo. Tem por finalidade fornecer os fundamentos necessários a uma análise do funcionamento do método em questão.

### 3.1 DESCRIÇÃO GERAL DO MÉTODO

Wang & Brown [5] — mais referências podem ser encontradas em [34, 35, 36, 37] — propuseram uma generalização do algoritmo de *rainflow* para o contexto multiaxial que é aplicável para qualquer histórias de deformação proporcionais ou não proporcionais. O *rainflow* multiaxial de Wang & Brown é um método de contagem de semiciclos baseado em deformação equivalente de von Mises como uma medida indireta do dano por fadiga [7]:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \bar{\nu})} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}[\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2]} \quad (3.1)$$

onde  $\varepsilon_{eq}$  é a deformação equivalente,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  são as componentes da deformação normal, enquanto  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são as componentes da deformação-cisalhamento, e  $\bar{\nu}$ , o coeficiente de Poisson efetivo, que é a média ponderada entre os coeficientes elástico  $\nu^e$  e plástico  $\nu^p$  (normalmente igual a 0,5) dependendo do quão a deformação total  $\varepsilon$  depende para parte elástica  $\varepsilon^e$  ou para parte plástica  $\varepsilon^p$ :

$$\bar{\nu} = \frac{\nu^e \varepsilon^e + \nu^p \varepsilon^p}{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

O problema com a utilização de  $\varepsilon_{eq}$  de Mises é a perda do sinal do carregamento uma vez que os valores de  $\varepsilon_{eq}$  são sempre positivos. Por exemplo, para histórias com fora-de-fase em  $90^\circ$ , pode ocorrer que a deformação de Mises  $\varepsilon_{eq}$  permaneça constante, o que resultaria erroneamente em uma previsão de vida infinita [7]. Para resolver essa limitação, Wang & Brown propuseram modificar a história de deformações utilizando a deformação *relativa* equivalente de Mises  $\varepsilon_{eq}^{rel}$ , que é calculada pela diferença entre as componentes da deformação ( $\varepsilon_x(j), \varepsilon_y(j), \varepsilon_z(j), \gamma_{xy}(j), \gamma_{xz}(j), \gamma_{yz}(j)$ ) para cada ponto ( $j$ -ésimo) na história e as componentes da deformação ( $\varepsilon_x(i), \varepsilon_y(i), \varepsilon_z(i), \gamma_{xy}(i), \gamma_{xz}(i), \gamma_{yz}(i)$ )

do ponto de referência (i-ésimo) na atual contagem:

$$\varepsilon_{eq}^{rel} = \frac{\sqrt{(\Delta\varepsilon_x - \Delta\varepsilon_y)^2 + (\Delta\varepsilon_y - \Delta\varepsilon_z)^2 + (\Delta\varepsilon_z - \Delta\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}[\Delta\gamma_{xy}^2 + \Delta\gamma_{yz}^2 + \Delta\gamma_{xz}^2]}}{\sqrt{2}(1 + \bar{\nu})} \quad (3.3)$$

onde  $\Delta\varepsilon_x = \varepsilon_x(j) - \varepsilon_x(i)$ ,  $\Delta\varepsilon_y = \varepsilon_y(j) - \varepsilon_y(i)$ ,  $\Delta\varepsilon_z = \varepsilon_z(j) - \varepsilon_z(i)$ ,  $\Delta\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(j) - \gamma_{xy}(i)$ ,  $\Delta\gamma_{xz} = \gamma_{xz}(j) - \gamma_{xz}(i)$ ,  $\Delta\gamma_{yz} = \gamma_{yz}(j) - \gamma_{yz}(i)$ , e  $j > i$ .

O semiciclo é definido quando a deformação equivalente relativa cresce do zero ao máximo. Este método conta semiciclos e os descarta da história de deformações. A cada descarte, um novo ponto de referência é definido para a nova contagem, a deformação relativa de Mises (3.3) é recalculada e o processo continua até todos os semiciclos serem contados. Como no caso uniaxial, o *rainflow* multiaxial de Wang & Brown é baseado nas três regras simples [7]:

1. A primeira contagem deve iniciar no ponto com o maior valor de  $\varepsilon_{eq}$  da história inteira.
2. Cada contagem deve ser iniciada sequencialmente em cada ponto de uma componente da deformação, e a deformação relativa de Mises  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  da história remanescente deve ser computada com relação ao ponto original.
3. O ponto final de cada contagem é obtida quando atinge:
  - (a) o maior valor de  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  em relação ao ponto de origem da história, ou
  - (b) qualquer trecho utilizado em uma contagem anterior.

O funcionamento do método será explicado e descrito na próxima seção utilizando um exemplo de história de deformação proposto por Wang & Brown no artigo [5].

### 3.2 EXEMPLO ILUSTRATIVO

Na história de carregamento não proporcional  $(\varepsilon_x(t), \gamma_{xy}(t))$  descrita na Tab. 3.1 e ilustrada nas Figs. 3.1 (a) e (b), o algoritmo de Wang & Brown, inicialmente, calcula a deformação equivalente segundo a Eq. (3.1) para cada instante. Note-se que o valor 0,4 foi assumido para o coeficiente de Poisson efetivo  $\bar{\nu}$  como sugere Socie [4] uma vez que ele relata que mudando o valor do  $\bar{\nu}$ , terá pequeno efeito para o método de contagem de ciclos. Em seguida, o método procura o valor máximo da deformação equivalente.

Finalmente, o algoritmo translada no tempo a história para que a história tenha início e termine com o valor máximo, como se vê na Fig. 3.1 (a) e observe que a história já está transladada. A Figura 3.1 (b) representa a trajetória da história em termos das deformações.

Tabela 3.1: História da deformação não proporcional após translação no tempo.

t (s)	$\varepsilon_x$ (%)	$\gamma_{xy}$ (%)	$\varepsilon_{eq}(3.1)$
0	1	1,4	1,123
1	-1	0	0,714
2	0,8	0,7	0,717
3	0	1,4	0,866
4	1	-0,7	0,835
5	-0,6	0	0,429
6	0	-0,7	0,433
7	-1	-1,4	1,123
8	1	1,4	1,123

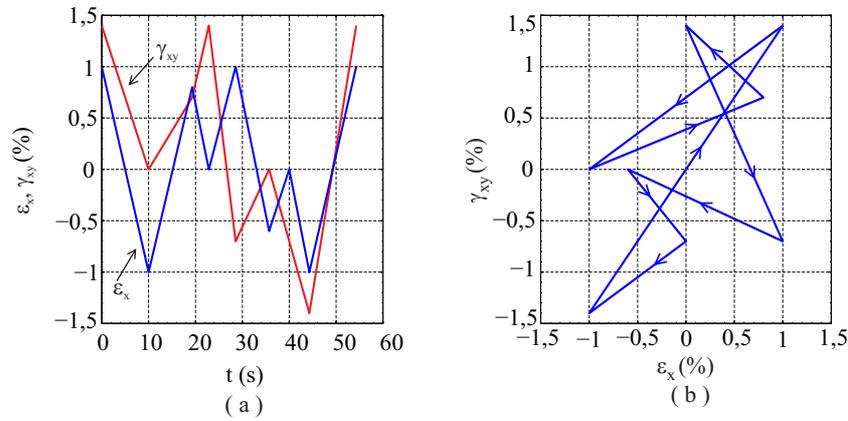


Figura 3.1: História de carregamento não proporcional. (a)  $\varepsilon_x, \gamma_{xy} \times t$  e (b)  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

Com a história transladada, o primeiro ponto é tomado como o ponto de referência para o início da contagem de semiciclos. Antes de iniciar a contagem, a história é modificada ao utilizar a Eq. (3.3) para cada instante em relação a esse ponto de referência. Em seguida, o algoritmo recalcula a nova história segundo a Eq. (3.1). O resultado mostra a história de deformação equivalente relativa ao ponto A na Fig. 3.2 (a).

Segundo a Fig. 3.2 (a), a deformação equivalente relativa cresce do ponto A até o ponto C, que é o máximo da história. No meio do caminho, há uma definição do

ponto intermediário  $B^*$  quando, a partir do ponto  $B$ , o ponto instantâneo começa a se aproximar do ponto  $A$ . Nesse momento, o algoritmo procura o próximo ponto de mesma magnitude do ponto  $B$ , que é o ponto  $B^*$ . Assim, o semiciclo é construído pelo trecho  $ABB^*C$ , que é descartado da história, vide a Fig. 3.2 (b). Nesse processo, restaram duas partes não-contadas: os trechos  $BB^*$  e  $CA$ .

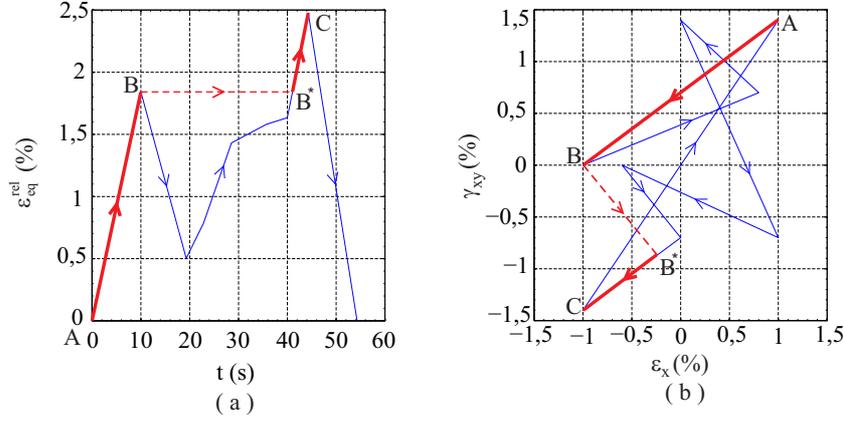


Figura 3.2: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do primeiro semiciclo ( $ABB^*C$ ) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

O trecho  $BB^*$  deverá ser processado. Como é uma nova contagem, o algoritmo irá definir o ponto  $B$  como novo ponto de referência. Assim, é computada a nova história de deformação equivalente relativa ao ponto  $B$ , ilustrada na Fig. 3.3 (a). A deformação equivalente relativa cresce do ponto  $B$  até o máximo (ponto  $E$ ). Há também uma nova definição do ponto intermediário  $D^*$ , uma vez que o ponto instantâneo, a partir do ponto  $D$ , começa a se aproximar do ponto  $B$ . Logo, o algoritmo procura o próximo ponto de mesmo nível do ponto  $D$ , assim é definido o ponto intermediário  $D^*$ . A contagem do segundo semiciclo encerra-se no ponto máximo  $E$ , com o semiciclo sendo formado pelo caminho  $BDD^*E$ , cujos valores são descartados da história. Duas partes (trechos  $DD^*$  e  $EB^*$ ), que não entraram na contagem, deverão ser consideradas no próximo passo.

Existem três trechos  $CA$  da primeira contagem e  $DD^*$  e  $EB^*$  da segunda que não foram processados no momento. O trecho  $DD^*$  é escolhido para a próxima contagem. O ponto  $D$  é definido pelo algoritmo como um novo ponto de referência. A história de deformação equivalente relativa ao ponto  $D$  é novamente recalculada utilizando a Eq. (3.1). O resultado é ilustrado na Fig. 3.4 (a). O terceiro semiciclo é construído quando a deformação equivalente relativa cresce do ponto  $D$  até o ponto  $F$ , que é o mais distante do ponto  $D$ . Nesta contagem, não ocorreu uma nova definição do ponto intermediário, uma vez que o ponto instantâneo só se afasta do ponto  $D$  até o ponto  $F$ . Como mostrado nas Figs. 3.4 (a) e (b), o semiciclo é composto pelo caminho  $DF$

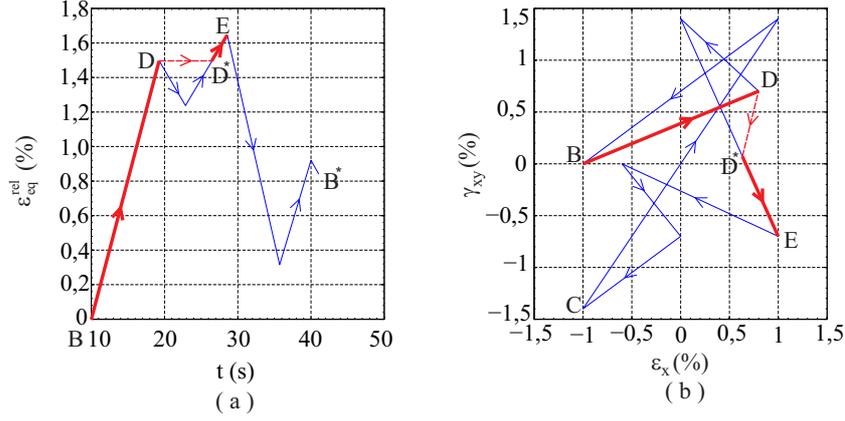


Figura 3.3: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do segundo semiciclo ( $BDD^*E$ ) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

e seus valores são descartados da história. A parte ( $FD^*$ ), que não foi considerada na contagem, deverá ser processada no próximo passo.

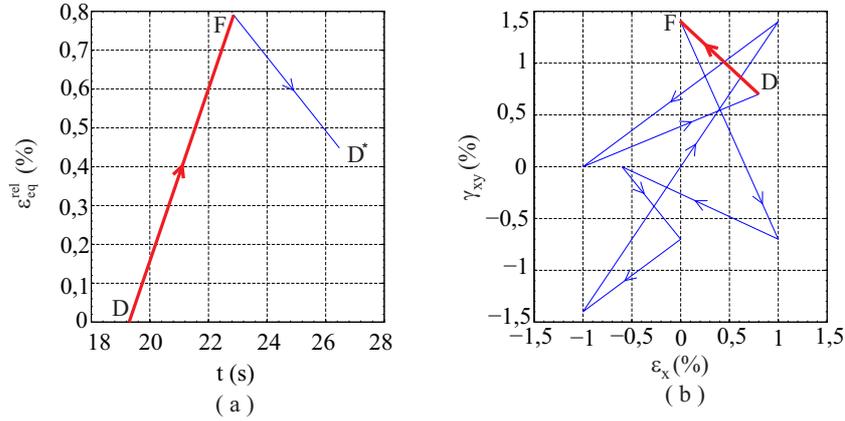


Figura 3.4: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do terceiro semiciclo ( $DF$ ) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$

Ainda existem três trechos não processados  $CA$ , da primeira contagem,  $EB^*$ , da segunda, e  $FD^*$ , da terceira contagem, sendo o caminho  $FD^*$  adotado para a próxima contagem. O novo ponto de referência é, então, definido para o ponto  $F$ . A nova história de deformação equivalente relativa calculada em relação ao ponto  $F$  está ilustrada na Fig. 3.5 (a). O quarto semiciclo é considerado quando a deformação equivalente relativa cresce do ponto  $F$  ao máximo (ponto  $D^*$ ). O semiciclo é composto pelo trecho  $FD^*$ , ilustrado nas Figs. 3.5 (a) e (b). Assim, a contagem é encerrada.

Neste momento, restam dois trechos  $CA$ , da primeira contagem, e  $EB^*$ , da segunda. No trecho  $EB^*$ , o novo ponto de referência é definido para o ponto  $E$ . A nova história de deformação equivalente relativa ao ponto  $E$ , calculada segundo a Eq. (3.1), está ilustrada na Fig. 3.6 (a). O quinto semiciclo, construído de acordo com a variação

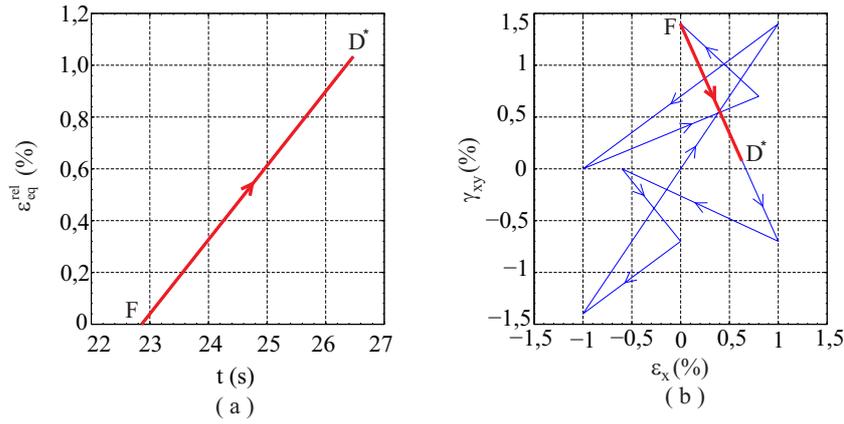


Figura 3.5: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do quarto semiciclo ( $FD^*$ ) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

da deformação equivalente relativa, é composto pelo trecho  $EG$  que é ilustrado em ambas Figs. 3.6 (a) e (b). O algoritmo desconsiderou o trecho  $GB^*$  uma vez que a contagem do semiciclo foi encerrada no ponto  $G$ . Assim, essa parte não contada deverá ser processada no próximo passo.

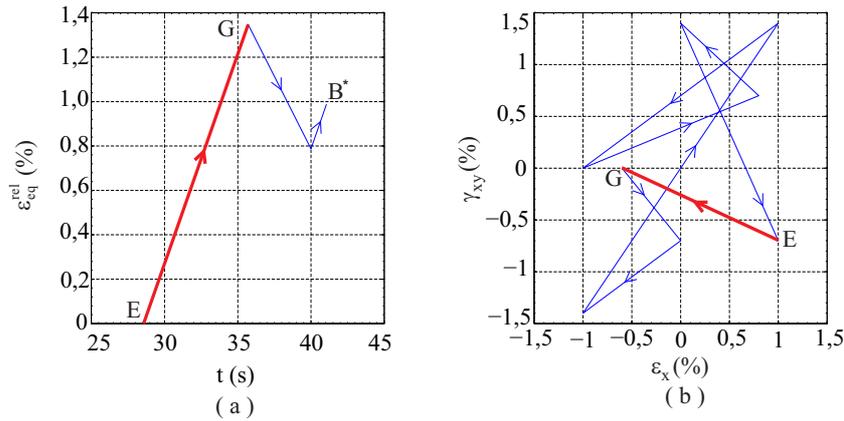


Figura 3.6: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do quinto semiciclo ( $EG$ ) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$

Novamente, ainda existem dois trechos não processados pelo algoritmo:  $CA$ , da primeira contagem, e  $GB^*$ , da quinta. Considere o trecho  $GB^*$ , onde o ponto  $G$  é definido como o ponto de referência. Assim, a história de deformação equivalente relativa é computada em relação ao ponto  $G$ . O resultado é ilustrado na Fig. 3.7 (a). O caminho  $GH$  forma o sexto semiciclo uma vez que a deformação equivalente relativa cresce do ponto  $G$  até o ponto  $H$ , que é o máximo da história. O semiciclo é ilustrado em ambas Figs. 3.7 (a) e (b). Restando ainda a parte  $HB^*$  a ser contada no próximo passo.

No momento, faltam dois trechos,  $CA$  e  $HB^*$ , para o processamento. O ponto  $H$  é definido como o novo ponto de referência. Assim, a história de deformação equivalente

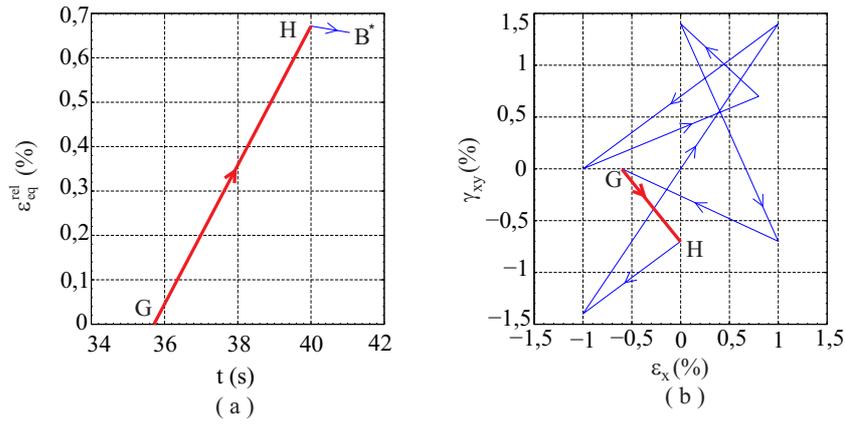


Figura 3.7: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do sexto semiciclo ( $GH$ ) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

relativa ao ponto  $H$  calculada é ilustrada na Fig. 3.8 (a). O sétimo semiciclo é formado pelo caminho  $HB^*$ , mostrado em ambas Figs. 3.8 (a) e (b).

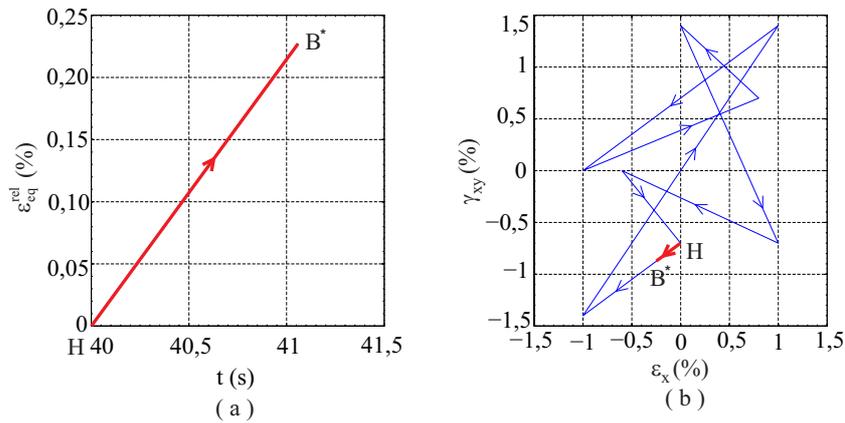


Figura 3.8: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do sétimo semiciclo ( $HB^*$ ) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

A última parte ainda não contada  $CA$  será processada finalmente. É definido o ponto  $C$  como o novo ponto de referência. Então, é computada a história de deformação equivalente relativa ao ponto  $C$ , com o resultado ilustrado na Fig. 3.9 (a). O oitavo semiciclo identificado quando a deformação equivalente relativa cresce do ponto  $C$  até o ponto  $A$ , mostrado nas Figs. 3.9 (a) e (b).

Como todos os pontos da história foram contabilizados, o algoritmo é encerrado. Ao todo, foram contados oito semiciclos para a história de carregamento não proporcional.

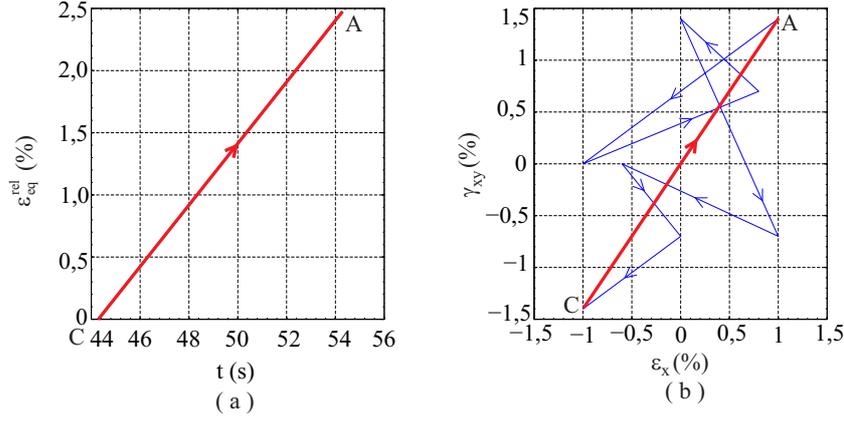


Figura 3.9: (a)  $\varepsilon_{eq}^{rel} \times t$  e (b) trajetória do oitavo semiciclo (CA) no gráfico de  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

### 3.3 O ALGORITMO

O algoritmo de contagem de semiciclos de Wang & Brown, implementado em linguagem de programação - MATLAB, vide listagem no apêndice A, é dado por:

Conhecida a história de deformação  $(\varepsilon_x(t(n_t)), \gamma_{xy}(t(n_t)))$ , onde  $n$  representa o número total de pontos para cada contagem, ou seja,  $i < j \leq n_t$ :

1. Calcule a história de deformação equivalente

$$\varepsilon_{eq}(t(j)) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \bar{\nu})} \sqrt{2\varepsilon_x^2(t(j)) + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2(t(j))}. \quad (3.4)$$

2. Encontre o valor máximo  $\varepsilon_{eq}$  da história da deformação.
3. Faça translação no tempo de forma que o primeiro instante e o último instante da nova história contenham o maior valor  $\varepsilon_{eq}$ .
4. Atribua o primeiro instante da nova história de deformações como o ponto de referência.
5. Calcule a história da deformação relativa ao ponto de referência  $(\varepsilon_x(i), \gamma_{xy}(i))$

$$\Delta\varepsilon_x(t(j)) = \varepsilon_x(t(j)) - \varepsilon_x(i), \quad (3.5)$$

$$\Delta\gamma_{xy}(t(j)) = \gamma_{xy}(t(j)) - \gamma_{xy}(i). \quad (3.6)$$

6. Calcule a história da deformação equivalente relativa

$$\varepsilon_{eq}^{rel}(t(j)) = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \bar{\nu})} \sqrt{2(\Delta\varepsilon_x(t(j)))^2 + \frac{3}{2}(\Delta\gamma_{xy}(t(j)))^2}. \quad (3.7)$$

7. Um semiciclo é identificado quando a variável  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  cresce de zero ao máximo.

(a) Se ocorrer decréscimo,  $\varepsilon_{eq}^{rel}(t(j+1)) < \varepsilon_{eq}^{rel}(t(j))$ , então define-se o ponto intermediário  $\varepsilon_{eq}^{rel}(t(int))$ :

Interpolação das variáveis em  $t(j+1)$  e  $t(j+2)$

$$\varepsilon_{eq}^{rel}(t(int)) = \varepsilon_{eq}^{rel}(t(j)), \quad (3.8)$$

$$t(j+1) < t(int) < t(j+2), \quad (3.9)$$

$$a = \frac{\varepsilon_{eq}^{rel}(t(int)) - \varepsilon_{eq}^{rel}(t(j+1))}{\varepsilon_{eq}^{rel}(t(j+2)) - \varepsilon_{eq}^{rel}(t(j+1))}, \quad (3.10)$$

$$t(int) = (1-a)t(j+1) + at(j+2). \quad (3.11)$$

8. Descarte o semiciclo contado. Se existir qualquer ciclo restante, volte ao passo 4. Se não, vá ao passo seguinte.

9. Encerre a contagem.

O fluxograma do método de Wang & Brown para identificação e contagem de ciclos é apresentado nas Figs. 3.10, 3.11 e 3.12. A rotina principal do algoritmo é apresentado na Fig. 3.10. A sub-rotina, que trabalha por meio de cálculo preliminar e de endereçamento de semiciclos e de nova subtrajetória — trajetória remanescente após o descarte do semiciclo da história de deformações —, é apresentada na Fig. 3.11. Enfim, a Fig. 3.12 apresenta a sub-rotina que trabalha na identificação de semiciclos e de nova subtrajetória dentro da sub-rotina anterior.

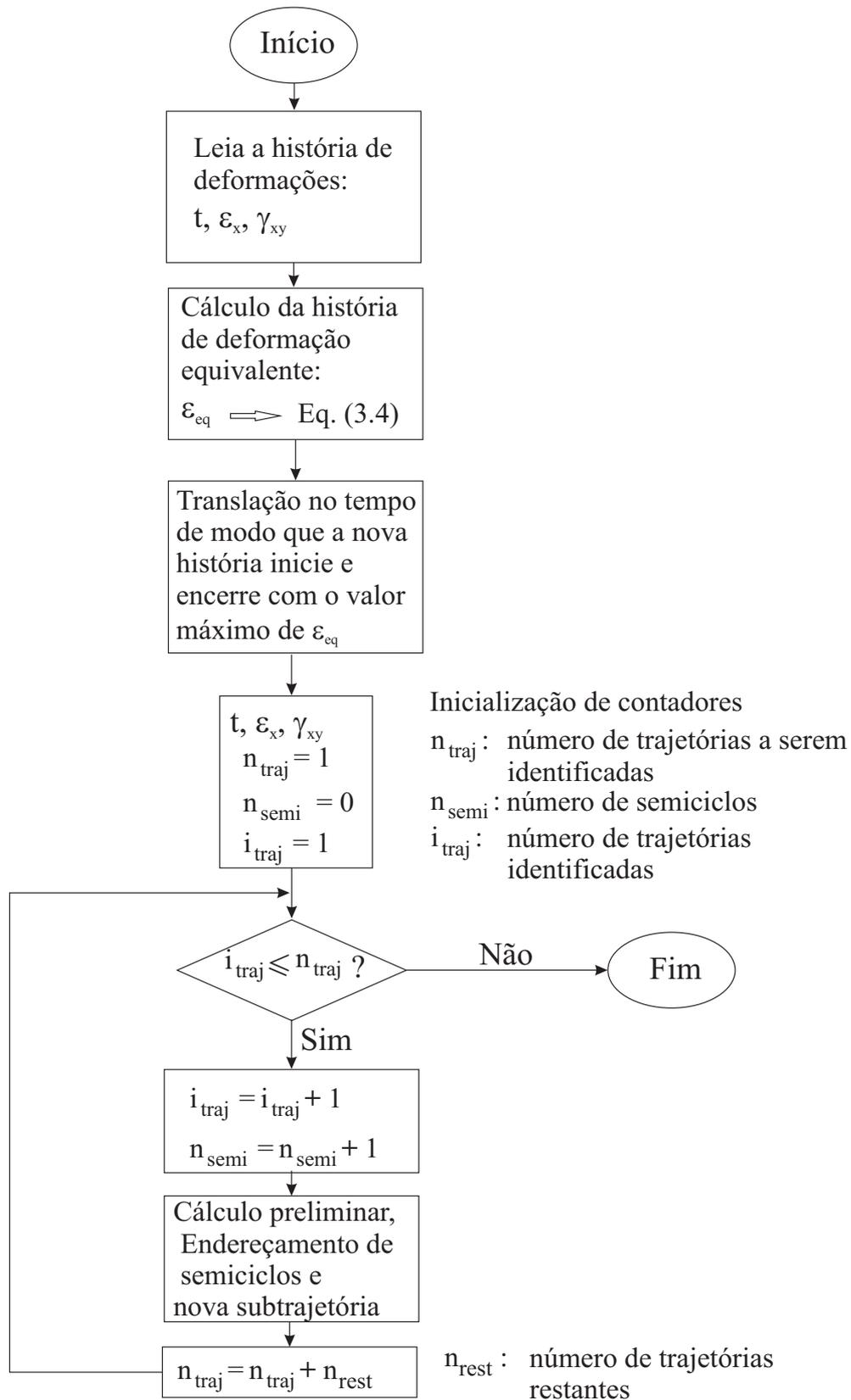


Figura 3.10: Fluxograma da rotina principal do algoritmo de Wang & Brown.

Subrotina: Cálculo preliminar, Endereçamento de semiciclos e nova subtrajetória

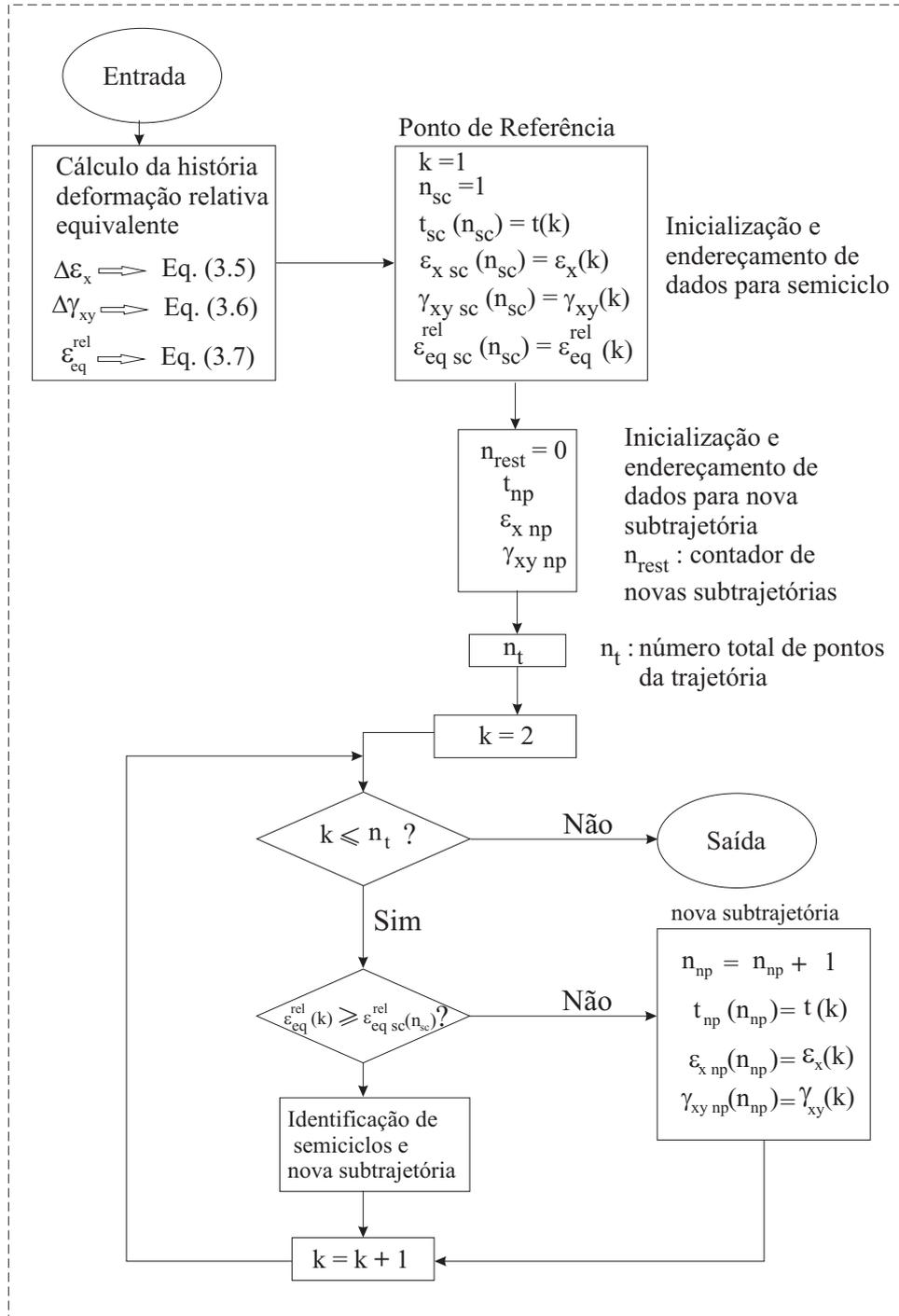


Figura 3.11: Fluxograma da sub-rotina para cálculo preliminar e endereçamento de semiciclos e de nova subtrajetória.

### Subrotina: Identificação de semiciclos e nova subtrajetória

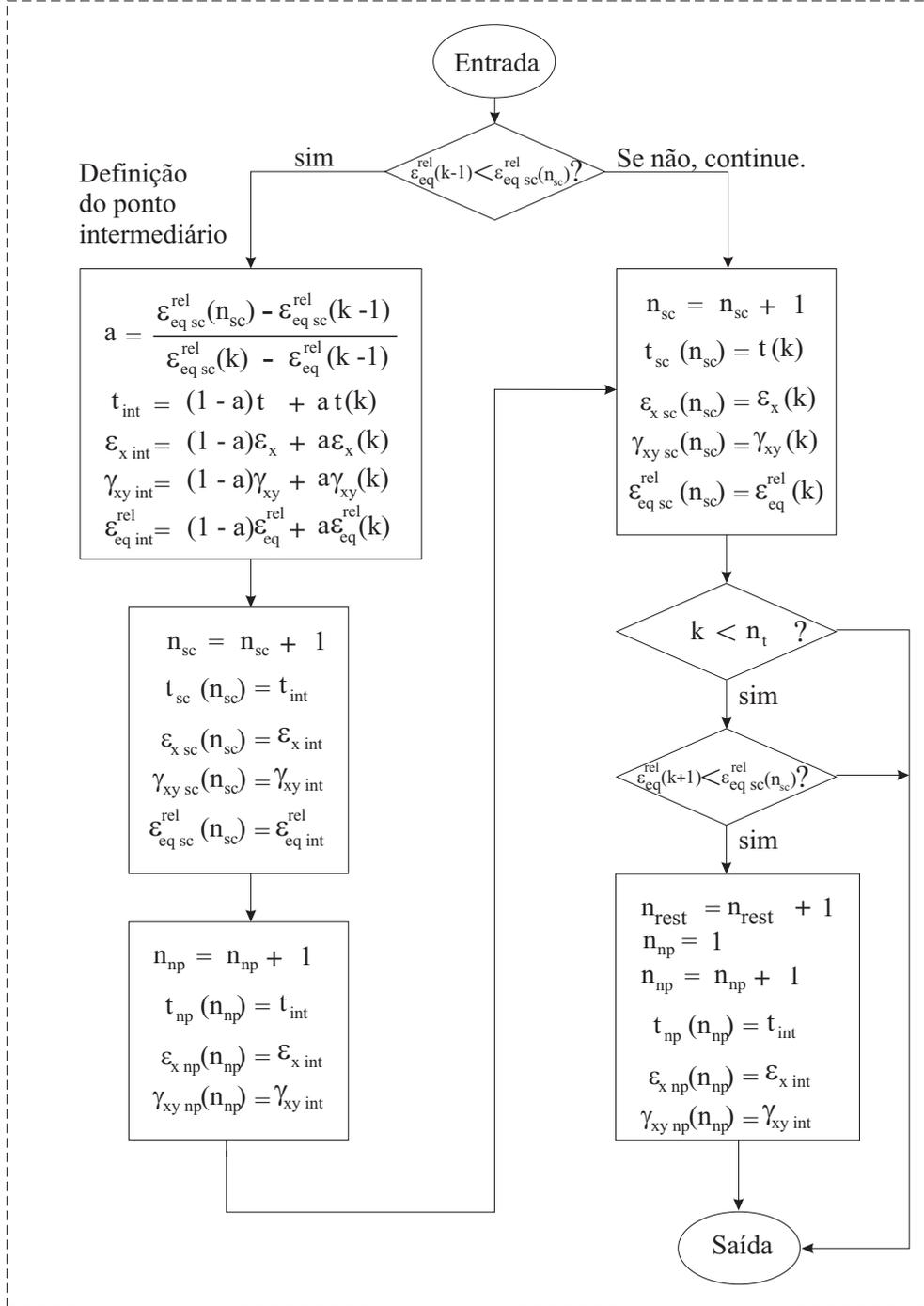


Figura 3.12: Fluxograma da sub-rotina para identificação de semiciclos e de nova subtrajetória.

## Capítulo 4 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

Neste capítulo, é apresentado o modelo elastoplástico sob solicitações do tipo tração-cisalhamento, seu método de aproximação numérica e exemplos ilustrativos da aplicação do algoritmo com o objetivo de estabelecer a relação entre o ciclo de histerese e o par de semiciclos obtido como resultado da aplicação do método de contagem de ciclos de Wang & Brown.

### 4.1 MODELO ELASTOPLÁSTICO SOB SOLICITAÇÕES DO TIPO TRAÇÃO-CISALHAMENTO

Nesta seção, apresenta-se um modelo que descreve o comportamento elastoplástico com encruamento cinemático linear, seguindo o formalismo matemático descrito por Simo et al. [38]. O estudo é desenvolvido no contexto da cinemática linear, considerando-se que o comportamento elástico seja isotrópico linear.

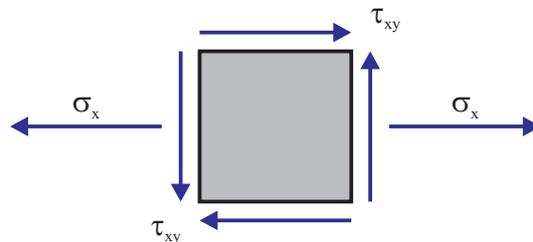


Figura 4.1: Estado de tensão tração-cisalhamento.

Como este trabalho considera apenas situações envolvendo carregamentos do tipo tração-cisalhamento, Fig.4.1, por uma questão de simplicidade do algoritmo numérico, o modelo elastoplástico é apresentado especificamente para este tipo de solicitação. Alternativamente, poderia ser considerado o modelo elastoplástico geral, tridimensional. Entretanto, se este fosse o caso, as seguintes restrições deveriam ser impostas:

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (4.1)$$

o que implicaria na solução de um sistema de quatro equações não lineares a quatro incógnitas —  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  — a cada passo de integração. Conforme será detalhado

ao longo deste capítulo, com a abordagem adotada, necessita-se resolver uma única equação não linear a cada passo temporal.

#### 4.1.1 O estado de tensão tração-cisalhamento

Sob solicitações do tipo tração-cisalhamento, o estado de tensão pode ser descrito por meio do tensor tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

O tensor tensão desviadora  $\mathbf{S}$  correspondente é dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_x}{3} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\frac{\sigma_x}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_x}{3} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

A relação entre o tensor tensão desviadora  $\mathbf{S}$  e o tensor tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  pode ser reescrita na forma vetorial:

$$S = \begin{pmatrix} S_x \\ S_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Observa-se que não é necessário representar os termos  $S_y$  ou  $S_z$  uma vez que ambos podem ser descritos com funções de  $S_x$ :

$$S_y = S_z = -\frac{S_x}{2}. \quad (4.5)$$

Pode-se reescrever a relação (4.4), entre a representação vetorial  $S$  do tensor  $\mathbf{S}$  e a representação vetorial  $\sigma = [\sigma_x \ \tau_{xy}]^T$  do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , como:

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

ou

$$S = \bar{\mathbb{P}} \sigma, \quad (4.7)$$

onde

$$\bar{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

O operador  $\bar{\mathbb{P}}$  projeta o estado de tensão  $\sigma$  no espaço das tensões desviadoras.

### 4.1.2 Relação tensão-deformação elástica

O estado de tensão  $\boldsymbol{\sigma}$  correspondente a um estado de deformação elástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  qualquer é descrito, considerando-se o modelo de elasticidade linear isotrópica pela relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.9)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as *constantes de Lamé* que, em termos do módulo de elasticidade  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$ , são definidos como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.10)$$

A constante  $\mu$ , também denotada como  $G$ , é o módulo de elasticidade ao cisalhamento.

Pode-se mostrar (de acordo com os cálculos detalhados no Apêndice B) que, para o caso de estados de tensão do tipo tração-torção (estado plano de tensão adicionado da condição  $\sigma_y = 0$ ),

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (4.11)$$

a relação tensão-deformação (4.11) fica reduzida à expressão:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (4.13)$$

onde

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Assim, mesmo que as deformações  $\varepsilon_y^e$ ,  $\varepsilon_z^e$ ,  $\gamma_{xz}^e$  e  $\gamma_{yz}^e$  sejam eventualmente não nulas, o estado de tensão estará completamente definido em função dos componentes de deformação  $\varepsilon_x^e$  e  $\gamma_{xy}^e$ . Assim, no que se segue, apenas os componentes  $(\bullet)_x$  e  $(\bullet)_{xy}$  das diversas quantidades tensoriais (tensões, deformações etc.) serão considerados para a descrição do comportamento elastoplástico sob carregamentos do tipo tração-cisalhamento.

### 4.1.3 O modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear

Admite-se que o comportamento mecânico do material seja elástico se o estado de tensão estiver confinado no interior de uma região à qual se denomina domínio elástico do material. Nos metais dúteis, a deformação plástica está diretamente associada a escorregamentos entre planos cristalinos e, portanto, a deformações cisalhantes. Em termos de tensão, especificamente para materiais de comportamento elástico isotrópico, a força interna associada à deformação cisalhante é a tensão cisalhante. Assim, de acordo com o *modelo de Mises* [39], pode-se definir a região elástica limitando-se a magnitude da tensão desviadora:

$$\|\mathbf{S}\| \leq S_0, \quad (4.15)$$

onde  $S_0$  é um parâmetro material a ser determinado. Se a identificação deste parâmetro for obtida, por exemplo, por meio de um ensaio de tração simples, então o estado de tensão pode ser representado pelo tensor tensão:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

onde o componente de tensão  $\sigma_x$  é limitado pela tensão de escoamento plástico  $\sigma_0$ :

$$|\sigma_x| \leq \sigma_0. \quad (4.17)$$

O tensor desviador  $\mathbf{S}$  correspondente ao estado de tensão Eq. (4.16) é dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_x \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

de modo que:

$$\|\mathbf{S}\|^2 = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \sigma_x^2 = \frac{2}{3} \sigma_x^2, \quad (4.19)$$

e portanto

$$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_x \leq S_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0, \quad (4.20)$$

ou

$$f(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \leq 0. \quad (4.21)$$

Para um estado de tensão do tipo tração-cisalhamento qualquer, o tensor tensão desviadora é dado pela expressão (4.3), de modo que sua norma é dada por:

$$\|\mathbf{S}\|^2 = \frac{2}{3}\sigma_x^2 + 2\tau_{xy}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \sigma^T \mathbb{P} \sigma, \quad (4.22)$$

onde

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Deste modo, sob estados de tensão do tipo tração-cisalhamento, o domínio elástico correspondente ao modelo de Mises é caracterizado pela desigualdade:

$$f(\sigma) = \sqrt{\sigma^T \mathbb{P} \sigma} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \leq 0. \quad (4.24)$$

No presente estudo, considera-se o encruamento cinemático do material durante sua plastificação característico em carregamentos cíclicos estabilizados. O encruamento cinemático pode ser representado no modelo por meio de translações do domínio elástico no espaço de tensão. Por sua vez, esta translação pode ser descrita por meio da translação  $\beta$  do centro do domínio elástico (denominado “*back-stress*” na literatura):

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_{xy} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

conforme é ilustrado na Fig.4.2. É importante observar que, no presente contexto, o vetor  $\beta$  não representa os componentes de um tensor desviador uma vez que representa o centro do domínio elástico definido pelo espaço gerado por  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ . Assim,

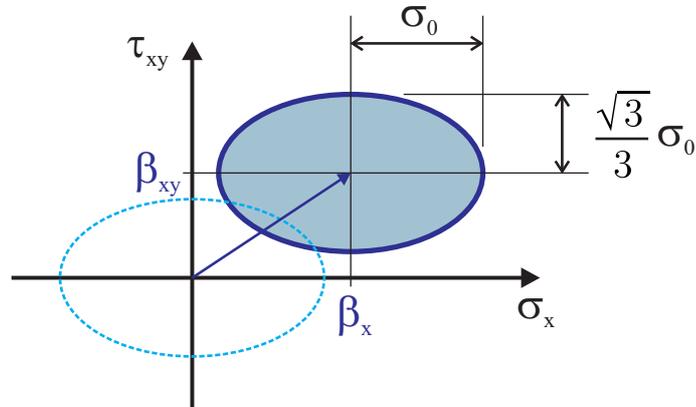


Figura 4.2: Domínio elástico de origem  $\beta$  para um estado de tensão tração-cisalhamento.

considerando o encruamento cinemático  $\beta$ , a desigualdade Eq. (4.24) que representa o domínio elástico do material passa a ser reescrita como:

$$f(\sigma, \beta) = \sqrt{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \leq 0. \quad (4.26)$$

Apesar da deformação elástica  $\varepsilon^e$  poder ser calculada em função da tensão  $\sigma$  invertendo-se a expressão (4.13), a única quantidade mensurável é a deformação total  $\varepsilon$ . De fato, na cinemática linear a deformação total  $\varepsilon$  relaciona-se com o campo dos deslocamentos  $u = [u_x \ u_y]^T$  por meio da relação:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

A diferença entre a deformação total e a deformação elástica é a deformação plástica  $\varepsilon^p$ , resultante do movimento das discordâncias na rede cristalina do material:

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e, \quad (4.28)$$

onde

$$\varepsilon^p = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^p \\ \gamma_{xy}^p \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

No presente estudo, considera-se uma *lei associativa* para a evolução da deformação plástica, i.e.,  $\dot{\varepsilon}^p$  se orienta segundo a normal ao contorno do domínio elástico:

$$\dot{\varepsilon}^p = \tilde{\xi} \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (4.30)$$

onde  $\tilde{\xi} \geq 0$  é o *multiplicador plástico*. Para o caso específico do modelo de Mises, Eq. (4.26), tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)}} \mathbb{P}(\sigma - \beta), \quad (4.31)$$

de modo que a lei de evolução da deformação plástica passa a ser escrita como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \xi \mathbb{P}(\sigma - \beta), \quad (4.32)$$

onde

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{\sqrt{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)}} = \frac{\tilde{\xi}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0}. \quad (4.33)$$

Se  $f(\sigma, \beta) < 0$ , não há mudança na deformação plástica  $\dot{\varepsilon}^p$ , i.e.,  $\xi = 0$ . Em outras palavras, a tensão aplicada está no interior do domínio elástico o que implica dizer que o material terá comportamento elástico. Por outro lado, se  $f(\sigma, \beta) = 0$ , então  $\xi \geq 0$ . Essa situação ocorre no contorno do domínio elástico. Tais situações impõem a condição:

$$\xi f(\sigma, \beta) = 0. \quad (4.34)$$

conhecida na literatura como *relação de otimalidade de Kuhn-Tucker*.

No contorno do domínio elástico  $f(\sigma, \beta) = 0$ , deve-se satisfazer o requerimento físico de que o estado de tensão  $\sigma$  “persiste” no contorno do domínio elástico enquanto  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$  (i.e.,  $\xi > 0$ ). Tal condição, denominada *relação de consistência ou persistência*, pode ser expressa como:

$$\xi \dot{f}(\sigma, \beta) = 0. \quad (4.35)$$

No presente estudo, considera-se o modelo de Prager [40] para a descrição do encruamento cinemático que pode ser expresso, no contexto tridimensional, como:

$$\dot{\beta} = H \dot{\varepsilon}^p. \quad (4.36)$$

No contexto dos carregamentos do tipo tração-cisalhamento, o termo  $\dot{\beta}$  pode ser descrito em termos da projeção  $\bar{\mathbb{P}}\beta$  do “back-stress”  $\beta$  no espaço desviador, onde  $\bar{\mathbb{P}}$  é o operador definido na Eq (4.7). Assim, para as condições do presente estudo, a forma específica da lei de encruamento (4.36) é dada por:

$$\text{dev}(\dot{\beta}) = \bar{\mathbb{P}} \dot{\beta} = H \mathbb{A} \dot{\varepsilon}^p, \quad (4.37)$$

onde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} \dot{\varepsilon}^p = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x^p \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}^p \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

ou, multiplicando ambos os lados por  $\bar{\mathbb{P}}^{-1}$ :

$$\dot{\beta} = H \bar{\mathbb{P}}^{-1} \dot{\varepsilon}^p. \quad (4.39)$$

Na expressão (4.39), considerou-se o fato de que:

$$\bar{\mathbb{P}}^{-1} \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{P}^{-1}. \quad (4.40)$$

Para o caso específico do modelo de Mises para o domínio elástico, a consideração da lei de evolução (4.32) permite reescrever a lei (4.39) como:

$$\dot{\beta} = \xi H \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P}(\sigma - \beta),$$

ou

$$\dot{\beta} = \xi H (\sigma - \beta). \quad (4.41)$$

O parâmetro material  $H$  pode ser obtido, por exemplo, considerando-se um ensaio de tração simples. A Figura 4.3 ilustra uma curva idealizada de  $\sigma_x$  em função de  $\varepsilon_x^p$ , onde sua inclinação define o parâmetro material  $H_0$  de encruamento cinemático linear.

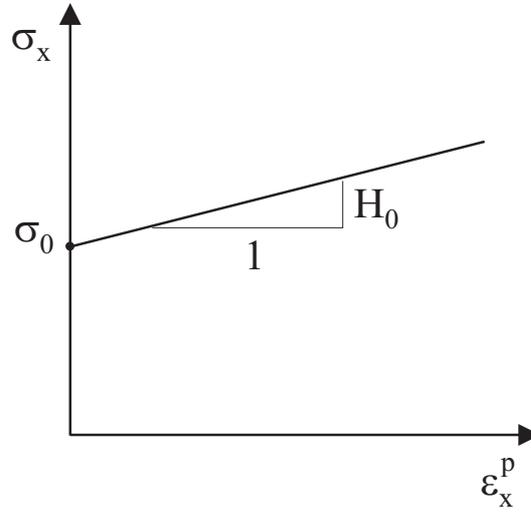


Figura 4.3: Curva idealizada descrevendo a tensão  $\sigma_x$  em função da deformação plástica  $\varepsilon_x^p$  em um ensaio de tração simples.

Isolando-se  $\dot{\varepsilon}^p$  a partir da expressão (4.37), tem-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{H} \mathbb{A}^{-1} \bar{\mathbb{P}} \dot{\beta} \quad (4.42)$$

que, especificamente para o ensaio de tração simples, fornece:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x^p \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{H} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{H} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_x \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de forma que:

$$\dot{\varepsilon}_x^p = \frac{1}{H} \frac{2}{3} \dot{\beta}_x.$$

Por outro lado, demonstra-se, no Apêndice C, que para o caso de tração simples,  $\dot{\sigma}_x = \dot{\beta}_x$ , como  $\dot{\sigma}_x = \dot{\varepsilon}_x^p$  conforme a Fig. 4.3, tem-se:

$$\dot{\beta}_x = \frac{3}{2} H \dot{\varepsilon}_x^p = H_0 \dot{\varepsilon}_x^p, \quad (4.43)$$

consequentemente:

$$H = \frac{2}{3} H_0. \quad (4.44)$$

Portanto, a forma final do modelo de Prager para o encruamento cinemático, no caso específico de carregamentos do tipo tração-cisalhamento, é dada por:

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} H_0 \dot{\varepsilon}^p = \frac{2}{3} \xi H_0 (\sigma - \beta). \quad (4.45)$$

Em resumo, o modelo que descreve o comportamento elastoplástico com encruamento cinemático linear, sob carregamentos do tipo tração-cisalhamento, é dado por:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.46)$$

2. Relação tensão-deformação:

$$\sigma = \mathbb{C} (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.47)$$

3. Domínio elástico:

$$f(\sigma, \beta) = \sqrt{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P} (\sigma - \beta)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \leq 0 \quad (4.48)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\dot{\varepsilon}^p = \xi \mathbb{P} (\sigma - \beta) \quad (4.49)$$

$$\dot{\beta} = \frac{2}{3} \xi H_0 (\sigma - \beta) \quad (4.50)$$

5. Relação de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\xi \geq 0, \quad f(\sigma, \beta) \leq 0, \quad \xi f(\sigma, \beta) = 0. \quad (4.51)$$

6. Relação de consistência:

$$\text{Se } f(\sigma, \beta) = 0, \text{ então } \xi \geq 0, \quad \dot{f}(\sigma, \beta) \leq 0, \quad \xi \dot{f}(\sigma, \beta) = 0. \quad (4.52)$$

## 4.2 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA

### 4.2.1 Discretização temporal

Admitem-se conhecidos os valores das variáveis de estado  $\varepsilon_n^p = \varepsilon^p(t_n)$ ,  $\beta_n = \beta(t_n)$  e  $\sigma_n = \sigma(t_n)$  no instante  $t_n$ , associado a um estado de deformação  $\varepsilon_n = \varepsilon(t_n)$ . Considere-se o problema de determinação das variáveis de estado  $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon^p(t_{n+1})$ ,  $\beta_{n+1} = \beta(t_{n+1})$  e  $\sigma_{n+1} = \sigma(t_{n+1})$  no instante  $t_{n+1}$ , associado a um estado de deformação  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon(t_{n+1})$ . Isto pode ser feito pela versão discretizada do problema descrito na seção anterior, onde as derivadas parciais são aproximadas por um esquema de diferença finita do tipo Euler implícito.

Nestas condições, as leis de evolução das variáveis de estado podem ser aproximadas como:

$$\frac{\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p}{\Delta t} = \xi_{n+1} \mathbb{P}(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) \quad (4.53)$$

$$\frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\Delta t} = \xi_{n+1} \frac{2}{3} H_0(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) \quad (4.54)$$

ou

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \xi_{n+1} \mathbb{P}(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) \quad (4.55)$$

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{2}{3} \Delta \xi_{n+1} H_0(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) \quad (4.56)$$

onde  $\Delta \xi_{n+1} = \Delta t \xi_{n+1}$ .

Por sua vez, a relação de consistência é aproximada como:

$$\text{Se } f_n = 0, \text{ então } \Delta \xi_{n+1} \geq 0, \quad \frac{1}{\Delta t}(f_{n+1} - f_n) \leq 0, \quad \Delta \xi_{n+1} \frac{1}{\Delta t}(f_{n+1} - f_n) = 0. \quad (4.57)$$

ou

$$\text{Se } f_n = 0, \text{ então } \Delta \xi_{n+1} \geq 0, \quad f_{n+1} \leq f_n, \quad \Delta \xi_{n+1} (f_{n+1} - f_n) = 0. \quad (4.58)$$

Nestas condições, o modelo pode ser aproximado, no instante  $t_{n+1}$ , como:

1. Decomposição aditiva da deformação:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}^e + \varepsilon_{n+1}^p \quad (4.59)$$

2. Relação tensão-deformação:

$$\sigma_{n+1} = \mathbb{C}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (4.60)$$

3. Domínio elástico:

$$f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, \beta_{n+1}) = \sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})^T \mathbb{P}(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \leq 0 \quad (4.61)$$

4. Leis de evolução das variáveis internas:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\xi_{n+1} \mathbb{P}(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) \quad (4.62)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{2}{3} \Delta\xi_{n+1} H_0(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) \quad (4.63)$$

5. Relação de complementaridade de Kuhn-Tucker:

$$\xi_{n+1} \geq 0, \quad f_{n+1} \leq 0, \quad \xi_{n+1} f_{n+1} = 0. \quad (4.64)$$

6. Relação de consistência:

$$\text{Se } f_n = 0, \text{ então } \Delta\xi_{n+1} \geq 0, \quad f_{n+1} \leq f_n, \quad \Delta\xi_{n+1} (f_{n+1} - f_n) = 0. \quad (4.65)$$

## 4.2.2 Integração do modelo: mapeamento de retorno

O algoritmo de mapeamento de retorno tem como base a prescrição do estado de deformação  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon(t_{n+1})$  para a determinação das variáveis de estado  $\varepsilon_{n+1}^p$ ,  $\beta_{n+1}$ ,  $\sigma_{n+1}$  no instante  $t_{n+1}$ , onde supõem-se conhecidas as variáveis  $\varepsilon_n^p$ ,  $\beta_n$ ,  $\sigma_n$  no instante  $t_n$ .

### 4.2.2.1 Estado tentativo

O passo inicial do algoritmo consiste na adoção da hipótese de que o material se comporta elasticamente entre os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$ . Neste sentido, é definido o estado tentativo, por meio das variáveis de estado tentativas:

$$\varepsilon_{n+1}^{p\,trial} = \varepsilon_n^p, \quad (4.66)$$

$$\beta_{n+1}^{trial} = \beta_n, \quad (4.67)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \mathbb{C} \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{p\,trial} \right) = \mathbb{C} \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p \right). \quad (4.68)$$

Calcule também:

$$f_{n+1}^{trial} = f(\sigma_{n+1}^{trial}, \beta_{n+1}^{trial}) = \sqrt{(\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}^{trial})^T \mathbb{P} (\sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}^{trial})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \quad (4.69)$$

Se a hipótese de passo elástico estiver correta, então verifica-se a desigualdade:

$$f_{n+1}^{trial} \leq 0, \quad (4.70)$$

e as variáveis de estado no instante  $t_{n+1}$  serão dadas simplesmente por:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \quad (4.71)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n, \quad (4.72)$$

$$\sigma_{n+1} = \mathbb{C} \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p \right). \quad (4.73)$$

#### 4.2.2.2 Passo plástico

Caso contrário ( $f_{n+1}^{trial} > 0$ ), conclui-se que a hipótese de passo elástico estava incorreta e utiliza-se a determinação da evolução das variáveis de estado  $\varepsilon^p$  e  $\beta$  ao longo do intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ .

Neste contexto, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \mathbb{C} \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p \right) + \mathbb{C} \varepsilon_n^p - \mathbb{C} \varepsilon_n^p \\ &= \mathbb{C} \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p \right) - \mathbb{C} \left( \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p \right) \\ &= \sigma_{n+1}^{trial} - \mathbb{C} \Delta \xi_{n+1} \mathbb{P} \left( \sigma_{n+1} - \beta_{n+1} \right), \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde foram consideradas as expressões (4.68) para a tensão tentativa  $\sigma_{n+1}^{trial}$  e (4.62) para o passo  $\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p$ .

Subtraindo o “back-stress”  $\beta_{n+1}$  (4.63) da relação (4.74), obtém-se:

$$\sigma_{n+1} - \beta_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}^{trial} - \Delta \xi_{n+1} \left( \mathbb{C} \mathbb{P} + \frac{2}{3} H_0 \mathbf{I} \right) \left( \sigma_{n+1} - \beta_{n+1} \right), \quad (4.75)$$

ou:

$$\left( \mathbf{I} + \Delta \xi_{n+1} \left( \mathbb{C} \mathbb{P} + \frac{2}{3} H_0 \mathbf{I} \right) \right) \left( \sigma_{n+1} - \beta_{n+1} \right) = \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}^{trial} \quad (4.76)$$

No sistema de equações lineares (4.76), a solução  $\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}$  é função do multiplicador  $\Delta\xi_{n+1}$ , que é calculada de modo que:

$$f_{n+1} = \sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})^T \mathbb{P} (\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 = 0 \quad (4.77)$$

Assim, no passo plástico define-se o problema não-linear:

“Determine  $\Delta\xi_{n+1}$  tal que:

$$f_{n+1}(\Delta\xi_{n+1}) = \sqrt{\eta^T \mathbb{P} \eta_{n+1}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 = 0, \quad (4.78)$$

onde  $\eta_{n+1} = \eta(\Delta\xi_{n+1}) = \sigma_{n+1} - \beta_{n+1}$  é solução do sistema de equações lineares:

$$\left( \mathbf{I} + \Delta\xi_{n+1} \left( \mathbb{C} \mathbb{P} + \frac{2}{3} H_0 \mathbf{I} \right) \right) \eta_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}^{trial} \quad (4.79)$$

A solução do problema (Eq.(4.78)-Eq.(4.79)) pode ser obtida, por exemplo, empregando-se o método de Newton-Raphson para a pesquisa da raiz da Eq. (4.78).

Uma vez calculados  $\Delta\xi_{n+1}$  e  $\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}$ , empregam-se as expressões (4.62), (4.63) e (4.60) para calcular respectivamente os valores de  $\varepsilon_{n+1}^p$ ,  $\beta_{n+1}$  e  $\sigma_{n+1}$ .

### 4.2.3 O Algoritmo

Assim, conforme listagem em linguagem MATLAB contida no apêndice D, o Algoritmo de Mapeamento de Retorno para o cálculo da evolução elasto-plástica do material elastoplástico com encruamento cinemático linear, submetido a carregamentos do tipo tração-cisalhamento, é dado por:

Sejam conhecidos os valores de  $\varepsilon_n^p$  e  $\beta_n$  associados a um estado de deformação  $\varepsilon_n$  no instante  $t_n$ . Seja prescrito o estado de deformação  $\varepsilon_{n+1}$  no instante  $t_{n+1}$ .

1. Cálculo do estado tentativo:

$$\varepsilon_{n+1}^{p\,trial} = \varepsilon_n^p, \quad (4.80)$$

$$\beta_{n+1}^{trial} = \beta_n, \quad (4.81)$$

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \mathbb{C} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p), \quad (4.82)$$

$$\eta_{n+1}^{trial} = \sigma_{n+1}^{trial} - \beta_{n+1}^{trial}, \quad (4.83)$$

$$f_{n+1}^{trial} = f(\sigma_{n+1}^{trial}, \beta_{n+1}^{trial}) = \sqrt{(\eta_{n+1}^{trial})^T \mathbb{P} (\eta_{n+1}^{trial})} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0. \quad (4.84)$$

2. Se  $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ , então o passo é elástico:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \quad (4.85)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n, \quad (4.86)$$

3. Caso contrário ( $f_{n+1}^{trial} > 0$ ):

(a) Calcule  $\Delta\xi_{n+1}$  como raiz da função:

$$f_{n+1}(\Delta\xi_{n+1}) = \sqrt{\eta_{n+1}^T \mathbb{P} \eta_{n+1}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 = 0, \quad (4.87)$$

onde  $\eta_{n+1} = \eta(\Delta\xi_{n+1}) = \sigma_{n+1} - \beta_{n+1}$  é solução do sistema de equações lineares:

$$\left( \mathbf{I} + \Delta\xi_{n+1} \left( \mathbb{C} \mathbb{P} + \frac{2}{3} H_0 \mathbf{I} \right) \right) \eta_{n+1} = \eta_{n+1}^{trial}. \quad (4.88)$$

(b) Calcule as variáveis de estado no instante  $t_{n+1}$ :

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\xi_{n+1} \mathbb{P} \eta_{n+1}, \quad (4.89)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Delta\xi_{n+1} \frac{2}{3} H_0 \eta_{n+1}, \quad (4.90)$$

4. Calcule o estado de tensão no instante  $t_{n+1}$ :

$$\sigma_{n+1} = \mathbb{C} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (4.91)$$

A Figura 4.4 apresenta o fluxograma do algoritmo do mapeamento de retorno para carregamentos específicos (tração-cisalhamento).

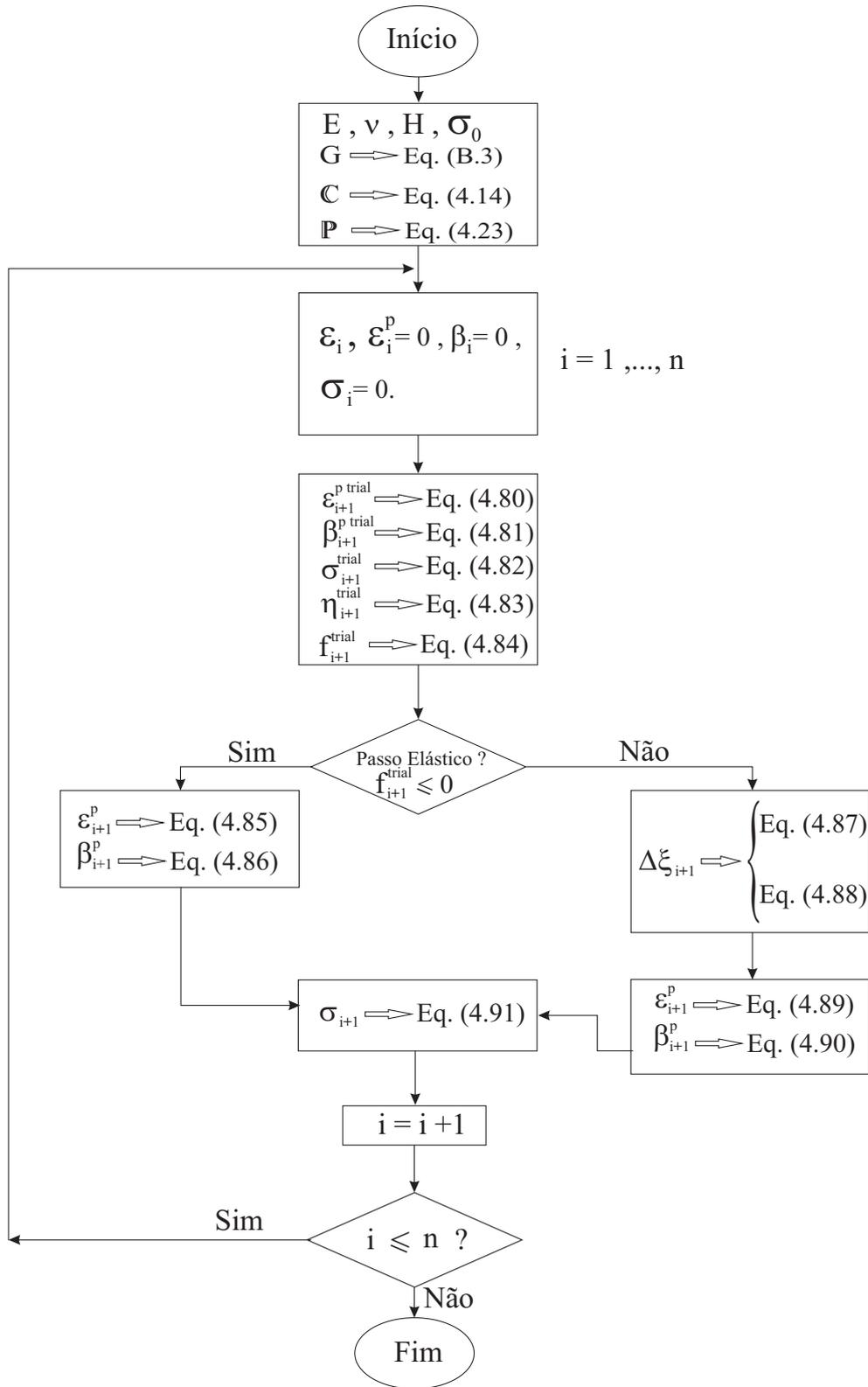


Figura 4.4: Fluxograma do mapeamento de retorno para carregamento do tipo tração-cisalhamento.

### 4.3 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS DE APLICAÇÃO DO ALGORITMO

O algoritmo de Mapeamento de Retorno é aplicado utilizando três tipos de história de carregamento: ensaio uniaxial com tração-compressão; ensaio uniaxial com torção alternada e ensaio biaxial não proporcional (elíptico). O objetivo aqui é ilustrar os resultados do algoritmo.

#### 4.3.1 Ensaio uniaxial de tração-compressão

Considera-se uma história de carregamento uniaxial do tipo tração-compressão descrita pelos componentes de deformação prescrita.

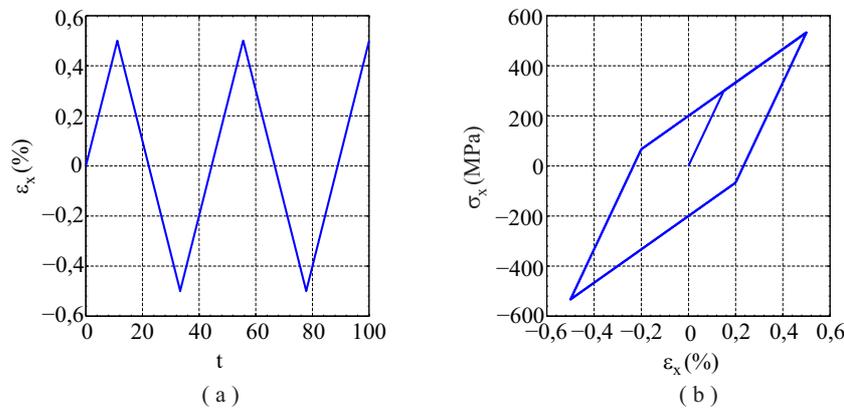


Figura 4.5: Ensaio uniaxial de tração-compressão. (a) História de carregamento e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig. 4.5(a) ilustra a história de tração-compressão linear por partes, com amplitude  $\varepsilon_a = 0,5\%$ . Para efeito de ilustração do modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, os parâmetros materiais foram escolhidos arbitrariamente  $E = 200,0$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 300$  MPa e  $H_0 = 100,0$  GPa. O objetivo do algoritmo é determinar a tensão  $\sigma_x$  considerando a possibilidade de plastificação. A Figura 4.3(b) apresenta a curva  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ .

#### 4.3.2 Ensaio uniaxial de torção alternada

Considera-se uma história de carregamento uniaxial do tipo cisalhamento puro linear por partes, com amplitude  $\varepsilon_a = 0,5\%$  descrita pelos componentes de deformação prescrita.

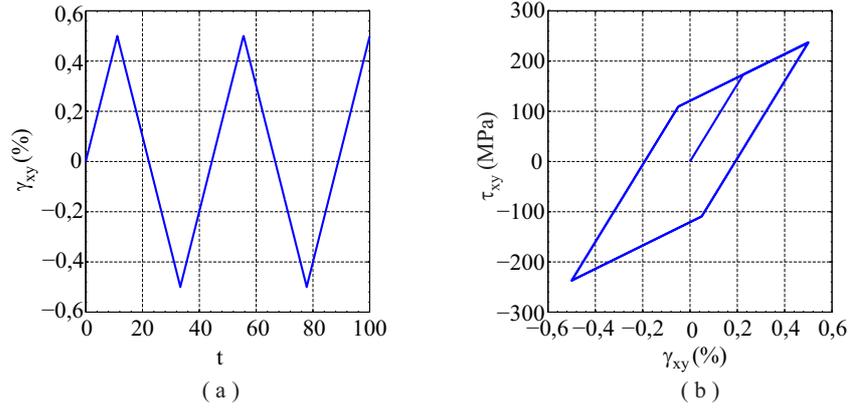


Figura 4.6: Ensaio uniaxial de cisalhamento puro. (a) História de carregamento e (b) resposta da simulação.

O gráfico da Fig. 4.6(a) ilustra a história de cisalhamento puro linear por partes, com amplitude  $\gamma_a = 0,5\%$ . Aqui também, para ilustração do modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, os parâmetros materiais foram escolhidos arbitrariamente  $E = 200,0$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 300$  MPa e  $H_0 = 100,0$  GPa. O algoritmo tem como objetivo determinar a tensão  $\tau_{xy}$  considerando a hipótese de plastificação. A figura 4.6(b) apresenta a curva  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$ .

### 4.3.3 Ensaio biaxial de carregamento não proporcional

Considera-se uma história de carregamento não proporcional do tipo tração-cisalhamento descrita pelos componentes de deformação prescrita.

O gráfico da Fig. 4.7(a) ilustra a história de carregamento biaxial não proporcional com amplitudes de deformação  $\gamma_a = 0,25\%$  e  $\varepsilon_a = 0,5\%$ . Mais uma vez, para efeito de ilustração do modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, os parâmetros materiais foram escolhidos arbitrariamente  $E = 200,0$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 300$  MPa e  $H_0 = 100,0$  GPa.

O algoritmo tem como objetivo determinar as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  considerando a hipótese de plastificação. As figuras 4.7(b), 4.6(c) e 4.6(d) apresentam respectivamente as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$ .

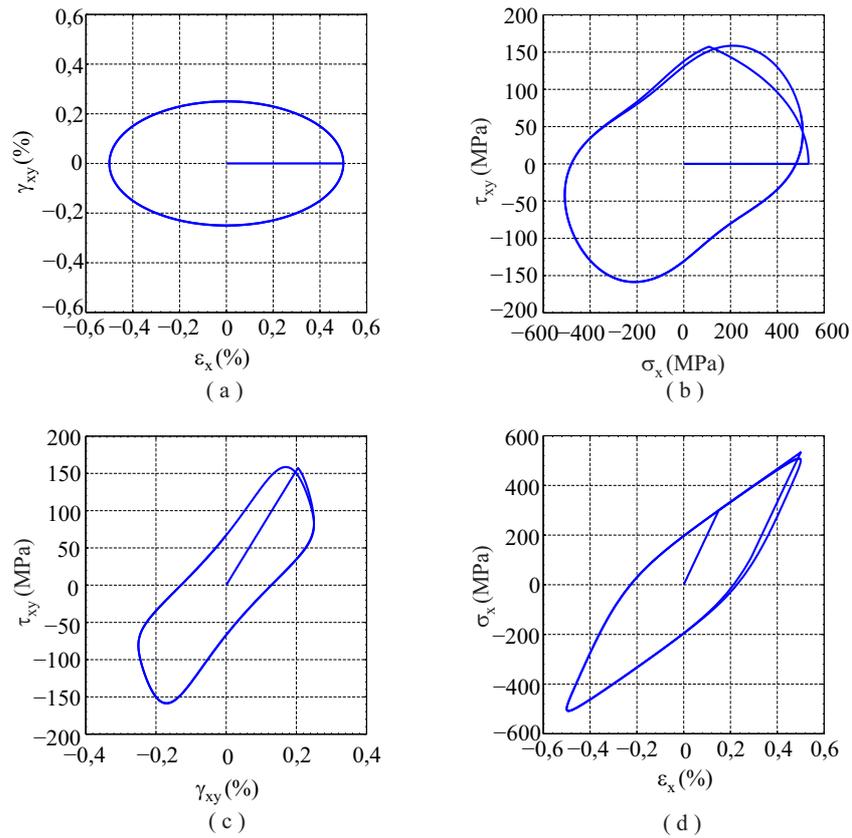


Figura 4.7: História de deformações: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal. Respostas da simulação: (b) tensão cisalhante em função da tensão normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante e (d) tensão normal em função da deformação normal.

## Capítulo 5 ESTUDO DE CASOS

Apresenta-se, neste capítulo, algumas aplicações do método de contagem de semiciclos de Wang & Brown. Inicialmente, este método é comparado com o algoritmo de *rainflow* simplificado para uma história de deformação uniaxial. Mostra-se, por meio de um exemplo acadêmico, que ambos os métodos fornecem os mesmos ciclos. Faz-se ainda uma análise da correlação entre os ciclos obtidos pelos métodos e os laços de histerese elastoplásticos correspondentes. Além disso, o algoritmo de Wang & Brown é aplicado para contabilizar semiciclos associados a diversas histórias de deformação não proporcionais obtidas da literatura [41, 6], procurando-se estabelecer correlações entre esses semiciclos e os laços de histerese. Em seguida, é citada a limitação decorrente da existência de perturbações nas condições iniciais do sistema mecânico.

### 5.1 CARREGAMENTOS UNIAXIAIS: COMPARAÇÃO COM O ALGORITMO DE RAINFLOW SIMPLIFICADO

Wang & Brown [5] afirmam que, no caso de solicitações uniaxiais, o algoritmo proposto fornece os mesmos resultados que o algoritmo de *rainflow* simplificado [33]. Note-se que o método de Wang & Brown determina semiciclos enquanto o método *rainflow* simplificado determina ciclos.

Para comparar esses métodos neste trabalho, foi considerada a história de deformação uniaxial descrita na norma ASTM E1049 [33], reproduzida na Tabela 5.1 e ilustrada na Fig. 5.1 (a). Com o objetivo de visualizar os laços de histerese, levou-se em conta o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear considerando-se os parâmetros materiais  $E = 200$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 150$  MPa e  $H_0 = 100$  GPa. Os ciclos de histerese resultantes estão ilustrados na Fig. 5.1 (b).

Tabela 5.1: História de deformação contida na norma ASTM E1049. [33].

t (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varepsilon$ (%)	-0,12	0,06	-0,18	0,30	-0,06	0,18	-0,24	0,24	-0,12

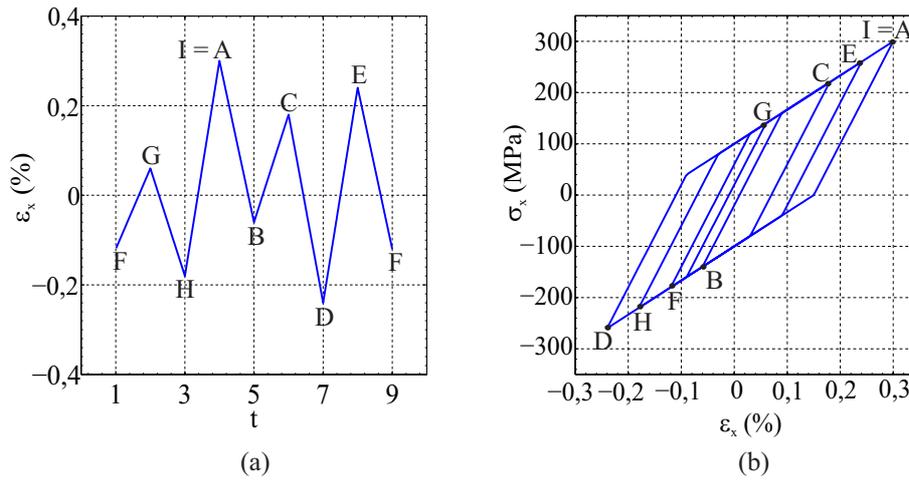


Figura 5.1: (a) Ilustração da história da deformação original e (b) laços de histerese obtidos por meio da simulação elastoplástica.

O procedimento de obtenção dos ciclos, via algoritmo de *rainflow* simplificado, foi detalhado na Seção 2.1.6.1 do Capítulo 2. Nas Figs. 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, as linhas espessas de cor vermelha referem-se aos semiciclos obtidos pelo método de Wang & Brown, as linhas de cor preta representam os ciclos via algoritmo de *rainflow* simplificado e as linhas de cor azul representam a história de deformação. Nesta análise, o algoritmo de Wang & Brown determinou 8 semiciclos enquanto o algoritmo de *rainflow* simplificado determinou 4 ciclos.

Conforme a Fig. 5.2 (a), o primeiro semiciclo, obtido por meio do algoritmo de Wang & Brown, é formado pelo trecho  $ABB^*D$  e o terceiro semiciclo, pelo caminho  $DEE^*I$ . O primeiro ciclo, resultante do método *rainflow* simplificado, é constituído pela trajetória  $ADI$ . No caso da Fig. 5.2 (b), o primeiro e o terceiro semiciclos relacionam-se por meio de dois pontos em comum ( $A = I$  e  $D$ ) formando o laço de histerese ( $ADI$ ), que também é o primeiro ciclo. Portanto, o par dos semiciclos (o primeiro e o terceiro) e o primeiro ciclo são equivalentes no sentido de que representam o mesmo ciclo de histerese elastoplástica.

A Fig. 5.3 (a) descreve o segundo semiciclo e o quarto, que são formados respectivamente pelos caminhos  $BC$  e  $CB^*$ . O segundo ciclo é constituído pelo trecho  $BCB^*$ . E, ainda, na Fig. 5.3 (b), o segundo e o quarto semiciclos relacionam-se por meio de dois pontos em comum ( $B = B^*$  e  $C$ ) formando o laço de histerese ( $BCB^*$ ), que também é o segundo ciclo. Desse modo, o par dos semiciclos (segundo e quarto) e o segundo ciclo descrevem o mesmo ciclo de histerese.

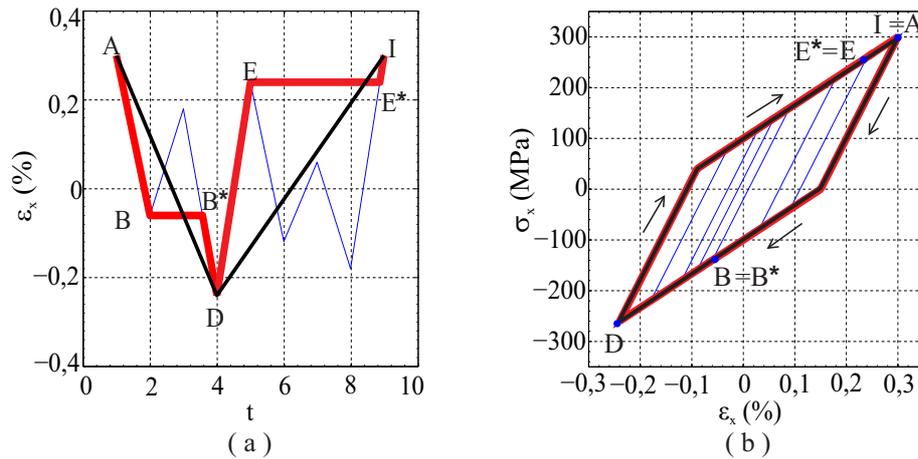


Figura 5.2: Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de *rainflow* simplificado. Representação do primeiro semiciclo ( $ABB^*D$ ); do terceiro semiciclo ( $DEE^*I$ ); e do ciclo ( $ADI$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico.

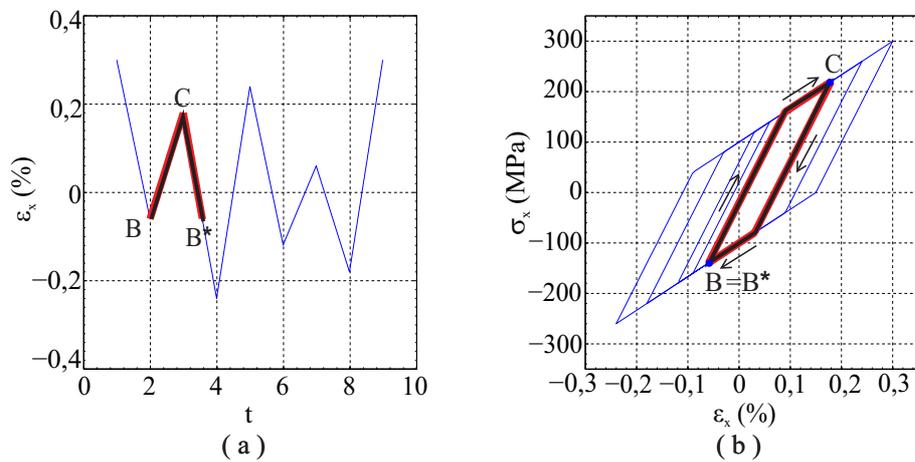


Figura 5.3: Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de *rainflow* simplificado. Representação do segundo semiciclo ( $BC$ ); do quarto semiciclo ( $CB^*$ ); e do segundo ciclo ( $BCB^*$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico.

Analogamente, de acordo com a Fig. 5.4 (a), o quinto semiciclo é formado pelo trecho  $EFF^*H$  e o sétimo semiciclo, pelo caminho  $HE^*$ . O terceiro ciclo é constituído pela trajetória  $EHE^*$ . Conforme a Fig. 5.4 (b), o quinto e o sétimo semiciclos relacionam-se por meio de dois pontos em comum ( $E = E^*$  e  $H$ ) formando o laço de histerese ( $EHE^*$ ), que também é o terceiro ciclo.

Finalmente, como mostra a Fig. 5.5 (a), o sexto semiciclo e o oitavo semiciclo são formados, respectivamente, pelos caminhos  $FG$  e  $GF^*$ . O quarto ciclo é constituído pelo trecho  $FGF^*$ . E, ainda, na Fig. 5.5 (b), o segundo e o quarto semiciclos relacionam-se por meio de dois pontos em comum ( $F = F^*$  e  $G$ ) formando o laço de histerese ( $FGF^*$ ), que também constitui o quarto ciclo.

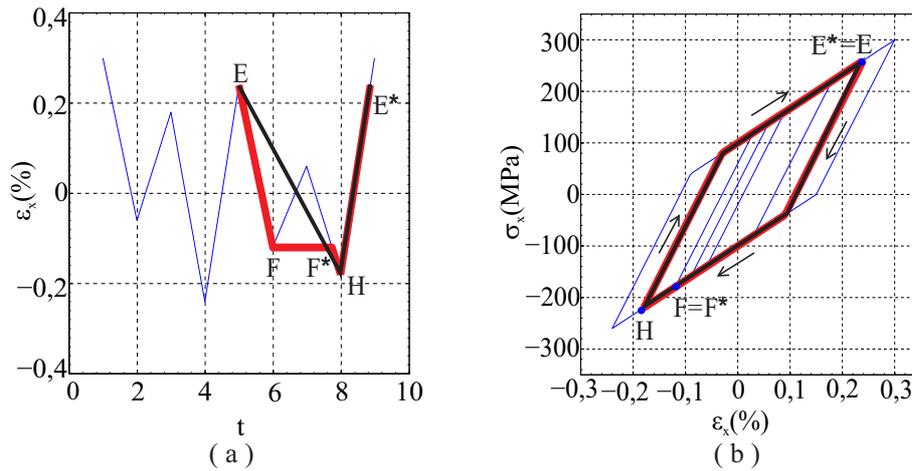


Figura 5.4: Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de *rainflow* simplificado. Representação do quinto semiciclo ( $EFF^*H$ ); do sétimo semiciclo ( $HE^*$ ); e do terceiro ciclo ( $EHE^*$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico.

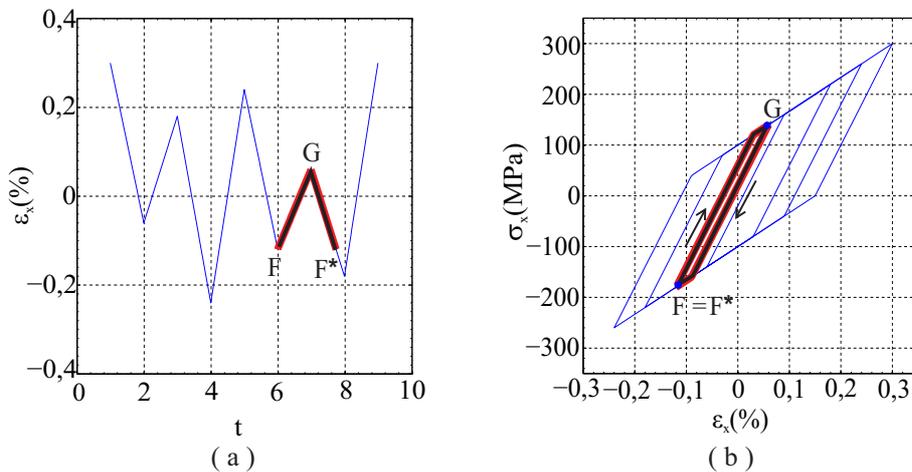


Figura 5.5: Comparação entre os métodos de Wang & Brown e de *rainflow* simplificado. Representação do sexto semiciclo ( $FG$ ); do oitavo semiciclo ( $GF^*$ ); e do quarto ciclo ( $FGF^*$ ). (a) história de deformação e (b) laços de histerese elastoplástico.

## 5.2 HISTÓRIAS DE CARREGAMENTO NÃO PROPORCIONAIS

Jiang et al. [41] desenvolveram experimentos para a estimativa de vida à fadiga no contexto de carregamentos multiaxiais em que foram consideradas 14 trajetórias diferentes com combinações diversas de tração-compressão e torção. No presente trabalho, foram considerados 5 destes carregamentos.

Por sua vez, Bannantine [6] realizou vários ensaios mecânicos para o estudo de fadiga multiaxial, dos quais também foi adotada uma história de carregamento não proporcional do tipo tração - compressão/cisalhamento, denominada “Four Box Loading Path”, que consiste em um carregamento retangular por partes.

Dessa forma, os 6 tipos de carregamento considerados no presente trabalho foram: carregamento não proporcional harmônico e síncrono; dois carregamentos trapezoidais; carregamento cruciforme; carregamento não proporcional harmônico e assíncrono; e carregamento retangular por partes, conforme ilustrado na Fig. 5.6.

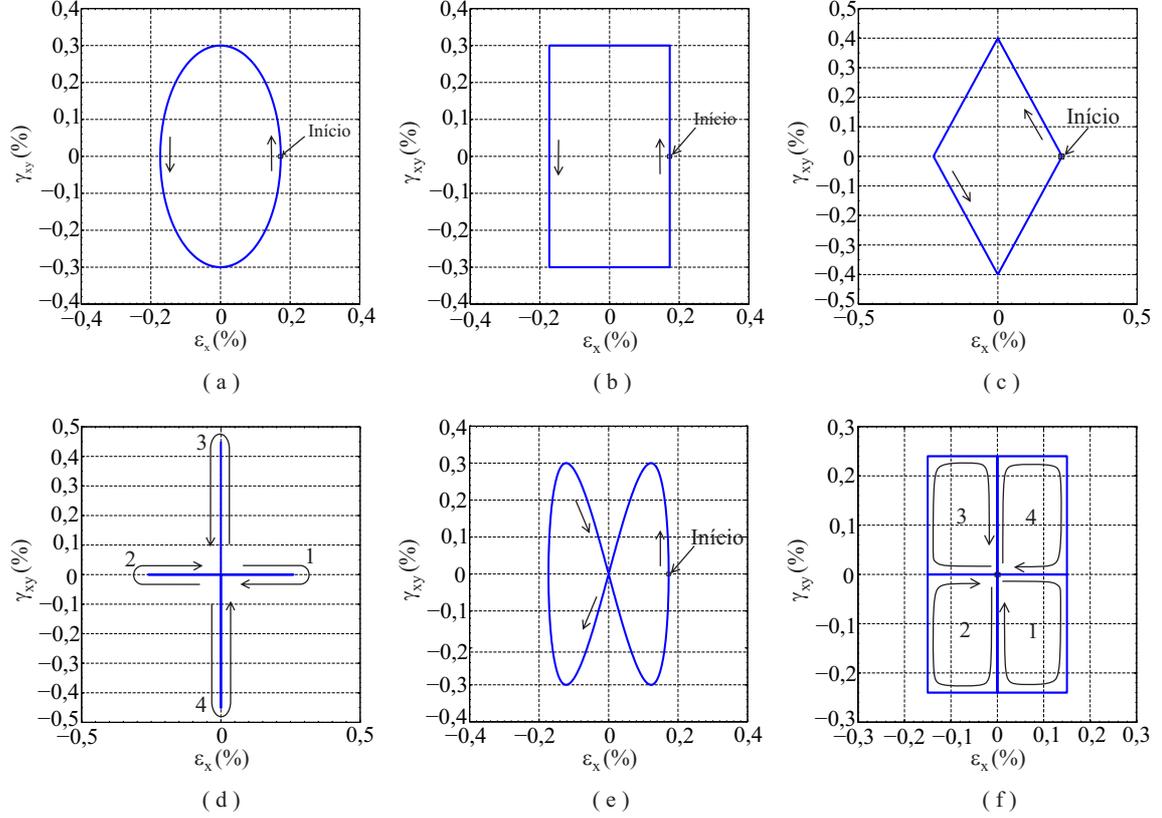


Figura 5.6: (a) Carregamento não proporcional harmônico e síncrono; (b) carregamento trapezoidal I; (c) carregamento trapezoidal II; (d) carregamento cruciforme; (e) carregamento não proporcional harmônico e assíncrono e (f) carregamento retangular por partes.

### 5.2.1 Carregamento não proporcional, harmônico e síncrono

Considerou-se uma história de carregamento do tipo tração-compressão/cisalhamento descrita pelas expressões (5.1) e (5.2),

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\varepsilon_x}{2} \cos(\omega t) \quad (5.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta\gamma_{xy}}{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (5.2)$$

onde:  $\Delta\varepsilon_x/2$  representa a variação da deformação normal;  $\Delta\gamma_{xy}/2$ , a variação da deformação cisalhante;  $\omega$  é a frequência; e  $t$  é a parametrização do tempo. Apesar das componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\gamma_{xy}$  não estarem em fase, possuem a mesma frequência.

A história de deformações é ilustrada na Fig. 5.7 (a). O gráfico da Fig. 5.7(b) ilustra a trajetória de deformações onde as amplitudes de deformações são fornecidas:  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,173\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,3\%$ . A trajetória tem início no ponto  $(0,173, 0)$ .

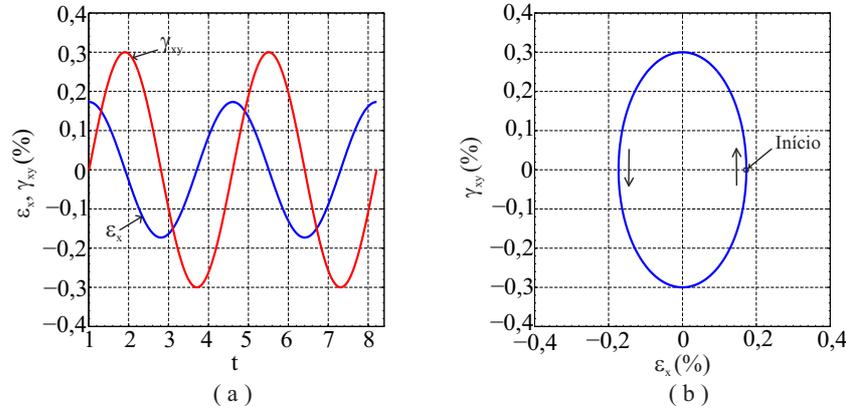


Figura 5.7: História de deformações  $\gamma_{xy}$  e  $\varepsilon_x$  descrita pelas Eq. (5.1) e (5.2)

Para efeito de ilustração, são apresentadas as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  nas Figs. 5.8 (a), (b) e (c), onde foi considerado o modelo elastoplástico descrito no Capítulo 4. Foram adotados os seguintes parâmetros materiais  $E = 208,5$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 170$  MPa,  $K' = 1115$  MPa,  $n = 0,161$  e  $H_0 = 142,5$  GPa.

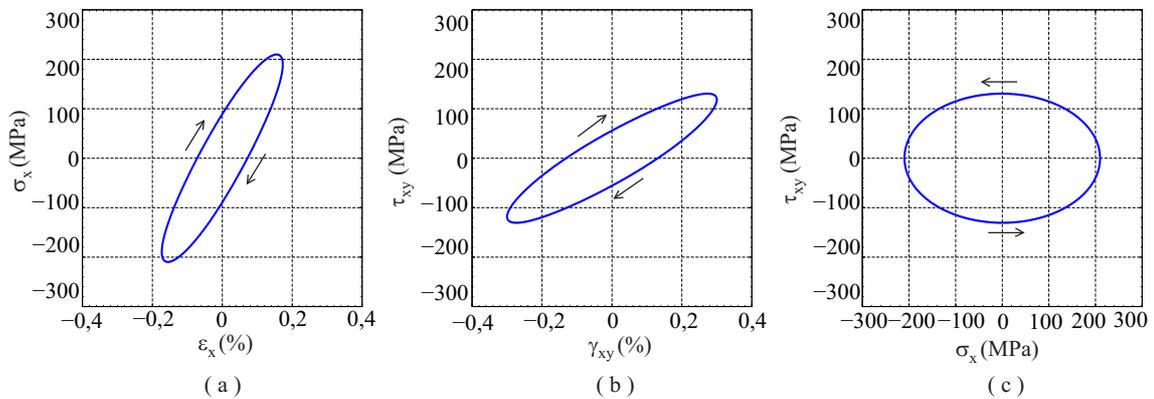


Figura 5.8: Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões.

Cabe notar que, como o modelo considera o encruamento cinemático linear, a resposta elastoplástica é estabilizada após o primeiro ciclo. E ainda deve ser observado que o parâmetro  $H_0$  descreve de maneira apenas aproximada o encruamento cinemático efetivamente observado no material. De acordo com a Fig. 5.9, tem-se duas curvas, a vermelha que representa a relação de Ramberg-Osgood (curva experimental) e a outra, preta, que constitui a curva aproximada. O parâmetro  $H_0$  foi determinado por meio

da Eq. (5.4), onde a amplitude de deformação  $\varepsilon_a$  é dada em 0,173% e a amplitude de tensão  $\sigma_a$  foi determinada por meio do método de Newton, usando a Eq. (5.3).

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n} \quad (5.3)$$

$$H_0 = \frac{\sigma_a - \sigma_0}{\varepsilon_a - \frac{\sigma_0}{E}} \quad (5.4)$$

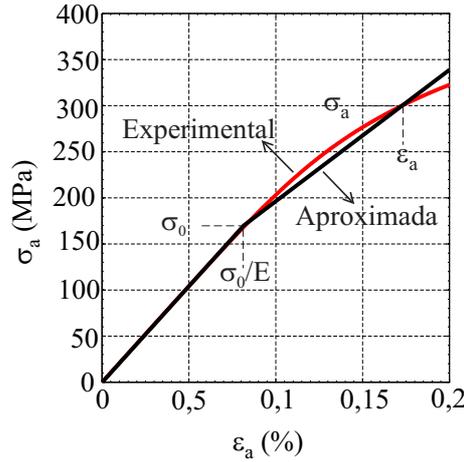


Figura 5.9: Amplitude de tensão em função da amplitude da deformação: curva de Ramberg-Osgood (experimental) e curva aproximada.

Os dois semiciclos obtidos por meio do método de Wang & Brown estão representados no espaço de deformações  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ , no espaço de tensões  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  e nas curvas  $\tau_{xy} \times \gamma_x$  e  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ , como mostrado, respectivamente, nas Figs. 5.10 (a), (b), (c) e (d). O trecho  $AB$  forma o primeiro semiciclo enquanto o trecho  $BA$  constitui o segundo semiciclo. Tanto em termos da deformação quanto em termos da tensão, ambos semiciclos possuem dois pontos em comum ( $A$  e  $B$ ) e, portanto, constituem um ciclo.

Outra maneira de ser verificado o fechamento do par de semiciclos está baseada na relação entre deformação relativa equivalente  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e tensão relativa equivalente  $\sigma_{eq}^{rel}$ . Inicialmente, a deformação equivalente  $\varepsilon_{eq}$  e a tensão equivalente  $\sigma_{eq}$  são calculados por meio das Eqs. (5.5) e (5.6) e as histórias de deformações  $(\varepsilon_x, \gamma_{xy})$  e de tensões  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  são utilizadas como dados de entrada. Em seguida, a deformação  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e a tensão  $\sigma_{eq}^{rel}$  equivalentes relativas são calculadas por meio das Eqs. (5.7) e (5.8). Os termos  $\varepsilon_{eq}^*$  e  $\sigma_{eq}^*$  referem-se aos valores máximos das respectivas histórias equivalentes  $(\varepsilon_{eq}$  e  $\sigma_{eq})$ . Como esperado, no resultado obtido, Fig. 5.11, observa-se que os semiciclos realmente se fecham em um ciclo.

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \nu)} \sqrt{2\varepsilon_x^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2} \quad (5.5)$$

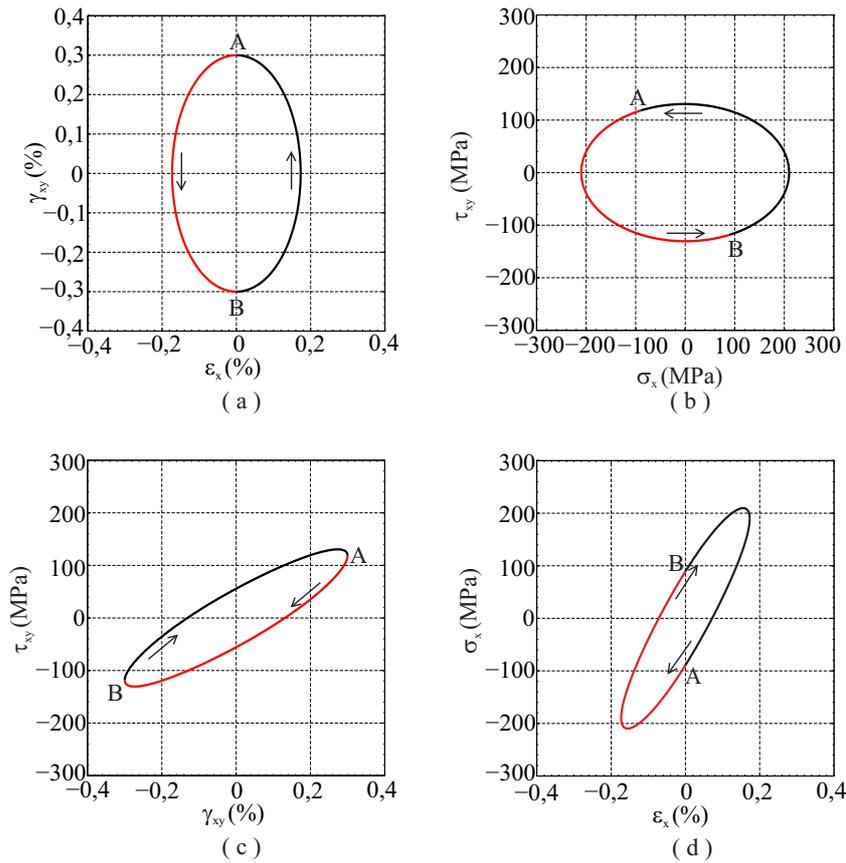


Figura 5.10: Representação do primeiro semiciclo  $AB$  e do segundo  $BA$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; e (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{eq}^{rel} = \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{eq}^* \quad (5.7)$$

$$\sigma_{eq}^{rel} = \sigma_{eq} - \sigma_{eq}^* \quad (5.8)$$

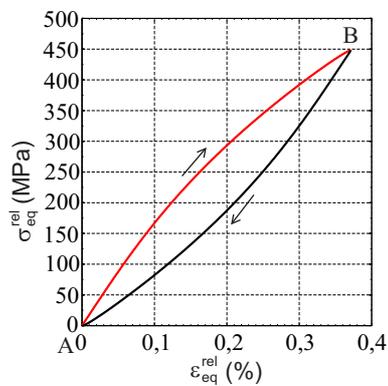


Figura 5.11: Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e  $\sigma_{eq}^{rel}$ . O primeiro  $AB$  e o segundo  $BA$  semiciclos fecham em um ciclo.

### 5.2.2 Carregamento trapezoidal I

Em seguida, considerou-se a história de carregamento do tipo tração-compressão/cisalhamento ilustrada na Fig. 5.12 (a). Note-se que o carregamento é linear por partes. O gráfico da Fig. 5.12 (b) ilustra a trajetória de deformações onde as amplitudes são fornecidas:  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,173\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,3\%$  [41]. Observa-se nas figuras que a trajetória inicia-se no ponto  $(0,173, 0)$ .

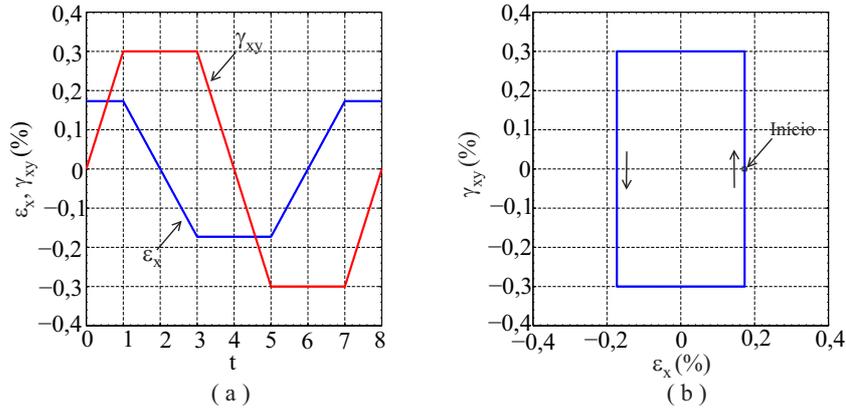


Figura 5.12: História de deformações em: (a)  $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$  e (b)  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

Para efeito de ilustração, apresentam-se as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  nas Figs. 5.13 (a), (b) e (c), onde foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e os seguintes parâmetros materiais  $E = 208,5$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 170$  MPa,  $K' = 1115$  MPa,  $n = 0,161$  e  $H_0 = 142,5$  GPa. O parâmetro  $H_0$  foi obtido da mesma forma que anteriormente considerando que a amplitude de deformação  $\varepsilon_a$  é dada em  $0,173\%$ .

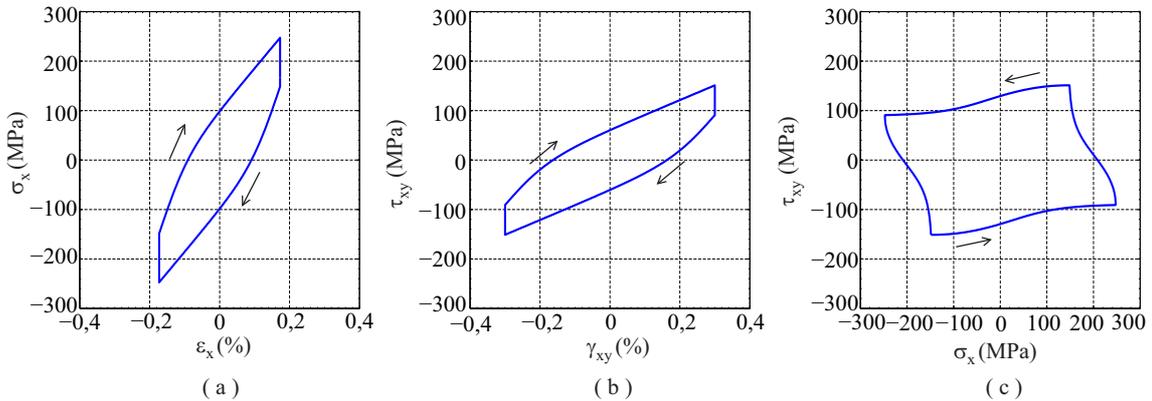


Figura 5.13: Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões.

Foram obtidos dois semiciclos por meio do método de Wang & Brown e os resultados

são ilustrados nas Figs. 5.14 (a), (b), (c) e (d). Respectivamente, os semiciclos estão representados no espaço de deformações  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ , no espaço de tensões  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  e nas curvas  $\tau_{xy} \times \gamma_x$  e  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ . O caminho  $AB$  constitui o primeiro semiciclo enquanto o trecho  $BA$  forma o segundo semiciclo. Note-se que ambos semiciclos possuem dois pontos em comum ( $A$  e  $B$ ) tanto em termos da deformação quanto em termos da tensão e, desse modo, fecham em um ciclo.

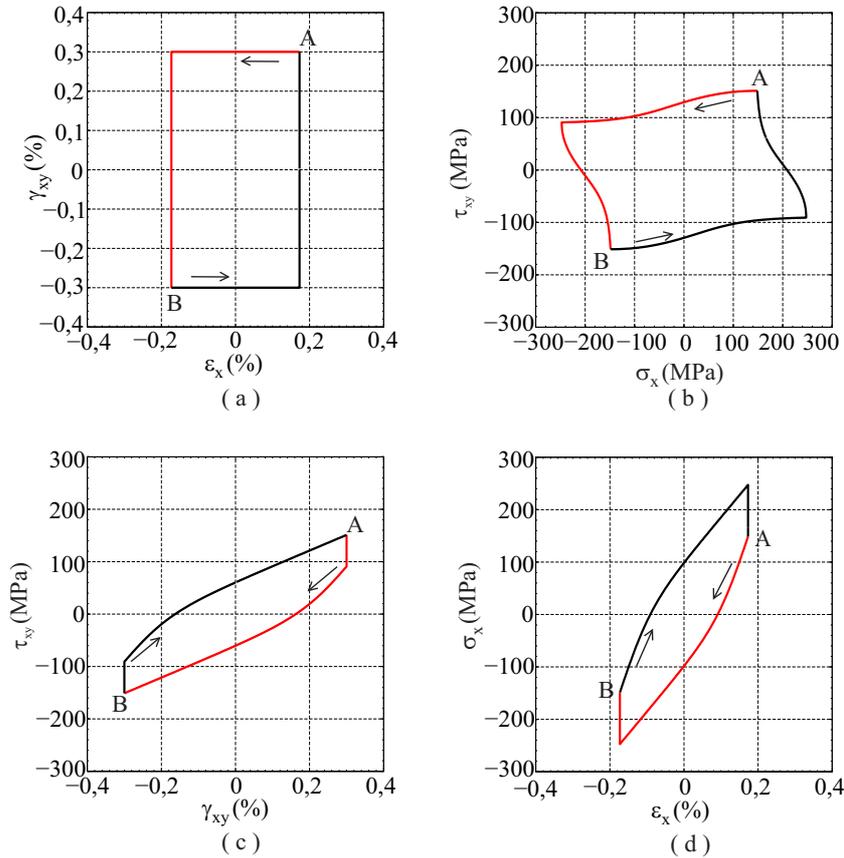


Figura 5.14: Representação do primeiro semiciclo  $AB$  e do segundo  $BA$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

Por outro lado, a relação entre deformação relativa equivalente  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e tensão relativa equivalente  $\sigma_{eq}^{rel}$  é usada para verificar o fechamento do par de semiciclos. O procedimento de obtenção da relação, tratado na Seção 5.2.1, também foi utilizado aqui. No entanto, o resultado alcançado, Fig. 5.15, permite observar que os semiciclos também se fecham formando um ciclo.

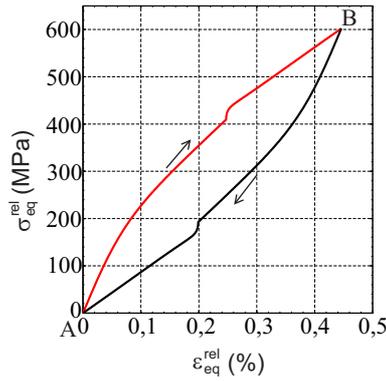


Figura 5.15: Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e  $\sigma_{eq}^{rel}$ . O primeiro semiciclo  $AB$  e o segundo  $BA$  formam um ciclo.

### 5.2.3 Carregamento trapezoidal II

Considera-se, nesta subseção, mais uma história de carregamento do tipo tração-compressão/cisalhamento estudada por Jiang e seus colaboradores [41]. O carregamento é não harmônico e sua trajetória tem a forma de losango. A história de deformações é ilustrada na Fig. 5.16 (a). O gráfico da Fig. 5.16 (b) ilustra a trajetória de deformação onde as amplitudes são  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,231\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,4\%$  [41]. Observa-se nas figuras que a trajetória inicia-se no ponto  $(0,231, 0)$ .

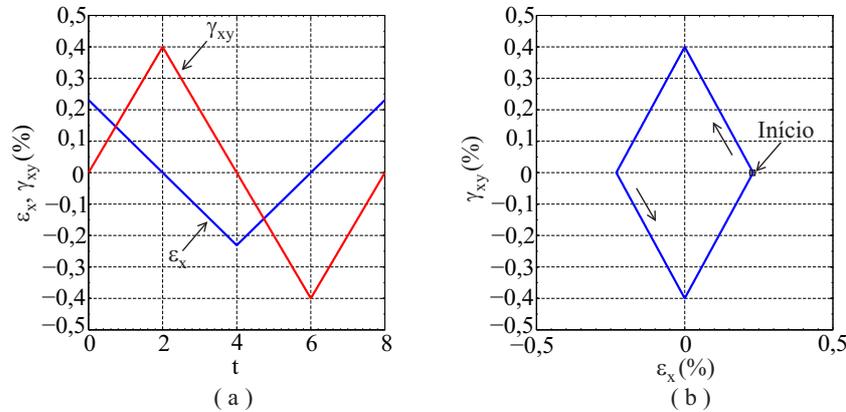


Figura 5.16: História de deformações em: (a)  $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$  e (b)  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

Para efeito de ilustração, apresentam-se as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  nas Figs. 5.17 (a), (b) e (c) onde foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e os seguintes parâmetros materiais  $E = 208,5$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 170$  MPa,  $K' = 1115$  MPa,  $n = 0,161$  e  $H_0 = 115,91$  GPa. O parâmetro  $H_0$  foi obtido considerando que a amplitude de deformação  $\varepsilon_a$  é dada em  $0,231\%$ .

Por meio do método de Wang & Brown, foram obtidos dois semiciclos que podem

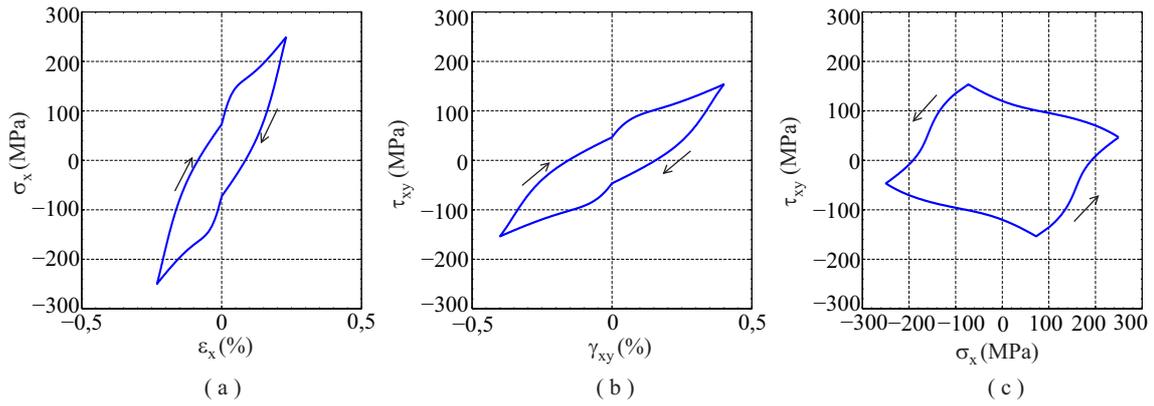


Figura 5.17: Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões.

ser representados no espaço de deformações  $\gamma_{xy} \times \epsilon_x$ , no espaço de tensões  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  e nas curvas  $\tau_{xy} \times \gamma_x$  e  $\sigma_x \times \epsilon_x$ , respectivamente, nas Figs. 5.18 (a), (b), (c) e (d). O trecho  $AB$  forma o primeiro semiciclo enquanto o caminho  $BA$  constitui o segundo. Em termos da deformação e também em termos da tensão, ambos possuem dois pontos em comum ( $A$  e  $B$ ) e, assim, constituem um ciclo.

De outro modo, a relação entre deformação relativa equivalente  $\epsilon_{eq}^{rel}$  e tensão relativa equivalente  $\sigma_{eq}^{rel}$  é usada para verificar o fechamento do par de semiciclos. O procedimento de obtenção desta relação, tratado na Seção 5.2.1, também foi utilizado aqui. Mais uma vez, o resultado obtido, Fig. 5.19, demonstra que os semiciclos realmente se fecham formando um ciclo.

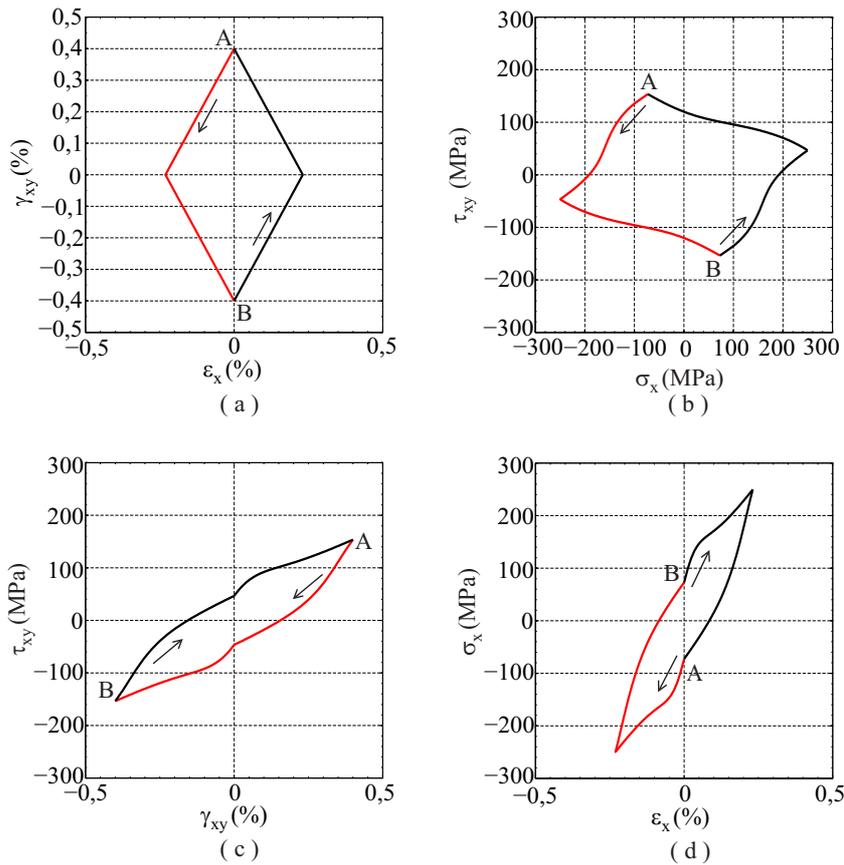


Figura 5.18: Representação do primeiro semiciclo  $AB$  e do segundo  $BA$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

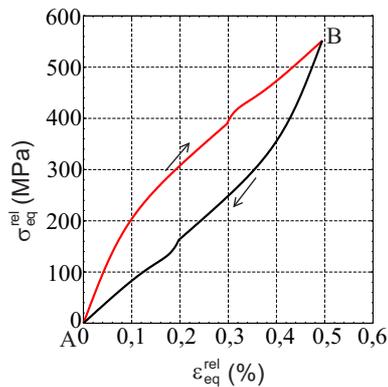


Figura 5.19: Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises  $\epsilon_{eq}^{rel}$  e  $\sigma_{eq}^{rel}$ . O primeiro semiciclo  $AB$  e o segundo  $BA$  formam um ciclo.

## 5.2.4 Carregamento cruciforme

Considerou-se uma história de carregamento do tipo tração-compressão/cisalhamento descrita pelas componentes de deformação prescrita. O carregamento não é harmônico e sua trajetória tem a forma de cruz. A história de deformações é ilustrada na Fig. 5.20

(a). O gráfico da Fig. 5.20 (b) ilustra a trajetória de deformação, onde as amplitudes de deformações fornecidas são  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,26\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,45\%$  [41]. De acordo com as figuras, a trajetória inicia-se na origem.

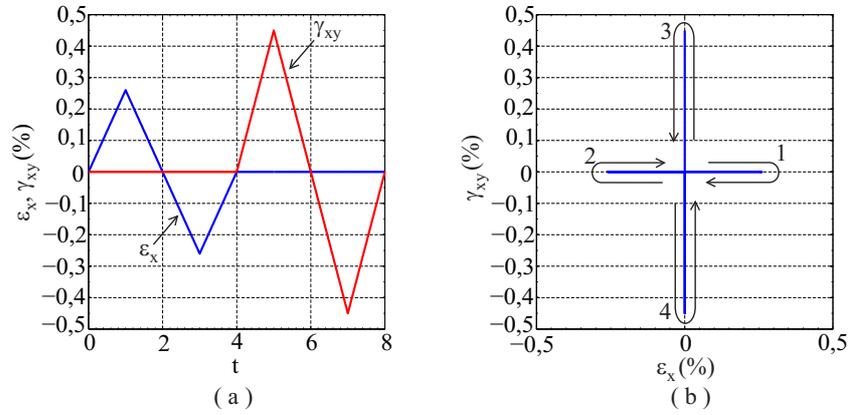


Figura 5.20: História de deformações em: (a)  $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$  e (b)  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

Para efeito de ilustração, apresentam-se as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  nas Figs. 5.21 (a), (b) e (c), onde foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e os seguintes parâmetros materiais  $E = 208,5$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 170$  MPa,  $K' = 1115$  MPa,  $n = 0,161$  e  $H_0 = 105,94$  GPa. Como o modelo considera o encruamento cinemático linear, as respostas mecânicas estabilizam após o primeiro ciclo. O parâmetro  $H_0$  foi obtido da mesma forma que anteriormente considerando que a amplitude de deformação  $\varepsilon_a$  é dada em  $0,260\%$ .

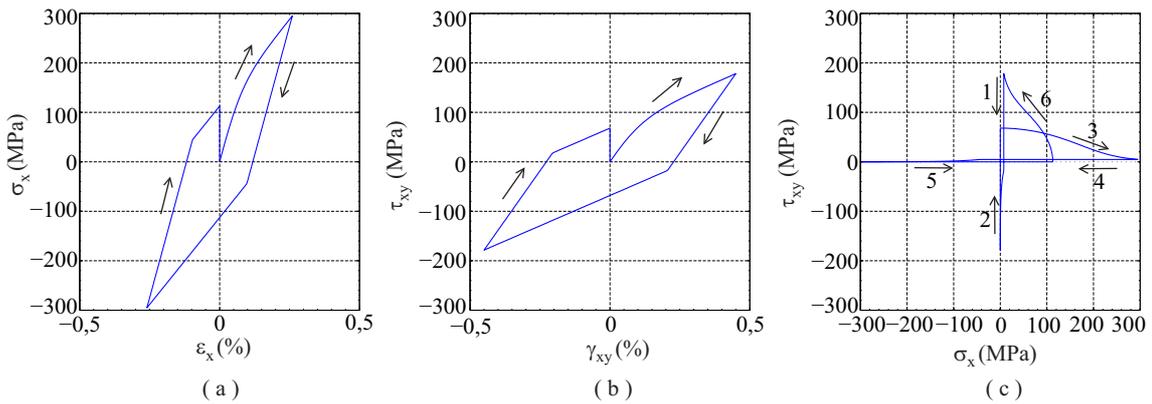


Figura 5.21: Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões.

Foram obtidos quatro semiciclos por meio do método de Wang & Brown cujos resultados são ilustrados nas Figs. 5.22 e 5.23. Nas Figuras, os semiciclos estão representados no espaço de deformações  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ , no espaço de tensões  $\tau_{xy} \times \sigma_x$ , nas curvas  $\tau_{xy} \times \gamma_x$

e  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ .

De acordo com as Figs. 5.22 (a), (b), (c) e (d), o caminho  $AB$  constitui o primeiro semiciclo enquanto o trecho  $BCC^*A$  forma o segundo semiciclo. Note-se que ambos semiciclos possuem dois pontos em comum ( $A$  e  $B$ ) tanto em termos da deformação quanto em termos da tensão e, desse modo, essa associação compõe um ciclo.

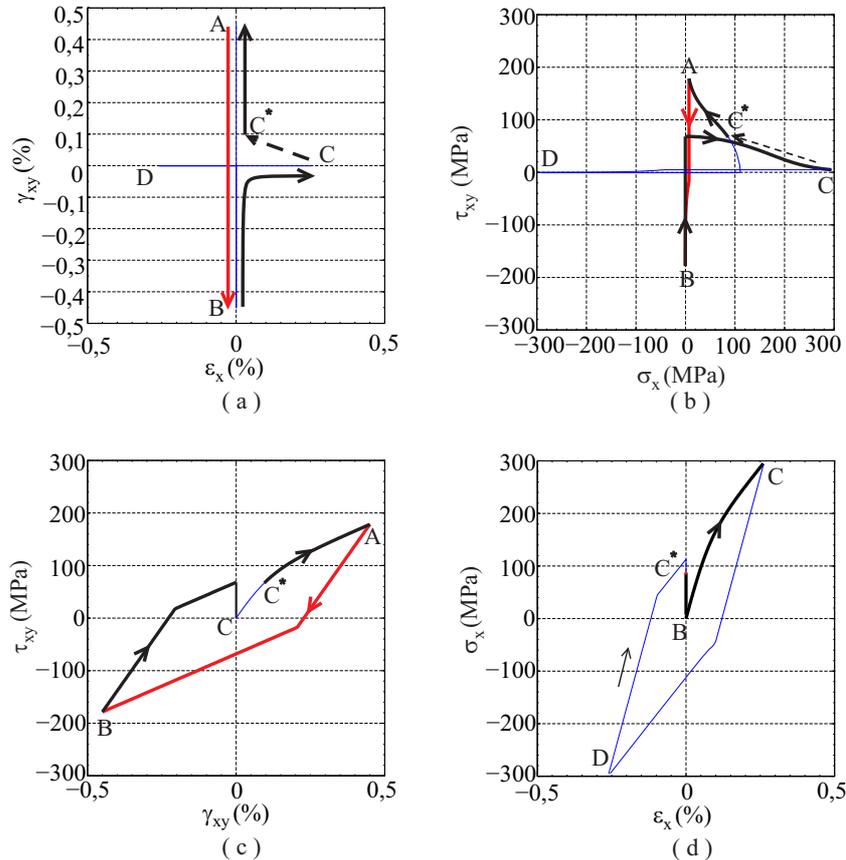


Figura 5.22: Representação do primeiro semiciclo  $AB$  e do segundo  $BCC^*A$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

Conforme as Figs. 5.23 (a), (b), (c) e (d), o terceiro semiciclo é formado pelo trecho  $CD$  e o quarto, pelo  $DC^*$ . Observe-se que ambos semiciclos somente possuem um ponto em comum  $D$  tanto em termos da deformação quanto em termos da tensão e, assim, não se forma um ciclo.

Por outro lado, a relação entre deformação relativa equivalente  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e tensão relativa equivalente  $\sigma_{eq}^{rel}$  é usada para verificar o fechamento do par de semiciclos. O procedimento de obtenção da relação, tratado na Seção 5.2.1, também foi utilizado aqui. Observa-se também no resultado, Fig. 5.24 (a), que o primeiro semiciclo (representado

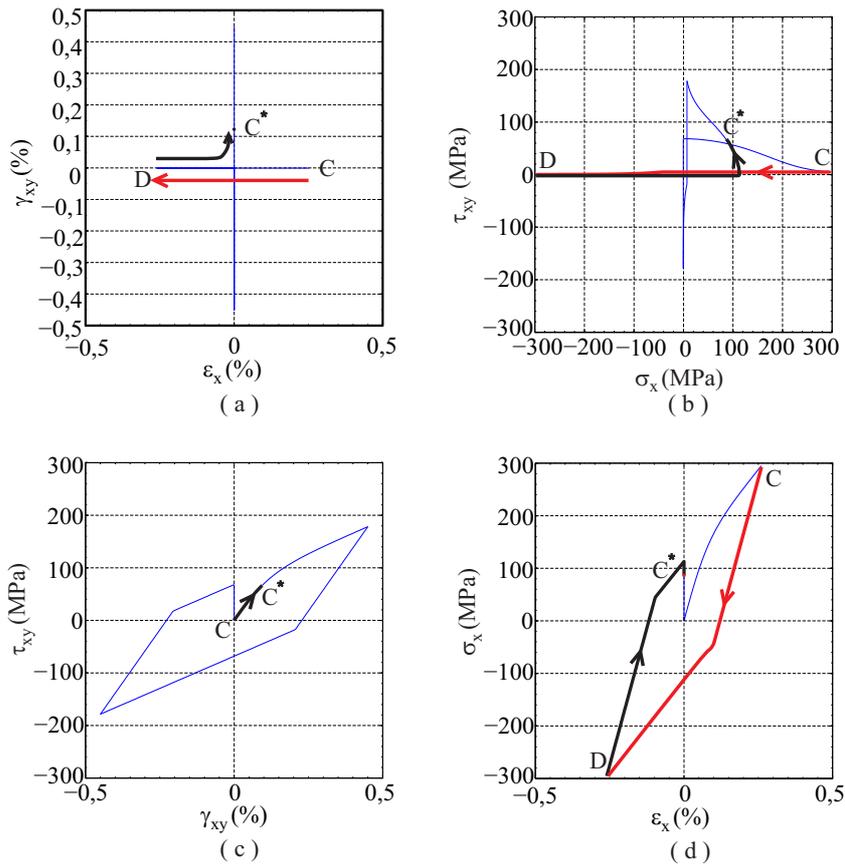


Figura 5.23: Representação do terceiro semiciclo  $CD$  e do quarto  $DC^*$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

pela cor vermelha) e o segundo semiciclo (representado pela cor preta) realmente se juntam formando um ciclo. Porém, o terceiro semiciclo (representado pela cor vermelha) e o quarto semiciclo (representado pela cor preta) não se relacionam formando um ciclo como pode ser observado na Fig. 5.24 (b), em razão de o primeiro ponto  $A$  do terceiro semiciclo não ser o mesmo que o último ponto  $C$  do quarto semiciclo, apesar de o último ponto  $D$  do terceiro semiciclo ser igual ao primeiro  $D$  do quarto semiciclo.

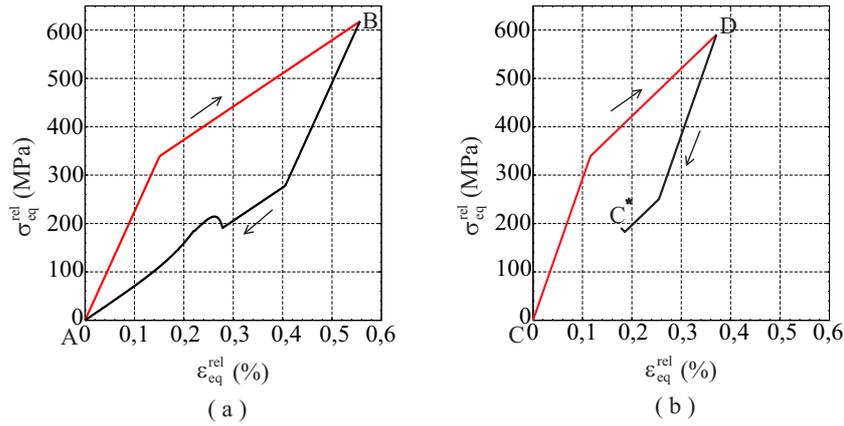


Figura 5.24: Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e  $\sigma_{eq}^{rel}$ . (a) o primeiro semiciclo  $AB$  e o segundo  $BA$  formam-se em um ciclo e (b) o terceiro  $CD$  e o quarto  $DC^*$  semiciclos não se fecham em um ciclo.

### 5.2.5 Carregamento não proporcional, harmônico e assíncrono

Considerou-se uma história de carregamento do tipo tração-compressão/cisalhamento descrita pelas componentes de deformação prescrita. O carregamento é harmônico e assíncrono. A história de deformações é ilustrada na Fig. 5.25 (a). O gráfico da Fig. 5.25 (b) ilustra a trajetória de deformação, onde as amplitudes de deformações são fornecidas  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,173\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,30\%$  [41]. Observa-se nas figuras que a trajetória tem início no ponto  $(0,173, 0)$ .

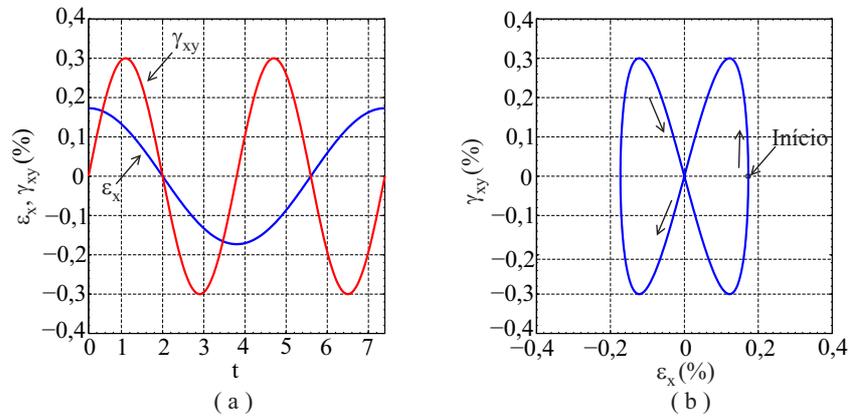


Figura 5.25: História de deformações em: (a)  $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$  e (b)  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

Para efeito de ilustração, apresentam-se as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  nas Figs. 5.26 (a), (b) e (c), onde foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e os seguintes parâmetros materiais  $E = 208,5$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 170$  MPa,  $K' = 1115$  MPa,  $n = 0,161$  e  $H_0 = 142,5$  GPa. Como o modelo considera o encruamento cinemático linear, as respostas mecânicas estabilizam após o primeiro

ciclo. O parâmetro  $H_0$  foi obtido da mesma forma que anteriormente considerando que a amplitude de deformação  $\varepsilon_a$  é dada em 0,173%.

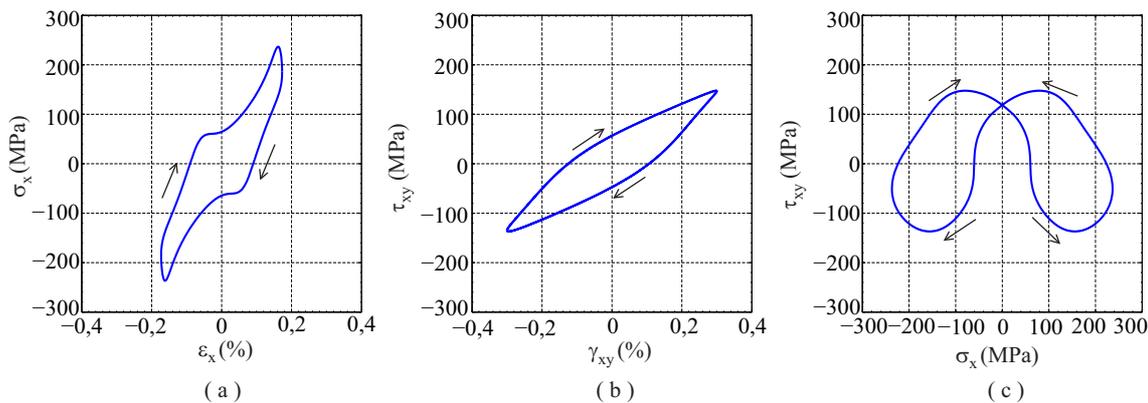


Figura 5.26: Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões.

Foram obtidos quatro semiciclos por meio do método de Wang & Brown e os resultados são ilustrados nas Figs. 5.27 e 5.28. Nas Figuras, os semiciclos estão representados no espaço de deformações  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ , no espaço de tensões  $\tau_{xy} \times \sigma_x$ , nas curvas  $\tau_{xy} \times \gamma_x$  e  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ .

De acordo com as Figs. 5.27 (a), (b), (c) e (d), o caminho  $AB$  constitui o primeiro semiciclo enquanto o trecho  $BCC^*A$  forma o segundo. Note-se que ambos semiciclos possuem dois pontos em comum ( $A$  e  $B$ ) tanto na deformação quanto na tensão, e desse modo, formam um ciclo.

De acordo com as Figs. 5.28 (a), (b), (c) e (d), o terceiro semiciclo, formado pelo trecho  $CD$ , e o quarto semiciclo, trecho  $DC^*$ , não compõem um ciclo uma vez que, tanto na deformação quanto na tensão, ambos não possuem dois pontos em comum, apenas o ponto  $D$ .

De outro modo, a relação entre deformação relativa equivalente  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e tensão relativa equivalente  $\sigma_{eq}^{rel}$  é usada para verificar o fechamento do par de semiciclos. O procedimento de obtenção da relação, tratado na Seção 5.2.1, também foi utilizado aqui. Observa-se também na Fig. 5.29 (a) que o primeiro semiciclo (representado pela cor vermelha) e o segundo (representado pela cor preta) realmente se juntam formando um ciclo. Porém, o terceiro semiciclo (representado pela cor vermelha) e o quarto semiciclo (representado pela cor preta) não se relacionam formando um ciclo como pode ser observado na Fig. 5.29 (b), em razão de o primeiro ponto  $C$  do terceiro semiciclo não

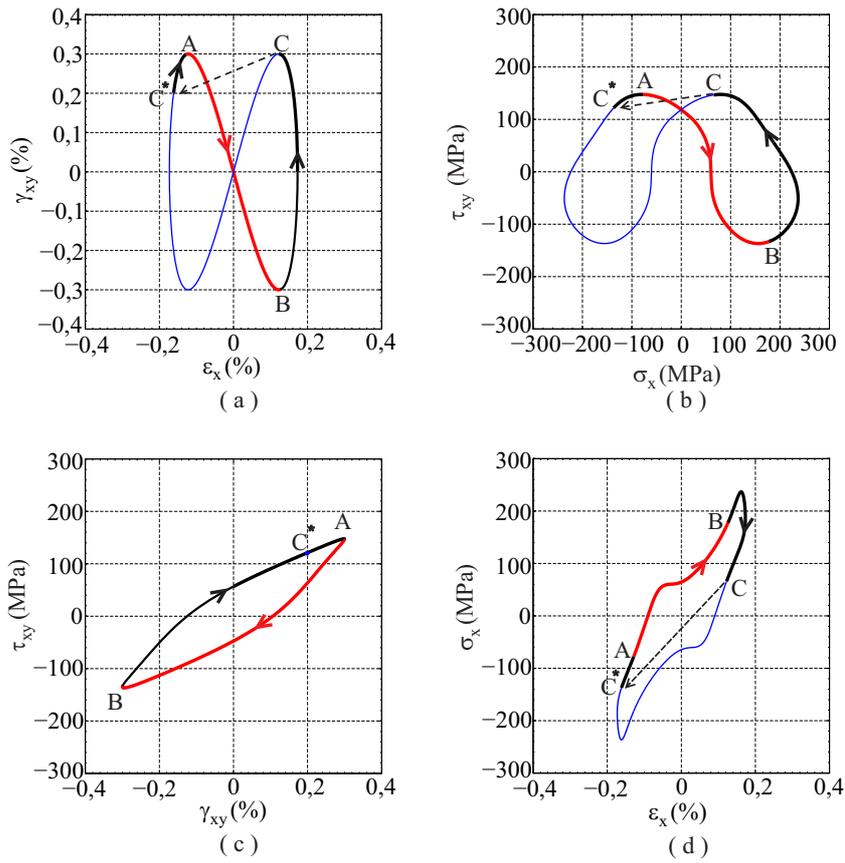


Figura 5.27: Representação do terceiro semiciclo  $AB$  e do quarto  $BCC^*A$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

ser o mesmo que o último ponto  $C^*$  do quarto semiciclo, embora o último ponto  $D$  do terceiro semiciclo seja igual ao primeiro do quarto semiciclo.

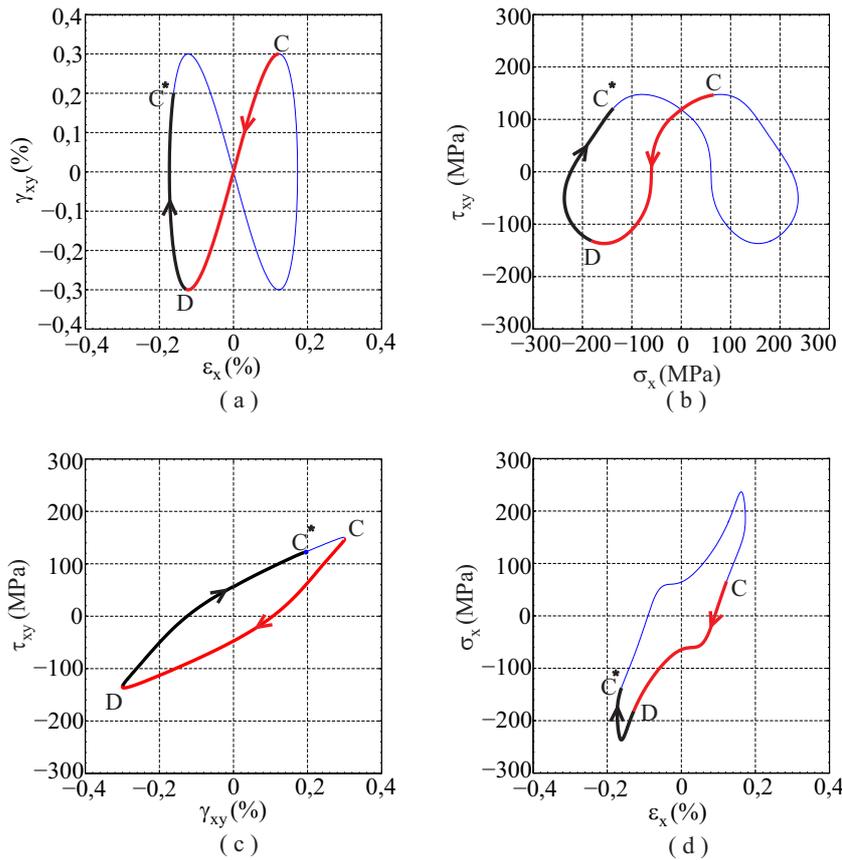


Figura 5.28: Representação do terceiro semiciclo  $CD$  e do quarto  $DC^*$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

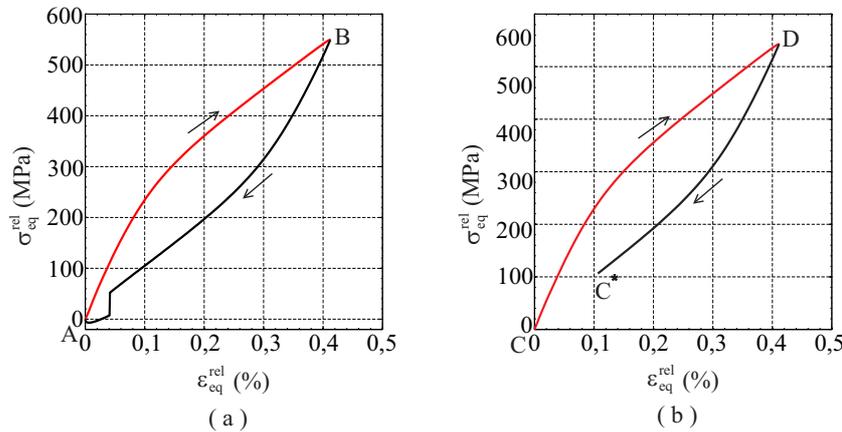


Figura 5.29: Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises  $\epsilon_{eq}^{rel}$  e  $\sigma_{eq}^{rel}$ . (a) o primeiro semiciclo  $AB$  e o segundo  $BA$  formam-se em um ciclo e (b) O terceiro  $CD$  e o quarto  $DC^*$  semiciclos não se fecham em um ciclo.

### 5.2.6 Carregamento retangular por partes

Da tese de Bannantine [6], considerou-se uma história de carregamento do tipo tração-compressão/cisalhamento. A história é ilustrada na Fig.5.30 (a). O gráfico da Fig.5.30

(b) mostra a trajetória da deformação, onde as amplitudes de deformações foram fornecidas  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,15\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,24\%$ . Note-se nas figuras que a trajetória tem início na origem.

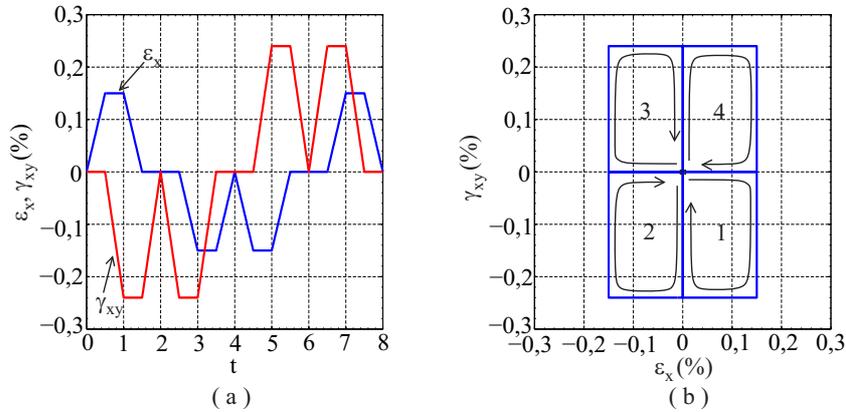


Figura 5.30: História de deformações em: (a)  $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$  e (b)  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

Para efeito de ilustração, apresentam-se as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  nas Figs. 5.31 (a), (b) e (c). Foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear com os seguintes parâmetros materiais  $E = 27000$  ksi,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 35$  ksi,  $K' = 240$  ksi,  $n = 0,287$  e  $H_0 = 26116$  ksi. O parâmetro  $H_0$  foi obtido da mesma forma que anteriormente considerando a amplitude de deformação  $\varepsilon_a$  é igual a  $0,15\%$ .

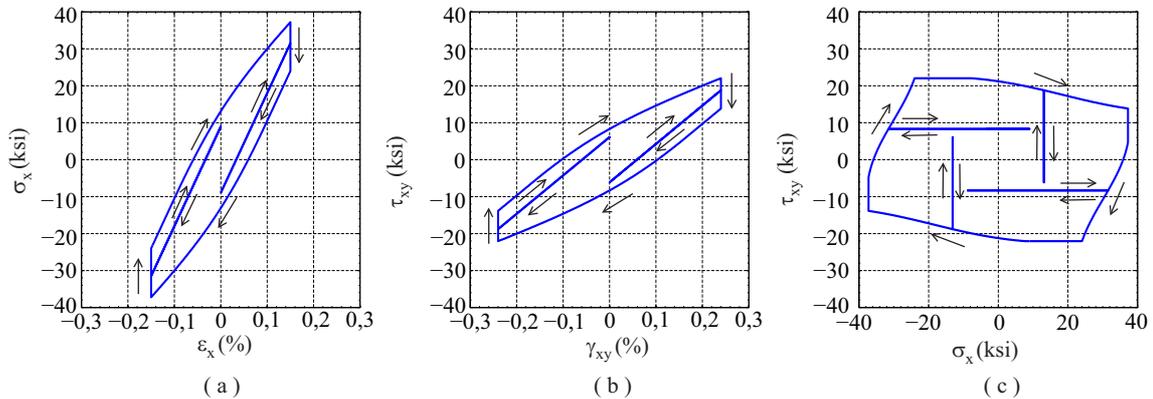


Figura 5.31: Respostas elastoplásticas: (a) tensão normal em função da deformação normal; (b) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (c) resposta mecânica ao carregamento, em termos de tensões.

Por meio do método de Wang & Brown, foram obtidos oito semiciclos, que são ilustrados nas Figs. 5.32, 5.33 e 5.34. Nas Figuras, os semiciclos estão representados no espaço de deformações  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ , no espaço de tensões  $\tau_{xy} \times \sigma_x$ , nas curvas  $\tau_{xy} \times \gamma_x$  e  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ .

De acordo com as Figs. 5.32 (a), (b), (c) e (d), o caminho  $ABB^*E$  constitui o primeiro semiciclo enquanto o trecho  $EFF^*A$  forma o quarto. Note-se que ambos semiciclos possuem dois pontos em comum ( $A$  e  $E$ ) tanto na deformação quanto na tensão, que formam um ciclo.

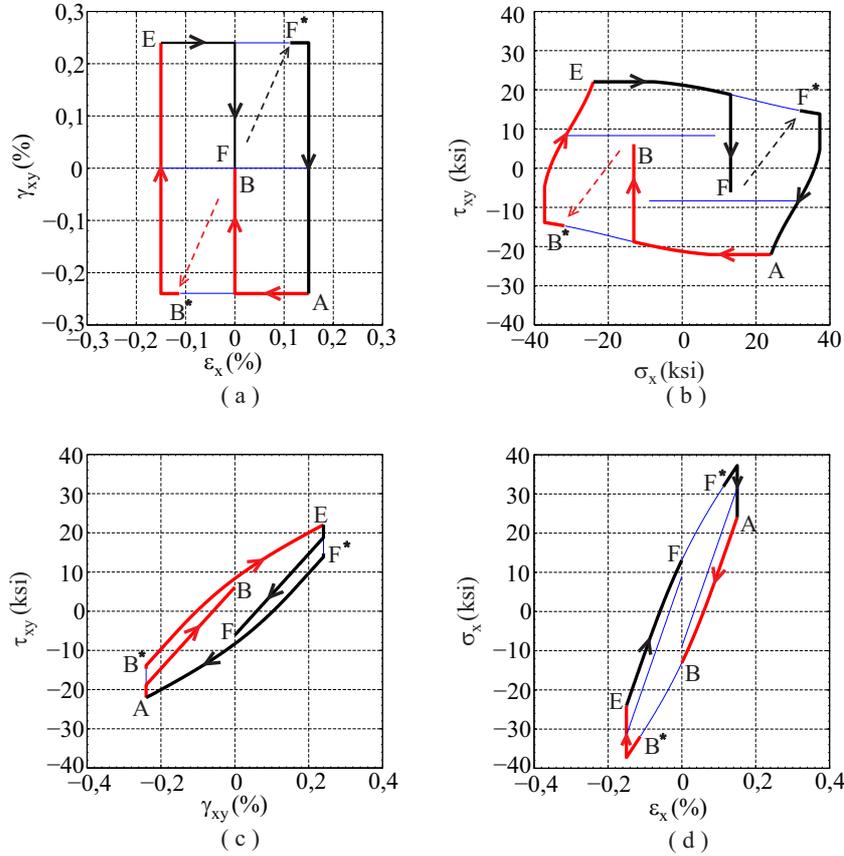


Figura 5.32: Representação do primeiro semiciclo  $ABB^*E$  e do quarto  $EFF^*A$  nas curvas (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

De acordo com as Figs. 5.33 (a), (b), (c) e (d), o segundo semiciclo, formado pelo trecho  $BB^*$ , e o sexto, trecho  $FF^*$ , não compõem um ciclo uma vez que ambos não possuem dois pontos em comum, apenas o ponto  $B = F$  em termos da deformação. Além disso, em termos da tensão, os semiciclos  $BB^*$  e  $FF^*$  não possuem nenhum ponto em comum.

De acordo com as Figs. 5.34 (a), (b), (c) e (d), o terceiro e o quinto semiciclos são, respectivamente, formados pelos trechos  $CD$  e  $DC$  e compõem um ciclo pela razão de ambos possuírem dois pontos em comum ( $C$  e  $D$ ) tanto na deformação quanto na tensão. Finalmente, o sétimo e o oitavo semiciclos são respectivamente formados pelos trechos  $GH$  e  $HG$  e compõem um ciclo uma vez que ambos possuem dois pontos em

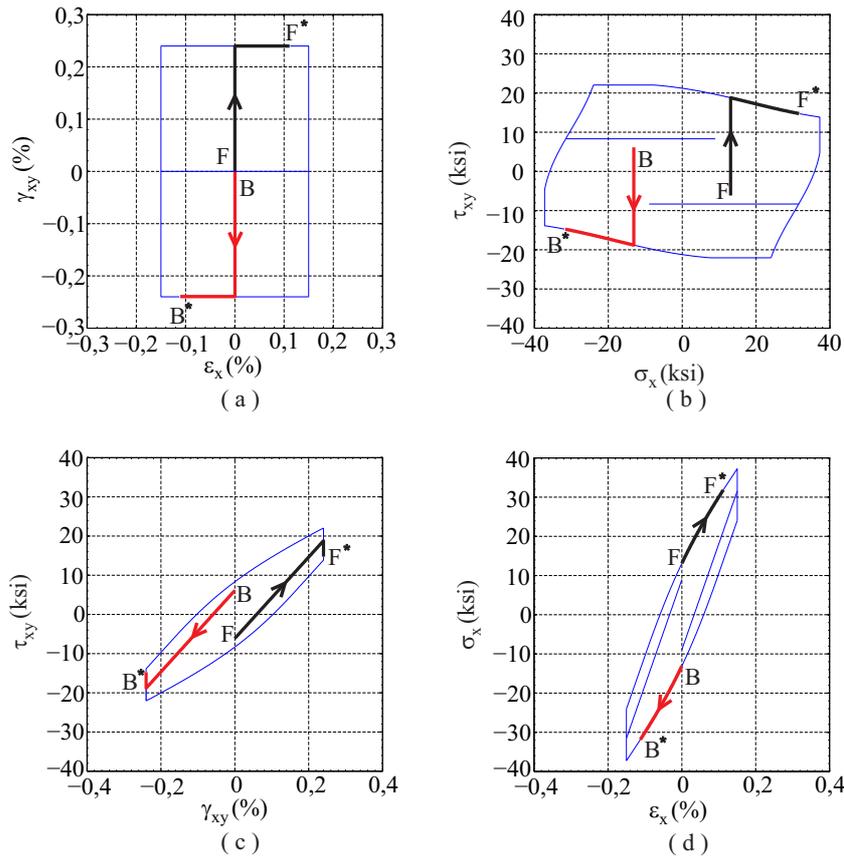


Figura 5.33: Representação do segundo semiciclo  $BB^*$  e do sexto  $FF^*$  nas curvas (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

comum ( $G$  e  $H$ ) tanto na deformação quanto na tensão.

Por outro lado, a relação entre deformação relativa equivalente  $\epsilon_{eq}^{rel}$  e tensão relativa equivalente  $\sigma_{eq}^{rel}$  é usada para verificar o fechamento do par de semiciclos. O procedimento de obtenção da relação, tratado na Seção 5.2.1, também foi utilizado aqui. Os resultados obtidos encontram-se nas Figs. 5.35 (a), (b) e (c). Observa-se que o primeiro semiciclo (representado pelo trecho  $AE$ ) e o quarto (trecho  $EA$ ) realmente formam um ciclo de histerese, vez que o primeiro ponto do primeiro semiciclo é o mesmo que o último ponto do quarto e, também, o último ponto do primeiro é igual ao primeiro do quarto semiciclo.

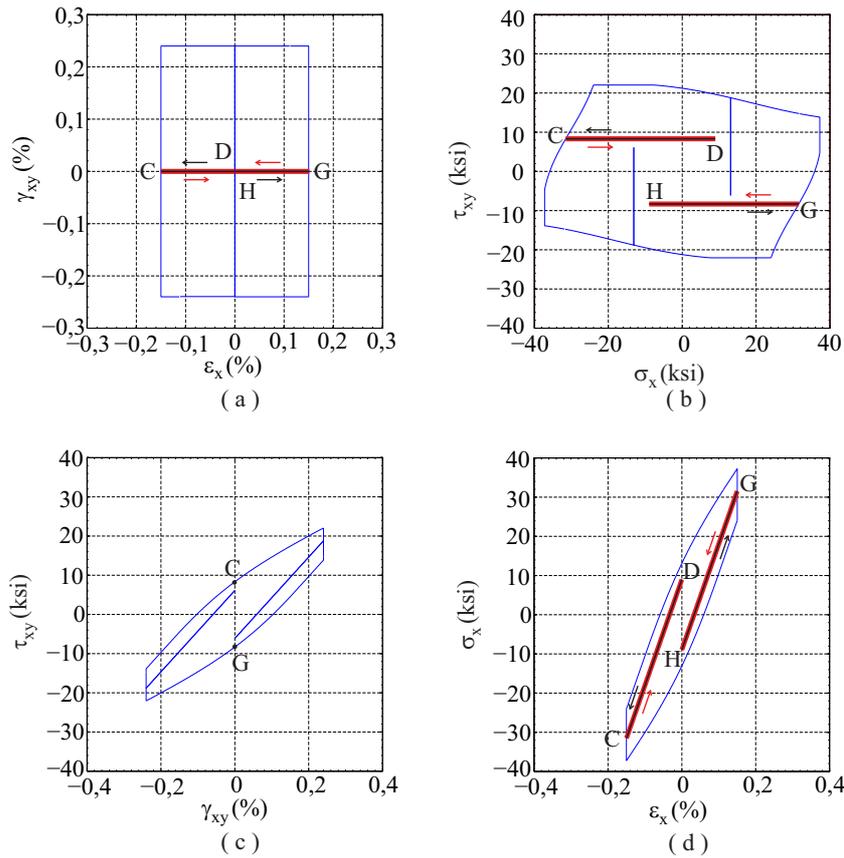


Figura 5.34: Representação do terceiro semiciclo  $CD$ , do quinto  $DC$ , do sétimo  $GH$  e do oitavo  $HG$  nas curvas (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

Ressalta-se também que o terceiro semiciclo (representado pelo trecho  $CD$ ) e o quinto (trecho  $DC$ ) apresentam-se relacionados formando um ciclo como ilustrado na Fig. 5.35 (b), em razão de o primeiro ponto do terceiro semiciclo ser o mesmo que o último do quinto e, ainda, o último ponto do terceiro semiciclo ser igual ao primeiro do quinto. Nota-se que o ciclo formado é elástico.

Observa-se ainda que o sétimo (trecho  $GH$ ) e o oitavo semiciclos (trecho  $HG$ ) formam um ciclo como ilustrado na Fig. 5.35 (c). Verifica-se que o primeiro ponto do sétimo semiciclo é o mesmo que o último do oitavo e, do mesmo modo, o último ponto do sétimo semiciclo é igual ao primeiro do oitavo. O ciclo formado também é elástico.

No entanto, observa-se que o segundo semiciclo (representado pelo trecho  $BB^*$ ) e o sexto (trecho  $FF^*$ ) não formam um ciclo. Nenhum dos dois semiciclos têm algum ponto em comum como é mostrado nas Figs. 5.33.

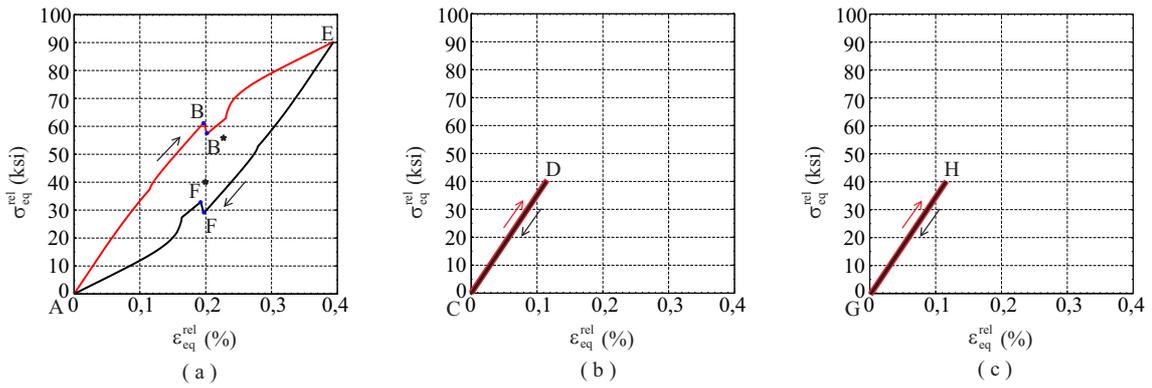


Figura 5.35: Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e  $\sigma_{eq}^{rel}$  (a) o primeiro  $ABB^*E$  e o quarto  $EFF^*A$  semiciclos formam um ciclo; (b) o terceiro  $CD$  e o quinto  $DC$  semiciclos formam um ciclo; e (c) o sétimo  $GH$  e o oitavo  $HG$  semiciclos compõem um ciclo.

Para este segundo exemplo, será utilizado uma forma sumária de ilustração. Considere uma história de carregamento retangular por partes com as aberturas de 0,025%, as amplitudes de deformações  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,22\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,38\%$  conforme as Figs. 5.36 (a) e (b). Observa-se que a trajetória têm início no ponto (0,1, 0).

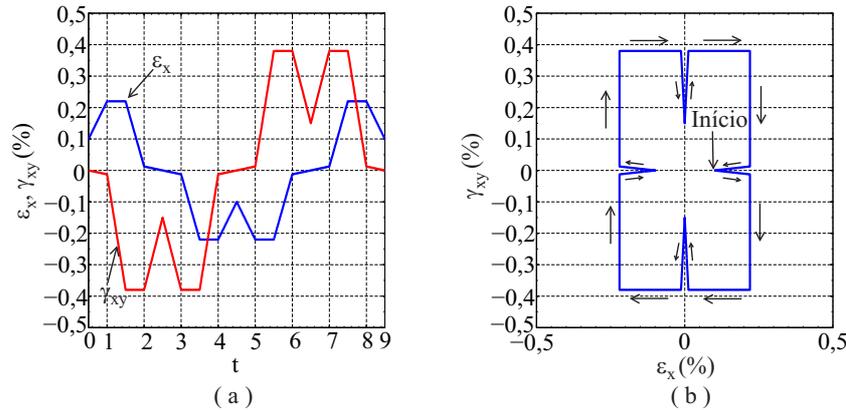


Figura 5.36: História de deformações em: (a)  $\gamma_{xy}, \varepsilon_x \times t$  e (b)  $\gamma_{xy} \times \varepsilon_x$ .

Apresentam-se as curvas  $\sigma_x \times \varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} \times \gamma_{xy}$  e  $\tau_{xy} \times \sigma_x$  nas Figs. 5.37 (b), (c) e (d), em que foi considerado o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e os seguintes parâmetros materiais  $E = 150$  GPa,  $\bar{\nu} = 0,3$ ,  $\sigma_0 = 150$  MPa e  $H_0 = 100$  GPa. Como o modelo considera o encruamento cinemático linear, as respostas mecânicas estabilizam após o primeiro ciclo.

Por meio do método de Wang & Brown, o primeiro semiciclo é formado pelo caminho  $ABB^*F$ , o segundo é constituído pelo trecho  $BB^*$ , o terceiro é formado pelo caminho  $CD$ , o quarto é constituído pelo trecho  $FGG^*A$ , o quinto é formado pelo caminho  $DE$ ,

o sexto é constituído pelo trecho  $GG^*$ , o sétimo é formado pelo caminho  $HI$  e, por fim, o oitavo semiciclo é constituído pelo trecho  $IJ$ .

De acordo com a Fig. 5.37 (a), o par dos semiciclos  $ABB^*F$  e  $FGG^*A$  constitui o ciclo  $AF A$  em termos das deformações normal e cisalhante uma vez que ambos os semiciclos possuem dois pontos em comum ( $A$  e  $F$ ). Essa associação também é verificada: em termos das tensões normal e cisalhante; em termos da tensão cisalhante e da deformação cisalhante; e em termos da tensão normal e da deformação normal, vide as Figs. 5.37 (b), (c) e (d). Ao analisar a associação em termos da tensão relativa equivalente e da deformação relativa equivalente, vide Fig. 5.40 (a), os semiciclos  $AF$  e  $FA$  efetivamente compõem o ciclo  $AF A$ .

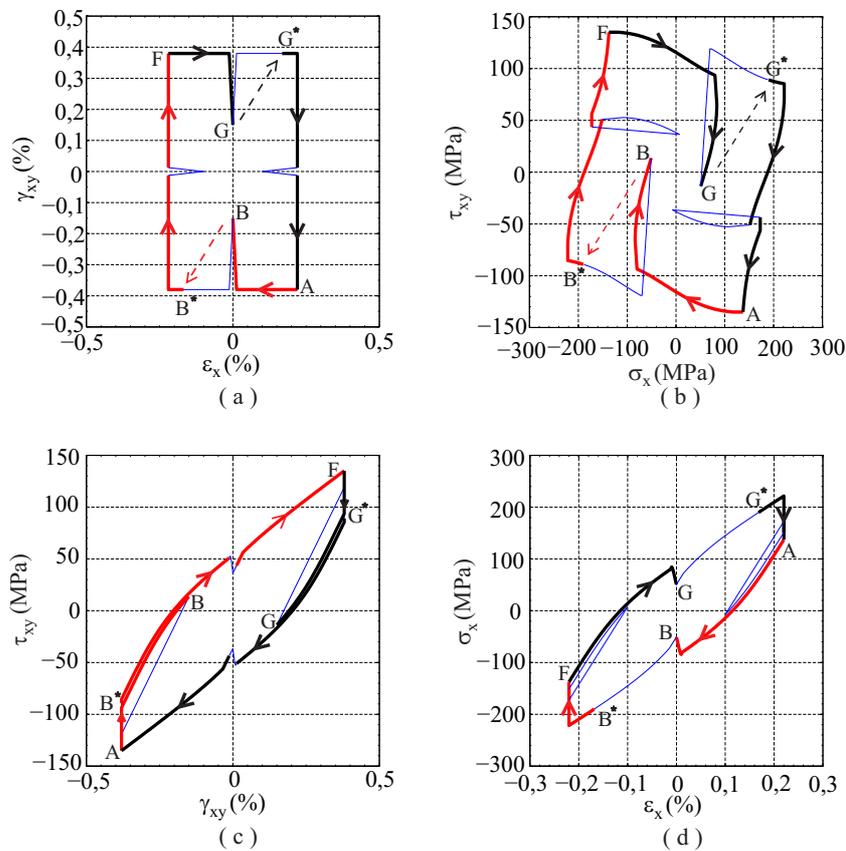


Figura 5.37: Representação do primeiro semiciclo  $ABB^*F$  e do quarto  $FGG^*A$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

De acordo com as Figs 5.38 (a), (b), (c) e (d), os semiciclos  $BB^*$  e  $FF^*$  não podem ser relacionados para formar um ciclo uma vez que seus pontos extremos não coincidem em termos da deformação e tampouco em termos da tensão.

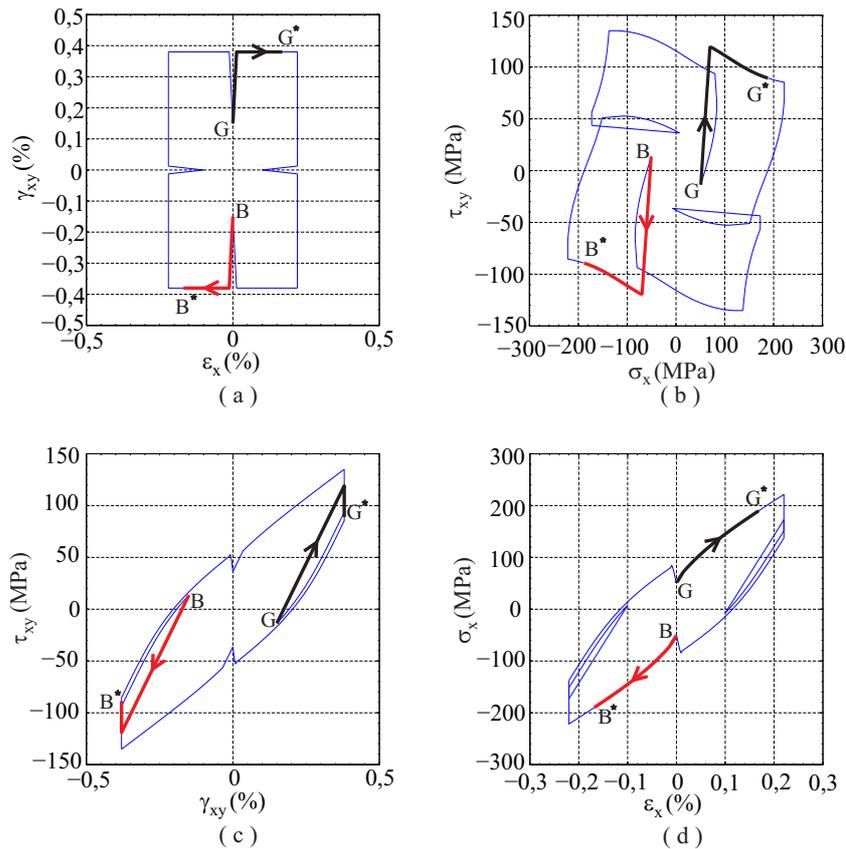


Figura 5.38: Representação do segundo semiciclo  $BB^*$  e do sexto  $GG^*$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

Em termos das deformações, segundo a Fig. 5.39 (a), os semiciclos  $CD$  e  $DE$  não formam um ciclo uma vez que ambos somente possuem um ponto em comum  $D$  e dois extremos diferentes  $C \neq E$ . A não associação dos semiciclos é também identificada: em termos das tensões normal e cisalhante; em termos da tensão cisalhante e da deformação cisalhante; e em termos da tensão normal e da deformação normal, vide as Figs. 5.39 (b), (c) e (d). De acordo com a Fig. 5.40 (b), os semiciclos  $CD$  e  $DE$  formariam um ciclo em termos da deformação relativa equivalente, mas, em termos da tensão relativa equivalente, não é possível essa formação, o que confirma a não associação dos semiciclos  $CD$  e  $DE$ .

Ainda na Fig. 5.39 (a), em termos das deformações, os semiciclos  $HI$  e  $IJ$  não formam um ciclo uma vez que ambos somente possuem um ponto em comum  $I$  e dois extremos diferentes  $H \neq J$ . A não associação dos semiciclos é também identificada: em termos das tensões normal e cisalhante; em termos da tensão cisalhante e da deformação cisalhante; e em termos da tensão normal e da deformação normal, vide as Figs. 5.39

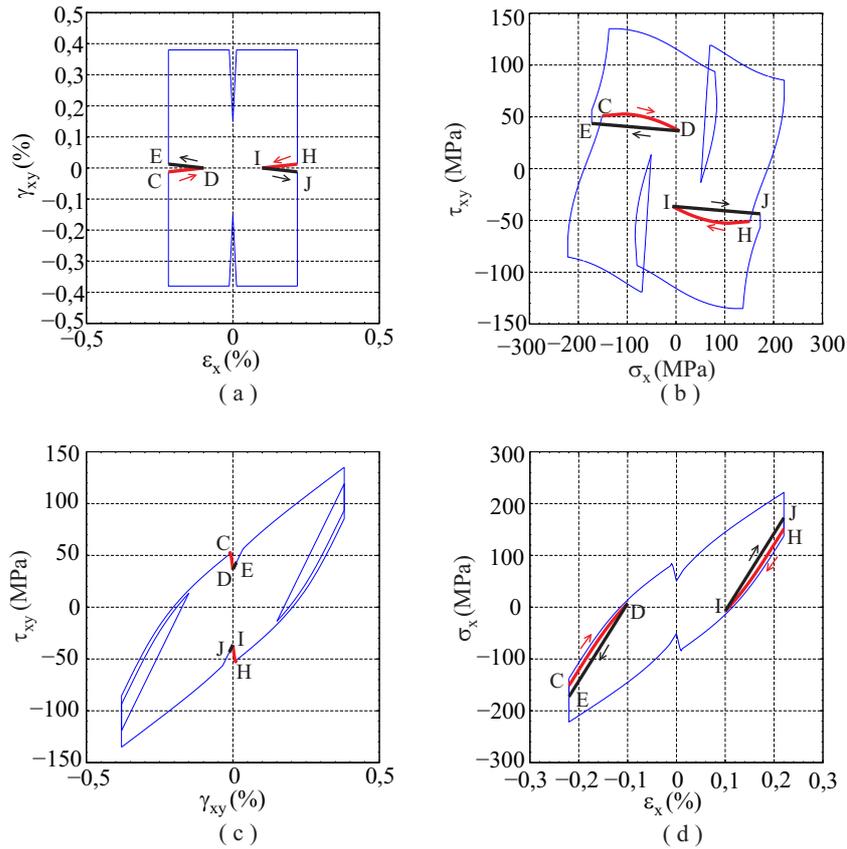


Figura 5.39: Representação do terceiro semiciclo  $CD$ , do quinto  $DC$ , do sétimo  $GH$  e do oitavo  $HG$  nas curvas: (a) deformação cisalhante em função da deformação normal; (b) tensão normal em função da deformação normal; (c) tensão cisalhante em função da deformação cisalhante; e (d) tensão cisalhante em função da tensão normal.

(b), (c) e (d). De acordo com a Fig. 5.40 (c), os semiciclos  $HI$  e  $IJ$  formam um ciclo em termos da deformação relativa equivalente, mas, em termos da tensão relativa equivalente, não é possível a formação, o que confirma a não associação dos semiciclos  $HI$  e  $IJ$ .

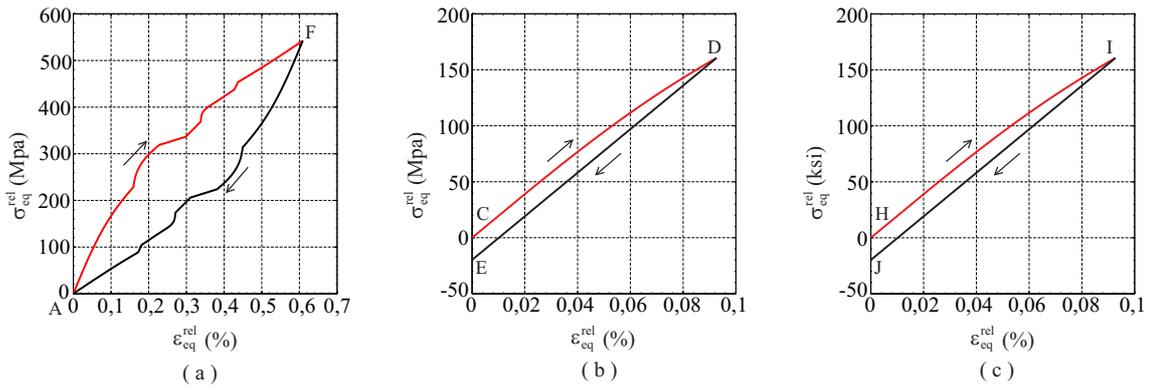


Figura 5.40: Ciclo de histerese descrito em termos da deformação e tensão equivalentes de Mises  $\varepsilon_{eq}^{rel}$  e  $\sigma_{eq}^{rel}$ : (a) o primeiro  $AF$  e o quarto  $FA$  semiciclos formam um ciclo; (b) o terceiro  $CD$  e o quinto  $DE$  semiciclos formam um ciclo; e (c) o sétimo  $HI$  e o oitavo  $IJ$  semiciclos compõem um ciclo.

Além das limitações inerentes à não formação de ciclos, referidas nos itens anteriores, outra limitação do método de Wang & Brown que deve ser citada diz respeito à existência de perturbações nas condições iniciais do sistema mecânico. Dessas perturbações decorrem modificações nas histórias de carregamento que, por sua vez, trazem alterações nos resultados alcançados pelo método.

Dada a história de carregamento linear por partes “sem aberturas” com as amplitudes  $\Delta\varepsilon_x/2 = 0,15\%$  e  $\Delta\gamma_{xy}/2 = 0,24\%$ , perturba-se apenas o ponto  $(-0,15, -0,24)$  para  $(-0,155, -0,245)$ , Fig. 5.41 (a). O método de Wang & Brown identifica dois semiciclos  $ABB^*E$  e  $EFF^*A$  e seus resultados são ilustrados na Fig. 5.41 (b). Na Fig. 5.41 (c), perturba-se também apenas o ponto  $(-0,15, 0,24)$  para  $(-0,155, 0,245)$ . Os resultados obtidos pelo método são ilustrados na Fig. 5.41 (d).

Conforme mostrado nas Figs. 5.41 (b) e (d), de fato, o método de contagem de ciclos de Wang & Brown depende das condições iniciais do sistema. Nos casos em que a perturbação ocorre em pontos mais distantes da origem, a contagem também tem início neste mesmo ponto gerando semiciclos diferentes.

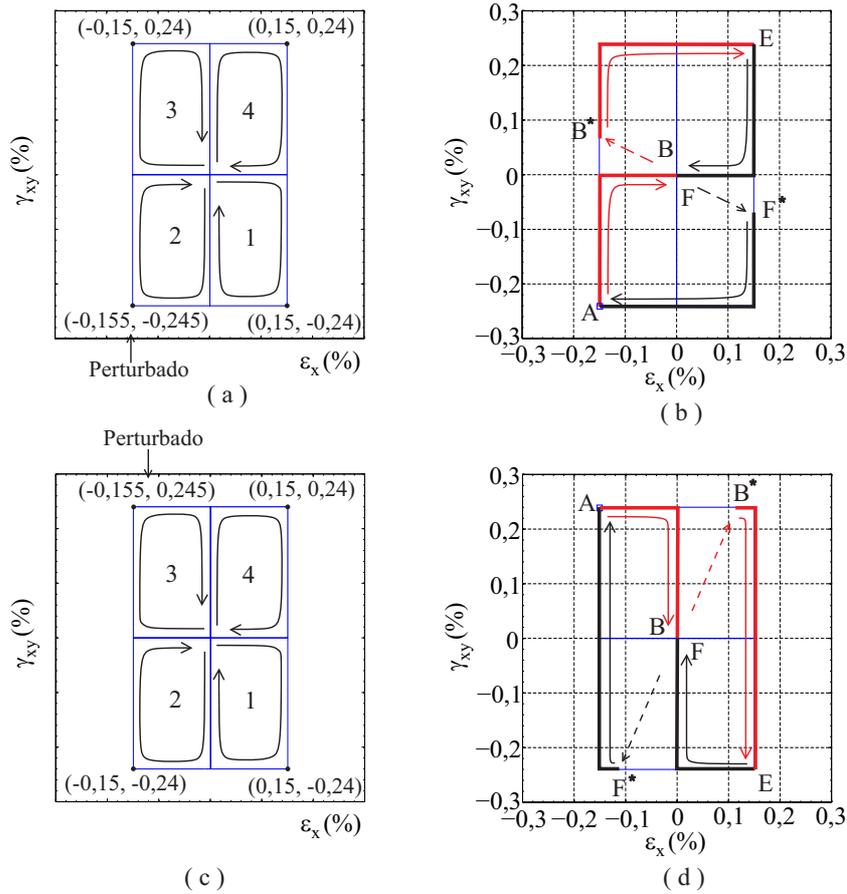


Figura 5.41: Cada história de carregamento é perturbada no ponto: (a)  $(-0,155, -0,245)$  e (c)  $(-0,155, 0,245)$ . Os resultados obtidos pelo método de Wang & Brown para cada história: (b) o primeiro caso da perturbação e (d) o segundo.

## Capítulo 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O presente trabalho apresentou um estudo crítico do método de Wang & Brown para a contagem de ciclos no contexto da estimativa da vida à fadiga sob condições de carregamentos multiaxiais proporcionais e não-proporcionais. O estudo compreendeu: (i) a implementação computacional do método em linguagem Matlab; (ii) a implementação computacional, também em linguagem Matlab, de um algoritmo de simulação do comportamento elastoplástico para condições de carregamento multiaxial não-proporcional do tipo tração-cisalhamento; (iii) a simulação numérica do comportamento elastoplástico correspondente; e (iv) a verificação da possibilidade de associar pares de semiciclos (identificados pelo método) para cada história de deformação multiaxial e não proporcional analisada, formando ciclos que estariam associados aos caminhos de histerese elastoplásticos, da mesma forma que se observa no caso do método *rainflow* (no contexto unidimensional).

Os resultados obtidos permitem concluir que:

- (i) o método de Wang & Brown é consistente com o método de *Rainflow simplificado* quando se consideram histórias uniaxiais de carregamento, i.e., os dois métodos definem os mesmos semiciclos (e os mesmos ciclos);
- (ii) dependendo da história de carregamento multiaxial, o método de Wang & Brown produz semiciclos que não podem ser agrupados para a definição de ciclos de histerese elastoplástica. Isto constitui uma limitação para a utilização do método de Wang & Brown na estimativa de vida à fadiga por meio do modelo proposto por Mamiya, Araújo & Castro [17, 19, 18, 20], que depende da identificação de ciclos (e não de semiciclos) para o cálculo das amplitudes de tensão cisalhante associadas à história de carregamento;
- (iii) o conjunto de semiciclos identificados pelo método de Wang & Brown pode variar sob o efeito de pequenas perturbações na história de carregamento.

Assim, apesar do método de Wang & Brown ser bastante empregado para a contagem de semiciclos quando se considera modelos de estimativa à fadiga como os de Fatemi

& Socie [11], Smith, Watson e Topper [42], Brown & Miller [43], etc., novas pesquisas sobre o método de contagem se fazem necessárias de modo a se eliminar a sensibilidade de seus resultados a pequenas perturbações na história de carregamento.

No contexto de uma metodologia de contagem de ciclos visando a extensão da proposta de Mamiya e Castro de estimativa de vida à fadiga para situações envolvendo carregamentos com amplitude variável, o método de Wang & Brown se mostra pouco promissor. Isto se deve ao fato de que nem sempre este método é capaz de definir os ciclos necessários ao cálculo das amplitudes de tensão cisalhante demandadas pelo modelo de Mamiya, Araújo & Castro. Neste sentido, outras propostas de contagem de ciclos sob carregamentos multiaxiais com amplitude variável devem ser consideradas, incluindo-se, por exemplo, aquele proposto por Bannantine & Socie [6] e, ainda, aquele proposto por Meggiolaro et al. [7]. Não pode ser descartada também a necessidade de se propor um novo método de contagem de ciclos, talvez mais aderente com a associação a ciclos de histerese elastoplástica.

Outro aspecto que deve ser explorado na sequência dos trabalhos é o estudo de modelos elastoplásticos que sejam capazes de reproduzir comportamentos mecânicos quantitativamente consistentes com aqueles observados nos materiais usualmente empregados nas aplicações industriais. Como a degradação por fadiga em metais está associada a deformações plásticas, modelos de estimativa de vida à fadiga de baixo-ciclo são fortemente dependentes da relação entre as deformações e as tensões correspondentes. Um dos modelos para a descrição do comportamento elastoplástico que tem merecido maior atenção, no contexto da fadiga, é aquele proposto por Jiang & Sehitoglu [44, 45], por sua capacidade de descrever o comportamento elastoplástico sob carregamentos não proporcionais com grande aderência nas observações experimentais.

## 6.1 TRABALHOS FUTUROS

Como trabalhos futuros, propõem-se:

- (i) Novas pesquisas sobre o método de contagem de ciclos de Wang & Brown de modo a se eliminar a sensibilidade de seus resultados a pequenas perturbações na história de carregamento;
- (ii) O estudo do impacto de pequenas perturbações na história de carregamento — e a conseqüente variação dos semiciclos identificados pelo método — na previsão

de vida à fadiga;

- (iii) O estudo dos métodos de contagem de ciclos propostos por Bannantine [6] e por Meggiolaro [7];
- (iii) Uma avaliação da influência do modelo elastoplástico — e consequente relação entre as histórias de deformação e de tensão — na estimativa de vida à fadiga.

## Referências Bibliográficas

- [1] Schijve, J. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *Materials Science*, Vol. 39, No. 3, 2003.
- [2] Reed, R.P., Smith J.H., and Christ, B.W. The economics effects of Fracture in the United States. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards Special Publication 647-1, March, 1983, Washington.
- [3] Milne, I. The importance of the management of structural integrity. *Engineering Failure Analysis*, 1994, vol. 1, no. 3, pp. 171-181.
- [4] Socie, D., Marquis, G. *Multiaxial Fatigue*. SAE International, 1999.
- [5] Wang C.H. & Brown M.W. Inelastic deformation and fatigue under complex loading, *SMiRT - 12*, Elsevier Science Publishers, 1993, 159-170.
- [6] Bannantine, J.A. and Socie, D.F. A Variable Amplitude Multiaxial Fatigue Life Prediction Method. *Fatigue Under Biaxial and Multiaxial Loading*, ESIS10, 1991, 35-51.
- [7] Meggiolaro, M.A. de Castro, J.T.P. An improved multiaxial rainflow algorithm for non-proportional stress or strain histories - Part II: The modified Wang-Brown method. *Int J Fatigue*, 2011, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.10.012.
- [8] Papadopoulos, I.V., Davoli, P., Gorla, C., Fillippini, M., Bernasconi, A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *Int J Fatigue* 1997;19(3):219–35.
- [9] You, B.R., Lee, S.B.. A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. *Int J Fatigue* 1996;18(4):235–44.
- [10] Findley W. N., 1959, A theory for the effect of mean stress of fatigue under combined torsion and axial load or bending, *Trans. ASME Ser.B*, 81: 301–306.

- [11] Fatemi, A., Socie, D.F., 1988. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 11, No. 3, pp. 149-165.
- [12] McDiarmid, D. L., A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 1994, 17:1475–1484.
- [13] Morel, F. A critical plane fatigue model applied to out-of-phase bending and torsion load conditions. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2000, Vol. 24, pp. 153-164.
- [14] Papadopoulos, I. V. Long life fatigue under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 2001, Vol. 23, pp. 839-849.
- [15] Freitas, M., Li, B. e Santos, J.L.T. A numerical approach for high-cycle fatigue life prediction with multiaxial loading. In : S. Kalluri and P.J. Bonacuse, editors, *Multiaxial Fatigue and Deformation: Testing and Prediction (ASTM STP 1387)*, 2000, pp. 139-156.
- [16] Cristofori, A., Susmel, L. e Tovo, R. A stress invariant based criterion to estimate fatigue damage under multiaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 2008, Vol. 30, pp. 1646-1658.
- [17] Mamiya, E.N., Araújo, J.A. e Castro, F.C. Prismatic hull: A new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue* 2009, Vol.31, pp. 1144-1153.
- [18] Castro FC, Araújo J, Mamiya EN, Zouain N. Remarks on multiaxial fatigue limit criteria based on prismatic hulls and ellipsoids. *Int J Fatigue* 2009;31:1875–81.
- [19] Mamiya, E. N., Castro, F. C., Algarte, R.D. and Araújo, J.A. Multiaxial fatigue life estimation based on a piecewise ruled S-N surface. *Int J Fatigue* 33. 2011, 529-540.
- [20] Mamiya, E. N. e Castro, F. C. A model for multiaxial fatigue life prediction based on a new measure of shear stress amplitude. *Proceedings of COBEM 2009*.
- [21] Palmgren, A. The endurance of ball bearings, *Z. Ver. Deut. Ing.*, 1924, 68, 339–341.

- [22] Miner, M. A. Cumulative damage in fatigue. *J. Appl. Mech.*, 1945, vol. 12, 159–164.
- [23] ASTM Standard E1823. Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing. 1996.
- [24] Lee, Y., Taylor, D. *Fatigue Testing and Analysis: Chapter 5 Strain-Based Fatigue Analysis and Design*. Elsevier Inc. 2005.
- [25] Stephens, R.I., Fatemi, A., Stephens, R.R. and Fuchs, H.O. *Metal Fatigue in Engineering*. 2nd Edition. Wiley Inter Science. 2001.
- [26] Ramberg, W., e Osgood, W. R. Description of stress-strain curves by three parameters. Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC, 1943.
- [27] ASTM Standard E466. Conducting Force Controlled Constant Amplitude Axial Fatigue Tests of Metallic Mareials. 1996.
- [28] Basquin, O.H. The exponential law of endurance tests. In: *Proc. annual meeting, American society for testing materials*, vol. 10; 1910. p. 625–30.
- [29] Bannantine, J.A., Comer, J.J. and Handrock, J.L. *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1990, 232-238.
- [30] Coffin Jr., L. F. Low cycle fatigue — A review. *Appl. Math. Res.*, 1, 129. 1962.
- [31] Manson, S. S. e Hirschberg, M. H. Fatigue behavior in strain cycling in the low- and intermediate-cycle range. In: *Fatigue, an Interdisciplinary Approach*, Syracuse University, Syracuse 1964, pp. 133–178.
- [32] Matsuishi, M. and Endo, T. Fatigue of metals subjected to varying stress. Apresentado à *Japan Society of Mechanical Engineers*, Fukuoka, Japan, March 1968.
- [33] ASTM Standard E1049. Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis. Philadelphia, PA, vol. 03.01, 1997.
- [34] Wang C.H. & Brown M.W. A study of the deformation behaviour under multiaxial loading. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 13, n.2, 1994, 159-170.

- [35] Wang C.H. & Brown M.W. 1994a, Multiaxial Random Fatigue: Theories and Experiments. Fourth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue, Paris
- [36] Wang C.H. & Brown M.W. Life Prediction Techniques fo Variable Amplitude Multiaxial Fatigue - Part 1: Theories. Journal of Engineering Materials and Technology, 1996, v.118: 367-370.
- [37] Wang C.H. & Brown M.W. Life Prediction Techniques fo Variable Amplitude Multiaxial Fatigue - Part 2: Comparison With Experimental Results. Journal of Engineering Materials and Technology, 1996, v.118: 371-374.
- [38] Simo, J.C. & Hughes, T.J.R. Computational Inelasticity, Springer, 1998.
- [39] von Mises, R. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Göttin. Nachr, 1913, Math. Phys., vol. 1, pp. 582–592.
- [40] Prager, W. Problèms de plasticité théorique. Dunod, 1958.
- [41] Jiang, Y., Hertel, O. and Vormwald, M. An Experimental Evaluation of Three Critical Plane Multiaxial Fatigue Criteria. International Journal of Fatigue, 2007, 29: 1490-1502.
- [42] Smith, R.N., Watson, P., Topper, T.H. A stress-strain parameter for the fatigue of metals, Journal of Materials, 1970, 5:767-778.
- [43] Brown M. W., Miller K. J., A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain condition, Proc Inst Mech Engrs, 1973, 187:745–755.
- [44] Jiang, Y., Sehitoglu, H., Modeling of cyclic ratchetting plasticity, Part I: development of constitutive relations, ASME journal of Applied Mechanics, 1996, 63:720-725.
- [45] Jiang, Y., Sehitoglu, H. Modeling of cyclic ratchetting plasticity, Part II: comparison of model simulations with experiments, ASME journal of Applied Mechanics, 1996, 63:726-733.

## APÊNDICES

## Apêndice A LISTAGEM DO ALGORITMO DE CONTAGEM DE CICLOS DE WANG & BROWN

A listagem do algoritmo de contagem de ciclos de Wang & Brown é apresentada em linguagem MATLAB.

### A.0.1 Rotina **WBmain\_01\_strain.m**

```
% Estudo do metodo de contagem de ciclos de Wang & Brown
% (c) 2011 FA de Paula - Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais, UnB
% criado em 14 de abril de 2011
% -----
% referencias
% CH Wang & MW Brown (1993) Inelastic deformation and fatigue under complex
% loading, SMiRT-12, Elsevier Science Publishers
%
% DF Socie &GB Marquis (2000) Multiaxial fatigue, SAE International
% -----

% Teste de historia utilizada no artigo de Bannantine e Socie [20]
% 13 / 09 / 11

clear;
close all;
fprintf('\n\n\n\n');
fprintf('Estudo do metodo de Wang & Brown para contagem de ciclos\n');
fprintf('(c)2011 FA de Paula, Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais, UnB\n');
fprintf('versao de 27 de abril de 2011\n\n');

%% HISTORIA DE DEFORMACOES:
%% A historia de deformacoes considerada neste estudo e baseada no exemplo
%% apresentado por Bannantine & Socie para historia de deformacoes.
%
```

```

load('eps_sig.mat','eps','sig')

S0 = [eps(1,:) eps(2,:)]';
[nt,~] = size(S0);
t0 = 0:1:nt-1;
t0 = t0';

% -----
fprintf('HISTORIA DE DEFORMACOES\n');
fprintf('      t      epsxx      epsxy\n');
disp([t0 S0]);

figure('Name','Historia de deformacoes');
xlim([-0.003 0.003]); ylim([-0.006 0.006]);
xlabel('\epsilon_{xx}'); ylabel('\gamma_{xy}');
axis square;
box on;
hold on;
plot(S0(:,1),S0(:,2),'LineWidth',2);
plot(S0(1,1),S0(1,2),'s');
plot([-0.003 0.003],[0 0],'color','k');
plot([0 0],[-0.006 0.006],'color','k');
% -----

% determinacao do ponto de valor maximo da deformacao equivalente.
%
% O objetivo aqui e a determinacao do ponto mais distante da origem. A
% expectativa e a de que, desta forma, se localize o ponto inicial do
% semi-ciclo de maior amplitude. Um estudo de Meggiolaro demonstra que ha
% falhas neste procedimento. Entretanto, para efeito desta etapa dos
% estudos, seguiremos o roteiro proposto por Socie e Marquis.

Seq0 = equivStrain(t0,S0); % calculo da deformacao equivalente da trajetoria
                        % de deformacoes

figure('Name','Construcao dos semiciclos')
[nt,t,S,Seq] = new_origin(t0,S0,Seq0); % reordenamento da historia de
                                        % deformacao: primeiro instante deve
                                        % conter Seq maximo

```

```

% inicializacao de numero de trajetorias e de semiciclos
npath = 1;           % numero de trajetorias
ncycle = 0;         % numero de semiciclos determinados

% definicao da primeira trajetoria (historia original, reordenada)
nt_path{1} = nt;    % \
t_path{1} = t;     % > trajetoria analisada
S_path{1} = S;     % /

% inicializacao do contador da trajetoria a ser analisada
ipath = 0;

while ipath < npath
    % atualizacao do contador de trajetoria a ser analisada
    ipath = ipath + 1;

    % determinacao do semiciclo e das subtrajetorias decorrentes
    ncycle = ncycle + 1;
    [nt_sc,t_sc,S_sc, ...
     n_np,nt_np,t_np,S_np] = semicycle(t_path{ipath},S_path{ipath},ncycle);

    % atualizacao da tabela de semiciclos
    t_semicycle{ncycle} = t_sc; %#ok<SAGROW>
    S_semicycle{ncycle} = S_sc; %#ok<SAGROW>
    nt_semicycle{ncycle} = nt_sc; %#ok<SAGROW>

    % atualizacao da tabela de trajetorias
    for k = 1:n_np
        nt_path{npath+k} = nt_np{k}; %#ok<SAGROW>
        t_path{npath+k} = t_np{k}; %#ok<SAGROW>
        S_path{npath+k} = S_np{k}; %#ok<SAGROW>
    end

    % atualizacao do numero de trajetorias
    npath = npath + n_np;
end

% -----
figure('Name','Semiciclos no espaco de deformacoes');
for cycle=1:ncycle

```

```

subplot(3,3,cycle);
xlim([-0.003 0.003]); ylim([-0.006 0.006]);
xlabel('\epsilon_{xx}'); ylabel('\gamma_{xy}');
axis square;
box on;
hold on;
plot(S0(:,1),S0(:,2),'LineWidth',1,'Color','r');
plot(S_semicycle{cycle}(:,1),S_semicycle{cycle}(:,2),'--','LineWidth',3);
plot(S_semicycle{cycle}(1,1),S_semicycle{cycle}(1,2),'s');
plot([-0.003 0.003],[0 0],'color','k');
plot([0 0],[-0.006 0.006],'color','k');
end
% -----

% relatorio dos resultados
fprintf('Tabela de semiciclos\n');
fprintf('numero de semiciclos = %d\n\n',ncycle);
for k=1:ncycle
    fprintf(' semiciclo %d:\n',k);
    fprintf('      t      epsxx      epsxy\n');
    disp([t_semicycle{k} S_semicycle{k}]);
end

fprintf('Tabela de trajetorias\n');
fprintf('numero de trajetorias = %d\n\n',ncycle);
for k=1:npath
    fprintf(' trajetoria %d:\n',k);
    fprintf('      t      epsxx      epsxy\n');
    disp([t_path{k} S_path{k}]);
end

% descricao dos resultados no espaco desviador
% base para o espaco desviador de acordo com artigos IJF2009, IJF2011, ...

fprintf('W&B - final do processamento\n\n\n');

```

### A.0.2 Subrotina equivStrain.m

```
function Seq = equivStrain(t,S)
% calculo da historia de deformacao equivalente de Mises
% caso particular: deformacao normal x deformacao cisalhante
% (c) 2011 FA de Paula - GFFM - UnB
% argumento:
%   S = [eps(1) gamma(1);
%         eps(2) gamma(2);
%         ...
%         eps(n) gamma(n)];
v = 0.30;
Seq = 1/(sqrt(2)*(1+v))*sqrt(2*S(:,1).^2 + 3/2 * S(:,2).^2);
end
```

### A.0.3 Subrotina semicycle.m

```
function [nt_sc,t_sc,S_sc,n_np,nt_np,t_np,S_np] = semicycle(t,S,ncycle)
% determinacao do semiciclo e das subtrajetorias decorrentes
% (c) 2011 FA de Paula - GFFM - UnB
% argumentos
%   t (nt x 1) - instantes de tempo associados a historia de deformacao
%   S ( nt x 2) - historia de deformacao
% resultados
%   nt_sc          - num de instantes de tempo assoc ao semiciclo
%   t_sc (nt_sc x 1) - instantes de tempo associados ao semiciclo
%   S_sc (nt_sc x 2) - estados de deformacao associados ao semiciclo
%   n_np          - num de novas subtrajetorias
%   nt_np {n_np}  - num de instantes assoc a cada subtrajetoria
%   t_np {n_p}(nt_np) - instantes de tempo assoc a cada subtrajetoria
%   S_np {n_np}(nt_np x 2) - estados de deform. assoc a cada subtrajetoria
%   ncycle        - identificador do semiciclo

% calculo da historia de deformacao relativa ao primeiro ponto
Srel(:,1) = S(:,1) - S(1,1);
Srel(:,2) = S(:,2) - S(1,2);
```

```

% calculo da deformacao equivalente relativa
Seqrel = equivStrain(t,Srel);

% primeiro ponto      (sempre pertence ao semiciclo a ser construido)
k          = 1;      % contador dos pontos de Seqrel
nsc        = 1;      % contador dos pontos do semiciclo
t_sc(nsc,1) = t(k);  % janela de tempo do semiciclo
S_sc(nsc,:) = S(k,:); % deformacao do semiciclo
Seq_sc(nsc) = Seqrel(k); % deformacao equivalente do semiciclo

% inicializacao do contador de subtrajetorias e das variaveis associadas
newp = 0;
t_np = [];
S_np = [];
nt_np = [];

nt = length(t);
for k = 2:nt
    if Seqrel(k) >= Seq_sc(nsc)
        if Seqrel(k-1) < Seq_sc(nsc)
            % continuacao do semi-ciclo e pto intermediario entre instantes
            % t(k-1) e t(k) => criar novo ponto na historia de deformacoes

            % combinacao convexa das variaveis em t(k-1) e t(k)
            a          = (Seq_sc(nsc)-Seqrel(k-1))/(Seqrel(k)-Seqrel(k-1));
            t_new      = (1-a) * t(k-1)      + a * t(k);
            S_new      = (1-a) * S(k-1,:)    + a * S(k,:);
            Seqrel_new = (1-a) * Seqrel(k-1) + a * Seqrel(k);

            % adicao do novo ponto ao semiciclo
            nsc        = nsc + 1;
            t_sc(nsc,1) = t_new;
            S_sc(nsc,:) = S_new;
            Seq_sc(nsc) = Seqrel_new;

            % ultimo ponto de nova subtrajetoria
            nnp          = nnp + 1;
            t_np{newp}(nnp,1) = t_new; %#ok<AGROW>
            S_np{newp}(nnp,:) = S_new; %#ok<AGROW>
        end
    end
end

```

```

        nt_np{newp}      = nnp; %#ok<AGROW>
    end

    % Seqrel e crescente em k => adicao do ponto ao semiciclo
    nsc      = nsc + 1;
    t_sc(nsc,1) = t(k);
    S_sc(nsc,:) = S(k,:);
    Seq_sc(nsc) = Seqrel(k);

    if k < nt % (ultimo pto nao pode gerar nova subtrajetoria)
        if Seqrel(k+1) < Seq_sc(nsc)
            % Seqrel e decrescente em k
            % => criacao do primeiro ponto de nova subtrajetoria
            newp = newp + 1; % incremento do contador de subtrajetorias
            nnp = 1;      % novo contador de ptos da subtrajetoria
            t_np{newp}(nnp,1) = t(k); %#ok<AGROW>
            S_np{newp}(nnp,:) = S(k,:); %#ok<AGROW>
            nt_np{newp}      = nnp; %#ok<AGROW>
        end
    end
    else % Seqrel e decrescente em k
        % => demais pontos de nova subtrajetoria
        nnp = nnp + 1;
        t_np{newp}(nnp,1) = t(k); %#ok<AGROW>
        S_np{newp}(nnp,:) = S(k,:); %#ok<AGROW>
        nt_np{newp}      = nnp; %#ok<AGROW>
    end
end

% numero de novas subtrajetorias criadas
n_np = newp;

% numero de ptos do semiciclo criado
nt_sc = length(t_sc);

% representacao grafica do semiciclo -----
subplot(3,3,ncycle);
xlim([0 1800]); ylim([0 0.008]);
xlabel('t'); ylabel('\epsilon_{eq}^r');
box on;

```

```
hold on;
plot(t,Seqrel,'r');           % deform equiv relativa
plot(t_sc,Seq_sc,'--','linewidth',3); % Semiciclo calculado
plot(t_sc,Seq_sc,'o');       %
% -----
end
```

## Apêndice B RELAÇÃO ENTRE TENSÃO E DEFORMAÇÃO SOB ESTADO DE TENSÃO DE TRAÇÃO-CISALHAMENTO

A relação tensão-deformação para materiais elásticos isotrópicos lineares é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad (\text{B.1})$$

ou, em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

onde as *constantes de Lamé*  $\lambda$  e  $\mu$  podem ser escritas em função do *módulo de elasticidade*  $E$  e do *coeficiente de Poisson*  $\nu$  como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu (= G) = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (\text{B.3})$$

As relações inversas, descrevendo os parâmetros materiais  $E$  e  $\nu$  em termos das constantes de Lamé são dadas pelas expressões:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (\text{B.4})$$

Para o caso específico de tração-cisalhamento, os componentes de tensão  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são nulos, de modo que a relação tensão-deformação fica reduzida a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y + \lambda \varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Como  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz}, \\ 0 &= \tau_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dessa forma, entende-se que:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Além disso, as condições  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ , permitem escrever:

$$\begin{aligned} 0 = \sigma_y &= \lambda \varepsilon_x + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_y + \lambda \varepsilon_z, \\ 0 = \sigma_z &= \lambda \varepsilon_x + \lambda \varepsilon_y + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

As expressões (B.8) constituem um sistema de equações lineares em  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  com solução:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_x. \quad (\text{B.9})$$

A substituição de (B.9) na primeira relação constitutiva (B.5) fornece:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_x - 2 \frac{\lambda^2}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_x \\ &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \varepsilon_x, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

ou, considerando a relação (B.4) entre  $E$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , obtêm-se simplesmente a relação constitutiva para sollicitações uniaxiais:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (\text{B.11})$$

Portanto, em sollicitações do tipo tração-cisalhamento, o modelo elástico linear fornece simplesmente a relação tensão-deformação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

## Apêndice C

O objetivo aqui é demonstrar a relação  $\dot{\sigma}_x = \dot{\beta}_x$  para fazer o uso da constante  $H_0$  na relação linear  $\dot{\beta}_x = H_0 \dot{\varepsilon}_x^p$ .

A condição de consistência  $\dot{f} = 0$  associada ao processo de deformação plástica permite escrever:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma - \beta)[h] = \frac{\partial}{\partial(\sigma - \beta)} f(\sigma - \beta) \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma}(\sigma - \beta)[h] \right], \quad (\text{C.1})$$

onde, por meio da definição do limite com a perturbação  $a$  em  $\sigma$  na direção arbitrária  $h$ :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(\sigma - \beta)[h] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [(\sigma + ah) - \beta - (\sigma - \beta)] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (ah) = h. \quad (\text{C.2})$$

Assim, o resultado (C.2) é substituído na (C.1),

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma - \beta)[h] = \frac{\partial}{\partial(\sigma - \beta)} f(\sigma - \beta) [h], \quad \forall h, \quad (\text{C.3})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma - \beta) = \frac{\partial}{\partial(\sigma - \beta)} f(\sigma - \beta). \quad (\text{C.4})$$

Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} f(\sigma - \beta)[h] = \frac{\partial}{\partial(\sigma - \beta)} f(\sigma - \beta) \left[ \frac{\partial}{\partial \beta}(\sigma - \beta)[h] \right], \quad (\text{C.5})$$

onde, por meio da definição do limite com a perturbação  $a$  em  $\beta$  na direção arbitrária  $h$ :

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(\sigma - \beta)[h] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [\sigma - (\beta + ah) - (\sigma - \beta)] = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} (-ah) = -h. \quad (\text{C.6})$$

Assim, o resultado (C.6) é substituído na (C.5),

$$\frac{\partial}{\partial \beta} f(\sigma - \beta)[h] = \frac{\partial}{\partial(\sigma - \beta)} f(\sigma - \beta) [-h] = -\frac{\partial}{\partial(\sigma - \beta)} f(\sigma - \beta) [h] \quad \forall h, \quad (\text{C.7})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} f(\sigma - \beta) = -\frac{\partial}{\partial(\sigma - \beta)} f(\sigma - \beta). \quad (\text{C.8})$$

Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma - \beta)[h] = -\frac{\partial}{\partial \beta} f(\sigma - \beta)[h] \quad \forall h. \quad (\text{C.9})$$

E, assim,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} f(\sigma - \beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} f(\sigma - \beta). \quad (\text{C.10})$$

Considerando-se as leis de evolução Eqs. (4.32) e (4.37), pode-se desenvolver a condição de consistência como:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \dot{\beta} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot -H \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbb{P}^{-1} \dot{\varepsilon}^p \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} - \tilde{\xi} H \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbb{P}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Nestas condições, o multiplicador plástico  $\tilde{\xi}$  pode ser isolado na expressão (C.11), fornecendo:

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{H} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbb{P}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \sigma}}. \quad (\text{C.12})$$

Para o modelo de Mises,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  é dada por Eq. (4.31) e conseqüentemente:

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{H} \frac{\mathbb{P}(\sigma - \beta)}{\sqrt{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)}} \cdot \dot{\sigma}. \quad (\text{C.13})$$

Conseqüentemente, a partir de Eq. (4.30),

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \tilde{\xi} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ &= \frac{1}{H} \frac{\mathbb{P}(\sigma - \beta)}{\sqrt{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)}} \cdot \dot{\sigma} \frac{\mathbb{P}(\sigma - \beta)}{\sqrt{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)}} \\ &= \frac{1}{H} \frac{\mathbb{P}(\sigma - \beta) \otimes \mathbb{P}(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)} \dot{\sigma}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como, a partir de Eq. (4.39):

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}^p &= \frac{1}{H} \mathbb{P} \dot{\beta} \\ \frac{1}{H} \mathbb{P} \dot{\beta} &= \frac{1}{H} \frac{\mathbb{P}(\sigma - \beta) \otimes \mathbb{P}(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)} \dot{\sigma} \\ \mathbb{P} \dot{\beta} &= \frac{\mathbb{P}(\sigma - \beta) \otimes \mathbb{P}(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)} \dot{\sigma}.\end{aligned}\tag{C.14}$$

Para o ensaio uniaxial, reescreve-se a Eq. (C.14) em termos de  $\sigma_x$  e  $\beta_x$ . Em primeiro lugar, desenvolve-se o termo  $\mathbb{P}\dot{\beta}$  do lado esquerdo da Equação:

$$\mathbb{P}(\dot{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta}_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \dot{\beta}_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $\sigma - \beta$  pode ser escrita em:

$$\sigma - \beta = \begin{pmatrix} \sigma_x - \beta_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, desenvolve o termo  $\mathbb{P}(\sigma - \beta)$ :

$$\mathbb{P}(\sigma - \beta) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x - \beta_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o denominador da Eq. (C.14) é obtida:

$$(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta) = \begin{pmatrix} \sigma_x - \beta_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x)^2.$$

O numerador da Eq. (C.14), inclusive o termo  $\dot{\sigma}$ , é desenvolvido utilizando uma propriedade do produto tensorial de dois vetores ( $a \otimes b$ ) na direção de um vetor ( $c$ ) é equivalente ao produto escalar ( $b \cdot c$ ) na direção do vetor ( $a$ ):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sigma - \beta) \otimes \mathbb{P}(\sigma - \beta) \dot{\sigma} &= \left[ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \dot{\sigma}_x \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Finalmente, desenvolve-se o lado direito da Eq. (C.14),

$$\frac{\mathbb{P}(\sigma - \beta) \otimes \mathbb{P}(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^T \mathbb{P}(\sigma - \beta)} \dot{\sigma} = \frac{\frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \dot{\sigma}_x}{\frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x)^2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\sigma_x - \beta_x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \dot{\sigma}_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a partir da Eq. (C.14), demonstra-se que, em termos de  $\sigma_x$  e  $\beta_x$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \dot{\beta}_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \dot{\sigma}_x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\beta}_x = \dot{\sigma}_x. \quad (\text{C.15})$$

Isso permite utilizar o parâmetro  $H_0$  como constante na relação linear entre  $\dot{\beta}_x$  e  $\dot{\varepsilon}_x^p$  uma vez que o parâmetro havia sido identificado para a relação linear entre  $\dot{\sigma}_x$  e  $\dot{\varepsilon}_x^p$  conforme a Fig. 4.3.

## Apêndice D LISTAGEM DO ALGORITMO DE MAPEAMENTO DE RETORNO

A listagem do algoritmo de Mapeamento de Retorno é apresentada em linguagem MATLAB.

### D.0.4 Rotina `plastic_step.m`

```
function [epsp1, b1, sig1] = plastic_step(epsp,b,eps1,E,nu,H,sigy)
% passo elasto-plastico para tracao/cisalhamento c/ encruamento cinematico
% (c) 2011 FA de Paula - GFFM - Universidade de Brasilia
% versao de: 08 de setembro de 2011
%
% argumentos:
% - epsp      deformacao plastica no instante t(n)
% - b         origem do dominio elastico no instante t(n)
% - eps1      deformacao total no instante t(n+1)
% - E         modulo de elasticidade
% - nu        coeficiente de Poisson
% - H         modulo de encruamento cinematico
% - sigy      tensao de escoamento
%
% resultados:
% - epsp1     deformacao plastica no instante t(n+1)
% - b1        origem do dominio elastico no instante t(n+1)
% - sig1      tensao no instante t(n+1)
%
G = E/(2*(1+nu)); % modulo de elasticidade ao cisalhamento
C = [E 0; 0 G]; % matriz de rigidez elastica (p/ tracao cisalhamento)
P = [2/3 0; 0 2]; % operador projecao
CP = C*P; % operador produto C*P
I = eye(2,2); % operador identidade em R2
```

```

%
% 1) estava tentativa:
%
epsp1_tr = epsp;           % deformacao plastica tentativa
b1_tr    = b;              % origem tentativa do dominio elastico
sig1_tr  = C*(eps1 - epsp1_tr); % estado tentativo de tensao
eta1_tr  = sig1_tr - b1_tr;
f1_tr    = sqrt(eta1_tr'*(P*eta1_tr)) - sqrt(2/3)*sigy;

%
% 2) verificacao se passo eh elastico ou plastico:
%
if f1_tr <= 0.0
% 2.1) passo eh elastico:
    epsp1 = epsp1_tr;      % deformacao plastica no instante t(n+1)
    b1    = b1_tr;         % origem do dominio elastico no inst t(n+1)
    sig1  = sig1_tr;       % estado de tensao no instante t(n+1)
else
% 2.2) passo eh plastico:

% calculo de Dgamma (via iteracoes de Newton)
alfa = 1e-8; % perturbacao sobre Dgamma p/ calculo aproximado da
            % derivada de f
Dgamma = 0; % valor inicializado para Dgamma
eta_tr = sig1_tr - b1_tr;
% eta eh solucao do sistema linear:
% eta = (I + Dgamma*(CP + (2/3)*H*I))\eta_tr;
% Como Dgamma foi inicializado com o valor zero, eta = eta_tr
eta = eta_tr;

f = sqrt(eta'*P*eta) - sqrt(2/3)*sigy;
k = 0; % contador das iteracoes de Newton

while (abs(f) > 1e-6) && (k < 20)
    % contador de iteracoes
    k = k+1;

    % calculo aproximado da derivada de f por diferencas finitas
    eta_ = (I + (Dgamma+alfa)*(CP + (2/3)*H*I))\eta_tr;

```

```

f_ = sqrt(eta_'*P*eta_) - sqrt(2/3)*sigy;
Df = (f_ - f)/alfa;

% iteracao de Newton
Dgamma = Dgamma - f/Df;

% novo valor de eta
eta = (I + Dgamma*(CP + (2/3)*H*I))\eta_tr;

% novo valor de f
f = sqrt(eta'*P*eta) - sqrt(2/3)*sigy;

fprintf('    Newton: iter %2d  -> f = %10.3e\n',k,f);
end

% atualizacao das variaveis de estado no instante t(n+1)
epsp1 = epsp + Dgamma*P*eta;
b1 = b + Dgamma*(2/3)*H*eta;
sig1 = C*(eps1 - epsp1);
end

```